# جــزوه آمــوزشـــی درس

# ارتــعــا شــات مــکــانــیــکی

## ( رشته مهندسی مکانیک با گرایش حرارت و سیالات )

شرکت مهندسی پتروپالامحور

گردآوری و تنظیم :

فـــرشـــاد ســـرایـــی

با تقدیم والاترین درودها و احترامات به استاد ارجمندم جناب آقای دکتر شاهرخ حسینی هاشمی که مطالب مندرج در این جزوه بر گرفته از آموزش های ایشان میباشد.

## مقدمه :

جزوه حاضر که فرا روی شما خواننده گرامی قرار دارد ، مشتمل بر مباحث و سرفصل های مربوط به درس دانشگاهی «ارتعاشات مکانیکی» در رشته مهندسی مکانیک با گرایش حرارت و سیالات می باشد.
مطالب مندرج در این جزوه آموزشی به تبیین اصول تئوری ارتعاشات مکانیکی و کاربردهای آن در صنعت می پردازد.
کتاب مرجع دانشگاهی که میبایست به عنوان مکمل در کنار این جزوه مطالعه شده و مورد استناد و ارجاع قرار گیرد عبارت است از :

- Vibration Theory And Applications , by : William Thomson

مطالب مندرج در این جزوه برگرفته از کلاس های آموزشی ارائه شده توسط جناب آقای دکتر شاهرخ حسینی هاشمی در دانشکده فنی دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران در سال ۱۳۷۲ خورشیدی می باشد که به همان صورت دست نویس (برداشت شده توسط اینجانب) تقدیم حضور خوانندگان گرامی می شود ، به این امید که مفید فایده و مقبول نظر واقع گردد.
از خوانندگان محترم درخواست می نمایم هرگونه نظرات اصلاحی ، انتقادات و پیشنهادات خود را از طریق آدرس ایمیل : f.saraei@petropalamehvar.com با اینجانب در میان گذارند.

فــرشــاد ســرایــی
مرداد ماه ۱۳۹۰

« سر درب ورودی دانشکده فنی دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران »

درس : ارتعاشات مکانیکی

استاد : دکتر حسینی هاشمی

جزوه درس ارتعاشات مکانیکی آقای دکتر شاهرخ حسینی هاشمی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

---

مرجع : Vibration Theory And Its Applications By : Thomson

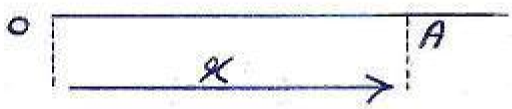
---

تعریف ارتعاشات : مطالعه رفتار نوسانی اجسام اصول درس ارتعاشات مکانیکی را تشکیل می دهد. هر جسمی که دارای جرم و قابلیت الاستیسیته باشد می تواند ارتعاش کند. جسم الاستیک در برابر نیرو، حرارت و ... تغییر شکل می دهد و با از میان رفتن عامل ارتعاش به حالت اولیه باز می گردد.

---

حرکت هارمونیک ساده :

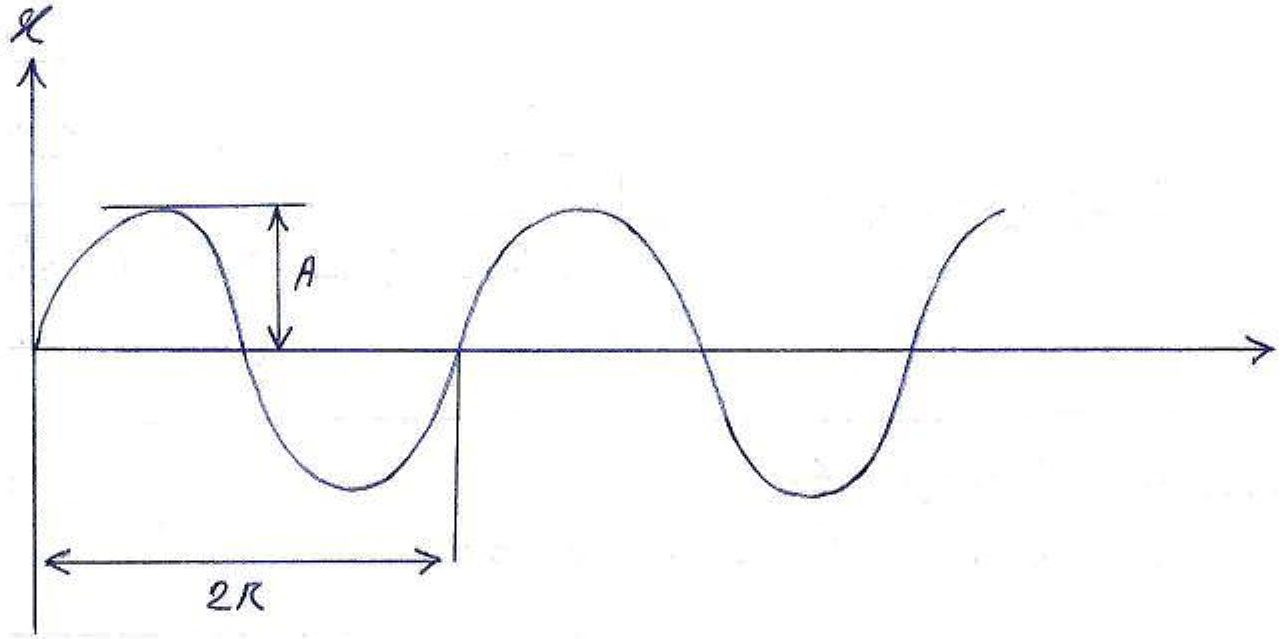
یک حرکت هارمونیک ساده می تواند بصورت توابع sin یا cos ارائه شود. در حقیقت یک حرکت رفت و برگشتی است.




$$x = OA = A \sin \omega t$$

فرکانس چرخشی (Circular Frequency)

$\omega = 2\pi F$ ( F برحسب Hz )




$$* \quad \omega \tau = 2\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{F = \frac{1}{\tau}}$$

---

$$\begin{cases} \dot{x} = A\omega \cos \omega t = A\omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) & \text{سرعت} \\ \ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t = A\omega^2 \sin(\omega t + \pi) & \text{شتاب} \end{cases}$$

* اگر جابجائی ما هارمونیک ساده باشد سرعت و شتاب هم حرکات هارمونیک ساده‌ای هستند با همان فرکانس $\omega$ اما با اختلاف فاز $\frac{\pi}{2}$ و $\pi$ . — همچنین روابط سرعت و شتاب نسبت به جابجائی از لحاظ بزرگی متناسب با فاکتورهائی مثل $\omega$ و $\omega^2$ هستند.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$ معادله دیفرانسیل حرکت

---

ترکیب دو حرکت هارمونیک ساده با (آمپلی‌تود) متفاوت و فرکانس برابر :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos \omega t \\ x_2 = X_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 = X_1 \cos \omega t + X_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= X_1 \cos \omega t + X_2 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi)$$

$$= (X_1 + X_2 \cos \varphi) \cos \omega t - X_2 \sin \varphi \sin \omega t$$

* تعریف : $X = \sqrt{(X_1 + X_2 \cos \varphi)^2 + X_2^2 \sin^2 \varphi}$

$$x = X \left[ \left( \frac{X_1 + X_2 \cos \varphi}{X} \right) \cos \omega t - \left( \frac{X_2 \sin \varphi}{X} \right) \sin \omega t \right]$$

* به فرض : $\dfrac{X_1 + X_2 \cos \varphi}{X} = \cos \alpha \leq 1$

(از تعریف نتیجه گرفتیم)

* پس * : $\frac{X_2 \sin\varphi}{X} = \sin\alpha \leqslant 1$

$$\Rightarrow \quad x = X\left[\cos\omega t \cos\alpha - \sin\omega t \sin\alpha\right]$$

$$x = X\cos(\omega t + \alpha)$$

* اگر دو حرکت هارمونیک ساده با فرکانس های مشابه را با هم ترکیب کنیم نتیجه ترکیب یک حرکت هارمونیک ساده با همان فرکانس مشابه خواهد بود.

---

* ترکیب دو حرکت هارمونیک ساده با فرکانسهای متفاوت و (آمپلی تود) متفاوت :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos\omega t \\ x_2 = X_2 \cos(\omega' t + \varphi) \end{cases}$$

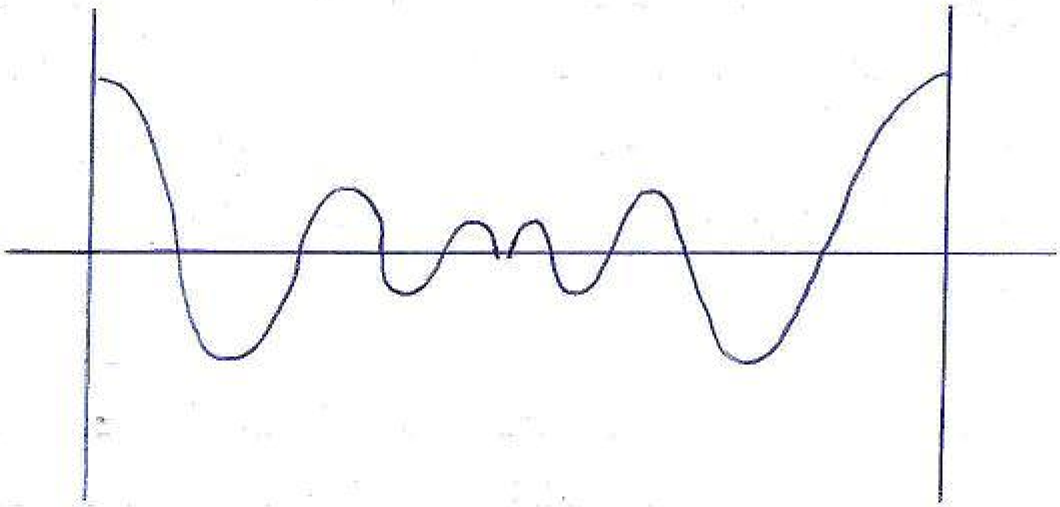
$$x = x_1 + x_2 = X_1 \cos\omega t + X_2 \cos(\omega' t + \varphi)$$

فرض می کنیم $(X_1 = X_2 = X)$

$$x = X\left[\cos\omega t + \cos(\omega' t + \varphi)\right]$$

$$x = \underbrace{2X\left\{\cos\left[\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)t + \varphi/2\right]\right.}_{\text{دامنه متغیر}} \left.\cos\left[\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)t - \frac{\varphi}{2}\right]\right\}$$

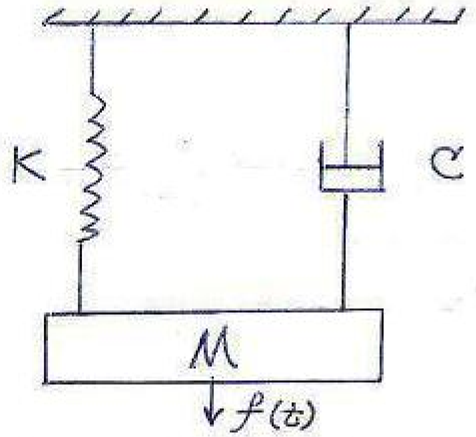
* و این یک حرکت است با دامنه متغیر با فرکانس :
$\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)$ یا $\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)$ .



## اجزای یک سیستم ارتعاشی :

عبارتند از :

1- جرم ( Mass ) M
2- فنر (spring) با ضریب فنریت یا سختی K
3- میراکننده (Damping) با ضریب میرایی C
4- نیروی محرک (Excitation Force)






جزوه درس ارتعاشات مکانیکی آقای دکتر شاهرخ حسینی هاشمی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

* از میان چهار جزء این سیستم ، سه جزء M و K و C فرض می شوند که تابع زمان نباشند. از جرم فنر هم صرفنظر می شود یا جرمی معادل آن در جرم M منظور می کنند. نیروی محرکه $f(t)$ هم به سیستم انرژی می دهد. بخشی از این انرژی در جرم M و فنر ذخیره می شود و مابقی در میرا کننده به صورت حرارت از میان می رود.

---

**فنرها** : معمولاً فنرها خطی بوده و از قانون هوک تبعیت می کنند.

$$F = Kx$$

$$dW = F\,dx = Kx\,dx$$

$$W = K\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}Kx^2$$

* فرض می شود میراکننده نه جرم دارد نه خاصیت الاستیسیته.
اگر نیروی میرایی با توان اول سرعت متناسب باشد میرا کننده را میراکننده لزجی (Viscous) می نامند.

$$F_d = c\dot{x}$$

---

## طبقه بندی اجسام :

اجسام را از نظر عکس العملشان در مقابل عوامل خارجی می توان به چند دسته تقسیم کرد. اول اجسام الاستیک هستند. جسم الاستیک جسمی است که در مقابل اعمال عوامل خارجی مثل فشار، نیرو، حرارت تغییر شکل داده و چنانچه عامل بوجود آورنده تغییر شکل از میان برود دوباره به حالت اولیه خود برمی گردد. این اجسام را می توان به گروههای کوچکتری تقسیم کرد به اهم آنها عبارتند از :

1- اجسام الاستیک خطی (Linear Elastic)
2- اجسام غیرالاستیک خطی (non Linear Elastic)
3- اجسام ترمو الاستیک
4- اجسام ویسکو الاستیک

* دسته دوم اجسام سخت (Rigid) هستند که در برابر عوامل خارجی هیچ تغییر شکلی از خود نشان نمی دهند. واضح است که اینها تئوری هستند و در طبیعت یافت نمی شوند.

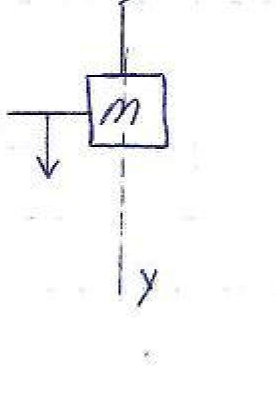
لذا می توانیم اجسام صلب را بدین ترتیب تعریف کنیم که -
اجسامی هستند که در آنها تغییر شکل ها در مقایسه با بزرگی
عوامل خارجی قابل اغماض هستند.

دسته سوم اجسام پلاستیک هستند. این اجسام در مقابل
اعمال عوامل خارجی تغییر شکل داده و اگر عامل بوجودآورنده
تغییرشکل از میان برود دوباره به حالت اولیه باز نمی گردند.
مثل خمیر مجسمه سازی.

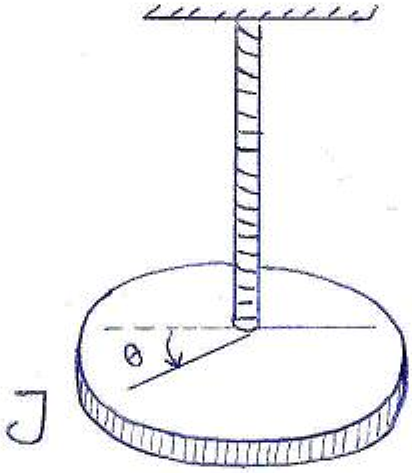
---

$\boxed{\text{درجه آزادی}}$ : (Degree of Freedom)

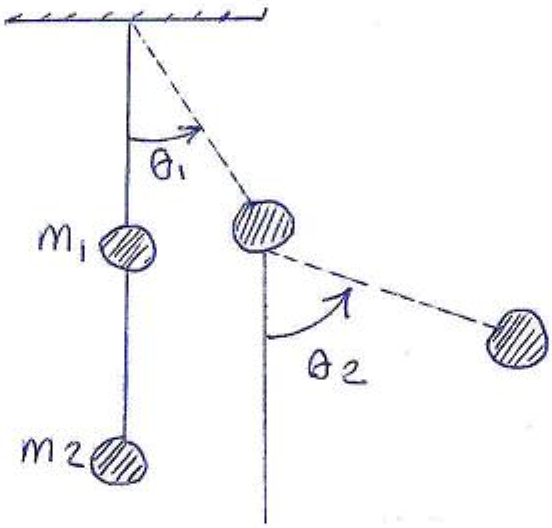
اگر یک سیستم ارتعاشی برای تعیین وضعیتش در هر لحظه از
زمان نیاز مند به n مختصات مستقل از یکدیگر باشد
می گوییم آن سیستم ارتعاشی دارای n درجه آزادی است.



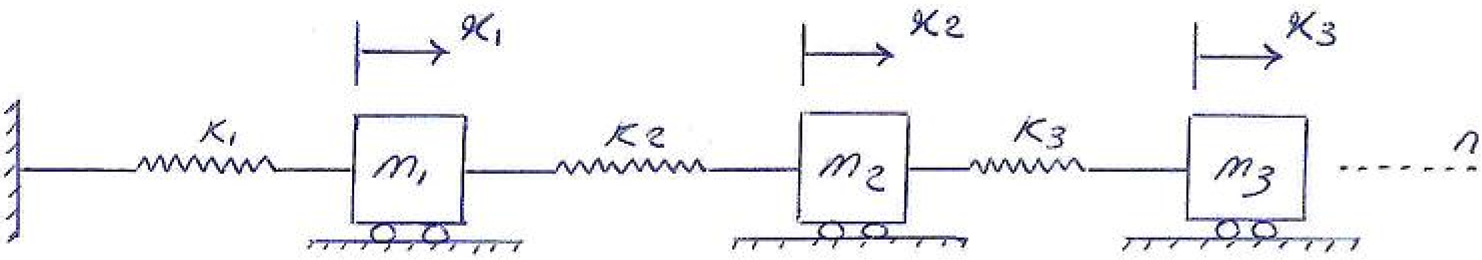

(سیستم ارتعاشی خطی یا
یک درجه آزادی)




(سیستم ارتعاشی پیچشی
با یک درجه آزادی)



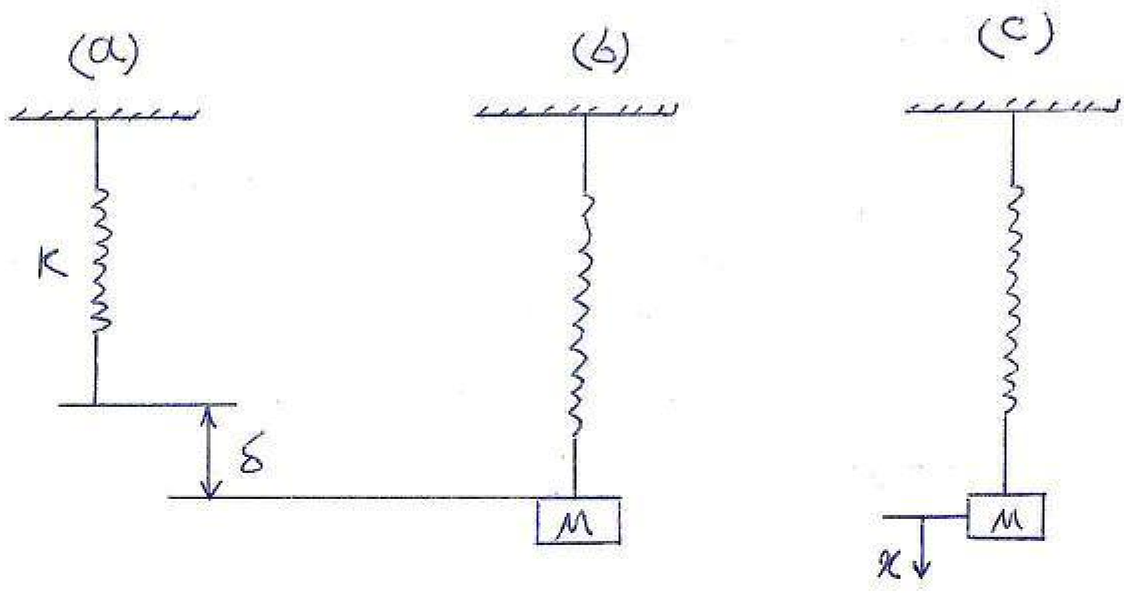

(سیستم ارتعاشی با دو
درجه آزادی)




(سیستم ارتعاشی با
n درجه آزادی)

## ارتعاش آزاد : (Free Vibration)

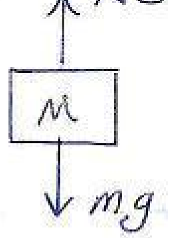
اگر یک سیستم دینامیکی را به وسیله‌ای حرکت دهیم و از یک لحظه از زمان مثل $t=0$ دیگر به آن نیرویی وارد نکنیم در این صورت آن سیستم در غیاب نیرو شروع به ارتعاش آزاد می‌کند. برای ارتعاش آزاد باید حتماً یا جابجائی اولیه غیر صفر باشد و یا سرعت اولیه غیر صفر باشد و یا هر دو.




($\delta$ : تغییر مکان استاتیکی فنر)

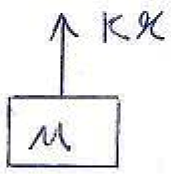
* در حالت c دیگر مسئله دینامیکی می‌شود.

(b)




در حالت تعادل استاتیک

(c)




* نیروی $mg$ قبلاً با نیروی $K\delta$ خنثی شده و حالا تنها نیروی $Kx$ داریم.

$$\Rightarrow \quad -Kx = m\ddot{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + Kx = 0}$$

* حال که معادله دیفرانسیل حرکت را درآورده ایم آن را بصورت استاندارد درمی آوریم یعنی ضریب شتاب را واحدی کنیم:

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0} \longrightarrow$$

$$(\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0)$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{m} \rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

فرکانس طبیعی

## روش انرژی :

* اگر سیستمی فاقد میراکننده باشد انرژی کل مکانیکی سیستم که مجموع $E_p$ و $E_k$ است ثابت می‌ماند.

$T$ : انرژی جنبشی

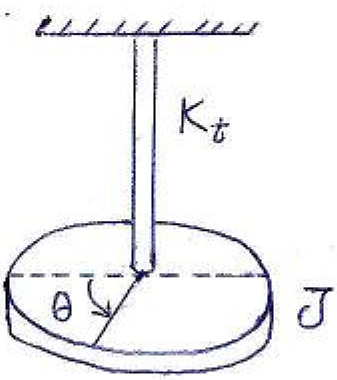
$U$ : انرژی پتانسیل

$$T + U = cte. \longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T+U) = 0}$$

---

* می‌خواهیم معادله دیفرانسیل حرکت ارتعاشی سیستم پیچشی مقابل را که یک درجه آزادی دارد به روش انرژی بیابیم :




* $T = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$ $\xrightarrow{\frac{d}{dt}(T+U)=0}$

* $U = \frac{1}{2} K_t \theta^2$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = J\dot{\theta}\ddot{\theta} + K_t\theta\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\theta}(J\ddot{\theta} + K_t\theta) = 0 \longrightarrow$$

$$\boxed{J\ddot{\theta} + K_t\theta = 0}$$

* حال معادله را استاندارد می کنیم :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{K_t}{J}\theta = 0} \longrightarrow$$

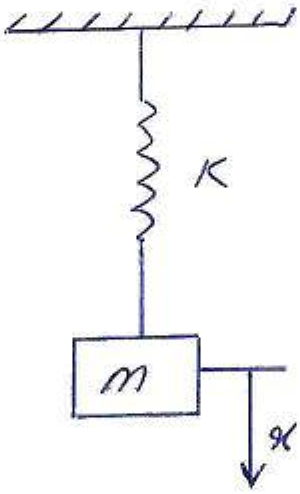
$$\ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$$

* $\omega_n^2 = \frac{K_t}{J} \rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{J}}}$

Natural Frequency

---

* حال یک سیستم ارتعاشی دیگر با یک درجه آزادی را در نظر می گیریم :




$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ U = \frac{1}{2} K x^2 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = m\dot{x}\ddot{x} + Kx\dot{x} = 0$$

$$\dot{x}(m\ddot{x} + Kx) = 0 \longrightarrow$$

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \longrightarrow$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0} \longrightarrow$$

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

## نکته : Rayleigh

$$T + U = Cte \longrightarrow$$

$$\begin{cases} T_{max} + 0 = Cte \longrightarrow \\ 0 + U_{max} = Cte \longrightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} T_{max} = Cte \\ U_{max} = Cte \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{T_{max} = U_{max}}$$

* با این رابطه می توان فرکانس طبیعی سیستم را بدست آورد (و نه معادله دیفرانسیل حرکت را) . (روش رایلی)

---

* همان مثال سیستم ارتعاشی پیچشی را بررسی می کنیم :

$$\left(T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2\right) \qquad \left(U = \frac{1}{2} K_t \theta^2\right)$$

* چون حرکت ارتعاشی ما هارمونیک است .

$$\begin{cases} \theta = \bar{\theta} \sin(\omega_n t + \varphi) \\ \dot{\theta} = \bar{\theta}\omega_n \cos(\omega_n t + \varphi) \end{cases} \longleftarrow \quad ①$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}_{max}^2$$

$$U_{max} = \frac{1}{2} K_t \theta_{max}^2$$

$$\xrightarrow{①} \quad \theta_{max} = \bar{\theta}$$

$$\dot{\theta}_{max} = \bar{\theta}\omega_n$$

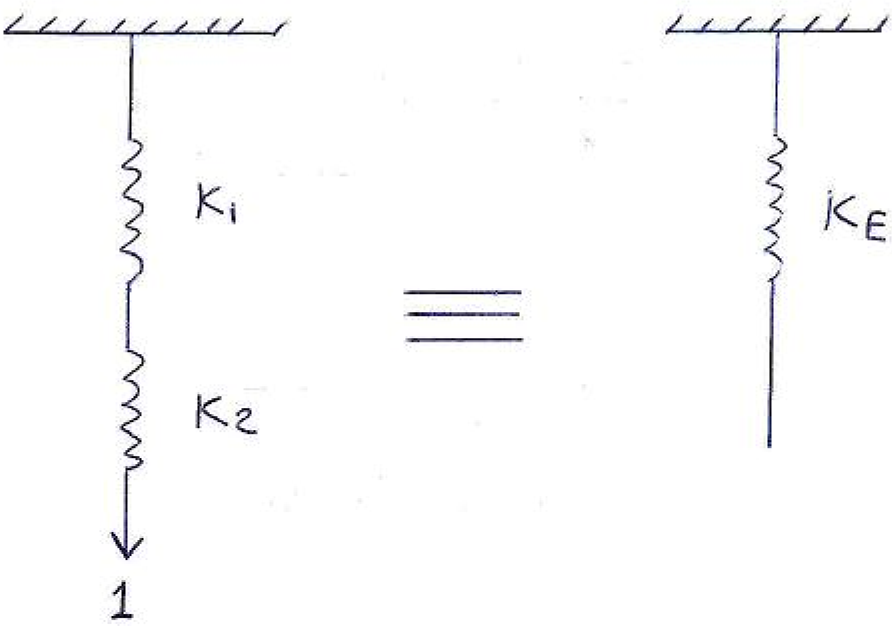
$$\begin{cases} T_{max} = \frac{1}{2} J \bar{\theta}^2 \omega_n^2 \\ U_{max} = \frac{1}{2} K_t \bar{\theta}^2 \end{cases} \xrightarrow{T_{max} = U_{max}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{J}}$$

---

## محاسبه فنرهای معادل :

* سیستمی را شامل دو فنر $K_1$ و $K_2$ که بطور سری به هم متصل شده اندرا در نظر می گیریم . هدف یافتن فنری معادل با سختی $K_e$ است . به فرض نیرویی واحد به انتهای فنر با سختی $K_2$ اعمال می کنیم که عیناً به فنر $K_1$ هم منتقل می شود



$F = Kx$ قانون هوک

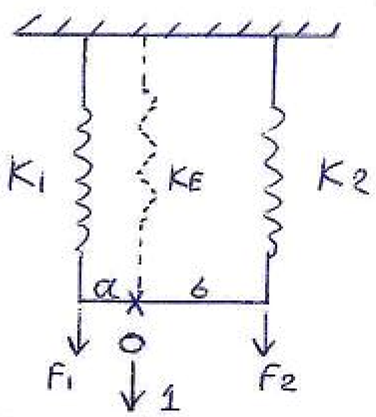
$$\begin{cases} \begin{cases} 1 = K_1 \delta_1 \rightarrow \delta_1 = \dfrac{1}{K_1} \\ 1 = K_2 \delta_2 \rightarrow \delta_2 = \dfrac{1}{K_2} \end{cases} \Rightarrow \\ 1 = K_E(\delta_1 + \delta_2) \rightarrow \delta_1 + \delta_2 = \dfrac{1}{K_E} \end{cases}$$

$$\frac{1}{K_E} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

$$\left( \frac{1}{K_E} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} + \cdots \right)$$

---

**فنرهای موازی :**




* به فرض میله رابط جرمی ندارد . به فرض می خواهیم فنر معادل در نقطه O واقع شود .

* اگر در نقطه o نیروی واحد اعمال کنیم نیرو برای فنرهای $K_1$ و $K_2$ به فرض $F_1$ و $F_2$ باشد :

$$\begin{cases} F_1 + F_2 = 1 \\ F_1 a = F_2 b \quad \text{تعادل گشتاورها} \end{cases} \longrightarrow$$

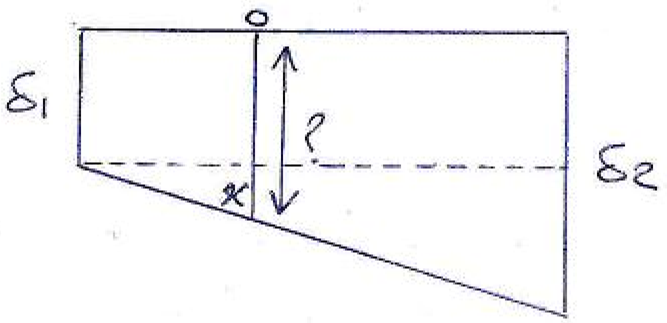
$$F_2 = \frac{a}{a+b}$$

$$F_1 = \frac{b}{a+b}$$

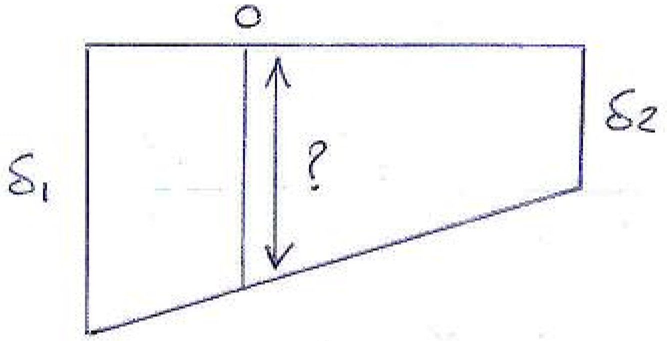
$F = Kx$ قانون هوک

$$\frac{b}{a+b} = K_1 \delta_1 \rightarrow \delta_1 = \frac{b}{K_1(a+b)}$$

$$\frac{a}{a+b} = K_2 \delta_2 \rightarrow \delta_2 = \frac{a}{K_2(a+b)}$$




$\delta_1 < \delta_2$




$$\delta_1 > \delta_2$$

* جواب از هر دو دیاگرام یکی است لذا نیازی به فرض این که $\delta_1 < \delta_2$ یا $\delta_1 > \delta_2$ است نمی باشد. مثلاً دیاگرام اول را حل می کنیم:

$$\frac{x}{\delta_2 - \delta_1} = \frac{a}{a+b} \longrightarrow x = \frac{a}{a+b}(\delta_2 - \delta_1)$$

$$\delta = \delta_1 + x \longrightarrow$$

$$\delta = \frac{1}{(a+b)^2}\left[\frac{b(a+b)}{k_1} + \frac{a^2}{k_2} - \frac{ab}{k_1}\right]$$

$$\delta = \frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{b^2}{k_1} + \frac{a^2}{k_2}\right)$$

جابجائی نقطه o

باید :

$$\begin{cases} F = Kx \\ 1 = K_E \dfrac{1}{(a+b)^2} \left( \dfrac{b^2}{K_1} + \dfrac{a^2}{K_2} \right) \end{cases}$$

$$K_E = \frac{K_1 K_2 (a+b)^2}{K_2 b^2 + K_1 a^2}$$

* حالت خاص $a = b$ :

$$K_E = \frac{4 K_1 K_2 a^2}{a^2 (K_1 + K_2)} \longrightarrow$$

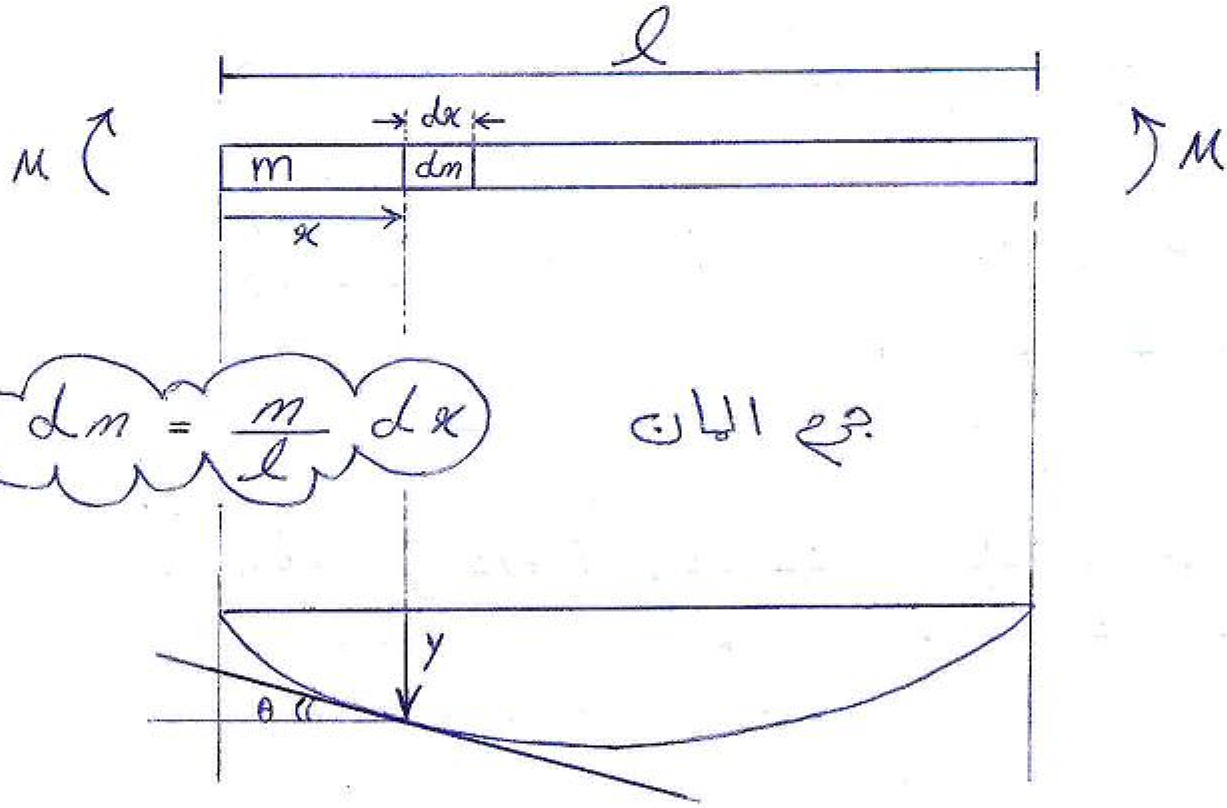
$$K_E = \frac{4 K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

* حالت خاص $a = b$ و $(K_1 = K_2 = K)$ :

$$K_E = 2K$$

## کاربرد روش رایلی در ارتعاش تیرها :

تیر یک سیستم پیوسته است یعنی $n$ تا فرکانس طبیعی دارد و روش رایلی کوچکترین فرکانس را بدست می دهد و چون طبیعت تنبل است اول سیستم به کوچکترین فرکانس می رسد و این از نظر مهندسی مهم است.




$$dm = \frac{m}{l}\, dx$$

* فرض کرده‌ایم که تیر تحت ممان خمشی $M$ ارتعاش می یابد و $y(x, t)$ حرکت دینامیکی المان مورد نظر است.

* $y = y(x, t)$

حرکت هارمونیک :
$$y = y(x,t) = f(x)\, \sin \omega_n t$$

$$\underbrace{f(x)}_{\text{جابجائی استاتیکی}}$$

$$T = \frac{1}{2}\int \dot{y}^2\, dm = \frac{1}{2}\int \frac{m}{l}\, \dot{y}^2\, dx$$

$$\begin{cases} T_{max} = \frac{1}{2}\int \frac{m}{l}\, \dot{y}_{max}^2\, dx \longrightarrow \\ \dot{y} = \omega_n f(x) \cos \omega_n t \longrightarrow \\ \dot{y}_{max} = \omega_n f(x) \longrightarrow \end{cases}$$

$$T_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{m}{l}\, \omega_n^2 \left[f(x)\right]^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2}\int M\, d\theta \longleftarrow$$ مقاومت مصالح

$\theta$ زاویه مماس بر منحنی تغییر شکل تیر در نقطه مورد نظر است :

$$\left( \theta = \frac{dy}{dx} \right)$$

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2} \longrightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2} \int EI \frac{d^2y}{dx^2} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) dx \\ U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx \end{cases}$$

(اما) : $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \sin\omega t \Rightarrow$

$$\left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)_{max} = f''(x)$$

$$\boxed{U_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[ f''(x) \right]^2 dx}$$

$(T_{max} = U_{max})$ رایلی $\longrightarrow$

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^l EI\,[f''(x)]^2\,dx}{\int_0^l \frac{m}{l}\,[f(x)]^2\,dx}$$

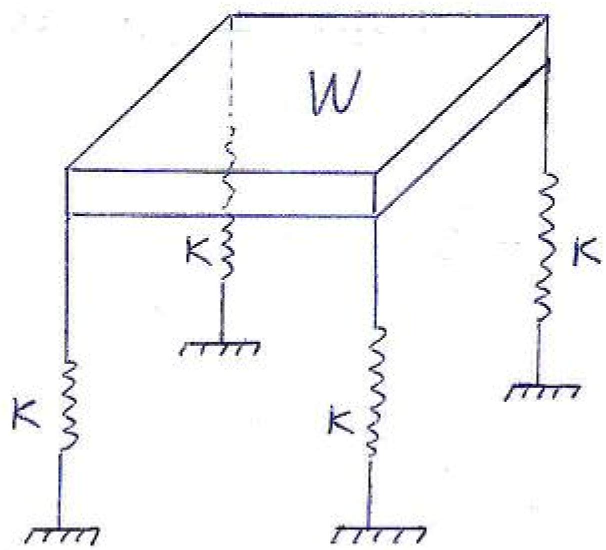
Fundemental Frequency

* به کمک این رابطه می توان فرکانس اصلی تیر را (Fundemental Frequency) را محاسبه کرد. منظور از فرکانس اصلی کوچکترین فرکانس سیستم پیوسته است.

* اگر دو سر تیر روی دو فنر به سختی $K$ قرار بگیرد تنها در انرژی پتانسیل سیستم تغییر حاصل می شود:

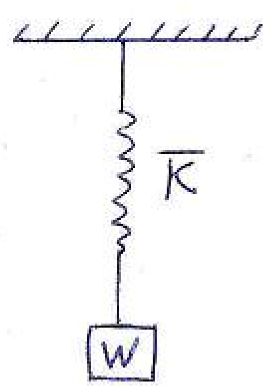
$$\omega_n^2 = \frac{\frac{1}{2}\int_0^l EI\,[f''(x)]^2\,dx + K y_0^2}{\frac{1}{2}\int_0^l \frac{m}{l}\,[f(x)]^2\,dx}$$

مثال - جسمی به وزن $W$ را روی ٤ پایه الاستیک قرار می‌دهیم.
اگر تغییر مکان بر واحد وزن هر یک از پایه ها برابر $\alpha$
فرض شود فرکانس طبیعی سیستم را بیابید.




$$\begin{cases} F = Kx \\ 1 = K\alpha \end{cases} \longrightarrow \quad K = \frac{1}{\alpha}$$

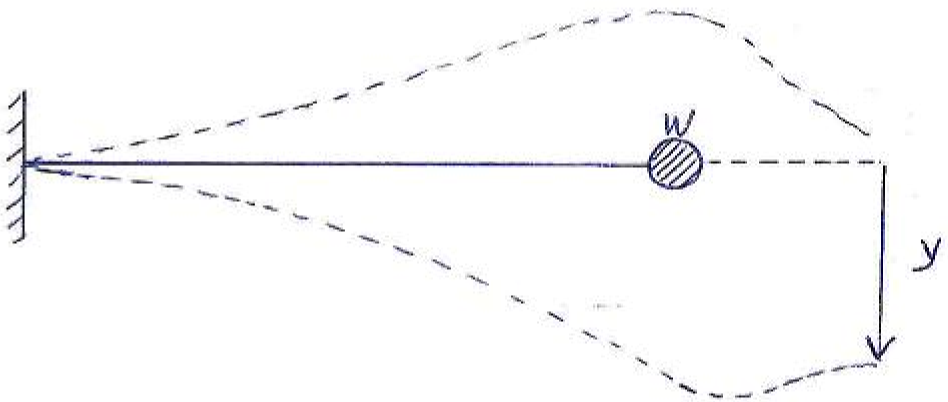
$$\overline{K} = 4K = \frac{4}{\alpha}$$




$$\omega_n^2 = \frac{\overline{K}}{m} = \frac{4g}{\alpha W}$$

مثال- مطلوبست تعیین فرکانس طبیعی ارتعاش جرم $M$ که به انتهای
آزاد یک تیر یک سر درگیر مطابق شکل وصل شده. خمش
در انتهای آزاد تیر بطول $l$ را برابر $\left(Y = \frac{Wl^3}{3EI}\right)$

* فرض کنید که در آن $EI$ سختی خمشی تیر است. از وزن تیر هم صرفنظر کنید.



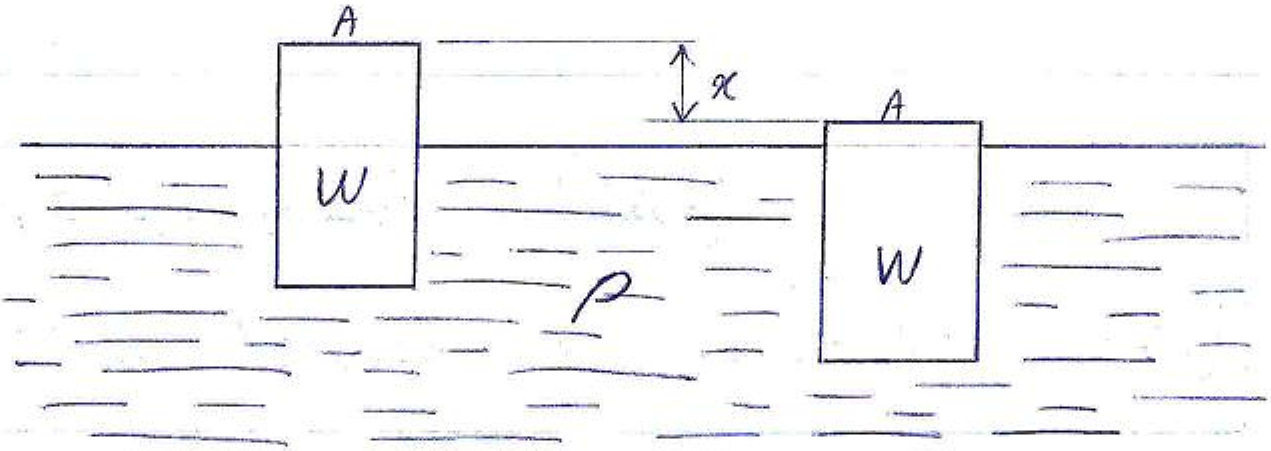

$$F = Kx \rightarrow \cancel{W} = Ky = K\left(\frac{\cancel{W}l^3}{3EI}\right) \rightarrow$$

$$\boxed{K = \frac{3EI}{l^3}}$$

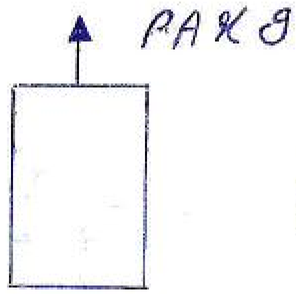
* مثل یک فنر معادل با سختی $K$

$$\boxed{\omega_n^2 = \frac{K}{m} = \frac{3EIg}{l^3 W}}$$

مثال - استوانه‌ای به وزن $W$ و سطح مقطع $A$ مطابق شکل در مایعی با جرم مخصوص $\rho$ بصورت شناور در حالت تعادل قرار گرفته است. مطلوبست معادله حرکت و زمان تناوب نوسان استوانه اگر آن را مختصراً در مایع فرو برده و سپس رها کنیم.




(دیاگرام آزاد دینامیکی)




(وزن قبلاً با نیروی ارشمیدس استاتیکی اولیه خنثی شده)

$$W = \rho A h g$$

$$-\rho A x g = m\ddot{x} \rightarrow \left.\begin{aligned} &\ddot{x} + \frac{\rho A g}{m} x = 0 \\ &\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \quad \omega_n^2 = \frac{\rho A g}{m} = \frac{\rho A g}{W/g} = \frac{\rho A g^2}{W}$$

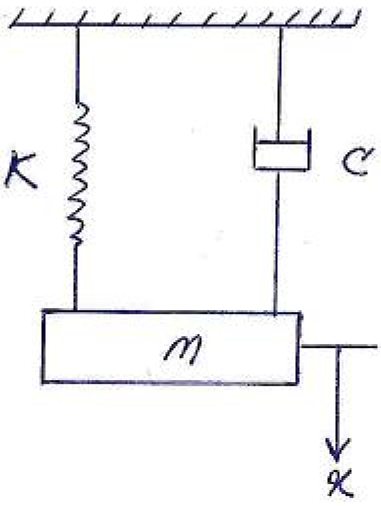
$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \longrightarrow \tau = \frac{1}{f_n}$$

$$\longrightarrow \tau = \frac{1}{\frac{\sqrt{\frac{EAg^2}{W}}}{2\pi}}$$

زمان تناوب

(ارتعاش سیستمها با میرا کننده)

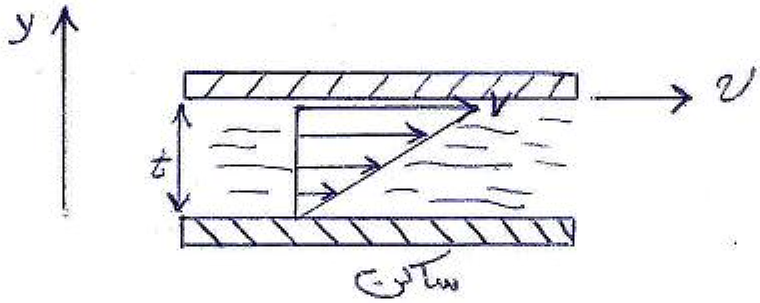
(Free Vibration of damped system)




$$F_d = C\dot{x} = CV$$

برای میرا کننده های لزجی

یادآوری :



$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{t}$$

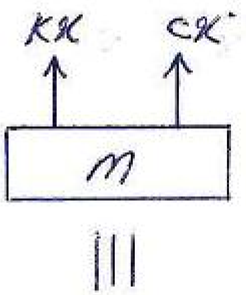
$$\left.\begin{array}{l} \tau = \dfrac{F_f}{A} \longrightarrow \quad F_f = \tau \cdot A \\ \tau = \mu \dfrac{v}{t} \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\text{«} \quad F_f = \mu A \frac{v}{t} = C v \quad \text{»}$$

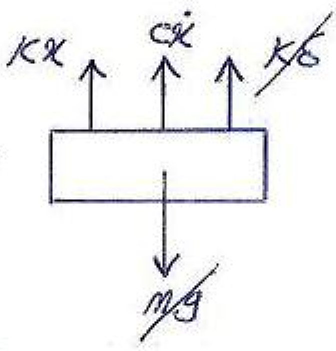
* $F_f$ همان $F_d$ و مخالف حرکت $(-)$ است و مشابه نیروی اصطکاک در جامدات می باشد.

---

**ادامه بحث :**




دینامیکی



$$-Kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \quad \longrightarrow$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

معادله دیفرانسیل حرکت برای سیستم با میرا کننده.

استاندارد می کنیم :

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

جواب این معادله :

$$x = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

* حال جواب $x = e^{st}$ را بررسی می کنیم :

$$(ms^2 + cs + K)\,e^{st} = 0 \quad \xrightarrow{\;e^{st} \neq 0\;}$$

$$ms^2 + cs + K = 0$$

** $$s_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{+c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

* نحوهٔ رفتار سیستم ارتعاشی با میرا کننده بستگی به عبارت زیر رادیکال در حل ریشه های معادله درجه دوم فوق دارد.

1- $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m} \rightarrow$ $S_1$ و $S_2$ حقیقی هستند

* دراین حالت سیستم (over damped) یا فوق میراست و هیچ نوسانی رخ نمی دهد.

$\longleftrightarrow$

2- $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m} \rightarrow$ $S_1$ و $S_2$ موهومی هستند

* دراین حالت سیستم (under damped) یا زیر میرا-است و یک حرکت نوسانی خواهیم داشت.

$\longleftrightarrow$

3- $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \rightarrow$ $S_1 = S_2$ حقیقی هستند

* دراین حالت (Critical damping) یا حالت بحرانی داریم. هیچ نوسانی رخ نمی دهد و تنها به مرز تعادل می رسیم.

$\longleftrightarrow$

* $c$ بحرانی را $c_c$ می نامیم:

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} = \omega_n^2 \rightarrow$$

$$\boxed{c_c = 2m\omega_n}$$

$$* \quad \xi = \frac{C}{C_c}$$ (سای) : (تعریف)

$\longrightarrow$ $\boxed{C = C_c \cdot \xi}$ Non-dimensional

---

$c = \xi \cdot c_c \rightarrow$

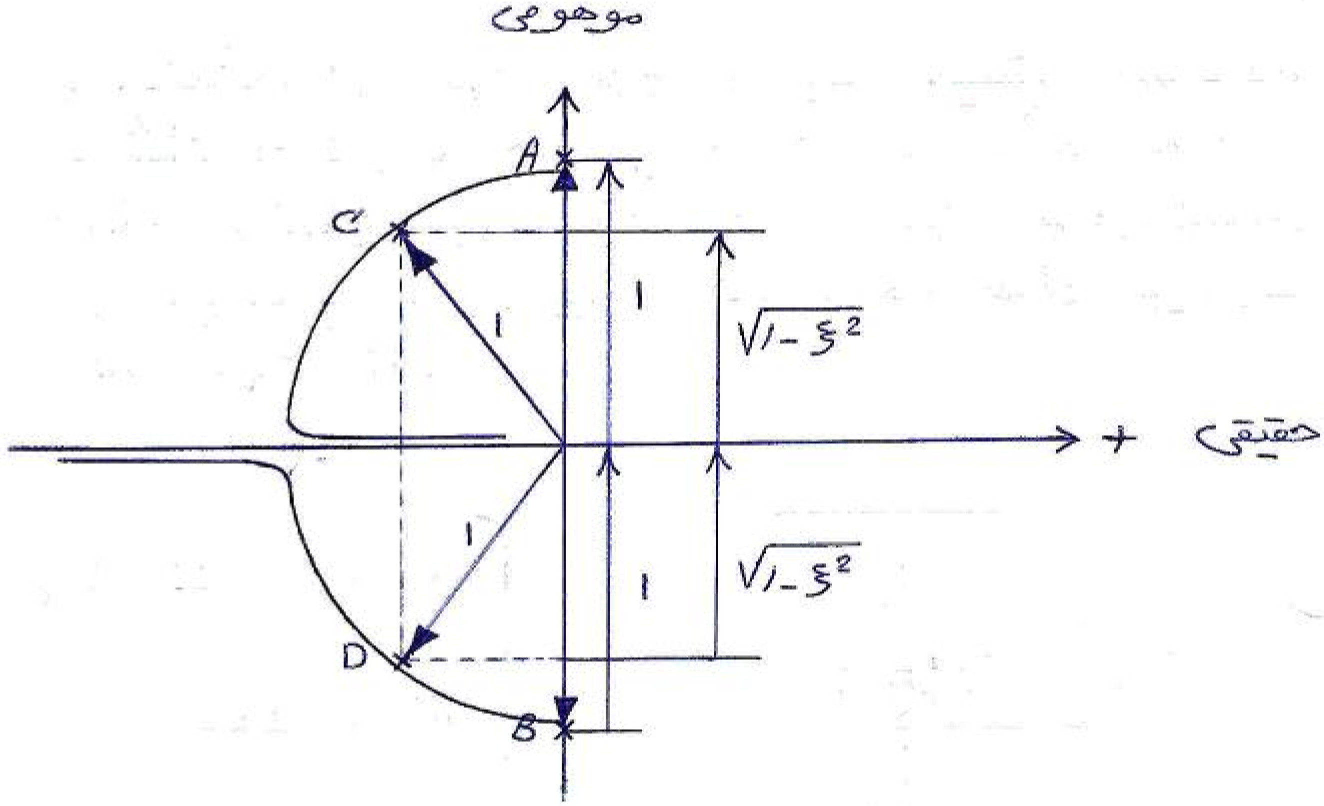
$c = 2m\,\xi\,\omega_n \rightarrow$

$\frac{c}{2m} = \xi \cdot \omega_n \longrightarrow$

$$S_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$$

$$\boxed{\frac{S_{1,2}}{\omega_n} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0}$$ معادله استاندارد حرکت



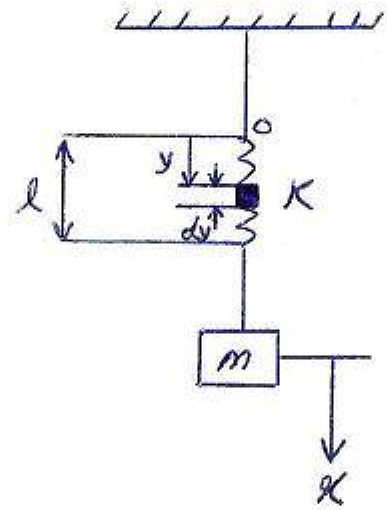

$$\frac{s_{1,2}}{\omega_n} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\xi = 0 \rightarrow \frac{s_{1,2}}{\omega_n} = \pm i$$

$$0 < \xi < 1 \rightarrow \frac{s_{1,2}}{\omega_n} = \underbrace{-\xi}_{\text{حقیقی}} \pm i \underbrace{\sqrt{1-\xi^2}}_{\text{موهومی}}$$

* وقتی که $0 < \xi < 1$ تغییر می کند بردارهای $\frac{s_{1,2}}{\omega_n}$ روی قوسی از دایره به شعاع 1 به قسمی حرکت می کنند که در نقطه $\xi = 1$ همگرا می شوند و از این جا به بعد دو ریشه روی محور حقیقی از هم جدا شده و تنها مقادیر حقیقی باقی خواهند ماند.

مثال - با استفاده از روش رایلی در یک سیستم دینامیکی متشکل از فنر و جرم (اگر جرم فنر نسبت به $m$ قابل صرفنظر کردن نباشد) فرکانس طبیعی نوسان و جرم مؤثر را بیابید. جرم واحد طول فنر را $\bar{m}$ فرض کنید.




$$\begin{cases} M = \text{جرم کل فنر} \\ \bar{m} = \dfrac{M}{l} \\ dm = \bar{m}\, dy \end{cases}$$

$\bar{x} = \dfrac{x}{l}$ جابجائی هر واحد طول فنر

$\bar{y} = \bar{x}\, y = y \dfrac{x}{l}$

$$\begin{cases} y = 0 \rightarrow \bar{y} = 0 \\ y = l \rightarrow \bar{y} = x \\ y = \dfrac{l}{2} \rightarrow \bar{y} = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

* $T_{\text{فنر}} = \dfrac{1}{2} \int \dot{\bar{y}}^2\, dm$ (انرژی جنبشی فنر)

$T_{\text{فنر}} = \dfrac{1}{2} \int \dfrac{y^2}{l^2} \dot{x}^2 \bar{m}\, dy$

$T_{\text{فنر}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\bar{m} \dot{x}^2}{l^2} \int_0^l y^2\, dy$

$* \; T_{\text{جرم}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$T_{\text{کل}} = T_{\text{فنر}} + T_{\text{جرم}} \longrightarrow$

$T_{\text{کل}} = \frac{1}{6} \bar{m} \dot{x}^2 l + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$* \; T_{\text{کل}} = \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{3} \bar{m} l \right) \dot{x}^2$

* انرژی پتانسیل کل سیستم $\quad U = \frac{1}{2} k x^2 \; *$

* روش رایلی : $\quad T_{max} = U_{max}$

$x = X \sin(\omega_n t + \varphi)$

$x_{max} = X$

$\dot{x} = X \omega_n \cos(\omega_n t + \varphi)$

$\dot{x}_{max} = X \omega_n$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\left(m+\frac{1}{3}\bar{m}\,l\right)\cancel{X^2}\,\omega_n^2 = \frac{1}{\cancel{2}}K\cancel{X^2}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{m+\frac{1}{3}\bar{m}\,l} = \frac{K}{m+\frac{1}{3}M}$$

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m+\frac{1}{3}M}}}$$

$$\boxed{m\ \text{effective} = m+\frac{1}{3}M}$$

---

مثال - معادله تغییر مکان الاستیکی یا خمش تیری با مقطع یکنواخت به طول $l$ و جرم $m$ بصورت :
$f(x) = y_0 \sin\frac{\pi x}{l}$ داده شده است.
فرکانس اصلی ارتعاش تیر را بیابید.

$$y = y_0 \sin\frac{\pi x}{l} = f(x)\sin\omega_n t$$

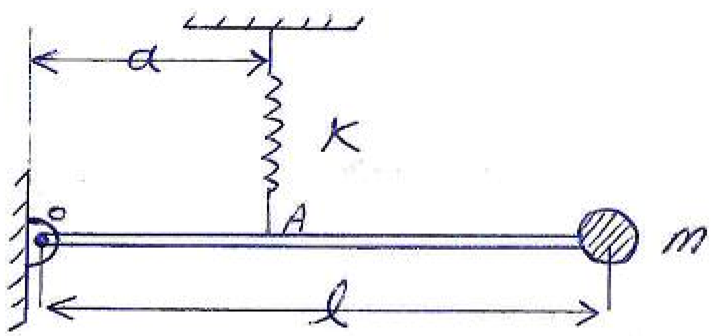
$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^l EI\,[f''(x)]^2\,dx}{\int_0^l \frac{l}{m}\,[f(x)]^2\,dx}$$

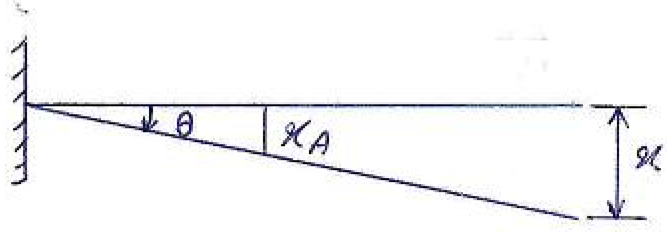
$$\omega_n^2 = \frac{y_0^2 \frac{\pi^4}{l^4} EI \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l}\, dx}{\bar{m}\, y_0^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l}\, dx}$$

$$\boxed{\omega_n = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}}$$

---

مثال - برای یک سیستم مطابق شکل با صرفنظر کردن از وزن میله فرکانس سیستم را برای نوسانات کوچک بیابید.




$$x = l\,\theta$$

$$x_A = a\,\theta$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k x_A^2 = \frac{1}{2} k a^2 \theta^2$$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

$$m l^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + k a^2 \theta \dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\theta}(m l^2 \ddot{\theta} + k a^2 \theta) = 0$$

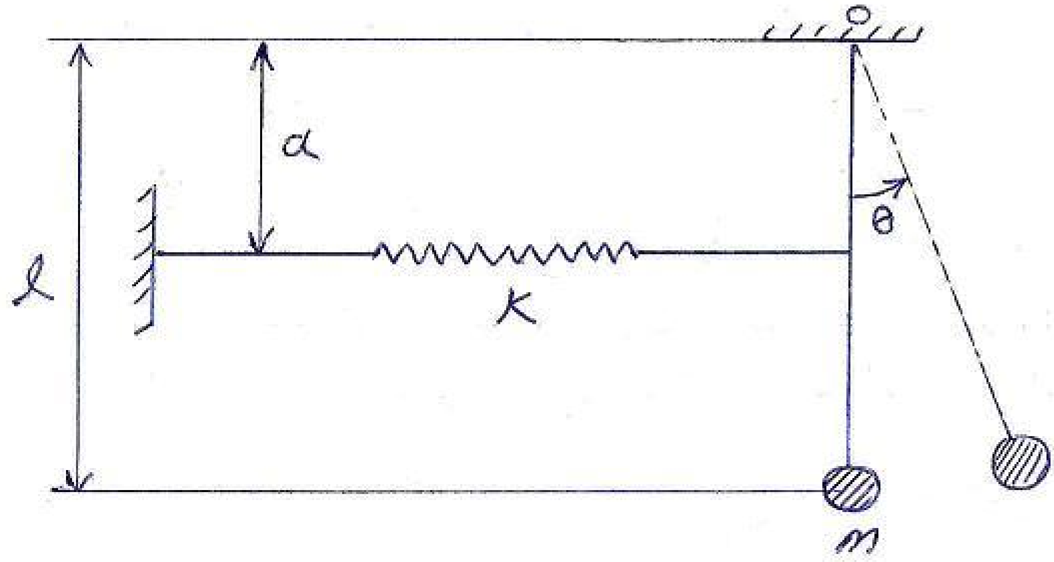
$$m l^2 \ddot{\theta} + k a^2 \theta = 0$$ معادله دیفرانسیل حرکت

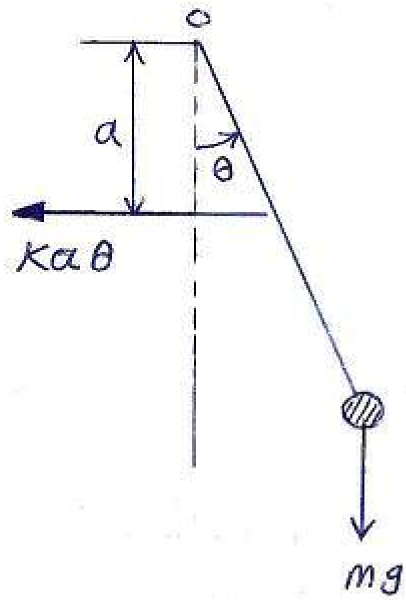
$$\left.\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{k a^2}{m l^2} \theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\omega_n = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

---

مثال - برای یک سیستم مطابق شکل مطلوب است تعیین فرکانس طبیعی. دامنه نوسان را کوچک فرض کنید.




$$\sum M_o = J\ddot{\theta}$$

$$-mg(l\theta) - ka\theta(a) = ml^2\ddot{\theta}$$

میله جرم ندارد لذا $\frac{1}{12}ml^2 = 0$ می شود و تنها همان جرم m باقی می ماند که به فاصله l از o قرار گرفته است.

$$ml^2\ddot{\theta} + (ka^2 + mgl)\theta = 0$$

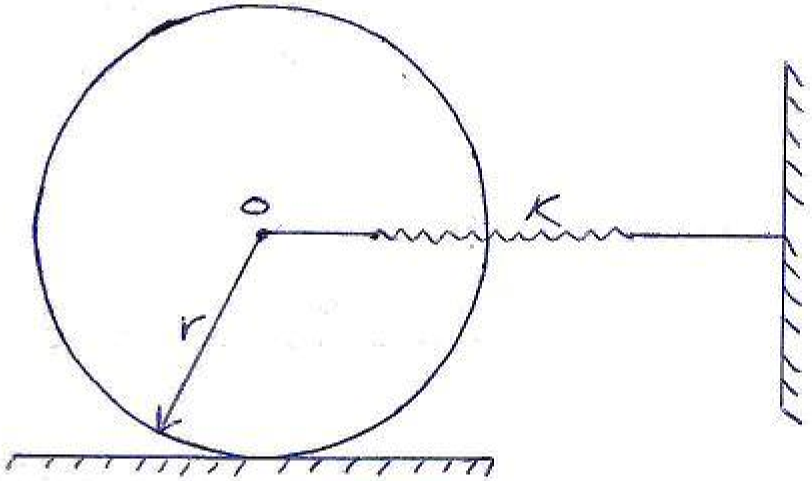
$$\ddot{\theta} + \frac{ka^2 + mgl}{ml^2}\theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{ka^2 + mgl}{ml^2}}$$

مثال - استوانه‌ای به جرم $m$ و شعاع $r$ به فنر $K$ مطابق شکل وصل شده است. مطلوب است تعیین فرکانس طبیعی سیستم.

a - با استفاده از روش انرژی
b - با " " " قانون نیوتن

(حرکت استوانه بصورت غلطش بدون لغزش است و ممان اینرسی استوانه $\frac{1}{2}mr^2$ است)




* مسئله فوق به همراه (۴) مسئله انتخابی دیگر بعنوان (Home Work) حل شده و هفته آینده تحویل داده شود.

$(\xi < 1) \rightarrow$ ($S_1$ و $S_2$ موهومی هستند)

$$\frac{S_{1,2}}{\omega_n} = -\xi \pm \sqrt{-(1-\xi^2)} = -\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}$$

$$x = A e^{(-\xi + i\sqrt{1-\xi^2})\omega_n t} + B e^{(-\xi - i\sqrt{1-\xi^2})\omega_n t}$$

$$x = e^{-\xi\omega_n t}\left[A e^{(i\sqrt{1-\xi^2})\omega_n t} + B e^{-(i\sqrt{1-\xi^2})\omega_n t}\right]$$

$$x = e^{-\xi\omega_n t}\left(A e^{i\alpha t} + B e^{-i\alpha t}\right) \qquad \boxed{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n = \alpha}$$

* $x$ را برحسب sin و cos طبق رابطه اویلر می نویسیم و فرض می کنیم :

$$\begin{cases} A + B = C_1 \\ (A - B)\,i = C_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ \dfrac{C_1}{X} = \sin\varphi \quad \text{و} \quad \dfrac{C_2}{X} = \cos\varphi \end{cases}$$

$$\boxed{x = X e^{-\xi\omega_n t} \sin(\alpha t + \varphi)}$$

* یک حرکت هارمونیک با دامنه متغیّر داریم .

$$\boxed{x = X e^{-\xi\omega_n t} \sin\left[\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t\right) + \varphi\right]}$$

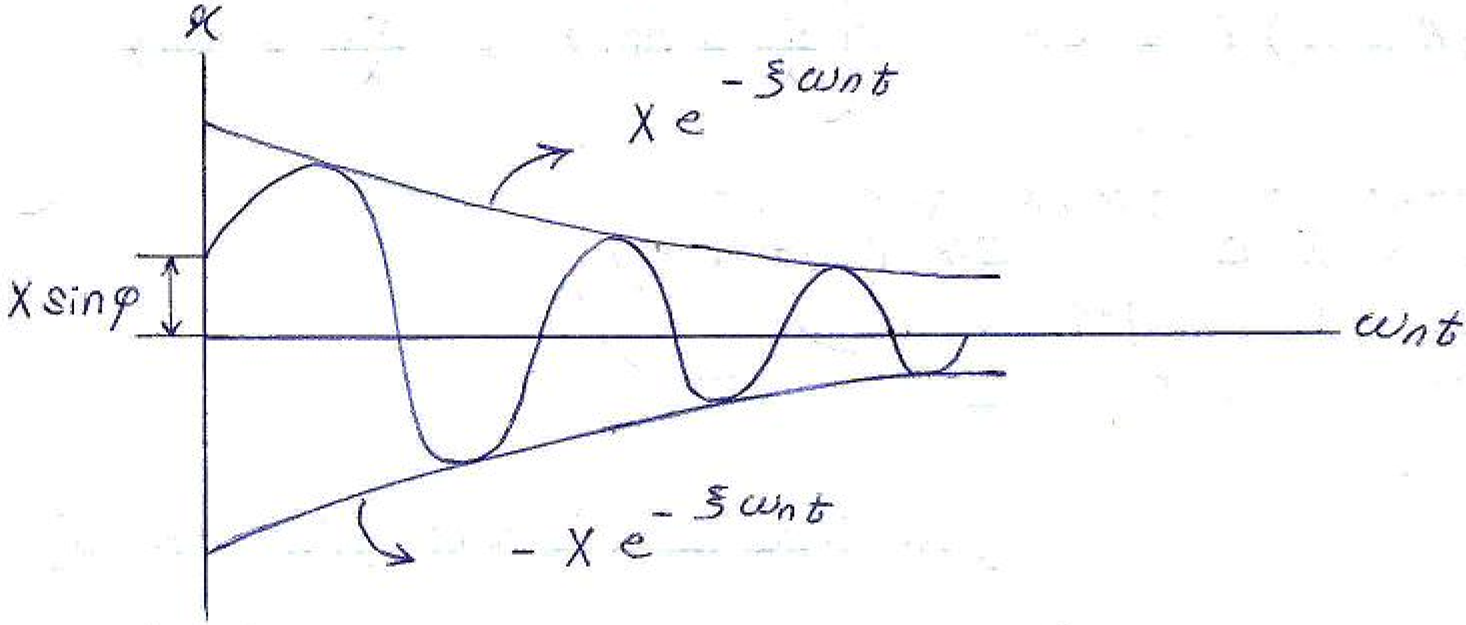
$\sqrt{1-\xi^2}$ از میراکننده ناشی می شود.

$$\boxed{\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$\omega_d$ - فرکانس نوسان میرا

$\omega_n$ - فرکانس نوسان نامیرا

$$\Longrightarrow \quad \boxed{x = X e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi)}$$




* X را با توجه به شرایط اولیه مسئله می یابیم :

$$t = 0 \quad : \quad \begin{aligned} x &= x_0 \\ \dot{x} &= v_0 \end{aligned} \qquad (1)$$

$$x_0 = X \sin \xi \qquad \text{I}$$

$$\dot{x} = -\xi X \omega_n e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) + \omega_d X e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

$$v_0 = -\xi X \omega_n \sin \xi + \omega_d X \cos \varphi \qquad \text{II}$$

* به کمک I و II مجهولات X و $\varphi$ را می یابیم .

---

$\xi > 1$ $\boxed{\text{over-damped حالت}}$

$S_1$ و $S_2$ : حقیقی است

$$x = \left[ A e^{\sqrt{\xi^2 - 1}\, \omega_n t} + B e^{-\sqrt{\xi^2 - 1}\, \omega_n t} \right] e^{-\xi \omega_n t}$$

* این رابطه را نمی توانیم بصورت sin یا cos ارائه دهیم

(چون $i$ ندارد) پس حرکت هارمونیک نیست. تنها می‌توان
$A$ و $B$ را از شرایط اولیه محاسبه کرد.

شرایط اولیه : $x = x_0$ ، $\dot{x} = v_0$ ، $t = 0$ :

$$\begin{cases} x_0 = A + B \\ v_0 = A S_1 + B S_2 \end{cases} \longrightarrow$$

$$B = \frac{v_0 - S_1 x_0}{S_2 - S_1}$$

$$A = \frac{S_2 x_0 - v_0}{S_2 - S_1}$$

(امّا) :

$$S_1 = \left(-\xi + \sqrt{-1+\xi^2}\right)\omega_n$$

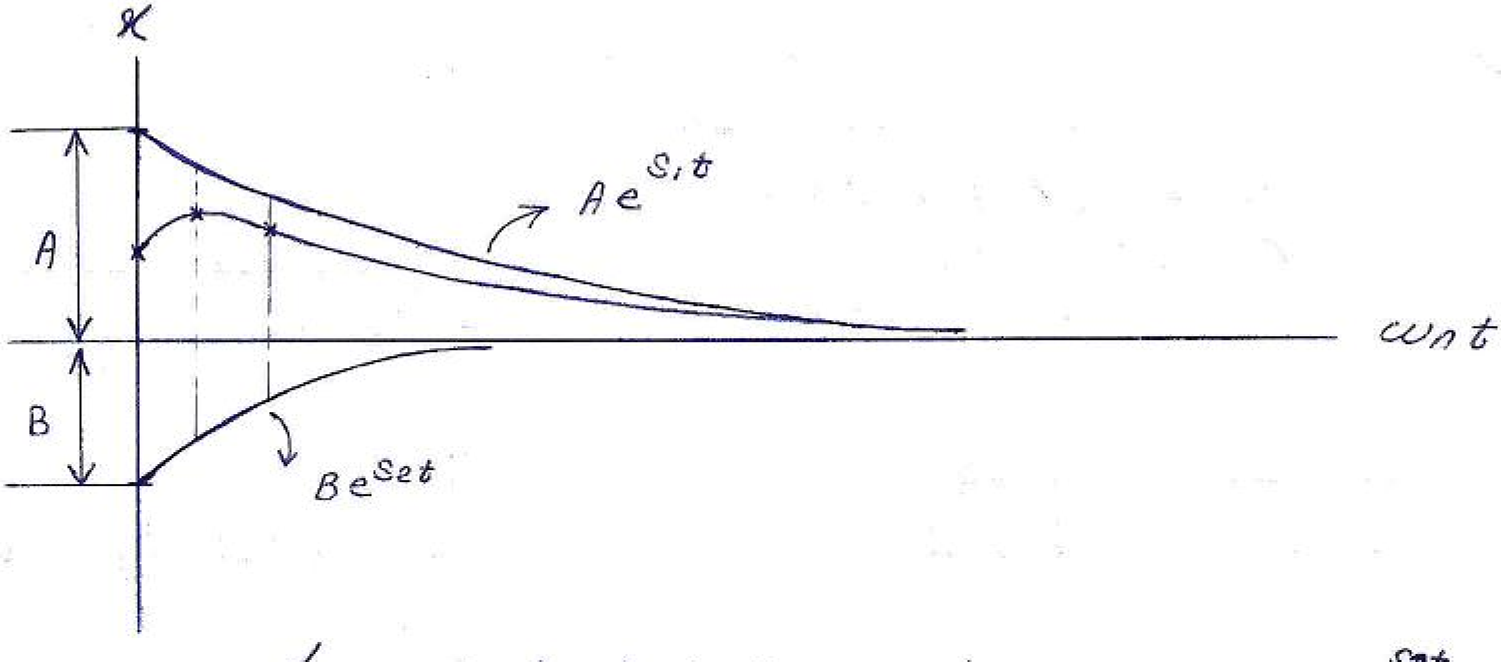
$$S_2 = -\left(\xi + \sqrt{-1+\xi^2}\right)\omega_n$$

$$A = \frac{v_0 - S_2 x_0}{S_1 - S_2} \qquad B = -\frac{v_0 - S_1 x_0}{S_1 - S_2}$$

$$** \quad (S_1 - S_2) = 2\sqrt{\xi^2 - 1}\,\omega_n > 0$$

$$\longrightarrow \quad |A| > |B|, \quad A > 0, \quad B < 0$$

* نمودار $\left( x = Ae^{S_1 t} + Be^{S_2 t} \right)$ :




($Be^{S_2 t}$ زودتر می میرد) و نمودار را با نقطه یابی می کشیم .

$\xi = 1$

**حالت Critical**

$S_1 = S_2 = -\xi\omega_n$ حقیقی

$$x = Ae^{-\omega_n t} + Be^{-\omega_n t}$$

$$x = e^{-\omega_n t}(A+B)$$

$$\cancel{x = C e^{-\omega_n t}}$$

* این جواب بدرد نمی خورد چون یک ثابت دارد و دو شرط اولیه را ارضاء نمی کند.

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$$

جواب معادله دیفرانسیل در این حالت خاص

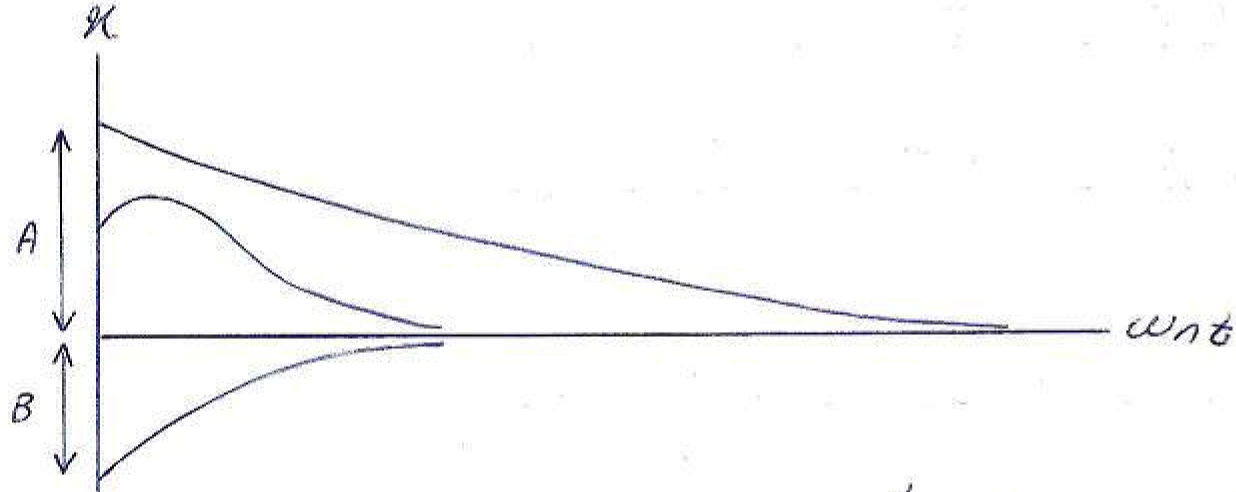
$$t = 0 \rightarrow \left.\begin{aligned} x &= x_0 \\ \dot{x} &= v_0 \end{aligned}\right\}$$ * شروط اولیه

جزوه درس ارتعاشات مکانیکی آقای دکتر شاهرخ حسینی هاشمی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

$$A = x_0$$

$$B = v_0 + x_0 \omega_n$$

---




حرکت غیرهارمونیک میرا شونده است.

---

## روش تبدیل لاپلاس

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

تبدیل لاپلاس :

$$f(t) \xrightarrow{L} g(s)$$

$$f(t) \xleftarrow{L^{-1}} g(s)$$

$$\mathcal{L}\, f(t) = \bar{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \mathcal{L}\, x \\ \mathcal{L}\, \dot{x} = s\bar{x} - x_0 \\ \mathcal{L}\, \ddot{x} = s^2 \bar{x} - s x_0 - \dot{x}_0 \end{cases}$$

$$m\,\mathcal{L}\ddot{x} + c\,\mathcal{L}\dot{x} + k\,\mathcal{L}x = 0$$

$$m\left(s^2\bar{x} - s x_0 - \dot{x}_0\right) + c\left(s\bar{x} - x_0\right) + k\bar{x} = 0$$

$$\bar{x}\left(ms^2 + cs + k\right) - \left(ms + c\right)x_0 - m\dot{x}_0 = 0$$

$$\bar{x} = \frac{(ms + c)\,x_0 + m\dot{x}_0}{ms^2 + cs + k} = \bar{x}(s)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\, \bar{x}(s)$$

* باید کسر را بصورت ضرب دو کسر ساده درآورد :

$$\bar{x} = \frac{(s+\frac{c}{m})x_0 + \dot{x}_0}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \xrightarrow{\quad c = 2m\xi\omega_n \quad}$$

$$\bar{x} = \frac{(s+2\xi\omega_n)x_0 + \dot{x}_0}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\bar{x} = \frac{(s+2\xi\omega_n)x_0 + \dot{x}_0}{(s-s_1)(s-s_2)} \qquad \frac{s_{1,2}}{\omega_n} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\bar{x} = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2}$$

* مخرج قرار می دهیم و A و B را می یابیم .

$$\boxed{x(t) = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}}$$

---

* مسئله - یک دیسک با ممان J از انتهای یک سیم نازک آویزان است و قادر به انجام 36 سیکل کامل در یک دقیقه است . اگر برای گردش سیم به اندازه $10^\circ$ یک گشتاور (0.837 in-lb) لازم باشد ممان - اینرسی J را تعیین کنید .

* تعریف - سختی پیچشی یک میله یا یک فنر پیچشی عبارت است از گشتاور لازم برای آن که آن میله را به قدر یک رادیان بچرخاند. ($K_t$)

$$1 \text{ rad} = 57.3^\circ$$

$$10^\circ \qquad 0.837 \text{ in-lb}$$

$$57.3^\circ \qquad x \qquad \rightarrow \qquad \underbrace{x = \frac{57.3 \times 0.837}{10} \text{ in-lb}}_{K_t}$$

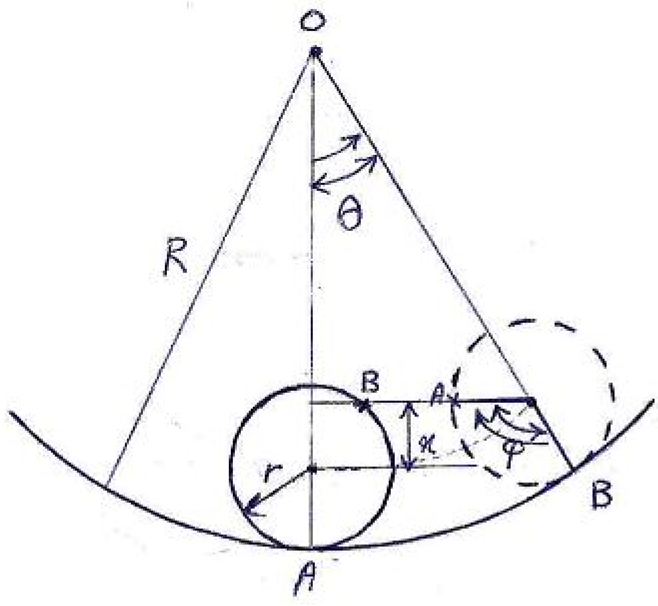
$$\left.\begin{aligned} * \quad & \omega_n^2 = \frac{K_t}{J} \\ * \quad & f_n = \frac{36}{60} \ \text{cycles/s} = \text{Hz} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\omega_n = 2\pi f_n} J$$

---

مسئله - استوانه‌ای به جرم $m$ و شعاع $r$ در داخل یک سطح استوانه‌ای با شعاع $R$ قرار گرفته و در حال نوسان است (حرکت استوانه بصورت غلطش بدون لغزش می‌باشد). معادله حرکت را با استفاده از اصل بقای انرژی بیابید و فرکانس طبیعی نوسان را نیز بیابید.

زی تیر نگه کرد و پر خویش بر او دید

گفتا ز که نالیم که از ماست که بر ماست




* $(r\varphi = R\theta)$ : باید

* $T_{\text{انتقالی}} = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$

* $T_{\text{دورانی}} = \frac{1}{2} J (\dot{\theta} - \dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2} J (r-R)^2 \frac{\dot{\theta}^2}{r^2}$
$= \frac{1}{4} m (r-R)^2 \dot{\theta}^2$

( $\dot{\varphi}$ بطرف داخل تخته و $\dot{\theta}$ بطرف خارج صفحه است ؛
امّا − و + اهمیتی ندارد چون بتوان 2 می رسد . )

$$\begin{cases} T_{\text{کل}} = T_{\text{انتقالی}} + T_{\text{دورانی}} \\ T_{\text{کل}} = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 \end{cases}$$

* $x$ تغییر ارتفاع مرکز جرم است :

* $x = (R-r)(1-\cos\theta)$

$$U = m g x = m g (R - r)(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{3}{2}(R - r)\,\ddot{\theta} + g\,\theta = 0}$$

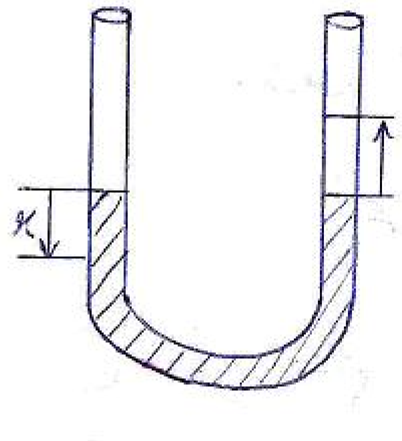
$$\boxed{\omega_n^2 = \frac{2g}{3(R - r)}}$$

---

مسئله — مطلوب است تعیین معادله دیفرانسیل حرکت و زمان تناوب طبیعی نوسان برای یک سیال که در لوله U شکل مطابق شکل قرار گرفته.

۱- با قانون نیوتن

۲- با اصل بقای انرژی




$A$ - سطح مقطع لوله

$\ell$ - طول سیال در لوله U شکل

$\rho$ - جرم حجمی سیال

$$m = \rho A g$$

* ارتفاع سیالی که می خواهد نقش نیروی مقاوم را بازی کند - $(2x)$ است :

$$F_{\text{مقاوم}} = 2x(\rho A g)$$

قانون دوم نیوتن : $-2\rho A g x = m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{2\rho A g}{m} x = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{2g}{\rho}$$

راه حل دوم :

* اگر بجای مایع به فرض فنر داشته باشیم (و قانون هوک برآن حاکم است) پس :

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ U = \frac{1}{2} K x^2 \end{cases}$$

* $U = \frac{1}{2} F x = \rho A g x^2$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2\rho A g}{m} x = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{2g}{\rho}$$

## خدمات فنی قابل ارائه از طرف شرکت مهندسی پتروپالامحور :

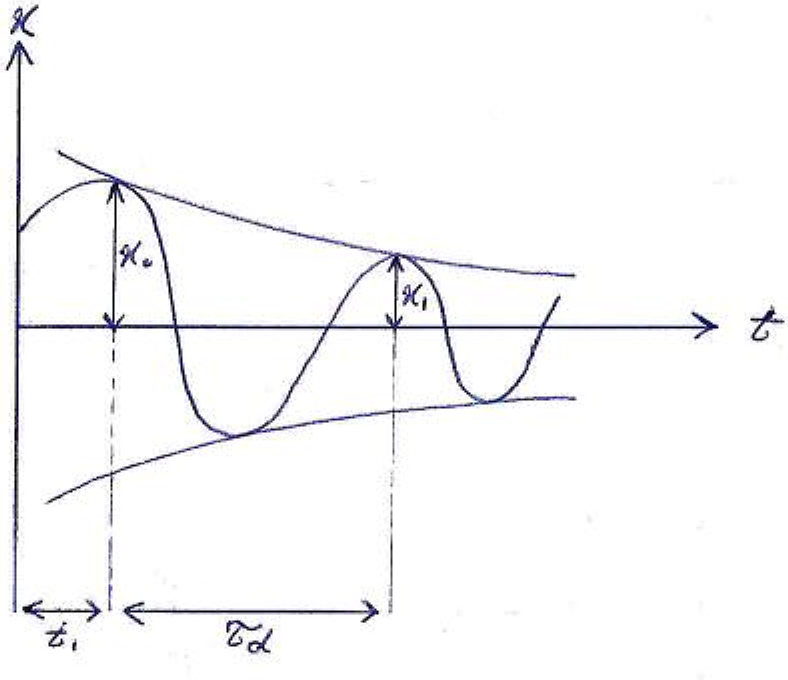
- طراحی سیستم های لوله کشی (Piping)
- طراحی سیستم های مکانیکی ثابت (Fixed Equipment)
- طراحی سیستم های مکانیکی دوار (Rotary Equipment)
- طراحی سیستم های تاسیسات مکانیکی و تهویه مطبوع (Plumbing & HVAC)
- طراحی تاسیسات مکانیکی زیربنائی
- طراحی سیویل و سازه در پروژه های عمرانی و صنعتی

شرکت مهندسی پتروپالا محور

کیفیت تعهد ماست

## Logarithmic Decrement — کاهش لگاریتمی

* بنا به تعریف کاهش لگاریتمی عبارت است از لگاریتم نپرین نسبت دو دامنه متوالی به یکدیگر و معیاریست برای اندازه گیری - میزان استهلاک.




$$
\begin{cases}
\delta = \ln \dfrac{x_0}{x_1} \\[2ex]
x = X e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) \\[2ex]
\delta = \ln \dfrac{X e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi)}{X e^{-\xi \omega_n (t_1 + \tau_d)} \sin\left[\omega_d (t_1 + \tau_d) + \varphi\right]}
\end{cases}
$$

$$\omega_d = 2\pi f_d = \frac{2\pi}{\tau_d} \rightarrow$$

$$\sin[\omega_d(t_1+\tau_d)+\varphi] =$$

$$\sin[2\pi+\omega_d t_1+\varphi] =$$

$$\sin(\omega_d t_1+\varphi) \rightarrow$$

$$\delta = \ln\frac{1}{e^{-\xi\omega_n\tau_d}} \rightarrow$$

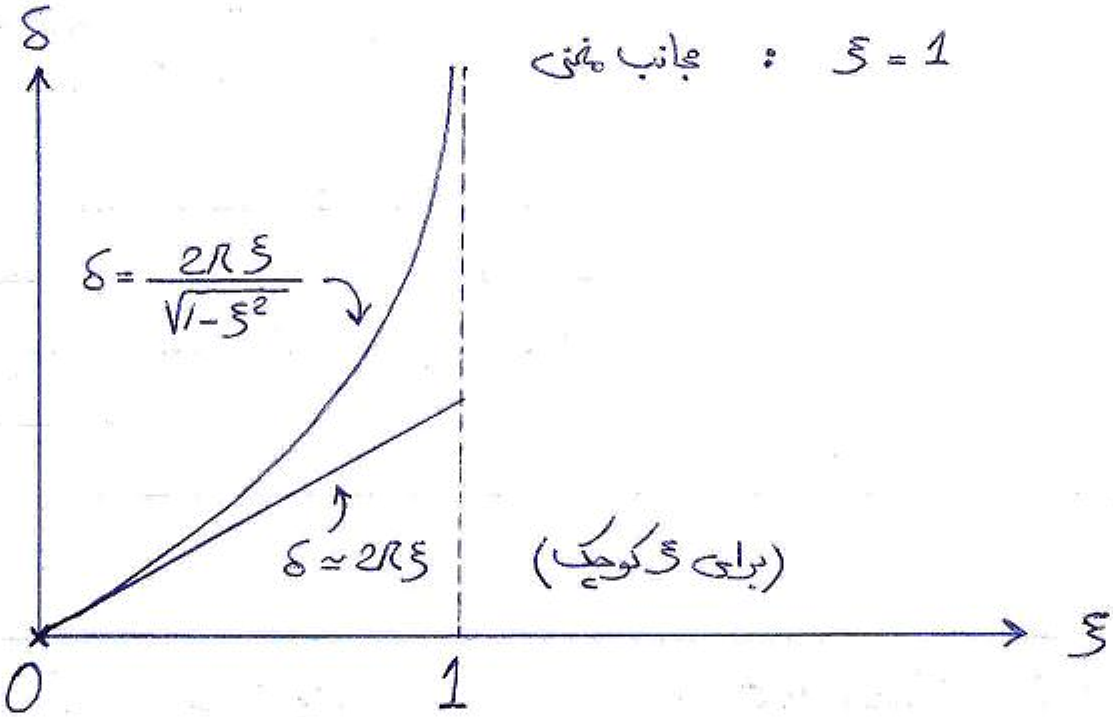
$$\delta = \ln e^{+\xi\omega_n\tau_d}$$

$$\omega_d = 2\pi f_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \frac{2\pi}{\tau_d} \rightarrow$$

$$\delta = \xi\omega_n\tau_d = \xi\frac{2\pi\cancel{\omega_n}}{\cancel{\omega_n}\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

For Small $\xi$ : $\boxed{\delta \simeq 2\pi\xi}$




$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x_0}{x_n} = \dfrac{x_0}{x_1} \times \dfrac{x_1}{x_2} \times \cdots \times \dfrac{x_{n-1}}{x_n} \\[2ex] \delta = \ln \dfrac{x_0}{x_1} = \ln \dfrac{x_1}{x_2} = \cdots = \ln \dfrac{x_{n-1}}{x_n} \\[2ex] \dfrac{x_0}{x_1} = e^{\delta} \;,\quad \dfrac{x_1}{x_2} = e^{\delta} \;,\; \ldots \;,\quad \dfrac{x_{n-1}}{x_n} = e^{\delta}\end{array}\right\} \rightarrow$$

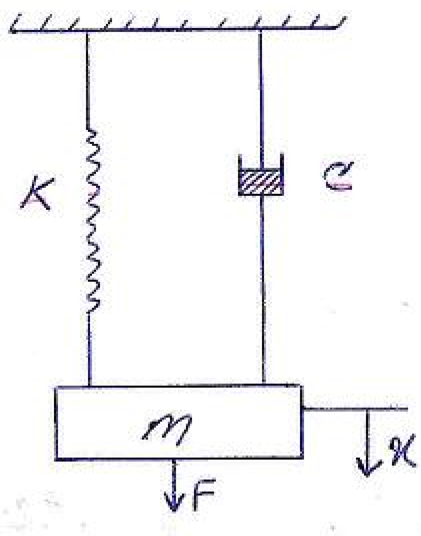
$$\frac{x_0}{x_n} = e^{\delta} \times e^{\delta} \times \dots \times e^{\delta} = e^{n\delta} \rightarrow$$

$$\ln \frac{x_0}{x_n} = n\delta \rightarrow \boxed{\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n}}$$

* این رابطه دقیق تر است چون خطا تقسیم بر $n$ می شود، و در میرائی کوچک فاصله $x_1$ و $x_2$ خیلی کم است.

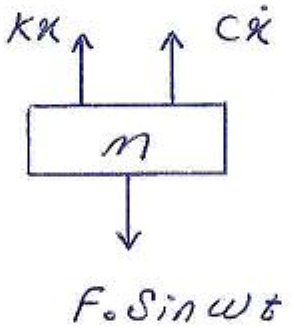
---

| |
|---|
| Forced Vibration ارتعاش اجباری |




* ما ارتعاش اجباری را تحت تأثیر نیروی محرک هارمونیک $(F = F_0 \sin \omega t)$ بررسی می کنیم:

* اگر یک سیستم ارتعاشی تحت تأثیر نیروی محرک هارمونیک به صورت ($F = F_0 \sin \omega t$) قرار گیرد در این صورت پاسخ سیستم به چنین نیروی تحریکی یک ارتعاش خواهد بود با همان فرکانس نیروی محرک هارمونیک.




معادله حرکت

$$-kx - c\dot{x} + F_0 \sin \omega t = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$ معادله دیفرانسیل حرکت

---

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \longrightarrow$$

* $x = X_1 e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi_1)$ جواب عمومی یا جواب حالت ارتعاش آزاد. ($X_1$ و $\varphi_1$ با شرایط اولیه محاسبه می شوند.)

* $x = X \sin(\omega t - \varphi)$ : جواب خصوصی

* جواب خصوصی را در معادله دیفرانسیل حرکت قرار می‌دهیم و اول $\dot{x}$ و $\ddot{x}$ را می‌یابیم :

$$\begin{cases} \dot{x} = X\omega \cos(\omega t - \varphi) = X\omega \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega t - \varphi\right) \\ \ddot{x} = -X\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) = \omega^2 X \sin(\pi + \omega t - \varphi) \end{cases}$$

$$m\omega^2 X \sin(\pi + \omega t - \varphi) + c\omega X \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega t - \varphi\right)$$

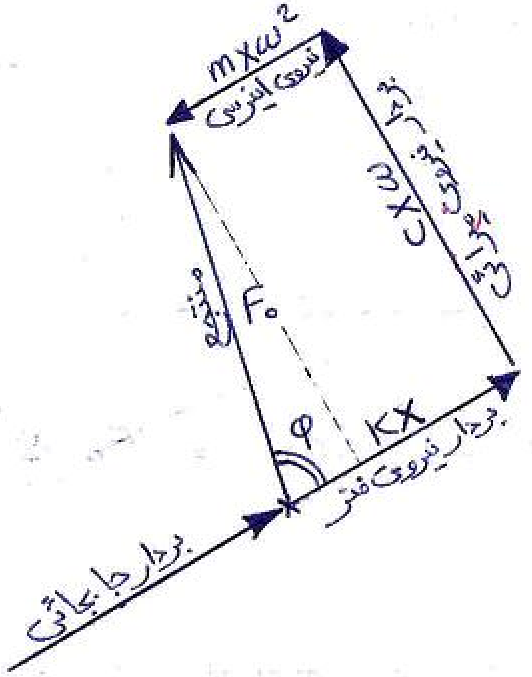
$$+ Kx \sin(\omega t - \varphi) = F_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

* این یک رابطه بردار گردان (فیزر) است چون $\omega$ حالت چرخشی دارد :

( نیروی اینرسی + نیروی میرائی + نیروی فنر = نیروی محرک هارمونیک )

* از این رابطه برداری $X$ و $\varphi$ را می‌یابیم . نخست جهت دلخواهی را برای بردار جابجائی در نظر می‌گیریم . سپس - سایر بردارها را با توجه به اختلاف فازشان $(0 ، \frac{\pi}{2} ، \pi)$ رسم می‌کنیم .

دیاگرام :




$\Delta$ مثلث :
$$F_0^2 = c^2X^2\omega^2 + (K - m\omega^2)^2 X^2$$

$$F_0^2 = X^2\left[(K - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}$$

$\Delta$ مثلث :
$$\tan\varphi = \frac{c\omega}{K - m\omega^2}$$

$$\varphi = \operatorname{Arc}\tan\frac{c\omega}{K - m\omega^2}$$

$x_c$ جواب عمومی
$x_p$ جواب خصوصی $\longrightarrow$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c + c\dot{x}_c + Kx_c = 0 \\ m\ddot{x}_p + c\dot{x}_p + Kx_p = F_0 \sin(\omega t) \end{cases} +$$

$$m(\ddot{x}_c + \ddot{x}_p) + c(\dot{x}_c + \dot{x}_p) + K(x_c + x_p) = F_0 \sin \omega t$$

اگر : $x = x_c + x_p$

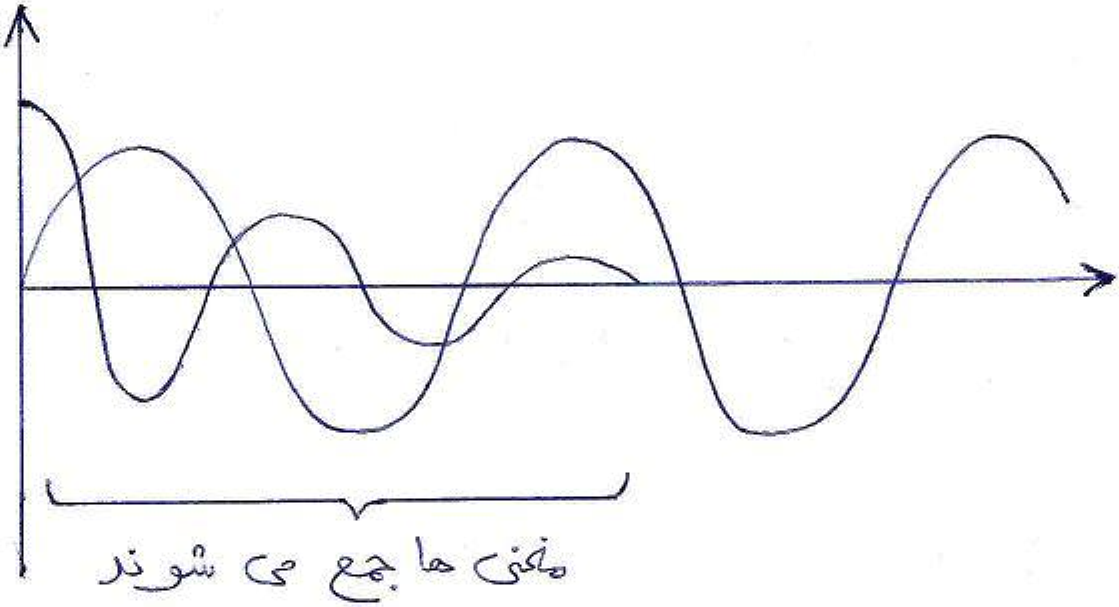
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \sin \omega t$$

* پس $x$ که مجموع جواب عمومی و خصوصی است هم جواب معادله دیفرانسیل است پس :

$$x = x_c + x_p = X_1 e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi_1) + X \sin(\omega t - \varphi)$$

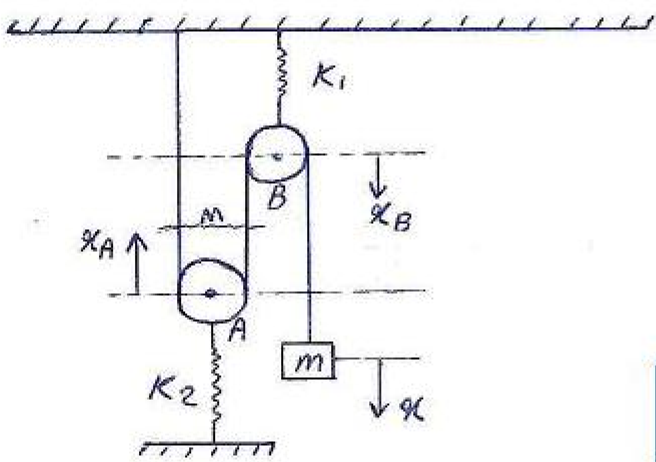
* با گذشت زمان ترم اول میمیرد و تنها جواب ما قسمت دوم است. پس جواب عمومی یک جواب گذرا و ناپایدار است.

* جواب مربوط به حل عمومی ( Transient ) است و جواب خصوصی، حل پایدار (Steady Stage Solution) است.




---

مسئله - مطلوبست تعیین فرکانس طبیعی برای یک سیستم مطابق شکل. درصورتی که جرم قرقره ها ناچیز و طول ریسمان تغییرناپذیر باشد.






جزوه درس ارتعاشات مکانیکی آقای دکتر شاهرخ حسینی هاشمی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

$$x = 2x_A + 2x_B$$

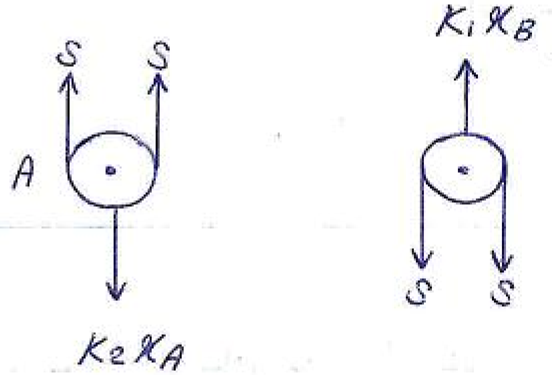
$$x = 2(x_A + x_B)$$ جابجائی جرم $m$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$T = 2m (\dot{x}_A + \dot{x}_B)^2$$

$$U = \frac{1}{2} K_1 x_B^2 + \frac{1}{2} K_2 x_A^2$$

$$U = \frac{1}{2} (K_1 x_B^2 + K_2 x_A^2)$$




اگر از مقطع $M$
قطع کنیم :

$$\begin{cases} 2S = K_2 x_A \\ 2S = K_1 x_B \end{cases} \longrightarrow x_B = \frac{K_2}{K_1} x_A$$

$$T = \frac{2m}{K_1^2} \dot{x}_A^2 (K_1 + K_2)^2$$

$$U = \frac{1}{2} \left( K_1 \frac{K_2^2}{K_1^2} + K_2 \right) x_A^2$$

$$U = \frac{1}{2K_1}\left(\frac{K_2 + K_1K_2}{K_1}\right) x_A^2$$

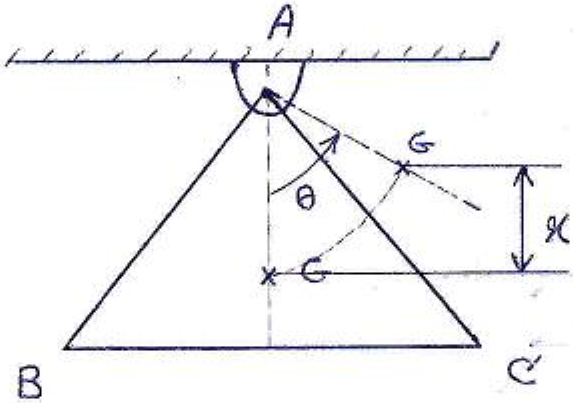
$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\frac{4m}{K_1^2}(K_1 + K_2)^2 \dot{x}_A \ddot{x}_A + \left(K_1 \frac{K_2^2}{K_1^2} + K_2\right) x_A \dot{x}_A = 0$$

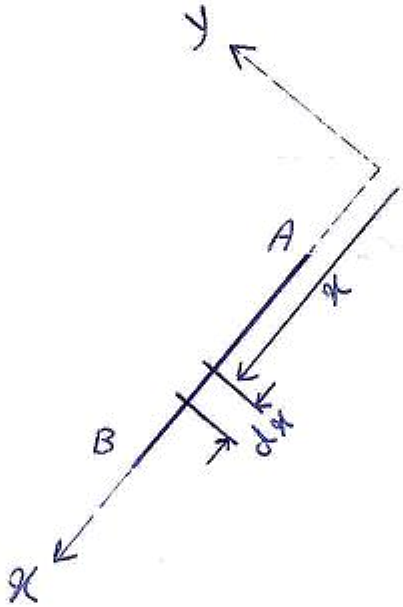
$\rightarrow$ ($\omega_n$ بدست می آید)

---

مسئله - سه میله متجانس هریک به جرم $m$ و بطول $2a$ در انتها در انتها به هم متصل شده و مثلث $ABC$ را می سازند که در نقطه $A$ حول محوری عمود بر صفحه خود می تواند بطور آزاد بچرخد. زمان تناوب سیستم را برای نوسانات کوچک بیابید.



(AB) :



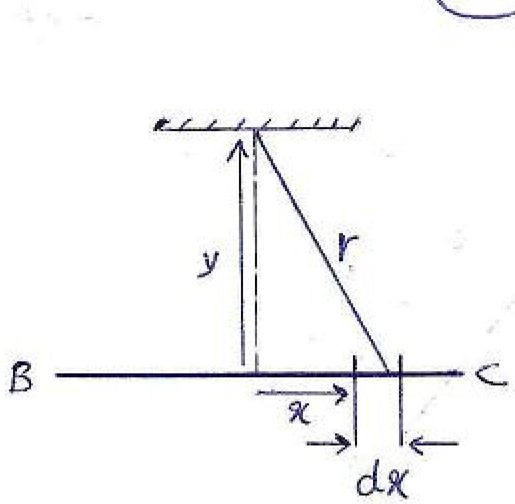

$$J_1 = \int x^2\, dm \qquad \bar{m} = \frac{m}{2a}$$

$$dm = \bar{m}\, dx = \frac{m}{2a}\, dx$$

$$J_1 = \frac{m}{2a}\int_0^{2a} x^2\, dx \rightarrow \boxed{J_1 = \frac{4}{3} m a^2}$$

(AC) ، بطریق مشابه $\rightarrow \boxed{J_2 = \frac{4}{3} m a^2}$

(BC) :



$$J_3 = \int r^2 \, dm = \int (x^2 + y^2) \, dm$$

$$J_3 = \frac{m}{2a} \int_{-a}^{a} x^2 \, dx + \frac{m}{2a} \int_{-a}^{a} y^2 \, dy$$

$$\left. \begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{3} m a^2 + m y^2 \\ y &= a\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \rightarrow \quad J_3 = \frac{10}{3} m a^2$$

$$J_{Total} = \sum_{i=1}^{3} J_i = 6 m a^2$$

$$T = \frac{1}{2} J_T \dot{\theta}^2 = 3 m a^2 \dot{\theta}^2$$

* انرژی پتانسیل ثقلی
( تغییر مکان G )

$$U = 3 m g x = 3 m g \left( \frac{2}{3} a \sqrt{3} \right) (1 - \cos\theta)$$

$$U = 2 m g a \sqrt{3} \, (1 - \cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt} (T + U) = 0 \quad \rightarrow$$

$$6ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2mga\sqrt{3}\,\dot{\theta}\underset{\overset{\|}{\theta}}{\sin\theta} = 0$$

$$2ma\dot{\theta}\,(3a\ddot{\theta} + g\sqrt{3}\,\theta) = 0$$

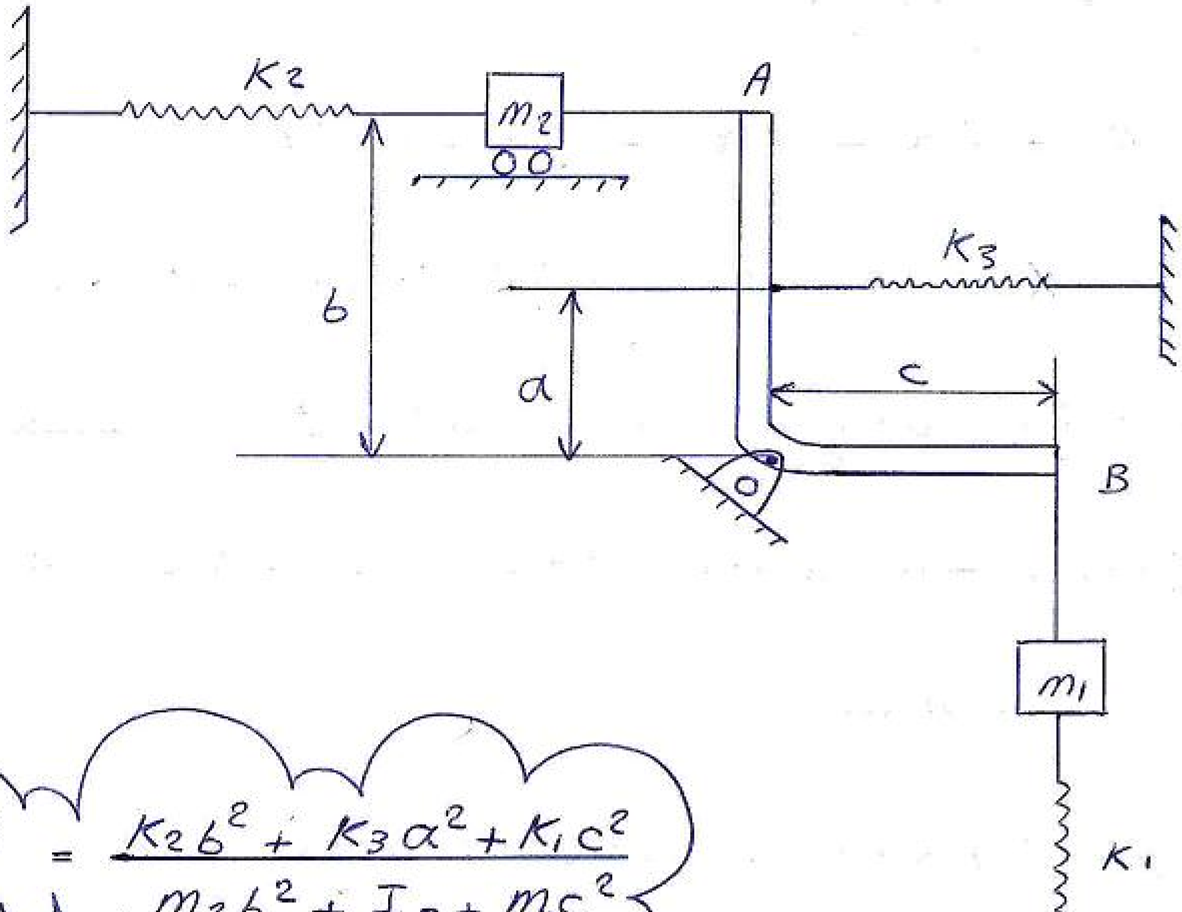
$$3a\ddot{\theta} + g\sqrt{3}\,\theta = 0 \longrightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{g\sqrt{3}}{3a}}_{\omega_n^2}\theta = 0 \longrightarrow$$

$$\omega_n^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{g}{a}$$

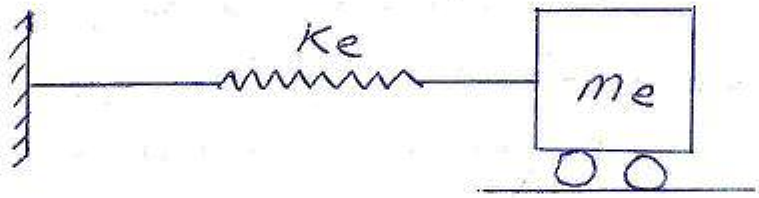
* $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$ . اگر بخواهیم کوچک بودن زاویه را در همان ابتدا و در فرمول ($U$) تأثیر دهیم - مسئله ای نیست و امکان دارد . امّا آنجا نمی توانیم ($\cos\theta = 1$) را در نظر بگیریم (چون خطا بالاست) لذا در آنجا می توان دو جمله از بسط را در نظر گرفت ($\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!}$) و جواب همان می شود.

مسئله ـ در مکانیزم نشان داده شده در شکل بازوی AOB با ممان اینرسی $I_o$ حول O می چرخد ـ و توسط دو سیستم جرم و فنر ($K_2$ و $m_2$) و ($K_1$ و $m_1$) و فنر $K_3$ محدود شده است.
برای نوسانات کوچک مطلوبست:
a ـ جرم مؤثر و فنر معادل در محل جرم $m_2$.
b ـ فرکانس طبیعی سیستم.




$$\omega_n^2 = \frac{K_2 b^2 + K_3 a^2 + K_1 c^2}{m_2 b^2 + I_o + m_1 c^2}$$

(جواب)

$\equiv$ 


## روش استاندارد (متعارف)

$$x = X \sin(\omega t - \varphi)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \sin\omega t$$

$$-m\omega^2 X \sin(\omega t - \varphi) + CX\omega \cos(\omega t - \varphi) +$$

$$KX \sin(\omega t - \varphi) = F_0 \sin\omega t \longrightarrow$$

$$(-m\omega^2 + K) X \sin(\omega t - \varphi) + CX\omega \cos(\omega t - \varphi)$$

$$= F_0 \sin\omega t$$

$$(-m\omega^2 + K) X [\sin\omega t \cos\varphi - \cos\omega t \sin\varphi]$$

$$+ CX\omega [\cos\omega t \cos\varphi + \sin\omega t \sin\varphi] =$$

$$F_0 \sin\omega t$$

$$\left[ (K - m\omega^2) X \cos\varphi + c X \omega \sin\varphi - F_0 \right] \sin\omega t$$

$$+ \left[ c X \omega \cos\varphi - (K - m\omega^2) X \sin\varphi \right] \cos\omega t = 0$$

$$\begin{cases} c X \omega \cos\varphi - (K - m\omega^2) X \sin\varphi = 0 \\ (K - m\omega^2) X \cos\varphi + c X \omega \sin\varphi - F_0 = 0 \end{cases}$$

$$\tan\varphi = \frac{c\omega}{K - m\omega^2}$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}$$

---

« برحسب $\xi$ »

$$X = \frac{F_0}{K\sqrt{\left(1 - \frac{m}{K}\omega^2\right)^2 + \frac{c^2\omega^2}{K^2}}} \Longrightarrow$$

$$X = \frac{F_0}{K\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{c^2\omega^2}{K^2}}}$$

$$C = 2m\xi\omega_n$$

$$\frac{C\omega}{K} = \frac{2m\xi\omega_n\omega}{K} = \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2} = \frac{2\xi\omega}{\omega_n}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{F_0}{K\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \\ X_0 &= \frac{F_0}{K} \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{X}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}}$$

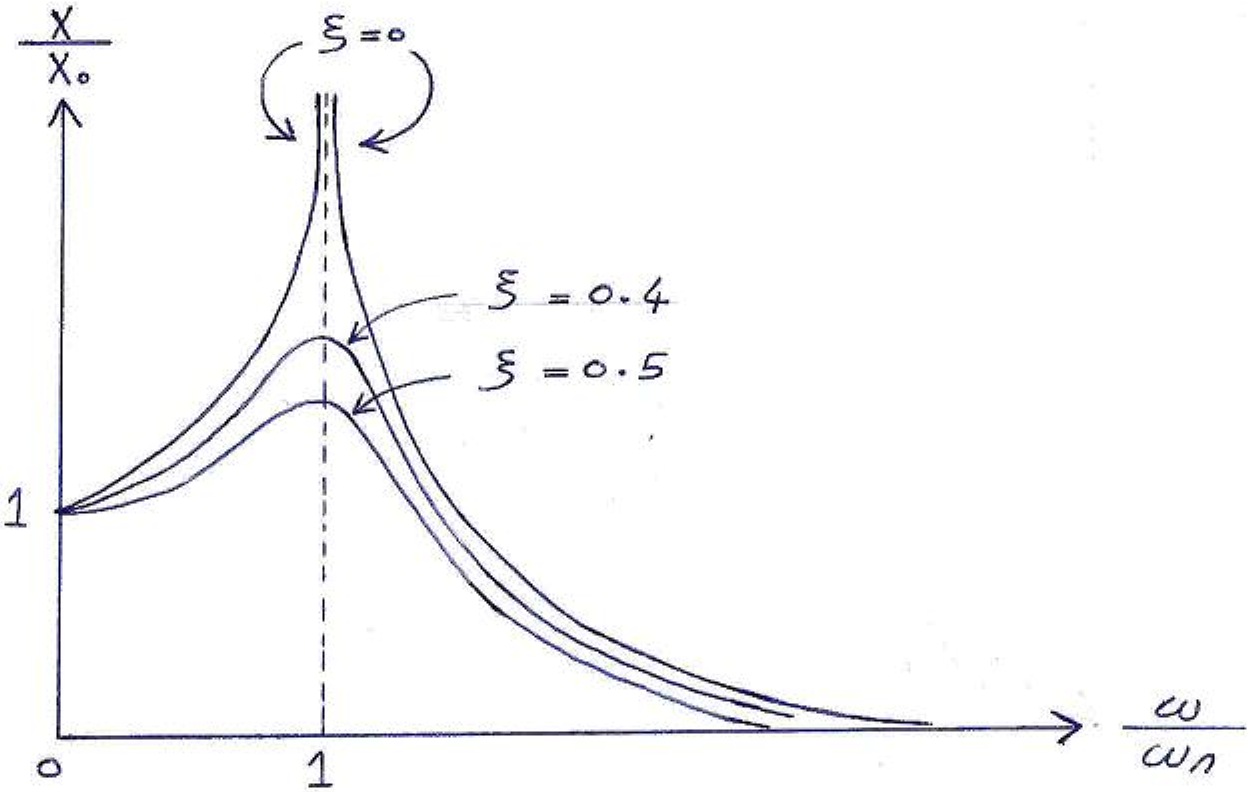
Magnification Factor

(فاکتور بزرگنمائی)

$$\tan\varphi = \frac{C\omega}{K\left(1-\frac{m}{K}\omega^2\right)}$$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{2\xi\,\omega/\omega_n}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

| |
|---|
| مطالعه $\frac{X}{X_0}$ برحسب مقادیر $\xi$ |




① $\frac{\omega}{\omega_n} = 0 \longrightarrow \frac{X}{X_0} = 1$

* پس همه منحنی ها صرف نظر از مقدار ξ ها از نقطه (1 و 0) می گذرند.

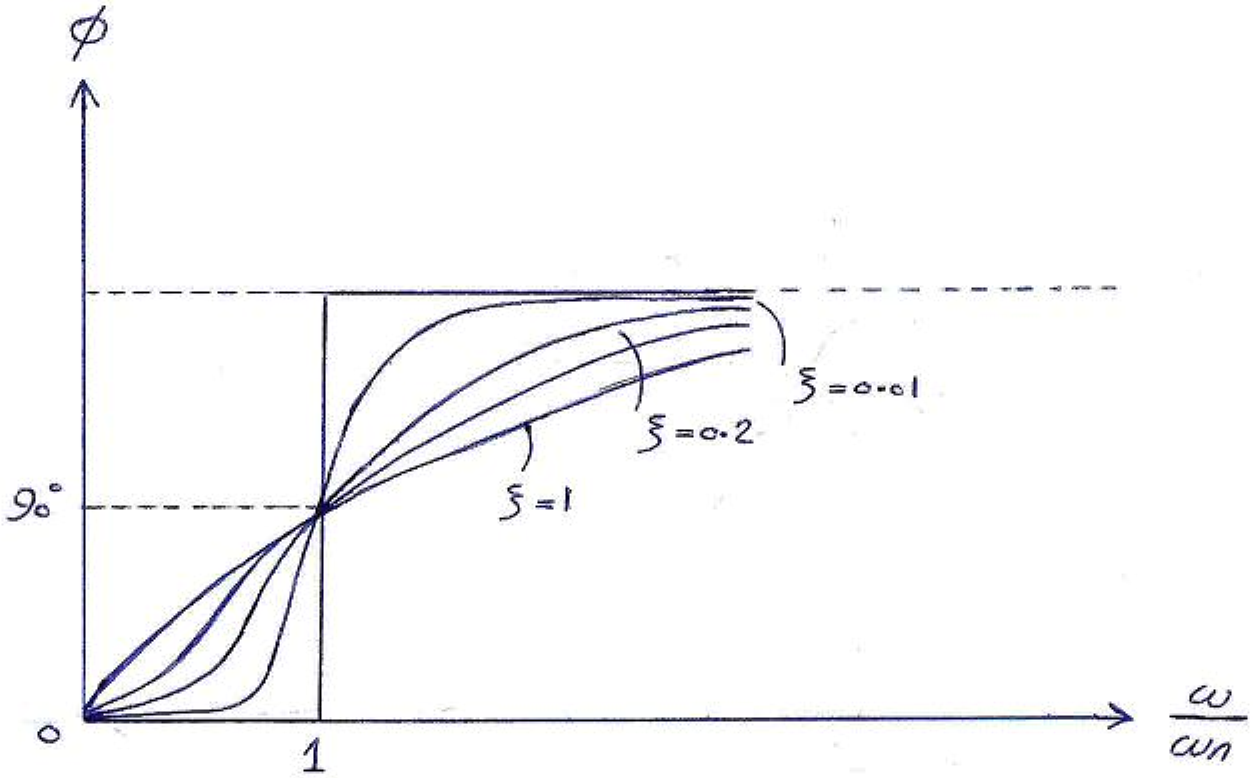
② $\frac{\omega}{\omega_n} = 1 \longrightarrow \frac{X}{X_0} = \frac{1}{2\xi}$

③ $\frac{\omega}{\omega_n} \to \infty \longrightarrow \frac{X}{X_0} \to 0$

* پس همه منحنی ها صرف نظر از مقدار ξ ها این مجانب را دارند.

---

مطالعه $\varphi$ برحسب مقادیر $\xi$




$$\frac{\omega}{\omega_n} = 0 \longrightarrow \tan\phi = 0 \longrightarrow \phi = 0^\circ$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = 1 \longrightarrow \tan\phi = \infty \longrightarrow \phi = 90^\circ$$

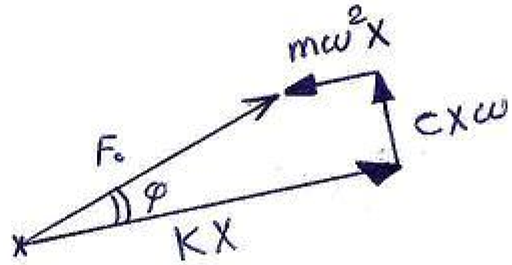
$$\frac{\omega}{\omega_n} \to \infty \longrightarrow \tan\phi \to 0 \longrightarrow \phi \to 180^\circ$$

---

**بررسی رفتار سیستم ارتعاشی**

**به کمک دیاگرام برداری**

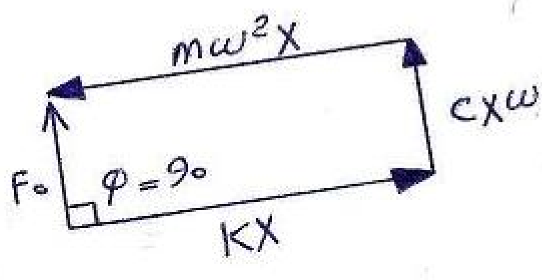
Case ① : $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$




* در چنین حالتی بزرگی بردارهای نیروی میرائی و اینرسی - بسیار ، بسیار کوچکند بطوریکه وقتی بردار نیروی محرک را رسم می کنیم زاویه‌ای نزدیک به صفر با بردار نیروی فنر بسازد یا به عبارتی تقریباً بزرگی نیروی $F_0$ و بزرگی نیروی فنر برابر است.

---

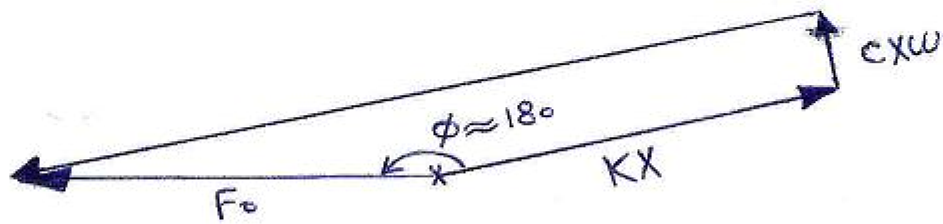
Case Ⅱ : $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$






$$F_0 = C X \omega = C X \omega_n$$

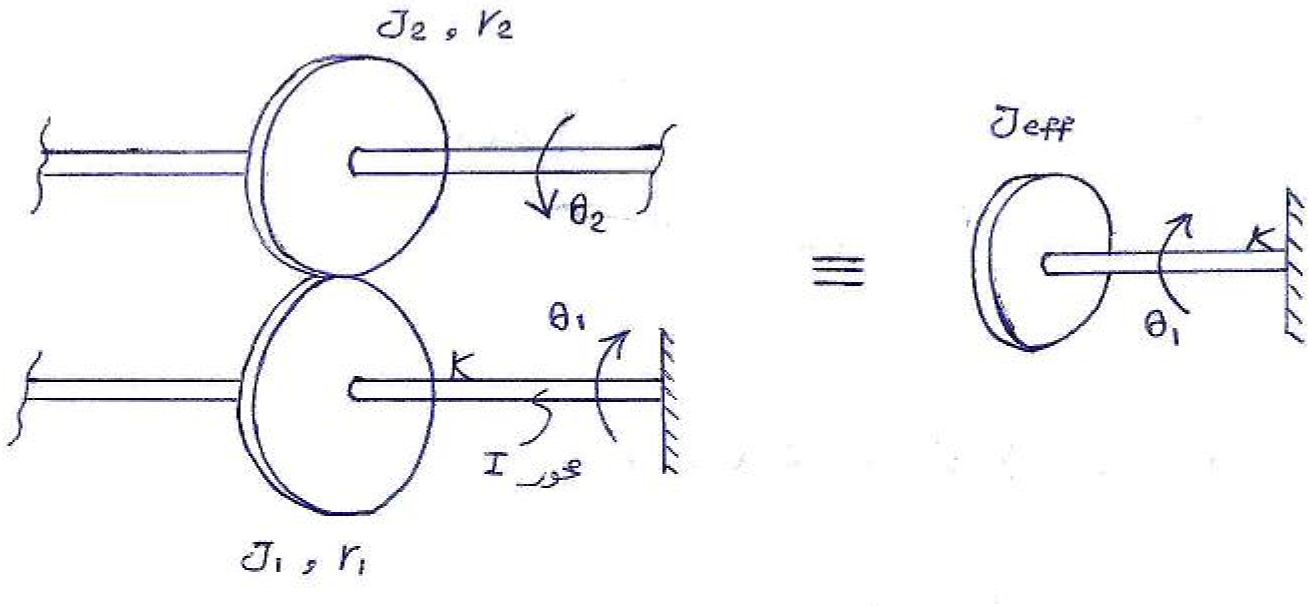
Case (III) : $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$




* در چنین حالتی بردار نیروی اینرسی بسیار بزرگ است. به طوریکه قسمت اعظم نیروی محرک صرف خنثی کردن نیروی بزرگ اینرسی می شود.

---

مسئله - ممان اینرسی مؤثر را برای محور I در سیستم ذیل محاسبه کنید.



$$* \quad T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2$$

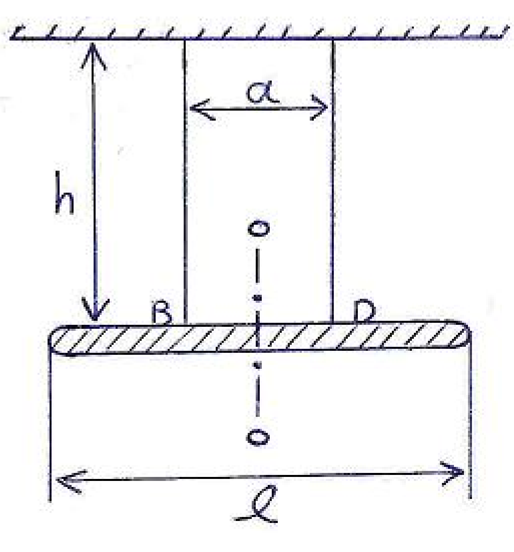
$$r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2 \longrightarrow \left( \theta_2 = \frac{r_1}{r_2} \theta_1 \right)$$

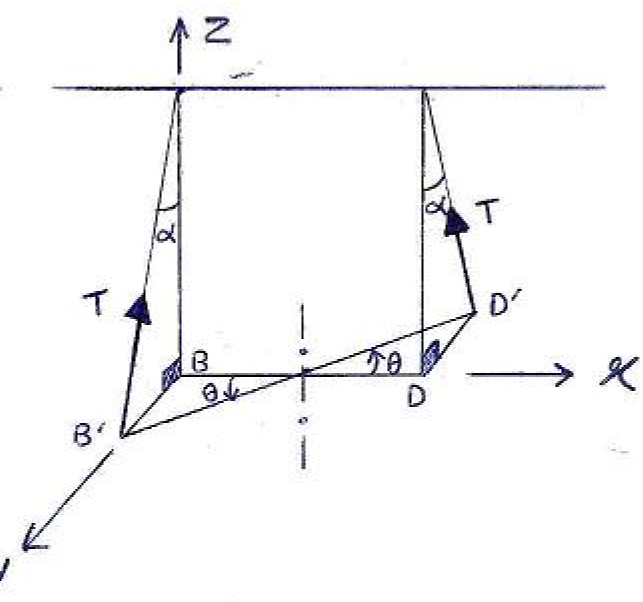
$$\left.\begin{aligned} * \quad T &= \frac{1}{2} \left( J_1 + J_2 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \dot{\theta}_1^2 \\ * \quad T &= \frac{1}{2} J_{eff} \dot{\theta}_1^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\boxed{J_{eff} = J_1 + J_2 \frac{r_1^2}{r_2^2}}$$

---

مسئله – یک میله یکنواخت بطول $l$ و وزن $W$ طبق شکل توسط دو ریسمان آویزان شده. معادله دیفرانسیل حرکت را برای نوسانات کوچک زاویه‌ای حول محور $oo$ نوشته و فرکانس طبیعی نوسان را بیابید.



$$\Sigma M_{o-o} = J\ddot{\theta}$$

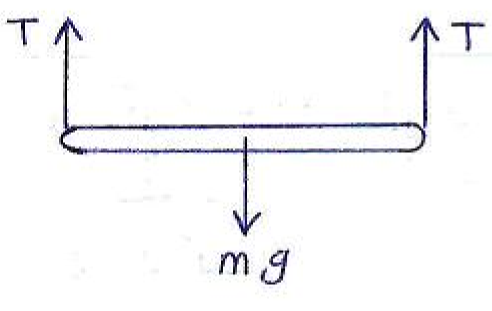
$$-2T\sin\alpha\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{ml^2}{12}\ddot{\theta}$$

$$\left.\begin{aligned} BB' &= h\cdot\alpha \\ BB' &= \frac{a}{2}\cdot\theta \end{aligned}\right\} \longrightarrow \qquad \alpha = \frac{a}{2h}\theta$$

$$-2T\left(\frac{a}{2h}\right)\theta\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{ml^2}{12}\ddot{\theta}$$

$$\frac{-Ta^2}{2h}\theta = \frac{ml^2}{12}\ddot{\theta}$$

(امّا) :




$$2T = mg \longrightarrow \qquad T = \frac{1}{2}mg$$

* چون $\theta$ کوچک است $T$ قبل و بعد چرخش را $(T)$ فرض کردیم.

$$-\frac{mga^2}{4h}\theta = \frac{ml^2}{12}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3ga^2}{hl^2}\theta = 0 \longrightarrow$$

$$\omega_n^2 = \frac{3ga^2}{hl^2}$$

مسئله - برای میرائی کوچک نشان دهید که کاهش لگاریتمی می تواند بر حسب انرژی ارتعاش $U$ و انرژی تلف شده در هر سیکل $\Delta U$ ارائه شود.

$$\left(\delta = \ln\frac{x_1}{x_2}\right) \longrightarrow \frac{x_1}{x_2} = e^{\delta} \longrightarrow \frac{x_2}{x_1} = e^{-\delta}$$

$$\left(U_1 = \frac{1}{2}Kx_1^2\right) \qquad \left(U_2 = \frac{1}{2}Kx_2^2\right)$$

$$\Delta U = U_1 - U_2$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}K\left(x_1^2 - x_2^2\right) \longrightarrow$$

$$\frac{\Delta U}{U_1} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2} = 1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$$

$$\frac{\Delta U}{U_1} = 1 - e^{-2\delta}$$

(بسط تیلور) : $e^{-\delta} = 1 - \delta + \frac{\delta^2}{2!} - \dots$

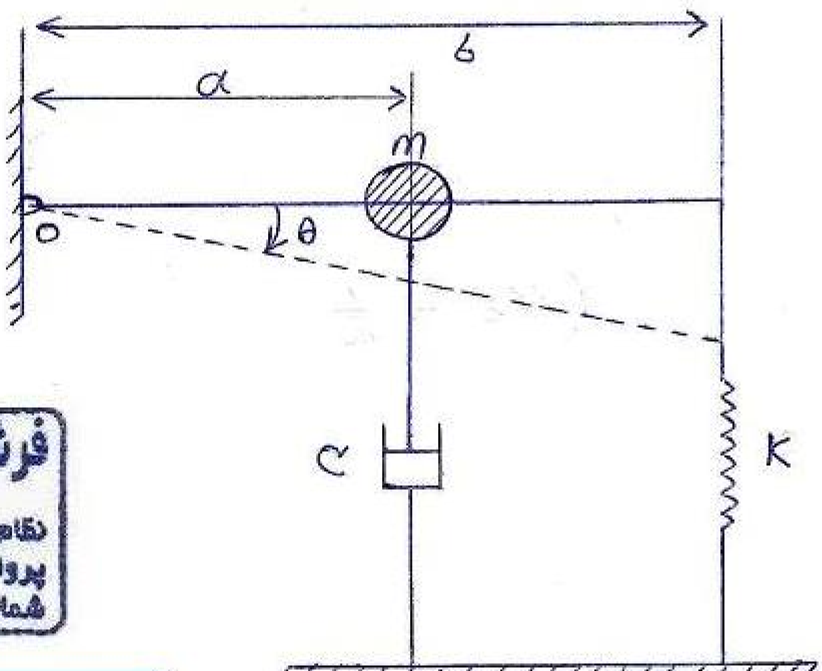
(δ کوچک) $\rightarrow$ $e^{-\delta} \approx 1-\delta$

$$\frac{\Delta U}{U_1} = 1-1+2\delta$$

$$\frac{\Delta U}{U_1} = 2\delta$$

---

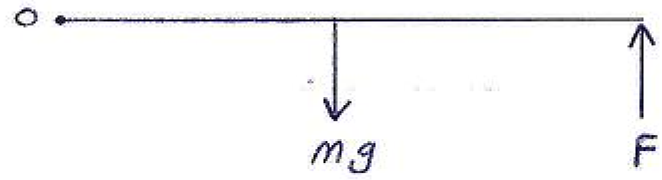
مسئله – معادله دیفرانسیل حرکت را برای شکل زیر نوشته و فرکانس طبیعی نوسان میرا و ضریب میرائی بحرانی (C.D) را بیابید.





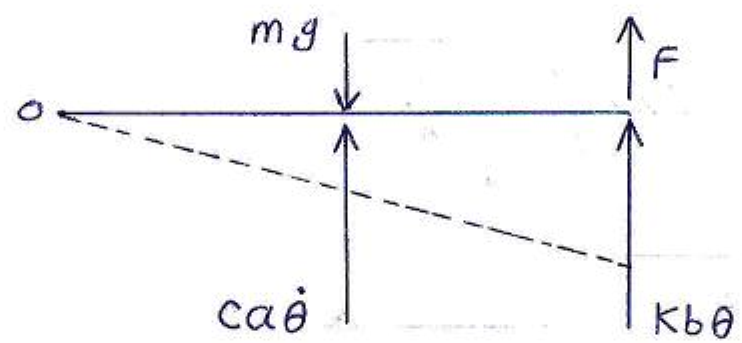

1 – تحلیل استاتیکی می کنیم.

2 – تحلیل دینامیکی می کنیم.




①

$$\sum M_o = 0 \longrightarrow Fb = mga$$




②

$$\sum M_o = J\ddot{\theta}$$

$$-Kb^2\theta - \cancel{Fb} - ca\dot{\theta}(a) + \cancel{mga} = ma^2\ddot{\theta}$$

$$ma^2\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + Kb^2\theta = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{\theta} + \dfrac{c}{m}\dot{\theta} + \dfrac{Kb^2}{ma^2}\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\frac{c}{m} = 2\xi\omega_n \longrightarrow$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

$$\omega_n = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

فرکانس طبیعی نامیرا

$$c_c = 2m\omega_n = 2m\frac{b}{a}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \longrightarrow$$

$$\omega_d = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\frac{c^2}{4m^2\omega_n^2}}$$

قرار می دهیم

# Resononce

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$$

$$x_p = X \sin(\omega t - \varphi)$$

$$X = \frac{X_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\xi\omega/\omega_n}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

رزونانس دامنه :

$$\frac{\omega}{\omega_n} = z \longrightarrow X = \frac{X_0}{\sqrt{(1-z^2)^2+4\xi^2 z^2}}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = 0 \longrightarrow 4z(1-z^2) - 8\xi^2 z = 0$$

$$4z\left[1-z^2-2\xi^2\right] = 0 \longrightarrow$$

$$z^2 = 1-2\xi^2 \longrightarrow z = \sqrt{1-2\xi^2}$$

$$X_{max} = \frac{X_0}{\sqrt{(1-1-2\xi^2)^2+4\xi^2(1-2\xi^2)}}$$

$$X_{max} = \frac{X_0}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}}{1-1+2\xi^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\xi} \qquad \frac{\omega}{\omega_n} = z = \sqrt{1-2\xi^2}$$

$$\longleftrightarrow$$

رزونانس فیز : $\tan\varphi = \infty \quad \rightarrow$

$$\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) \quad \left(\frac{\omega}{\omega_n} = 1\right)$$

$$X = \frac{X_0}{2\xi}$$

---

** از رابطه $\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1-2\xi^2}$ می توان به سادگی نتیجه گرفت که برای $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ماکزیمم در نقطه $\frac{\omega}{\omega_n} = 0$ اتفاق می افتد. از آنجا که برای مقادیر $\xi$ بزرگتر از $\frac{1}{\sqrt{2}}$ زیر رادیکال منفی می شود می توان نتیجه گرفت که برای همه مقادیر $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$ Max در نقطه $\frac{\omega}{\omega_n} = 0$ واقع می شود. این مطلب را می توان با رسم دقیق منحنی فاکتور بزرگنمائی بر حسب $\frac{\omega}{\omega_n}$ بر حسب - مقادیر $\xi$ نتیجه گرفت.

---

For Small $\xi$ :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n} \approx 1\right) \quad \left(X_{max} \approx \frac{X_0}{2\xi}\right) \quad \left(\tan\varphi = \frac{1}{\xi}\right)$$

$$\left(\xi \to 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}\right)$$

* برای میرائی کوچک رزونانس فیز و دامنه یک شرایط را دیکته می کنند پس از این پس همواره داریم :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_n} &= 1 \\ \phi &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{شرایط رزونانس}$$

---

$$x_c = X_1 e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi_1)$$

$$x = x_c + x_p$$

$$x = X_1 e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi_1) + X \sin(\omega t - \varphi)$$

$$x = X_1 e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi_1) + X \cos \omega t$$

$$x = X_1 e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi_1) + \frac{X_0}{2\xi} \cos \omega t$$

$$\left\{\begin{aligned} t &= 0 \\ x &= \dot{x} = 0 \end{aligned}\right.$$

شرایط اولیه
( معتبر است چون ارتعاش آزاد نیست )

$$0 = X_1 \sin\varphi_1 + \frac{X_0}{2\xi} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = 0 \\ t = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$0 = -\xi\omega_n X_1 \sin\varphi_1 + X_1 \omega_d \cos\varphi_1 \quad (2)$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{\omega_d}{\xi\omega_n} = \frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{\xi\omega_n}$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$1 + \tan^2\varphi_1 = \frac{1}{\cos^2\varphi_1} = \frac{1}{\xi^2} \longrightarrow$$

$$\cos\varphi_1 = \xi \longrightarrow$$

$$\sin\varphi_1 = \sqrt{1-\xi^2}$$

$$X_1 = -\frac{X_0}{2\xi \sin\varphi_1} = \frac{-X_0}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$x = \frac{X_0}{2\xi}\left[\frac{-e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \varphi) + \cos\omega t\right]$$

$$x = \frac{X_0}{2\xi}\left[\frac{-e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left(\sin\omega_d t \cos\varphi_1 + \cos\omega_d t \sin\varphi_1\right) + \cos\omega t\right]$$

$$x = \frac{X_0}{2\xi}\left[-e^{-\xi\omega_n t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right) + \cos\omega t\right]$$

For Small $\xi$ : $\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\omega_d t \approx 0$

$$x = \frac{X_0}{2\xi}\left[\frac{-e^{-\xi\omega_n t}}{1} \cos\omega_d t + \cos\omega t\right]$$

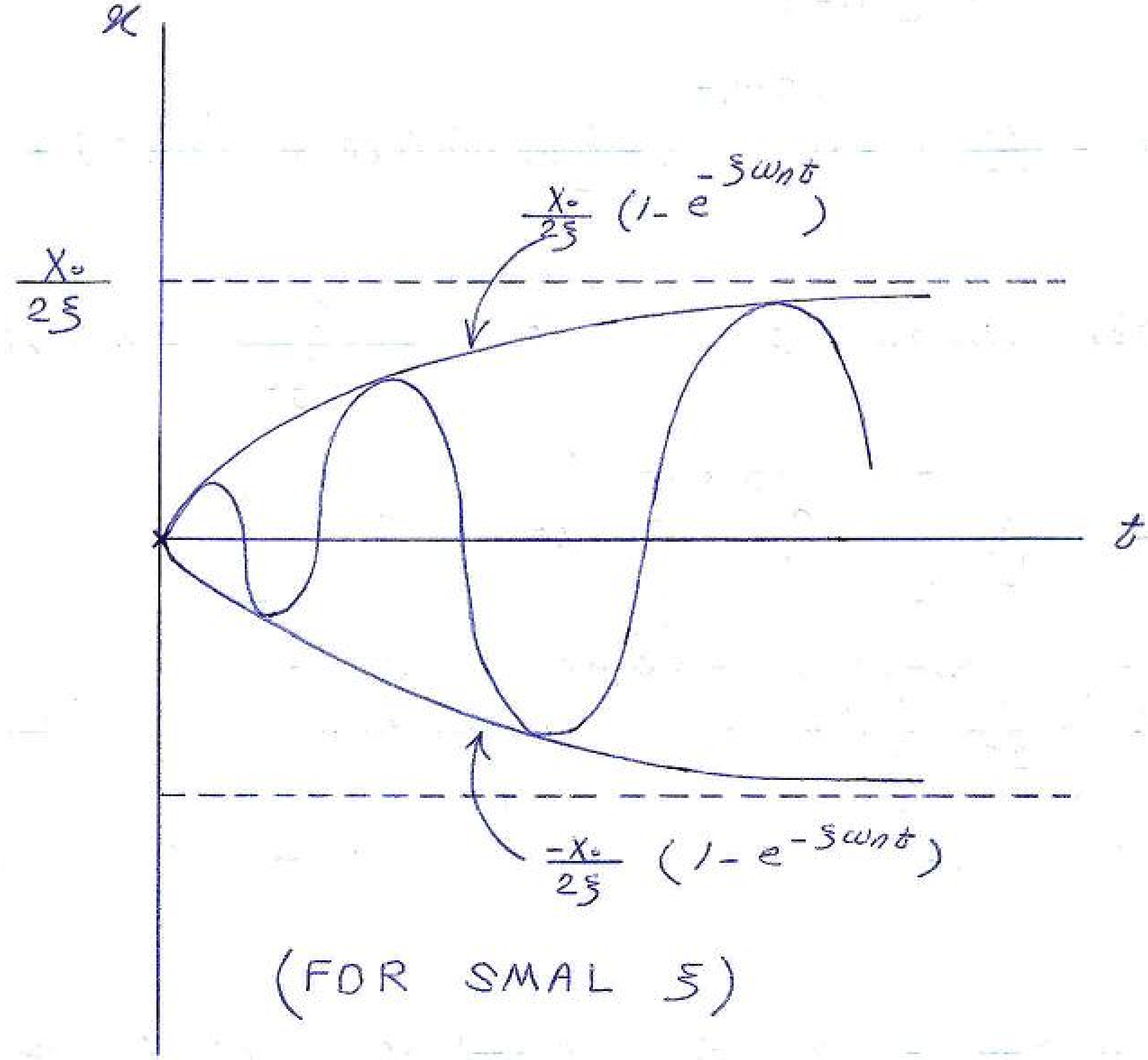
$$x = \frac{X_0}{2\xi}\left(1 - e^{-\xi\omega_n t}\right) \cos\omega_n t$$

برای میرائی کوچک (small $\xi$)

* برای میرائی صفر ($\xi = 0$) ، $x = \frac{0}{0}$ می شود که باید به روش هوپیتال از آن رفع ابهام شود :

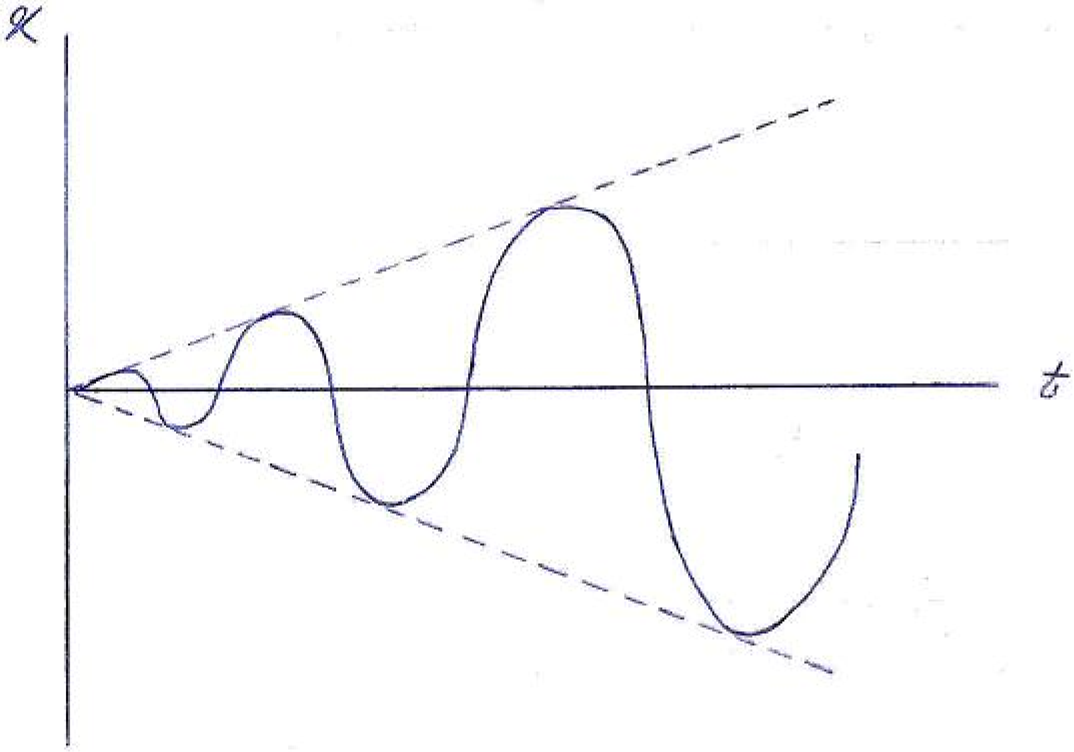
$$x = \frac{F_0}{K}\left(-\omega_n t \cos \omega_n t + \sin \omega_n t\right)$$

$\boxed{\text{منحنی } x \text{ برحسب } t \text{ در حالت میرائی کوچک و میرائی صفر :}}$




$t \to \infty$ $\qquad \frac{X_0}{2\xi}$ مجانب است

$(FOR \quad \xi = 0)$

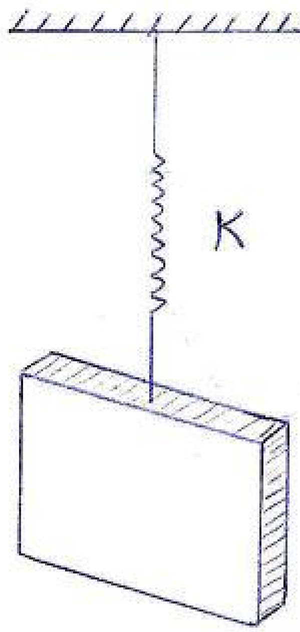



** از مقایسه دو منحنی بسادگی می فهمیم که وجود کمی میرائی در سیستم موجب می شود که دامنه نوسان محدود شود امّا در دیاگرام دوّم که سیستم فاقد میراکننده است دامنه نوسان در هر سیکل رشد می کند.

---

مسأله – یک ورقه نازک با مساحت $A$ و وزن $W$ به انتهای یک فنر متصل بوده و مطابق شکل در یک سیال لزج نوسان می کند. اگر $\tau_1$ دوره تناوب طبیعی نوسان نامیرا بوده (یعنی در هوا) و $\tau_2$ دوره تناوب میرا برای نوسان در سیال باشد نشان دهید که $\mu = \dfrac{2\pi W}{gA\tau_1\tau_2}\sqrt{\tau_2^2-\tau_1^2}$ . در ضمن –

* نیروی میرائی وارد بر ورقه $F_d = 2\mu A v$ است که در آن $v$ سرعت ورقه و $2A$ سطح جانبی ورقه است.




$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x} + \dfrac{2\mu A}{m}\dot{x} + \dfrac{K}{m}x = 0 \\ \ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\mu = \frac{m\xi\omega_n}{A} = \frac{W\xi\omega_n}{gA} \xrightarrow{\omega_n = 2\pi f_n}$$

$$\mu = \frac{2\pi W\xi f_n}{gA} = \frac{2\pi\xi W}{gA\tau_1}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

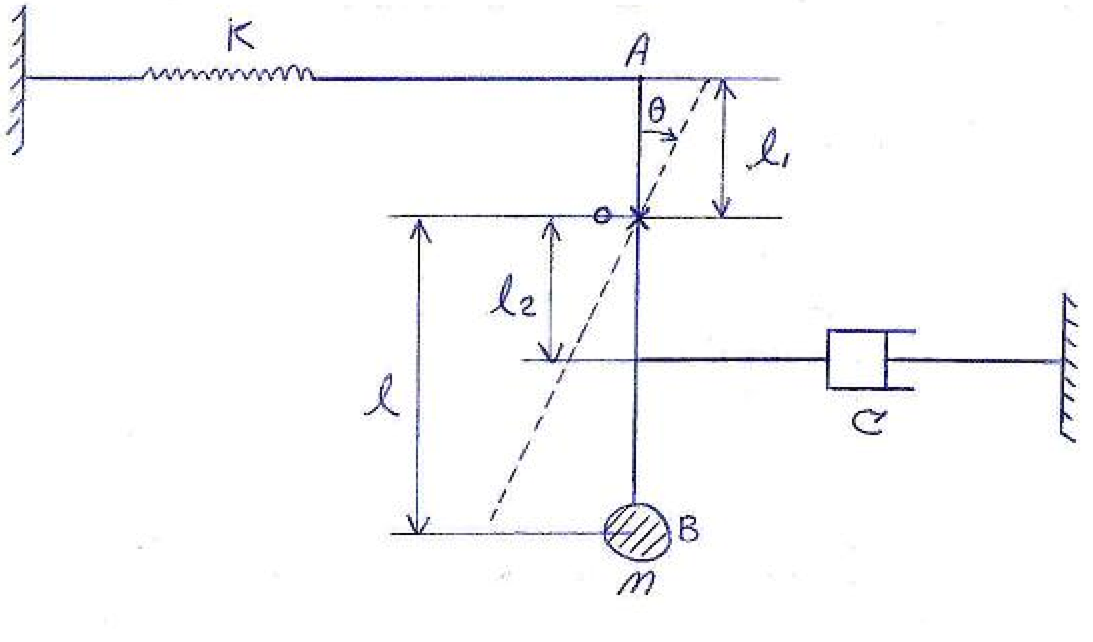
$$2\cancel{\pi} f_d = 2\cancel{\pi} f_n \sqrt{1-\xi^2} \longrightarrow$$

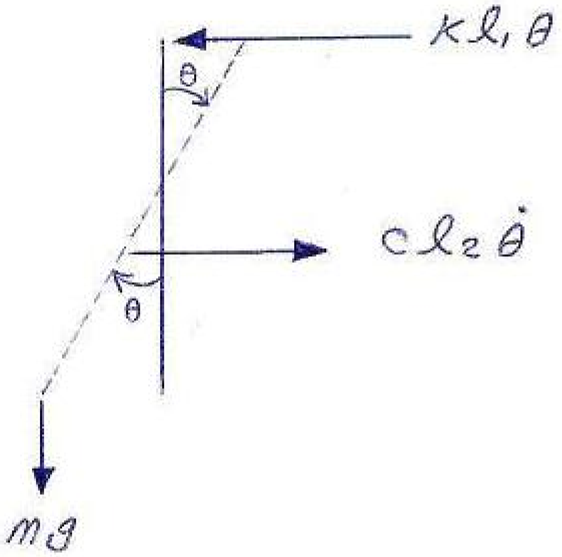
$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_1}\sqrt{1-\xi^2} \longrightarrow$$

$$\mu = \frac{2\pi W}{gA\tau_1\tau_2}\sqrt{\tau_2^2-\tau_1^2}$$

---

مسأله - برای سیستم ذیل بازوی $AOB$ می تواند حول محور مار بر o بچرخد . درصورتی که جرم میله ناچیز باشد مطلوبست تعیین فرکانس طبیعی - نوسان میرا درصورتی که نوسانات کوچک فرض شود .










$$\sum M_o = J\ddot{\theta}$$

$$-kl_1^2\theta - cl_2^2\dot{\theta} - mgl\theta = ml^2\ddot{\theta}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + cl_2^2\dot{\theta} + (kl_1^2 + mgl)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{cl_2^2}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{kl_1^2 + mgl}{ml^2}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kl_1^2 + mgl}{ml^2}}$$

$$\frac{cl_2^2}{ml^2} = 2\xi\omega_n \longrightarrow \xi = \frac{cl_2^2}{2ml^2\omega_n}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

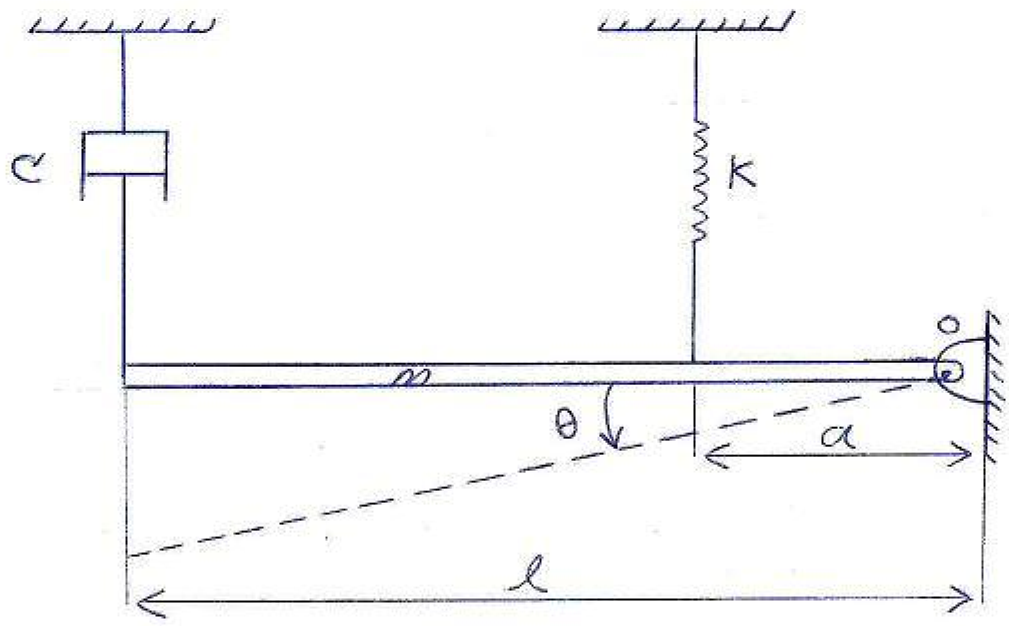
---

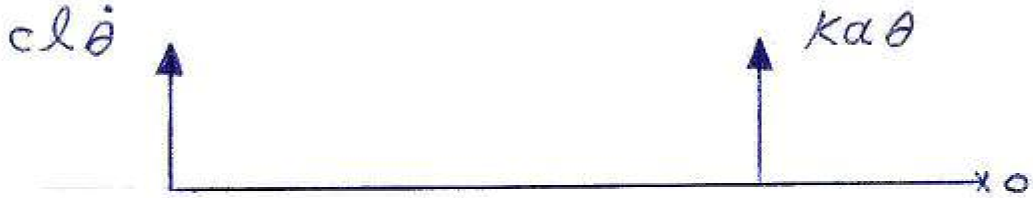
مسأله - یک میله صلب یکنواخت با جرم $m$ و طول $l$ طبق شکل در نقطه o لولا شده و متکی به یک فنر و یک میراکننده است. اگر $\theta$ از وضعیت تعادل استاتیکی اندازه گیری شود مطلوبست:

A - معادله برای $\theta$ کوچک (ممان اینرسی میله را حول o برابر $ml^2/3$ بگیرید)

B - معادله فرکانس طبیعی نوسان میرا.

C - میرائی بحرانی.






توجه - در حالت استاتیکی نیروی $F$ فنر و $mg$ یکدیگر را خنثی کرده اند و چون سیستم ساده است ما دیگر تحلیل استاتیکی نکردیم و آن را روی نمودار دینامیکی قرار ندادیم.

$$-ka^2\theta - cl^2\dot\theta = \frac{ml^2}{3}\ddot\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} \ddot\theta + \dfrac{3c}{m}\dot\theta + \dfrac{3ka^2}{ml^2}\theta = 0 \\ \ddot\theta + 2\xi\omega_n\dot\theta + \omega_n^2\theta = 0 \end{array}\right\}$$

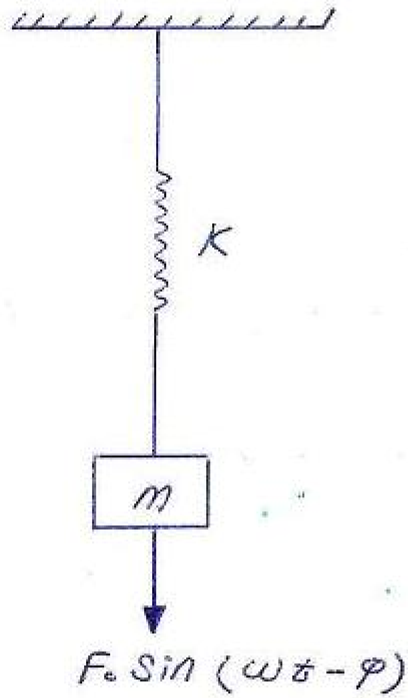
$$\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}} \times \frac{a}{l}$$

$$\frac{3c}{m} = 2\xi\omega_n \quad (1)$$

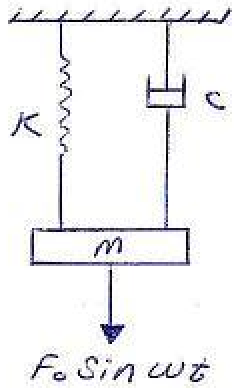
$$(\xi = 1) \longrightarrow \quad C = C_c = \frac{2m\omega_n}{3} = \frac{2ma}{3l}\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \xrightarrow{(1)}$ $\omega_d$ بدست می آید

مسأله - یک سیستم جرم و فنر توسط نیروی $F_0 \sin(\omega t - \varphi)$ تحریک شده است. مطلوبست تعیین جواب معادله دیفرانسیل حرکت اگر سرعت و تغییر مکان اولیه صفر باشد.






$$x_p = X \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\tan \varphi = \frac{2 \xi \, \omega / \omega_n}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

** پس در سیستمی که میرا کننده ندارد $\xi = 0$ است و $\tan \varphi = 0$ است و $\varphi = 0$ است و جواب خصوصی با نیرو هم فاز است

$$x_p = X \sin(\omega t - \varphi)$$ و ؟ مقدار آن :

$$X = \frac{X_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \xrightarrow{\xi = 0}$$

$$X = \frac{X_0}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$x_c = X_1 e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi_1) \xrightarrow{\xi = 0}$$

$$x_c = X_1 \sin(\omega_n t + \varphi_1)$$

$$x = x_c + x_p$$

$$x = X_1 \sin(\omega_n t + \varphi_1) + X \sin(\omega t - \varphi)$$

$$(t = 0 \ : \ x = \dot{x} = 0) \longrightarrow$$

$$0 = X_1 \sin\varphi_1 - X \sin\varphi \quad (1)$$

$$\dot{x} = X_1 \omega_n \cos(\omega_n t + \varphi_1) + X\omega \cos(\omega t - \varphi)$$

$$0 = X_1 \omega_n \cos\varphi_1 + X\omega \cos\varphi \quad (2)$$

① و ② $\longrightarrow$ 

$X_1$ و $\varphi_1$ بر حسب $X$ و $\varphi$
ارائه می شود. یعنی :
$X_1$ و $\tan\varphi_1$ و $\sin\varphi_1$ و $\cos\varphi_1$
را می یابیم و فاکتور می گیریم
و $\sin$ را بسط می دهیم :

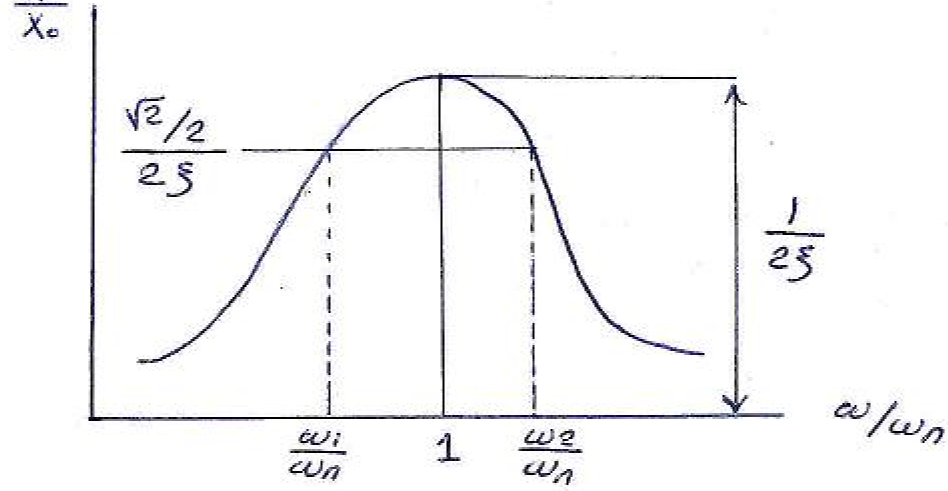
$\longrightarrow$

$$*** \quad x = \frac{F_0}{K\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\left[\sin(\omega t-\varphi) - \frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\cos\varphi + \cos\omega_n t\sin\varphi\right]$$

---

## Sharpness of Resononce — تیزی رزونانس

$$\frac{X}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad X_0 = \frac{F_0}{K}$$



* اگر در دو طرف فرکانس رزونانس دو فرکانس $\omega_1$ و $\omega_2$ را -
طوری جدا کنیم که به ازای آنها فاکتور بزرگنمائی $\left(\frac{\sqrt{2}/2}{2\xi}\right)$ باشد -
این نقاط را نقاط (half power) یا نصف توان می نامند.

$$* \quad \frac{\sqrt{2}/2}{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}} \longrightarrow$$

$$* \quad \frac{\omega^4}{\omega_n^4} - 2\left(1-2\xi^2\right)\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 1 - 8\xi^2 = 0$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1-2\xi^2 \pm \sqrt{\frac{4(1-2\xi^2) - 4(1-8\xi^2)}{2}}$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1-2\xi^2 \pm \sqrt{1+4\xi^2-4\xi^2-1+8\xi^2}$$

$$= 1-2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1+\xi^2}$$

for Small $\xi$ : $\quad \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2} \simeq 1 \pm 2\xi$

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_n^2} = 1-2\xi$$

$$\frac{\omega_2^2}{\omega_n^2} = 1+2\xi$$

$$\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_n^2} = 4\xi$$

$$\frac{(\omega_2-\omega_1)(\omega_2+\omega_1)}{\omega_n^2} = 4\xi$$

$$(\omega_2+\omega_n = 2\omega_n)$$ $\omega_n$ وسط پاره خط است

$$\rightarrow \quad \frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_n} = 2\xi \quad \rightarrow$$

$$Q = \frac{\omega_n}{\omega_2-\omega_1} = \frac{1}{2\xi} \quad \rightarrow$$

$$Q = \frac{2\pi f_n}{2\pi(f_2-f_1)} = \frac{1}{2\xi} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{Q = \frac{f_n}{\Delta f} = \frac{1}{2\xi}}$$ Frequency Band
باند فرکانس

* به کمک رابطه فوق مشخص می شود که یک روش برای محاسبه ضریب میرائی اندازه گیری (باند) است.

$\boxed{\text{روش تابع نمائی مختلط برای محاسبه } X \text{ و } \phi}$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \sin \omega t$$

$$x = X \sin(\omega t - \varphi)$$ (جواب خصوصی)

* فرض می کنیم :

$$x = X e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$F = F_0 e^{i\omega t}$$ ($F$ با $x$ به اندازه $\varphi$ اختلاف فاز دارد.)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 e^{i\omega t} \xrightarrow[\text{جواب}]{\text{قرار دادن}}$$

$$(-m\omega^2 + ci\omega + K) X e^{i(\omega t - \varphi)} = F_0 e^{i\omega t}$$

$$(K - m\omega^2 + ci\omega) X e^{-i\varphi} = F_0$$

$$X e^{-i\varphi} = \frac{F_0}{K - m\omega^2 + ci\omega} \xrightarrow[\text{مخرج}]{X \text{ مزدوج}}$$

$$X e^{-i\varphi} = \frac{F_0(K - m\omega^2 - ci\omega)}{\underbrace{\{(K - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\}}_{A}} = X\cos\varphi - Xi\sin\varphi$$

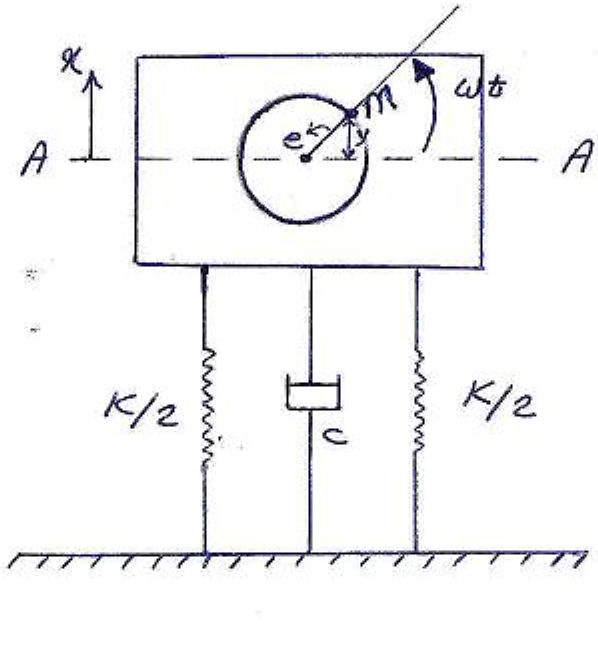
$$\longrightarrow \begin{cases} X\cos\varphi = \dfrac{F_0(K - m\omega^2)}{A} \\ X\sin\varphi = \dfrac{F_0 c\omega}{A} \end{cases}$$

$$\tan\varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}$$

## نامیزانی دوّار Rotating Unbalance

* در موتورها و ژنراتورهای برق و یا کلاً ماشینهایی که دارای یک قسمت چرخنده (Rotor) هستند درصورتی که مرکز جرم قسمت چرخنده روی محور گردش قرار نگیرد نیروئی پدید می آید که آن نیرو را نیروی عدم توازن (Unbalance force) می نامند.




M : جرم کل دستگاه

m : جرم عدم توازن

e : فاصله m از محور دوران A _ A

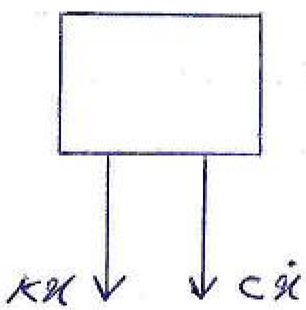
y : فاصله قائم m از محور A_A در هر لحظه زمان

ωt : زاویه در هر لحظه

$y = e \sin \omega t$

* نیروی اینرسی بواسطه شتاب $m$ کوچک که $(x+y)$ جابجا شده . $= m(\ddot{x} + \ddot{y})$

* نیروی اینرسی حاصل از باقی جرم سیستم . $= (M - m)\ddot{x}$




$$-kx - c\dot{x} = m(\ddot{x} + \ddot{y}) + (M - m)\ddot{x}$$

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{y} + M\ddot{x}$$

$$\begin{cases} M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y} \\ y = e \sin \omega t \end{cases} \longrightarrow$$

$$\boxed{M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m e \omega^2 \sin \omega t}$$

* پس نتیجه یک (forced Vibration) است که نیروی آن - همان نیروی عدم توازن است .

$$x = X \sin(\omega t - \varphi)$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \longrightarrow$$

$$\tan\varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

$$X = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(K-M\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{c\omega}{K - M\omega^2}$$

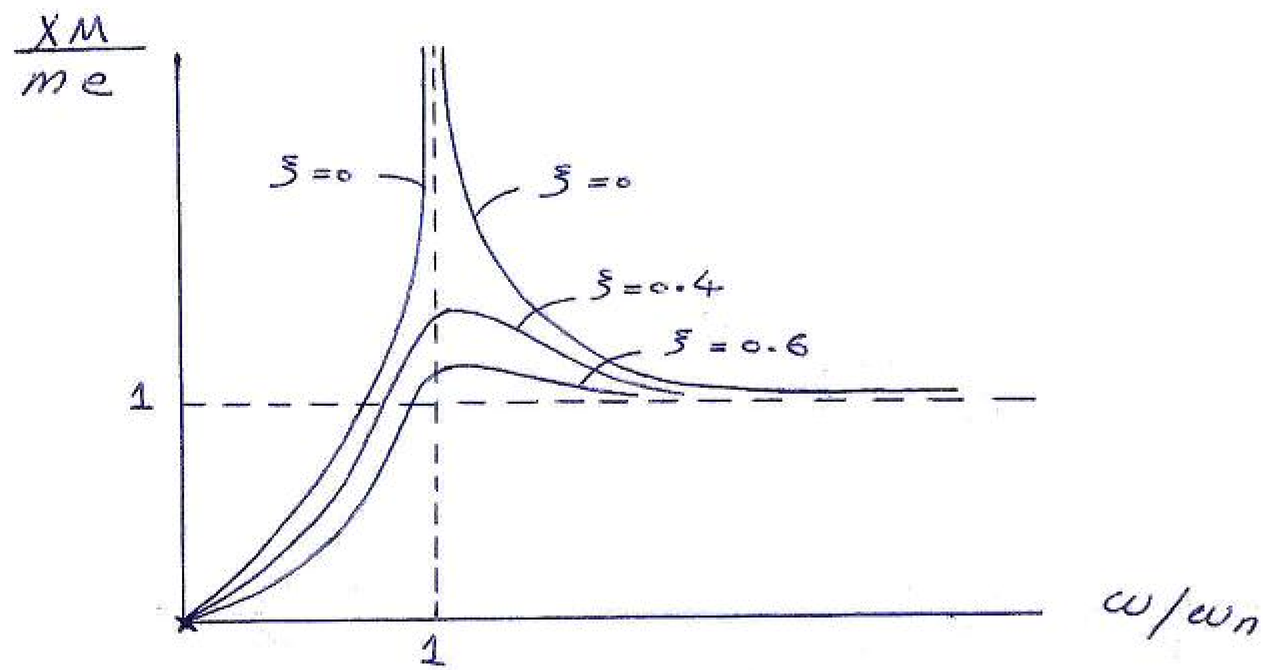
$$X = \frac{me\omega^2}{K\sqrt{(1-\frac{M}{K}\omega^2) + \frac{c^2\omega^2}{K^2}}}$$

$$\begin{cases} \frac{c\omega}{K} = 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \\ \omega_n^2 = \frac{K}{M} \end{cases}$$

$$X = \frac{me\omega^2/K}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

$$X = \frac{\frac{me}{M}\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\boxed{\frac{XM}{me} = \frac{\omega^2/\omega_n^2}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}}$$




* $\frac{\omega}{\omega_n} = 0 \longrightarrow \frac{XM}{me} = 0$ همه منحنی‌ها می‌گذرند

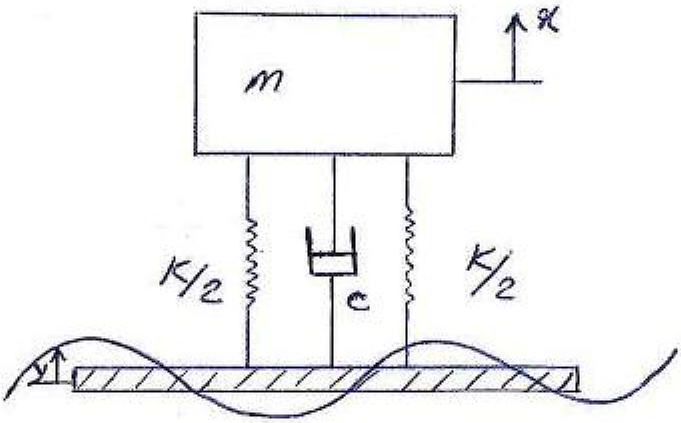
* $\frac{\omega}{\omega_n} = 1 \longrightarrow \frac{XM}{me} = \frac{1}{2\xi}$

* $\frac{\omega}{\omega_n} \to \infty \longrightarrow \frac{XM}{me} \to 1$

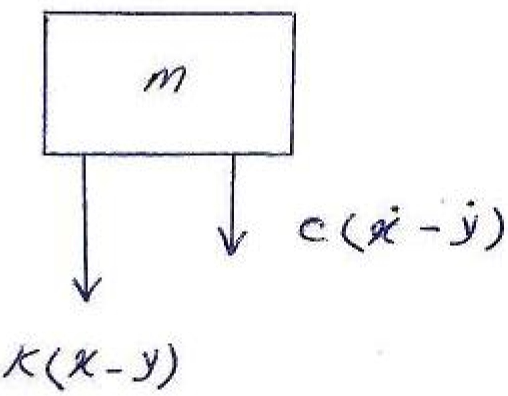
$$\zeta = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{XM}{me} \longrightarrow \infty$$

## تحریک پایه   Base Excitation

در برخی موارد ممکن است ماشینی روی یک سکو یا پایه مرتعش نصب شود. در این حالت می بایست جا بجائی هارمونیک - پایه مرتعش هم در تحلیل معادله دیفرانسیل حرکت بررسی - گردد.





$$-K(x-y) - c(\dot{x} - \dot{y}) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = Ky + c\dot{y}$$

$$x = X e^{i(\omega t - \varphi)}$$ جواب خصوصی

$$\bar{X} = X e^{-i\varphi}$$ دامنه مختلط جابجائی

$$x = \bar{X} e^{i\omega t}$$

$$y = \bar{y} e^{i\omega t}$$

$$(-mc^2 + ci\omega + K)\,\bar{X}\,\cancel{e^{i\omega t}} = (K + C + i\omega)\,\bar{y}\,\cancel{e^{i\omega t}}$$

* $$\frac{\bar{X}}{\bar{y}} = \frac{K + ci\omega}{K - m\omega^2 + ci\omega} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ضرب در مزدوج}}$$

* $$\frac{\bar{X}}{\bar{y}} = \frac{(K + ci\omega)(K - m\omega^2 - ci\omega)}{(K - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

$$\begin{cases} K - m\omega^2 = A \\ c\omega = B \end{cases}$$

$$\frac{X e^{-i\varphi}}{\bar{y}} = \frac{(K + Bi)(A - Bi)}{A^2 + B^2}$$

$$= \frac{KA - KBi + ABi + B^2}{A^2 + B^2} = \frac{KA + B^2 - (K-A)Bi}{A^2 + B^2}$$

$$= \frac{X \cos\varphi - Xi \sin\varphi}{\bar{y}} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{X}{\bar{y}} \cos\varphi = \dfrac{KA + B^2}{A^2 + B^2} & \text{Real part} \\ \dfrac{X}{\bar{y}} \sin\varphi = \dfrac{(K-A)B}{A^2 + B^2} & \text{Imagin part} \end{cases}$$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{cm\omega^3}{K(K - m\omega^2) + c^2\omega^2}} \qquad (I)$$

$$\frac{X^2}{\bar{y}^2} = \frac{(KA + B^2)^2 + (K-A)^2 B^2}{(A^2 + B^2)^2} \cdot (1)$$

$$\boxed{\frac{X^2}{\bar{y}^2} = \frac{K^2 + B^2}{A^2 + B^2}}$$

$$\boxed{\frac{X}{\bar{y}} = \sqrt{\frac{K^2 + c^2\omega^2}{(K - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}} \qquad (II)$$

* حال بی بعد می کنیم :

$$* \quad \frac{X}{Y} = \sqrt{\frac{1+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{c m \omega^3}{k^2\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}$$

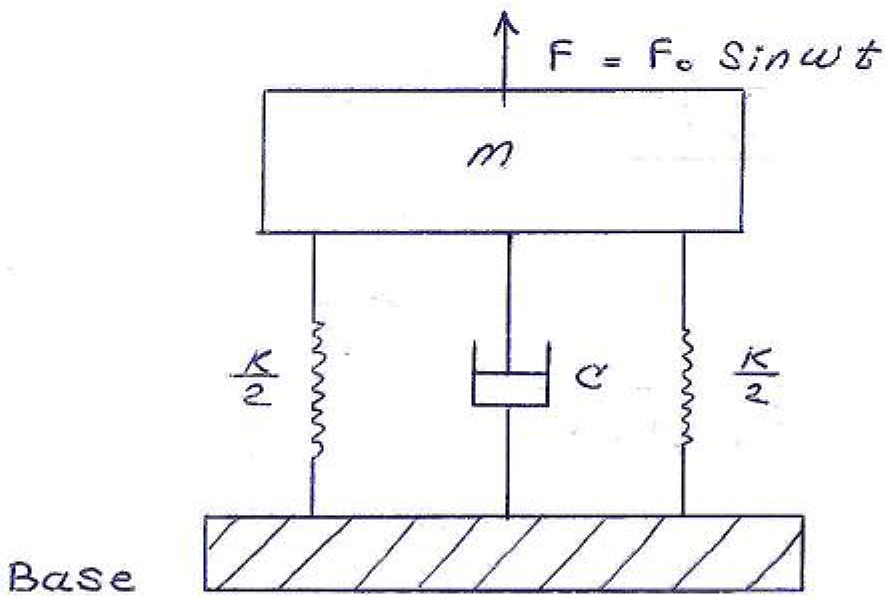
$$\frac{c m \omega^3}{k^2} = \frac{c\omega}{k}\cdot\frac{m}{k}\omega^2 = \frac{c\omega}{k}\cdot\frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

$$* \quad \tan\varphi = \frac{2\xi\,\omega^3/\omega_n^3}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

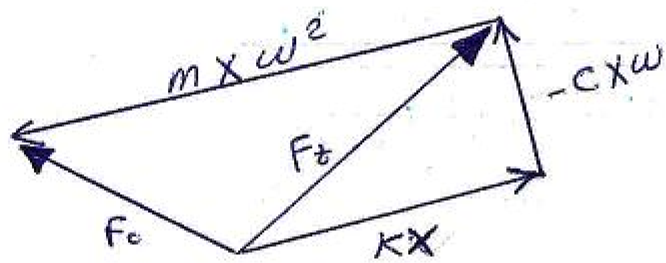
---

## ایزوله کردن ارتعاشات

تولید ارتعاشات ناخواسته در ماشینها و موتورها امری است اجتناب ناپذیر که ممکن است بواسطه نامیزانی در ماشینهائی که دارای یک قسمت چرخنده هستند و یا بواسطه حرکت رفت و برگشتی ایجاد شود. می توان با طراحی فنرهائی که آنها را (ایزولاتور) نامند این ارتعاشات را به نحو بارزی کاهش داد.




($F_t$ - نیروی منتقله)




$$* \quad F_t^2 = (c^2\omega^2 + k^2)\,X^2$$

$$* \quad F_t = X\sqrt{c^2\omega^2 + k^2}$$

$$* \quad TR = \frac{F_t}{F_o}$$

(Transmissibility)

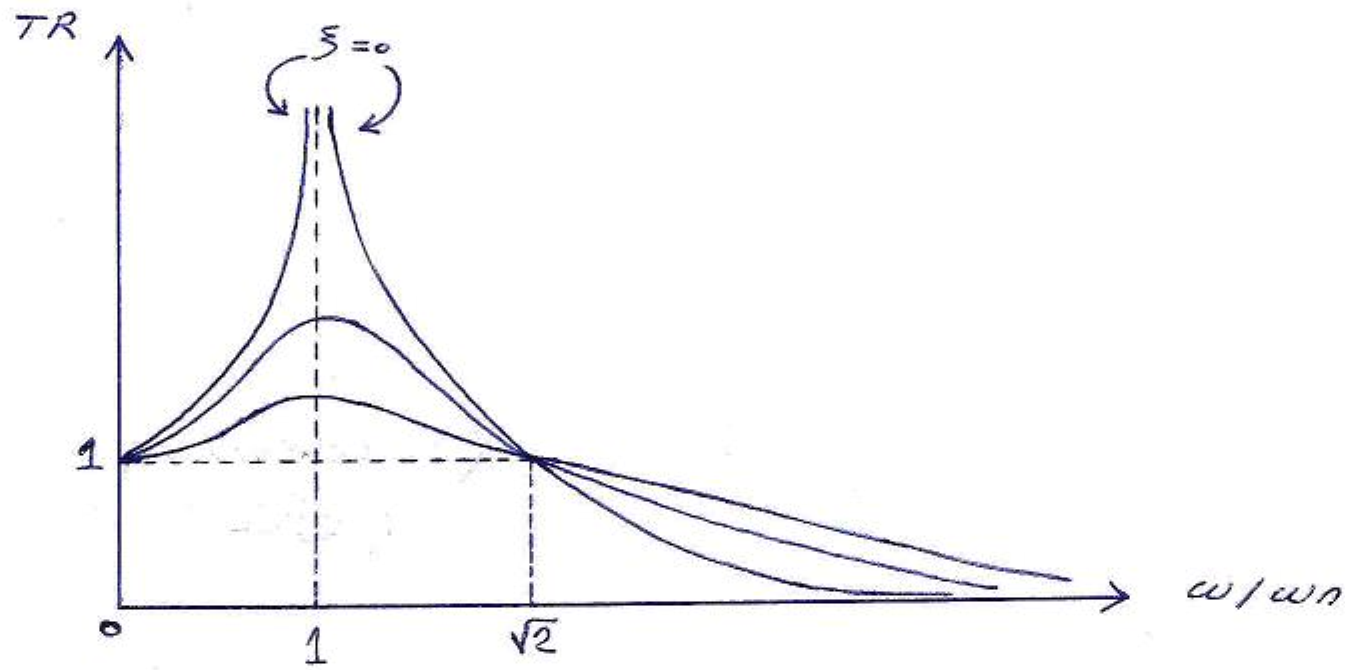
(قابلیت انتقال)

$$TR = \frac{X\sqrt{K^2 + C^2\omega^2}}{F_0}$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + C^2\omega^2}}$$

$$TR = \frac{\sqrt{K^2 + C^2\omega^2}}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + C^2\omega^2}} \xrightarrow{\text{از } K^2 \text{ فاکتورمی‌گیریم}}$$

$$\boxed{TR = \frac{\sqrt{1 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}}$$



$$\frac{\omega}{\omega_n} = 0 \quad : \quad TR = 1$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = 1 \quad : \quad TR = \sqrt{\frac{1+4\xi^2}{4\xi^2}}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{2} \quad : \quad TR = \sqrt{\frac{1+8\xi^2}{1+8\xi^2}} = 1$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} \to \infty \quad : \quad TR \to 0$$

$$\xi = 0 \quad : \quad TR = \infty$$

---

* هدف ما min کردن $(F_t)$ است. پس عملاً ایزوله کردن ارتعاشات وقتی امکان پذیر است که $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ باشد (تا مقدار TR کوچکتر از یک شود). در جاهائی که $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ است سیستمی که فاقد میرا کننده است ارجح تر است.

---

* از روی دیاگرام مشخص است که به هنگامی TR کوچکتر از (1) است که $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ باشد لذا می توان گفت ایزوله کردن ارتعاشات در عمل وقتی امکان پذیر است که $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ باشد. از روی دیاگرام واضح است که برای نسبتهای $\frac{\omega}{\omega_n} \sqrt{2}$ سیستمی که فاقد میرا کننده است نسبت به سیستم دارای میرا کننده ارجح تر است اما در حول وحوش فرکانس رزونانس سیستمی که دارای کمی میرا کننده است نسبت به سیستم معکوس قابلیت کمتری را -

بدست می دهد. در طراحی فنرهای ایزولاتور عوامل زیر مؤثر-
است :

۱- ضریب انتقال قابل قبول (کوچکتر از یک) برای نسبتهای $\sqrt{2} < \frac{\omega}{\omega_n}$
2- ضریب قابلیت انتقال نسبتاً پایین در حول وحوش فرکانس -
رزونانس.

---

* برای سیستم فاقد میرا کننده :

$$TR = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 1}$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 1 = \frac{1}{TR} \quad \rightarrow \quad \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = \frac{TR+1}{TR}$$

$$\omega = 2\pi f \quad \rightarrow \quad \frac{4\pi^2 f^2}{\omega_n^2} = \frac{TR+1}{TR}$$

$$f^2 = \frac{\omega_n^2}{4\pi^2}\left(\frac{TR+1}{TR}\right)$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{m} \quad \text{و} \quad K\delta = mg$$

$$\frac{K}{m} = \frac{g}{\delta}$$

(δ - تغییر مکان استاتیکی)

$$f = \frac{\sqrt{g}}{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{TR+1}{TR}}$$

$$f = \frac{9.8 \times 1000 \ (mm/s)}{2\pi} \sqrt{\frac{TR+1}{(TR)\ \delta_{(mm)}}}$$

$$\boxed{f = 15.7 \sqrt{\frac{TR+1}{(TR)\ \delta_{(mm)}}}} \longrightarrow \quad f : Hz$$

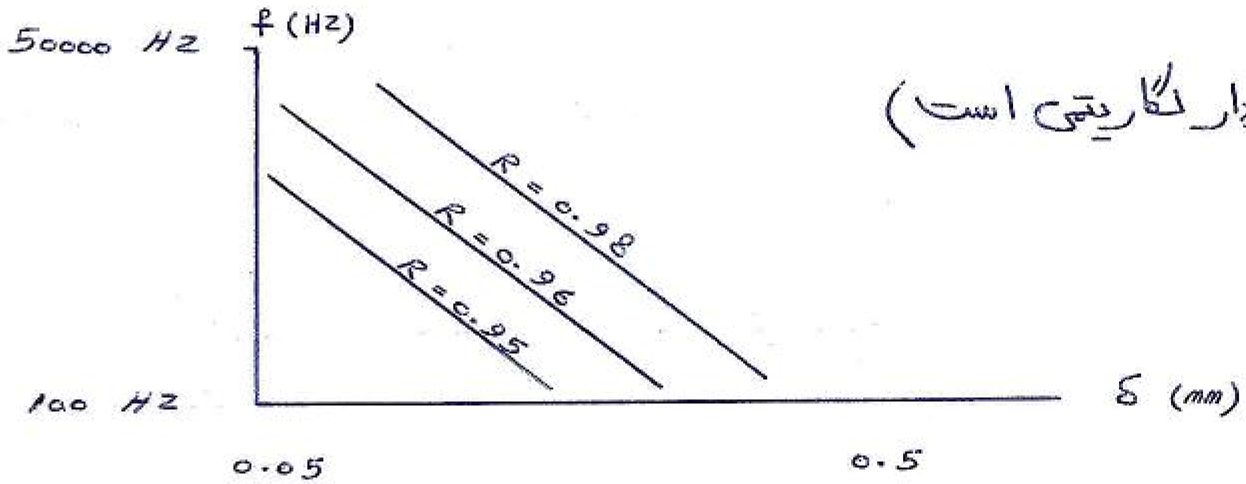
---

$*$ $R = 1 - TR$ (ضریب کاهش قابلیت انتقال)

$*$ $$f = 15.7 \sqrt{\frac{(2-R)}{(1-R)\ \delta_{mm}}}$$

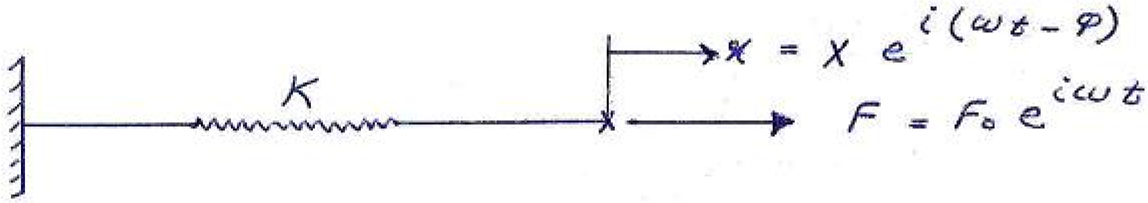
---

(نمودار لگاریتمی است)



## نکاتی درباره ایمپدانس مکانیکی $(Z)$

* بنا به تعریف ایمپدانس مکانیکی عبارت است از نسبت نیرو به سرعت.




$$Z = \frac{F}{v} = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{\underbrace{\left(X i \omega\, e^{i(\omega t - \varphi)}\right)}_{\dot{x}}}$$

$$F = Kx$$
$$F_0 e^{i\omega t} = KX e^{i(\omega t - \varphi)}$$
$$F_0 = KX e^{-i\varphi}$$
$$F_0 = KX(\cos\varphi - i\sin\varphi) \longrightarrow$$

$$\begin{cases} F_0 = KX\cos\varphi & \text{Real} \\ 0 = KX\sin\varphi & \text{immagin} \longrightarrow \end{cases}$$

$$\sin\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$$

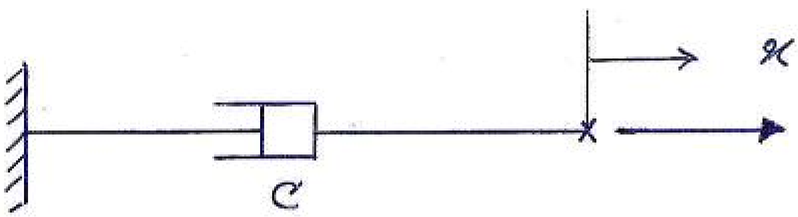
$$Z = \frac{F_o}{X i \omega e^{-i\varphi}} = \frac{kX}{X i \omega}$$

$$Z = \frac{k}{i\omega}$$

Mechanical Impedance

(برای فنر)

---




$x = X e^{i(\omega t - \varphi)}$

$F = F_o e^{i\omega t}$

* $F = c\dot{x}$ نیروی میرائی

$$F_o e^{i\omega t} = c X i \omega e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$F_o = c X i \omega e^{-i\varphi}$$

$$F_o = c X \omega i (\cos\varphi - i \sin\varphi)$$

$$\begin{cases} \text{real} & F_o = c X \omega \sin\varphi \\ \text{immagin} & 0 = c X \omega \cos\varphi \longrightarrow \cos\varphi = 0 \rightarrow \end{cases}$$

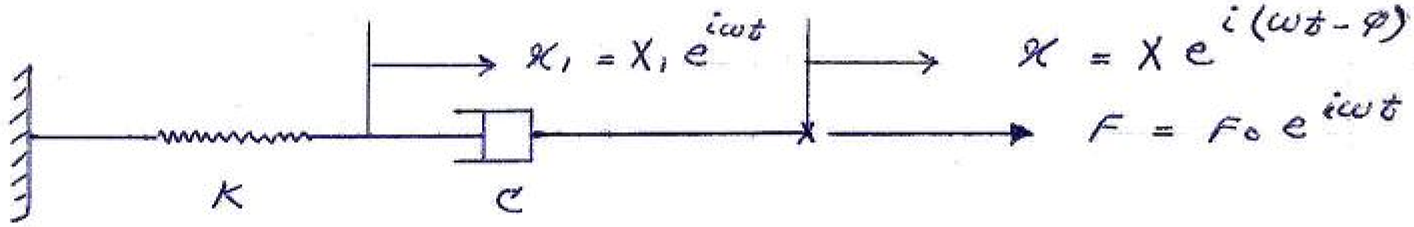
$$\varphi = 90^\circ$$

$$Z = \frac{cX\omega}{Xi\omega(-i)}$$

$$Z = c$$

Mechanical Impedance
(برای میرا کننده)

---




$* \quad F = Kx_1$ نیروی فنر

$* \quad F = c(\dot{x} - \dot{x}_1)$ نیروی میرائی

$$F_0 e^{i\omega t} = KX_1 e^{i\omega t} \longrightarrow F_0 = KX_1$$

$$Kx_1 = c(\dot{x} - \dot{x}_1)$$

$$c\dot{x}_1 + Kx_1 = c\dot{x}$$

$$i\omega cX_1 e^{i\omega t} + KX_1 e^{i\omega t} = cXi\omega e^{i(\omega t-\varphi)}$$

$$(c\omega i + k)X_1 = cXi\omega e^{-i\varphi}$$

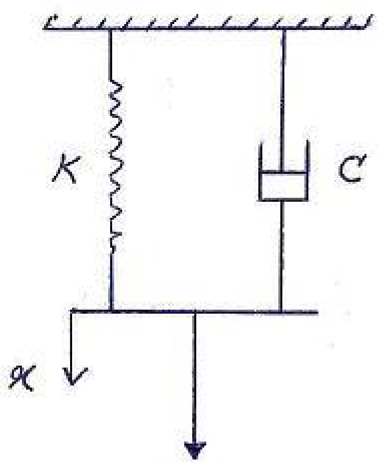
$$Z = \frac{kc}{k + c\omega i} \longrightarrow$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{k + c\omega i}{kc} \longrightarrow$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{c} + \frac{\omega i}{k}$$

$$\boxed{\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$$ (برای حالت سری)

---








$*\quad F = F_0 e^{i\omega t}$

$*\quad x = X e^{i(\omega t - \varphi)}$

$F_1 =$ نیروی فنر
$F_2 =$ نیروی میرائی

$$F_1 = Kx$$
$$F_2 = C\dot{x}$$

$$(F_1 + F_2 = F) \longrightarrow$$

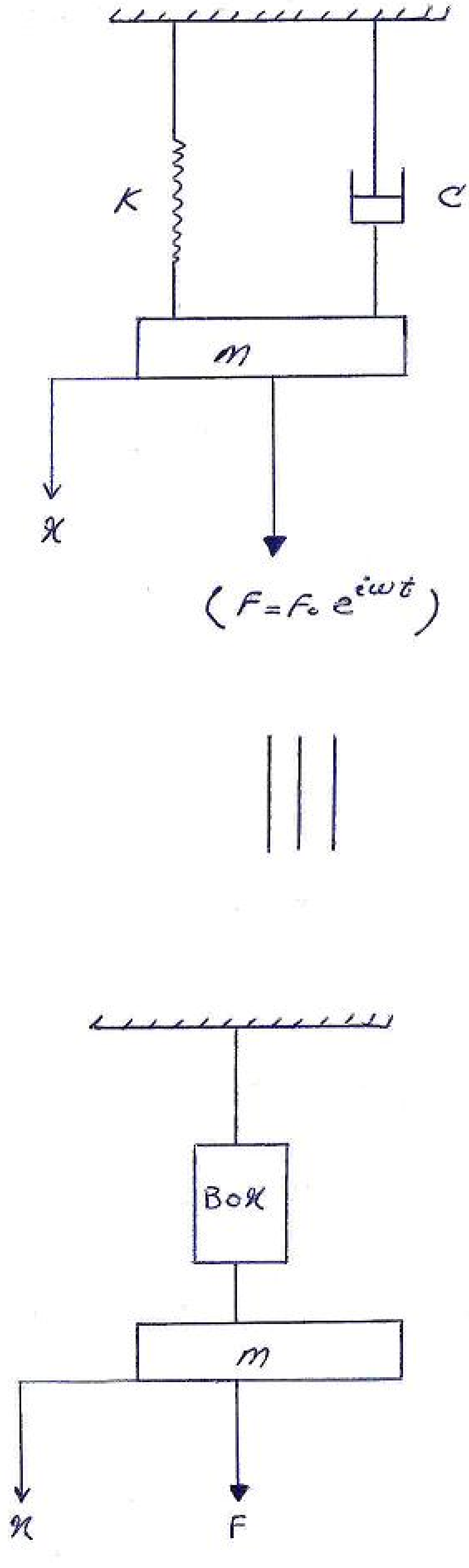
$$Kx + C\dot{x} = F_0 e^{i\omega t}$$

$$(K + Ci\omega) X e^{i(\omega t - \varphi)} = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\left\{ (K + Ci\omega) X e^{-i\varphi} = F_0 \right\}$$

$$Z = \frac{(K + Ci\omega) X e^{-i\varphi}}{X i\omega e^{-i\varphi}} = \frac{K}{i\omega} + C$$

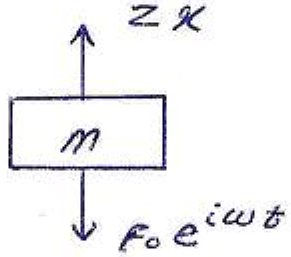
$$Z = Z_1 + Z_2$$ (برای حالت موازی)




(2 با امپدانس Box)

* $Z = \frac{K}{i\omega} + C$ (امپدانس Box)

* Box مثل میراکننده عمل می کند : $(Z\dot{x})$




* $-Z\dot{x} + F_0 e^{i\omega t} = m\ddot{x}$

$$m\ddot{x} + Z\dot{x} = F_0 e^{i\omega t}$$

$$(-m\omega^2 + Zi\omega) X e^{i(\omega t - \varphi)} = F_0 e^{i\omega t}$$

* $Z = \frac{F}{v} = \frac{F_0}{X i\omega e^{-i\varphi}} =$

$$\frac{Zi\omega - m\omega^2}{i\omega} = Z - \frac{m\omega}{i}$$

$$= \frac{K}{i\omega} - \frac{m\omega}{i} = \frac{K}{i\omega} + C + m\omega i$$

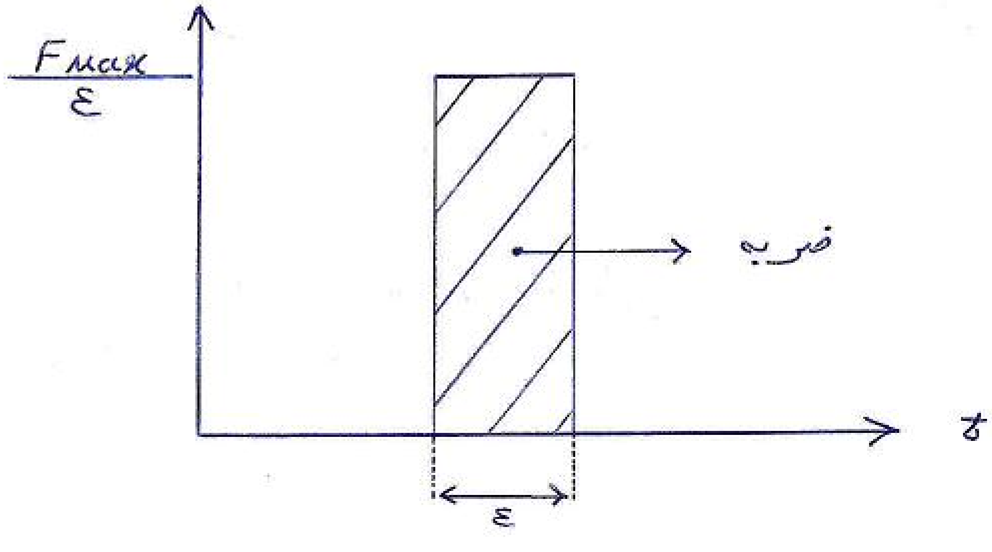
## عکس العمل سیستم های ارتعاشی در مقابل بارهای ضربه ای

* هرگاه یک سیستم ارتعاشی بطور ناگهانی تحت تأثیر نیروی محرک غیر پریودی مثل ضربه قرار گیرد در این صورت پاسخ سیستم به چنین تحریکی گذرا (transiant) بوده و ارتعاش حاصل را ارتعاش گذرا نامند.

* ممکن است ضربه بجای نیرو جابجائی سریع باشد. فرود آمدن هواپیما روی باند فرودگاه مثالی است که در آن نیرو ناگهان به سیستم اعمال می شود.

## تحریک ضربه‌ای Impuloive Exciation

* ضربه را می توان بوسیله یک نیرو با بزرگی $\frac{F_{max}}{\varepsilon}$ که در مدت زمان $\varepsilon$ اثر می کند نشان داد:



$$Impulse = \int_{t}^{t+\varepsilon} \frac{F_{Max}}{\varepsilon}\, dt$$

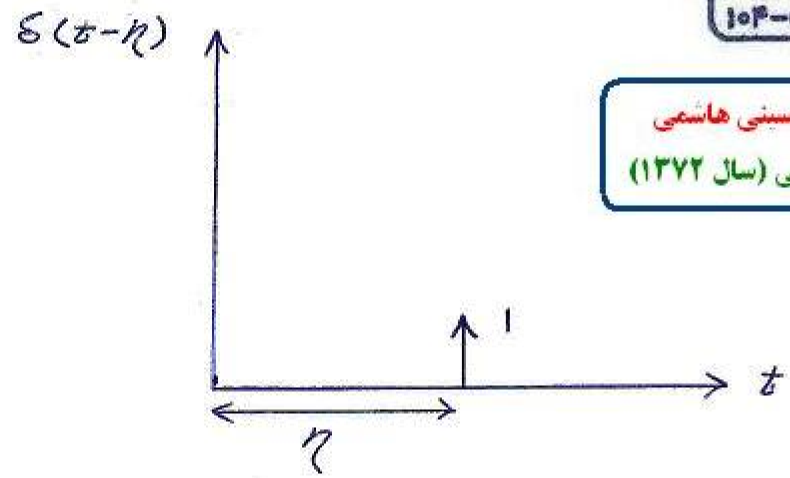
$$F_{Max} = 1 \longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \times \varepsilon = 1 \longrightarrow \text{Unit Impulse}$$
(ضربه واحد)

$\delta(t-\eta) = 0$ اگر $t \neq \eta$

$\delta(t-\eta) = 1$ اگر $t = \eta$

$$\int_0 \delta(t-\eta)\, d\eta = 1$$

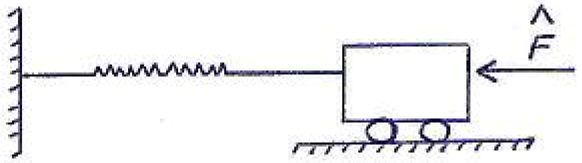





نیوتن : $F = m \cdot a = m \frac{dV}{dt}$

$F\,dt = m\,dV \longrightarrow$ نیرو × t = ضربه ، که موجب تغییر اندازه حرکت می شود.

* اثر ضربه یک جابجائی نامحسوس ایجاد می کند.




$$\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \dot{x} = \frac{\hat{F}}{m}$$

$$m\ddot{x} + Kx = \hat{F}$$

* اگر سیستمی تحت تأثیر نیروی پریودی قرار گیرد پاسخ یک حالت گذرا خواهد بود. پس :

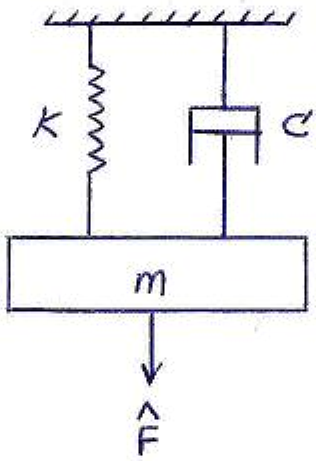
$$x = \underset{\downarrow \atop cte}{A} \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$$

$$0 = B$$

$$\underset{\downarrow \atop \frac{\hat{F}}{m}}{\dot{x}} = A\omega_n \cos \omega_n t - B\omega_n \sin \omega_n t$$

$$\longrightarrow \quad A = \frac{\hat{F}}{m\omega_n}$$

$$x = \frac{\hat{F}}{m\omega_n} \sin \omega_n t$$




$$x = 0$$
$$\dot{x} = \frac{\hat{F}}{m}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0 \\ x = X e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + u) + \omega_d e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t + u) \\ x = \dfrac{\hat{F}}{m\omega_d} e^{-\xi \omega_n t} \sin \omega_d t \\ x = \hat{F}\, h(t) \end{cases}$$

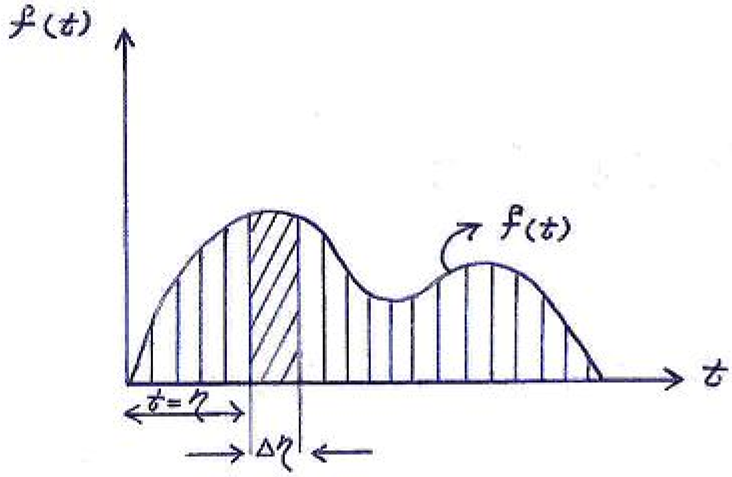
(Response to unit Impuls      پاسخ به ضربه واحد ) *

$$h(t) = \frac{\sin \omega_n t}{m \omega_n}$$ فاقد میرائی

$$h(t) = \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{m \omega_d} \sin \omega_d t$$ دارای میرائی

$$\boxed{\text{Convolution Or Dubamels Integral}}$$

* درصورتی که پاسخ به ضربه واحد یعنی $h(t)$ را برای سیستمی بدانیم ، می توانیم پاسخ آن سیستم را برای هر نیروی محرک دلخواه مثل $f(t)$ پیدا کنیم .




* سطح هاشور خورده را درنظر می گیریم :

$$\begin{cases} \hat{f} = f(\eta)\,\Delta\eta \\ x = \hat{f}\,h(t) \end{cases}$$

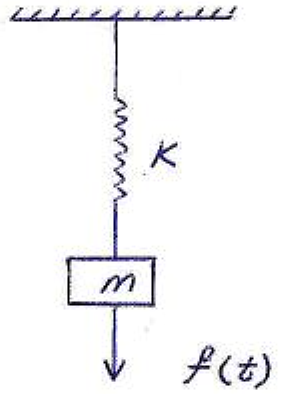
$$x_1 = \hat{f}\,h(t-\eta) = f(\eta)\,h(t-\eta)\,\Delta\eta$$ پاسخ این سیستم

$x_2 = \dots$

$\vdots$

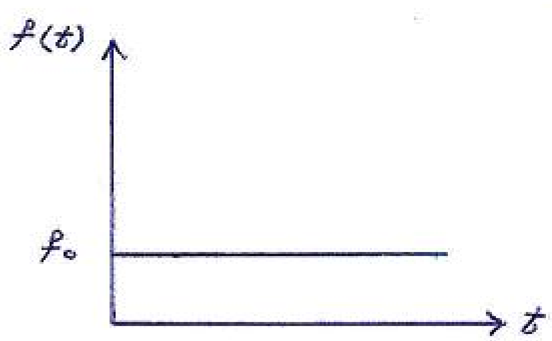
$x_n = \dots$

$$x = \int_0^t f(\eta)\,h(t-\eta)\,d\eta$$




نیروی پریودی

* یک نیرو به صورت پله‌ای با بزرگی $f_0$ :




* تعریف تابع پله‌ای واحد :

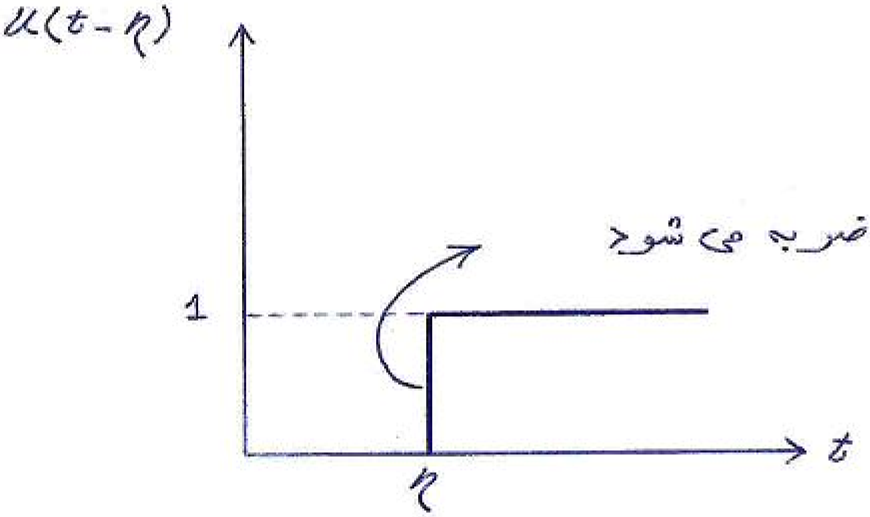
نمایش تابع پله‌ای $u(t-\eta)$

مقدار آن برابر واحد $\longrightarrow$ وقتی $t>\eta$

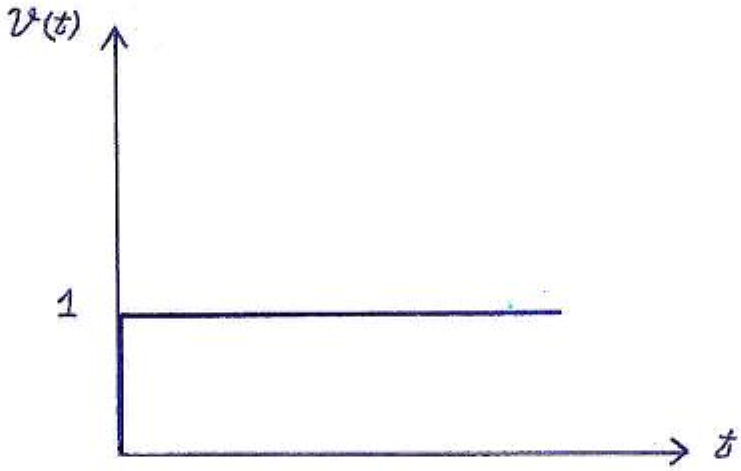
مقدار آن برابر صفر $\longrightarrow$ 〃 $t<\eta$

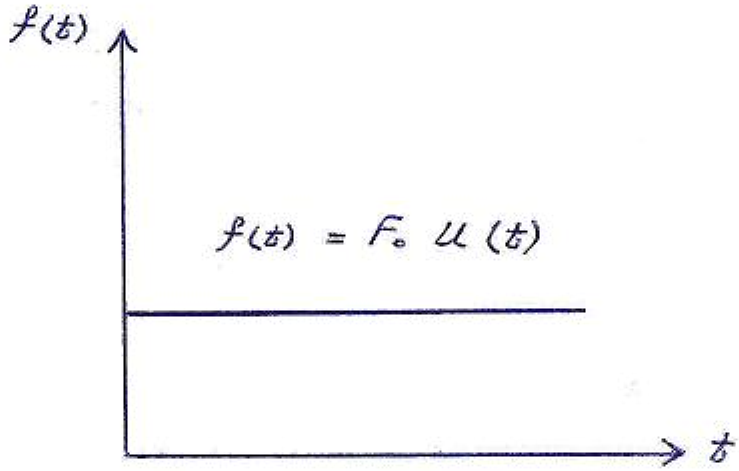
$$\boxed{\text{Unit Step Function}}$$

تابع پله‌ای واحد — Unit Step Function




باعث بوجود آمدن ضربه می شود




$$f(\eta) = f_0\, u(\eta)$$

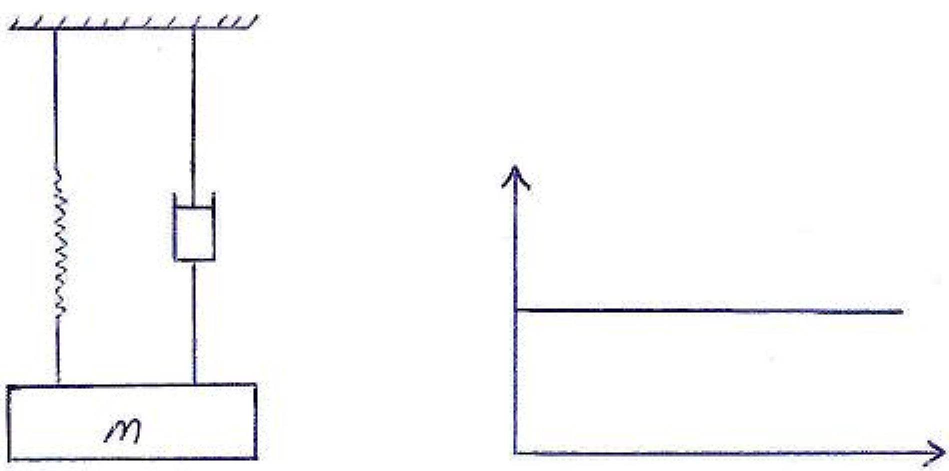
$$h(t-\eta) = \frac{\sin \omega_n (t-\eta)}{m \omega_n}$$ برای این سیستم

$$x = \frac{f_0}{m \omega_n} \int_0^t \sin\left[\omega_n (t-\eta)\right] u(\eta)\, d\eta$$

* می‌توان $u(\eta)$ را حذف کرده و مساوی 1 قرار داد چون همواره ثابت است و مساوی واحد.

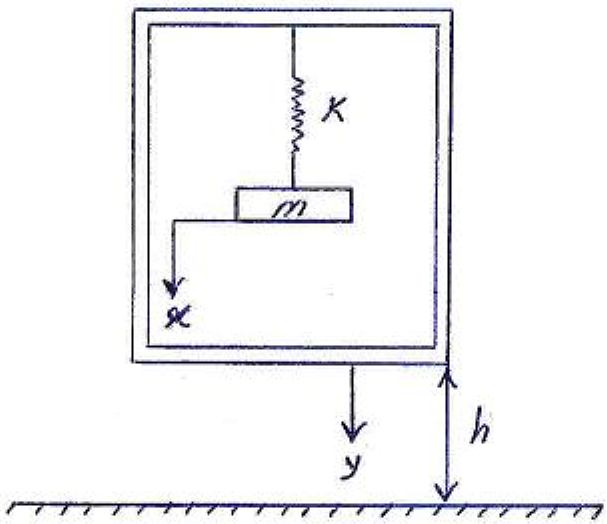
$$= \Big[\cos(\omega_n(t-\eta))\Big]_0^t \times \frac{f_0}{m\omega_n}$$

مثال - مطلوبست تعیین پاسخ سیستم شامل جرم و فنر و میرا کننده به نیروی محرک دلخواه $f(t)$ که به صورت تابع پله‌ای با - بزرگی $f_0$ مطابق دیاگرام داده شده است:



# روش تبدیل لاپلاس

سیستمی شامل جرم $m$ و فنر با سختی $K$ در داخل جعبه ای مطابق شکل قرار دارد. فرض می شود که این جعبه از ارتفاع $h$ سقوط کند و پس از برخورد به زمین بر نگردد. رفتار این سیستم را مطالعه کرده و آن را به دو بخش می کنیم، قبل از رسیدن به زمین و بعد از برخورد با زمین.




$$* \quad -Kx = m(\ddot{x} + \ddot{y})$$

$$m\ddot{x} + Kx = -m\ddot{y}$$

$$* \quad \mathcal{L}x = \bar{x}$$

$$\mathcal{L}\ddot{x} = s^2\bar{x} - sx_0 - \dot{x}_0$$

$$* \quad \mathcal{L}y = \bar{y}$$

$$\mathcal{L}\ddot{y} = s^2\bar{y} - sy_0 - \dot{y}_0$$

$$m L \ddot{x} + K L \dot{x} = -m L \ddot{y}$$

$$m\left[s^2\bar{X} - sX_0 - \dot{X}_0\right] + K\bar{X} = -m\left[s^2\bar{y} - sy_0 - \dot{y}_0\right]$$

$$(ms^2 + K)\bar{X} = m(x_0 + y_0)s + m(\dot{x}_0 + \dot{y}_0) - ms^2\bar{y}$$

$$\bar{x} = \frac{s}{s^2+\omega_n^2}(x_0 + y_0) + \frac{1}{s^2+\omega_n^2}(\dot{x}_0 + \dot{y}_0) - \frac{s^2}{s^2+\omega_n^2}\bar{y}$$

* بعد از معکوس گیری :

* $x = (x_0 + y_0)\cos\omega_n t + \frac{(\dot{x}_0 + \dot{y}_0)}{\omega_n}\sin\omega_n t - L^{-1}\frac{s^2}{s^2+\omega_n^2}\bar{y}$

* $y = \frac{1}{2}gt^2 \longrightarrow \quad L y = \bar{y} = \frac{1}{2}g\int_0^\infty e^{-st}\cdot t^2 \cdot dt$

$$= \frac{1}{2}g\cdot\frac{2}{s^3} = \frac{g}{s^3}$$

* $L^{-1}\frac{s^2}{s^2+\omega_n^2}\bar{y} = L^{-1}\frac{s^2}{s^2+\omega_n^2}\cdot\frac{g}{s^3} = L^{-1}\frac{g}{s(s^2+\omega_n^2)}$

$$= \frac{g}{\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t) \longrightarrow$$

* $x(t) = (x_0 + y_0)\cos\omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \dot{y}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$

$$- \frac{g}{\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)$$

$(t=0)$ $\qquad x(0) = y_0 = \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$

« این را استفاده می کنیم »

* تا قبل از برخورد به زمین

$$\boxed{x(t) = \frac{-g}{\omega_n^2}\,(1-\cos\omega_n t)}$$

* شرط : (زمان رسیدن به زمین) $t < \boxed{t_0} \longrightarrow$

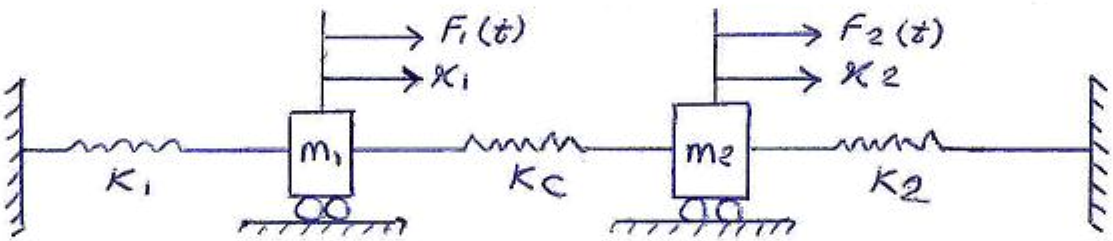
* چون که ما می خواهیم تابعی برحسب $t$ بدست آوریم .



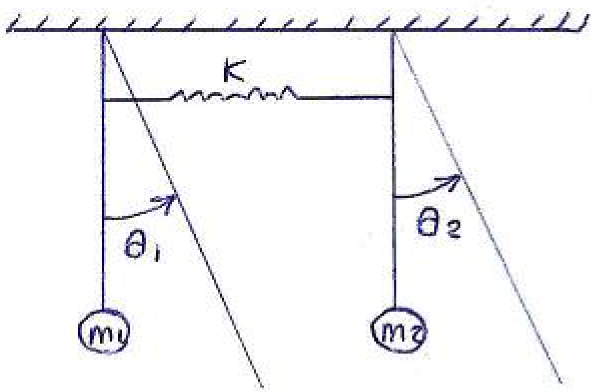
جزوه درس ارتعاشات مکانیکی آقای دکتر شاهرخ حسینی هاشمی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

## : (systems with 2D o.f)

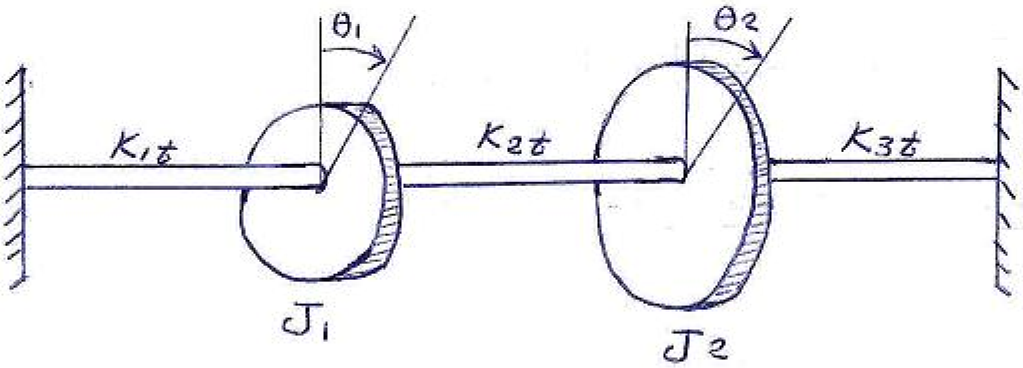
* یک سیستم ارتعاشی با دو درجه آزادی سیستمی است که برای مطالعه آن باید از دو مختصات مستقل از هم استفاده کرد. برخی از مدلهای آن مطابق زیر است :




(A)

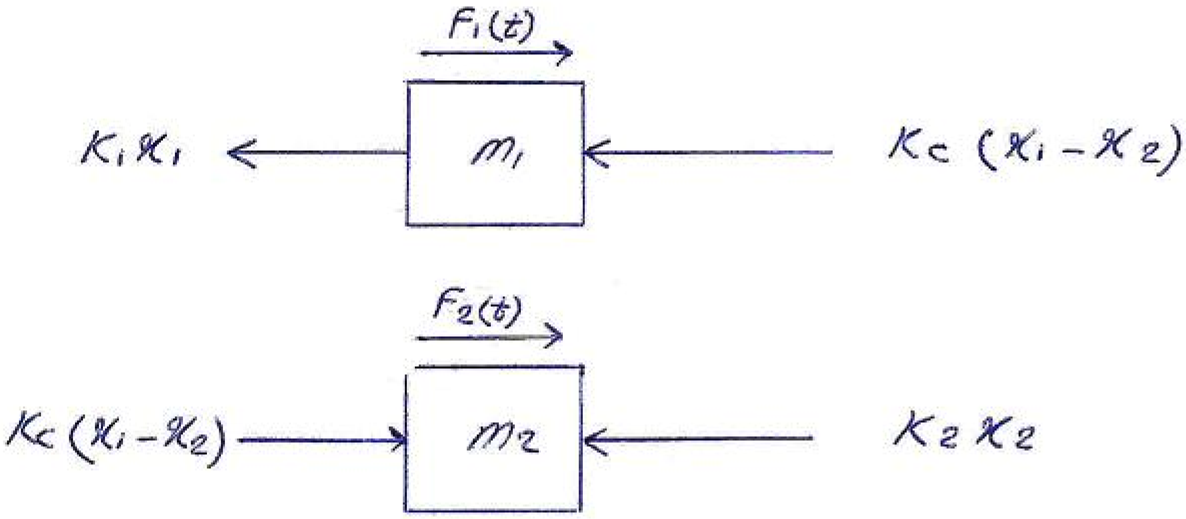



(B)




(C)

* حال دیاگرام (A) را در نظر می گیریم :




$$\begin{cases} -K_1 x_1 - K_c(x_1 - x_2) + F_1(t) = m_1 \ddot{x}_1 \\ K_c(x_1 - x_2) - K_2 x_2 + F_2(t) = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases} \rightarrow$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + (K_1 + K_c) x_1 - K_c x_2 = F_1(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (K_c + K_2) x_2 - K_c x_1 = F_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_c & -K_c \\ -K_c & K_2 + K_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[m]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}}$$ (بطور کلی)

* در ارتعاش آزاد طرف دوم معادله صفر است :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_c & -K_c \\ -K_c & K_2+K_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \sin \omega t \\ x_2 = X_2 \sin \omega t \end{cases}$$

* برای ارتعاش آزاد داریم $f_1(t)$ و $f_2(t) = 0$

$$x_1 = X_1 \sin \omega t$$
$$x_2 = X_2 \sin \omega t$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_1 - m\omega^2 \end{bmatrix}}_{\mathrm{I}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* برای جواب غیر صفر باید : $\mathrm{I} = 0$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\}$$

* برای ارتعاش آزاد :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

* ما در این حالت تمایل داریم $f$ را بدست آوریم :

$$\{x\} = \{X\} \sin \omega t$$

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{x\} \sin \omega t$$

* اگر در معادله اصلی $[M]$ را در $\omega^2$ ضرب کنیم به این جواب (۱) می رسیم و با جمع کردن ۲ ماتریس :

$$\left[ [K] - m\omega^2 \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

* پس :

$$\left| [K] - [M]\omega^2 \right| = 0$$

$$(K_1 + K_c - m_1\omega^2)(K_2 + K_c - m_2\omega^2) - K_c^2 = 0$$

معادله درجه ۴ برای $\omega$

* n درجه آزادی یعنی دارای n فرکانس داریم پس چرا این درجه ۴ است ؟ زیرا ۴ فرکانس دارد که دو تا از $\omega$ های منفی قابل قبول نیست.

حالت خاص :

$$K_1 = K_2 = K_c$$
$$m_1 = m_2 = m$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & 2k-m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* ( ضرایب (دترمینان) ) $= 0 \rightarrow (2k-m\omega^2)^2 = k^2$

$2k - m\omega^2 = \pm k \rightarrow$ $m\omega^2 = k$

$m\omega^2 = 3k$

$\rightarrow$ $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}}$

* فرکانس کوچکتر را فرکانس اصلی گویند.

( Fundemental Frequ.)

معادله اوّل: $\dfrac{X_1}{X_2} = \dfrac{k}{2k-m\omega^2}$

معادله دوّم: $\dfrac{X_1}{X_2} = \dfrac{2k-m\omega^2}{k}$

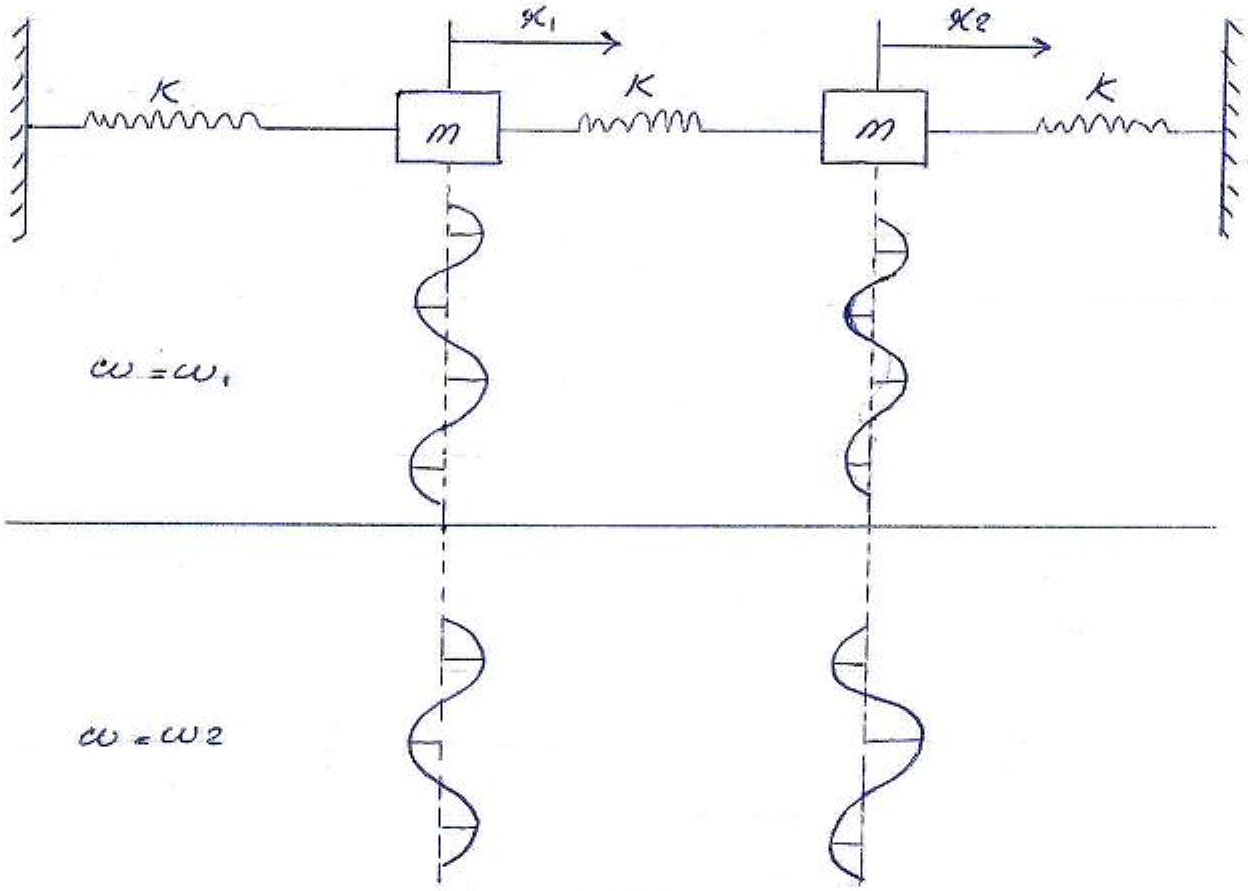
* هر دو اینها یک جواب را می‌دهند چون اگر طرفین وسطین شود همان دترمینان را می‌دهد که ما صفر قرار داده ایم.

* به فرض از معادله (2) استفاده می کنیم :

① $\frac{X_1}{X_2} = 1$ : $\omega = \omega_1$

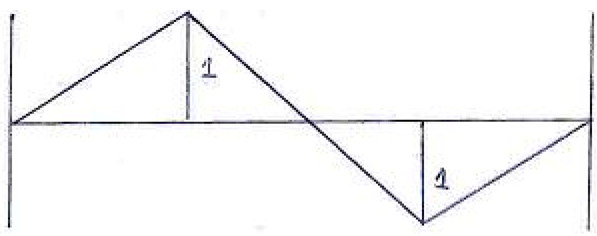
② $\frac{X_1}{X_2} = -1$ : $\omega = \omega_2$

* حالت اوّل (Fundemental Mode) است چون ارتعاش در این حالت ساده تر است و از $\omega_1$ حاصل شده .

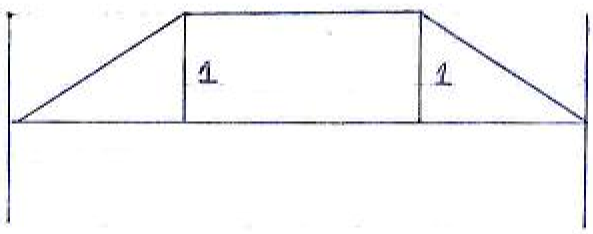



* تنبلی طبیعت باعث می شود سیستم معمولاً حالت ($\omega_1$) را برگزیند .

* اگر خواستیم از روی نسبت $\frac{X_1}{X_2}$ مدهای فرکانس را رسم کنیم :




$$\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$$




$$\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

---

## « Cordinate Coupling » (کوپلینگ مختصات)

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* هرگاه یک سیستم ارتعاشی ( معادلات آن را ) بصورت ماتریسی نوشته و مطالعه کنیم می توانیم نوع کوپلینگ را مشخص کنیم . در صورتی که ماتریس جرم بصورت قطری بوده و ماتریس سختی از نوع غیر قطری باشد - کوپلینگ را از نوع استاتیکی نامند .

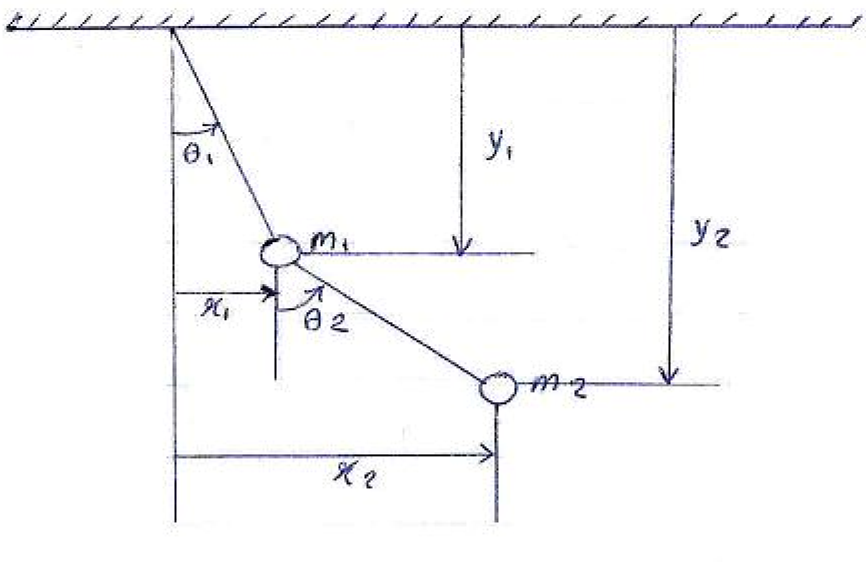
* اگر ماتریس جرم غیر قطری و ماتریس سختی قطری باشد - کوپلینگ را از نوع دینامیکی می خوانند.

* اگر هم ماتریس جرم و هم ماتریس سختی غیر قطری باشند معادلات دیفرانسیل حرکت هم بستگی استاتیکی و هم بستگی دینامیکی دارند.

* اگر هم ماتریس جرم و هم ماتریس سختی قطری باشند می گوییم معادلات دیفرانسیل حرکتمان عاری از هر گونه بستگی استاتیکی و دینامیکی هستند.

---

## مختصات عمومی و اصلی




* گروه مختصات $(x_1, x_2)$
* گروه مختصات $(\theta_1, \theta_2)$
* گروه مختصات $(y_1, y_2)$

* برای تعریف یک سیستم ارتعاشی می توان از گروه مختصات گوناگونی استفاده کنیم. درصورتی که معادلات دیفرانسیل حرکت نوشته شده بر اساس این گروهها وابسته بطور کل باشند آن گروه مختصات را گروه مختصات عمومی گویند. اگر معادلات دیفرانسیل نوشته شده فاقد هرگونه بستگی استاتیکی و دینامیکی باشند آن گروه مختصات را مختصات اصلی گویند.

---

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$
$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0$$

(باهم جمع می کنیم) $\longrightarrow$ $m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k(x_1 + x_2) = 0$

(ازهم کم می کنیم) $\longrightarrow$ $m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3k(x_1 - x_2) = 0$

$$\begin{cases} q_1 = x_1 + x_2 \\ q_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} m\ddot{q}_1 + kq_1 = 0 \\ m\ddot{q}_2 + 3kq_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ماتریسی}} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(یعنی معادلات غیر کوپله است)

$$\{\varphi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$ : ماتریس شکل مُد اوّل $\left(\frac{X_1}{X_2} = 1\right)$

$$\{\varphi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$ : ماتریس شکل مُد دوّم $\left(\frac{X_1}{X_2} = -1\right)$

(Modal shape)

** در $\varphi_1$ اگر گفتیم ($X_1$ ما 1 است $X_2$ چند است) در مورد $\varphi_2$ هم باید بگوییم ($X_1$ ما 1 است $X_2$ چند است).

$$[\varphi] = [\{\varphi_1\} , \{\varphi_2\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(Modal Matrix)

$$\longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

** در حالت کلی : $$\{x\} = [\varphi]\{q\}$$

* بدین روش معادلات دیفرانسیل را غیرکوپله می کنیم.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

** (transpose) یعنی جای سطر و ستون ماتریس را عوض کنیم. طرفین معادله را در (φ transpose) ضرب می کنیم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} (//) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} (//) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* $q_1$ و $q_2$ مختصات اصلی هستند که به روش آنالیز مُدال بدست آمد.

---

نتیجه :

$$[\varphi]^T [M] [\varphi] = [\diagdown]$$ ماتریس جرم مُدال

$$[\varphi]^T [K] [\varphi] = [\diagdown]$$ ماتریس سختی مُدال

$$[\varphi_1]^T [M] [\varphi_2] = [\varphi_2]^T [M] [\varphi_1] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[\varphi_1]^T [K] [\varphi_2] = [\varphi_2]^T [K] [\varphi_1] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Orthogonality
خاصیت تعامدی مدها

پایان

فرشاد سرایی / آذر ۱۳۷۲

فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲