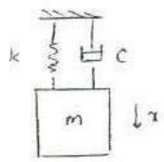
میرایی در واقع انرژی را به حرارت تبدیل می کند ما می توانیم حرارتی که در یک سیکل تولید می شود، (انرژی از دست می دهیم) را پیدا می کنیم.(کار)

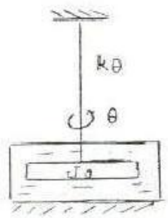
می توانیم همین مقدار کار را محاسبه کنیم که تحت چه میرایی ویسکازی از دست داده می شود. به این ترتیب این ceq معادل را می یابیم و در معادله قرار می دهیم.



$$\left.\begin{array}{l} k_{eff} \\ C_{eff} \\ m_{eff} \end{array}\right\} X$$

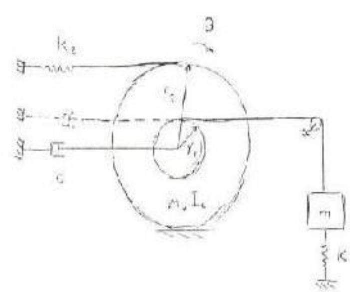
$$T = \frac{1}{2} m_{eff} \dot{X}^2$$

$$U = \frac{1}{2} m_{eff} X^2$$



$$\left.\begin{array}{l} k_{eff\,\theta} \\ C_{eff\,\theta} \\ I_{eff} \end{array}\right\} \theta$$

برای معادل سازی، ابتدا باید مشخص کنیم که سیستم معادل را خطی در نظر گرفته ایم یا زاویه ای



$$m_{eff}\ddot{x} + k_{eff}x + c_{eff}\dot{X} = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m\dot{X}^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2$$

$$(r_1 + r_2)\theta = x$$

$$T = \frac{1}{2} m\dot{X}^2 + \frac{1}{2} I_c \left(\frac{\dot{X}}{r_1 + r_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[m + \frac{I_c}{(r_1 + r_2)^2}\right]\dot{X}^2 \rightarrow m_{eff} = m + \frac{I_c}{(r_1 + r_2)^2}$$

$$U = \frac{1}{2} k_2 (x_B)^2 + \frac{1}{2} k_1 x^2 = \frac{1}{2}\left[k_2\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}\right) + \mathrm{k}_1\right] x^2 \rightarrow k_{eff} = k_1 + k_3\left(\frac{2r2}{r_1 + r_2}\right)^2$$

$$x_B = 2r_2\theta = 2r_2\left(\frac{x}{r_1 - r_2}\right)$$

برای پیدا کردن C_{eff} باید کار روی فنر را پیدا کنیم حال می خواهیم انتگرال مکان را به انتگرال زمان تبدیل

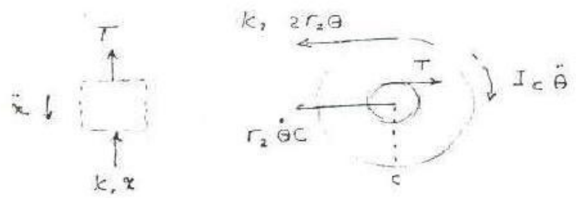
کنیم. چون دامنه همواره در ارتعاش آزاد تغییر می کند، نمی توان در کار و انتگرال قرار داد،پس نمی توان از راه ارژی کار کرد باید از راه نسبیت کار کنیم. یعنی اگر دمپر به جایی که هست در نقطهA به دیسک وصل بود، X آن با X برابر می شد و الان فقط نسبتی از آن است.

$$W = \int\int F dx - \int c\dot{x} dx$$

$$x - x \sin w_n t$$

$$\frac{dx}{dt} - \dot{x} - x w_n \cos w_n t$$

روش دیگر این است که از روش نیوتن-اویلر، معادله دیفرانسیل خود سیستم را پیدا کنیم.



$$-k_1 x - T - m\ddot{x}$$

$$\sum \mu_c = I_c \ddot{\theta}$$

$$-r_2^2 \dot{\theta} c - k_2 (2r_2)\theta + T(r_1 + r_2) - I_c \ddot{\theta}$$

$$r_2^2 c\dot{\theta} + k_2 (2r_2)^2 \theta - (r_1 + r_2)(-k_1 x - m\ddot{x}) + I_c \ddot{\theta} = 0$$

$$I_c \ddot{\theta} - r_2^2 c\dot{\theta} + \left[k_2 (2r_2)^2\right]\theta - (r_1 + r_2) k_1 x + (r_1 + r_2) m\ddot{x} = 0$$

$$\theta \frac{x}{r_1 - r_2}$$

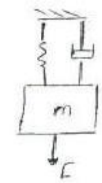
$$I_c \frac{\ddot{x}}{r_1 - r_2} - (r_1 - r_2) m\ddot{x} + r_2^2 c \frac{\dot{x}}{r_1 - r_2} + k_2 (2r_2)^2 \frac{x}{r_1 - r_2} + (r_1 - r_2) k_1 x = 0$$

از معادله دیفرانسیل نمی توان معادل سازی کرد چون معادله دیفرانسیل ممکن است در یک عددی ضرب یا بر یک عددی تقسیم شود. پس w_n درست در می آید ولی سایر معادل ها نه!

بنابراین باید از انرژی جنبشی و پتانسیل m_{eff} و k_{eff} را پیدا کنیم. بعد از معادله اویلر، m_{eff} و k_{eff} را با مقادیر بدست آمده مقایسه می کنیم. مجموعه را یک عدد ضرب یا تقسیم می کنیم تا ضرایب x و $\ddot{x}$ همان m وk معادل شوند. در این جا ضریب $\dot{x}$ ما همان C_{eff} خواهد شد.

$$\rightarrow C_{eff} = (\frac{r_2}{r_1 - r_2})^2 c$$

ارتعاشات با تحریک خارجی



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

در این مرحله به حل همگن کاری نداریم چون شرایط اولیه مربوط به مدت ها قبل است و لحظه ای که ما بررسی می کنیم از آن زمان گذشته است.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin wt$$

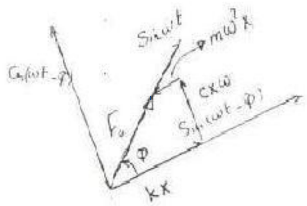
سیستم های خطی اگر تحت تحریک هارمونیک قرار بگیرند عکس العمل باید هارمونیک باشد با همان فرکانس ولی دارای دامنه ای غیر از دامنه آن نیرو باید باشد و اختلاف بازی هم باید داشته باشد. پس جواب خصوصی ما خواهد بود.

$$x = x \sin(wt - \varphi)$$
$$\dot{x} = xw \cos(wt - \varphi)$$
$$\ddot{x} = -xw^2 \sin(wt - \varphi)$$

ین جواب خصوصی باید در معادله اصلی صدق کند. معادله دیفرانسیل یک معادله برداری است که می توان دو مجهول را از آن پیدا کرد. در معادله دیفرانسیل $\dot{x}$ و x دو متغیر عددی هم اند.

$$-mw^2x \sin(wt - \varphi) + cxw \cos(wt - \varphi) + kx \sin(wt - \varphi) = F_0 \sin wt$$

یک روش بسط دادن sin و cos است و مساوی قرار دادن ضرایب sin و cos.

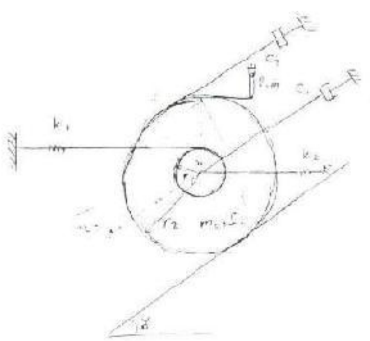


$$\tan\varphi = \frac{cxw}{kx - mw^2 x} \rightarrow \tan\varphi = \frac{cw}{k - mw^2}$$

$$(k - mw^2)^2 x^2 + (cw)^2 x^2 = F_0^2$$

دامنه ± ندارد چون فقط مقدار است.

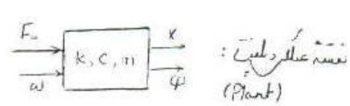
$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2 + (cw)^2}}$$



برای نوسان کوچک:

I_{eff}	m_{eff}
k_{eff}	k_{eff}
c_{eff}	c_{eff}
θ	

تاثیر پارامتر های ورودی با توجه به پارامتر های تعریف کننده سیستم:



مثلا نرم افزاری که m, c, k, w, F_o را به آن می دهیم و x و φ را به ما می دهد.

باید تعداد این متغیر ها را کم کنیم یا ان ها را بی بعد کنیم. و یک ترکیب بین پارامتر های سیستم ورودی ها ایجاد کنیم تا تعداد ورودی ها کم شود.

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = w_n$$

$$\frac{c}{\sqrt[2]{km}} - \xi$$

$$x - \frac{F_o}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}} \rightarrow \div \frac{x}{F_o} - \frac{1/k}{1/k\,\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}}$$

$$x = \frac{xk}{F_o} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{m}{k}w^2)^2 + (\frac{cw}{k})^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{m}{w_n}w^2)^2 + (2\xi\frac{w}{w_n})^2}}$$

$$\frac{w}{w_n} - r$$

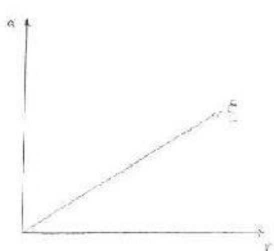
نسبت فرکانسی که سیستم با آن تحریک شده به فرکانس طبیعی سیستم.

$$\frac{cw}{k} - \frac{cw}{k}.\frac{C_c}{C_c} - \xi\frac{\sqrt[2]{km}}{k}w = 2\xi\frac{w}{w_n}$$

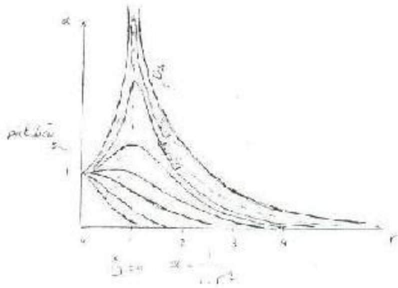
$$x - \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 - (2\xi r)^2}}$$

معادله بی بعد که هر دستگاه را مدتی قابل استفاده می کند.

توسط matlab می توان منحنی سه بعدی معادله بالا را رسم کرد. ولی با دست، عملا برای ξهای مختلف، منحنی $\propto$-r را رسم می کنیم.



$$\propto = \frac{xk}{F_o}$$

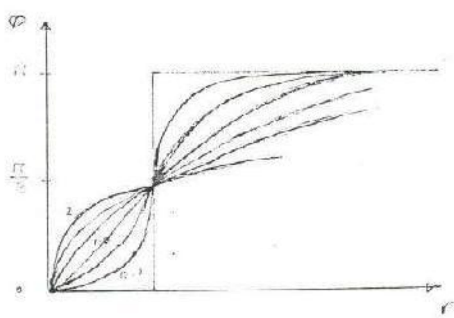


وقتی میرایی نداشته باشیم $(\xi = 0)$و سیستم با فرکانس طبیعی سیستم نوسان کند $(w = w_n)$، دامنه به سمت بی نهایت می رود⇐ تشدید رخ می دهد.

(حتی اگر میرایی کم هم باشد، دامنه باز زیاد می شود.)

منظور از اینکه دامنه بی نهایت می شود،یعنی سیستم تخریب می شود مثل کسی که می میرد، روحش به سمت بی نهایت می رود.

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{cw}{k - mw^2} = \tan^{-1}\frac{\frac{cw}{k}}{1 - \frac{m}{k}w^2} = \tan^{-1}\frac{2\xi r}{1 - r^2}$$



$\xi = 0$

$\tan\varphi - \frac{0}{r - r^2}$

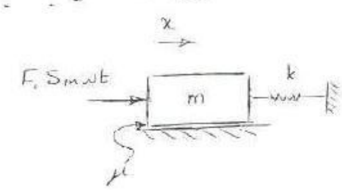
$r - 1$

$\tan^{-1}\frac{2\xi}{0} - \varphi$

$r < 1 \varphi = 0^+$

$r = 1 \varphi = ?$

$r > 1 \varphi - 0$



$$m\ddot{x} + kx = \pm\mu mg + F_0 \sin wt$$

چون مسئله ناپیوسته است، شرایط اولیه هم در مقدار جواب خصوصی تاثیر گذارند.پس:

$$x(t) = x\ \sin(wt - \varphi) + \frac{\mu mg}{k} + x_1 \sin w_n t - x_2 \cos w_n t$$

$\dot{x} < 0$

$x(0) = x_0$

$\dot{x}(0) = u_0$

$$x(t) = x\ \sin(\mathrm{wt} - \varphi) - \frac{\mu mg}{k} + x_3 \sin w_n t + x_q \cos w_n t$$

$\dot{x} > 0$

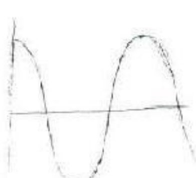
$x(\pi)$

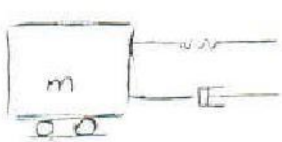
$\dot{x}(\pi)$

این تحریک، میرایی را جبران می کند و دامنه ثابت می ماند.(ممکن است از دامنه 'ولیه کمتر شود، ولی در نهایت وقتی به صورتsteady شده دامنه ثابت می ماند)

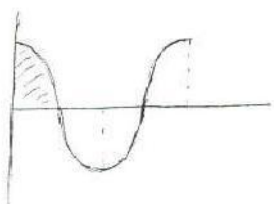
بهترین راه برای حل چنین معادله هایی، جاگزین کردن میرایی خشک با یک میرایی ویسکاز است.

(یک بار از روش قبلی هم سعی کنیم معادله را حل کنیم.)





$$F_c - c\dot{x}$$
$$w_c = \int F_c dx - \int c\dot{x} dx$$
$$x = x \sin wt$$
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = xw \cos wt$$
$$w_c = \int c(xw \cos wt)(xw \cos wt)dt$$
$$w_c = cx^2 w^2 \int_0^{2\pi/w} \cos^2 wt dt$$
$$w_c - cx^2 w^2 \int_0^{2\pi/w} (\frac{1}{2} - \frac{\cos 2wt}{2})dt$$
$$w_\mu - \int F_\mu dx = \int \mu mg dx$$
$$dx = xw \cos wt dt$$
$$w_\mu = \int_0^{2\pi/w} \mu mgxw \cos wt dt = \mu mgxw \int_0^{2\pi/w} \pm \cos wt c dt$$



ما مقداری انرژی را می خواهیم پس در جایی که cos مثبت است، cos+ را در نظر می گیریم. و در جایی که cos منفی است، cos را در نظر می گیریم.

$$w_\mu - 4\mu mgxw \int_0^{\pi/2w} \cos wt dt - 4\mu mgxw \frac{1}{w} - q\mu mgx$$
$$w_c = ceqx^2 w\pi$$
$$w_\mu = w_c \quad > ceq = \frac{4\mu mg}{xw\pi}$$

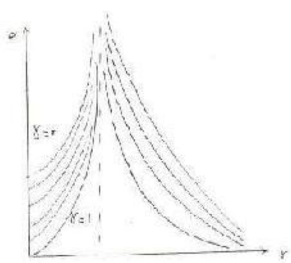
دیگر لازم نیست مسئله را دوباره حل کنیم، کافی است در حل مسئله قبلی به جای c، ceq را به دست آوریم.

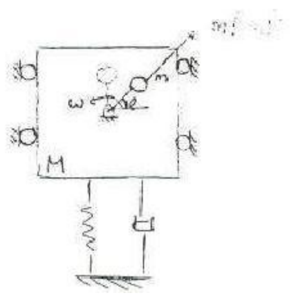
$$x = \frac{F_o}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (\frac{4\mu mg}{xw\pi}w)^2}} \rightarrow x^2(k - mw^2)^2 + (\frac{4\mu mg}{\pi})^2 = F_0^2$$

$$x = \sqrt{\frac{F_0^2 - (\frac{4\mu mg}{\pi})^2}{(k - mw^2)^2}}$$

$$x = \frac{4\mu mg}{\pi F_0}$$

میرایی خشک به ازای کلیه مقادیر X دامنه را بی نهایت می کند پس در رفع رزوناس به ما کمکی نمی کند.X تا جایی می تواند بزرگ شود که برابر ۱ شود. اگر Xبیشتر از ۱ شود، $4\mu mg > \pi F_0$می شود یعنی نیروی اصطحکاک بیشتر از نیروی وارده است و اصلا حرکتی نداریم.





مولفه عددی نیروی گریز از مرکز به جرم m وارد می شود.$\rightarrow mpw^2 \sin wt$

$$M\ddot{X} + c\dot{X} + kx = mpw^2 \sin wt$$

$$x(t) = x\sin(wt - \varphi)$$

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 - (cw^2)^2}} = \frac{mpw^2}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{cw}{k - mw^2}$$

مرحله اول: حل معادله دیفرانسیل و بدست اوردن دامنه و اختلاف فاز

در قسمتی دامنه تابعی از w است و با افزایش w دامنه هم زیاد می شود، حالت قبلی Fo ثابت بود!

مرحله دوم: بی بعد کردن

نمی توان صورت کسر را به طرف دیگر برد چون W متغیر است و نمی توان هر دو طرف تساوی w داشت.

$$x = \frac{mpw^2 / k}{\sqrt{(1 - (\frac{w}{w_n})^2)^2 + (2\xi \frac{w}{w_n})^2}}$$

$$x = \frac{Mmpw^2 / km}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{\frac{mp}{m}(\frac{w}{w_n})^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 - (2\xi r)^2}}$$

حال قسمت ثابت صورت را به طرف دیگر تساوی می بریم.

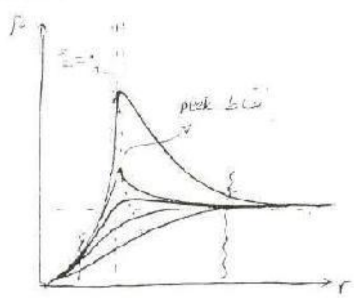
$$B = \frac{xM}{mp} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

$$\ddot{x}M = \dot{F}$$

$$\dot{X}M = \vec{g}$$

$$xM = \llcorner$$



$$\xi = 0$$

$$p = \frac{r^2}{1-r^2}$$

Peek بیشتر از r=۱ است

در فرکانس پایین جرم اگر کوچک باشد دامنه هیچ تغییر نمی کند، در تشدید بیشترین دامنه را داریم.

اگر w از تشدید بیشتر شود، یعنی در wهای خیلی بزرگ (نیروی وارد به جرم زیاد می شود و دمپر هم زیاد تر کار می کند) نیرو و دمپر با هم به تعادل می رسند و دامنه ثابت می ماند.(B=۱)

مثلا برای طراحی یک ماشین لباسشویی که نلرزد (موقع آب گیری) باید kو c را طوری طراحی کنیم که یا r خیلی بزرگ باشد یا خیلی کوچک. چون w دست ما نیست، باید w_n را خیلی بزرگتر از w در نظر بگیریم پس باید k و c خیلی بزرگ باشند با این کار عملا ماشین لباس شویی نوسان نمی کند ولی در عوض کل

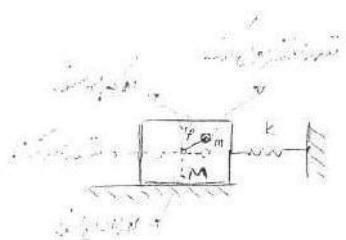
نیرو به پایه ماشین منتقل می شود و کل ساختمان می لرزد. پس این کار اصولی نیست، پس باید در قسمت بعد از r=1 از منحنی در نظر بگیریم.

$$w = 500 rpM$$
$$w_n > 500 rpm$$
$$w_n = \sqrt{k/m}$$

پروژه مطالعات ویژه:

تحلیل یک ماشین لباسشویی ← طراحی یک ماشین لباسشویی با مواد مختلف و بهینه سازی

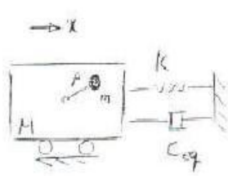
مسئله نوع برای میرایی خشک:



M وقتی در جهت افقی قرار می گیرد، به صورت یک نیروی محرک خارجی عمل می کند. وقتی m عمودی قرار می گیرد روی مقدار N تاثیر می گذارد، قبلا همین معادله را داشتیم ولی N ثابت بود و F_O هم ثابت بود.

$$M\ddot{x} + kx \pm \mu N - mpw^2 \sin wt$$

چون مستقیما نمی توان این مسئله را حل کرد، از معادل سازی استفاده می کنیم.



$$ceq = \frac{4\mu mg}{\pi x w}$$
$$x = \frac{mpw^2}{\sqrt{(k - Mw^2)^2 + (ceqw)^2}}$$

$$w_\mu - \iint F_f\,dx - \int \mu(mg - mpw^2 \sin wt)dx - \int \mu mg\,dx - \int mfw^2 \sin wt\,dx$$
$$w_\mu - \int_0^{2\pi/w} \mu mg\,(xw \cos wt)dx \quad \int_0^{2\pi/w} mpw^2 \sin wt\, xw \cos wt\,dt$$

اگر فرض کنیم کار قسمت دوم ناچیز است، ceq مثل حالت قبلی همان $\frac{4\mu mg}{\pi x w}$ بدست می آید.

$$x = \frac{mpw^2}{\sqrt{(k - \mu w^2)^2 + (ceqw)^2}}$$

$$x^2\left[(k - \mu w^2)^2 + \left(\frac{4\mu mgw}{\pi xw}\right)^2\right] = (mpw^2)^2$$

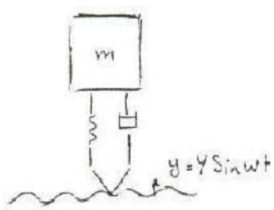
$$x^2\left[(k - \mu w^2)^2\right] = -\left(\frac{4\mu mg}{\pi}\right)^2 + (mpw^2)^2$$

$$x = \frac{\sqrt{(mpw^2)^2 - \left(\frac{4\mu mg}{\pi}\right)^2}}{k - \mu w^2}$$

$$x = \frac{\sqrt{\frac{(mpw^2)^2\mu^2}{k^2\mu^2} - \left(\frac{4\mu mg}{\pi k}\right)^2}}{1 - r^2}$$

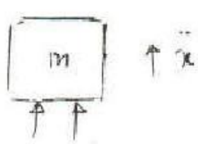
$$\frac{xM}{mp} = \frac{\sqrt{\left(\frac{w}{w_n}\right)^4 - \left(\frac{4\mu M^2 g}{\pi kmp}\right)^2}}{1 - r^2}$$

یک حرکت مواج به سیستم وارد می شود.



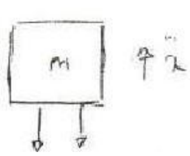
چند حالت برای جابجایی x وy داریم: اگر $y > x$ باشد فنر فشرده می شود.

فرض $\dot{y} > \dot{X}$



$$c(\dot{y} - \dot{X})$$
$$k(y - x)$$
$$\sum F_x = m a_x$$
$$k(y - x) + c(\dot{y} - \dot{X}) = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + kx + c\dot{X} = ky + c\dot{y}$$

اگر $y < x$باشد فنر کشیده می شود.

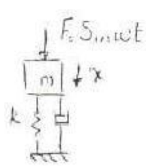


$$k(x-y)$$
$$c(\dot X-\dot y)$$
$$\sum F_x = ma_x$$
$$-k(x-y)-c(\dot X-\dot y)=m\ddot x$$
$$m\ddot x + kx + c\dot x = ky + c\dot y$$

مسئله نوع سوم که دو نوع تحریک هارمونیک برای ان داریم:

$$m\ddot x + c\dot x + kx = ky\sin wt + cyw\cos wt$$

مسئله نوع اول که یک تحریک هارمونیک دارد:



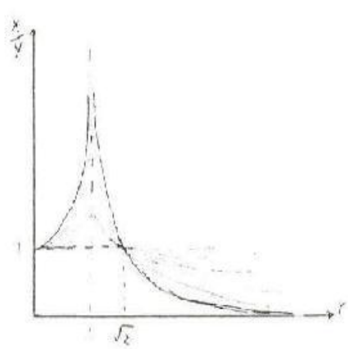
$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(k-mw^2)^2+(cw)^2}}$$
$$x = x\sin(wt-\varphi)$$
$$mx + c\dot x + kx = F_0\sin wt$$

برای حل مسئله نوع سوم sin و cos را با هم ترکیب می کنیم تا تحریک sin خالص بدست آید، تابع حاصل دارای یک دامنه و یک اختلاف باز است.

$$m\ddot x + c\dot x + kx = \sqrt{(ky)^2+(cyw)^2}\sin(wt \quad x)$$

$$x = \frac{\sqrt{(ky)^2+(cyw)^2}}{\sqrt{(k-mw^2)^2+(cw)^2}} \to x = \frac{\sqrt{y^2(1+(\frac{cw}{k})^2)}}{\sqrt{(1-(\frac{w}{w_n})^2)^2+(\frac{cw}{k})^2}}$$

$$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{1+(2\xi r)^2}{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$



در ξکوچک منحنی در $r\to\infty$ به سمت صفر می رود

در ξبزرگ منحنی در $r\to\infty$ به سمت یک می رود.

منحنی قبل از $\sqrt{2}$ هیچ وقت کمتر از یک نمی شود.

اگر بخواهیم سیستمی برای یک خودرو طراحی کنیم که حرکت

پایه به جرم منتقل نشود، ξ باید کوچک باشد $\xi \ll 1$ (مثلا در حد ۰,۱ و ...)

R بزرگتر از یک باشد $r \gg 1$ (مثلا ۳، ۴ یا ۵)

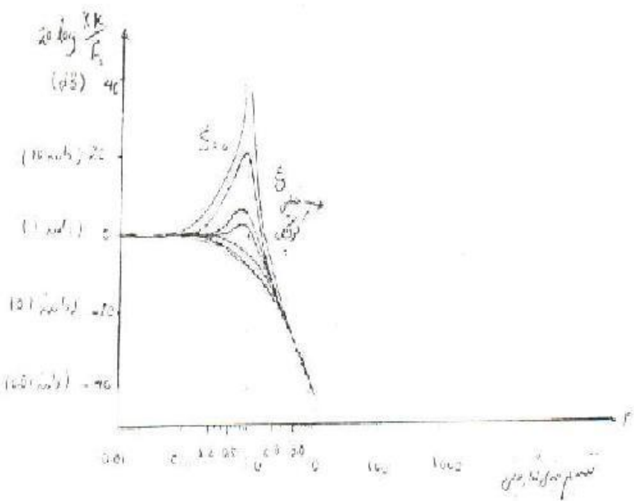
$$w = 5w_n \rightarrow w_n = w/5$$

اگر بخواهیم به ازای یک حرکت کوچک پایه، جرم، تغییرات زیادی پیدا کند(مثل مخلوط کن)

r باید بین ۰ تا $\sqrt{2}$ باشد (نزدیک به یک)

ξ باید کوچک باشد.

نوع اول:



$$20\log\frac{kx}{F_0} = -20\log\left[(1-r^2)^2+(2\xi r)^2\right]^{1/2}$$

$$= -10\log\left[(1-r^2)^2+(2\xi r)^2\right]$$

$$= 10\log r^{q}$$

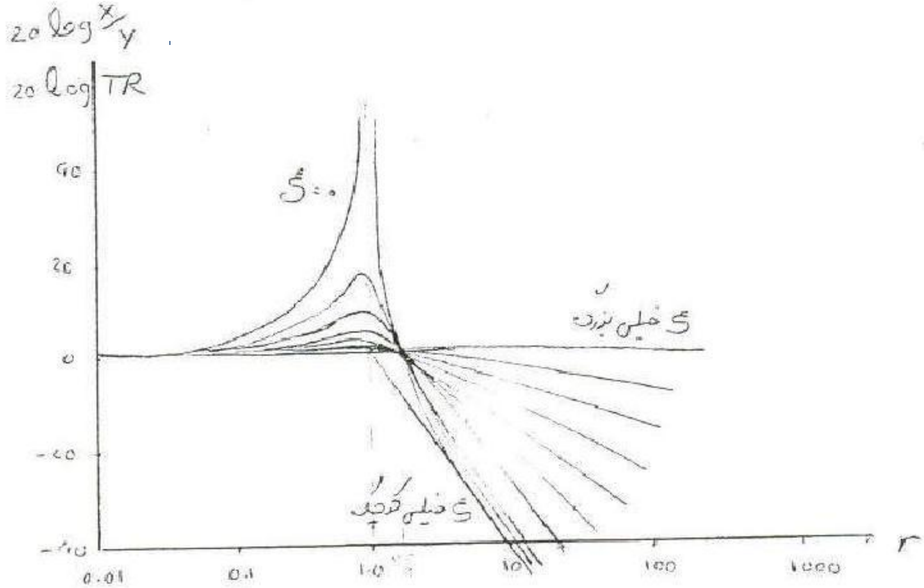
$$dB = -40\log r$$

$$\frac{xk}{F_0} = \infty = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

صفر در حد ∞ است.

برای اینکه دامنه هم رنج زیادی را پوشش دهد آن را لگاریتمی نمی کنیم بلکه از واحد دسی بل استفاده می کنیم.

$$dB = 20\log\frac{xk}{F_0}$$



$$20\log\frac{x}{y} - 20\log\left[1+(2\xi r)^2\right]^{1/2} - 20\log\left[(1-r^2)^2 - (2\xi r)^2\right]^{1/2}$$
$$= 10\log\left[1+(2\xi r)^2\right] - 10\log\left[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2\right]$$

برای ξ خیلی کوچک

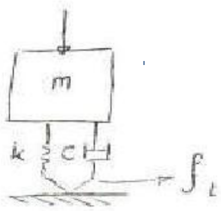
در r خیلی بزرگ قسمت اول صفر می شود (نسبت به قسمت دوم) و بقیه قضیه مثل مسئله حالت اول می شود. (شیب بجانب $40\,dB/$ برای ξ خیلی بزرگ

R خیلی بزرگ حاصل صفر می شود یعنی شیب خط صفر است.

مسئله نوع چهارم:

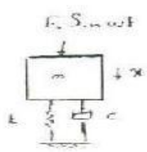
وسیله ای مثل پیکور ها که با آن آسفالت خیابان را سوراخ می کنند وسیله ای است که یک نیروی ارتعاشی خیلی کم را به یک نیروی ارتعاشی خیلی زیاد تبدیل می کند.

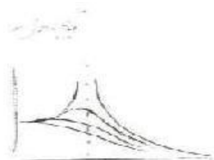
$F = F = \sin wt$

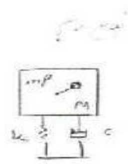


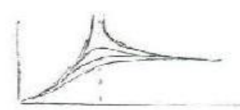
$$f_t = kx - c\dot{x}$$
$$x = x\,\sin(wt - \varphi)$$
$$f_t = xk\,\sin(wt - \varphi) - cxw\,\cos(wt - \varphi)$$
$$f_{t_0} = \sqrt{(kx)^2 + (cwx)^2} = x\sqrt{k^2 + (cw)^2}$$
$$\frac{F_{0c}}{F_0} = \frac{x\sqrt{k^2 + (cw)^2}}{F_0} \quad , \quad \frac{F_{0t}}{F_0} = \frac{\sqrt{k^2 - (cw^2)}}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}} = \frac{x}{y} = TR$$

نسبت انتقال در مسئله نوع سوم و چهارم یکی است و نمودار های مسئله نوع چهارم مثل نوع سوم است.

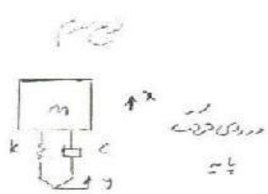


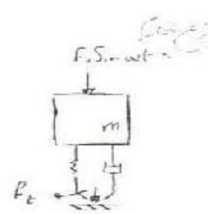


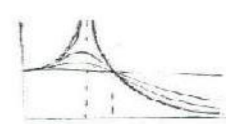




$$\frac{kx}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin wt$$
$$\frac{Mx}{mp} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$
$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mpw^2 \sin wt$$



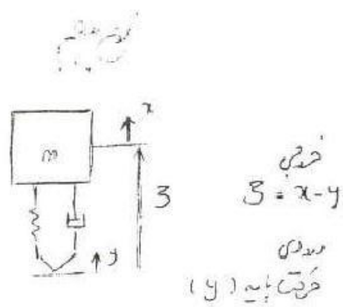




$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{y}+ky$$

$$\frac{F_t}{F_0}=\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$



$$k(x-y)+c(\dot{x}-\dot{y})=-m\ddot{x}$$

$$x-y=\mathfrak{Z}$$

$$k\mathfrak{Z}+c\dot{\mathfrak{Z}}+m(\ddot{\mathfrak{Z}}+\ddot{y})=0$$

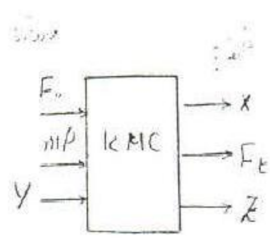
$$m\ddot{\mathfrak{Z}}+c\dot{\mathfrak{Z}}+k\mathfrak{Z}=-m\ddot{y}$$

$$m\ddot{\mathfrak{Z}}+c\dot{\mathfrak{Z}}+k\mathfrak{Z}=myw^2\sin wt$$

$$\mathfrak{Z}=z\sin(wt-\varphi)$$

$$z=\frac{myw^2}{\sqrt{(k-mw^2)^2+(cw)^2}}=\frac{ry^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

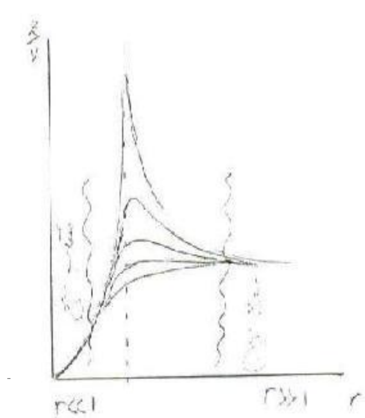
$$\frac{z}{y}=\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$



$$F_0\xrightarrow{1}x$$
$$F_0\xrightarrow{4}F_t$$
$$mp\xrightarrow{2}x$$
$$mp\xrightarrow{6}F_t$$
$$y\xrightarrow{3}x$$
$$y\xrightarrow{7}F_t$$
$$y\xrightarrow{5}z$$

در فرهنگ قدیم 7 به معنای بی نهایت است.

به صورت پایه فقط همین 7 حالت وجود دارد. ولی می توان تعداد ورودی ها را افزایش داد و سایر خروجی ها را بدست آورد.



در دو محدوده $r \ll 1$ و $r \gg 1$ ، ξ بی تاثیر است و نمودار

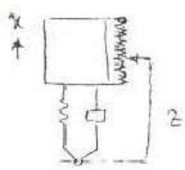
ها رو هم می افتند.

ξ معمولا بین ۰ و ۰,۱ یعنی کوچک است.

$$r \ll 1 \rightarrow \frac{z}{y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{1+o}}$$

$$\frac{z}{y} \approx r^2 - \frac{w^2}{w_n^2} \rightarrow yw^2 = z \quad w_n^2$$

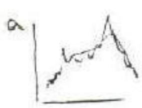
مثلا نسبت یک رئوست روی جسم و اندازه گیری جریان و...



$$e - 1 - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2-(2\xi r)^2}}}$$

با یافتن z و نصب آن در w_n^2 شتاب پایه بدست می اید. پس دستگاه بالا یک شتاب میخ است.

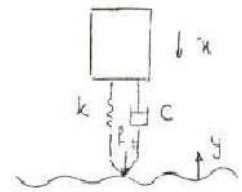
اگر ما یک منحنی شتاب نوسانی با noise داشته باشیم، برای انتگرال گیری آن و یافتن منحنی w ، عملا از یک منحنی صاف انتگرال گرفته می شود. ولی اگر v دارای noise باشد منحنی a که مشتق آن است یک صفحه سیاه می شود.



در $r \gg 1$ عملا $\frac{z}{y} - 1$ یعنی $x = 0$ یعنی جرم حرکت نمی کند.

در این حالت ممکن است به چنین جرمی نیروی بسیار زیادی وارد شود. در هنگام زلزله خود زمین می لرزد پس ما به نقطه ثابتی نیاز داریم که لرزش زمین را نسبت به آن بسنجیم و مقدار این لرزش را محاسبه کنیم در $r \gg 1$ عملا ما این نقطه ثابت (جسم m) را داریم.

چیزی که باید پیدا کنیم: $\frac{F_{t0}}{ky}$

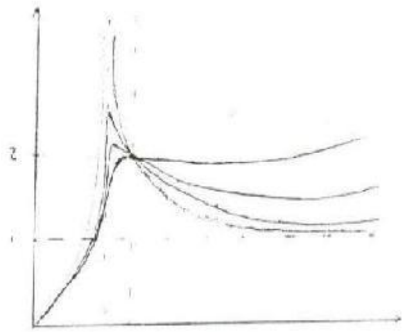


$$y = \gamma \sin wt$$
$$x = x \sin(wt - \varphi)$$
$$f_t = F_{t0} \sin(wt - 6)$$

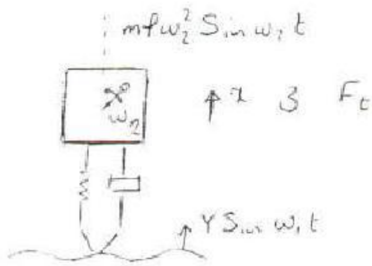
$$f_t = k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y})$$
$$(x - y)k - c(\dot{y} - \dot{x}) = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} - (x - y)k + (\dot{x} - \dot{y})c = f_t$$
$$m\ddot{x} = F_{t0} \sin(wt - \theta)$$
$$mxw^2 \sin(wt - \varphi) = F_{t0} \sin(wt - \theta)$$
$$x = Y \frac{\sqrt{k + (cw)^2}}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}}$$
$$mYw^2 \frac{\sqrt{k^2 + (cw)^2}}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}} = F_{t0}$$
$$\rightarrow \frac{F_{t0}}{kY} = \frac{r^2\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

دامنه FRF (تابع Fnequency response function) به ازای فرکانس های مختلف با ξ های مختلف را می یابیم.

–



عمومی: چون هر کدام با یک دامنه حرکت می کنند و



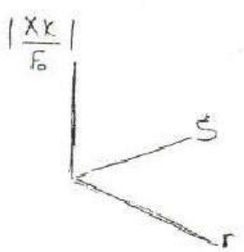
یک W نمی توان دامنه را تعریف کرد، می توان nenponse

را تعیین کرد ولی دامنه ! !

حامی: اگر به صورت ساده تر. دو فرکانس را برابر کنیم می توان دو معادله

را ترکیب کرد و یک دامنه پیدا کرد در این نوع مسئله ها نمی توان FRF را رسم کرد.

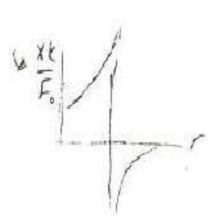
اگر w و w_0 ضریبی از هم باشند. هرچند سیکل یک بار، شکل تکرار می شود و عملا نقطه pick خواهد داشت.



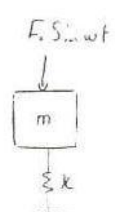
تمرین: ۱–مسئله نوع ششم و هفتم را کامل حل کنید و نمودار FRF آن را رسم کنید.

۲–با matlab هر ۷ نوع را به صورت سه بعدی رسم کنید.

اگر برای رسم نمودار قدر مطلق قرار بدهیم نمودار را منفی هم می کشد که غلط است.

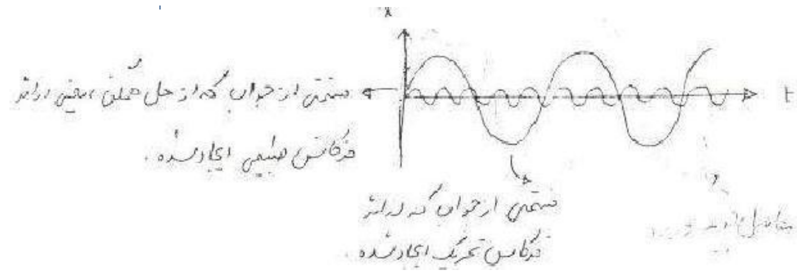


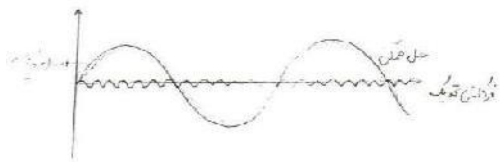
چون میرایی داخل سیستم نیست اثر شرایط اولیه و حل همگن حذف نمی شود.

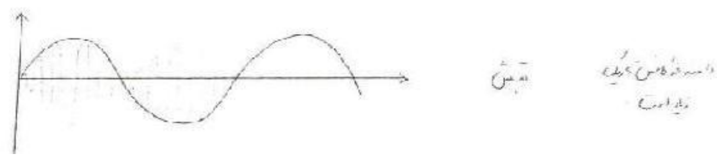


پس $x(t) - x(w, w_n, F_0)$

اگر w و w_n ضریب صحیحی از هم باشند، منحنی تکرار می شود.







$$G \rightarrow w = \frac{l\pi}{G}$$

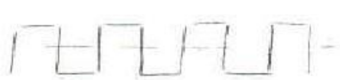
$$F(t) - \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos wt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nwt$$

$$a_n - \frac{1}{G}\int_{-G/2}^{G/2} f(t)\cos nwt\,dt$$

$$b_n - \frac{1}{G}\int_{-G/2}^{G/2} f(t)\sin nwt\,dt$$

$$f(t) \rightarrow \text{زوج}\begin{cases} a_n \neq 0 \\ b_n - 0 \end{cases} \qquad f(t) \rightarrow \text{فرد}\begin{cases} a_n - 0 \\ b_n \neq 0 \end{cases}$$

محور های مختصات را می توان چنان انتخاب کرد که تابع زوج یا فرد یا نه زوج فرد شود.



$F = F_0 \sin wt$ $\qquad$ $F = F_0 \cos wt$

$x = x \sin(\mathrm{wt} - \varphi)$ $\qquad$ $x = x \cos(\mathrm{wt} \quad \varphi)$

برخی توابع هم متناوب اند ولی هارمونیک نیستند (نه زوج نه فرد)

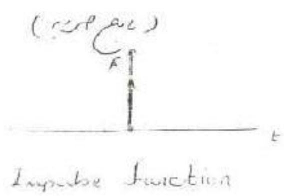
توابع گذرا توابعی هستند که نمی توان یک دوره برای آن ها تعریف کرد

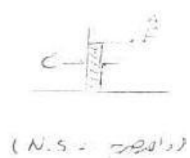
توابع گذرا زمانی شروع شده و متوقف می شود که نسبت به مدت مطالعه یا آزمایش زیاد نیست. (بی نهایت محسوب نمی شود)

توابع متناوب از ∞ (مدت طولانی نسبت به مطالعه) شروع شده و تا ∞+ادامه می یابد.

توابع گذرا تا لحظه صفر، صفر اند و از $t - 0$ شروع می شوند.

نوع اول: ساده ترین نوع تابع گذرا، تابعی است که قبل و بعد از صفر، صفر باشد و فقط در $t = 0$ مقدار داشته باشد.



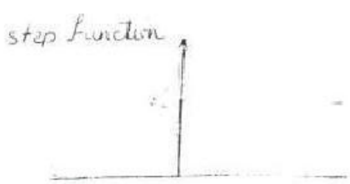


چون ضربه کمیت دارد باید بتوان مقدار آن را نشان داد. این مقدار همان سطح زیر منحنی فوق است.

وقتی $\varepsilon \rightarrow$ رود، دامنه به سمت بی نهایت می رود.

$F_{(t)} = F\delta(\mathrm{t})$ $\qquad$ $F_{(t)} = Fdt$

نوع دوم: تابع پله ای



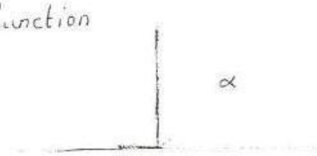
در $t - 0$ تابع غیر تحلیلی است چون بی نهایت مقدار دارد.

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ F_0 & t>0\end{cases}$$

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$ تابع پله واحد $\rightarrow F(t)=F_0u(t)$

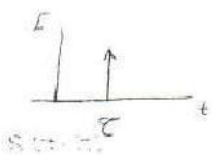
نوع سوم، توابع شیب دار

Ramp Function



$$F(t)=\begin{cases}\propto t & t\geq 0\\ 0 & t\leq 0\end{cases} \qquad F(t)=\propto tu(t)$$

گاهی مثلا در تابع ضربه، ضربه در $t=0$ نخواهد بود.



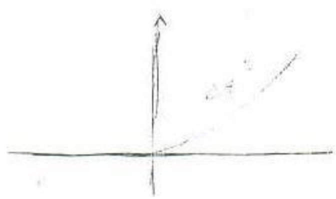
$$F_{(t)}=\hat{F}\delta(\text{t}-G)$$

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t>0\\ 1 & t=0\\ 0 & t<0\end{cases}$$ تابع ضربه واحد

$$F_{(t)}=F_0u(t-G)$$

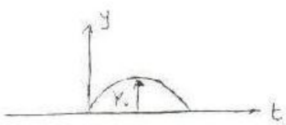
$$F_{(t)}=\propto(t-G)\,\text{u}(\text{t}-G)$$

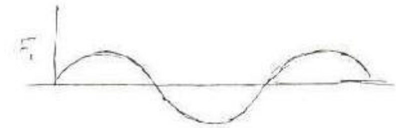
نوع چهارم:



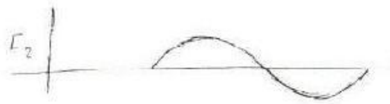
نوع پنجم:

$F = F_0 \sin wt \quad U(t)$

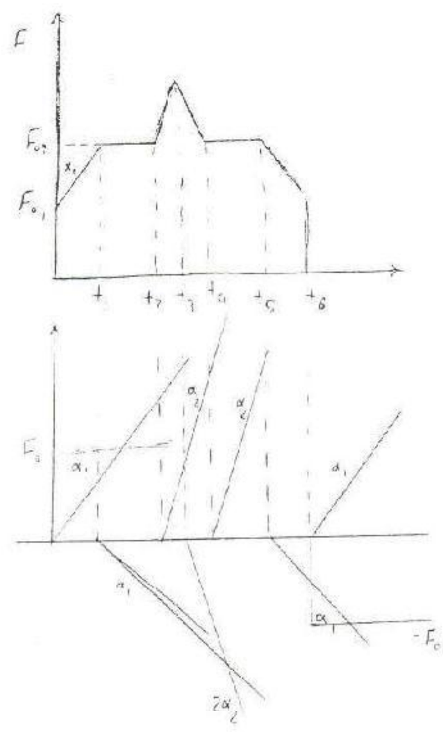




$U(t)\, F_1 = F_0 \sin wt$



$F_2 = F_0 \sin\left\lfloor w\,(t - G/2)\right\rfloor U(t - G/2)$



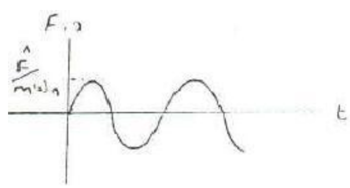
$\hat{F}$فقط در $t=0$ وجود دارد.

درست بعد از ضربه، باید سرعت را داشته باشیم تا اندازه حرکت خطی بعد از ضربه را پیدا کنیم.

$$t>0$$
$$m\ddot{x}+kx=0$$
$$x(0)=0$$
$$\dot{x}(0)=\frac{\hat{F}}{m}$$

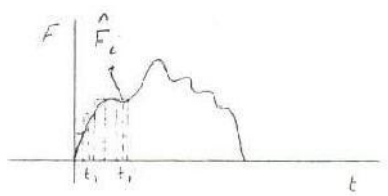
$$x(t)=A\sin w_n t \quad B\cos w_n t$$
$$x(t)=\frac{\hat{F}}{mw_n}\sin w_n t$$

$w=w_n$ فرکانس طبیعی



$$\hat{F}=1 \rightarrow$$
$$h(t)=\frac{1}{mw_n}\sin w_n t$$

عکس العمل در برابر ضربه واحد



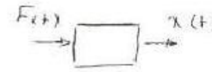
$$F_{(t)}=\sum_{1}\hat{F}_i$$

تابع رو به رو مجموعه ای از چند تابع مستطیلی است که وقتی عرض این ها به سمت صفر رود، هر کدام یک تابع ضربه اند.

فلسفه استفاده از توابع ضربه ای در پیدا کردن تحریک های گذرا

Xولین تحریک ضربه ای ۱

۲ X دومین تحریک ضربه ای



$$x_1 - \frac{\hat{F}_1}{mw_n}\sin w_n t$$

$$x_2 = \frac{\hat{F}_2}{mw_n}\sin w_n (t \quad t_2)$$

$$x_3 = \frac{\hat{F}_3}{mw_n}\sin w_n \sin w_n (t \quad t_3)$$

$$x(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{F}}{mw_n}\sin w_n (t - t_i)$$

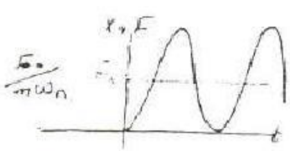
$$x(t) - \int_0^t \hat{F}_i \sin w_n (t - ti)\, d\lambda$$

$$x(t) = \int_0^t f(\lambda) h(t \quad \lambda)\, d\lambda$$

$$h(t) = \frac{1}{mw_n}\sin w_n t$$

هر تابع گذرایی که تا قبل از صفر،صفر باشد $= f(\lambda)$

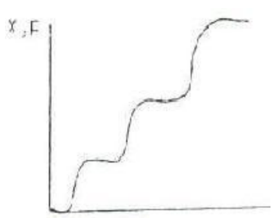
تابع پله ای:



$$x(t) - \int_0^t \frac{F_0}{mw_n}\sin w_n (t - \lambda)\, d\lambda$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{mw_n} \left.\frac{\cos w_n (t - \lambda)}{w_n}\right|_0^t \rightarrow x(t) = \frac{F_0}{mw_n^{2}}[1 - \cos w_n t]$$

تابع شیب:

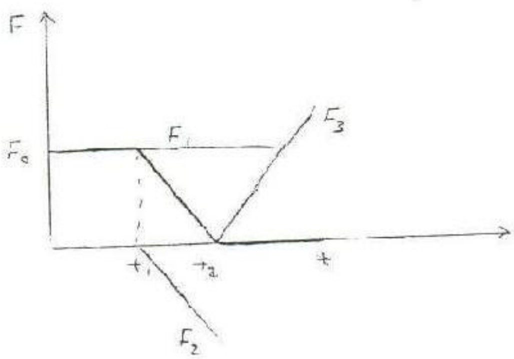


$$F_{(t)} = \begin{cases} at & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{\alpha \lambda}{mw_n}\sin w_n (t - \lambda)\, d\lambda - \frac{\alpha}{mw_n}\int \lambda \sin w_n (t - \lambda)\, d\lambda$$

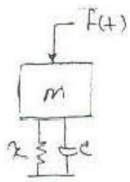
$$h_{(t)} - \frac{\alpha}{mw_n^{2}}\left[t - \frac{\sin w_n t}{w_n} \right.$$

$$F_{(t)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \propto t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \qquad x(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \propto \lambda^2 \frac{\sin w_n (t-\lambda)}{m w_n} d\lambda$$



$$x(t) = x_1 u(t) + x_2 u(t-t_1) + x_3 u(t-t_2)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m w_n^2}(1-\cos w_n t)u(t) - \frac{F_0}{(t_2-t_1) m w_n^2}\left[(t-t_1) - \frac{\sin w_n (t-t_1)}{w_n}\right] H(t-t_1) + \frac{F_0}{(t_2-t_1) m w_n^2}\left[(t-t_2) - \frac{\sin w_n (t-t_2)}{w_n}\right] u(t-t_2)$$



$$f(t) = \hat{F}\Lambda\delta(t)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\dot{x}(0) = \frac{\hat{F}}{m}$$

$$x(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 2\xi w_n \dot{x} + w_n^2 x = 0$$

$$D^2 + 2\xi w_n D + w_n^2 = 0$$

$$D_{1,2} = -\xi w_n \pm w_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

حل نمایی $\xi > 1$

حل نمایی خاص $\xi = 1$

حل هارمونیک $\xi < 1$

$$\xi > 1 \text{ برای } : x(t) = \frac{\hat{F}}{2mw_n\sqrt{\xi^2-1}}\left[e^{(\xi\sqrt{\xi^2-1})w_n t} - e^{(\xi+\sqrt{\xi^2-1})w_n t}\right] g(t)$$

$$\xi = 1 \text{ برای } : x(t) = \frac{\hat{F}t}{m} e^{-w_n t} g(t)$$

$$0 < \xi < 1 \text{ برای } x(t) = \frac{\hat{F}}{mw_n\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w n t} \sin w_n \sqrt{1-\xi^2 t} \quad g(t)$$

عکس العمل سیستم در برابر ضربه واحد:

$$\hat{F} = 1$$
$$x(t) = g(t)$$
$$x(t) = \int_0^t f(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda$$

$\xi = 1 \quad f(t) = F_0 u(\mathrm{t})$ تحریک پله ای

$$x(t) = \frac{F_0 t}{mw_n^2}\left[1 - e^{-w_n t}(1 + w_n t)\right]$$

$0 < \xi < 1 \qquad f(t) = \propto tu(t) \rightarrow$ تحریک شیب

$$x(t) = \frac{\propto}{mw_n^2}\left[t - \frac{2\xi}{w_n} - e^{-\xi w_n t}\left(\frac{2\xi}{w_n}\cos\sqrt{1-\xi^2} w_n t + \frac{2\xi^2 - 1}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}\sin\sqrt{1-\xi^2} w_n t\right)\right]$$

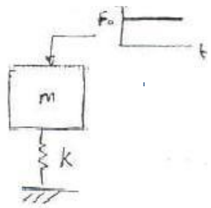
یا

$$x(t) = \frac{\propto}{mw_n^2}\left[t - \frac{2\xi}{w_n} - \frac{e^{-\xi w_n t}}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\sqrt{1-\xi^2} - B) w_n t e^{-w_n t}(1 + w_n t)\right]$$
$$B = \tan^{-1}\left[(2\xi\sqrt{1-\xi 2}) / 2\xi^2 - 1\right]$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \propto t^2 u(t)$$

$$\begin{cases} x(t) \rightarrow \xi > 1 \\ x(t) \rightarrow 0 < \xi < 1 \\ x(t) \rightarrow \xi = 1 \end{cases}$$

$\xi - 0$



$$x(t) = \frac{F_0}{m w_n^{\,2}}(1 \quad \cos w_n t)$$

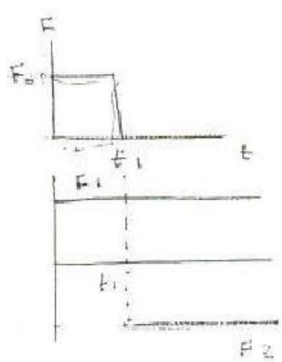
$$x_{\max} - \frac{2F_0}{m w_n^{\,2}}$$

$$t_p - \frac{\pi}{w_n}$$

$$\ddot{x}(t) = +\frac{F_0 w_n^{\,2}}{m w_n^{\,2}} \cos w_n t$$

$$\ddot{x}_{\max} - \frac{F_0}{m}$$

ولی گاهی پیدا کردن max آسان نیست



$$0 < t < t_1 \qquad x(t) = \frac{F\circ}{m w_n^{\,2}}(1 - \cos w_n t)$$

$$t_1 < t \qquad x(t) - \frac{F\circ}{m w_n^{\,2}}(1 - \cos w_n t) - \frac{F\circ}{m w_n^{\,2}} \times x\,(1 - \cos w_n (t - t_1))$$

برای $0 < t < t_1$ ← پیک همان مقدار حالت قبلی است.

برای $t_1 < t$ ← باید با مشتق گیری، پیک را به دست آوریم.

$$\dot{x}(t) = \frac{F_o w_n}{m w_n^2}\sin w_n t - \frac{F_o w_n}{m w_n^2}\sin w_n (t - t_1) = 0$$

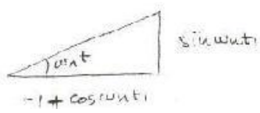
$$\Rightarrow \sin w_n t = \sin w_n (t - t_1)$$

$$\sin w_n t = \sin w_n t \cos w_n t_1 - \cos w_n t \sin w_n t_1$$

$$\sin w_n t (1 - \cos w_n t_1) = -\cos w_n t \sin w_n t_1 \rightarrow \div \cos w_n t$$

$$\tan w_n t = \frac{-\sin w_n t_1}{1 - \cos w_n t_1}$$

$\cos w_n t$? و $\sin w_n t$?



$$\sin w_n t = \frac{\sin w_n t_1}{\sqrt{(\sin w_n t_1)^2 + (-1 + \cos w_n t_1)^2}}$$

$$\cos w_n t = \frac{1 \neq \cos w_n t_1}{\sqrt{(\sin w_n t_1)^2 + (-1 + \cos w_n t_1)^2}}$$

$$!?(\frac{xk}{F_o}) = \frac{1}{\pi/2 + 1 - 2t_1/G}\left[\sin\frac{2at}{\tau} - \frac{2t}{\tau}\sin\frac{at}{t_1}\right] \quad t < t_1$$

$$(\frac{xk}{F_o}) = \frac{1}{\pi/2 - 1 - 2t_1/G}\left[\sin\frac{2\bar{a}t}{\tau} + \sin 2\pi(t/\tau - \frac{t_1}{\tau})\right] \quad t > t_1$$

$$\tau = \frac{2\bar{a}}{w_n}$$

$$(\frac{xk}{F_o})_{max} = 2\sin\frac{\pi t_1}{\tau}$$

$t > t_1$