بسمه تعالی

**جزوه**

استاتیک

**دانشگاه**

تهران

**استاد**

دکتر عطایی

استاتیک «بسمه تعالی» سید محمد جعفر سبحان ص ۱

«دکتر عطایی»

رئوس مطالب استاتیک:

- یادآوری جبر بردارها

- سیستم نیروها و معادلسازی آنها (نیرو و اثر گشتاوری آن حول یک نقطه و یک محور، زوج نیرو (کوپل)، ساده سازی سیستم بارگذاری کلی به یک نیرو و یک لنگر در یک نقطه، رنچ (پیچه): ساده‌ترین معادل سیستم بارگذاری)

- تعادل در دو و سه بعد (دیاگرام آزاد جسم (مهم)، قیود در دو و سه بعد و عکس العمل آنها)

- تعادل در سازه‌ها (خرپاها، قاب‌ها، ماشین‌ها)

«امتحان میان ترم»

- نیروی گسترده (مراکز هندسی خطوط، سطوح و احجام (مهم)، معادلسازی نیروی گسترده)

- تیرها (اثرات خارجی و داخلی)

- کابل‌ها تحت بار نقطه‌ای و گسترده

- استاتیک سیالات* (مکانیک سیالات) (در صورت وجود وقت اضافه)

- گشتاور دوم سطوح مسطح، لنگر قطبی سطح، شعاع ژیراسیون (چرخش) سطح، حاصلضرب اینرسی، محورهای اصلی هندسی سطوح مسطح)

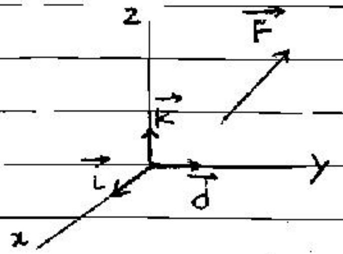
- اصطکاک خشک (اصطکاک در ماشین‌ها، پیچ‌ها، گوه‌ها، اصطکاک دیسکی و اصطکاک در تسمه‌ها)

«امتحان پایان ترم»

مرجع اصلی: استاتیک مریام

ارزیابی:
- کوییز ← ۱۵٪
- میان ترم ← ۴۰٪
- پایان ترم ← ۴۵٪

جبر بردارها :



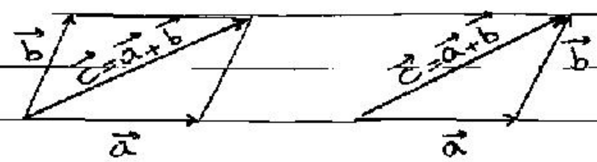

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$(F_x , F_y , F_z)$ مؤلفه های بردار $\vec{F}$

جمع بردارها :

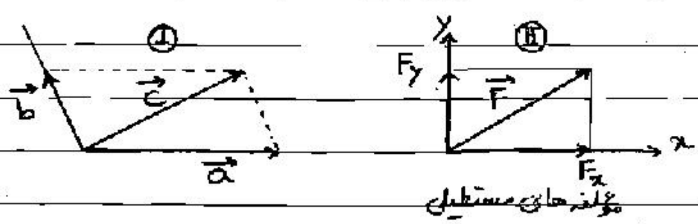
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad ; \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$



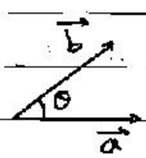

$\left\{ \begin{array}{l} \text{قانون سینوس ها} \\ \text{قانون کسینوس ها} \end{array} \right.$

تجزیه بردار به دو امتداد :




* در حالت Ⓘ نباید از تصویر کردن استفاده کرد.

ضرب داخلی :



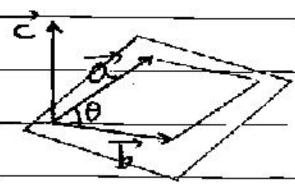

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

اگر $\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{array} \right. \Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

ضرب خارجی :



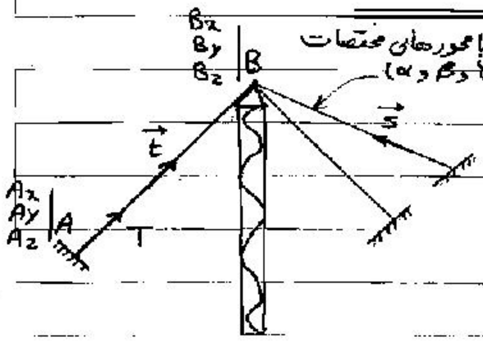

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$c = |ab\sin\theta|$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

ضرب سه گانه‌ی عددی :

$$\text{عدد} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$




نکته :

$$\underset{\text{یکه}}{\vec{t}} = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$$

$$\vec{T} = T\vec{t} = T_x\vec{i} + T_y\vec{j} + T_z\vec{k}$$

$$\underset{\text{یکه}}{\vec{s}} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

سیستم واحدها و دیمانسیون کمیت ها :

* برای گزارش اعداد باید توجه کرد که در صورت مسأله، اعداد تا چند رقم اعشار گزارش شده اند

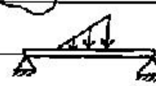
$F = 143245\ N = 143200\ N$ ⟵ نگهداشتن 4 رقم

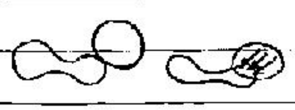
$F = 243245\ N = 243000\ N$ ⟵ نگهداشتن 3 رقم

* برای گزارش اعداد تا n رقم اعشار، در خلال حل مسأله مقادیر را تا n+1 رقم اعشار بدست آوریم و در نهایت عدد بدست آمده را با n رقم اعشار گزارش کنیم.

مجموعه های نیرو

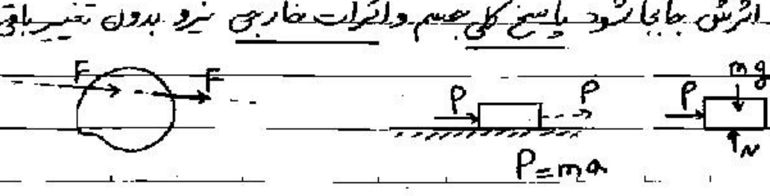
نیرو : منفرد (نقطه‌ای) ⇐ 

گسترده ⇐  نیروی وزن

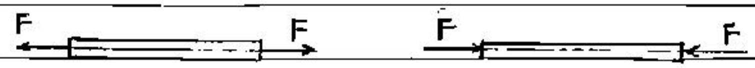
نیرو : سطحی : در محل تماس اجسام ⇐ 

حجمی (میدانی) ⇐  g (نیروی وزن)

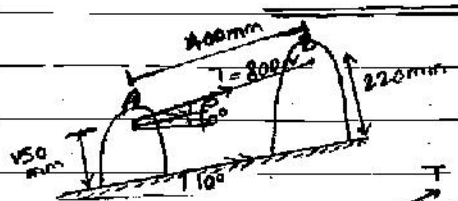
* نیرو بردار لغزان است. اگر نیرو را در راستای نقطه اثر نیرو جابجا کنیم، تأثیری نخواهد داشت (به عبارت دیگر اگر نیرو در راستای خط اثرش جابجا شود پاسخ کلی جسم و اثرات خارجی نیرو بدون تغییر باقی می‌ماند)



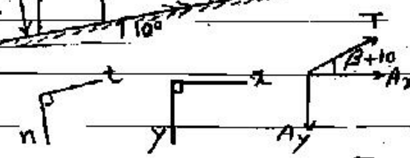
در بررسی اثرات داخلی مثل تغییر شکل ها، محل اثر نیرو مهم است و نمی توان بردار لغزان در نظر گرفته شود.




مثال: اگر کشش کابل $800N$ باشد مؤلفه های $xy$ و $nt$ کشش وارده بر A ؟

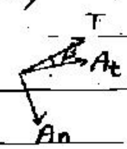



$$\tan\beta = \frac{220-150}{400} \Rightarrow \beta = 9.92^\circ$$




$$A_x = T\cos(\beta+10) = 800\cos(\quad+10) = \ldots N$$

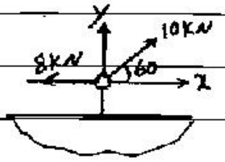
$$A_y = -T\sin(\beta+10) = -800\sin(\quad+10) = \ldots N$$

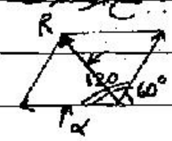



$$A_t = T\cos\beta$$

$$A_n = -T\sin\beta$$

مثال: برآیند R ؟ الف) با روش متوازی الاضلاع ب) با جمع مؤلفه ها




الف) $R = \sqrt{10^2 + 8^2 + 2(10)(8)\cos 120} = 9.17\,kN$

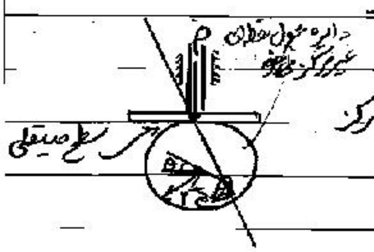
$$\cos\alpha = \frac{8^2 + R^2 - 10^2}{2(8)R}$$

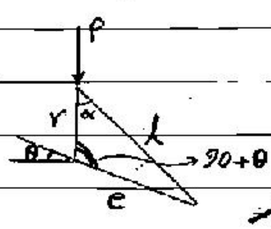
ب) $R_x = 10\cos 60^\circ - 8 = -3\,kN$ ; $R_y = 10\sin 60^\circ = 5\sqrt{3}\,kN$

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} = -3\vec{i} + 5\sqrt{3}\vec{j}\ kN = R\angle\theta \rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{9+75} \\ tg\theta = \frac{5\sqrt{3}}{-3} \end{cases}$$

مثال: $P = 1600N$ , $\theta = 30^\circ$ , $r = 100mm$ , $e = 50mm$

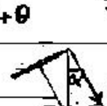
مؤلفه ی مستطیلی P در راستای خط واصل نقطه تماس با بادامک و مرکز دوران بادامک؟



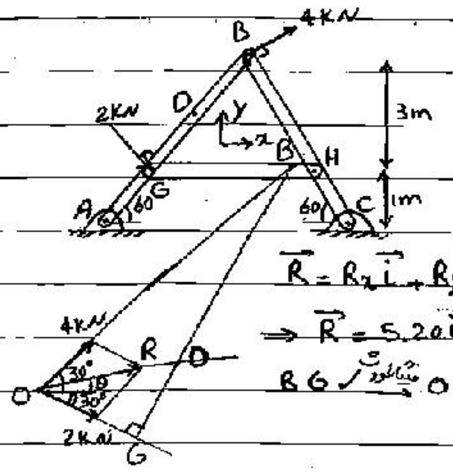




$$l^2 = r^2 + e^2 - 2re\cos(90+\theta) \Rightarrow l$$

$$\frac{l}{\sin(90+\theta)} = \frac{e}{\sin\alpha} \rightarrow \alpha = \ldots$$




$$F' = P\cos\alpha = 1512N$$



مثال: دو نیرو را به یک نیرو تبدیل کنید

اگر D محل تقاطع خط اثر برآیند با AB باشد $DG=?$

$$\vec R = R_x\vec i + R_y\vec j = (2\cos30 + 4\cos30)\vec i + (-2\sin30 + 4\sin30)\vec j$$

$$\Rightarrow \vec R = 5.20\vec i + \vec j\ KN = R\angle\theta = 5.29\angle 10.89^\circ\ KN$$

$BG \perp$ $\xrightarrow{\text{تشابه}}$ $OG$ $\rightarrow DG = 2.89m$

---

گشتاور نیرو حول یک نقطه:

* هر نقطه روی خط اثر می‌تواند انتهای بردار $\vec r$ در نظر گرفته شود.

$$\vec M_o = \vec r\times\vec F$$

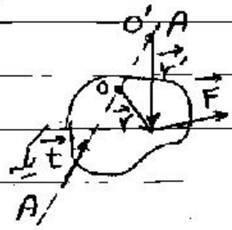
$$\vec r'\times\vec F = (\vec r+\Delta\vec r)\times\vec F = \vec r\times\vec F + \underbrace{\Delta\vec r\times\vec F}_{\vec 0} = \vec r\times\vec F = \vec M_o$$

* اگر نیرو از نقطه‌ای عبور کند، گشتاور حول آن نقطه صفر خواهد بود.

اگر گشتاورها حول دو نقطه مختلف:

$$\vec M_{o'} = \vec r''\times\vec F = (\vec{OO'}+\vec r)\times\vec F = \vec{OO'}\times\vec F + \vec r\times\vec F = \vec{OO'}\times\vec F + \vec M_o$$

---



گشتاور یک نیرو حول یک محور:   o نقطه‌ای دلخواه

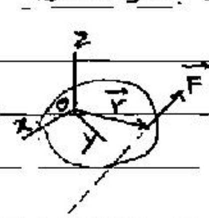
$\vec t$ یکه دلخواه   $M_{AA} = \vec t\cdot(\vec r\times\vec F) = \vec t\cdot(\vec r'\times\vec F)$

اگر $M_{AA}>0$، حول AA با استفاده از قانون دست راست در جهت t خواهد چرخید. اگر $M_{AA}<0$، در خلاف جهت t خواهد چرخید.

* اگر نیرو و محور هم صفحه باشند، این گشتاور صفر است

تنها باید مؤلفه عمودی نیرو را در فاصله دو خط متنافر ضرب کرد که برابر است با (گشتاور).

---

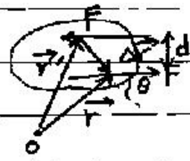


نکته:

$$\vec M_O = \underline{M_{ox}}\vec i + M_{oy}\vec j + M_{oz}\vec k$$

گشتاور $\vec F$ حول محور x گذرنده از O

---



زوج نیرو (کوپل): دو نیروی قرینه غیر هم راستا

$$\vec M_o = \vec r\times\vec F + \vec r'\times(-\vec F) = (\vec r-\vec r')\times\vec F = \underbrace{\Delta\vec r\times\vec F}_{\text{عمود بر صفحه‌ی دو نیرو}}$$

$$M_o = \overbrace{\Delta r\,F\sin\theta}^{d} = Fd$$

(نقطه O اختیاری)

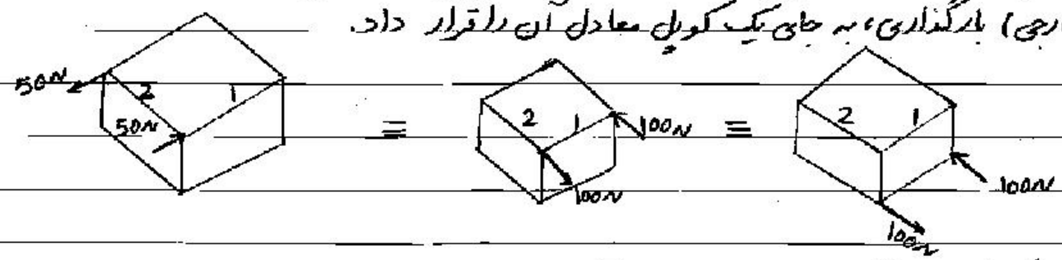
* جهت گشتاور نیز با جهت دو نیرو مشخص می‌شود.

* اثر گشتاور یک کوپل هیچ وابستگی به نقطه گشتاورگیری ندارد.

* زوج نیرو معادل یک اثر گشتاوری خالص است.

* دو زوج نیرو را معادل گوییم اگر بردار گشتاور آنها یکی باشد در این صورت می توان در بررسی اثر کلی (خارجی) بارگذاری، به جای یک کوپل معادل آن را قرار داد.

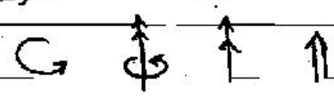
مثال



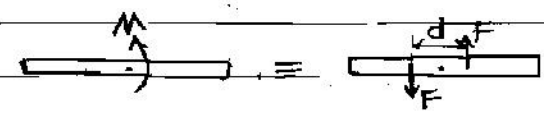

* گشتاور یک بردار آزاد است. می توان آن را به موازات خودش به نقاط مختلف جسم اعمال نمود بدون اینکه پاسخ کلی جسم تغییر کند.

(اثر داخلی گشتاور به محل گشتاور بستگی دارد)

علائم گشتاور :



*

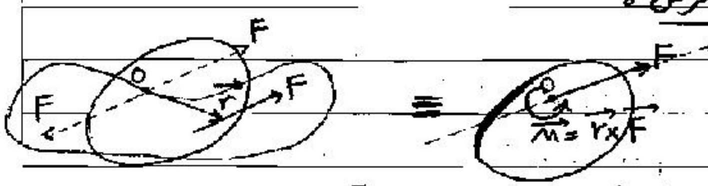


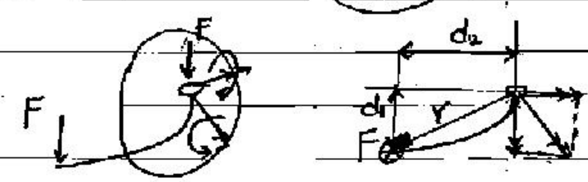

$$\left.\begin{matrix} M = Fd \\ d \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow F \to \infty$$

معادل نیرو در یک نقطه غیر واقع بر خط اثرش :

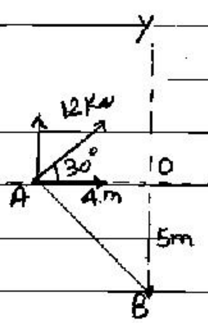
این معادل برابر است با :

گشتاور آن نیرو حول آن نقطه + همان نیرو

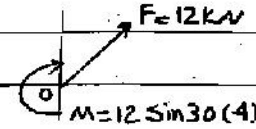



مثال : مجموعه نیرو کوپل ؟ الف) در O ب) در B

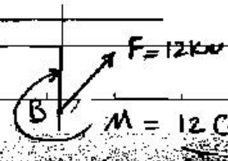



الف) معادل در O :



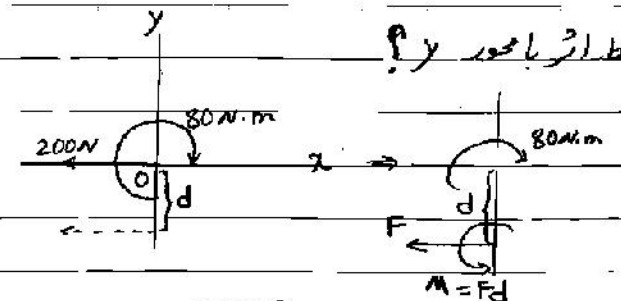

$M = 12 \sin 30 (4) = 24 \, kN.m$

ب) معادل در B :




$M = 12 \cos 30 (5) + 12 \sin 30 (4) = \ldots \, kN$

مثال: نیروی یگانی معادل ؟ تقاطع خط اثر با محور y ؟



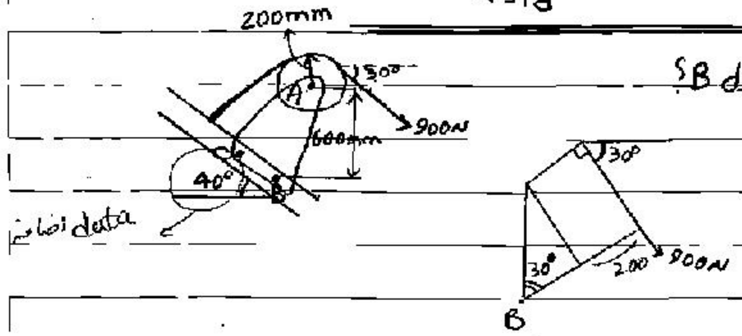

جمع جبری دو گشتاور

$Fd - 80 = 0 \rightarrow 200d - 80 = 0$

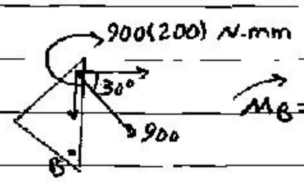
$\Rightarrow d = 0.4\,m$

مثال: گشتاور $M_B$ نیروی 900N حول B ؟

روش اول:




روش دوم:

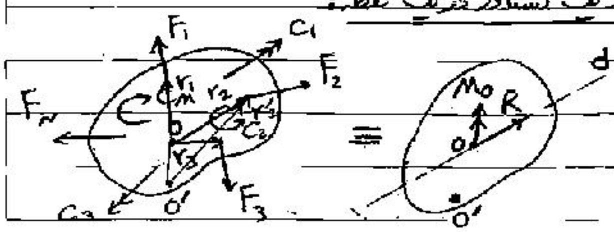



$\overset{\curvearrowright}{M_B} = 900(200) + 900\cos 30(600) = 648\,N.m$

CW

معادل‌سازی یک مجموعه بارگذاری با یک نیرو و یک گشتاور در یک نقطه:

معادل در $O$ = ؟




$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} F_i$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{M} \vec{C}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

* معادل در تمامی نقاط روی خط d، همان معادل در نقطه O است.

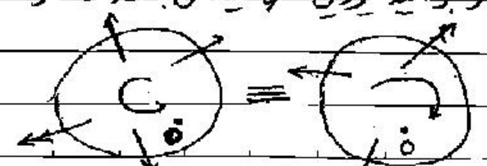
معادل در $O'$ = ؟

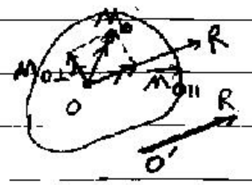
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \quad , \quad \vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{M} \vec{C}_i + \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\vec{r}'_i}_{\vec{O'O} + \vec{r}_i} \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \underbrace{\vec{O'O} \times \vec{R}}$$

دو سیستم بارگذاری را از نظر استاتیک معادل گوییم اگر برآیند نیروی آنها یکسان باشد و اثر گشتاوری آنها حول یک (هر نقطه دلخواه) یکی باشد.

(هر سیستم را می‌توان به جای معادل آن قرار داد.)



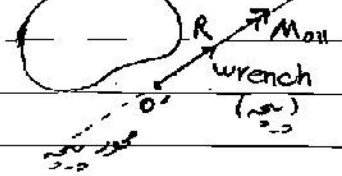



$$\vec{t} = \frac{\vec{R}}{R} \quad \text{یک}$$

$$\vec{M}_{o\parallel} = (\vec{M}_o \cdot \vec{t})\,\vec{t}$$

$$\vec{M}_{o\perp} = \vec{M}_o - \vec{M}_{o\parallel}$$

$$\vec{M}_{o\perp} = \vec{OO'} \times \vec{R} \longrightarrow O' \checkmark$$




wrench: یک نیرو و یک گشتاور در راستای آن $\Leftarrow$ ساده ترین معادل یک مجموعه $\Longleftarrow$

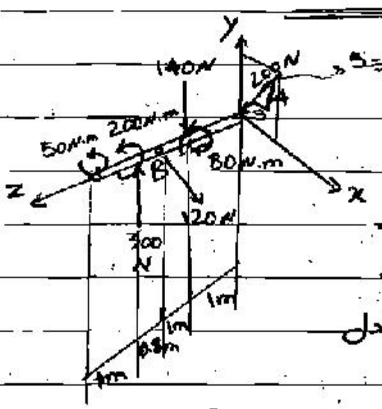
* با حل دستگاه سه معادله سه مجهولی فوق، یک خط بدست می آید که نشان دهنده‌ی راستای $O'$ است (زیرا این معادل در تمامی نقاط روی محور پیچه یکسان است)

* در مسائل صفحه‌ای می‌توان سیستم را به یک تک نیرو ساده کرد. (حالات خاص: 1) $R=0$ ← تنها یک گشتاور 2) تنها $M_{o\perp}$ وجود داشته باشد ← معادل یک تک نیرو)

* محور پیچه در تمامی حالات معادلسازی حول هر نقطه‌ای یکسان است. (؟؟؟)

---

مثال: برآیند این مجموعه بارگذاری؟




$$\vec{R} = 300\vec{j} + 120\vec{i} - 140\vec{j} + (-120\vec{i} - 160\vec{j}) \Rightarrow \vec{R} = \vec{0}$$

$$\vec{M} = -80\vec{i} + 50\vec{j} + 200\vec{K} + \Sigma\, \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

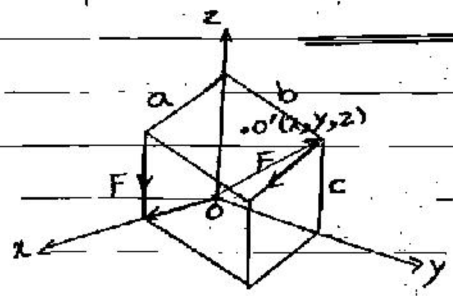
$$\longrightarrow \vec{M} = -80\vec{i} + 50\vec{j} + 200\vec{K} + (140)(1)\vec{i} + (120)(2)\vec{j} - (300)(2.8)\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = -780\vec{i} + 290\vec{j} + 200\vec{K} \quad N.m$$

* اگر معادل را در هر نقطه‌ی دیگری مانند B حساب کنیم، باز هم همین معادل بدست خواهد آمد.

---

مثال: پیچه‌ی معادل =؟




$$\vec{R} = F\vec{i} - F\vec{K} = F(\vec{i} - \vec{K})$$

$$\vec{M}_o = (b\vec{j} + c\vec{K}) \times F\vec{i} + a\vec{i} \times (-F\vec{K})$$

$$\vec{M}_o = (cF + aF)\vec{j} - bF\vec{K}$$

$$\vec{t} = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{K})$$

$$\vec{M}_{o\parallel} = (\vec{M}_o \cdot \vec{t})\,t = \frac{1}{2} bF(\vec{i} - \vec{K})$$

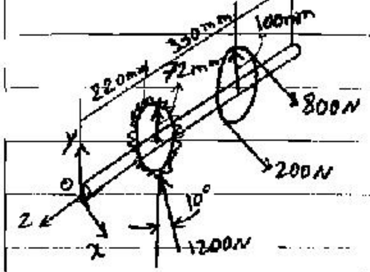
$$(\vec{M}_{o\perp} \cdot \vec{R} = 0) \Leftarrow \vec{M}_{o\perp} = \vec{M}_o - \vec{M}_{o\parallel} = -\frac{1}{2} bF\vec{i} + (cF + aF)\vec{j} - \frac{1}{2} bF\vec{K}$$

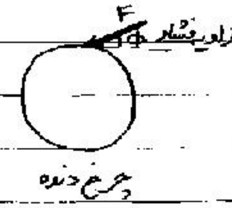
سید محمد جعفر سبحانی

$$\vec{M}_{O\perp} = \vec{OO'} \times \vec{R} \Rightarrow -\frac{1}{2}bF\vec{i} + (cF+aF)\vec{j} - \frac{1}{2}bF\vec{K} = (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{K})\times F(\vec{i}-\vec{K})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}bF = -yF \Rightarrow y = \frac{1}{2}b \\ cF+aF = zF+xF \Rightarrow z+x = a+c \\ -\frac{1}{2}bF = -yF \Rightarrow y = \frac{1}{2}b \end{cases} \Rightarrow \text{محور پیچ} : \begin{cases} y = \frac{1}{2}b \\ x+z = a+c \end{cases}$$

مثال: معادل در $O$ =؟

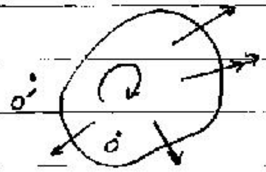



$$\vec{R} = 1000\vec{i} - 1200\sin 10^\circ \vec{i} + 1200\cos 10^\circ \vec{j} \quad N$$

$$\vec{M}_O = (-550\vec{K} + 100\vec{j}) \times 800\vec{i} + (-550\vec{K} - 100\vec{j}) \times 200\vec{i}$$
$$+ (-220\vec{K} - 72\vec{j}) \times (-1200\sin 10^\circ \vec{i} + 1200\cos 10^\circ \vec{j}) \quad N.mm$$

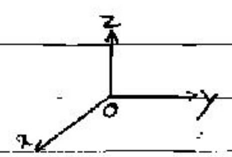
فصل سوم: درجات آزادی معادل با تعداد مجهولات برای مشخص کردن حالت سیستم
تعادل اجسام: جسم صلب ۶ پارامتر نیاز دارد




شرط لازم و کافی برای تعادل اجسام $\Rightarrow \begin{cases} \Sigma \vec{F} = \vec{0} \\ \Sigma \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases}$ در تعادل باید درجات آزادی داشته باشیم (درجه آزادی صفر)

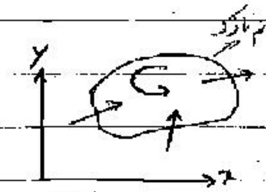
($O$ نقطه دلخواه)

$$\Sigma \vec{M}_{O'} = \Sigma \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \Sigma \vec{F} = \vec{0}$$




$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Sigma M_{Ox} = 0 \\ \Sigma M_{Oy} = 0 \\ \Sigma M_{Oz} = 0 \end{cases}$$

تعادل در دو بعد: (مسائل صفحه‌ای) سه درجه آزادی




نمودار جسم آزاد
Free Body Diagram (FBO)

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \underbrace{\Sigma M_O = 0}_{\Sigma M_{Oz}} \end{cases}$$

سیستم معادلات
خود به خودی صفر

برای بررسی تعادل:

۱- "جسم" را مشخص می‌کنیم (جسم هر بخش از سیستم یا کل آن است که تعادل آن مورد نظر است و با بررسی آن به مجهولات مسأله می‌رسیم)

۲- با تعریف جسم، "محیط" نیز مشخص می‌شود (محیط = هر چیزی غیر از جسم)

* 3. جسم را بصورت شماتیک و با خطوط ساده ترسیم کرده و اثر محیط بر روی آن را در محل‌های جدایش و بطور مناسب (نیروی منفرد یا گسترده یا لنگر) نشان می‌دهیم مثل این که محیط وجود دارد و فقط نامرئی است.

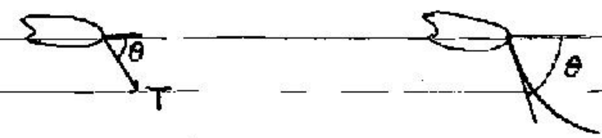
4. معادلات تعادل را برای جسم نوشته و از حل آن به نیروها و ابعاد مجهول می‌رسیم (معمولاً نیروهای قیدی و تکیه‌گاهی)

**قیدها و عکس‌العمل آنها در مسائل دوبعدی:**

تعداد مجهولات

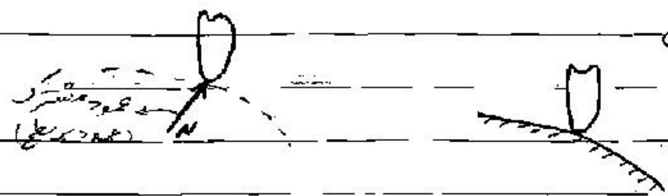
1) اتصال کابلی

1



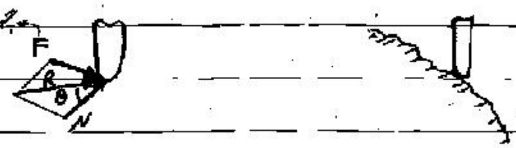

2) تماس با سطح صیقلی

1



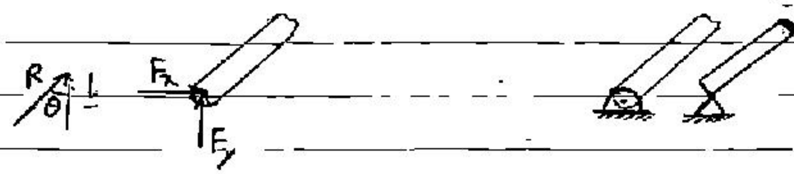

3) تماس با سطح زبر

2



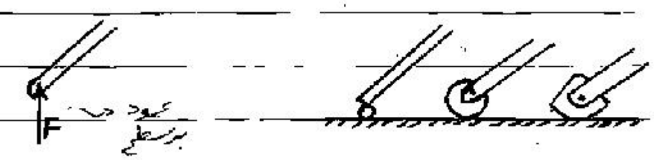

4) اتصال لولایی (پین دار)

2



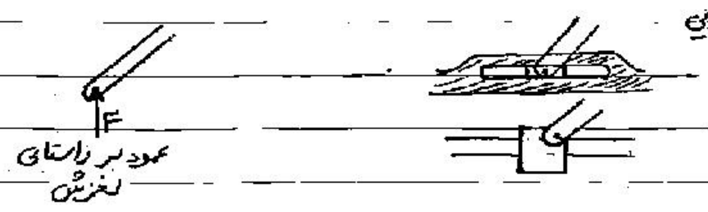

5) تکیه‌گاه غلتکی

1




6) اتصال لغزنده یا کشویی

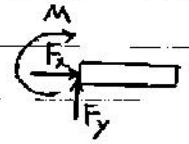
1



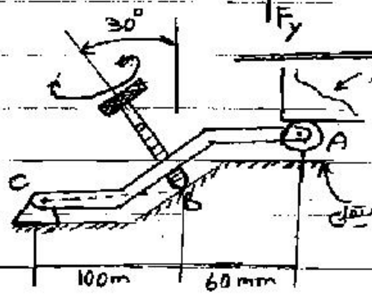
۷) اتصال درگیر (جوش شده)

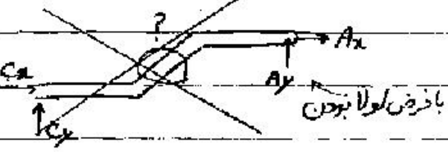
جلوگیری از حرکت خطی (نیرو) — جلوگیری از حرکت دورانی (گشتاور) — درجه‌ی آزادی را نمی‌دارد

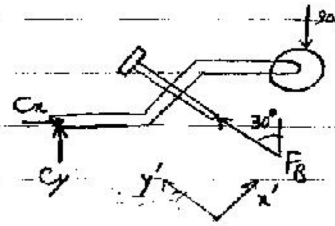
تعداد مجهولات
3




مثال: عکس العمل پین C ؟ (وزن AC ناچیز)




روش اول:

$$\begin{cases}\Sigma F_{x'}=0 \\ \Sigma M_B=0\end{cases} \rightarrow F_B \text{ بدست می‌آید}$$

روش دوم:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow C_x - F_B \sin 30^\circ = 0 \rightarrow C_x = 831N$$

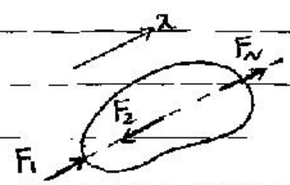
$$\Sigma F_y=0 \rightarrow C_y + F_B \cos 30^\circ - 900 = 0 \rightarrow C_y = -540N$$

$\rightarrow R_C = 991N$

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \Sigma M_C=0 \rightarrow F_B \cos 30^\circ (100) - 900(160) = 0 \rightarrow F_B = 1663N$$

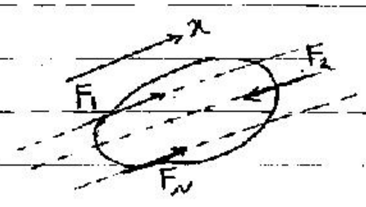
حالت‌های خاص تعادل:

۱) نیروها هم امتداد باشند:



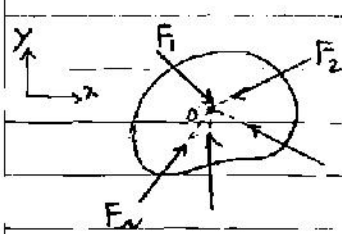

$\Sigma F_x = 0$

۲) نیروها موازی باشند:




$$\begin{cases}\Sigma F_x=0 \\ \Sigma M_o=0\end{cases}$$

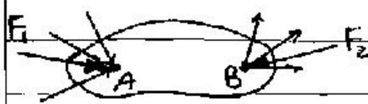
۳) نیروها همرس باشند: (نیروها در صفحه x-y هستند)




$$\begin{cases}\Sigma F_x=0 \\ \Sigma F_y=0\end{cases}$$

اجسام خاص:

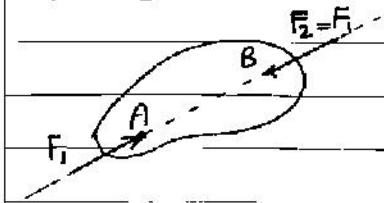
۱) عضو دو نیرویی: (فقط در دو نقطه تبادل نیرو با محیط وجود دارد.)




$\sum \vec{F} = \vec{0}$ $F_1$ و $F_2$ قرینه

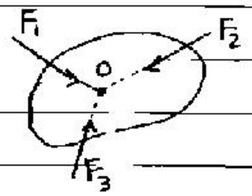
$\sum \vec{M}_o = \vec{0} \longrightarrow$ دو نیرو هم امتداد

شرط لازم و کافی برای تعادل آن است که این دو نیرو قرینه بوده و در راستای خط واصل A و B باشند.




* تشخیص اعضای دو نیرویی در ساده شدن تحلیل مسائل بسیار مفید است.

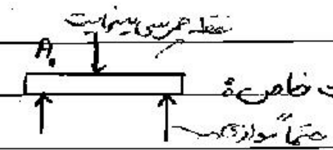
2) عضو سه نیرویی:



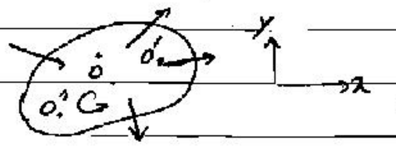

شرط لازم: { مؤلفه قائم - نیروها باید هم صفحه باشند / گشتاور - نیروها باید همرس باشند }

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

حالت خاص:

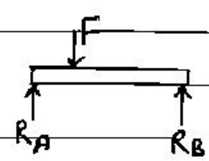



3) مسائل خاص در صفحه:




$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_o = 0 \end{cases}$$

* در مسائل صفحه‌ای حداکثر می‌توان ۳ معادله‌ی مستقل نوشت.

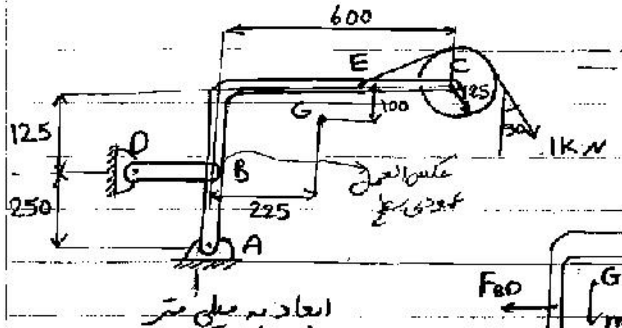



$\sum M_A = 0 \longrightarrow R_B$ ✓

$\sum M_B = 0 \longrightarrow R_A$ ✓

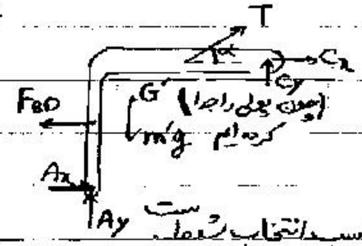
سید محمد جعفر سبحانی

مثال: $m_{ABC} = 30\,kg$ ، G مرکز جرم / مجهول: واکنش پین A؟




BD دو نیرویی

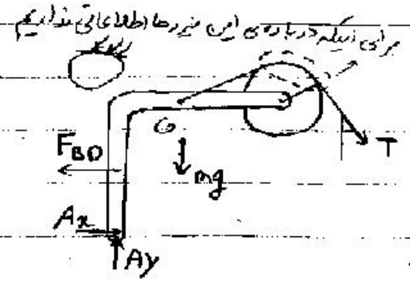
(I




G′: مرکز جرم ABC

m′: جرم ABC

6 مجهول و 3 معادله ⇐ جسم نامناسب انتخاب شده است




II) 3 مجهول جسم مناسب

$$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow -F_{BD} + A_x + \overset{1KN}{T}\sin 30^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow A_y - 30(9.81)\times 10^{-3} - T\cos 30^\circ = 0 \longrightarrow A_y =$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0 \longrightarrow \overset{1KN}{T}(125) - 30(9.81)\times 10^{-3}(600-225)$$

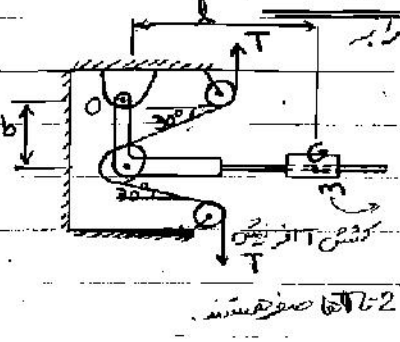
$$+ F_{BD}(125) + A_y(600) - A_x(375) = 0$$

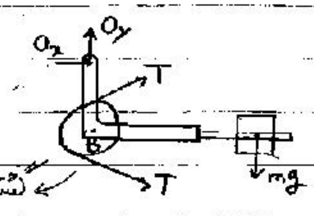
$$\Longrightarrow \begin{cases} A_x = \quad KN \\ A_y = \quad KN \end{cases} \longrightarrow R_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \quad KN$$

مثال: $l = ?$ ، $R_O = ?$ (جرم بازو و قرقره ناچیز)

اصطکاک ناچیز و جرم قرقره ناچیز و سیستم ایستا است ← کشش دو طرف قرقره برابر

(G) مرکز جرم




$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow O_x + 2T\cos 30^\circ = 0$$

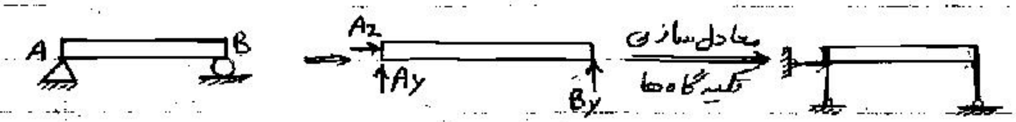
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow O_y - mg = 0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -O_x b - mg\, l = 0 \Rightarrow l = -\frac{O_x b}{mg} = \frac{bT\sqrt{3}}{mg}$$

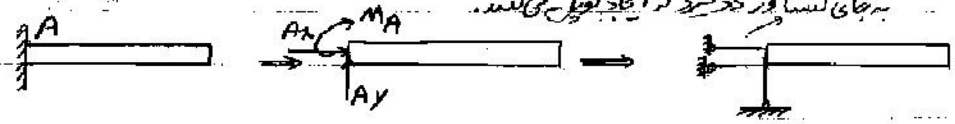
$$R_O = \sqrt{O_x^2 + O_y^2} = \sqrt{(mg)^2 + 3T^2}$$

* برابری تعداد معادلات و مجهولات شرط لازم برای تعادل است.

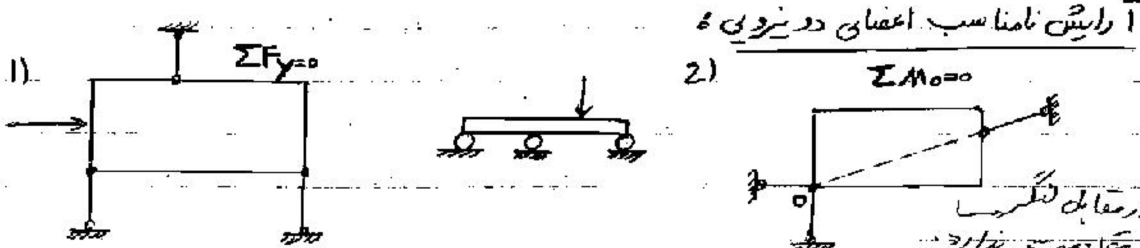
کفایت قیود و معین بودن استاتیکی مسأله:

1) 


به جای گیردار دو نیرو که ایجاد کوپل می کنند.

2) 

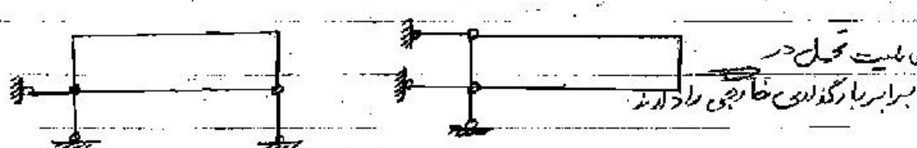

آرایش نامناسب اعضای دو نیرویی:




امتداد اعضای دو نیرویی از یک نقطه عبور می کند. — نیروهای تکیه گاهی موازی باشند

(چون یکی از معادلات خود به خود صادق است، پس آرایش نامناسب است)

* هر آرایش دیگر سه عضو دو نیرویی قید مناسب و کافی در نظر گرفته می شود.

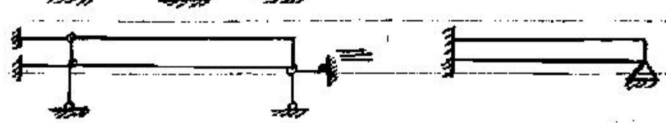


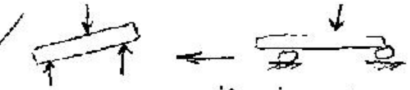

« قیود کافی »

در این حالت می گوییم سیستم از نظر استاتیکی معین است. یعنی معادلات تعادل استاتیکی برای بدست آوردن واکنش های تکیه گاهی است.

هر قید اضافی دیگر مسأله را "استاتیکی نامعین" می کند.

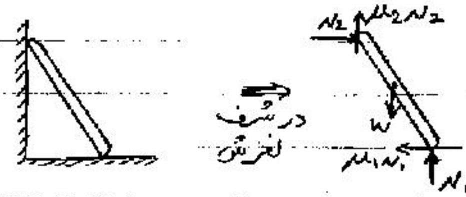
یک درجه نامعین 

دو درجه نامعین 

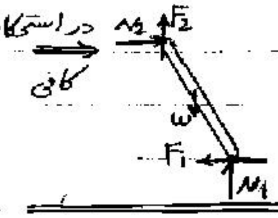




سید محمد جعفر سبحانی



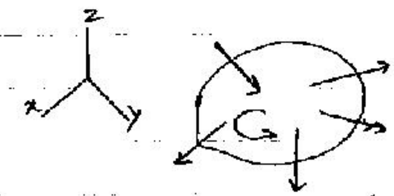

← مسأله قابل حل.




← مسأله قابل حل نیست (3 معادله، 4 مجهول)

---

تعادل در سه بعد:




$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_O = \vec{0}$$

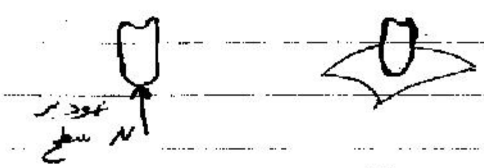
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum M_{Ox} = 0 \\ \sum M_{Oy} = 0 \\ \sum M_{Oz} = 0 \end{cases}$$

---

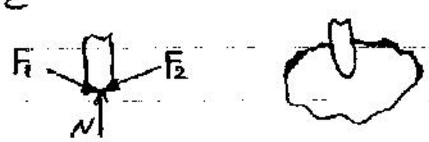
واکنش اتصالات در سه بعد:

مجهولات

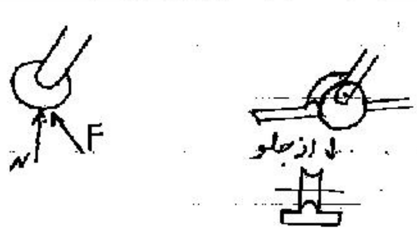
۱) تماس با سطح صیقلی — 1



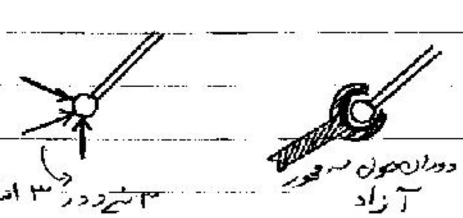

۲) تماس با سطح زبر — 3




۳) تکیه‌گاه غلتکی با قید حرکت جانبی — 2

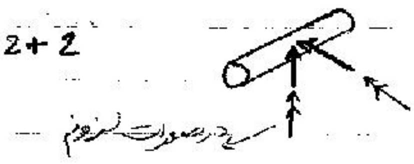


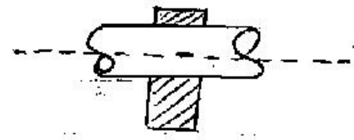

۴) مفصل کشکولی (کاسه ساچمه) (گوی و کاسه) — 3



۵) یاتاقان ساده — مجهولات

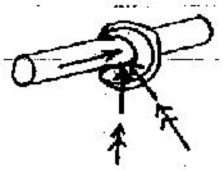
2+2

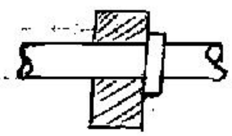


۶) یاتاقان با قید حرکت طولی (محوری) - کف گرد :

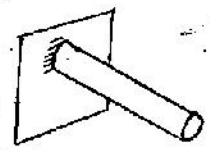
3+2





۷) اتصال درگیر (جوش شده)

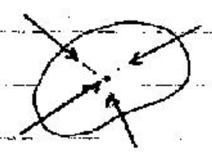
6



---

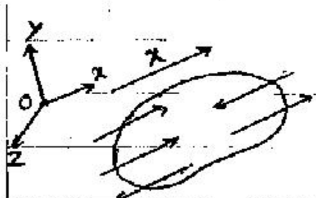
گروه های تعادل خاص :

۱) نیروهای همرس :



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

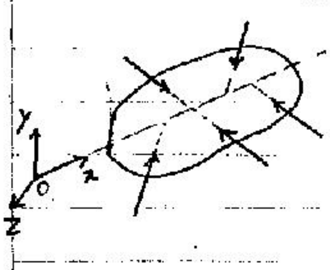
۲) نیروهای موازی :



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_{oy} = 0 \\ \sum M_{oz} = 0 \end{cases}$$

چون نیروها موازی محور x هستند حول این محور گشتاوری ندارند.

۳) نیروهایی که امتداد خاصی را قطع می کنند.



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \\ \sum M_{oy} = 0 \\ \sum M_{oz} = 0 \end{cases}$$

یا (حالت کلی)

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_o = \vec{0} \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_{o'} = \vec{0}$$

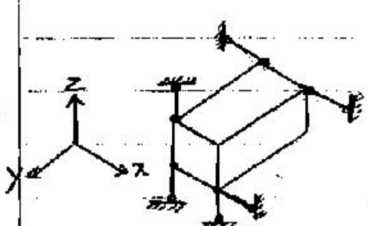
نقطه مناسب

سید محمد جعفر سجادی

کفایت قیود و معین بودن استاتیکی:

آرایش های نامناسب:

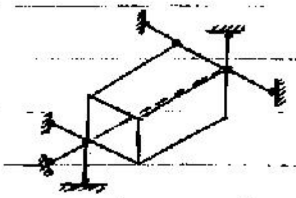
۱) اعضای دو نیروی موازی یک صفحه باشند ← مقید به طور ناقص

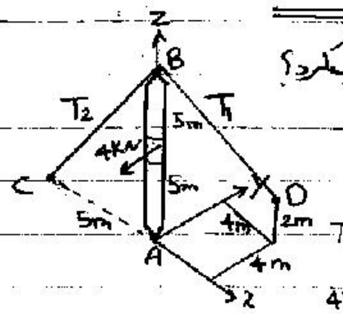



اگر حول محور

۲) اعضای دو نیروی امتداد خاصی را قطع کنند ← مقید به طور ناقص

گشتاور نیروهای قیدی حول محور = صفر





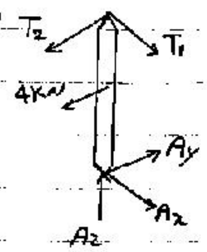

مثال: $T_1 = ?$ ، آیا می توان با استفاده از یک معادله $T_1$ را محاسبه کرد؟

(A مفصل کشکولی)

$B\left|\begin{matrix}0\\0\\10\end{matrix}\right.$ $\quad C\left|\begin{matrix}-5\\0\\0\end{matrix}\right.$ $\quad D\left|\begin{matrix}4\\4\\2\end{matrix}\right.$

حالت ۲ ← بازای صفحه ای از یک امتداد خاص عبور می کنند

$\vec{T_1} = T_1 \frac{\vec{BD}}{BD} \quad ; \quad \vec{T_2} = T_2 \frac{\vec{BC}}{BC}$




با گشتاور گرفتن حول محور x، می توان $T_1$ را با یک معادله حساب کرد.

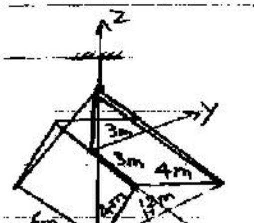
$\sum M_{Ax} = 0 \rightarrow 4(5) - \frac{T_1}{\sqrt{6}}(10) = 0 \rightarrow T_1 = 2\sqrt{6}\ kN$

$\rightarrow T_1 \simeq 4.90\ kN$

با گرفتن حول محور

$\vec{T_1} = T_1\left(\frac{4\vec{i}+4\vec{j}-8\vec{k}}{4\sqrt{1+1+4}}\right) = T_1\left(\frac{\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{6}}\right)$

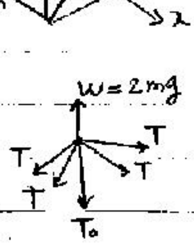
* برای محاسبه ی $T_2$ با یک معادله حول محور AD گشتاور می گیریم




مثال: دو ورق یکنواخت مستطیلی هر یک به جرم 800kg توسط کابل های به صورت متقارن.

کشش T در کابل های گوشه و کشش $T_0$ در کابل مرکزی؟

* به دلیل تقارن، نیروی کشش T در همه ی کابل ها برابر است.

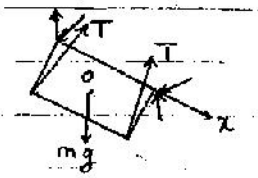



$\sum F_z = 0 \rightarrow 2mg - 4T\cos\alpha - T_0 = 0$ ( α زاویه ی T با محور z )

باتغییر جسم:

$T_0 = 2.62\,kN$

$T = 4.44\,kN$



$\Sigma M_{Ox} = 0$

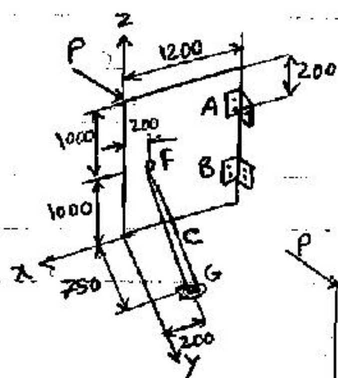
---

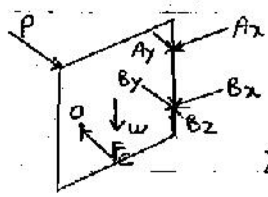
مثال: درب به جرم 30kg ، $P = 200N$

نیروهای افقی در لولاهای A و B ؟

فقط لولای B نیرو در راستای z را تحمل می کند.

میله‌ی C دو نیروی به موازات صفحه‌ی yz





محور z گذرنده از A

$\Sigma M_{Az} = 0 \longrightarrow P(1200) - F_{cy}(1000) = 0 \longrightarrow F_{cy} = 240N$

$\Rightarrow F_c$ ✓

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \longrightarrow A_x + B_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \longrightarrow A_y + B_y + P - F_{cy} = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \longrightarrow B_z - W + F_{cz} = 0 \\ \Sigma M_{Ax} = 0 \longrightarrow B_y(1600) - P(200) - F_{cy}(800) = 0 \Rightarrow B_y = \quad \Rightarrow A_y \\ \Sigma M_{Ay} = 0 \longrightarrow -B_x(1600) + W(600) - F_{cz}(1000) = 0 \Rightarrow B_x = \quad \Rightarrow A_x \end{cases}$$

پاسخ: $F_C = 400N$ ، $A_{xy} = 138.1N$ ، $B_{xy} = 170.5N$

## فصل چهارم: سازه ها

سازه: یک سیستم ثابت که تحمل بار می‌کند.

### خرپاها (Truss):

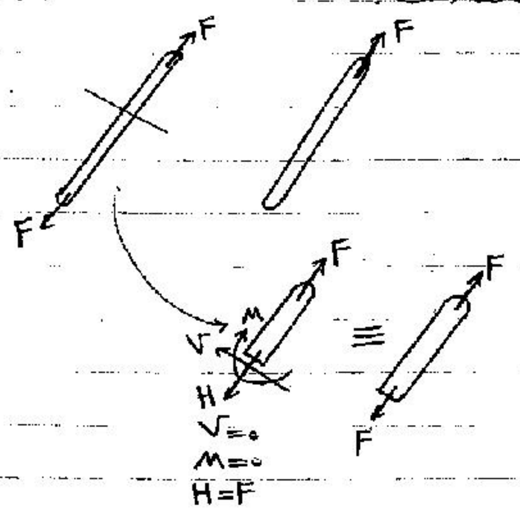
سازه‌ای که متشکل از اعضای دو نیرویی است که مستقل از تکیه‌گاه یا به همراه آن یک سیستم صلب را تشکیل می‌دهد و تحمل بار می‌نماید. بارگذاری در محل مفاصل یا گره‌ها (نقاط اتصال اعضای دو نیرویی joint) وارد می‌شود.

وزن اعضا در مقایسه با بارگذاری خارجی کوچک است و در محاسبات وارد نمی‌شود.

اعضای خرپا معمولاً مستقیم و بلند و باریک هستند. خرپا به عنوان یک سازه‌ی سبک و مقاوم می‌تواند دهانه‌های طولانی را پوشش دهد.

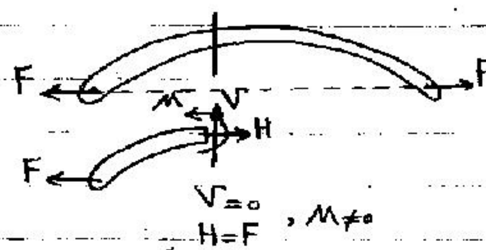
کاربردها:
- پل
- سقف‌های شیب دار
- دکل برق
- بوم جرثقیل

* در این فصل با خرپای معین (از نظر خارجی و داخلی) سروکار داریم. هدف از تحلیل خرپا بدست آوردن واکنش‌های تکیه‌گاهی و نیروی دو سر اعضا است.



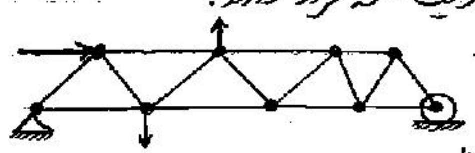

* هر قسمت یک عضو دو نیرویی، خود یک عضو دو نیرویی است (اگر مستقیم باشد)

* اگر عضو دو نیرویی، مستقیم نباشد، هر قسمت عضو دو نیرویی نیست.



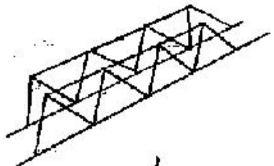

* توجه به اعضای تحت فشار مهم است. (توجه به کمانش شدن سازه‌ها) (مسأله‌ی کمانش و ناپایدار شدن وضعیت تعادل مستقیم عضو که می‌تواند منجر به فروپاشی سازه شود)

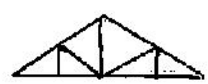
خرپاهای مسطح:
اعضا (و در نتیجه بارگذاری) در یک صفحه قرار دارند.

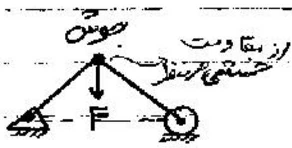


اتصالات ← از مقاومت خمشی صرف‌نظر

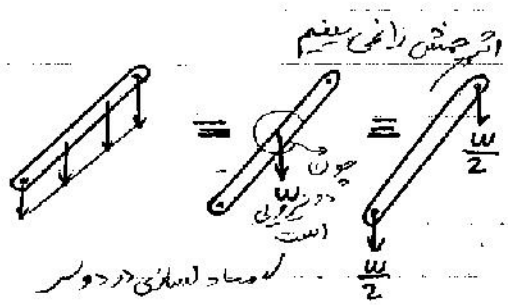
در خرپاهای مسطح ← اتصال لولایی





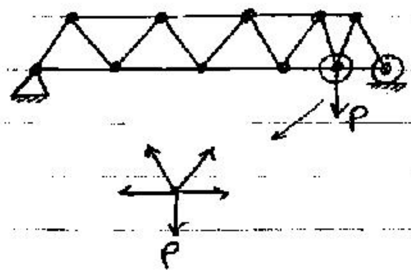

وزن اعضا:




روش های تحلیل خرپا:

1) روش مفاصل (گره‌ها)

- دیاگرام آزاد گره‌ها را ترسیم نموده و بارهای وارده بر آن (شامل بار وارده از طرف اعضا، بارهای خارجی و واکنش‌های تکیه‌گاهی) را نشان می‌دهیم و روابط تعادل را می‌نویسیم.




درخرپای مسطح برای هر گره (نیروهای همرس) دو معادلهٔ تعادل می‌توان نوشت:

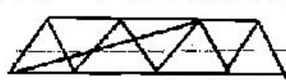
$$\sum F_x = 0 \quad \text{و} \quad \sum F_y = 0$$

برای مشخص شدن اعضای تحت کشش و فشار، نیروی درون اعضا را به‌طور پیش‌فرض کششی در نظر می‌گیریم و در دیاگرام نشان می‌دهیم ← (اگر منفی فشار

بهتر است کار را با گره‌هایی شروع کنیم که فقط دو مجهول دارند.

- بدست آوردن واکنش‌های تکیه‌گاهی از تعادل کل خرپا (در صورت امکان) می‌توانند به پیدایش گره‌های دو مجهولی کمک کند.
مثلن دست خرپا مطلب نباشد

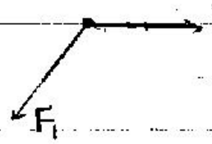
اگر واکنش‌های تکیه‌گاهی از معادلات تعادل بتوانند تعیین شوند خرپا را از نظر خارجی معین می‌نامیم و اگر نیروی درون همهٔ اعضا از تعادل بتواند تعیین شود خرپا را از نظر داخلی معین می‌نامیم.



از نظر داخلی نامعین

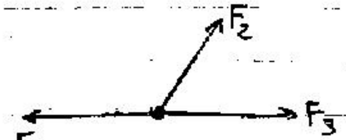
گره‌های خاص:

۱. گرهی که به آن تنها دو عضو غیر هم‌راستا وارد شود. (نیروی خارجی بر گره نداریم)

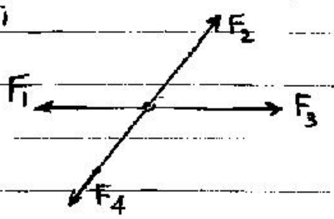



$$F_1 = F_2 = 0$$

۲. به گرهی سه عضو وارد شود که در آن دو عضو هم‌راستا هستند.




$$\begin{cases} F_2 = 0 \\ F_1 = F_3 \end{cases}$$



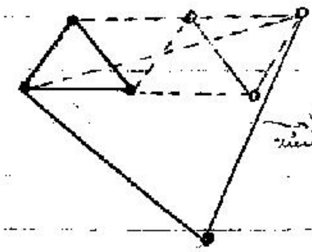

$$\begin{cases} F_1 = F_3 \\ F_2 = F_4 \end{cases}$$ ۱۳

ساده‌ترین خرپای صلب:

خرپای ساده ( مستقل از تکیه‌گاه صلب است )

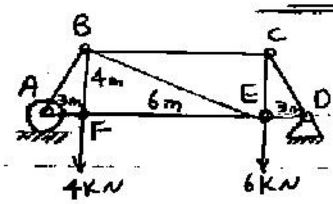
تشکیل با اعضای واقعی یا مجازی که طول آن ثابت است

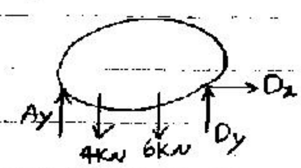
شکل ۱-۴




مثال: نیروی درون اعضا؟

خرپا ساده است. لذا مستقل از تکیه‌گاه صلب است. لذا قیود به اندازه‌ی کافی هستند.



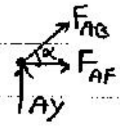

تعادل: $D_x = 0$

$A_y + D_y = 10$

$\stackrel{+}{\circlearrowleft} \Sigma M_A = 0 \longrightarrow -4(3) - 6(9) + D_y(12) = 0$

$\longrightarrow D_y = 5.5\,KN \quad , \quad A_y = 4.5\,KN$

گره A:



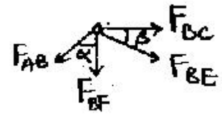

$tg\alpha = \frac{4}{3}$

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow F_{AB}\sin\alpha + A_y = 0 \longrightarrow F_{AB} = -\frac{A_y}{\sin\alpha} = -5.63\,KN$

$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow F_{AB}\cos\alpha + F_{AF} = 0 \longrightarrow F_{AF} = -F_{AB}\cos\alpha = 3.38\,KN$

گره F (مثل گره خاص): $F_{BF} = 4\,KN \quad , \quad F_{FE} = F_{AF} = 3.38\,KN$

گره B:

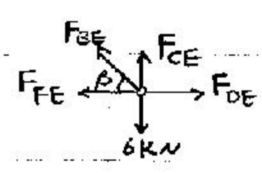



$tg\beta = \frac{4}{6}$

$F_{AB}\sin\alpha + F_{BF} + F_{BE}\sin\beta = 0 \longrightarrow F_{BE} = 0.901\,KN$

$-F_{AB}\cos\alpha + F_{BE}\cos\beta + F_{BC} = 0 \Longrightarrow F_{BC} = -4.13\,KN$

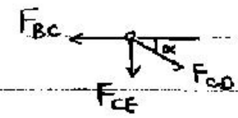
گره E:




$F_{DE} - F_{FE} - F_{BE}\cos\beta = 0 \Longrightarrow F_{DE} = 4.13\,KN$

$F_{CE} + F_{BE}\sin\beta - 6 = 0 \longrightarrow F_{CE} = 5.50\,KN$

گره C: (یک مجهول)

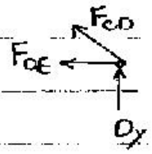



$F_{CD}\cos\alpha - F_{BC} = 0 \longrightarrow F_{CD} = -6.88\,KN$

$\Sigma F_y \stackrel{?}{=} 0 \longrightarrow \checkmark$ (باید برقرار باشد)

سید محمد جعفر سبحانی
سازه نامعین

گره D:




$\sum F_x \overset{?}{=} 0$

$\sum F_y \overset{?}{=} 0$

در مثال فوق: $9+3=2(6)$

برای یک خرپای مستقل از تکیه‌گاه صلب:

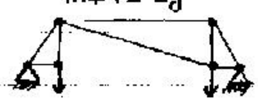
مجهولات: m عضو، 3 واکنش تکیه‌گاهی → $m+3$ مجهول

گره j → $2j$ معادله

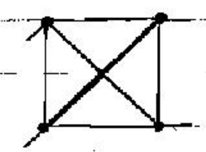
شرط لازم برای معین داخلی: $2j = m+3$

از نظر استاتیک داخلی نامعین: $2j < m+3$

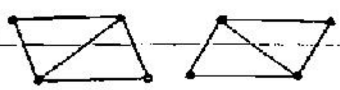
ناپایدار: $2j > m+3$




* تنها یکی از دو عضو تحت فشار است.

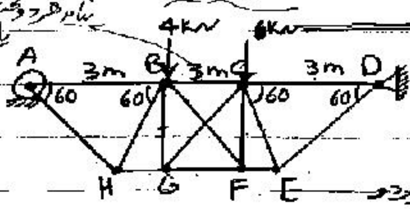


(سازه نامعین) $\xrightarrow[\text{اضافه}]{\text{وجود}}$



روش کار: حذف یکی به طور انتخابی - پس از تحلیل اگر نیرو کششی بوده، تحلیل درست است. در غیر اینصورت باید کار را از اول با حذف عضو دیگر دنبال کنیم.

(اگر مقادیر میله نیروهایشان) بنابر هر دو تحت کشش یا تحت فشار باشند




مثال: نیرو در اعضا AB، BH و BG؟ (BF و CG کابل)

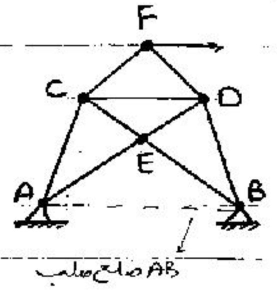
با تحلیل صورت مسأله در می‌یابیم که عضو CG تحت فشار قرار می‌گیرد لذا این عضو را در نظر نمی‌گیریم.

با حذف CG → $m=13$، $j=8$، 3 عکس العمل تکیه‌گاهی → $m+3=2j$ ✓ → خرپا ساده و صلب و از نظر داخلی و خارجی معین است.

واکنش‌های تکیه‌گاهی → گره A: $F_{AB}=$ ✓ ($-2.69\,kN$) → گره H: $F_{BH}=$ ✓ ($-5.39\,kN$) → گره G (گره خاص): $F_{BG}=0$

* در این مسأله‌ی خاص می‌توان عضو BG را حذف کرد. اما با حذف BG سازه به یک مکانیزم تبدیل شده و بنابراین هر نوع بارگذاری را تحمل نمی‌کند در حالی که سازه باید در برابر هر نوع بارگذاری مقاوم باشد.

مثال: تحقیق کنید خرپا دارای عضو یا اعضای زاید است؟
دو راه برای حذف اعضای زاید و معین شدن خرپا بحث کنید.

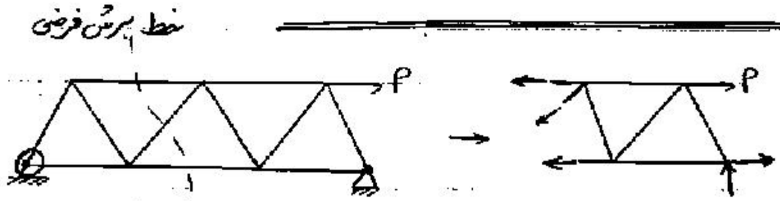



$m = 9$
$d = 6$ $\longrightarrow 9 + 4 \neq 2(6) \longrightarrow$ یک عضو زاید است

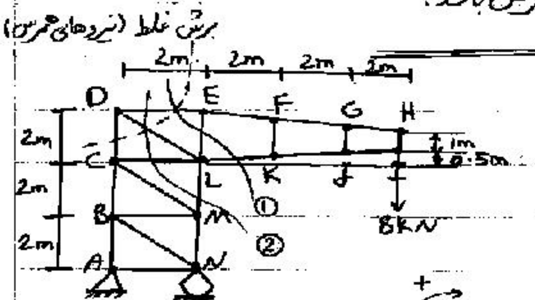
4 واکنش تکیه‌گاهی

* راه حذف: حذف AE - حذف CD - حذف DE - حذف AC
(برای صلبیت باید فاصله‌ی دو نقطه ثابت باشد)

۲) روش مقاطع:



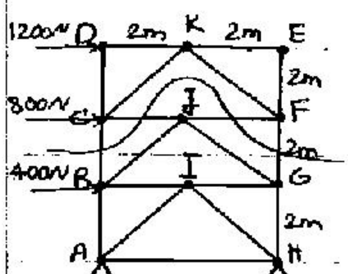

سپس دیاگرام آزاد یک قسمت را در نظر می‌گیریم. (بهتر است از برشی استفاده کنیم که از ۳ عضو بگذرد)
مورد استفاده‌ی این روش برای زمانی است که تنها نیروی بعضی از اعضا را بخواهیم.
- نیرو در اعضای برش به صورت پیش‌فرض کششی در نظر گرفته می‌شود.
- نباید حتی یکی از دو جسم ایجاد شده دارای نیروهای همرس باشد.




مثال: نیروهای اعضای DE و DL؟


$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_L = 0 \longrightarrow F_{DE} = 24\ kN$

با بررسی گره D یا برش دوم: $F_{DL} = 33.9\ kN$

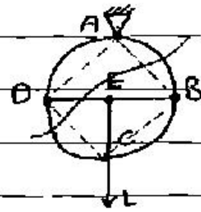



مثال: نیروهای اعضای BC و FG با یک مقطع و دو معادله؟

$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_C = 0 \Rightarrow -F_{FG}(4) - 1200(2) = 0 \longrightarrow F_{FG} = -600\ N$

$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_F = 0 \Rightarrow F_{BC}(4) - 1200(2) = 0 \longrightarrow F_{BC} = 600\ N$

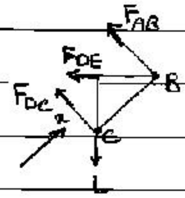
* خرپا نامعین است. زیرا نمی‌توان نیروی درون عضو AH را محاسبه کرد.
با حذف AH، خرپا به یک خرپای معین از نظر داخلی و خارجی تبدیل می‌شود.




مثال: $F_{DE}=?$

خرپا مستقل از تکیه‌گاه صلب است.

* مثلاً DC دو نیرویی است و نیروی آن در راستای خط چین است.

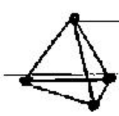



$\Sigma F_x=0 \longrightarrow F_{DE}=?$

خرپاهای فضایی:

اتصالات تحمل لنگر نمی‌کنند و از نوع مفصل و کاسه هستند.

ساده‌ترین خرپا:

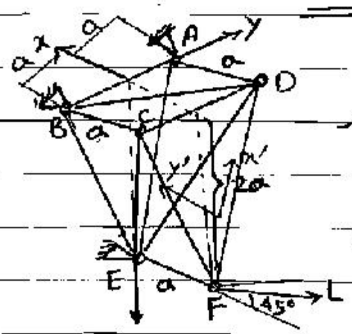


اضافه کردن یک گره و سه عضو به خرپای ساده

برای خرپای مستقل از تکیه‌گاه صلب شرط لازم و کافی برای معین بودن استاتیکی (داخلی و خارجی)

$$m+\underbrace{6}_{\text{واکنش های تکیه‌گاهی}}=3j$$

روش مفاصل و مقاطع برای این خرپا نیز قابل تعمیم است. بهتر است از گره‌هایی استفاده کنیم که دارای 3 مجهول هستند.




مثال: نیروهای موجود در اعضای CD و BC و CE را بیابید.

خرپا ساده است و مستقل از تکیه‌گاه صلب. (ابتدا CDEF را در نظر می‌گیریم و سپس گره‌های A و B را اضافه می‌کنیم.)

تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی = 9 که بیش از حد نیاز است. ← خرپا از نظر داخلی و خارجی نامعین است)

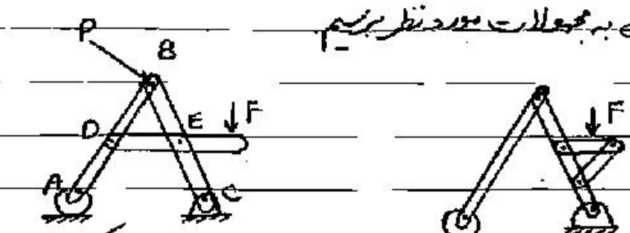
$m=12 \ , \ j=6 \longrightarrow 12+9>3(6)$

$F_{CE}, F_{BC}, F_{CD}$ ← سه معادله در سه راستا : بررسی گره C $\Longrightarrow$ $F_{CF}$ ← بررسی گره F

$\Sigma F_{y'}=0$

## قاب‌ها (frame):

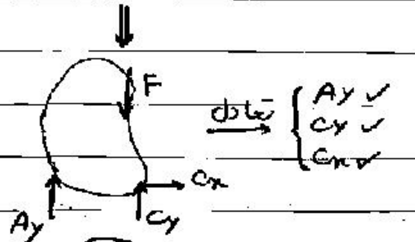
سازه‌ای که مستقل از تکیه‌گاه یا به همراه آن یک سیستم صلب را تشکیل می‌دهد و دست کم دارای یک عضو چند نیرویی است. هدف از تحلیل قاب بدست آوردن نیروها در محل اتصالات برای تمام اعضا است. برای تحلیل لازم است که اعضا را از محل اتصالات جدا کرده و دیاگرام آزاد آنها را در نظر بگیریم و با نوشتن معادلات تعادل به مجهولات مورد نظر برسیم.

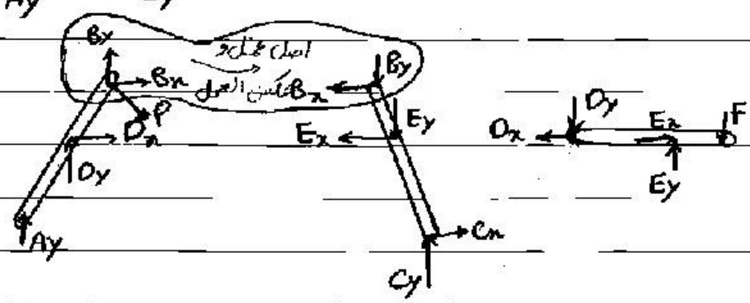



مستقل از تکیه‌گاه صلب

مستقل از تکیه‌گاه صلب نیست

برای شکل سمت چپ:

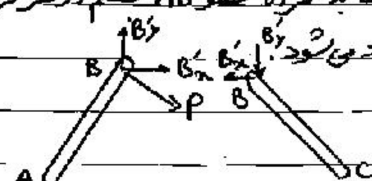


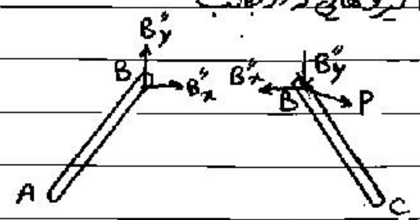

درنهایت باید جمع شده‌ی دیاگرام‌ها، دیاگرام آزاد کل را بدست دهد.

نحوه‌ی تقسیم نیرو در نقاط، مهم نیست. ولی باید اصل بالا رعایت شود.

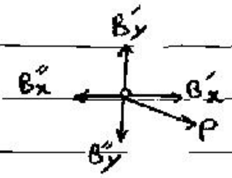
- فرض کنید نیروی P به پین B وارد شود. اگر پین B به همراه عضو AB جسم در نظر گرفته شود، $B'_x$ و $B'_y$ نیروهایی که از جانب عضو BC به پین B وارد می‌شود.



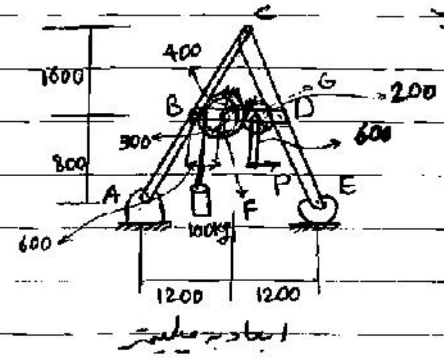

اگر پین B به همراه عضو BC جسم بگیریم، $B''_x$ و $B''_y$ نیروهایی که از جانب پین B به عضو AB وارد می‌شود.



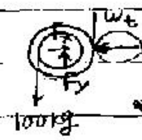
دیاگرام آزاد پین B :




مثال : مطلوب است مولفه x و y تمامی نیروهای وارده بر هر یک از سه عضو قاب (جرم اعضا ناچیز)

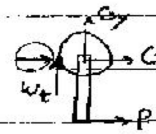



ابعاد به میلیمتر



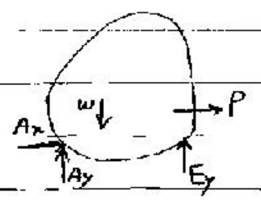

$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_F = 0 \longrightarrow W_t =$

$\longrightarrow F_x, F_y, G_x, G_y$

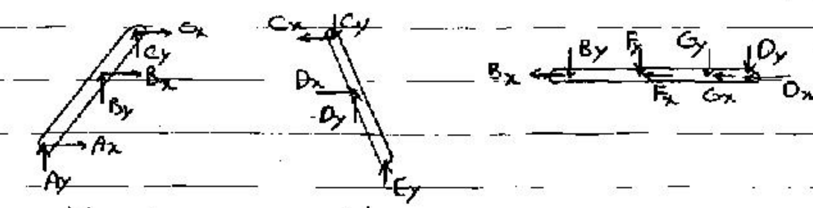



$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_G = 0 \longrightarrow P =$

زاویه دنده چرخ دنده :




$\longrightarrow$ تعادل $\Rightarrow \begin{cases} A_x \\ A_y \\ E_y \end{cases}$




سه معادله / شش مجهول

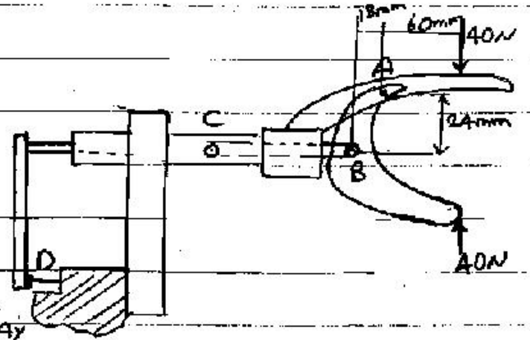
سه معادله / $C_y, C_x, B_y, B_x$, $D_y, D_x$

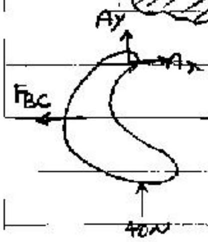
ماشین ها :

دارای اجزای متحرک هستند. اما هنگامی که عامل محرک ماشین در حال غلبه بر مقاومتی می باشد می توانند یک سیستم متعادل را تشکیل دهند. دست کم دارای یک عضو چند نیرویی هستند. هدف از تحلیل ماشین ها تعیین نیروی محرک برای غلبه بر مقاومت خاص یا بالعکس و نیز تعیین نیرو در اتصالات می باشد. تحلیل ماشین ها مانند تحلیل قاب ها است.

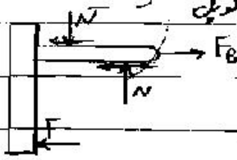
مثال: نیروی وارده بر میخ؟

BC عضو دو نیرویی




$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A=0 \longrightarrow F_{BC}(24)-40(60)=0 \longrightarrow F_{BC}=100N$



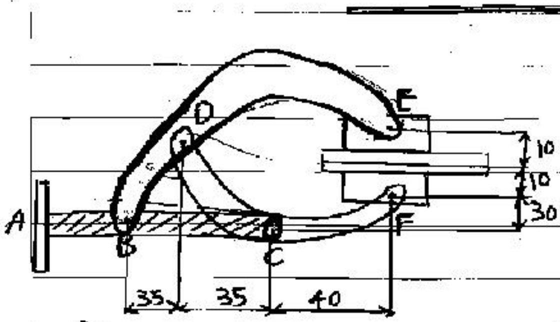

اگر سیستم خوب روانکاری شده باشد $\longrightarrow F=F_{BC}$

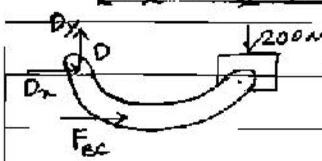
اگر اصطکاک نداشته باشیم $\longrightarrow F\approx F_{BC}$

---

مثال: نیرو در تنگ گیره 200N، نیرو در پیچ BC و عکس العمل پین D؟

BC دو نیرویی



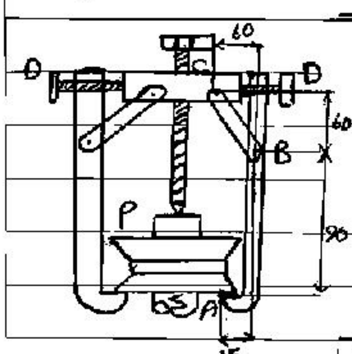

معادلات تعادل $\longrightarrow \begin{cases} \overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_D=0 \longrightarrow \\ D_x \checkmark \\ D_y \checkmark \end{cases}$

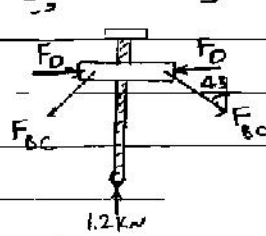
---

مثال: پیچ های D نیروی افقی را تحمل می کنند. نیروی فشاری در پیچ 1.2KN

نیروهای وارده بر رینگ A؟

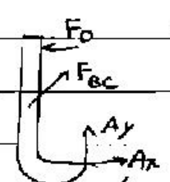
BC دو نیرویی




$\sum F_y=0 \longrightarrow 2F_{BC}\cos 45=1.2$

$\Rightarrow F_{BC}=0.849KN$




$\left.\begin{array}{l}\sum M_D=0 \\ \sum F_y=0 \longrightarrow A_y\end{array}\right\} \longrightarrow A_x$

$F_A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}=0.626KN$

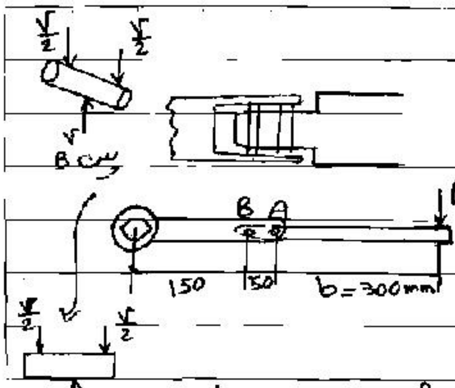
که چون اگر فقط Ay را داشته باشیم ۲ مجهول و 3 معادله داریم که معلوم نیست جمعی باشد یا خیر

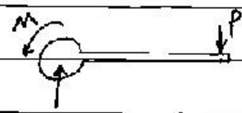
سید محمد حسین ...

مثال: مقاومت حدی پین $B$ = $V = 900N$

سر $M$ گشتاور وارده بر سر پیچ؟

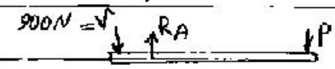
با افزایش $b$، $M$؟




$M = P(200+b)$

در حالت حدی:




$\Sigma M_A = 0 \rightarrow Pb = 900(50) \rightarrow P = \frac{45000}{b}$ (عضو سه نیرویی)

$\Rightarrow M = \frac{45000}{b}(200+b) = \frac{45000(200)}{b} + 45000 \ Nmm$

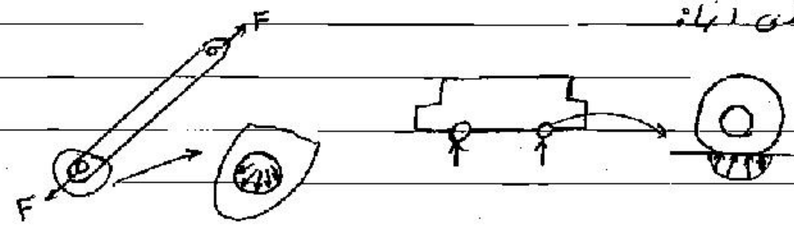
$b = 300mm \Rightarrow M\checkmark$

$b\uparrow \rightarrow M\downarrow$

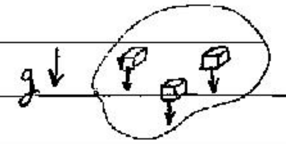
«سید محمد جعفر سبحانی»

«میان ترم دوم»

## نیروهای گسترده و معادل سازی آنها



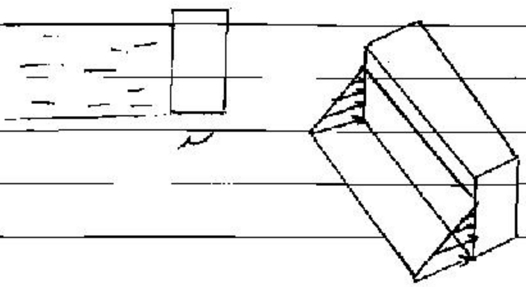

نیروی گسترده بر روی یک حجم مانند اثر ثقل



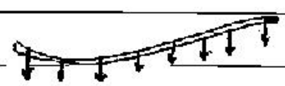

واحدها: $\frac{N}{m^3}$ , $\frac{lb}{in^3}$

نیروی گسترده روی سطح مانند اثر تماس دو جسم یا فشار سیال
تنش

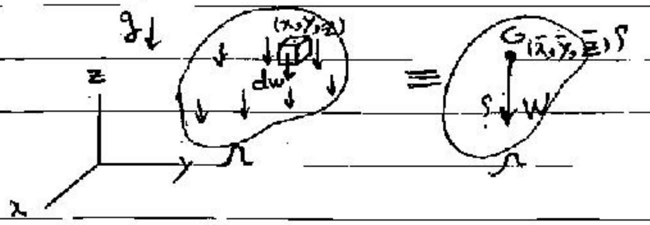
واحدها: $\frac{N}{m^2} = Pa$ , $\frac{lb}{in^2} = psi$



نیروهای گسترده روی خط (منحنی) مانند وزن یک سیم یکنواخت



معادلسازی بار گسترده با بار نقطه‌ای:




$$\Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_1 = \Sigma F_2 \\ \Sigma M_{1A} = \Sigma M_{2A} \end{cases}$$
(A نقطه دلخواه)

معادل سازی اثر ثقل:

$\int_\Omega dw = W$ (معادلسازی نیرویی)

معادلسازی گشتاوری: لنگر حول y: $\int_\Omega x\,dw = \bar{x} W$

لنگر حول x: $\int_\Omega y\,dw = \bar{y} W$

$\int_\Omega z\,dw = \bar{z} W$

$$\bar{x}=\frac{\int_\Omega x\,dw}{W}=\frac{\int_\Omega x\,dw}{\int_\Omega dw}\quad,\quad \bar{y}=\frac{\int_\Omega y\,dw}{\int_\Omega dw}\quad,\quad \bar{z}=\frac{\int_\Omega z\,dw}{\int_\Omega dw}$$

- مرکز ثقل $G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$

$$dW=\underbrace{\overset{N/m^3}{\gamma}}_{\text{وزن مخصوص}}dV=\rho g\,dV$$

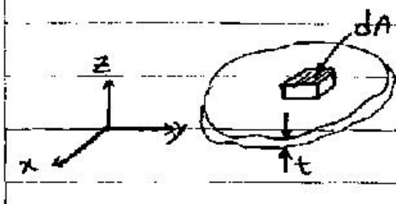
- اگر شتاب ثقل در تمام نقاط جسم یکی باشد:

$$\bar{x}=\frac{\int_\Omega x\rho\cancel{g}\,dV}{\int_\Omega \rho\cancel{g}\,dV}=\frac{\int_\Omega x\overset{dm}{\overline{\rho dV}}}{\int_\Omega \rho\,dV}\Rightarrow G \text{ مرکز جرم}$$

- اگر در این حالت جسم همگن باشد:

$$\bar{x}=\frac{\int_\Omega x\cancel{\rho}\,dV}{\int_\Omega \cancel{\rho}\,dV}=\frac{\int_\Omega x\,dV}{\int_\Omega dV}\Rightarrow G \text{ مرکز حجم (هندسی)}$$

- اگر $\Omega$ به صورت یک سطح با ضخامت ثابت باشد:




$$dV=t\,dA$$

$$\bar{x}=\frac{\int_S x\cancel{t}\,dA}{\int_S \cancel{t}\,dA}=\frac{\int_S x\,dA}{\int_S dA}\longrightarrow G(\text{مرکز سطح})$$

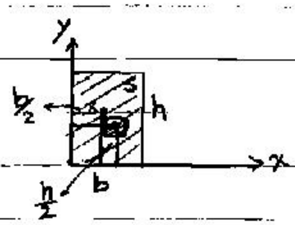
- اگر $\Omega$ به صورت یک منحنی (سیم) با سطح مقطع ثابت باشد:


$$dV=A\,dl$$

$$\bar{x}=\frac{\int_L xA\,dl}{\int_L A\,dl}=\frac{\int_L x\,dl}{\int_L dl}\longrightarrow G(\text{مرکز خط (منحنی)})$$

* صورت کسرها را گشتاور اول سطوح می‌نامند.

مثال: مرکز سطح دق؟

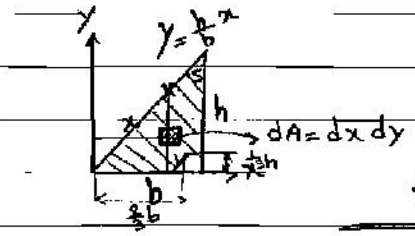



$$dA=dx\,dy$$

$$\int_S x\,dA=\int_0^h\left(\int_0^b x\,dx\right)dy=\frac{1}{2}b^2h\ ,\ A=bh\rightarrow \bar{x}=\frac{1}{2}b$$

به همین ترتیب $\int_S y\,dA=\frac{1}{2}bh^2\rightarrow \bar{y}=\frac{1}{2}h$

مثال: مرکز سطح ورق؟

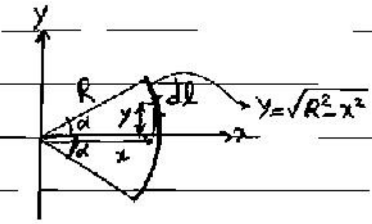



$$\int_S x\,dA=\int_0^b x\left(\int_0^{\frac{h}{b}x}dy\right)dx=\int_0^b \frac{h}{b}x^2=\frac{1}{3}hb^2$$

$$A=\frac{1}{2}bh \Rightarrow \bar{x}=\frac{2}{3}b$$

به همین ترتیب $\longrightarrow \bar{y}=\frac{1}{3}h$ مرکز تلاقی میانه‌ها

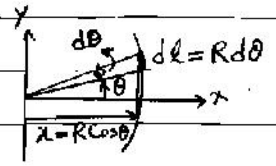
مثال: $\bar{x}$ مرکز خط؟




$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$\int_L x\,dl=\int_{R\cos\alpha}^{R} x\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

راه دیگر: $L=2R\alpha$

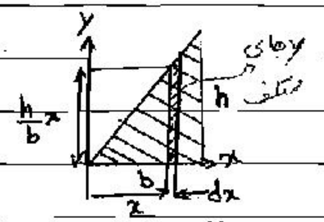



$$\int_L x\,dl=\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\theta(Rd\theta)=2R^2\sin\alpha \rightarrow \bar{x}=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

$\alpha$ رادیان

انتخاب جزهای نواری:

روش غلط:



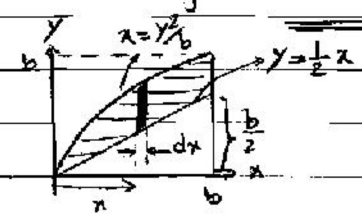

$$\left.\begin{array}{l}\int y\,dA=\int_0^b\left(\frac{h}{b}x\right)\left(\frac{h}{b}x\right)dx=\frac{1}{3}bh^2\\ A=\frac{1}{2}bh\end{array}\right\}\rightarrow \bar{y}=\frac{2}{3}h \quad \times$$

به جای x و y و z در زیر انتگرال $\bar{x}_e$، $\bar{y}_e$ و $\bar{z}_e$ قرار می‌دهیم که مختصات مرکز ثقل جرم یا حجم یا ... جزء انتخاب شده است.

$\bar{x}_e=x$ ، $\bar{y}_e=\frac{y}{2}$

$$\bar{x}=\frac{\int \bar{x}_e\,dA}{\int dA},\quad \bar{y}=\frac{\int \bar{y}_e\,dA}{\int dA},\quad \bar{z}=\frac{\int \bar{z}_e\,dA}{\int dA}$$

مثال: $\bar{y}=?$

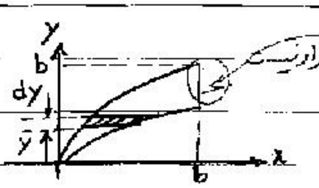



$$dA=\left(\sqrt{xb}-\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$\bar{y}_e=\frac{1}{2}\left(\sqrt{xb}+\frac{1}{2}x\right)$$

$$\bar{y}=\frac{\int \bar{y}_e\,dA}{\int dA}=\frac{\int_0^b \frac{1}{2}\left(xb-\frac{1}{4}x^2\right)dx}{\int_0^b\left(\sqrt{xb}-\frac{1}{2}x\right)dx}=\frac{b}{2}$$

روش دوم:

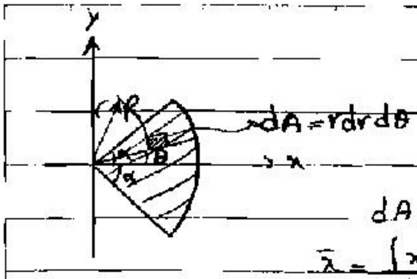


$\cancel{dA=\left(2y-\frac{y^2}{b}\right)dy}$ برقرار نیست (غ)

$$dA=\begin{cases}\left(2y-\frac{y^2}{b}\right)dy & 0\le y\le \frac{b}{2}\\ \left(b-\frac{y^2}{b}\right)dy & \frac{b}{2}\le y\le b\end{cases}$$

$$\int \bar{y}_e\,dA=\int_0^{\frac{b}{2}}\left(2y-\frac{y^2}{b}\right)dy+\int_{\frac{b}{2}}^{b}\left(b-\frac{y^2}{b}\right)dy$$

مثال: $\bar{x} = ?$




راه اول: مختصات دکارتی ← مشکل

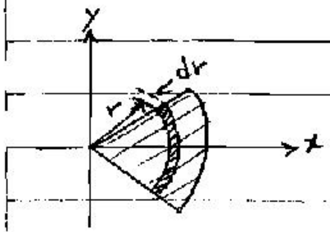
راه دوم: مختصات قطبی و انتگرال دوگانه

$$dA = r\,dr\,d\theta \quad , \quad x = r\cos\theta$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^R r^2 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta}{\int_0^R r\,dr \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{\frac{2R^3}{3}\sin\alpha}{\frac{R^2}{2}(2\alpha)} = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$$

رادیان

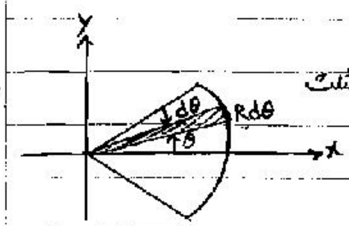
راه سوم: مختصات قطبی و انتگرال یگانه ـ 1




$dA = 2\alpha r\,dr$ ← مسئله قبل $\bar{x}_e = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^R \left(\frac{r\sin\alpha}{\alpha}\right)(2\alpha r\,dr)}{\left(\int_0^R r\,dr\right)\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta\right)} = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$$

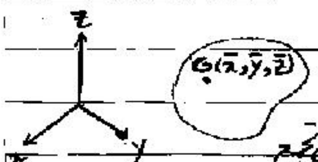
راه چهارم: مختصات قطبی و انتگرال یگانه ـ 2



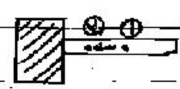

مثلث ← $dA = \frac{1}{2}R^2 d\theta$ $\qquad \bar{x}_e = \frac{2}{3}R\cos\theta$

---

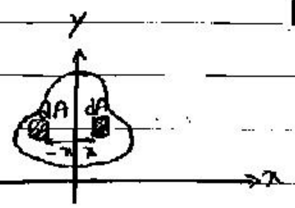
نکاتی در مورد مراکز هندسی:




۱ـ مختصات G به انتخاب دستگاه مختصات بستگی دارد اما نسبت به خود هندسه نقطه‌ی ثابتی است. مختصات G به نوعی یک میانگین گیری از مختصات نقاط با ضریب وزنی وزن یا جرم یا حجم یا... است بنابراین نقطه G باید به محل تجمع وزن، جرم، حجم یا... نزدیکتر باشد.



۲ـ مرکز هندسی روی محور تقارن قرار دارد.




$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = 0$$

۳ـ

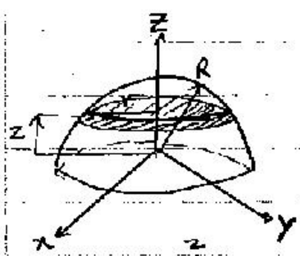
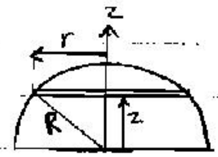

$\bar{y}$ ها یکسان

۴ـ هندسه‌های منشوری:


$\bar{x}$ و $\bar{y}$ نقطه‌ی G همان $\bar{x}$ و $\bar{y}$ هندسه‌ی مولد است (سطح صفر) و

$$\bar{z} = \frac{h}{2}$$

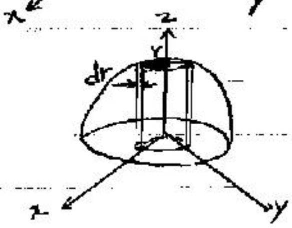
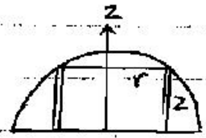
مثال: $\bar{Z}$ نیم کره؟

راه اول:

$$\bar{z} = \frac{\int_0^R z\pi(R^2-z^2)\,dz}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8}R$$

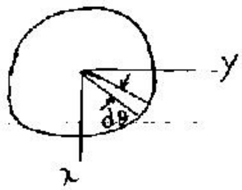
راه دوم:

$$dV = 2\pi r\,dr\,z$$

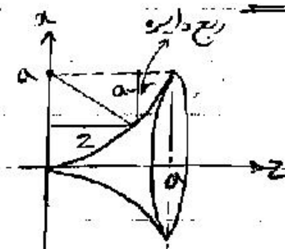
$$\bar{z}_e = \frac{z}{2} \quad , \quad r^2+z^2=R^2$$

راه سوم:



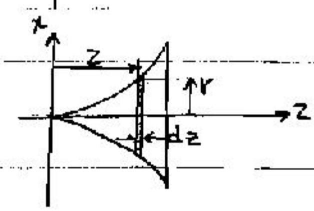
$\bar{z}$ چنین شکلی در دسترس نیست.

---




مثال: ربع دایره را دوران دادیم.

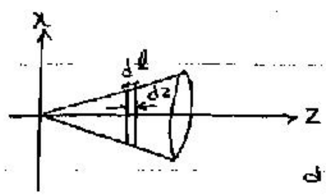
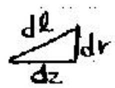
پوسته‌ی زنگوله وار با ضخامت ناچیز. $\bar{Z}=?$



روش غلط: $dA = \cancel{2\pi r\,dz}$ , $\bar{z}_e = z$

$\cancel{z^2+(a-r)^2=a^2}$

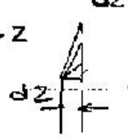
$\bar{z} = \frac{a}{\pi-2}$

$dl = \sqrt{dr^2+dz^2}$

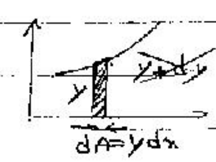
$dl = dz\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}$

$\boxed{dA = 2\pi r\,dl}$

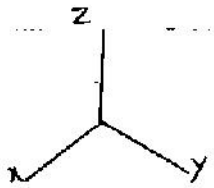


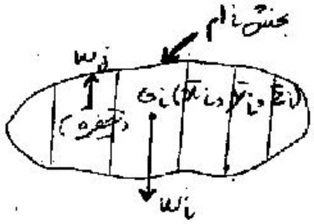
شیب منحنی قابل صرفنظر نیست

$z^2+(a-r)^2=a^2$



سطوح و اجسام مرکب:



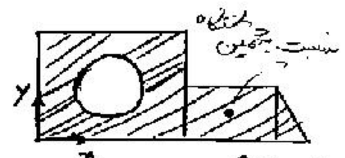

$$\equiv \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = w, \quad \sum_{i=1}^{N} \bar{x}_i w_i = \bar{x} w, \quad \sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i w_i = \bar{y} w, \quad \sum_{i=1}^{N} \bar{z}_i w_i = \bar{z} w \quad \equiv$$

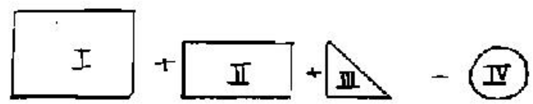

$$\longrightarrow \bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i w_i}{\sum w_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i w_i}{\sum w_i}, \quad \bar{z} = \frac{\sum \bar{z}_i w_i}{\sum w_i}$$

اگر قسمتی برداشته شده بود با علامت منفی لحاظ می کنیم

---

مثال:

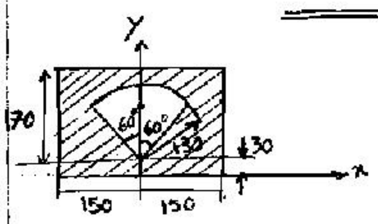


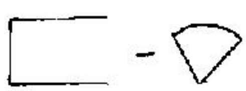

| بخش | $A_i$ | $\bar{x}_i$ | $\bar{y}_i$ | $\bar{x}_i A_i$ | $\bar{y}_i A_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | | | | | |
| II | | | | | |
| III | | | | | |
| جمع | | | | | |

---

مثال: $\bar{y} = ?$




ابعاد به میلیمتر

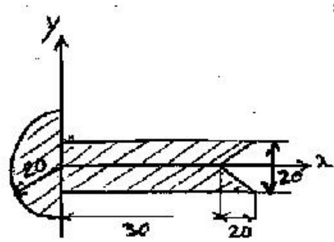


$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}}{\sum A_i} = \frac{(300)(200)(100) - \frac{\pi}{3}(130)^2 \times \left(30 + 2 \times 130 \times \frac{\sin 60}{3 \cdot \frac{\pi}{3}}\right)}{(300)(200) - \frac{\pi}{3}(130)^2}$$

$$\longrightarrow \bar{y} = 99.3 \text{ mm}$$

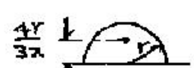
---

مثال: $\bar{x} = ?$





نکته:

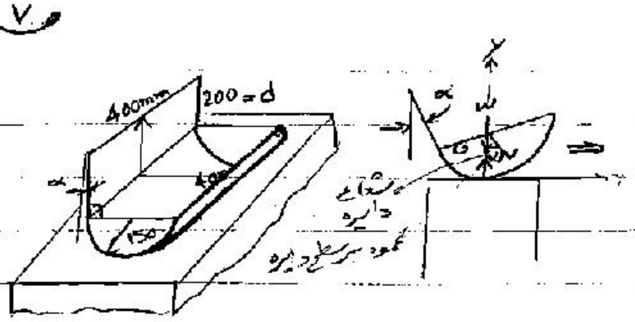


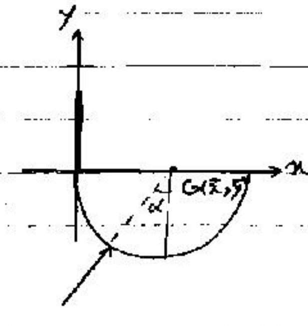

$$\bar{x} = \frac{\frac{\pi}{2}(20)^2\left(\frac{80}{3\pi}\right) + (50)(20)(25) - \frac{1}{2}(20)^2\left(50 - \frac{20}{3}\right)}{\frac{\pi}{2}(20)^2 + (50)(20) - \frac{1}{2}(20)^2} \simeq 7.70 \text{ mm}$$

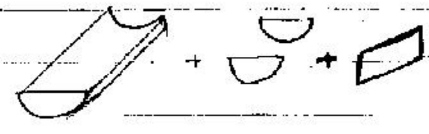
- در بعد دادن به صورت منشوری $\bar{x}$ حفظ می شود اما در بعد دادن به صورت دوران الزاماً $\bar{z}$ ثابت نمی ماند.

سید محمد جعفر سبحانی

مثال ۵: $\alpha = ?$



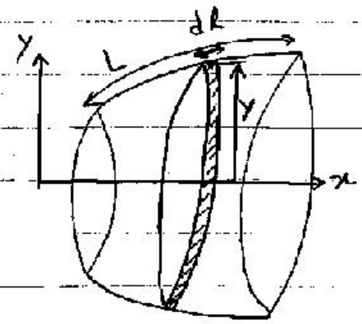



$$\bar{x} = \frac{2\left(\frac{4\times 150}{3\pi}\sin\alpha\right)\times\frac{\pi}{2}\times 150^2 + \frac{2\times 150}{\pi}\sin\alpha\times(\pi\times 150)\times 400 - (100\sin\alpha + 150\cos\alpha)(400\times 200)}{\Sigma A} = 0$$

$$\longrightarrow tg\,\alpha = 0.8276 \longrightarrow \alpha = 39.6^\circ$$

---

قضایای پاپوس برای سطوح و احجام دوار:



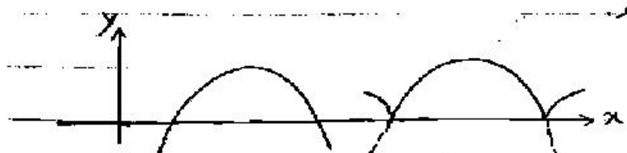

$$dA = 2\pi y\, dl \longrightarrow A = \int_L 2\pi y\, dl = 2\pi \int_L y\, dl$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 2\pi \bar{y} L} \longrightarrow A = \theta \bar{y} L$$

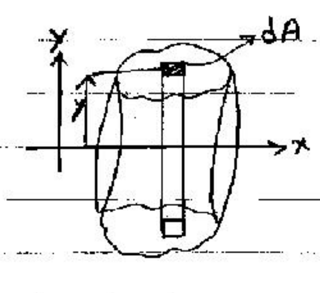
$\alpha$ زاویه دوران

$\bar{y}$ مختصه $y$ مرکز خط منحنی مولد است.

سطح حاصل از دوران یک منحنی برابر است با طول آن منحنی ضربدر محیطی که مرکز خط آن در این دوران طی می‌کند مشروط بر اینکه منحنی در یک سمت محور دوران باشد.




---



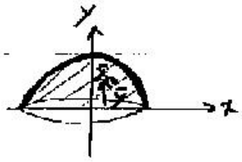

$$dV = 2\pi y\, dA \longrightarrow V = 2\pi \int_A y\, dA$$

$$\Rightarrow V = 2\pi \bar{y} A$$

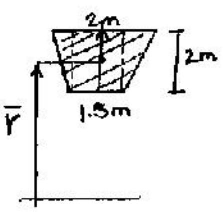
$\alpha$

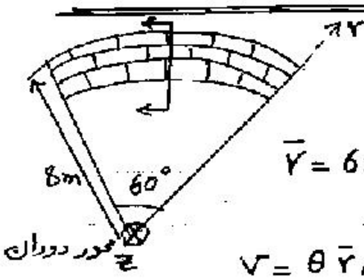
مشروط بر آنکه صفحه در یک سمت محور دوران باشد.

مثال: $A = 2\pi R^2 = 2\pi \bar{x} \frac{\pi}{2} R \rightarrow \bar{x} = \frac{2R}{\pi}$




مثال: $\rho = 2.40 \frac{Mg}{m^3}$ ، $W = ?$



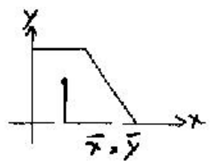




$$\bar{Y} = 6 + \frac{2(\frac{4}{3})(\frac{1}{2}\times0.25\times2) + 1\times(1.5\times2)}{2(\frac{1}{2}\times0.25\times2) + 1.5\times2} = 7.05\,m$$

$$V = \theta \bar{Y} A = \frac{\pi}{3}\times(7.05)\times\left(\frac{1}{2}\times3.5\times2\right) = 25.8\,m^3$$

$$W = mg = \rho V g = 2400\times25.8\times9.81 = 608\times10^3\,N$$

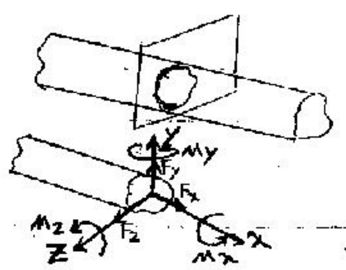
$$\longrightarrow W = 608\,kN$$




تیرها:

سازه‌ی مستقیمی که تحت بارگذاری عرضی قرار داشته باشد.

یک بحث کلی برای برش اجسام:



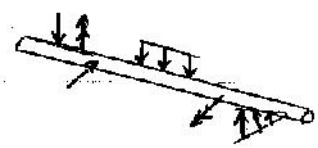

در عمل برش چنین نیروها حاصل می‌کنند.

$F_y, F_z$: نیروهای برشی / $F_x$: نیروی محوری

$M_y, M_z$: لنگرهای خمشی / $M_x$: لنگر پیچشی

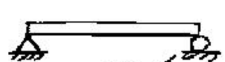
تیرها در صفحه:

در فضا:

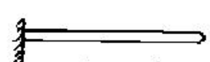


تیرهای معین:

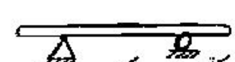
قیدهای معین:



تکیه‌گاه ساده

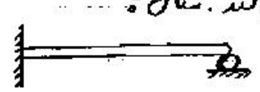


تیر یکسر درگیر



تکیه‌گاه مرکب (آویزان)

هر قید اضافی دیگر تیر را نامعین می‌کند. مثال:



دلیل استفاده از قید اضافه :

جلوگیری از تغییرات شکل بیش از حد و جلوگیری از اثرات داخلی بیش از حد.

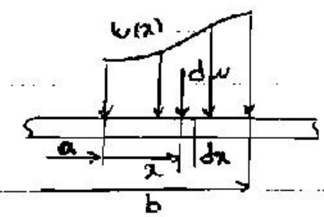
اثرات خارجی در تیرها (واکنش های تکیه گاهی)


در بررسی اثرات خارجی بارگذاری، می توان آن را معادلسازی نمود.

معادلسازی بار گسترده :

$w(x) =$ (بار واحد طول) شدت بار

واحدها : $\frac{N}{m}$ یا $\frac{lb}{in}$




$$dW = w\,dx$$

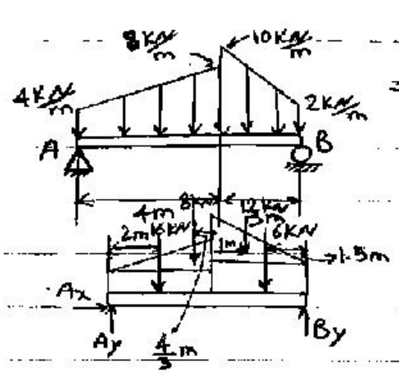
معادل نیرویی : $\int dW = \int_a^b w\,dx = W$

$W$ سطح زیر منحنی توزیع بار است.

معادل گشتاوری : $\int x\,dW = \int_a^b x w\,dx = W\bar{x} \Longrightarrow \bar{x} = \dfrac{\int_a^b x w\,dx}{\int_a^b w\,dx}$

محل اثر بار معادل، مرکز سطح مساحت زیر منحنی توزیع بار است.

مثال : واکنش ها در A و B =؟



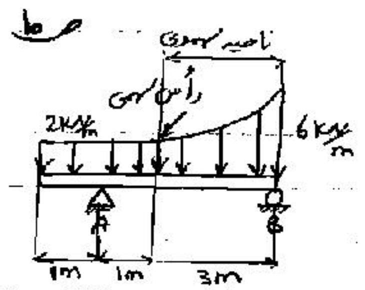

$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow A_x = 0$

$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \longrightarrow A_y = \checkmark = 21.1\,KN$

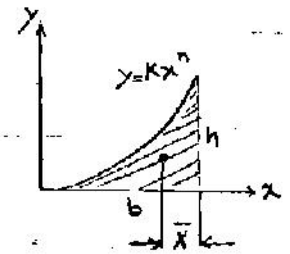
$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \longrightarrow B_y = \checkmark = 20.9\,KN$

مثال: واکنش‌ها در A و B =؟

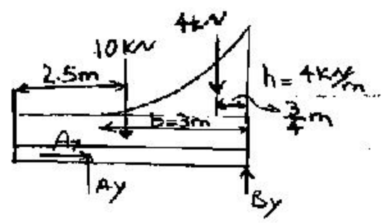
حل




با توجه به پیوست (د):




$$A=\frac{bh}{n+1}\quad,\quad \bar{x}=\frac{b}{n+2}$$




$$\sum F_x=0 \longrightarrow A_x=0$$

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A=0 \longrightarrow 10(1.5)+4(3.25)-B_y(4)=0$$

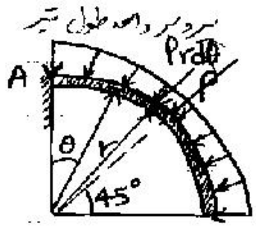
$$\longrightarrow \boxed{B_y=7\,kN}$$

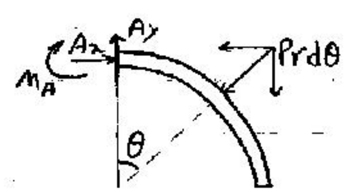
$$\sum F_y=0 \longrightarrow A_y-10-4+B_y=0$$

$$\longrightarrow \boxed{A_y=7\,kN}$$

---

مثال: واکنش‌ها در A =؟




$$\sum F_x=0 \longrightarrow A_x-\int_0^{\frac{\pi}{2}} pr\,d\theta\,\sin\theta=0 \longrightarrow A_x=pr$$

$$\sum F_y=0 \longrightarrow A_y-\int_0^{\frac{\pi}{2}} pr\,d\theta\,\cos\theta=0 \longrightarrow A_y=pr$$

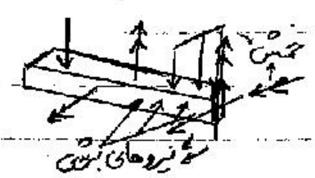
$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A=0 \longrightarrow M_A+\int_0^{\frac{\pi}{2}} pr\,d\theta\sin\theta\,[r(1-\cos\theta)]+\int_0^{\frac{\pi}{2}} pr\,d\theta\cos\theta(r\sin\theta)=0$$

$$\Rightarrow M_A=-pr^2$$

---

اثرات داخلی تیرها:

در تیرهای مستقیم:

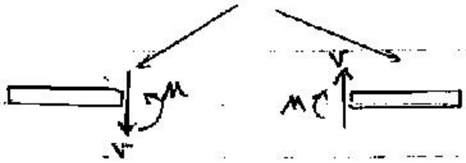


در تیرهای صفحه ای :

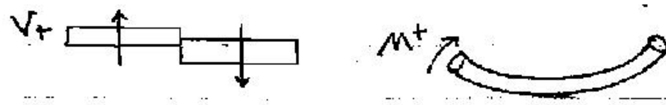

اثر داخلی در تیرها یعنی تعیین توزیع $V(x)$ و $M(x)$ در طول تیر

قرار داد علامت V و M :

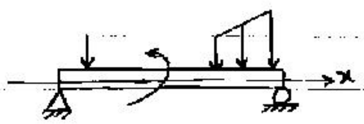
V و M مثبت




تغییر شکل ناشی از V و M مثبت :




$V(x) = ?$ $M(x) = ?$



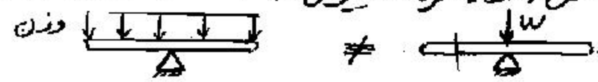

نحوه ی بدست آوردن توزیع برش و خمش :

- عکس العمل های تکیه گاهی تیر را از معادلات تعادل بدست می آوریم.
- دیاگرام آزاد کل تیر را ترسیم می کنیم. ( بارها باید به همان صورت اعمال شده روی تیر قرار داده شوند و نمی توانیم معادل سازی کنیم)
- مقاطعی را در طول تیر در مکان های زیر می زنیم تا تیر به دو نیم تقسیم شود.
  - قبل و بعد از هر نیرو یا لنگر منفرد
  - قبل و بعد از هر نیروی گسترده
  - جایی در میان بار گسترده

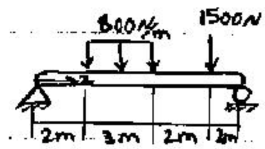
( در هر نوبت یکی از این مقاطع در کل تیر زده می شود )

- یکی از دو نیمه را انتخاب کرده ( معمولاً نیمه ای که بارهای کمتری روی آن وجود دارد) و دیاگرام آزاد این نیمه را ترسیم و بارهای داخلی برش و خمش را طبق قرار داد علامت روی آن نشان می دهیم.
- از بررسی تعادل این نیمه برش و خمش در مقطع مورد نظر و در بازه ی x مورد بررسی بدست می آید. در این مرحله می توانیم بارها را معادل سازی کنیم.
- مقطع زدن را ادامه می دهیم تا کل تیر پوشش داده شود.
- در این صورت توزیع V و M به صورت توابع چند ضابطه ای از x بدست می آید. برای بررسی تیر معمولاً لازم است این توزیع ترسیم شود تا مکان های بحرانی در طول تیر مشخص شوند.

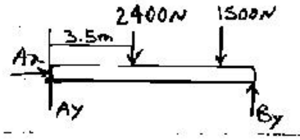
* در بررسی اثرات داخلی نباید از معادل سازی استفاده کرد. (تغییر شکل‌ها)




مثال ۵: ترسیم نمودار V و M ؟ (الف) / V و M در $x=6m$ ؟ (ب) / $M_{max}$ (ج)




الف)

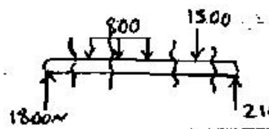



تعادل کل تیر:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = 3900N \rightarrow A_y = 1800N$$

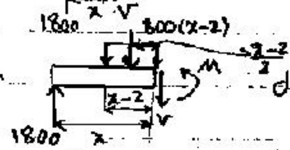
$$\overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_A = 0 \rightarrow 2400(3.5) + 1500(7) - B_y(9) = 0 \rightarrow B_y = 2100N$$




$0 < x < 2m$

تعادل: $V = 1800N$ ، $M = 1800x \ N.m$

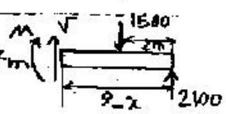
$2 < x < 5m$



تعادل: $V = 1800 - 800(x-2) = 3400 - 800x \ N$

$$M = 1800x - \frac{800(x-2)^2}{2} = -400x^2 + 3400x - 1600 \ N.m$$

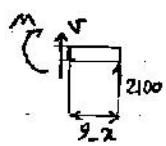
$5 < x < 7m$



تعادل: $V = 1500 - 2100 = -600N$

$$M = 2100(9-x) - 1500(7-x) = -600x + 8400 \ N.m$$

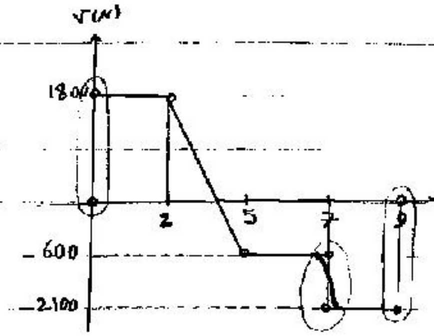
$7 < x < 9m$

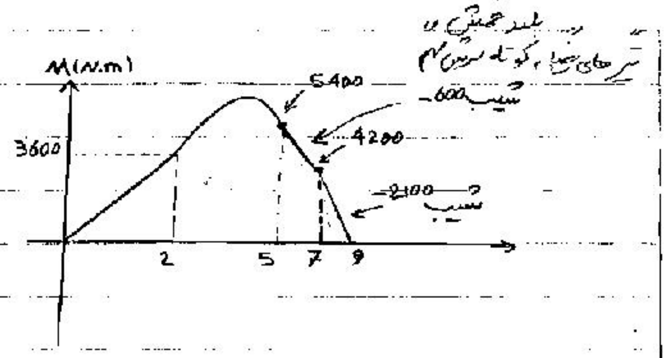


تعادل: $V = -2100N$ ، $M = 2100(9-x) = -2100x + 18900 \ N.m$

$$\underset{(N)}{V(x)} = \begin{cases} 1800 & 0 < x < 2m \\ 3400 - 800x & 2 < x < 5m \\ -600 & 5 < x < 7m \\ -2100 & 7 < x < 9m \end{cases} \qquad \underset{(N.m)}{M(x)} = \begin{cases} 1800x & 0 < x < 2m \\ -400x^2 + 3400x - 1600 & 2 < x < 5m \\ -600x + 8400 & 5 < x < 7m \\ -2100x + 18900 & 7 < x < 9m \end{cases}$$

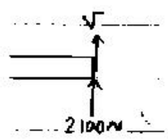
سید محمد جعفر سبحانی




برای بررسی صحت عملکرد:

نمودار در انتها با انتهای دیاگرام آزاد تیر مطابقت داشته باشد.




$V=-2100\,N$ ✓ ، $M=0$

* از آنجایی که ما یک گشتاور متمرکز نداریم، نمودار $M$ پیوسته است و در نتیجه می‌توان برای حدود، تساوی‌ها را قرار داد.

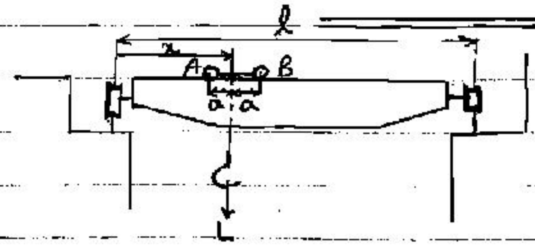
* در لنگر متمرکز، در آن نقطه برش پیوسته است و تنها لنگر غیر پیوسته است.

ب) $x=6m \Rightarrow V=-600N$ ، $M=4800\,N.m$

ج) $M_{max}$ در فاصله‌ی $2<x<5m$ اتفاق می‌افتد.

$$\frac{dM}{dx}=-800x+3400=0 \rightarrow x=4.25m \Rightarrow M_{max}=-400(4.25)^2+3400(4.25)-1600$$

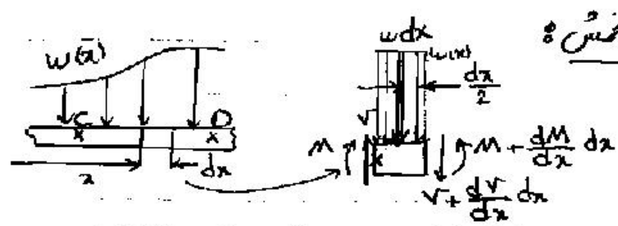
$$\Rightarrow M_{max}=5625\,N.m$$




مسأله: $x$ متناظر با $M_{max}$ در مقطع تیر؟

جواب: $x=\frac{a+l}{2}$ ، $(M_{max})_A=\frac{L}{4l}(l-a)^2$

روابط دیفرانسیلی بین شدت بار، برش و خمش:



(w رو به پایین مثبت)

تعادل نیرویی: $V - w\,dx - \left(V+\frac{dV}{dx}dx\right)=0 \Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dx}=-w}$

$\underbrace{\frac{dV}{dx}}_{\text{شیب منحنی توزیع برش}}$

$$\longrightarrow dV=-w\,dx \longrightarrow \int_C^D dV=-\int_{x_C}^{x_D} w\,dx \Rightarrow \boxed{V_D-V_C=-\int_{x_C}^{x_D} w\,dx}$$

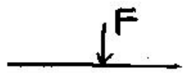
تعادل گشتاوری: $M + w\,dx\left(\frac{dx}{2}\right)+\left(V+\frac{dV}{dx}dx\right)dx-\left(M+\frac{dM}{dx}dx\right)=0 \quad (dx^2=0)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dM}{dx}=V} \quad \Rightarrow \boxed{M_D-M_C=\int_{x_C}^{x_D} V\,dx}$$

شیب نمودار خمش در هر نقطه

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{d^2M}{dx^2}=-w}$$

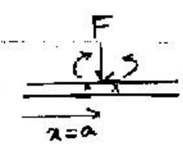


تذکر ریاضی: (تابع ضربه ای واحد) $w(x)=F\,\underbrace{\delta(x-a)}_{\text{دلتای دیراک}}$

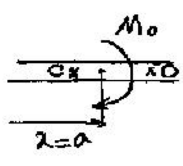
نکته:

$\delta(x-a)=\begin{cases}\infty & x=a\\ 0 & x\neq a\end{cases}$ , $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,dx=1$

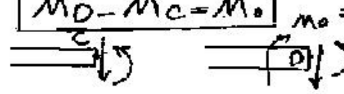
$\Rightarrow$



$\boxed{V_D-V_C=-F}$ $\Rightarrow$ پس از هر نیروی منفرد، نیروی برشی به اندازه F کم می شود.



$\boxed{M_D-M_C=M_0}$ $\Rightarrow$ پس از هر لنگر منفرد در جهت عقربه های ساعت گشتاور خمشی به اندازه ی $M_0$ زیاد می شود.

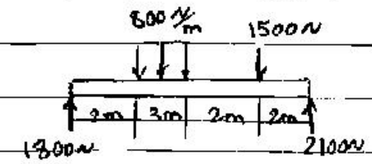


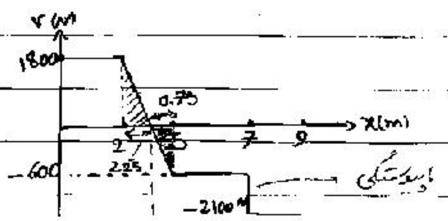
(اختلاف در $M_0$)

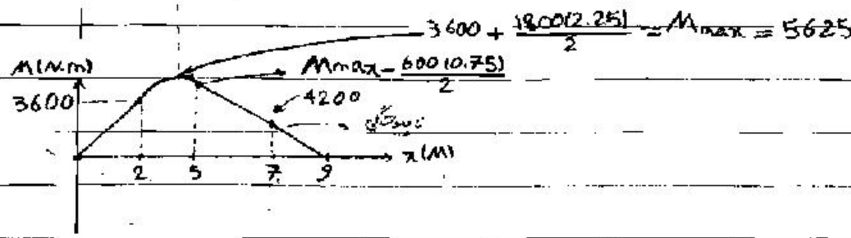
روش کار:

- رسم دیاگرام آزاد تیر پس از بدست آوردن واکنش ها (این دیاگرام شدت بار روی تیر را نشان می دهد)
- نمودار V-x و M-x در زیر این نمودار و زیر یکدیگر ترسیم می شوند.

مثال ۶: نمودار توزیع برش و خمش؟



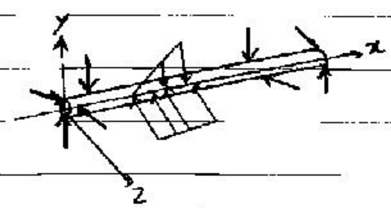



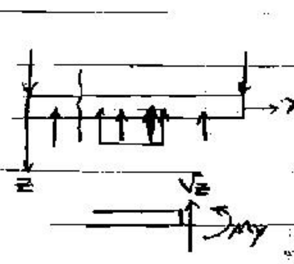



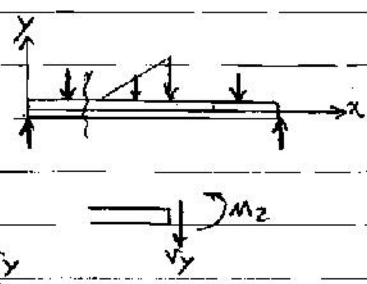

* لنگر متمرکز در نمودار V تأثیری ندارد اما نمودار M ناپیوسته خواهد شد

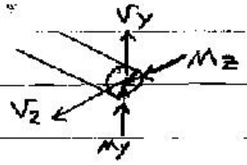
بارگذاری فضایی تیرهای مستقیم:

بارهای دیاگرام آزاد را در دو صفحه عمود بر هم تصویر می‌کنیم



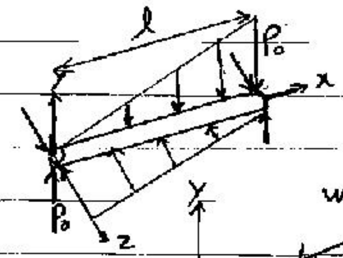



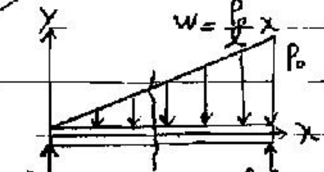

$$V=\sqrt{V_y^2+V_z^2} \qquad M=\sqrt{M_y^2+M_z^2}$$

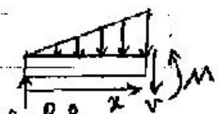
مثال ۳:




نشان دهید: $M(x)=\frac{P_0}{6l}x(l-x)\sqrt{5l^2-2lx+2x^2}$

چون w در صفحه جا بشتی پذیر است پس:




با استفاده از تعادل ← $\frac{P_0 l}{6}=V_0$ $\qquad \frac{P_0 l}{3}$ $\qquad V_0=\frac{P_0 l}{6}$

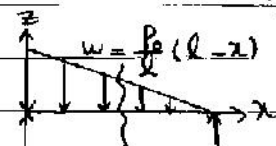
$0=M_0$

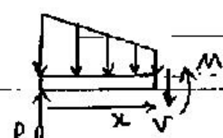
$$V_1=V_0-\int_0^x w(x')dx'$$

$$V_1=\frac{P_0 l}{6}-\int_0^x \frac{P_0}{l}x'dx'$$

$$V_1=\frac{P_0}{6l}(l^2-3x^2)$$

$$M_1=M_0+\int_0^x V(x')dx'=\frac{P_0}{6}\frac{x}{l}(l^2-x^2)$$




$\frac{P_0 l}{3}=V_0$ $\qquad \frac{P_0 l}{6}$ $\qquad \frac{P_0 l}{3}$

$0=M_0$

$$V_2=V_0-\int_0^x w(x')dx'=\frac{P_0 l}{3}-P_0x+\frac{P_0}{2l}x^2$$

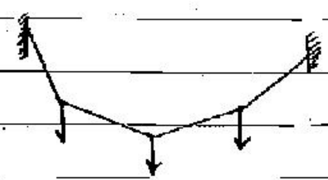
$$M_2=M_0+\int_0^x V(x')dx'=\frac{P_0}{6}\frac{x}{l}(2l-x)(l-x)$$

$$M=\sqrt{M_1^2+M_2^2}=\frac{P_0}{6l}x(l-x)\sqrt{5l^2-2lx+2x^2}$$

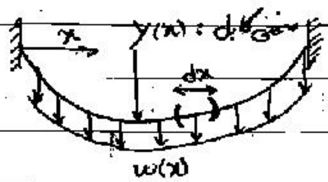
کابل های انعطاف پذیر (و کشش ناپذیر) ← از مقاومت خمشی صرف‌نظر و تحمل فشار ندارند.

کابل تحت بار متمرکز :

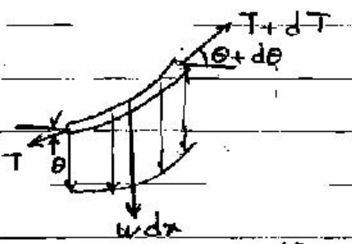
(مانند تحلیل خرپا)



کابل تحت بار گسترده :




← نیرو بر واحد طول افقی x




تعادل :

افقی : $-T\cos\theta+(T+dT)\underbrace{\cos(\theta+d\theta)}_{\cos\theta\overset{1}{\cos d\theta}-\sin\theta\overset{d\theta}{\sin d\theta}}$ $\qquad$ (dθ: زاویه کوچک)

$$\rightarrow \underbrace{-T\sin\theta d\theta+dT\cos\theta}-\cancel{dT\sin\theta d\theta}=0 \rightarrow d(T\cos\theta)=0 \rightarrow T\cos\theta=cte=T_0$$

مؤلفه‌ی افقی کشش در طول کابل ثابت

قائم : $-T\sin\theta+(T+dT)\underbrace{\sin(\theta+d\theta)}_{\sin\theta+\cos\theta.d\theta}-wdx=0 \rightarrow dT\sin\theta+T\cos\theta d\theta-wdx=0$

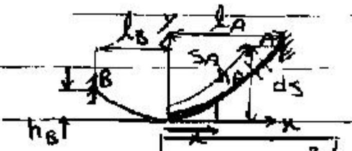
$$\rightarrow d(T\sin\theta)=wdx \rightarrow d\left(\frac{T\sin\theta}{T\cos\theta}\right)=\frac{wdx}{T_0} \rightarrow d(tg\theta)=\frac{wdx}{T_0}$$

$$\rightarrow tg\theta=\frac{dy}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{w}{T_0}}$$

کابل سهمی شکل:

اگر شدت بارگذاری قائم w را ثابت بگیریم:

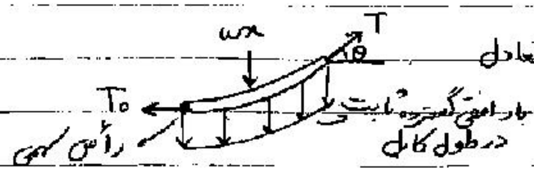
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{w}{T_0}\longrightarrow y(x)=\frac{wx^2}{2T_0}+c_1x+c_2$$




مبدأ مختصات: رأس سهمی $\Leftarrow$ $c_1=c_2=0$

$$\boxed{y(x)=\frac{wx^2}{2T_0}}$$

$$h_A=\frac{wl_A^2}{2T_0}\longrightarrow T_0=\frac{wl_A^2}{2h_A}$$




تعادل: $T\cos\theta=T_0$

$T\sin\theta=wx$ $\longrightarrow T=\sqrt{T_0^2+w^2x^2}$

$T_{max}$ : به ازای $x_{max}$ در نقطه A رخ می‌دهد $(l_A>l_B)$

$$T_{max}=\sqrt{T_0^2+w^2l_A^2}=wl_A\sqrt{1+\left(\frac{l_A}{2h_A}\right)^2}$$

طول کابل سمت راست $=\int_0^{S_A}ds \longrightarrow ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$=\int_0^{l_A}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{l_A}\sqrt{1+\left(\frac{wx}{T_0}\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}l_A\sqrt{1+\left(\frac{wl_A}{T_0}\right)^2}+\frac{\sinh^{-1}\frac{wl_A}{T_0}}{2\frac{w}{T_0}}$$

* جایی که بیشترین شیب را دارد، بیشترین کشش وجود دارد.

---

بار گسترده یکنواخت بر واحد طول کابل ـ کابل زنجیره‌ای:

تعادل قائم ← $d(T\sin\theta)=\mu\,ds \Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\mu}{T_0}\frac{ds}{dx}=\frac{\mu}{T_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$\mu$: شدت بار گسترده بر واحد طول کابل (وزن واحد طول کابل‌ها)

اگر $\frac{dy}{dx}=\rho \rightarrow \frac{d\rho}{dx}=\frac{\mu}{T_0}\sqrt{1+\rho^2}\Rightarrow\frac{d\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}=\frac{\mu}{T_0}dx$

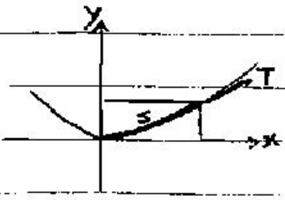
انتگرال ↓

$\rho$ $\begin{pmatrix}x=0\\ \rho=0\end{pmatrix}$

انتگرال ↓

$\begin{pmatrix}x=0\\ y=0\end{pmatrix}$ $y(x)=\frac{T_0}{\mu}\cosh\frac{\mu x}{T_0}+c_1$

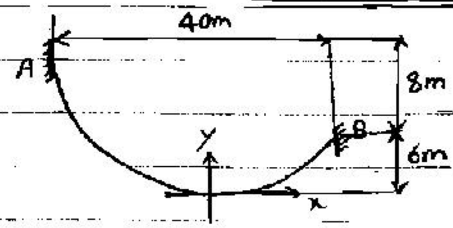
$$\Longrightarrow\ \boxed{y(x)=\frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x}{T_0}-1\right)}$$




$$S=\frac{T_0}{\mu}\sinh\frac{\mu x}{T_0}\longrightarrow T=\sqrt{T_0^2+\mu^2S^2}$$

$$\Longrightarrow T=T_0\cosh\frac{\mu x}{T_0}\quad \text{یا}\quad T=T_0+\mu Y$$

---




مثال: طول L کابلی را بیابید که بین دو نقطه A و B به صورت بالا آویزان شود.

زنجیرهای آویزان

$x_B-x_A=40m$ ، $Y_B=6m$ ، $Y_A=14m$

اگر $\frac{T_0}{\mu}=\alpha$

$$Y_A=\frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x_A}{T_0}-1\right)\longrightarrow 14=\frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x_A}{T_0}-1\right)$$

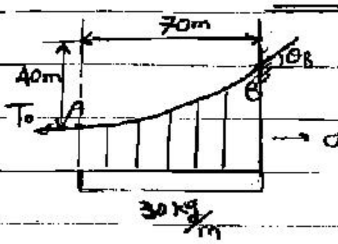
نقطه B ، $6=\frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x_B}{T_0}-1\right)$

$$\Longrightarrow\begin{cases}14=\alpha\left(\cosh\frac{x_A}{\alpha}-1\right)\longrightarrow x_A=\alpha\cosh^{-1}\left(\frac{14}{\alpha}+1\right)\\ 6=\alpha\left(\cosh\frac{x_B}{\alpha}-1\right)\longrightarrow x_B=\alpha\cosh^{-1}\left(\frac{6}{\alpha}+1\right)\\ x_B-x_A=40\longrightarrow\alpha\left[\cosh^{-1}\left(\frac{6}{\alpha}+1\right)-\cosh^{-1}\left(\frac{14}{\alpha}+1\right)\right]=40\end{cases}$$

$\longrightarrow$ روش های محاسبات عددی: بولزانو ، نیوتون-رافسون

$\Longrightarrow$ محاسبات عددی: $\alpha=f(\alpha)\longrightarrow\alpha_0$ حدس $\longrightarrow\alpha=f(\alpha_0)$

---




مثال: $T_0=?$ ، $\theta_B=?$

$w=30g\ \frac{N}{m}$ ، $B\left|\begin{matrix}70\\40\end{matrix}\right.$

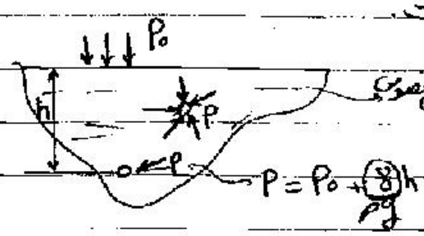
$$Y_B=\frac{w x_B^2}{2T_0}\longrightarrow T_0=18.03\,kN$$

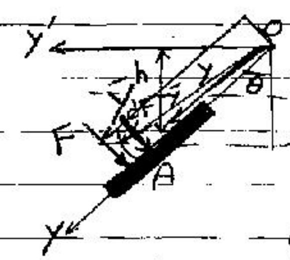
$$T_{max}=T_B=\sqrt{T_0^2+w^2x_B^2}$$

$$\cos\theta_B=\frac{T_0}{T_B}\Rightarrow\theta_B=48.8^\circ$$

استاتیک سیالات:

قانون پاسکال: فشار در تمام جهات در هر نقطه یکسان است.



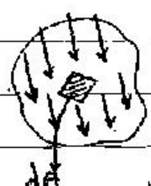




$h = y\cos\theta$

$P_{\text{نسبی}} = \rho g h = \rho g y \cos\theta$

$dF = p\,dA = \rho g y \cos\theta\, dA$

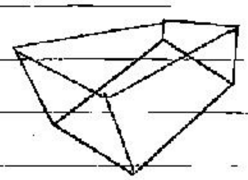
منتجه نیرو $\longrightarrow F = \int dF = \int_A \rho g y \cos\theta\, dA = \rho g \cos\theta \underbrace{\int_A y\, dA}_{\bar{y}A}$

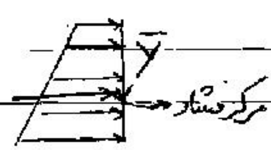



محل اثر نیرو: معادله:

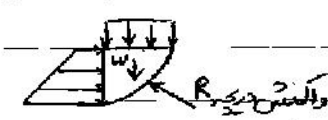
گشتاور حول x: $\int dF\, y = \int_A \rho g y^2 \cos\theta\, dA = F\bar{Y} \quad (\bar{Y} \neq \bar{y})$

$$\Longrightarrow \bar{Y} = \frac{\int_A y^2\, dA}{A\bar{y}}$$






سطوح غیرمسطح:




$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow R_x$

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow R_y$

$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow$ محل اثر R