

ارتعاشات

مجموعه مهندسی مکانیک

گروه مکانیک پارسه

مؤسسه آموزش عالی آزاد پارسه

پارسه

فصل اول

- ۱- ارتعاشات مکانیکی ۷
- ۲- معادلات حرکت ۸

فصل دوم

- ارتعاشات آزاد ۱۲
- الف - ارتعاشات طولی ۱۲
- ب - ارتعاشات عرضی ۱۳
- ج - ارتعاشات پیچشی ۱۳
- د - جرم و اینرسی معادل ۱۴
- هـ - سختی معادل ۱۶
- و - میرایی معادل ۱۷
- ۱- ارتعاشات آزاد سیستم‌های بدون میرایی ۱۹
- الف - پایداری سیستم ۱۹
- ب - روش انرژی ۲۵
- ج - روش ریلی ۲۶
- ۲- ارتعاشات آزاد با میرایی لزجی ۲۸
- ۳- ارتعاشات آزاد با میرایی کولمب یا اصطکاک خشک ۳۰
- ۴ - کاهش لگاریتمی ۳۳

فصل سوم

- ارتعاشات اجباری ۴۹
- ۱ - ارتعاشات اجباری سیستم‌های بدون استهلاک با تحریک نیرو ۴۹
- ۲ - ارتعاشات اجباری سیستم‌های با استهلاک با تحریک نیرو ۵۲
- الف - دیاگرام بد ۵۳
- ب - دیاگرام فازوری ۵۶
- ۳ - ارتعاشات اجباری با تحریک جابه‌جایی پایه ۵۶
- الف - عدم بالانس (نامیزانی) چرخشی ۵۸
- ب - قابلیت انتقال ۶۰
- ۴ - انرژی تلف شده توسط میرایی در یک سیکل رفت و برگشت ۶۲
- ۵ - ارتعاشات اجباری با میرایی کولمب یا اصطکاک خشک ۶۳

فصل چهارم

- ارتعاشات گذرا ۷۸
- ۱ - پاسخ به نیروی تحریک ضربه‌ای ۷۸
- ۲ - پاسخ به نیروی تحریک پله‌ای ۷۹
- ۳ - پاسخ به نیروی تابع شیب ۸۰
- ۴ - تحریک پایه ۸۰

فصل پنجم

- سیستم‌های دو درجه آزادی ۸۳
- ۱ - ارتعاشات آزاد سیستم‌های دو درجه آزادی و بدون استهلاک ۸۴
- ۲ - ارتعاشات اجباری سیستم‌های دو درجه آزادی و بدون استهلاک ۸۹
- الف - خاصیت تعامل مودهای طبیعی ۸۹
- ب - دی‌کوپله کردن ۹۰
- ج - جاذب دینامیکی ارتعاشات ۹۱
- د - سیستم‌های نیمه معین ۹۲
- هـ - روش لاگرانژ ۹۳

فصل اول

مفاهیم اولیه

ارتعاشات مکانیکی

ارتعاشات، یک پدیده دینامیکی و عبارت است از دینامیک اجسام قابل تغییر شکل (تغییر مکان در اثر نیرو). هر جسمی که دارای جرم و خاصیت الاستیسیته یعنی حرکت نسبی بین اجزا باشد، قادر به ارتعاش است.

برای تجزیه و تحلیل ارتعاشات سیستم‌های مکانیکی ابتدا باید از سیستم فیزیکی، مدل ریاضی تشکیل دهیم که نمایانگر سیستم مکانیکی حقیقی باشد. بدین ترتیب سیستم‌های ارتعاشی را می‌توان بر حسب نوع مدل ریاضی آن‌ها به دو دسته طبقه‌بندی نمود:

۱- مدل‌های ناپیوسته یا گسسته که دارای درجه آزادی معینی هستند و توسط معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف می‌گردند.

۳- مدل‌های پیوسته که دارای بی‌نهایت درجه آزادی هستند و تجزیه و تحلیل آن‌ها منجر به تشکیل معادلات دیفرانسیل یا مشتقات جزئی می‌گردد.

درجه آزادی: عبارت است از حداقل تعداد مختصات یا متغیرهای مکانی مستقل که وضعیت سیستم را در هر لحظه بیان می‌کند. این تعریف درجه آزادی برای سیستم‌هایی است که قید هندسی دارند (علاوه بر قید هندسی ممکن است، سیستم دارای قیود دیگری از قبیل قید سرعت و .. باشد).

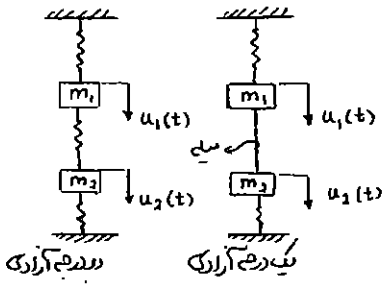
در سیستم‌های با قید هندسی، تعداد معادلات حرکت برابر تعداد مختصات مستقل یا تعداد درجات آزادی سیستم است. سیستم‌های موردنظر ما در این درس همه دارای قید هندسی هستند و از این پس از قید کلمه قید هندسی صرفه‌نظر می‌کنیم.

سیستم‌های ارتعاشی را بر اساس رفتارشان می‌توان به دو دسته زیر نیز طبقه‌بندی نمود:

۱- سیستم‌های خطی: سیستم‌هایی هستند که معادله دیفرانسیل حرکت آن‌ها خطی است. یعنی فقط شامل تابع یا مشتقات آن از توان اول می‌باشد.

۲- سیستم‌های غیرخطی: سیستم‌هایی هستند که معادله دیفرانسیل حرکت آن‌ها غیرخطی است، یعنی دارای تابع یا مشتقات تابع با توان بالاتر از یک و یا به صورت کسری است.

تحلیل سیستم‌های خطی بسیار ساده‌تر از سیستم‌های غیرخطی است. مهم‌ترین مزیت سیستم‌های خطی این است که می‌توان در آن‌ها از اصل سوپروپوزیشن (برهم نهش) استفاده نمود.



مثال: دو سیستم نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. در سیستم سمت راست بین دو جسم m_2, m_1 یک میله صلب وجود دارد که طول آن ثابت است و باعث می‌شود تغییر مکان دو جسم m_2, m_1 یکسان باشد. اما در سیستم سمت چپ بین دو جسم m_2, m_1 فنری قرار دارد که می‌تواند تحت فشار یا کشش تغییر طول دهد. در این صورت تغییر مکان دو جسم m_2, m_1 مستقل از هم خواهد بود.

در سیستم سمت راست طول میله $u_1 - u_2 = \ell$ قید هندسی است.

بنابراین سیستم سمت راست یک سیستم یک درجه آزادی و سیستم سمت چپ یک سیستم دو درجه آزادی است.

تعداد قیود هندسی - تعداد مختصات کل = درجه آزادی

اجزای یک سیستم ارتعاشی

یک سیستم ارتعاشی به طور کلی شامل وسیله‌ای برای ذخیره انرژی پتانسیل (فنر یا الاستیسیته)، وسیله‌ای برای ذخیره انرژی جنبشی (جرم یا اینرسی) و وسیله‌ای برای استهلاک تدریجی انرژی (دمپر) است. ارتعاش یک سیستم مستلزم تبدیل متناوب انرژی پتانسیل سیستم به انرژی جنبشی و بالعکس می‌باشد. در صورتی که سیستم دارای مستهلک کننده (دمپر) باشد، در هر سیکل نوسان مقداری انرژی تلف می‌شود و اگر این انرژی از یک منبع خارجی جایگزین نگردد نوسانات پس از مدت زمانی معینی به طور کامل مستهلک یا میرا می‌گردد.

ارتعاشات به دو دسته عمومی تقسیم می‌شوند:

- ۱- **ارتعاشات آزاد:** هنگامی است که یک سیستم بدون حضور نیروی محرک خارجی در اثر نیروهای ذاتی و لاینفک خود تحت یک تحریک اولیه به نوسان درآید. سیستم در ارتعاشات آزاد تحت یک یا چند فرکانس طبیعی خود مرتعش می‌شود. فرکانس‌های طبیعی یک سیستم از ویژگی‌های سیستم هستند و توسط توزیع جرم و سختی سیستم تعیین می‌گردند.
- ۲- **ارتعاشات اجباری:** ارتعاشی است که تحت اثر نیروهای خارجی انجام می‌شود. وقتی که نیروی محرک خارجی نوسانی است، سیستم اجباراً با فرکانس نیروی محرک مرتعش می‌شود. اگر فرکانس تحریک بر یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم منطبق شود، تشدید یا رزونانس اتفاق می‌افتد و نوسانی با دامنه بسیار بزرگ نتیجه می‌گردد که ممکن است برای سیستم خطرناک باشد.

۲- معادلات حرکت

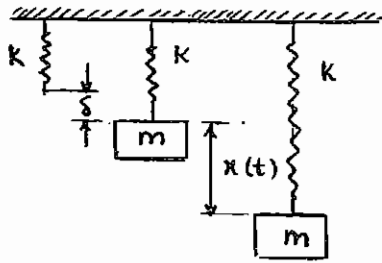
استخراج معادلات حرکت یک سیستم به روش‌های زیر امکان‌پذیر است.

۱- **معادلات نیوتن - اولر:** برای سیستم‌های یک درجه آزادی توصیه می‌شود. $F = ma$, $M_0 = I_0\alpha$

۲- **روش انرژی:** برای نیروهای کنسرواتیو ($\nabla \times F = 0$) به کار برده می‌شود.

۳- **روش لاگرانژ:** برای سیستم‌های دو درجه آزادی و بالاتر توصیه می‌گردد.

۴- **روش همیلتون:** برای سیستم‌های پیوسته به کار می‌رود.



مثال : سیستم جرم و فنر زیر را در نظر بگیرید.

وزنه را می کشیم و رها می کنیم. $\delta_d = 2\delta_s = 2\frac{mg}{k}$

سیستم یک درجه آزادی است، ولی بسته به شرایط اولیه ای که به آن می دهیم دارای بی نهایت حرکت است. از این بی نهایت حرکت در مورد سیستم یک درجه آزادی تنها یک حرکت هارمونیک است که این حرکت «مود طبیعی» نام دارد. سیستم دو درجه آزادی دو مود طبیعی دارد و به همین ترتیب سیستم Π درجه آزادی Π مود طبیعی دارد. یعنی تعداد مودهای طبیعی سیستم (حرکت های مستقل هارمونیک) برابر با تعداد درجات آزادی سیستم است. معادله حرکت را برای لحظه t می نویسیم:

$F = ma$

$+ P - mg = m (-\ddot{x})$

$P = k(x + \delta)$

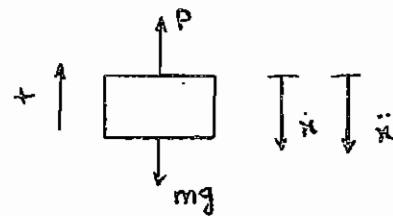
$m\ddot{x} + kx = \frac{Const}{(mg - k\delta)}$

$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$

$x(t) = Ae^{st} \Rightarrow ms^2 + k = 0 \rightarrow s = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_n$

$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = A_1 e^{+i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t}$

$x(t) = C_1 \sin \omega_n t + D_1 \cos \omega_n t \Rightarrow$ از شرایط اولیه به دست می آید.

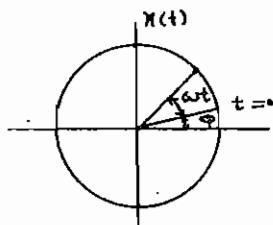
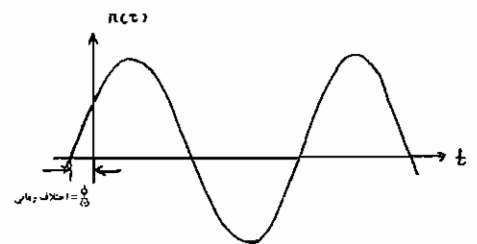


نمایش توابع هارمونیک به صورت فازوری

یک حرکت هارمونیک با فرکانس زاویه ای ω را که به صورت تابعی از t تعریف شده است، در نظر بگیرید که در آن ثابت های ϕ, ω, X به ترتیب دامنه، فرکانس و زاویه فاز نامیده می شوند.

$x(t) = X \sin(\omega t + \phi)$

زاویه فاز فرکانس دامنه



$x(t) = X \sin(\omega t + \phi)$

$y(t) = x \cos \omega t$
 $x(t) = x \sin \omega t$
 ترکیب دو حرکت هارمونیک با دامنه یکسان حرکت روی دایره است.

حرکت هارمونیک را می‌توان به وسیله یک عدد مختلط به صورت زیر نیز نمایش داد:

$$\text{فازور} = \bar{X} = X e^{i\phi}$$

عدد مختلط \bar{X} که تابع هارمونیک را نشان می‌دهد فازور نمایش دهنده هارمونیک نامیده می‌شود.

$$x(t) = \text{Im}(\bar{X} e^{i\omega t}) = \text{Im}(X e^{i(\omega t + \phi)}) = X \sin(\omega t + \phi)$$

اگر $x(t)$ تغییر مکان باشد، سرعت و شتاب با استفاده از جبر فازوری به صورت زیر محاسبه خواهند شد:

$$x(t) = \text{Im}(\bar{X} e^{i\omega t})$$

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \text{Im}(\bar{X} e^{i\omega t}) = \text{Im}(i\omega \bar{X} e^{i\omega t}) = \text{Im}(i\omega X e^{i(\omega t + \phi)})$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \text{Im}(\bar{X} e^{i\omega t}) = \text{Im}(-\omega^2 \bar{X} e^{i\omega t}) = \text{Im}(-\omega^2 X e^{i(\omega t + \phi)})$$

جمع توابع هارمونیک:

دیدیم که توابع هارمونیک را می‌توان به صورت فازور که یک کمیت مختلط است نمایش داد. بنابراین برای جمع آن‌ها می‌توان از قوانین ترکیب اعداد مختلط استفاده نمود.

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \alpha_1) = \text{Re}[\bar{X}_1 e^{i\omega t}]$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = \text{Re}[\bar{X}_2 e^{i\omega t}]$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \text{Re}[(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) e^{i\omega t}] = \text{Re}[\bar{X} e^{i\omega t}] = X \cos(\omega t + \beta)$$

$$|\bar{X}| = X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1 X_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$\tan \beta = \frac{X_1 \sin \alpha_1 + X_2 \sin \alpha_2}{X_1 \cos \alpha_1 + X_2 \cos \alpha_2}$$

یکی از موارد خاص که استفاده زیادی در ارتعاشات دارد، حالتی است که دو فازور بر هم عمود باشند یا:

$$x_1(t) = X_1 \cos \omega t$$

$$x_2(t) = X_2 \sin \omega t$$

$$x(t) = X_1 \cos \omega t + X_2 \sin \omega t = X_1 \cos \omega t + X_2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \text{Re}\left[X_1 e^{i\omega t} + X_2 e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\right] = \text{Re}\left[\left(X_1 + X_2 e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) e^{i\omega t}\right]$$

$$= X \cos(\omega t + \beta)$$

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1 X_2 \cos \frac{\pi}{2}} = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

$$\tan \beta = -\frac{X_2}{X_1}$$

حل مثال:

برمی‌گردیم به سیستم جرم و فنر مثال قبل هر دو معادله حرکت زیر درست، است ولی حل معادله همگن راحت‌تر است.

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$m\ddot{y} + ky = mg$$

$x(t)$ فاصله از حالت تعادل استاتیکی ، $y(t)$ فاصله از حالت اولیه (آزاد) فنر

$$x(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t = E \sin(\omega_n t + \phi)$$

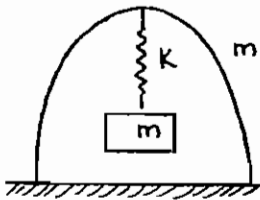
$$E = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \tan \phi = \frac{B}{A}$$

$$y(t) = A_1 \sin \omega_n t + B_1 \cos \omega_n t + \frac{mg}{k} = E_1 \sin(\omega_n t + \phi) + \frac{mg}{k}$$

مثال : فنر را چقدر بکشیم تا سیستم در آستانه بلند شدن باشد؟

حل: اگر فنر را به اندازه $\delta = \frac{mg}{k}$ بکشیم فنر از حالت تعادل به اندازه δ بالا می‌رود و به حالت آزاد فنر می‌رسد.

اما اگر به اندازه $\frac{2mg}{k}$ فنر را بکشیم، فنر به اندازه یک $\frac{mg}{k}$ بالا می‌رود تا به حالت آزاد فنر برسد و به اندازه



یک $\frac{mg}{k}$ دیگر فشرده می‌شود که در این هنگام فنر نیروی $k\left(\frac{mg}{k}\right)$ را به

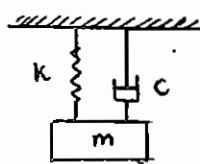
چارپایه وارد می‌کند که برابر با وزن چارپایه است و چارپایه در آستانه بلند شدن قرار

می‌گیرد.

فصل دوم

ارتعاشات آزاد

تعریف فرکانس طبیعی: فرکانس نوسانات سیستم ارتعاشی آزاد بدون در نظر گرفتن میرایی، فرکانس طبیعی سیستم نام دارد.

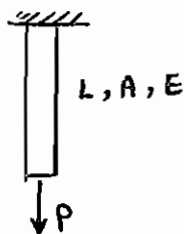


فرکانس یا فرکانس‌های طبیعی یک سیستم (یک یا چند درجه آزادی) از ویژگی‌های آن سیستم هستند و توسط توزیع جرم و سختی در سیستم تعیین می‌گردند. در مورد یک سیستم جرم و فنر فرکانس طبیعی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{فرکانس طبیعی}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \text{پریود طبیعی}$$

فرکانس طبیعی سیستم ارتباطی با میرایی سیستم ندارد و مستقل از آن است.



الف - ارتعاشات طولی:

ارتعاشات طولی تیر زیر در اثر نیروی محوری P را در نظر بگیرید. برای به دست آوردن فرکانس طبیعی ارتعاشات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\delta = \frac{PL}{AE} \rightarrow k = \frac{P}{\delta} = \frac{AE}{L}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{M} = \frac{AE}{ML}$$

سختی تیر با طول آن نسبت معکوس دارد، یعنی اگر طول یک تیر را نصف کنیم، سختی آن دو برابر می‌شود و به همین منوال اگر آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم، سختی آن سه برابر می‌شود.

ب - ارتعاشات عرضی:

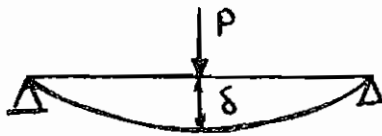


ارتعاشات عرضی تیر یک سر درگیر به وزن M را که از انتهای آزاد تحت تاثیر نیروی P قرار گرفته است در نظر بگیرید. فرکانس طبیعی این تیر به ترتیب زیر محاسبه می گردد:

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} \Rightarrow k = \frac{P}{\delta} = \frac{3EI}{L^3}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{M} = \frac{3EI}{ML^3}$$

فرکانس طبیعی تیری که مطابق شکل تحت نیروی P قرار گرفته است نیز به روشی مشابه موارد قبل قابل محاسبه است:



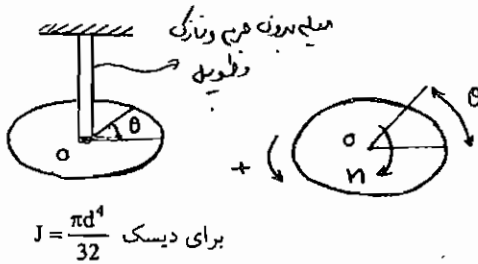
$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} \Rightarrow k = \frac{48EI}{L^3}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{M} = \frac{48EI}{ML^3}$$

(مشخصات میله‌ها در شکل فوق: L, E, I)

ج - ارتعاشات پیچشی:

برای به دست آوردن فرکانس طبیعی دیسکی که توسط میله‌ای صلب به تکیه‌گاهی متصل شده و تحت ممان پیچشی M قرار گرفته است از معادلات حرکت سیستم استفاده می کنیم.



$$M_o = I_o \alpha$$

رابطه اولر:

$$-M = I_o \ddot{\theta}$$

$$I_o \ddot{\theta} + k_t \theta = 0$$

از مقاومت مصالح:

$$\theta = \frac{ML}{GJ}$$

$$(J = \frac{\pi d^4}{32} \text{ برای دیسک }) \quad k_t = \frac{M}{\theta} = \frac{GJ}{L}$$

$$\text{معادله حرکت} \quad I_o \ddot{\theta} + \frac{GJ}{L} \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{GJ}{LI_o}$$

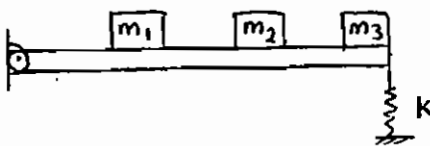
د - جرم و ممان اینرسی معادل

در مورد سیستم‌هایی که از چند جرم تشکیل شده‌اند، برای به دست آوردن فرکانس طبیعی سیستم باید جرم معادل یا ممان اینرسی معادل سیستم را محاسبه نماییم و فرکانس طبیعی را از روابط زیر به دست آوریم:

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_{eq}}}} \quad \text{یا} \quad \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{J_{eq}}}}$$

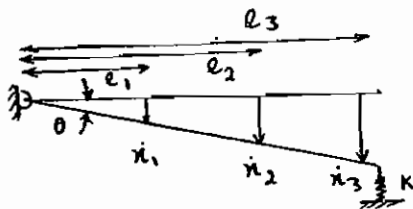
همان‌طور که مشاهده می‌کنید، جرم سیستم ممان است به صورت جرم خطی m یا جرم دورانی J در نظر گرفته شده باشد. برای به دست آوردن جرم و یا ممان اینرسی معادل باید انرژی جنبشی سیستم اولیه را با انرژی جنبشی سیستم معادل مساوی قرار دهیم.

$$K.E = K.E_{eq} \Rightarrow m_{eq} \quad \text{یا} \quad J_{eq}$$



مثال : می‌خواهیم با صرفه نظر از جرم میله، جرم‌های m_3, m_2, m_1 را به صورت خطی یا دورانی در یک نقطه متمرکز کنیم.

ابتدا فرض کنید می‌خواهیم مجموعه فوق را به صورت یک جرم خطی متمرکز مدل کنیم. برای این کار یک تغییر مکان برای میله صلب در نظر می‌گیریم.



$$KE = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2$$

اولیه

$$K E_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2$$

حال تمام \dot{x} ها را به \dot{x}_1 تبدیل کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = l_1 \theta \\ x_2 = l_2 \theta \\ x_3 = l_3 \theta \end{array} \right\} \rightarrow \theta = \frac{x_2}{l_2} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x_2 = \frac{l_2}{l_1} x_1 \\ x_3 = \frac{l_3}{l_1} x_1 \end{array} \right\}$$

و چون l ها نسبت به زمان تغییر نمی‌کنند داریم:

$$\dot{x}_2 = \frac{l_2}{l_1} \dot{x}_1$$

$$\dot{x}_3 = \frac{l_3}{l_1} \dot{x}_1$$

$$KE = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{l_3}{l_1} \right)^2 \dot{x}_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[m_1 + m_2 \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{l_3}{l_1} \right)^2 \right] \dot{x}_1^2$$

با مقایسه با انرژی جنبشی سیستم معادل و سیستم اولیه داریم:

$$m_{eq} = m_1 + m_2 \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{l_3}{l_1} \right)^2$$

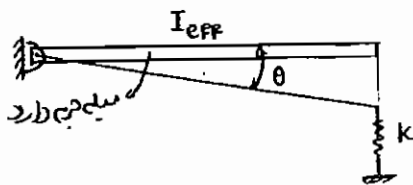
معادل‌سازی جرم دورانی یا ممان اینرسی (I_{eq}) در مثال فوق به صورت زیر است:

$$KE = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_2 \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 (l_3 \dot{\theta}_3)^2$$

$$K \cdot E_{el} = \frac{1}{2} [m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2] \dot{\theta}^2 \quad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3$$

$$KE_{eq} = \frac{1}{2} I_{eq} \dot{\theta}^2$$

$$I_{eq} = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2$$



مثال: می‌خواهیم جرم خطی معادل و ممان اینرسی معادل در شکل زیر را به دست آوریم.

حالت اول: جرم خطی معادله مجموعه را می‌خواهیم. باید θ را حذف کنیم و معادلات بر حسب x به دست آیند.

$$K.E. = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_o \dot{\theta}^2$$

$$x = R \theta$$

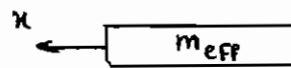
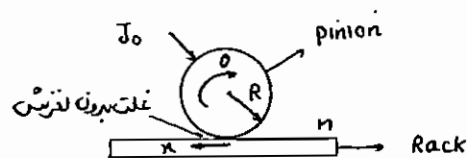
$$\dot{x} = R \dot{\theta}$$

$$K.E. = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_o \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2$$

$$K.E. = \frac{1}{2} \left[M + \frac{J_o}{R^2} \right] \dot{x}^2$$

$$KE_{eq} = \frac{1}{2} M_{eq} \dot{x}^2$$

$$M_{eq} = M + \frac{J_o}{R^2}$$



حالت دوم: ممان اینرسی معادل مجموعه مدنظر است. باید معادلات بر حسب θ نوشته شود.

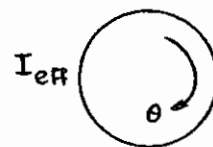
$$x = R \theta \rightarrow \dot{x} = R \dot{\theta}$$

$$K.E. = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_o \dot{\theta}^2$$

$$K.E. = \frac{1}{2} [M R^2 + J_o] \dot{\theta}^2$$

$$KE_{eq} = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2$$

$$J_{eq} = M R^2 + J_o$$



هـ سختی معادل

در مورد سیستم‌هایی که از چند فنر تشکیل شده‌اند، برای به دست آوردن فرکانس طبیعی سیستم باید سختی معادل سیستم را محاسبه نموده و فرکانس طبیعی را با استفاده از آن به دست آوریم. سختی سیستم ممکن است خطی یا پیچشی باشد.

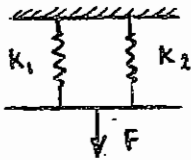
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \quad \text{یا} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_{teq}}{J}}$$

برای به دست آوردن سختی معادل باید انرژی پتانسیل سیستم اولیه را با انرژی پتانسیل سیستم معادل مساوی قرار دهیم.

$$P.E = P.E_{eq} \Rightarrow k_{eq}$$

۱- **فنرهای خطی:** معادله حرکت فنرهای خطی به صورت $F = kx$ است و این فنرها به دو حالت با هم ترکیب می‌شوند.

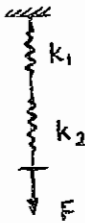
الف. فنرهای موازی (تغییر مکان فنرها مساوی است).



$$F = F_1 + F_2 = k_1 x + k_2 x = k_{eq} x$$

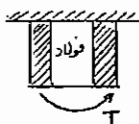
$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

ب. فنرهای سری (نیرو در فنرها مساوی است).



$$x = x_1 + x_2$$

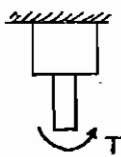
$$\frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \rightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$



۲- **فنرهای پیچشی** $T = k_t \theta$

$$k_{teq} = k_{t1} + k_{t2}$$

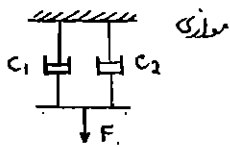
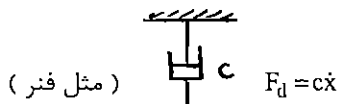
الف. فنرهای موازی



$$\frac{1}{k_{teq}} = \frac{1}{k_{t1}} + \frac{1}{k_{t2}}$$

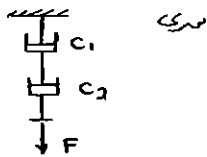
ب. فنرهای سری

و- میرایی معادل:



$$c_{eq} = c_1 + c_2$$

الف - دمپره‌های موازی (سرعت در دو سر دمپرها یکسان است).



$$\frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$

ب - دمپره‌های سری (نیرو در دو دمپر یکسان است).

برای محاسبه میرایی معادل باید انرژی تلف شده در سیستم اولیه را با انرژی تلف شده در سیستم معادل، مساوی قرار دهیم.

$$D.E = D.E_{eq}$$

$$D.E_{eq} = \frac{1}{2} c_{eq} \dot{x}^2$$

مثال: ممان اینرسی معادل چقدر است؟

$$I_c = \frac{1}{3} ml^2$$

$$K.E. = \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\gamma}^2 \quad I_0 = \frac{1}{2} m_0 r^2$$

$$K.E_{eq} = \frac{1}{2} I_{eq} \dot{\theta}_{eq}^2$$

$$\dot{\theta}_{eq} = \dot{\theta}$$

$$x = l\theta \rightarrow \dot{x} = l\dot{\theta}$$

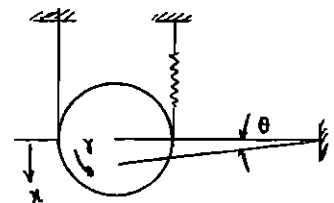
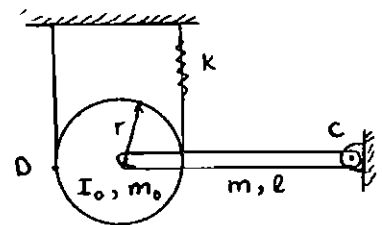
$$r\gamma = x \rightarrow \gamma = \frac{x}{r} = \frac{l\theta}{r} \rightarrow \dot{\gamma} = \frac{l}{r}\dot{\theta}$$

$$K.E. = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ml^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_0 l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_0 r^2 \right) \left(\frac{l^2}{r^2} \dot{\theta}^2 \right)$$

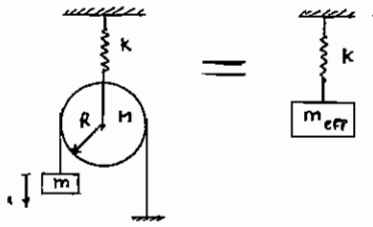
$$K.E. = \left(\frac{1}{6} ml^2 + \frac{1}{2} m_0 l^2 + \frac{1}{4} m_0 l^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} m + \frac{3}{2} m_0 \right) l^2 \right] \dot{\theta}^2$$

$$K.E_{eq} = \frac{1}{2} I_{eq} \dot{\theta}^2$$

$$I_{eq} = \left(\frac{1}{3} m + \frac{3}{2} m_0 \right) l^2$$



مثال : فرکانس طبیعی سیستم زیر را پیدا کنید.



$$M = \frac{10}{3}m$$

$$J_0 = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}m\right)R^2 = \frac{5}{3}mR^2$$

$$K.E. = \frac{1}{2}\left[m + \frac{J_0}{4R^2} + \frac{M}{4}\right]\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left[m + \frac{\frac{5}{3}mR^2}{4R^2} + \frac{\frac{10}{3}m}{4}\right]\dot{x}^2$$

$$K.E. = \frac{1}{2}\left[m + \frac{5}{12}m + \frac{5}{6}m\right]\dot{x}^2$$

$$K.E._{eq} = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}^2$$

$$m_{eq} = m + \frac{5}{12}m + \frac{5}{6}m = \frac{9}{4}m$$

$$P.E. = \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$P.E._{eq} = \frac{1}{2}k_{eq}x^2$$

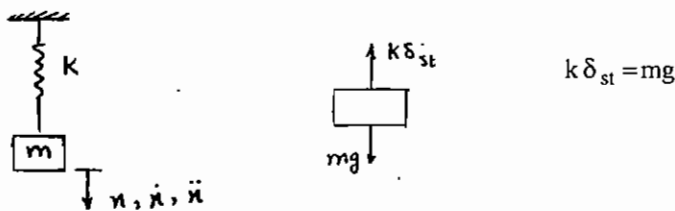
$$k_{eq} = \frac{k}{4}$$

$$\rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}k}{\frac{9}{4}m}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

۱- ارتعاشات آزاد سیستم‌های بدون میرایی

الف - معادله حرکت و فرکانس طبیعی سیستم

در ارتعاش آزاد، ارتعاشات به دلیل خواص ذاتی سیستم و تبدیل انرژی پتانسیل به جنبشی و بالعکس صورت می‌گیرد. سیستم یک درجه آزادی بدون مستهلک‌کننده زیر را در نظر بگیرید. این سیستم ساده‌ترین سیستم ارتعاشی است که از یک جرم و یک فنر تشکیل شده است. در حالت تعادل استاتیکی، فنر به اندازه δ_{st} از حالت آزاد خود کشیده شده است و نیروی کشش در فنر با نیروی وزن جرم برابر است.

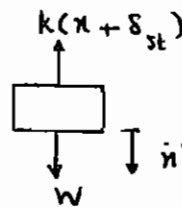


اگر جرم را از تعادل استاتیکی به اندازه x تغییر مکان داده و رها کنیم معادله حرکت جرم به صورت زیر خواهد بود.

$$m\ddot{x} = \Sigma F = mg - k(x + \delta_{st})$$

$$m\ddot{x} = mg - kx - mg = -kx$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$



معادله حرکت عبارت‌است از:

$$m\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \text{ فرم استاندارد}$$

استاندارد

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

برای حل معادله حرکت و به دست آوردن تابع تغییر مکان جرم بر حسب زمان یعنی $x(t)$ فرض می‌کنیم $x(t) = ce^{st}$ و در معادله حرکت جایگذاری می‌کنیم.

$$mcs^2 e^{st} + kce^{st} = 0 \Rightarrow ms^2 + k = 0$$

معادله فوق معادله کمکی یا معادله مشخصه سیستم نام دارد.

ریشه‌های معادله مشخصه مقادیر ویژه و فرکانس‌های طبیعی سیستم هستند.

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-k}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$s_{1,2} = \pm i\omega_n$$

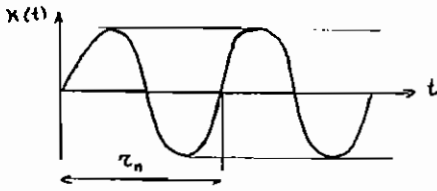
$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$

برای به دست آوردن A_1, A_2 باید از شرایط اولیه استفاده کنیم.

$$x(t=0) = x_0 \rightarrow A_1 = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \rightarrow A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$$



$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

پریود طبیعی

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \omega_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

فرکانس خطی

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\tau_n} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

فرکانس زاویه‌ای

پس سیستم بدون استهلاک کاملاً نوسانی است و کاهش دامنه در آن رخ نمی‌دهد. از به ث استاتیکی داشتیم:

$$k \delta_{st} = mg \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{\delta_{st}}$$

پس فرکانس طبیعی برای مثال ذکر شده به صورت زیر است:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

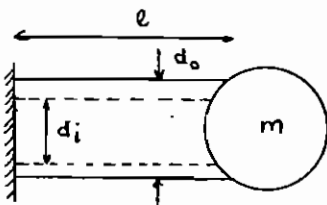
ولی دقت شود که برای فنر افقی چنین رابطه‌ای نداریم، چون اصولاً δ_{st} نداریم و g در راستای افق صفر است.

مثال : یک ژنراتور را روی چهار فنر قرار می‌دهیم که طی این عمل 4cm تغییر طول داریم. فرکانس طبیعی این سیستم چقدر است؟ دقت شود که هیچ اطلاعی راجع به جرم و سختی نداریم.

از این رو از فرمول ω_n بر حسب تغییر مکان استاتیکی استفاده می‌کنیم.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{0.04}}$$

مثال : یک شافت تو خالی فولادی جرم m به آن متصل است و ارتعاشات آزاد در جهت عرضی انجام می‌دهد. معادله دیفرانسیل حاکم بر این سیستم را به دست آورید. فرکانس طبیعی را حساب کنید.



اول باید سیستم را مدل‌سازی کنیم.

$$k = \frac{3EI}{l^3} ; I = \frac{\pi}{64} (d_o^4 - d_i^4) \Rightarrow k = \frac{3E\pi (d_o^4 - d_i^4)}{64l^3}$$

حال معادله حرکت را برای ارتعاشات آزاد بدون استهلاک می‌نویسیم.

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}} = \sqrt{\frac{3E\pi (d_o^4 - d_i^4)}{64ml^3}}$$

سیستم‌های دورانی

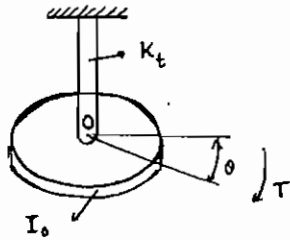
دیسکی را در نظر بگیرید که توسط میله‌ای به طول l آویزان شده است. فرض کنید که یک تغییر مکان زاویه‌ای کوچک به دیسک وارد شده و رها می‌گردد. فرکانس طبیعی نوسانات دیسک و معادله حرکت دیسک به ترتیب زیر به دست می‌آید:

$$\Sigma M_t = I_0 \ddot{\theta}$$

$$-K_t \theta = I_0 \ddot{\theta}$$

$$K_t = \frac{GJ}{l}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$



$$I_0 \ddot{\theta} + K_t \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{K_t}{I_0} \theta = 0$$

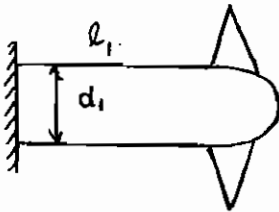
$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{I_0}}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{\theta}}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

مثال: فرکانس طبیعی سیستم زیر چقدر است؟ دو پره داریم که جرم هر کدام از پره‌ها m_2 و طول آن l_2 است.

پره‌ها را با مستطیل تقریب می‌زنیم.



$$I_0 \ddot{\theta} + K_t \theta = 0$$

$$I_0 = 2 \frac{1}{3} m_2 l_2^2 = \frac{2}{3} m_2 l_2^2$$

$$K_t = \frac{GJ}{l_1} = \frac{G \frac{\pi d_1^4}{32}}{l_1} = \frac{\pi d_1^4 G}{32 l_1}$$

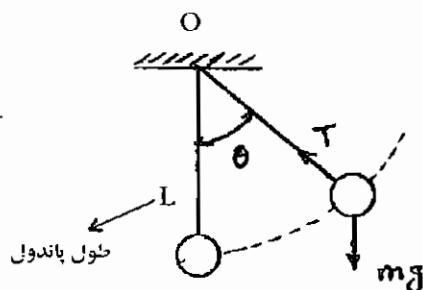
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{I_0}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi d_1^4 G}{32 l_1}}{\frac{2}{3} m_2 l_2^2}} = \sqrt{\frac{3 \pi d_1^4 G}{64 m_2 l_1 l_2^2}}$$

$$I = \frac{1}{3} m l_2^2$$

پاندول:

فرکانس طبیعی پاندول به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

l طول پاندول است.



هندسی قید $x^2 + y^2 = l^2$

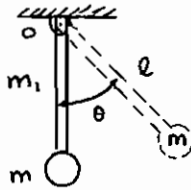
$$M_0 = I_0 \alpha$$

$$-mgl \sin \theta = ml^2 (+\ddot{\theta})$$

$\sin \theta \approx \theta$ چون θ خیلی کوچک است.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{g}{l}$$

نکته : اگر طول پاندولی به اندازه δ استاتیکی فیزی باشد، فرکانس طبیعی آن دو باهم برابر است.



پاندول مرکب:

وزنه‌ای به جرم m به انتهای پاندولی به جرم m_1 متصل شده است.

$$M_0 = I_0 \alpha$$

نقطه‌ای که دوران حول آن صورت می‌گیرد.

$$-m_1 g \frac{l_1}{2} \sin \theta + mg l \sin \theta = \left(\frac{1}{3} m_1 l_1^2 + ml^2 \right) \ddot{\theta}$$

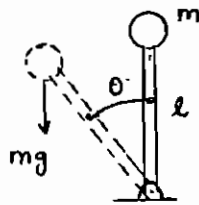
یعنی یک سوم جرم میله پاندول هم به جرم مؤثر سیستم اضافه می‌شود.

$$\omega_n = \frac{\text{ضریب } \theta}{\text{ضریب } \ddot{\theta}}$$

$$+M_0 = I_0 \alpha$$

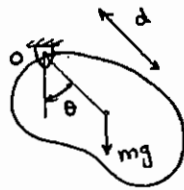
$$+mg l \sin \theta = ml^2 (+\ddot{\theta})$$

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$



پاندول معلق:

نکته : اگر ضرایب معادله دینامیکی همگی هم علامت نباشند، حرکت ارتعاشی نخواهد بود.



مرکز ضربه:

$$M_0 = I_0 \alpha$$

$$-mgd \sin \theta = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_0} \sin \theta = 0$$

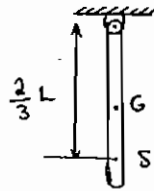
چون θ خیلی کوچک است.

می‌خواهیم جسم فوق را با پاندولی ساده به طول S شبیه سازی کنیم. برای این کار باید فرکانس طبیعی هر دو سیستم یکی باشد.

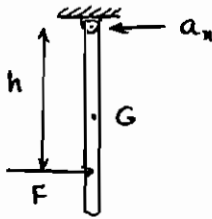
$$\frac{g}{S} = \frac{mgd}{I_0} \Rightarrow S = \frac{I_0}{md}$$

S فاصله مرکز ضربه (Center of percussion) جسم معلق از نقطه O است. (O نقطه آویزگاه است).

$$S = \frac{I_0}{md} = \frac{\frac{1}{3}ml^2}{\frac{ml}{2}} = \frac{2}{3}l$$



مثال : F را کجا وارد کنیم تا نیروی افقی وارد بر تکیه‌گاه صفر شود؟
F باید در مرکز ضربه وارد شود.

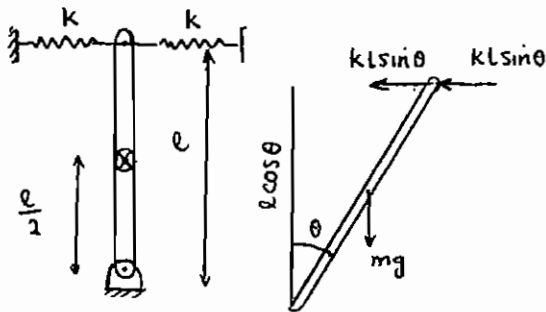


$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_{cx} \\ \Sigma F &= m\left(\frac{1}{2}\right)\alpha \\ \Sigma M &= I\alpha \\ F \cdot h &= \frac{1}{3}mL^2\alpha \end{aligned}$$

$$\left(\frac{ml}{2}\alpha\right)h = \left(\frac{1}{3}ml^2\right)\alpha \Rightarrow h = \frac{2}{3}l$$

الف - پایداری سیستم:

هدف از این بخش بررسی پایداری سیستم تحت ارتعاش است.



مثال : در چه صورت این سیستم نوسانی است و در چه صورت ناپایدار است.
حل: در قدم اول معادله دیفرانسیل سیستم را می‌نویسیم.

$$\Sigma M_0 = I_0 \ddot{\theta} \rightarrow -2kl \sin \theta (l \cos \theta) + mg \left(\frac{1}{2} \sin \theta\right) = I_0 \ddot{\theta}$$

$$I_0 = \frac{1}{3}ml^2$$

$$\frac{1}{3}ml^2 \ddot{\theta} + 2kl^2 \sin \theta \cos \theta - mg \frac{1}{2} \sin \theta = 0$$

با فرض کوچک بودن θ , $\sin \theta = \theta$

$$\frac{1}{3}ml^2 \ddot{\theta} + \left(2kl^2 - mg \frac{l}{2}\right)\theta = 0$$

نکته: در معادلات دیفرانسیل خطی اگر همه ضرایب وقتی معادله به شکل استاندارد $m\ddot{x} + c\dot{x} + tx + D = 0$ نوشته می‌شود،

هم‌علامت باشند، سیستم پایدار است و در غیراین صورت سیستم ناپایدار می‌باشد.

حالت اول: این سیستم هنگامی نوسانی است که ω_n حقیقی باشد. یعنی:

$$\ddot{\theta} + \frac{3(4kl^2 - mgl)}{2ml^2}\theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{12kl - 3mg}{2ml}}$$

$$12kl - 3mg > 0 \Rightarrow 12kl > 3mg$$

$$\frac{k}{m} > \frac{g}{4l}$$

حالت دوم: اگر $\omega_n = 0$ باشد، یعنی $12kl - 3mg = 0$

$$\ddot{\theta} = 0 \rightarrow \theta(t) = C_1 t + C_2$$

این سیستم نوسانی نیست و ناپایدار است، چون نوسانات آن با زمان به صورت خطی زیاد می‌شود.

$$\alpha = \frac{3mg - 12kl}{2ml}$$

حالت سوم: وقتی که $12kl - mg < 0$ باشد که در این صورت با تعریف α داریم:

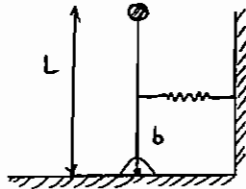
$$\ddot{\theta} - \alpha\theta = 0 \rightarrow \theta(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}$$

که با اعمال شرایط اولیه داریم:

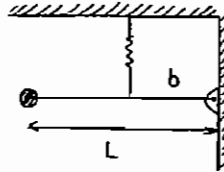
$$\theta(t) = \frac{1}{2\alpha} [(\alpha\theta_0 + \dot{\theta}_0)e^{\alpha t} + (\alpha\theta_0 - \dot{\theta}_0)e^{-\alpha t}]$$

این سیستم هم ناپایدار است ولی فرقی با حالت قبل این است که نوسان با زمان به صورت نمایی افزایش پیدا می‌کند.

مثال: فرکانس طبیعی حرکت پاندول در سه حالت زیر را پیدا کنید.

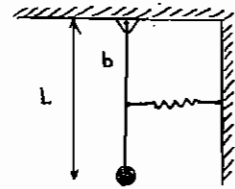


(3)



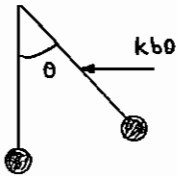
(2)

$$-mgL\theta - Kb^2\theta = mL^2\ddot{\theta}$$



(1)

وقتی معادله را به شکل $m\ddot{x} + c\dot{x} + tx + D = 0$ می‌نویسیم کلیه ضرایب هم علامت هستند لذا حرکت ارتعاشی و همیشه پایدار است.



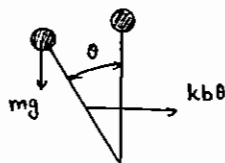
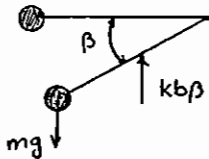
$$mL^2\ddot{\theta} + (mgL + kb^2)\theta = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{mgL + kb^2}{mL^2}$$

$$M_0 = I_0\alpha$$

$$mgL - kb^2\beta = mL^2\ddot{\beta}$$

$$mL^2\ddot{\beta} - kb^2\beta = mgL \rightarrow \omega_n^2 = \frac{kb^2}{mL^2}$$



$$mgL\theta - kb^2\theta = mL^2\ddot{\theta}$$

$$mL^2\ddot{\theta} + (kb^2 - mgL)\theta = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{kb^2 - mgL}{mL^2}$$

شرط پایداری $kb^2 > mgL$

ب - روش انرژی:

در یک سیستم کنسرواتیو انرژی کل ثابت است و معادله دیفرانسیل حرکت را می‌توان با استفاده از قانون بقای انرژی به دست آورد. برای سیستم‌های کنسرواتیو، $(\nabla \times F = 0)$ (مثل نیروی فنر خطی و غیر خطی و نیروهای به فرم kr , kr^2 , kr^3 , $\frac{k}{r^2}$, mg) منظور از $\nabla \times F = 0$ این است که کار سیستم در یک مسیر بسته صفر است یا کار سیستم در یک فرآیند به مسیر بستگی ندارد.

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \Rightarrow T + U = \text{constant}$$

$$\frac{d}{dt}(U + T) = 0$$

$$U_{\max} = T_{\max}$$

این روش برای سیستم‌های کنسرواتیو با هر درجه آزادی که دارای حرکت هارمونیک باشند به کار می‌رود. در این روش بدون این که معادلات حرکت را بنویسیم می‌توانیم فرکانس طبیعی سیستم را به دست آوریم.

$$k\delta = mg$$

$$T_{\max} = U_{\max}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$U = \left[\frac{1}{2} k(x + \delta)^2 - \frac{1}{2} k\delta^2 \right] + [-mgx - 0]$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} k\delta^2 + k\delta x - \frac{1}{2} k\delta^2 - mgx = \frac{1}{2} kx^2$$

چون سرعت صفر نیست پس \dot{x} نمی‌تواند برابر صفر شود: $\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \quad \dot{x} \neq 0 \quad m\ddot{x} + kx = 0$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

روش دوم: می‌توان پاسخ سیستم را به صورت $x = X \sin(\omega_n t + \phi)$ در نظر گرفت و در معادله انرژی جنبشی و پتانسیل جاگذاری نمود.

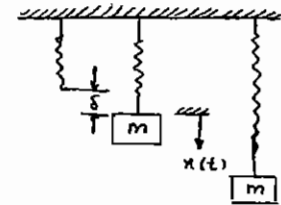
$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m X^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \phi) \quad x = X \sin(\omega_n t + \phi)$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kX^2 \sin^2(\omega_n t + \phi)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m X^2 \omega_n^2$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} kX^2$$

$$T_{\max} = U_{\max} \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$



مثال : با استفاده از روش انرژی فرکانس طبیعی سیستم زیر را به دست آورید.

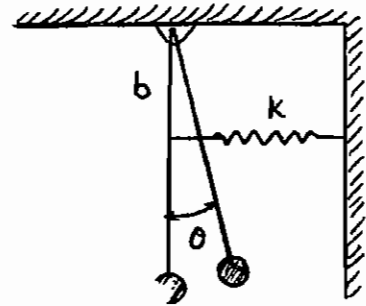
$$U = \frac{1}{2}k(b\theta)^2 + mgl(1 - \cos\theta) \quad T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}kb^2\theta^2 + mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} + kb^2\dot{\theta} + mgl\dot{\theta} = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + (kb^2 + mgl)\theta = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{kb^2 + mgl}{ml^2}$$



ج - روش ریلی

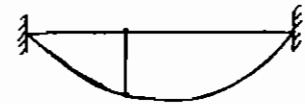
از روش ریلی می توان در محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم های پیوسته که درجه آزادی آنها بی نهایت است، استفاده نمود. در این روش شکلی برای مود اول ارتعاش فرض می کنیم که شرایط مرزی را برآورده نماید و تغییر مکان هر نقطه را به صورت حاصل ضرب این شکل فرضی در یک تابع زمانی در نظر می گیریم.

$$u(x, t) = U(x)F(t)$$

ارتعاشات عرضی تار:

$$u(x, t) = U(x)F(t) = (ax^2 + bx + c)F(t)$$

$$\begin{cases} x=0 & U(x)=0 \\ x=L & U(x)=0 \\ x=\frac{L}{2} & U(x)=1 \end{cases} \Rightarrow U(x) = \frac{-4}{L^2}x^2 + \frac{4}{L}x, \quad \frac{dU}{dx} = \frac{-8}{L^2}x + \frac{4}{L}$$



نکته : فرکانس طبیعی مود اول را که از روش ریلی به دست می آوریم، از مقدار واقعی بیشتر است.

$$u(x, t) = \left(\frac{-4}{L}x^2 + \frac{4}{L}x \right) F(t)$$

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left(\frac{-4}{L^2}x^2 + \frac{4}{L}x \right)^2 \dot{F}^2(t) dx$$

$$T = \frac{1}{2} \rho \dot{F}^2(t) \int_0^L \left(\frac{-4}{L^2}x^2 + \frac{4}{L}x \right)^2 dx$$

$$T = \frac{1}{2} \rho \dot{F}^2(t) \left[\frac{16x^5}{5L^4} + \frac{16x^3}{3L^2} - \frac{32x^4}{4L^3} \right]_0^L = \frac{1}{2} (a\rho L) \dot{F}^2(t), \quad a = \left[\frac{16x^5}{5L^4} + \frac{16x^3}{3L^2} - \frac{32x^4}{4L^3} \right]_0^L$$

$$m_{\text{eff}} = aL\rho$$

انرژی کرنشی ذخیره شده در تار:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \tau \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2} T \int_0^L \left(\frac{-8}{L^2} x + \frac{4}{L} \right)^2 F^2(t) dx = \frac{1}{2} F^2(t) (\text{معادل } k)$$

ارتعاشات طولی یک میله:

معادله حرکت عبارت است از:

$$E \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

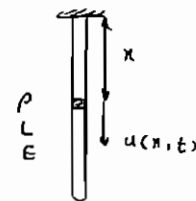
$$u(x, t) = U(x) F(t) = (ax^2 + bx + c) F(t)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{u}^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \rho \int_0^L (ax^2 + bx + c)^2 \dot{F}^2(t) dx = \frac{1}{2} (\rho L \text{ (عدد)}) \dot{F}^2(t)$$

جرم معادل

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx = \frac{1}{2} E F^2(t) \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} (E \text{ (عدد)}) F^2(t)$$

جرم معادل



اگر $u(x)$ را تابع خطی می‌گرفتیم:

$$u(x, t) = (ax + b) F(t)$$

$$\begin{cases} x=0 & u=0 \\ x=L & u=L \end{cases} \quad u(x) = \frac{x}{L}$$

$u(x, t) = \frac{x}{L} F(t)$: تغییر مکان هر نقطه را بر اساس تغییر مکان انتهای میله به دست می‌آوریم.

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} \rho \left(\frac{x}{L} \right)^2 \dot{F}^2(t) dx = \frac{1}{2} \rho \dot{F}^2(t) \left[\frac{x^3}{3L^2} \right]_0^L = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho L}{3} \right) \dot{F}^2(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{جرم فنر}}{3} \right) \dot{F}^2(t)$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} EA \int_0^L \left[\frac{1}{L} F(t) \right]^2 dx = \frac{1}{2} EA F^2(t) \frac{x}{L} \Big|_0^L$$

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{EA}{L} \right) F^2(t) \quad \text{معادله سختی} = \frac{EA}{L}$$

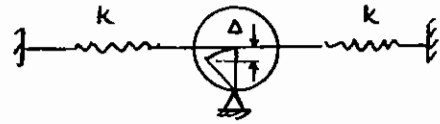
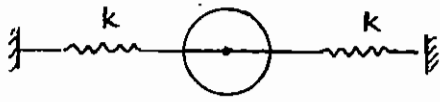


انرژی کرنشی در اثر خمش:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^L \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

انرژی کرنشی در اثر پیچش:

$$U = \frac{1}{2} GJ \int_0^L \left[\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx$$



مثال : فرکانس طبیعی کدام سیستم بیشتر است؟

فرکانس طبیعی را می‌توان نسبتی از انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی تعریف

نمود. انرژی جنبشی هر دو سیستم برابر است. پس انرژی‌های پتانسیل را مقایسه می‌کنیم.

$$\omega_n^2 = \frac{\text{انرژی پتانسیل}}{\text{انرژی جنبشی}}$$

$$U_1 = \frac{1}{2}(2k)x^2$$

$$U_1 > U_2 \Rightarrow \omega_1 > \omega_2$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(2k)x^2 - mg\Delta$$

مثال : فرکانس طبیعی کدام سیستم بیشتر است؟

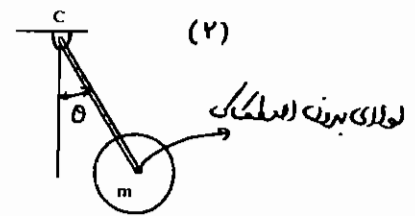
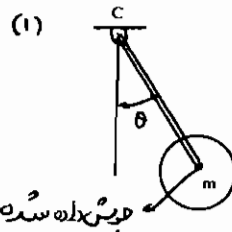
انرژی پتانسیل دو سیستم برابر است. پس انرژی‌های جنبشی را مقایسه می‌کنیم.

$$U = mg\ell(1 - \cos\theta)$$

$$\text{جوش } T_1 = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2$$

$$\text{لولا } T_2 = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$$

$$\omega \text{ لولا} < \omega \text{ جوش} \rightarrow T > \text{لولا} > T \text{ جوش}$$



۲- ارتعاشات آزاد بامیرایی لزجی یا استهلاک ویسکوز:

میرایی در فرکانس میرایی مؤثر است. ضریب میرایی بحرانی را به صورت $c_c = 2m\omega_n$ تعریف می‌کنیم. در این صورت نسبت

میرایی از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} \quad \text{نسبت میرایی}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{فرکانس میرایی}$$

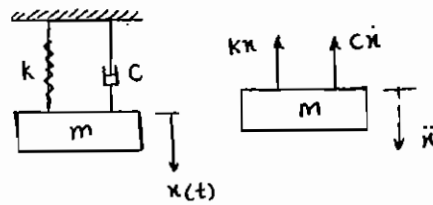
$$\text{پریود میرایی} \quad \tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

توجه: اگر $0 < \zeta < 1$ باشد حرکت نوسانی است.

کاربرد قانون دوم نیوتن در مورد سیستم جرم، فنر و دمپر زیر معادله حرکت این سیستم را به دست می‌دهد.

$$+kx + c\dot{x} = m(-\ddot{x})$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$



جهت حل معادله حرکت جواب زیر را حدس می‌زنیم:

$$x(t) = Ae^{st}$$

با جایگذاری این جواب در معادله حرکت خواهیم داشت:

$$ms^2 + cs + k = 0$$

$$s_1, s_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \Rightarrow x_1(t) = c_1 e^{s_1 t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{s_2 t}$$

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

جواب عمومی از ترکیب خطی جواب‌های $x_1(t), x_2(t)$ به دست می‌آید.

الف) $c^2 > 4km$: s_1, s_2 حقیقی‌اند و حرکت غیرنوسانی است. در این حالت سیستم در حالت فوق میرایی است.

$$x(t) = A_1 e^{\frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} t} + A_2 e^{\frac{-c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} t}$$

ب) $c^2 = 4km$: $s_1 = s_2 = \frac{-c}{2m}$ سیستم دارای حالت میرایی بحرانی است.

$$x(t) = A_1 e^{\frac{-c}{2m} t} + A_2 t e^{\frac{-c}{2m} t}$$

$$c_c = 2\sqrt{km} \text{ ضریب میرایی بحرانی}$$

ج) $c^2 < 4km$: سیستم دارای حالت زیر میرایی است.

$$s_1, s_2 = \frac{-c \pm i\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

$$x(t) = e^{\frac{-c}{2m} t} \left[A_1 e^{\frac{i\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t} + A_2 e^{\frac{-i\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t} \right]$$

$$\omega_d = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} \text{ فرکانس طبیعی میرا شده}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \text{ در حالت کلی} \quad x(t) = e^{\frac{-c}{2m} t} [C \sin(\omega_d t + \phi)]$$

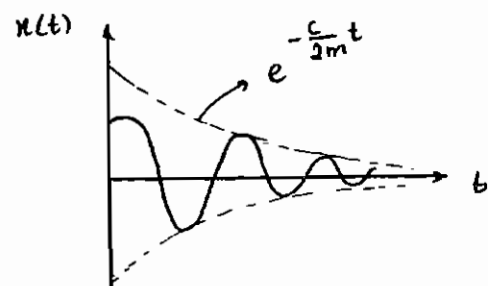
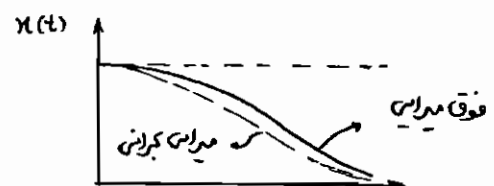
$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$s^2 + (2\zeta\omega_n)s + \omega_n^2 = 0 \text{ معادله مشخصه استاندارد}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \Rightarrow \ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$s = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$$

$$s = -\zeta\omega_n \left(\pm \sqrt{\zeta^2 - 1} + 1 \right)$$



- اگر $\zeta > 1$ باشد: سیستم دارای حالت فوق میرایی و حرکت غیر ارتعاشی است.
 اگر $\zeta = 1$ باشد: سیستم دارای میرایی بحرانی است. این سیستم نوسانی نیست ولی میراشونده است.
 اگر $\zeta < 1$ باشد: سیستم دارای حالت زیر میرایی و حرکت ارتعاشی یا نوسانی است.
 در صورتی که فرم کلی ریشه‌های معادله مشخصه به صورت $S = a \pm ib$ باشد:
 ۱- اگر $a < 0$ باشد: سیستم پایدار است.
 ۲- اگر $a > 0$ باشد: سیستم ناپایدار است.

$$x(t) = e^{-\omega_n t} [(V_0 + \omega_n X_C)t + X_0]$$

در حالت میرایی بحرانی:

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[\frac{V_0 + \zeta \omega_n X_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + X_0 \cos \omega_d t \right]$$

در حالت میرایی زیر بحرانی:

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin \omega_n t + X_0 \cos \omega_n t$$

در حالت بدون میرا:

$$x(t) = c_1 e^{-(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + c_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$$

در حالت فوق میرایی:

$$c_1 = \frac{\dot{x}_0 + x_0 \omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

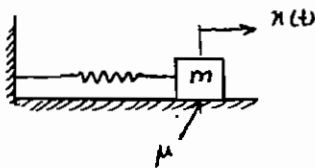
$$c_2 = \frac{-\dot{x}_0 - x_0 \omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

۳- ارتعاشات آزاد با میرایی یا اصطکاک خشک:

سیستم یک درجه آزادی زیر را که دارای اصطکاک خشک است، در نظر بگیرید. چون نیروی اصطکاک با جهت سرعت تغییر می‌کند لازم است مسئله را در دو حالت در نظر بگیریم:

$$F_d = \mu mg$$

$$-k|x| \frac{x}{|x|} - F_d \frac{x}{|\dot{x}|} = m\ddot{x}$$



الف - اگر $\dot{x} > 0$ باشد حرکت به سمت راست است $|\dot{x}| = \dot{x}$ و معادله حرکت عبارت است از:

$$\dot{x} > 0: -kx - F_d = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = -F_d$$

اگر $\dot{x} < 0$ باشد حرکت به سمت چپ است $|\dot{x}| = -\dot{x}$ و معادله حرکت عبارت است از:

$$\dot{x} < 0: -kx + F_d = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = F_d$$

$$m\ddot{x} + kx = F_d$$

اگر سیستم به سمت چپ حرکت کند:

$$\dot{x}(t) = A \omega_n \cos \omega_n t - B \omega_n \sin \omega_n t$$

$$x(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t + \frac{F_d}{k}$$

شرایط اولیه
$$\begin{cases} t=0 & x=0 \\ t=0 & \dot{x}=0 \end{cases}$$

با اعمال شرایط اولیه در $x(t)$, $\dot{x}(t)$:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_d}{k} \right) \cos \omega_n t + \frac{F_d}{k} \quad A = 0, \quad B = x_0 - \frac{F_d}{k}$$

تغییر مکان استاتیکی معادل نیروی اصطکاک عبارت است از:

نکته: در سیستم‌هایی که میرایی کولمب داریم، فرکانس طبیعی نوسان همان فرکانس طبیعی بدون میرا $\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \right)$ است. برای پیدا کردن حداکثر فشردگی از $\dot{x} = 0$ زمان حداکثر فشردگی را به دست می‌آوریم (t_{max}) و در x قرار می‌دهیم تا حداکثر فشردگی به دست بیاید.

$$t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\omega_n} = \frac{\pi}{\omega_n}$$

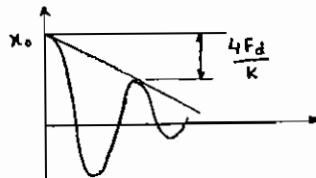
زمان فشردگی

$$x(t) = \frac{\pi}{\omega_n} = \left(x_0 - \frac{F_d}{k} \right) (-1) + \frac{F_d}{k} = - \left(x_0 - 2 \frac{F_d}{k} \right)$$

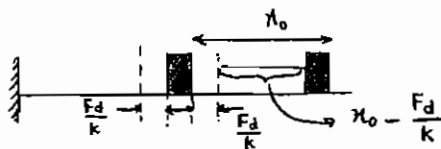
علامت منفی نشان می‌دهد که سیستم به سمت چپ رفته است.

در اثر یک تغییر مکان اولیه x_0 سیستم شروع به نوسان کرده و در هر رفت یا برگشت $\frac{2F_d}{k}$ از دامنه نوسان آن کم شده است. یعنی در یک سیکل کامل از دامنه به اندازه $\frac{4F_d}{k}$ کم شده است. به عبارت دیگر دامنه نوسان در هر دو سیکل پیاپی حرکت را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$x_m = x_{m-1} - \frac{4\mu N}{k}$$



نکته: در سیستم جرم و فنر سیستم همیشه حول یک نقطه ثابت نوسان می‌کند ولی در میرایی کولمب نقطه ثابت که نوسان حول آن انجام شود، نداریم.



مثال: اگر $x_0 = 1.5 \frac{F_d}{k}$ باشد سیستم در کجا می‌ایستد؟

حل: همین جا سیستم می‌ایستد.

$$1.5 \frac{F_d}{k} - \frac{F_d}{k} = 0.5 \frac{F_d}{k} \Rightarrow 0.5 F_d < F_d$$

یعنی تغییر مکان اولیه برای غلبه بر اصطکاک خشک کافی نیست و جسم اصلاً حرکت نخواهد کرد.

مثال: اگر جسم را به اندازه x_0 بکشیم بعد از چند نیم سیکل می‌ایستد؟

n تعداد نیم سیکل‌ها قبل از توقف است.

$$\left(x_0 - n \frac{2F_d}{k} \right) k \leq F_d$$

$$F_d = \mu N \Rightarrow kx_0 - n(2F_d) = F_d \Rightarrow n = \frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{2 \frac{F_d}{k}} \Rightarrow \boxed{n = \frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{2 \frac{\mu N}{k}}}$$

مشخصات سیستم‌های با اصطکاک خشک (میرایی کولمب)

- ۱- فرکانس طبیعی سیستم با افزودن اصطکاک خشک تغییری نخواهد کرد. در صورتی که با افزودن میرایی لزجی تغییر می‌کند.
- ۲- حرکت یک سیستم با اصطکاک خشک از نوع تناوبی است. در صورتی که حرکت سیستم با میرایی لزجی می‌تواند غیر تناوبی باشد.
- ۳- دامنه نوسانات در سیستم با اصطکاک خشک به طور خطی کاهش می‌یابد. در صورتی که در سیستم با میرایی لزجی به صورت نمایی است.

۴- در هر سیکل متوالی دامنه حرکت به اندازه $\frac{4\mu N}{k}$ کاسته شده به طوری که دامنه‌ها در پایان هر دو سیکل متوالی با رابطه زیر به هم مرتبط می‌شوند.

$$X_m = X_{m-1} - 4 \frac{\mu N}{k}$$

مثال : یک شافت فولادی به طول ۱ متر و قطر ۵۰ میلی‌متر از یک طرف فیکس و از طرف دیگر یک پولی با ممان اینرسی 25 kgm^2 را حمل می‌کند. یک ترمز اصطکاکی گشتاور اصطکاکی ثابت 400 N.m را در سرتاسر محیط پولی اعمال می‌کند. اگر پولی به اندازه 6 درجه جابه‌جا و رها شود مطلوب است:

الف- تعداد سیکل‌ها قبل از توقف پولی

ب- وضعیت نشست نهایی پولی

حل:

$$n = \left\{ \frac{\theta_0 - \frac{T}{K_t}}{\frac{2T}{K_t}} \right\}$$

$$k_t = \frac{GJ}{L} = \frac{(8 \times 10^{10}) \left(\frac{T_1}{32} (0.05)^4 \right)}{L} = 49087.5 \frac{\text{N.m}}{\text{rad}}$$

است K_t ضریب سختی فنر پیچشی

$$\Rightarrow n = \frac{0.10475 - \left(\frac{400}{49087.5} \right)}{\frac{800}{49087.5}} = 5.916$$

حرکت بعد از 6 نیم سیکل متوقف می‌شود.

زاویه نشست نهایی پولی نسبت به حالت اولیه:

$$\theta = 0.10472 - 6 \times 2 \left(\frac{400}{49087.5} \right) = 0.39734^\circ$$

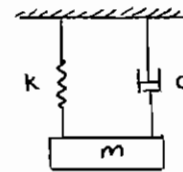
۴ - کاهش لگاریتمی:

روشی آزمایشی است که به وسیله آن می توان یک سیستم را توسط ارتعاشات آزاد اندازه گیری کرد. δ لگاریتم طبیعی نسبت دو دامنه متوالی است. این تعریف فقط برای سیستم های نوسانی است. ($0 < \zeta < 1$)

$$x_0(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [X \sin(\omega_d t + \phi)]$$

$$x_1(t) = e^{-\zeta\omega_n(t+T_d)} \sin[\omega_d(t+T_d) + \phi]$$

مقدار ثابت = کاهش دامنه $= \frac{x_0}{x_1} = e^{\zeta\omega_n T_d}$



$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_n}{x_{n+1}}$$

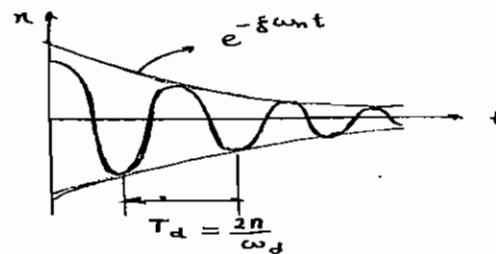
$$\ln \frac{x_0}{x_1} = \zeta\omega_n T_d = \delta = \text{کاهش لگاریتمی}$$

δ از آزمایش از روی x_1, x_0 به دست می آید.

$$\zeta\omega_n T_d = \zeta\omega_n \frac{2\pi}{\omega_d} = \zeta \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \delta$$

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$



در صورتی که مقادیر ζ بسیار کوچک باشد، مقدار کاهش لگاریتمی از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$\delta = 2\pi\zeta$$

اگر به جای دو دامنه متوالی نسبت دو دامنه با n فاصله داشته باشیم، کاهش لگاریتمی برابر است با:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n}$$

تست سال ۶۸ - ۶۷

اگر دامنه یک نوسان میرا در دوره تناوب اول و دوم برابر با 1.5 cm و 1 cm باشد، در دوره تناوب سوم دامنه تناوب برابر است با:

(۴) هیچ کدام

(۳) $e^{1.5}$

(۲) $\ln(1.5)$

(۱) $\frac{2}{3}$

از رابطه مربوط به کاهش لگاریتمی استفاده می کنیم.

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\delta} = \text{const}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} \rightarrow \frac{1.5}{1} = \frac{1}{x_3} \Rightarrow x_3 = \frac{2}{3}$$

گزینه ۱ صحیح می باشد.

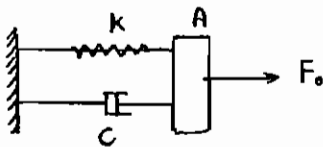
تست سال ۶۹ - ۷۰

فرکانس طبیعی یک سیستم جرم و فنر با میرایی از نوع کولمب (خشک)

- (۱) از فرکانسی طبیعی بدون میرا کمتر است.
 - (۲) از فرکانسی طبیعی بدون میرا بیشتر است.
 - (۳) با فرکانسی طبیعی بدون میرا برابر است.
 - (۴) بستگی به ضریب اصطکاک دارد.
- طبق تئوری در سیستم با اصطکاک خشک فرکانس طبیعی با فرکانس طبیعی سیستم بدون میرا (ω_n) برابر است. گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست سال ۶۹ - ۷۰

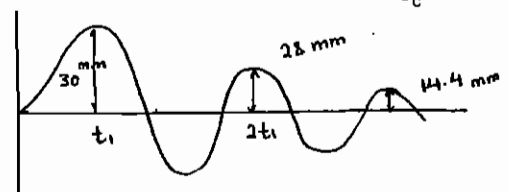
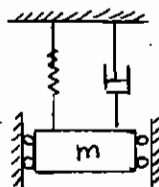
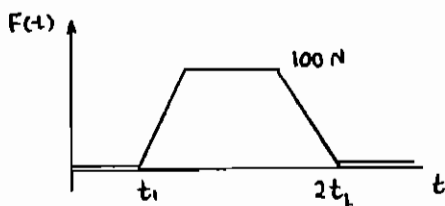
در سیستم روبه‌رو نیروی F_0 به طور استاتیکی به صفحه A وارد شده و جرم صفحه ناچیز است.



- (۱) نیروی F_0 بر روی مستهلک کننده ویسکوز کاری انجام نمی‌دهد.
 - (۲) مقدار کار انجام شده توسط نیروی F_0 بر مستهلک کننده ویسکوز برابر با $\frac{1}{2} \frac{F_0^2}{K}$ است.
 - (۳) مقدار کار انجام شده توسط نیروی F_0 بر مستهلک کننده ویسکوز برابر با انرژی ذخیره شده در فنر است.
 - (۴) مقدار کار انجام شده توسط نیروی F_0 بر مستهلک کننده ویسکوز نصف کار انجام شده بر روی فنر است.
- حل: چون نیروی F_0 استاتیکی است، سرعت حرکت صفحه $V = 0$ است. مستهلک کننده ویسکوز کاری انجام نمی‌دهد. گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

مثال: با مراجعه به شکل و با فرض چسبنده بودن نوع استهلاک (viscous) با مراجعه به منحنی‌های داده شده نسبت استهلاک

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \text{ کدام یک از اعداد زیر است؟}$$



- | | |
|------------|-----------|
| 0.0011 (۲) | 0.021 (۱) |
| 0.0528 (۴) | 0.061 (۳) |

نکته این است که δ برای ارتعاشات آزاد مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین منحنی از $2t_1$ به بعد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$x_2 = 28$$

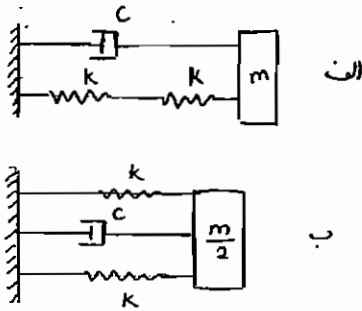
$$x_3 = 14.4$$

$$\delta = \ln \frac{x_2}{x_3} = \ln \left(\frac{28}{14.4} \right)$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = 0.0528$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست سال ۷۳ - ۷۲



برای دو سیستم داده شده در مورد نسبت میرایی (ξ) کدام یک از جملات زیر صحیح است؟
 (۱) نسبت میرایی سیستم الف کمتر از ب است.
 (۲) نسبت میرایی سیستم الف بیشتر از ب است.
 (۳) نسبت میرایی سیستم الف برابر با ب است.
 (۴) نسبت میرایی سیستم الف بیشتر از ب است.
 حل: طبق رابطه گفته شده برای نسبت میرایی داریم:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{2m}} \quad \text{در مورد سیستم الف} \quad k_{eq} = \frac{k}{2} \quad \text{و در نتیجه}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \text{در مورد سیستم ب} \quad k_{eq} = 2k \quad \text{و در نتیجه}$$

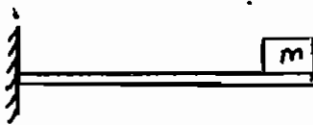
$$c_c = 2m\omega_n$$

$$\left. \begin{aligned} \text{الف} \quad \xi &= \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2m\sqrt{\frac{k}{2m}}} \\ \text{ب} \quad \xi &= \frac{C}{C_c} = \frac{C}{m\sqrt{\frac{m}{2}}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \xi < \xi \quad \begin{matrix} \text{الف} \\ \text{ب} \end{matrix}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست سال ۷۹ - ۷۸

سیستم نشان داده شده با یک سیستم یک درجه آزادی تقریب زده شده است. اگر فرکانس طبیعی و پریود طبیعی سیستم با در نظر گرفتن جرم تیر به ترتیب ω_n و t_n و بدون در نظر گرفتن این جرم Ω_n و T_n باشند، کدام یک از عبارات زیر در مورد این سیستم صحیح است؟

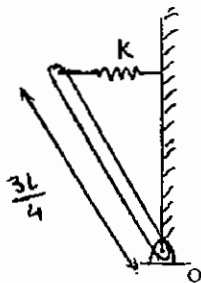


$$\omega_n = \Omega_n, T_n = t_n \quad (۲) \quad \omega_n < \Omega_n, T_n < t_n \quad (۱)$$

$$\omega_n > \Omega_n, T_n > t_n \quad (۴) \quad \omega_n < \Omega_n, t_n < T_n \quad (۳)$$

چون تیر در حالت جرم‌دار جرم معادل بیشتری دارد، طبق رابطه $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس طبیعی کمتری دارد و $\omega_n < \Omega_n$ پس $t_n > T_n$ خواهد بود و گزینه ۱ درست است.

مثال: شرط نوسانی بودن سیستم شکل مقابل کدام است؟



$$mg > \frac{9}{8} kL \quad (۱)$$

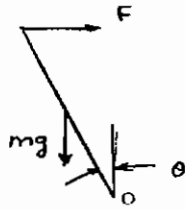
$$mg < \frac{9}{8} kL \quad (۲)$$

$$mg > \frac{8}{9} kL \quad (۳)$$

$$\text{هیچ کدام} \quad (۴)$$

$$\frac{mgl}{2}\theta - k\frac{3}{4}l\theta\left(\frac{3}{4}\right) = m\ddot{\theta}$$

$$\theta\left(\frac{mgl}{2} - \frac{9}{16}kl^2\right) = I_0\ddot{\theta}$$



ابتدا معادله حرکت سیستم ارتعاشی فوق را می‌نویسیم.

همان‌طور که قبل ذکر شد، شرط نوسانی بودن سیستم این است که تمام ضرایب مثبت باشد.

$$I_0\ddot{\theta} + \left(\frac{9}{16}kl^2 - \frac{mgl}{2}\right)\theta = 0$$

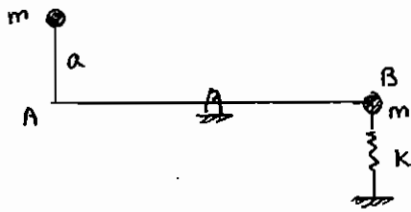
$$\frac{9}{16}kl^2 - \frac{mgl}{2} > 0$$

$$mg < \frac{9}{8}kl$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست سال ۷۱ - ۷۲

در سیستم ارتعاشی نشان داده شده، در حالت استاتیکی میله‌های صلب AB افقی و AC عمودی است. در چه صورت سیستم یک نوسان هارمونیک خواهد داشت؟



(۱) اگر $\frac{K}{3m} < \frac{g}{a}$ باشد.

(۲) اگر $\frac{K}{3m} > \frac{g}{a}$ باشد.

(۳) اگر $\frac{K}{m} > \frac{g}{a}$ باشد.

(۴) سیستم فوق یک سیستم ارتعاشی است و در هر صورت حرکت هارمونیک دارد.

ابتدا معادله حرکت سیستم را می‌نویسیم.

$$\Sigma M_0 = I_0 \ddot{\theta} \Rightarrow mga\theta - mga - Ka^2\theta + mga = I_0 \ddot{\theta}$$

$$I_0 \ddot{\theta} + (Ka^2 - mga)\theta = 0$$

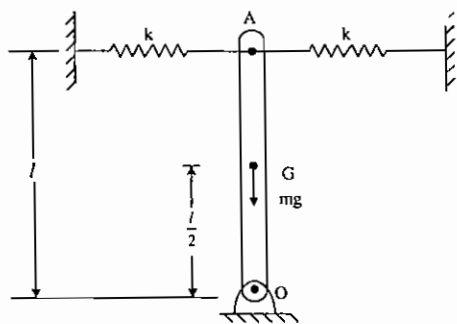
$$Ka - mg > 0 \rightarrow \frac{K}{m} > \frac{g}{a}$$

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، شرط ارتعاشی بودن یک سیستم این است که در معادله حرکت، ضرایب مثبت باشد.

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

سؤالات سال ۱۳۸۵

- ۱- اگر ممان اینرسی یک میله به جرم m و طول L حول انتهای آن $\frac{mL^2}{3}$ باشد، شرط آنکه سیستم شکل زیر برای تغییر زاویه کوچک θ میله حول نقطه O ارتعاشات پایدار داشته باشد آن است که:



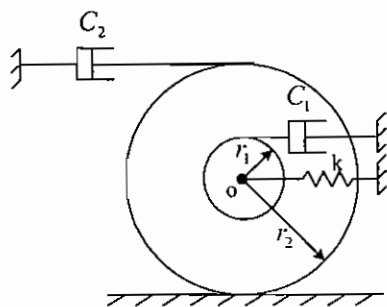
$$K > \frac{W}{4L} \quad (1)$$

$$K = \frac{W}{4L} \quad (2)$$

$$K < \frac{W}{4L} \quad (3)$$

(۴) سیستم همواره ارتعاشات پایدار دارد.

- ۲- نسبت میرایی در مجموعه نشان داده شده کدام یک از پاسخهای زیر است جرم قرقره m_0 و ممان اینرسی آن حول مرکز جرمش I_0 و قرقره بدون لغزش روی مسیر افقی می‌غلتد؟



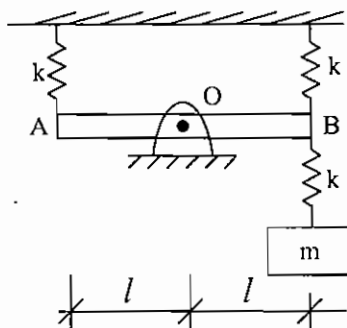
$$\xi = \frac{C_1 + 4C_2}{2\sqrt{\left(\frac{I_0}{r_2^2} + m_0\right)K}} \quad (1)$$

$$\xi = \frac{C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2}{2\sqrt{(I_0 + m_0 r_2^2)K r_2^2}} \quad (2)$$

$$\xi = \frac{C_1 (r_2 - r_1)^2 + 4r_2^2 C_2}{2\sqrt{(I_0 + m_0 r_2^2)K r_2^2}} \quad (3)$$

$$\xi = \frac{C_1 (r_1 - r_2)^2 + 4r_2^2 C_2}{2\sqrt{(I_0 + m_0 r_2^2)K r_2^2}} \quad (4)$$

- ۳- اگر میله AB صلب بدون جرم در وسط آن لولا شده باشد. مطلوبست فرکانس طبیعی سیستم متشکل از یک جرم m و 3



فنر K .

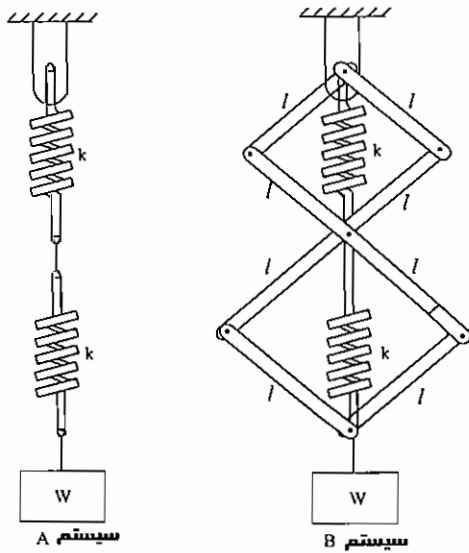
$$\sqrt{\frac{K}{m}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{3K}{m}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{2K}{3m}} \quad (3)$$

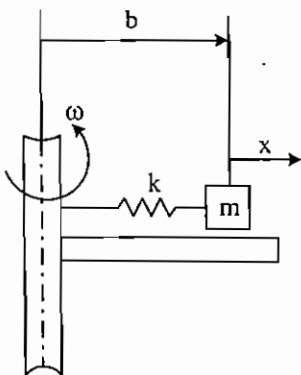
$$\sqrt{\frac{3K}{2m}} \quad (4)$$

۴ - دو سیستم A و B مطابق شکل موجود می‌باشد. فرکانس طبیعی کدامیک از سیستم‌ها بزرگ‌تر می‌باشد؟



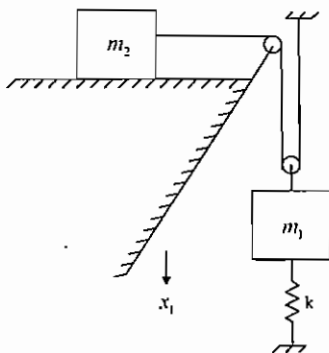
- (۱) فرکانس طبیعی سیستم A از سیستم B بزرگ‌تر است.
- (۲) فرکانس طبیعی دو سیستم A و B برابر می‌باشد.
- (۳) فرکانس طبیعی سیستم B از سیستم A بزرگ‌تر است.
- (۴) فرکانس طبیعی سیستم B بستگی به طول l میله‌ها می‌تواند از فرکانس طبیعی سیستم A بزرگ‌تر، کوچک‌تر و یا مساوی آن باشد.

۵ - جرم m روی صفحه افقی بدون اصطکاک با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری می‌چرخد. شعاع وضعیت تعادل m برابر b می‌باشد. فرکانس طبیعی ارتعاشات m را نسبت به این وضع تعادل بدست آورید.



- (۱) $\omega_n = \omega$
- (۲) $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$
- (۳) $\omega_n = \omega + \sqrt{\frac{K}{m}}$
- (۴) $\omega_n = \sqrt{\omega^2 + \frac{K}{m}}$

۶ - در مجموعه نشان داده شده، بلوک m_2 روی سطح افقی با ضریب اصطکاک $\mu_K = \mu_S = \mu$ قرار گرفته است. معادله

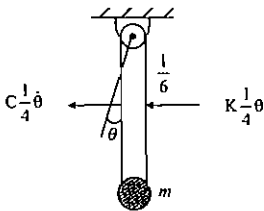


دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش مجموعه کدامیک از پاسخ‌های زیر است؟

- (۱) $(m_1 + 4m_2)\ddot{x}_1 + kx_1 = 0$
- (۲) $(m_1 + 4m_2)\ddot{x}_1 + kx_1 = m_1 g$
- (۳) $(m_1 + 4m_2)\ddot{x}_1 + kx_1 = \pm \mu m_2 g$
- (۴) $(m_1 + 4m_2)\ddot{x}_1 + kx_1 = \pm \mu m_2 g + m_1 g$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۶

۱ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

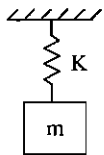


$$\Rightarrow \sum M_o = I_o \ddot{\theta} \Rightarrow -C \frac{1}{4} \frac{l}{4} - k \frac{1}{4} \frac{l}{4} = ml^2 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} + \frac{cl^2}{16} \theta + \frac{kl^2}{16} \theta = 0 \Rightarrow m \ddot{\theta} + \frac{c}{16} \theta + \frac{k}{16} \theta = 0$$

۲ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

قبل از شروع حرکت به دلیل تعادل استاتیکی مجموعه، طول فنر به اندازه $\frac{mg}{k}$ افزایش یافته است و بنابراین فنر نیروی mg را به جعبه و جرم m وارد می‌کند. پس از شروع حرکت چون جعبه دارای حرکت سقوط آزاد با شتاب g می‌باشد پس برای حرکت نسبی جرم m نسبت به جعبه نیروی وزن جرم m حذف می‌شود و تنها نیروی وارد بر جرم m همان نیروی فنر به دلیل کشیدگی اولیه می‌باشد.



$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow x = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

حال با توجه به شرایط اولیه‌ای که سرعت جرم m در شروع حرکت برابر صفر و تغییر طول اولیه برابر $\frac{mg}{k}$ می‌باشد ضرایب A و B را محاسبه می‌کنیم:

$$x = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$\dot{x} = -A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = \frac{+mg}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = +\frac{mg}{k} \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow x = +\frac{mg}{k} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

حال مدت زمان برخورد جعبه از سکون تا زمین را به دست می‌آوریم (حرکت سقوط آزاد)

$$gH = \frac{1}{2} V^2 - 0 \Rightarrow V = \sqrt{2gH}$$

$$V = gt + V_0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2gH}}{g} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

با جایگذاری این زمان در معادله حرکت نسبی جرم m تغییر طول فنر را در زمان برخورد جعبه محاسبه می‌کنیم:

$$x \left(t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \right) = +\frac{mg}{k} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

حال تغییر طول نهایی فنر برابر است با x نسبی بین جرم و جعبه در شروع حرکت منهای x نسبی بین جرم و جعبه در لحظه برخورد

$$\Delta_x = \frac{mg}{k} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{2H}{g}} \right)$$

و نیروی وارد بر جرم m در لحظه برخورد برابر نیروی فنر است که آن نیز از قانون هوک به دست می‌آید:

$$F = kx = mg \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{2H}{g}} \right) \text{ (به سمت بالا)} = -mg \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{2H}{g}} \right)$$

۳ - هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

از لحاظ ابعادی همه گزینه‌ها اشتباه هستند.

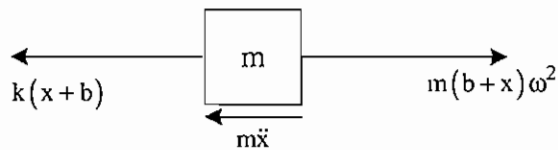
۴ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با فرض بدون اصطکاک بودن مفاصل در سازه محاط بر فنر، پس وجود سازه در عملکرد سیستم هیچ تأثیری نخواهد داشت و بنابراین فرکانس طبیعی در سیستم با هم برابر است.

نکته : اگر اصطکاک در مفاصل سازه فرض شود در این صورت سازه باعث افزایش سختی معادل مجموعه شده و در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم سازه‌دار بیشتر از بدون سازه می‌شود.

۵ - هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

با توجه به دوران جرم m ، دیاگرام آزاد آن را رسم می‌کنیم که شامل یک نیروی گریز از مرکز و یک نیروی فنر می‌باشد:



حال برای قانون دوم خواهیم داشت:

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow m(b+x)\omega^2 - k(x+b) = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + (k - m\omega^2)x = 0$$

$$\Rightarrow \text{فرکانس طبیعی} = \omega_n = \sqrt{\frac{x \text{ ضریب}}{\ddot{x} \text{ ضریب}}} = \sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$$

۶ - هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

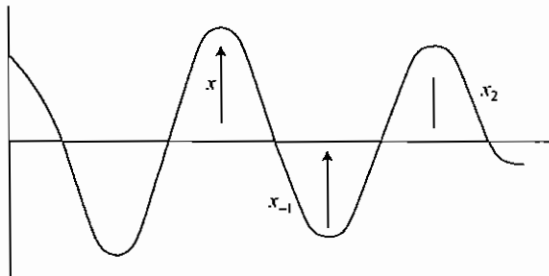
از آنجا که طناب نمی‌تواند نیروی فشاری وارد کند بنابراین پس از تحریک اولیه m_1 و طی شدن کورس کامل m_2 ، m_2 در انتهای کورس باقی مانده و دیگر در حرکت ارتعاشی نقشی ندارد و بنابراین سیستم یک سیستم جرم و فنر ساده می‌شود که معادله حاکم بر آن عبارتست از:

$$m_1\ddot{x}_1 + kx_1 = 0$$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۷

۱ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

نکته : فرکانس نوسان سیم با میرایی کولمب با فرکانس سیستم بودن میرا یکسان است.



$$\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_{-1}^2) - f_d(x_1 + x_{-1}) = 0 \rightarrow \text{کار و انرژی}$$

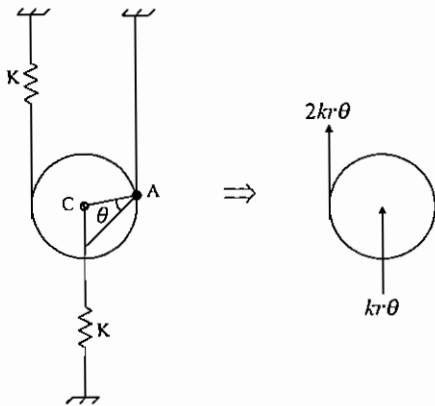
$$\rightarrow x_1 - x_{-1} = \frac{2F_d}{k} = \frac{2\mu mg}{k}$$

$$\text{کاهش دانه در یک نیم‌سیکل } (x_1 - x_{-1}) = \frac{2\mu mg}{k}$$

۲ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

چون نقطه A مرکز آنی دوران می‌باشد معادلات را برحسب تغییر زاویه θ می‌نویسیم:

$$\sum M = I_A \alpha \rightarrow (-2kr\theta)2r + (-kr\theta)r = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\ddot{\theta}$$

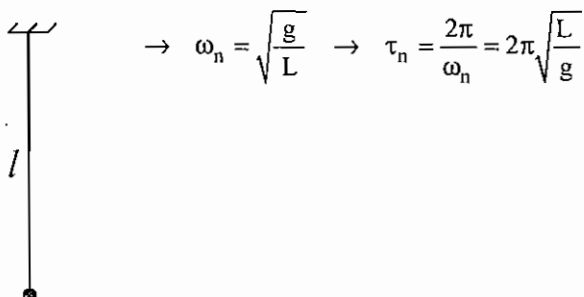


$$\rightarrow \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} + 5kr^2\theta = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\text{ضریب } \theta}{\text{ضریب } \ddot{\theta}}} = \sqrt{\frac{5kr^2}{\frac{3}{2}mr^2}} = \sqrt{\frac{10}{3} \frac{k}{m}}$$

۳ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

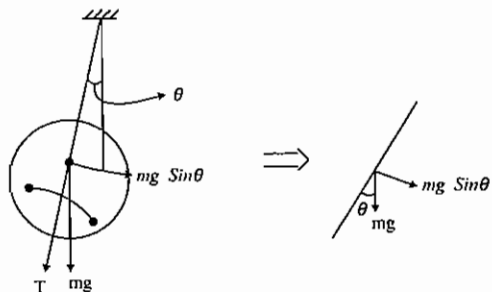
روش اول: با تحلیل ابعادی به راحتی می‌توان دریافت که تنها گزینه ۲ درست می‌باشد چون k_0 باید از جنس طول باشد و برای τ_n

می‌توان به صورت تقریبی به دست آورد که:



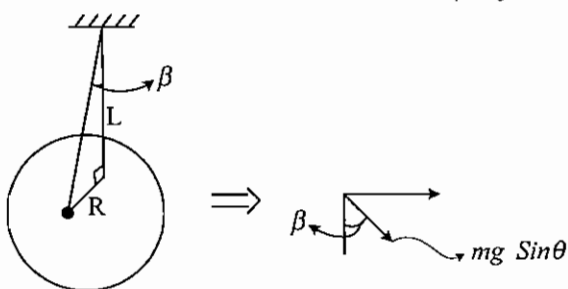
روش دوم:

به تغییر زاویه کوچک θ در سیم‌ها برای دیاگرام آزاد خواهیم داشت:



حال برای به دست آوردن مؤلفه‌ای از $mg \sin \theta$ که عمود بر شعاع R می‌باشد خواهیم داشت:

$$\Rightarrow N = mg \sin \theta \sin \beta = mg \sin \theta \tan \beta = mg \sin \theta \frac{R}{L}$$



حال برای معادله حرکت داریم:

$$I\ddot{\theta} + mg \sin \theta \frac{R^2}{L} = 0$$

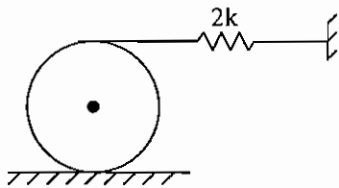
$$\text{کوچک } \theta \Rightarrow I\ddot{\theta} + mg \frac{R^2}{L} \theta = 0 \Rightarrow mK_0^2 \ddot{\theta} + mg \frac{R^2}{L} \theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mg \frac{R^2}{L}}{mK_0^2}} = \frac{R}{K_0} \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi K_0}{R} \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow K_0 = \frac{\tau_n R}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

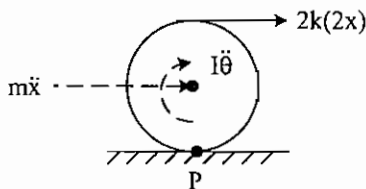
پاسخ سؤالات ۱۳۸۸

۱- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

از آنجا که سیستم یک سیستم متقارن است. نقطه وسط فنر همواره ساکن می‌ماند بنابراین می‌توان فنر را نصف کرده و وسط آن را ثابت نمود. یعنی کافی است شکل روبه‌رو را بررسی نمود.



(با نصف کردن طول فنر ضریب آن 2 برابر می‌شود.)



$$I = \frac{1}{2}mr^2$$

$$\sum M_p = 0 \Rightarrow m\ddot{x}(r) + I\ddot{\theta} + 4kx(2r) = 0$$

$$x = r\theta \Rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

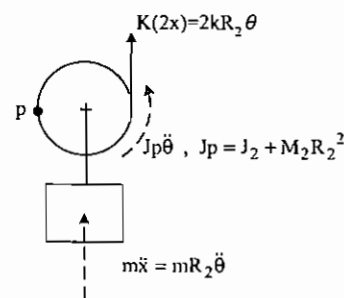
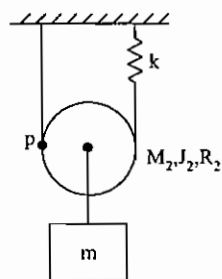
$$\Rightarrow mr^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} + 8kr^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}m\ddot{\theta} + 8k\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{16k}{3m}\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{16k}{3m}}$$

۲- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

از آنجا که پولی M_1 ثابت است و حرکتی ندارد بنابراین تأثیری در دینامیک سیستم ندارد. نقطه p نقطه سکون و مرکز دوران است. بنابراین:



$$\sum M_p = 0 \Rightarrow mR_2^2\ddot{\theta} + (J_2 + M_2R_2^2)\ddot{\theta} + 2kR_2\theta(2R_2) = 0$$

$$\Rightarrow ((m + M_2)R_2^2 + J_2)\ddot{\theta} + 4kR_2^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{4k}{m + M_2 + \frac{J_2}{R_2^2}}\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{4k}{m + M_2 + \frac{J_2}{R_2^2}}}$$

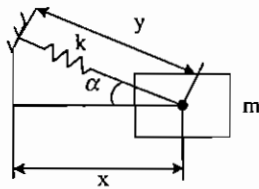
راه حل تستی: از آنجا که پولی M_1 تأثیری بر دینامیک سیستم ندارد فرکانس طبیعی سیستم تابعی از R_2, M_2, m, k و J_2 می‌باشد. بنابراین تنها گزینه ۳ گزینه صحیح می‌باشد.

۳ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

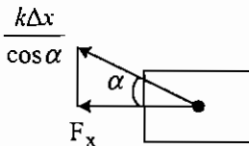
نکته : دو سیستم مقابل با هم معادلند.



اثبات:



$$\Rightarrow y = \frac{x}{\cos \alpha} \Rightarrow \Delta y = \frac{\Delta x}{\cos \alpha} \Rightarrow F = k \Delta y = \frac{k \Delta x}{\cos \alpha}$$



$$\Rightarrow F_x = \frac{k \Delta x}{\cos^2 \alpha} = \frac{k}{\cos^2 \alpha} \Delta x \Rightarrow k_{eq} = \frac{k}{\cos^2 \alpha}$$

این معادل آن است که یک فنر افقی به ضریب فنریت $\frac{k}{\cos^2 \alpha}$ داشته باشیم.

بنابراین فرکانس طبیعی سیستم به α وابسته است.

از طرف دیگر می‌دانیم که در چنین سیستمی فرکانس طبیعی سیستم به سرعت زاویه قاب نیز بستگی دارد. بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۴ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

از لحظه‌ای که سر فنر به زمین می‌رسد. سیستم مانند یک جرم و فنر عادی شروع به نوسان می‌نماید. بنابراین، با به دست آوردن شرایط اولیه سیستم نوسانی می‌توان پاسخ آن را به دست آورد.

سرعت اولیه جرم در شروع حرکت نوسانی $V_0 = \sqrt{2gh}$

با توجه به این که مبدأ در محلی قرار دارد که فنر به اندازه‌ای فشرده شده است که جرم m را تحمل نماید، بنابراین:

$$kx_0 = mg \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega_n^2}$$

توضیح این که لحظه‌ای که فنر به زمین می‌رسد نیروی فشاری فنر صفر است و هنوز باید جسم به اندازه $\frac{mg}{k}$ پایین رود تا سیستم نوسانی در مبدأ خود قرار گیرد.

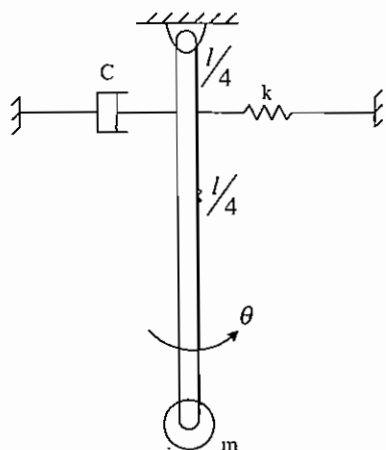
$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \Rightarrow x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{V_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -x_0 \omega_n^2 \cos \omega_n t - V_0 \omega_n \sin \omega_n t = -g \cos \omega_n t - \sqrt{2gh} \omega_n \sin \omega_n t$$

$$\max(\ddot{x}) = -\sqrt{g^2 + 2gh \omega_n^2} = -\omega_n^2 \sqrt{\left(\frac{g}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{2gh}{\omega_n^2}}$$

سؤالات ۱۳۸۶

۱ - مجموعه مقابل در صفحه افقی قرار دارد. مطلوب است معادله حرکت مجموعه (با فرض θ کوچک):



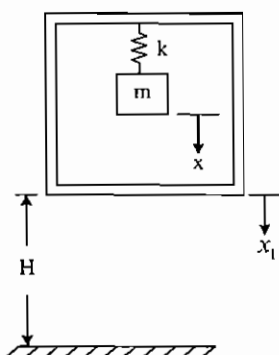
$$m\ddot{\theta} - \frac{cl}{4}\dot{\theta} + \frac{kl}{4}\theta = 0 \quad (۱)$$

$$m\ddot{\theta} + \frac{cl}{4}\dot{\theta} + \frac{kl}{4}\theta = 0 \quad (۲)$$

$$m\ddot{\theta} - c\dot{\theta} + k\theta = 0 \quad (۳)$$

$$m\ddot{\theta} + \frac{c}{16}\dot{\theta} + \frac{k}{16}\theta = 0 \quad (۴)$$

۲ - جرم m متصل به جعبه در حال تعادل استاتیکی است. سپس از ارتفاع H مطابق شکل سقوط آزاد می‌نماید. نیروی منتقل شده به جرم m را در لحظه برخورد با زمین به دست آورید. برخوردی بین جرم m و جعبه اتفاق نمی‌افتد. x فاصله نسبی بین جرم m و جعبه است.



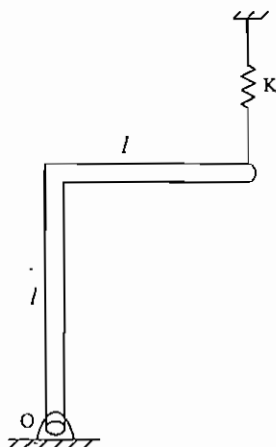
$$0 \quad (۱)$$

$$mg \quad (۲)$$

$$-gm \left(1 - \cos \frac{k}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} \right) \quad (۳)$$

$$-gm \left(1 - \sin \frac{k}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} \right) \quad (۴)$$

۳ - میله خمیده یکنواخت به جرم m و طول $2l$ مطابق شکل خمیده شده و سیستم ارتعاشی را تشکیل داده که در حالت تعادلی استاتیکی می‌باشد. فرکانس طبیعی سیستم چقدر است؟



$$\sqrt{\frac{12k - 3mg}{7l}} \quad (۱)$$

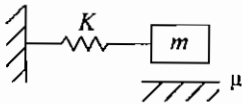
$$\sqrt{\frac{12k - 3mg}{5l}} \quad (۲)$$

$$\sqrt{\frac{12k - 9mg}{7l}} \quad (۳)$$

$$\sqrt{\frac{12k - 9mg}{5l}} \quad (۴)$$

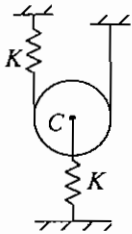
سؤالات ۱۳۸۷

۱- سیستم یک درجه آزادی جرم و فنر با اصطکاک کولمب را در نظر بگیرید. ضریب اصطکاک برابر μ و شرایط اولیه برابر $x(0) = x_0$ و $\dot{x}(0) = 0$ در نظر بگیرید. فرکانس طبیعی حرکت سیستم برابر است و دامنه حرکت در هر نیم سیکل به اندازه کم می شود.



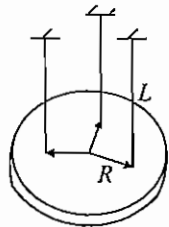
$$\begin{aligned} (1) \quad \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{\mu m}} \quad \text{و} \quad \frac{\mu mg}{k} \\ (2) \quad \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{و} \quad \frac{\mu mg}{k} \\ (3) \quad \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{\mu m}} \quad \text{و} \quad \frac{2\mu mg}{k} \\ (4) \quad \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{و} \quad \frac{2\mu mg}{k} \end{aligned}$$

۲- غلتک به جرم m و ممان اینرسی $\frac{1}{2}mR^2$ روی نخ بدون جرم متصل به فنر غلتش ناب دارد. اگر مرکز غلتک به فنر دیگری متصل باشد مطلوبست فرکانس طبیعی سیستم؟



$$\begin{aligned} (1) \quad \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{2m}} \\ (2) \quad \omega_n &= \sqrt{\frac{2k}{m}} \\ (3) \quad \omega_n &= \sqrt{\frac{10k}{3m}} \\ (4) \quad \omega_n &= \sqrt{\frac{5k}{m}} \end{aligned}$$

۳- چرخ لنگری به جرم m در صفحه افقی از سه سیم به طول L ، در دایره‌ای به شعاع R متر به فواصل مساوی آویخته شده است. اگر زمان نوسان حول محور قائم در مرکز چرخ τ_n ثانیه باشد، شعاع ژیراسیون آن برابر است با:

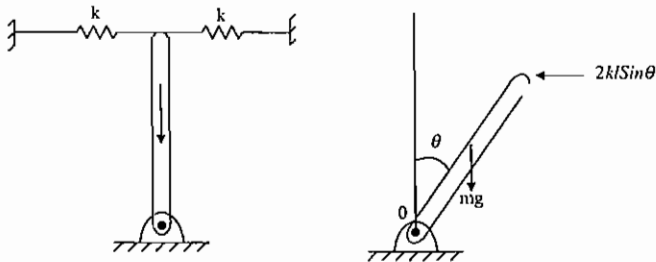


$$\begin{aligned} (1) \quad K_0 &= \frac{\tau_n}{2\pi R} \sqrt{\frac{L}{g}} \\ (2) \quad K_0 &= \frac{\tau_n R}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \\ (3) \quad K_0 &= \frac{\tau_n}{2R} \sqrt{\frac{g}{L}} \\ (4) \quad K_0 &= \tau_n \sqrt{\frac{L}{g}} \end{aligned}$$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۵

۱- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

نکته: برای اینکه یک سیستم ارتعاشی دارای ارتعاشات پایدار باشد تمام ضرایب متغیر و مشتق‌های آن هم‌علامت باشند.



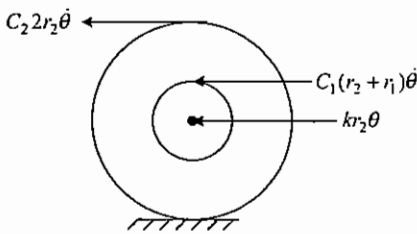
$$\Rightarrow \sum M = I\ddot{\theta} \Rightarrow mg \frac{1}{2} \sin \theta - 2kL \sin \theta \cos \theta = I\ddot{\theta}$$

$$\theta \ll 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sin \theta = \theta \\ \cos \theta = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow I\ddot{\theta} + \left(2kL^2 - mg \frac{1}{2} \right) \theta = 0$$

$$\Rightarrow \text{پایداری} \Rightarrow 2kL^2 - W \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow k > \frac{W}{4L}$$

۲- هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

با توجه به حرکت غلتش بدون لغزش قرقره، نقطه تماس مرکز آنی دوران می‌شود خواهیم داشت:



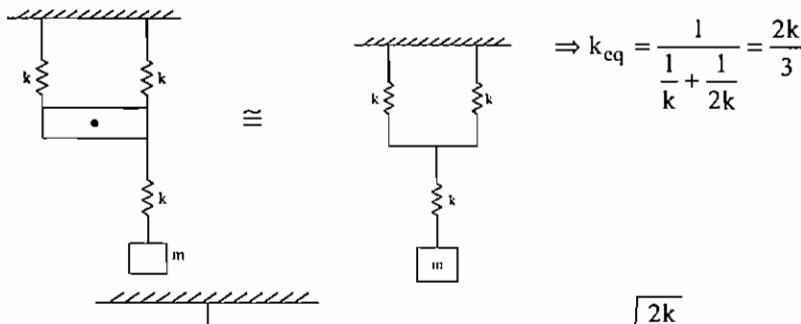
$$\Rightarrow (I_0 + m_0 r_2^2) \ddot{\theta} + (c_1 (r_2 + r_1)^2 + 4c_2 r_2^2) \dot{\theta} + k r_2^2 \theta = 0$$

نکته:

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{\dot{\theta}}{2\sqrt{\theta}} \times \theta \Rightarrow \xi = \frac{c_1 (r_2 + r_1)^2 + c_1 c_2 r_2^2}{2\sqrt{(I_0 + m_0 r_2^2)(k r_2^2)}}$$

۳- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

برای میله بدون جرم AB داریم:



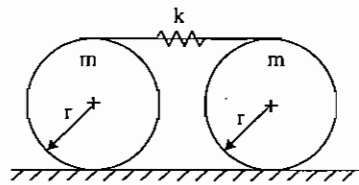
$$\Rightarrow k_{cq} = \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{2k}} = \frac{2k}{3}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}} = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

حال برای جرم m:

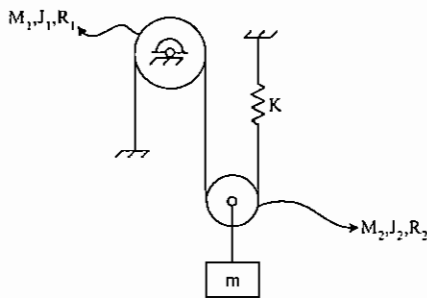
سؤالات ۱۳۸۸

۱ - دو دیسک متجانس مطابق شکل به وسیله فنری با ضریب k به یکدیگر متصل شده‌اند. با فرض غلت بدون لغزش، بزرگ‌ترین فرکانس طبیعی آن کدام است؟



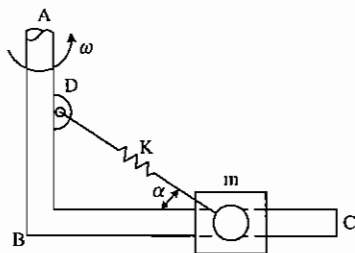
- (۱) $\sqrt{\frac{16k}{m}}$
 (۲) $\sqrt{\frac{4k}{3m}}$
 (۳) $\sqrt{\frac{16k}{3m}}$
 (۴) $\sqrt{\frac{4k}{m}}$

۲ - فرکانس طبیعی ارتعاشات سیستم مقابل کدام است؟ (J_1 و J_2 ممان اینرسی پولی‌ها حول محور گذرنده از مرکز جرم‌شان می‌باشند).



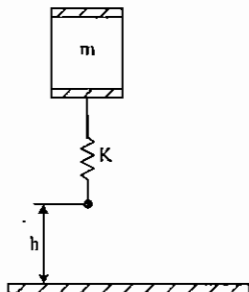
- (۱) $\sqrt{\frac{k}{m+M_2}}$
 (۲) $\sqrt{\frac{4k}{m+M_2+\frac{J_1}{R_1^2}+\frac{J_2}{R_2^2}}}$
 (۳) $\sqrt{\frac{4k}{m+M_2+\frac{J_2}{R_2^2}}}$
 (۴) $\sqrt{\frac{2k}{m+M_1+M_2+\frac{J_1}{R_1^2}+\frac{J_2}{R_2^2}}}$

۳ - قاب صلب ABC حول محور AB با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند. لغزنده m بدون اصطکاک روی بخش BC می‌لغزد و فنر k با زاویه α از یک طرف به جرم m و از طرف دیگر به نقطه D متصل می‌باشد. در این صورت می‌توان گفت: «فرکانس طبیعی سیستم به زاویه α بستگی و به ω بستگی



- (۱) ندارد - دارد
 (۲) دارد - دارد
 (۳) ندارد - ندارد
 (۴) دارد - ندارد

۴ - سیستم جرم و فنر روبه‌رو از ارتفاع h سقوط می‌کند. مقدار حداکثر شتاب وارده به جرم m ، کدام است؟



- (۱) $-\omega_n^2 \left[\sqrt{\frac{2gh}{\omega_n^2} + \left(\frac{g}{\omega_n^2}\right)^2} \right]$
 (۲) $-\omega_n^2 \left[\sqrt{\frac{2gh}{\omega_n^2} - \left(\frac{g}{\omega_n^2}\right)^2} \right]$
 (۳) $-\omega_n^2 \left[\sqrt{\left(\frac{g}{2\omega_n^2}\right)^2 - \frac{2gh}{\omega_n^2}} \right]$
 (۴) $-\omega_n^2 \left[\sqrt{\left(\frac{g}{2\omega_n^2}\right)^2 + \frac{2gh}{\omega_n^2}} \right]$

فصل سوم

ارتعاشات اجباری

ارتعاشات آزاد سیستم‌های یک درجه آزادی را در حالت‌های زیر در نظر می‌گیریم:

۱- سیستم‌های بدون استهلاک

۲- سیستم‌های با استهلاک

عامل تحریک سیستم را نیز در دو حالت زیر در نظر می‌گیریم:

۱- تحریک نیرو

۲- تحریک جابه‌جایی

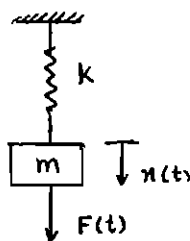
۱- ارتعاشات اجباری سیستم‌های بدون استهلاک با تحریک نیرو

سیستم نشان داده شده در شکل زیر توسط نیروی $F(t)$ تحریک می‌شود. $F(t)$ می‌تواند به صورت هارمونیک باشد یا نباشد. فرض کنیم که نیروی تحریک هارمونیک و به صورت $F_0 \cos \omega t$ باشد (ω فرکانس تحریک نام دارد).

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$



معادله حرکت چنین سیستمی عبارت‌است از:

توجه شود در این رابطه x_p جواب خصوصی و x_h جواب عمومی می‌باشد.

نکته: اگر $\omega \approx \omega_n$ باشد، یعنی فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی سیستم برابر باشد، حالت تشدید اتفاق می‌افتد.

$$x_h(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$

$$x_h(t) = A_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + A_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$x_p(t) = X \cos \omega t$$

برای به‌دست آوردن پاسخ خصوصی یک جواب هارمونیک به‌صورت مقابل در نظر می‌گیریم:

و آن را در معادله حرکت جایگذاری می‌کنیم.

$$-m\omega^2 X \cos \omega t + kX \cos \omega t = F_0 \cos \omega t$$

دامنه پاسخ حالت پایدار $X = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$ می‌باشد و بنابراین پاسخ خصوصی سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

پس پاسخ کلی سیستم عبارت‌است از:

با در نظر گرفتن شرایط اولیه $x(0) = x_0$ ، $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ خواهیم داشت:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega t$$

دامنه استاتیکی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$$

X حداکثر دامنه نوسان و کمیت $\frac{X}{\delta_{st}}$ نسبت دامنه نوسان حرکت دینامیک به استاتیک را ارائه می‌دهد و ضریب بزرگنمایی، ضریب

تقویت یا نسبت دامنه نامیده می‌شود.

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{Xk}{F_0} = \frac{1}{1 - \frac{m\omega^2}{k}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

نسبت فرکانس r را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

در این صورت نسبت دامنه عبارت خواهد بود از:

$$M = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - r^2}$$

می‌خواهیم ارتعاش را نسبت به نسبت فرکانس r مطالعه کنیم.

حالت اول

$$r < 1 \quad \text{یا} \quad \omega < \omega_n \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} < 1$$

در این حالت سیستم و تحریک همفازند و نسبت دامنه مثبت خواهد بود:

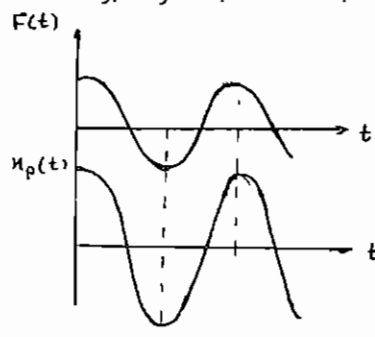
$$\therefore \frac{X}{\delta_{st}} > 0$$

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

$$x_p(t) = X \cos \omega t$$

$$r > 1 \quad \text{یا} \quad \omega > \omega_n \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} > 1$$

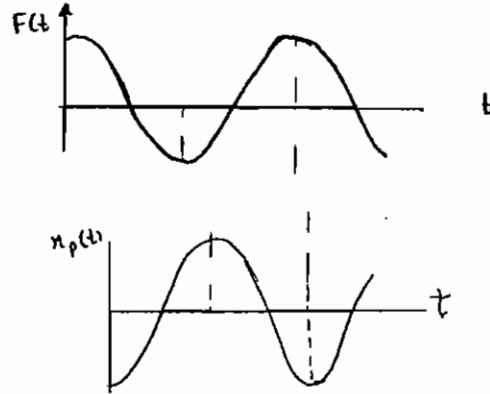
$$\therefore \frac{X}{\delta_{st}} < 0$$



حالت دوم

در این شرایط نسبت دامنه منفی خواهد شد. چون دامنه منفی معنی ندارد جواب خصوصی را منفی کنیم و $\frac{X}{\delta_{st}}$ را مثبت در نظر

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{r^2 - 1}, \quad \begin{cases} x_p = -X \cos \omega t \\ F(t) = F_0 \cos \omega t \end{cases}$$



می‌گیریم.

در نتیجه پاسخ سیستم و نیروی تحریک با هم 180 درجه اختلاف فاز دارند.

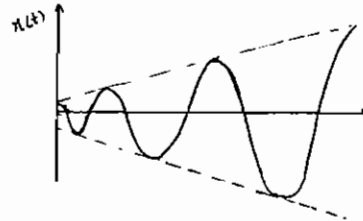
دقت کنید وقتی $r \rightarrow \infty$ باشد داریم $x \rightarrow 0$ ، بنابراین پاسخ سیستم به یک نیروی محرک هارمونیک با فرکانس خیلی بالا نزدیک به صفر است.

حالت سوم
تشدید (Resonance) $\omega = \omega_n$ یا $r = 1$

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

چون مخرج کسر مربوط به پاسخ خصوصی سیستم صفر می‌شود، کسر را رفع ابهام می‌کنیم که در نهایت خواهیم داشت:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \underbrace{\frac{\delta_{st} \omega_n t}{2} \sin \omega_n t}_{x_p}$$



پس در حالت تشدید همواره دامنه ارتعاشات زیاد می‌شود و اختلاف فاز بین سیستم و تحریک 90° خواهد بود.

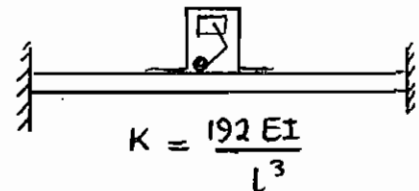
مثال: یک پمپ رفت و برگشتی به وزن 150lb در وسط یک صفحه فولادی به ضخامت $\frac{1}{2}$ in و پهنای 20in و طول 100in قرار گرفته است و صفحه از دو طرف درگیر است. به علت کارکرد پمپ صفحه تحت نیروی هارمونیک $F(t) = 50 \cos(62.832t)$ lb قرار می‌گیرد. دامنه نوسانات صفحه را پیدا کنید.

حل: ابتدا باید ممان اینرسی و سپس سختی معادل مجموعه را محاسبه نماییم.

$$I = \frac{1}{12} 20 \times 0.5^3 = 0.2083 \text{ in}^4$$

$$k = \frac{192 EI}{l^3} \Rightarrow k = \frac{192 \times 30 \times 10^6 \times 0.2083}{100^3} = 1200 \frac{\text{lb}}{\text{m}}$$

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{50}{1200 - \frac{150}{386.4} \times (62.832)^2} = -0.1504$$



علامت منفی X فاز متقابل تحریک و پاسخ را مشخص می‌کند. (یعنی تحریک و پاسخ با هم 180 درجه اختلاف فاز دارند).

مثال : نقطه کارکرد سیستم مثال قبل عبارت است از:

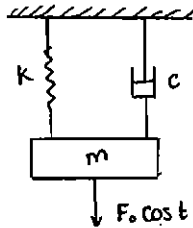
$$\omega < \omega_n \quad (۱)$$

$$\omega = \omega_n \quad (۲)$$

$$\omega > \omega_n \quad (۳)$$

(۴) هیچ کدام

چون دامنه منفی شده است، $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$ است و گزینه ۳ صحیح می باشد.



۲ - ارتعاشات اجباری سیستم‌های با استهلاك با تحريك نیرو

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

در این رابطه x_h جواب عمومی و x_p جواب خصوصی می باشد.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0$$

چون با میل کردن زمان به سمت بی نهایت $x_h(t)$ به صفر می رسد، $x_h(t)$ را پاسخ حالت گذرای سیستم می گوئیم. اما

$\lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t) \neq 0$ بنابراین x_p پاسخ حالت ماندگار یا پایدار نام دارد.

بنابراین در ارتعاشات اجباری با استهلاك فقط $x_p(t)$ را مد نظر داریم.

$$x(t) = x_p(t)$$

$$\text{فرض } x_p(t) = X \cos(\omega t + \phi)$$

با جایگذاری $x(t)$ در معادله دیفرانسیل حرکت داریم:

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\tan \phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2\zeta}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\text{ضریب بزرگ‌نمایی} = \frac{X}{\frac{F_0}{k}} = \frac{kX}{F_0} = \frac{\text{نیروی دینامیکی در فنر}}{\text{حداکثر نیروی وارد به سیستم}}$$

که در این رابطه $\frac{F}{k}$ تغییر مکان استاتیکی است. ضریب بزرگ‌نمایی تابعی از نسبت فرکانس $\frac{\omega}{\omega_n}$ و میرایی ζ است:

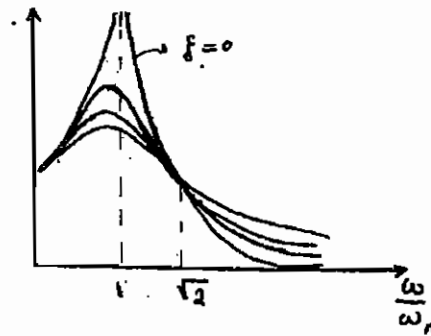
$$\frac{kX}{F_0} = f\left(\frac{\omega}{\omega_n}, \zeta\right)$$

الف - دیاگرام بد Bode Diagram

دیاگرام بد شامل دو دیاگرام است. دیاگرام اول نشان‌دهنده منحنی تغییرات ضریب بزرگ‌نمایی بر حسب نسبت فرکانس به ازای مقادیر مختلف میرایی است. به ازای مقادیر مخالف صفر میرایی، منحنی ضریب بزرگ‌نمایی دارای یک نقطه ماکزیمم است که قبل از تشدید قرار دارد. محل این ماکزیمم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d}{d\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \left(\frac{kX}{F_0} \right) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$



اگر مقدار میرایی خیلی کوچک شود، محل ماکزیمم منحنی عبارت‌است از:

$$\frac{\omega}{\omega_n} = 1$$

که حالت رزونانس یا تشدید نام دارد و دامنه در حالت رزونانس از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$X_{\text{resonance}} = \frac{\frac{F_0}{k}}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \equiv \frac{\frac{F_0}{k}}{2\zeta} = \frac{F_0}{c\omega_n}$$

اگر مقدار میرایی صفر شود در نقطه تشدید دامنه به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد.

دیاگرام دوم بد دیاگرام فاز نام دارد و نشان‌دهنده اختلاف فاز سیستم و تحریک بر حسب نسبت فرکانس به ازای مقادیر مختلف میرایی است. در صورتی که مقدار میرایی سیستم برابر صفر باشد:

اختلاف فاز سیستم و تحریک در حالت رزونانس یا تشدید (یعنی $\omega = \omega_n$) برای تمام مقادیر میرایی 90° خواهد بود.

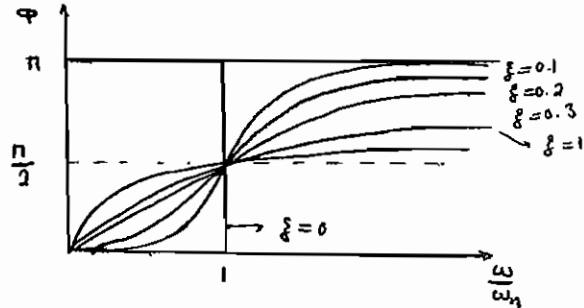
در صورتی که $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$ باشد، اختلاف فاز با افزایش میرایی زیاد می‌شود.

در صورتی که $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$ باشد، اختلاف فاز با افزایش میرایی کم می‌شود.

در صورتی که نسبت میرایی صفر شود ($\zeta=0$):

$$\frac{\omega}{\omega_n} < 1 \Rightarrow \phi = 0$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} > 1 \Rightarrow \phi = \pi$$



پس داریم:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = M$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1-r^2}$$

M فاکتور بزرگ‌نمایی، فاکتور تقویت یا نسبت دامنه نام دارد.

مشاهده می‌شود که مقدار نسبت میرایی ζ هم در دامنه و هم در فاز وارد می‌شود.

پیک منحنی‌ها در نمودار تغییرات ضریب بزرگ‌نمایی قبل از نقطه تشدید خواهد بود و محل ماکزیمم منحنی عبارت است از:

$$r_m = \sqrt{1-2\zeta^2} < 1$$

پس ماکزیمم‌ها همواره قبل از نسبت فرکانس ۱ خواهند بود و مقدار دامنه حداکثر از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\left. \frac{X}{\delta_{st}} \right|_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

در حالت تشدید یعنی $\omega = \omega_n$ مقدار X از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{2\zeta}$$

مشاهده می‌شود که اگر استهلاک سیستم را افزایش دهیم، نه تنها ماکزیمم دامنه از بی‌نهایت به یک عدد می‌رسد، بلکه در حالت

تشدید ($\omega = \omega_n$)، دامنه حتی از حالت ماکزیمم هم کمتر می‌شود. توجه داشته باشید که نتیجه‌گیری فوق تنها برای $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$

صادق است. برای $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ماکزیمم دامنه در $\omega = 0$ رخ می‌دهد و برابر یک است و نمودار دارای نقطه ماکزیمم نخواهد بود.

مشخصات منحنی دامنه

۱- افزایش میرایی سیستم، ضریب بزرگ‌نمایی یا نسبت دامنه را برای تمامی مقادیر فرکانس نیرو کاهش می‌دهد.

۲- برای هر مقدار مشخص نسبت فرکانس r، افزایش میرایی نسبت دامنه را کاهش می‌دهد.

۳- در حالت خاص اعمال نیروی ثابت غیرهارمونیک ($r=0$)، مقدار نسبت دامنه ۱ است.

- ۴- کاهش نسبت دامنه در حضور میرایی، در محل تشدید یا در نزدیکی آن بسیار قابل ملاحظه است.
 ۵- با افزایش فرکانس نیرو تا بی‌نهایت، دامنه ارتعاشات اجباری کاهش یافته و به صفر می‌رسد.

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow M \rightarrow 0$$

۶- برای $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ماکزیمم مقدار نسبت دامنه در r_m اتفاق می‌افتد که عبارت است از:

$$\omega_m = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad r_m = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

که این مقدار کمتر از فرکانس طبیعی بدون میرا (ω_n) و حتی کوچکتر از فرکانس نوسانات میرا شده (ω_d) است.

$$\omega_m = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

پس نامساوی زیر برقرار است:

$$\omega_m < \omega_d < \omega_n$$

۷- ماکزیمم مقدار X عبارت است از:

$$\left. \frac{X}{\delta_{st}} \right|_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

و مقدار X در $\omega = \omega_n$ (حالت تشدید) در حضور میرایی ($\zeta \neq 0$) عبارت است از:

$$\left. \frac{X}{\delta_{st}} \right|_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta}$$

بنابراین با اندازه‌گیری ماکزیمم دامنه و از طریق تجربی می‌توان نسبت استهلاک را به دست آورد.

۸- برای $0 < \zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ و در $r=0$

$$\left. \frac{d}{dr} \left(\frac{X}{\delta_{st}} \right) \right|_{r=0} = 0$$

یعنی شیب اولیه منحنی‌ها صفر است.

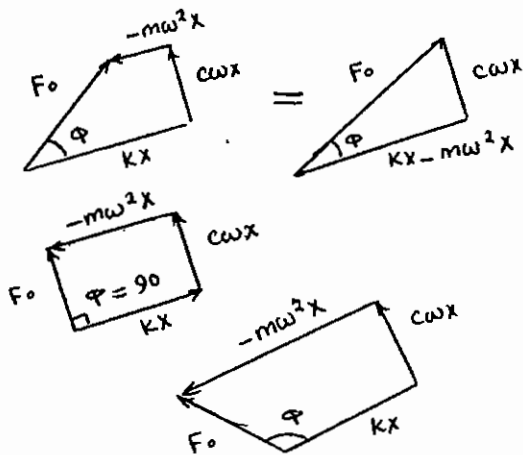
برای $\zeta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ منحنی‌ها دارای شیب اولیه صفر نخواهند بود.

مشخصات منحنی فاز

- برای سیستم بدون استهلاک ($\zeta = 0$) به ازاء $0 < r < 1$ زاویه فاز $\phi = 0$ و برای $r > 1$ زاویه فاز $\phi = 180$ و برای $r = 1$ زاویه فاز $\phi = 90^\circ$ می‌باشد. به عبارتی به ازاء $0 < r < 1$ تحریک و پاسخ هم فاز و برای $r > 1$ در فاز متقابل هستند.
- برای $\zeta > 0$ و $0 < r < 1$ زاویه فاز در محدوده $0 < \phi < 90^\circ$ خواهد بود. و برای $r = 1$ به ازاء جمیع مقادیر ζ زاویه فاز $\phi = 90^\circ$ و برای $r > 1$ زاویه فاز بین $90^\circ < \phi < 180$ خواهد بود.
- در صورتی که $\zeta > 0$ باشد اگر $r < 1$ باشد با افزایش میرایی ϕ افزایش می‌یابد و اگر $r > 1$ باشد با افزایش میرایی ϕ کاهش می‌یابد.

ب - دیاگرام فازوری

می‌دانیم سرعت و شتاب به ترتیب 90 و 180 درجه با تغییر مکان اختلاف فاز دارند. با توجه به این موضوع دیاگرام برداری ارتعاشات میرا شونده را می‌توان به صورت بردارهای عمود برهم به گونه‌ای در نظر گرفت که هر یک از انتهای دیگری آغاز شود. به چنین نمایشی دیاگرام فازوری گفته می‌شود.



۱) اگر $0 < r < 1$ باشد: در این حال، kX بر $m\omega^2 X$ و $c\omega X$ غلبه می‌کند، چون ω کوچک است.

۲) اگر $r = 1$ باشد در این حالت استهلاک غالب است. (چون kX با $-m\omega_n^2 X$ خنثی می‌شود).

۳) اگر $r > 1$ باشد $90 < \phi < 180$ و در این حالت اینرسی غالب است، چون ω زیاد است و ترم $-m\omega^2 X$ خیلی بزرگ می‌شود.

۳- ارتعاشات اجباری با تحریک جابه‌جایی پایه:

گاهی سیستم دینامیکی به وسیله حرکت محل تکیه‌گاه تحریک می‌شود. فرض کنید y تغییر مکان هارمونیک تکیه‌گاه یا پایه و x تغییر مکان جرم m باشد.

با رسم دیاگرام آزاد جرم m معادله حرکت را برای سیستم ارتعاشی می‌نویسیم.

$$m\ddot{x} = -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y})$$

$z = (x - y)$ را به نام جابه‌جایی نسبی تعریف می‌کنیم. با جایگذاری داریم:

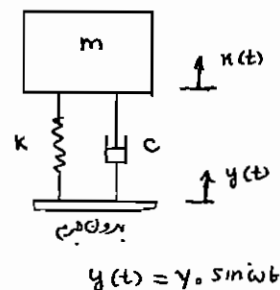
$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega t$$

برای به دست آوردن جواب فرض می‌کنیم:

$$z = Z \sin(\omega t - \phi)$$

با روشی مشابه آنچه در فصل‌های قبل انجام دادیم، مقادیر دامنه و فاز جابه‌جایی نسبی عبارت خواهد بود از:

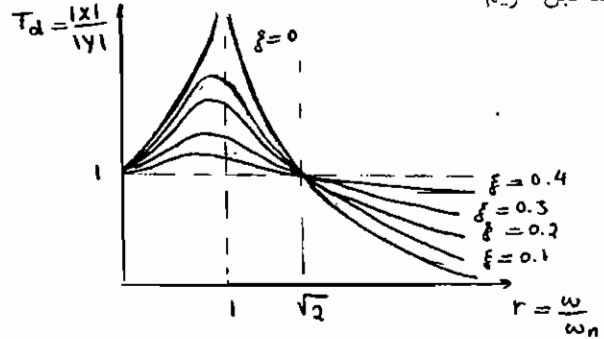
$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$	$\phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$
$Z = \frac{r^2 Y}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$	$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$



پس مانند قبل داریم:

$$\begin{cases} y = Y e^{i\omega t} \\ z = Z e^{i(\omega t - \phi)} \Rightarrow Z e^{-i\phi} = \frac{m\omega^2 Y}{k - m\omega^2 + i\omega c} \\ x = X e^{i(\omega t - \psi)} \end{cases}$$

$$x = (Z e^{-i\phi} + Y) e^{i\omega t} = \left(\frac{k + i\omega c}{k - m\omega^2 + i\omega c} \right) Y e^{i\omega t}$$



$$T_d = \left| \frac{X}{Y} \right| = \frac{\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{\sqrt{1 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right]^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right]^2}} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$\tan \psi = \frac{m c \omega^3}{k(k - m\omega^2) + (c\omega)^2} = \frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2}$$

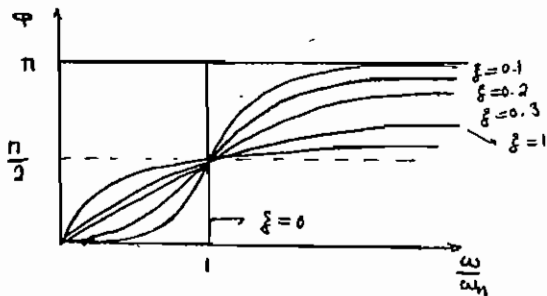
$T_d = \left| \frac{X}{Y} \right|$ ضریب انتقال یا نسبت دامنه جابه‌جایی جرم m به دامنه جابه‌جایی پایه است.

وقتی $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ باشد، با افزایش ζ ضریب انتقال $\left| \frac{X}{Y} \right|$ نیز افزایش می‌یابد.

در صورتی که $\frac{\omega}{\omega_n}$ خیلی زیاد شود $\left| \frac{X}{Y} \right|$ کمتر می‌شود، چون جرم فرصت نمی‌کند که با تغییر مکان پایه تغییر مکان یابد.

دقت کنید که در نسبت فرکانس $\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{2}$ تمام منحنی‌ها دارای

ضریب انتقال $\left| \frac{X}{Y} \right| = 1$ هستند.



مشخصات منحنی ضریب انتقال

۱- در $r = 0$ ضریب انتقال $T_d = 1$ می‌باشد.

۲- برای یک سیستم بدون استهلاک ($\zeta = 0$) در حالت تشدید ($r = 1$)، ضریب انتقال به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، یعنی $T_d \rightarrow \infty$ خواهد شد.

۳- برای مقادیر $r > \sqrt{2}$ مقدار T_d به ازاء جمیع مقادیر ζ کوچکتر از ۱ است.

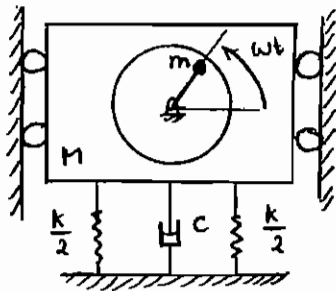
۴- برای تمامی مقادیر ζ در $r = \sqrt{2}$ ، ضریب انتقال $T_d = 1$ خواهد بود.

$$\forall \zeta \Rightarrow r = \sqrt{2} \therefore T_d = 1$$

۵- برای $r < \sqrt{2}$ نسبت‌های استهلاک کوچکتر منجر به مقادیر بزرگتر T_d و برای $r > \sqrt{2}$ مقادیر کوچکتر نسبت استهلاک منجر به مقادیر کوچکتر T_d می‌شود.

۶- ضریب انتقال T_d به ازاء $0 < \zeta < 1$ در نسبت فرکانس $r_m < 1$ ماکزیمم است. محل ماکزیمم منحنی ضریب انتقال عبارت است از:

$$r_m = \frac{1}{2\zeta} \left[\sqrt{1 + 8\zeta^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$



الف - عدم بالانس (نامیزانی) چرخشی:

سیستم جرم و فنر مقابل را در نظر بگیرید. جرم M در راستای قائم حرکت می کند، در حالی که نامیزانی m با سرعت ω دوران می کند.

x = جابه جایی جرم غیر چرخان $M-m$

e = شعاع دوران نامیزانی

$x + e \sin \omega t$ = جابه جایی عمودی جرم نامیزان m

معادله حرکت سیستم را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$(M-m)\ddot{x} + m \frac{d^2}{dt^2}(x + e \sin \omega t) = -kx - c\dot{x}$$

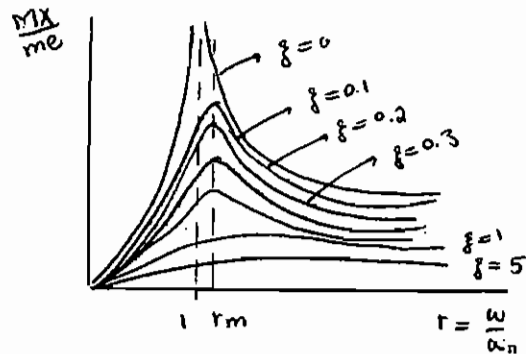
$$-kx - c\dot{x} = (M-m)\ddot{x} + m(\ddot{x} - e\omega^2 \sin \omega t)$$

بعد از ساده سازی داریم:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \sin \omega t$$

$$X = |x| = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad \tan \phi = \frac{c\omega}{k - M\omega^2}$$

$$X = \frac{me \frac{\omega^2}{k} \times \frac{M}{M}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$



$$\frac{MX}{me} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad \text{و} \quad \tan \phi = \frac{2\zeta r}{1-r^2}$$

$$\left. \frac{MX}{me} \right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$$

در حالت تشدید یا رزونانس دامنه پاسخ سیستم برابر است با:

$$X = \frac{me}{2\zeta}$$

با افزایش فرکانس تحریک و نهایتاً نسبت فرکانس، $\frac{MX}{me}$ به سمت مقدار ثابت یک میل می کند.

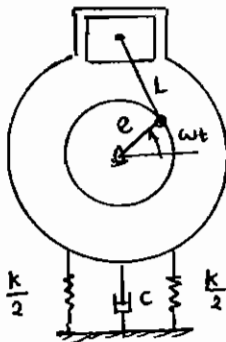
مثال : برای ایجاد کردن نوسانات هارمونیک برای سیستم جرم و فنر نشان داده شده در شکل قبل از نامیزانی خارج از مرکز استفاده شده است. با تغییر دادن سرعت چرخش در یک سرعت خاص مشاهده می شود که سیستم دارای دامنه تشدید 0.6cm می گردد. هنگامی که سرعت دوران را خیلی زیاد می کنیم دامنه به مقدار ثابت 0.08cm می رسد. نسبت استهلاک سیستم عبارت است از:

$\zeta = 0.05$ (۱) $\zeta = 0.07$ (۲) $\zeta = 1$ (۳) $\zeta = 12$ (۴)

برای حالت تشدید داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{MX}{me} = \frac{1}{2\zeta} \rightarrow X = \frac{me}{M} \frac{1}{2\zeta} = 0.6 \\ r \gg 1 \rightarrow \frac{MX}{me} = 1 \rightarrow \frac{me}{M} = 0.08 \end{aligned} \right\} \rightarrow \zeta = 0.066 = 0.07$$

گزینه ۲ صحیح می باشد.



مثال : یک کمپرسور هوا به وزن 450kg در دور کارکرد 1750 rpm کار می کند. قسمت های گردان کاملاً میزان می باشند. جرم قسمت های رفت و برگشتی 10kg و شعاع لنگ (e) 100 mm می باشد. اگر استهلاک حاصل از موادی که برای نصب کمپرسور روی فونداسیون به کار رفته ضریبی معادل $\zeta = 0.15$ برای استهلاک سیستم به وجود آورد، ثابت فنر معادل برای حالتی که تنها 20٪ از نیروی نامیزانی به فونداسیون انتقال یابد را به دست آورید. دامنه نیروی انتقال یافته به فونداسیون چه مقدار می باشد؟ حل: معادله شتاب را برای جرم خارج از مرکز می نویسیم.

$$a_r = e\omega^2 \left[-\sin \omega t + \left| \frac{e}{l} \right| \cos \omega t \right]$$

$$\omega = 2\pi \left(\frac{N}{60} \right) = 2\pi \frac{1750}{60} = 183.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

اگر $\frac{e}{l}$ را ندادند آنرا کوچک فرض می کنیم.

$$F = ma_r$$

$$F = me\omega^2 \sin \omega t$$

$$F = 10 \times 0.1 \left(1750 \times \frac{2\pi}{60} \right)^2 = 33.584 \text{ kN}$$

$$F_R = TR.F = 0.2 \times \left(1750 \times \frac{2\pi}{60} \right)^2 = 6.72 \text{ kN}$$

$$K = \omega_n^2.M \text{ و } TR = 0.2 = \frac{\sqrt{1+(2r\xi)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \Rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_n} = 2.72$$

$$\Rightarrow \omega_n = 97.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow K = M\omega_n^2 = 2042 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

بالانسینگ

برای اینکه سیستمی بالانس شود باید نیروها در تکیه‌گاه‌ها صفر شود یعنی:

۱- مرکز جرم روی محور دوران قرار بگیرد (بالانس استاتیکی).

۲- محور دوران محور اصلی باشد.

اگر هر دو شرط فوق برقرار باشند، بالانس دینامیکی برقرار است.

در عکس العمل تکیه‌گاه‌ها نیرو باشند، نامیزانی استاتیکی است.

اگر عکس العمل تکیه‌گاه‌ها کوپل باشند، نامیزانی استاتیکی و دینامیکی هر دو وجود دارند.

اگر سیستم نازک باشد، نامیزانی استاتیکی وجود دارد.

اگر سیستم طویل باشد، نامیزانی دینامیکی وجود دارد.

ب - قابلیت انتقال:

فرض کنید نیروی محرک $F_0 \sin \omega t$ به سیستم یک درجه آزادی زیر وارد می‌شود. نیروی منتقل شده توسط فنر و میراکننده به پایه،

F_t می‌باشد که به ترتیب زیر محاسبه می‌گردد:

$F(t)$ نیروی منتقل شده به کف است.

$$F_t = kx(t) + c\dot{x}(t)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \Rightarrow$$

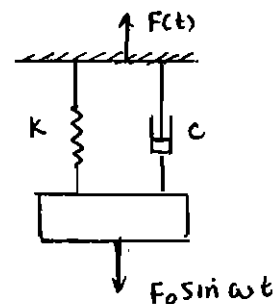
$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

$$F_t = kX \sin(\omega t + \phi) + c\omega X \cos(\omega t + \phi)$$

$$|F_t| = \sqrt{(kX)^2 + (c\omega X)^2}$$

$$F_t = X \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}$$

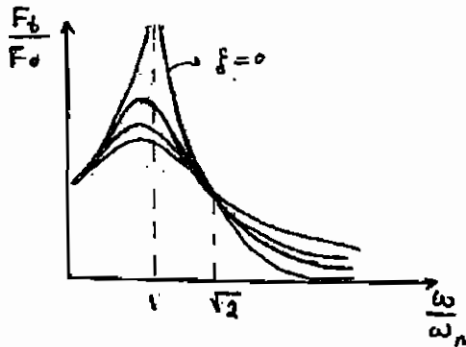
$$\frac{F_t}{F_0} = \frac{\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{m\omega}{k}\right)\right]^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}}$$



نسبت نیروی منتقل شده به پایه به نیروی تحریک را ضریب انتقال‌پذیری (TR) گویند.

$$TR = \frac{F_t}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

در بعضی موارد مایلیم که نیروی ارتعاشی زاید از سیستم به پایه منتقل نشود. برای این منظور از ایزولاسیون یا جداسازی ارتعاش استفاده می‌کنیم.



برای ایزولاسیون باید $TR < 1$ باشد، یعنی مطابق نمودار باید $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ باشد. ω که

در اختیار طراح نیست، پس باید ω_n یعنی $\frac{k}{m}$ خیلی کوچک باشد.

m که جرم سیستم است و قابل تغییر نیست، پس باید k فنر کوچک

باشد. این سیستم مشابه سیستم کمک فنر ماشین است که در آن

می‌خواهیم نیروهای وارد شده از زمین به ماشین منتقل نشود.

برای اینکه $\frac{F_1}{F_0}$ یا $\frac{X}{Y_0}$ خیلی کوچکتر از ۱ شود، باید $\frac{\omega}{\omega_n}$ خیلی بزرگ باشد و میرایی ζ نیز تا حد امکان کوچک باشد.

اگر میرایی قابل صرفه‌نظر باشد، می‌توان انتقال‌پذیری را از رابطه زیر محاسبه نمود.

$$TR = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1}$$

در رابطه فوق به روشنی مشخص است که برای این که $TR < 1$ شود باید $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ باشد.

$$\frac{Z}{Y_0} = \frac{MX}{me} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\frac{Z}{Y_0} = 1 \Rightarrow Z \equiv Y_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} \text{ خیلی بزرگ باشد} \Rightarrow \omega_n \text{ خیلی کوچک} \Rightarrow \frac{k}{m} \text{ خیلی کوچک} \Rightarrow \begin{matrix} K \text{ خیلی کوچک} \\ m \text{ خیلی بزرگ} \end{matrix}$$

یعنی برای اینکه دستگاهی بتواند تغییر مکان را اندازه بگیرد باید سختی کوچک یا جرم خیلی بزرگ داشته باشد.

مثال: یک ماشین به جرم 100kg بر روی فنرهایی با سختی کل $700 \frac{kN}{m}$ قرار گرفته که در آن اجزاء دورانی سبب ایجاد کردن

نیروی تحریک 350N با سرعت 3000rpm می‌شود. با فرض $\zeta = 0.2$ دامنه حرکت سیستم، ضریب انتقال (TR) و دامنه

نیروی انتقال یافته به پایه را محاسبه کنید.

حل:

$$\delta_{st} = \frac{100 \times 9.81}{700 \times 10^3} = 1.401 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.401 \text{ mm}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \omega = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi N}{60} = \frac{N}{60} = \frac{3000}{60} = 50 \text{ Hz}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9.81}{1.401 \times 10^{-3}}} = 13.32 \text{ Hz}$$

$$X = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{f}{f_n}\right]^2}}$$

$$X = \frac{350}{700 \times 10^3} = 3.79 \times 10^{-3} = 0.0379 \text{ mm}$$

$$\sqrt{\left[1 - \left(\frac{50}{13.32}\right)^2\right]^2 + \left[2 \times 0.2 \times \frac{50}{13.32}\right]^2}$$

$$\text{ب) } TR = \frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} = \frac{\sqrt{1 + \left[2\zeta \frac{f}{f_n}\right]^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{f}{f_n}\right]^2}} = 4 \Rightarrow TR = 0.137$$

$$\text{ج) } F_T = TR \cdot F_0 = 0.137 \times 350 = 47.89 \text{ N}$$

۴- انرژی تلف شده توسط میرایی در یک سیکل رفت و برگشت

اثر میرایی در سیستم‌های ارتعاشی، اتلاف انرژی است. یک سیستم ارتعاشی شامل جرم و فنر با میرایی لزجی را در نظر می‌گیریم. نیروی میرایی در این سیستم متناسب با سرعت است $F_d = c\dot{x}$ بنابراین:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$x(t) = X \sin(\omega t + \phi)$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}$$

$$W_d \text{ (انرژی تلف شده توسط میرایی)} = \int F_d dx = \int c\dot{x} dx = \int_0^T c\dot{x}^2 dt \quad (\text{T زمان یک رفت و برگشت})$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

با جایگذاری $x(t) = X \sin(\omega t + \phi)$ در انتگرال فوق، انرژی تلف شده توسط میرایی لزجی برابر است با:

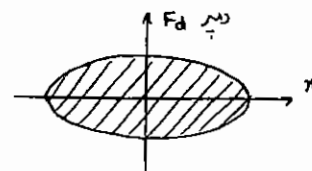
$$W_d = \pi c \omega^2 X$$

انرژی میرایی تلف شده را می‌توان به صورت زیر به‌طور ترسیمی نمایش داد:

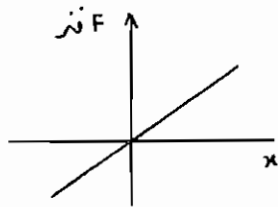
$$F_d = c\dot{x} = c\omega X \cos(\omega t + \phi)$$

$$\left(\frac{F_d}{c\omega X}\right)^2 + \left(\frac{x}{X}\right)^2 = 1$$

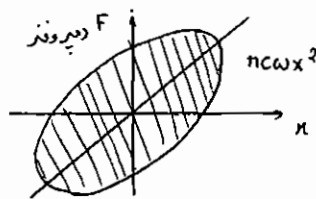
$$x = X \sin(\omega t + \phi)$$



این معادله معادله یک بیضی است که در آن محور x در راستای افق و نیروی F_d در امتداد عمودی است. مساحت این بیضی برابر نیروی تلف شده است.



در مورد فنر، کار در یک سیکل رفت و برگشت صفر است، چون سیستم کنسرواتیو است. مجموع کار فنر و کار دمپر بر حسب x را نیز می توان رسم کرد.



اگر میرایی سیستم از نوع دیگر غیر از میرایی لزجی بود:

$$W_d = \pi c_e \omega X^2 = \text{انرژی تلف شده}$$

که در آن c_e میرایی معادل سیستم است.

با فرض $x = X \sin \omega t$ انتگرال پایین را حساب می کنیم و آن را با رابطه بالا مساوی قرار می دهیم. بدین ترتیب میرایی لزجی معادل سیستم به دست می آید.

$$W_d = \oint F_d dx$$

۵- ارتعاشات اجباری با میرایی کولمب یا اصطکاک خشک:

برای یک سیستم یک درجه آزادی که دارای میرایی کولمب یا اصطکاک خشک است و تحت تاثیر نیروی هارمونیک $F_0 \sin \omega t$ قرار گرفته است معادله حرکت عبارت است از:

$$m \ddot{x} + kx \pm \mu N = F_0 \sin \omega t$$

علامت نیروی اصطکاک μN بستگی به جهت حرکت دارد. برای به دست آوردن پاسخ چنین سیستمی باید انرژی تلف شده در این سیستم را با انرژی تلف شده در سیستمی با استهلاك ویسکوز معادل قرار دهیم. نیروی اصطکاک μN را می توان در حالت کلی تر به صورت نیروی مقاوم F_d نشان داد.

$$W_d = \oint F_d dx = \int_0^{2\pi} c \dot{x}^2 dx$$

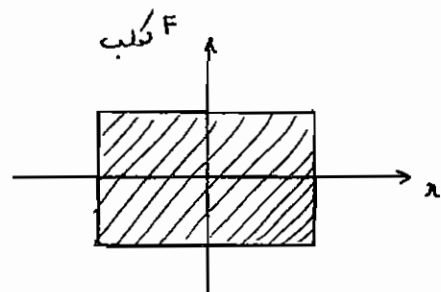
$$\text{انرژی تلف شده توسط میرایی کولمب} = \pi c_e \omega X^2$$

$$2 \int_{-X}^X F_d dx = 4 F_d X = \text{انرژی تلف شده توسط اصطکاک خشک در یک سیکل}$$

$$\pi c_e \omega X^2 = 4 F_d X$$

$$c_e = \frac{4 F_d}{\pi \omega X}$$

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \varphi)$$



پس پاسخ حالت یکنواخت به صورت زیر است:

که در آن دامنه نوسان از رابطه زیر به دست می آید:

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c_e \omega)^2}}$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \left(\frac{4F_d}{\pi X}\right)^2}}$$

$$X = \frac{F_0}{K} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{4F_d}{\pi F_0}\right)^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

شرط وجود جواب: $\left(\frac{4F_d}{\pi F_0}\right)^2 < 1$

و زاویه فاز φ از رابطه زیر محاسبه می گردد:

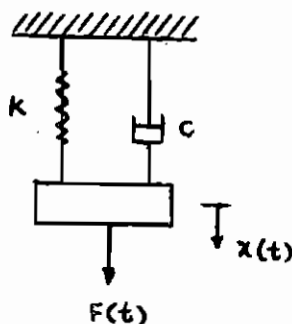
$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{c \omega}{k - m\omega^2} \right)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[\frac{\frac{4F_d}{\pi k X}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{\frac{4F_d}{\pi F_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{4F_d}{\pi F_0}\right)^2}} \right]$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[\frac{\pm \frac{4F_d}{\pi F_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{4F_d}{\pi F_0}\right)^2}} \right]$$

تست مهندسی مکانیک: سال ۸۳ - ۸۲

برای یک سیستم یک درجه آزادی با میراکننده که تحت اثر نیروی هارمونیک $F(t) = F_0 \cos \omega t$ می باشد، کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟



- (۱) همواره مقدار ماکزیمم دامنه در $\frac{\omega}{\omega_n} \leq 1$ اتفاق می افتد.
- (۲) همواره مقدار ماکزیمم دامنه در $\frac{\omega}{\omega_n} \geq 1$ اتفاق می افتد.
- (۳) همواره مقدار ماکزیمم دامنه در $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ اتفاق می افتد.
- (۴) همواره مقدار ماکزیمم دامنه به ضریب میرایی c وابسته بوده و در مورد محل وقوع آن نمی توان اظهار نظر کرد.

بیک یا ماکزیمم منحنی نسبت دامنه $\left(\frac{F_t}{F_o}\right)$ بر حسب $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$ قبل از نقطه تشدید $\frac{\omega}{\omega_n}=1$ می باشد.

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1-2\zeta^2}$$

محل ماکزیمم منحنی

بنابراین مقدار ماکزیمم دامنه در $\frac{\omega}{\omega_n} \leq 1$ اتفاق می افتد.

گزینه ۱ صحیح می باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۸۰ - ۷۹

چنانچه یک سیستم یک درجه آزادی دارای میرایی لزجی فوق بحرانی باشد، کدام گزینه غلط است؟

(۱) فرکانس تشدید ندارد.

(۲) نوسانات طبیعی ندارد.

(۳) دامنه آن به تدریج افزایش می یابد.

(۵) در اثر اعمال شرایط اولیه، در نهایت به وضعیت ابتدایی باز نمی گردد.

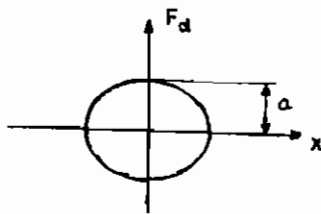
چنانچه سیستم یک درجه آزادی دارای میرایی لزجی فوق باشد، حرکت سیستم غیرارتعاشی است و نوسانات طبیعی ندارد. در این

حالت با گذشت زمان دامنه سیستم کاهش می یابد.

گزینه ۲ صحیح می باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۶۸ - ۶۷

در یک سیستم جرم و فنر با نیروی استهلاک از نوع لزج، منحنی تغییرات نیروی استهلاک بر حسب تغییر مکان، برای یک سیکل به صورت زیر نشان داده شده است. مقدار a با فرض این که ω فرکانس سیستم، X حداکثر دامنه و c ضریب میرایی باشد برابر است با:



(۱) $c\omega X$

(۲) $\frac{1}{2}X^2$

(۳) X

(۴) $c\omega^2 X$

سطح محصور شده توسط بیضی برابر با انرژی تلف شده در یک سیکل برای میرایی لزجی است. مقدار انرژی تلف شده توسط میرایی لزجی از رابطه زیر محاسبه می گردد.

$$W_d = \pi c \omega X^2$$

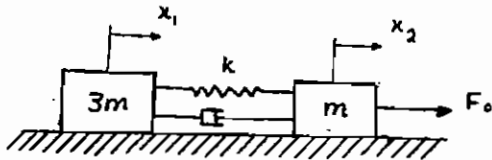
سطح محصور به منحنی یک بیضی که نصف قطر بزرگ آن X و نصف قطر کوچک آن a می باشد برابر با $\pi a X$ است. از تساوی دو مقدار به دست آمده برای انرژی تلف شده خواهیم داشت:

$$\pi c \omega X^2 = \pi a X \Rightarrow a = c \omega X$$

گزینه ۱ صحیح می باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۰ - ۶۹

در سیستم روبه‌رو در درازمدت کشیدگی فنر برابر است با:



(۱) $\frac{F_0}{4k}$

(۲) $\frac{F_0}{k}$

(۳) $\frac{F_0}{k}$

(۴) $\frac{3F_0}{4k}$

معادله حرکت دو جسم m , $3m$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$3m\ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(x_1 - x_2) = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = F_0$$

کشیدگی فنر از حرکت نسبی دو جرم ناشی می‌شود و بنابراین تابع تغییر مکان نسبی $z = x_2 - x_1$ است.

با کم کردن سه برابر معادله دوم از معادله اول خواهیم داشت.

$$3m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 4c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + 4k(x_1 - x_2) = -3F_0$$

$$3m\ddot{z} + 4c\dot{z} + 4kz = 3F_0$$

ارتعاشات گذرای دو جرم در اثر مرور زمان از بین می‌رود و بنابراین در نهایت سیستم به وضعیت پایدار رسیده و سرعت و شتاب دو

جسم در هر لحظه یکسان خواهد بود، یعنی:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 \Rightarrow \ddot{z} = 0$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 \Rightarrow \dot{z} = 0$$

با قرار دادن \dot{z} و \ddot{z} در معادله فوق خواهیم داشت:

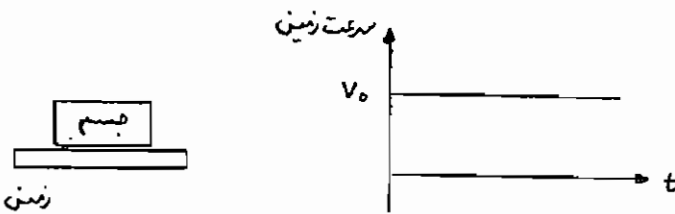
$$z = \frac{3F_0}{4k} \text{ کشیدگی فنر}$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک سال ۷۰ - ۶۹

جسمی بر روی زمین قرار دارد. فرض می‌شود که بین زمین و جسم استهلاک ویسکوز با ضریب استهلاک c باشد. در لحظه $t = 0$

زمین را با سرعت V_0 به حرکت در می‌آوریم. در درازمدت سرعت جسم برابر است با:



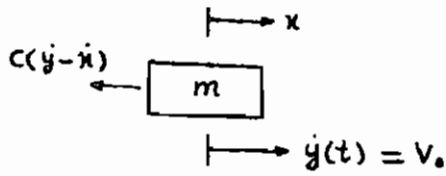
(۱) V_0

(۲) صفر

(۳) $\frac{1}{2} V_0$

(۴) cV_0

در نهایت سرعت جسم با سرعت زمین یعنی V_0 برابر خواهد شد. برای اثبات این موضوع می‌توان مسئله را مشابه ارتعاشات اجباری با تکیه‌گاه متحرک با حرکت ثابت و یکنواخت پایه در نظر گرفت. معادله حرکت عبارت‌است از:



$$m\ddot{x} = c(\dot{y} - \dot{x})$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} = c\dot{y} = cV_0$$

$$x(t) = x_p + x_h$$

$$x_h = V_0 t$$

برای به‌دست آوردن جواب خصوصی، معادله را از روش سنتی $x = e^{st}$ حل می‌کنیم.

$$(mS^2 + cS)e^{St} = 0 \Rightarrow mS^2 + cS = 0 \Rightarrow S = 0, S = -\frac{c}{m}$$

$$x(t) = V_0 t + A + Be^{-\frac{c}{m}t}$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A = -V_0, B = V_0 \frac{m}{c}$$

$$x(t) = \frac{V_0 m}{c} \left(e^{-\frac{c}{m}t} - 1 \right) + V_0 t$$

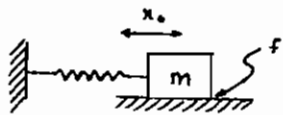
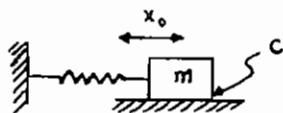
$$\dot{x}(t) = V_0 - V_0 e^{-\frac{c}{m}t}$$

$$t \rightarrow \infty: \dot{x}(t) = V_0$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۰ - ۶۹

در سیستم روبه‌رو که تغییر مکان اولیه x دارد در درازمدت اصطکاک خشک از اصطکاک ویسکوز



(۱) انرژی بیشتری تلف می‌کند.

(۲) انرژی کمتری تلف می‌کند.

(۳) به یک اندازه انرژی تلف می‌کند.

(۴) بستگی به ضریب استهلاک ویسکوز c و ضریب اصطکاک

خشک f دارد.

محل توقف جرم با اصطکاک ویسکوز در نقطه تعادل یا نقطه‌ای است که نیروی فشرده‌گی یا کشیدگی فنر صفر می‌شود، در حالی‌که

جرم با اصطکاک خشک در مکانی غیر از نقطه تعادل متوقف می‌شود. (x_f)

اتلاف انرژی سیستم $\Delta U = U_1 - U_2$ در دو حالت اولیه و نهایی برابر است با:

$$\Delta U = \frac{1}{2} k x_0^2 - 0 = \frac{1}{2} k x_0^2$$

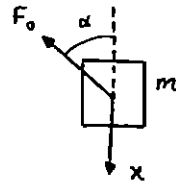
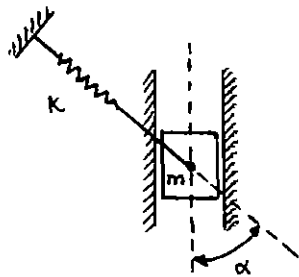
$$\Delta U = \frac{1}{2} k x_0^2 - \frac{1}{2} k x_f^2 = \frac{1}{2} k (x_0^2 - x_f^2)$$

بنابراین انرژی تلف شده در سیستم با اصطکاک خشک، کمتر از سیستم با اصطکاک ویسکوز است.

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۰ - ۶۹

جسمی به جرم m در یک شیار صاف می‌تواند حرکت کند و به فنری به ضریب سختی k متصل است. مطابق شکل فرکانس طبیعی ارتعاشات سیستم عبارت است از:



$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cos^2 \alpha \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \alpha \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cos \alpha \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \sin^2 \alpha \quad (4)$$

$$F_0 = kx \cos \alpha$$

$$m\ddot{x} + F_0 \cos \alpha = 0$$

$$m\ddot{x} + (kx \cos \alpha) \cos \alpha = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + (k \cos^2 \alpha)x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cos^2 \alpha x = 0$$

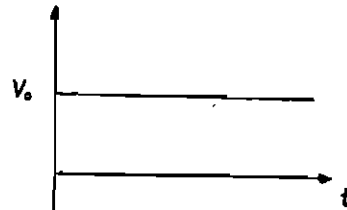
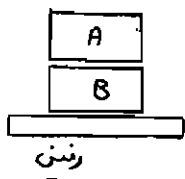
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \alpha$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۰ - ۶۹

دو جسم A , B مطابق شکل روی زمین قرار دارند. فرض می‌شود که بین دو جسم و بین جسم B و زمین استهلاک ویسکوز با ضریب استهلاک c باشد. در لحظه $t=0$ زمین را با سرعت V_0 به حرکت در می‌آوریم. در این صورت دو جسم به قسمی حرکت می‌کنند که:

سرعت زمین



(۱) جسم A همواره جلوتر از جسم B است.

(۲) جسم B همواره جلوتر از جسم A است.

(۳) دو جسم با سرعت V_0 شروع به حرکت می‌کنند.

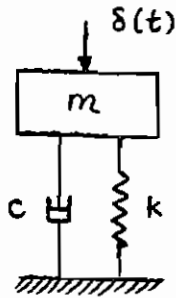
(۴) سرعت دو جسم مساوی و برابر با صفر است.

در حالت گذرا، جسم B که با زمین در تماس مستقیم است، از جسم A جلو می‌افتد. اما با گذشت زمان نهایتاً سیستم به حالت پایدار می‌رسد که در این حالت سرعت هر دو بلوک مساوی سرعت زمین خواهد شد. بنابراین جسم B که در مرحله گذرا از جسم A جلو افتاده همواره جلوتر از جسم A حرکت می‌کند.

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۸۴ - ۸۳

یک سیستم با مشخصات $m=1\text{kg}$ ، $c=6\frac{\text{NS}}{\text{m}}$ ، $k=2\frac{\text{N}}{\text{m}}$ را در نظر می‌گیریم که تحت ضربه $\delta(t)$ قرار گرفته است. پاسخ این سیستم چگونه خواهد بود؟



- (۱) غیرنوسانی است.
- (۲) نوسانی با دامنه متغیر است.
- (۳) نوسانی با دامنه ثابت است.
- (۴) بستگی به جهت اعمال ضربه دارد.

ابتدا ضریب استهلاک بحرانی سیستم را محاسبه می‌کنیم.

$$c_c = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{2 \times 1} = 2\sqrt{2}$$

چون استهلاک این سیستم یعنی c از ضریب استهلاک بحرانی سیستم بیشتر است ($c_c < c$)، نسبت میرایی بزرگتر از یک است

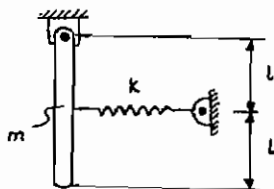
و سیستم فوق میرا است و پاسخ سیستم فوق میرا غیرنوسانی است.

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

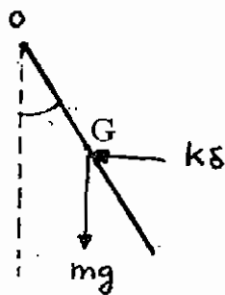
تست مهندسی مکانیک: سال ۸۴ - ۸۳

فرکانس طبیعی تیر صلب با جرم گسترده m در حالی که تیر به صورت قائم آویزان است و شبیه پاندول نوسان می‌نماید و ممان

اینرسی آن حول مرکز جرم $\frac{4ml^2}{12}$ می‌باشد، کدام است؟



- (۱) $\sqrt{\frac{k}{m}}$
- (۲) $\sqrt{\frac{g}{2l}}$
- (۳) $\sqrt{\frac{g+k}{2l+m}}$
- (۴) $\sqrt{\frac{3}{4} \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right)}$



$$\delta = l \sin \theta \cong l \theta$$

$$\sum M_o = I_o \ddot{\theta}$$

$$I_o \ddot{\theta} = -k \delta l - mgl \sin \theta$$

$$I_o = I_G + ml^2 = \frac{4ml^2}{12} + ml^2 = \frac{4ml^2}{3}$$

$$\frac{4ml^2}{3} \ddot{\theta} = -kl^2 \theta - mgl \theta$$

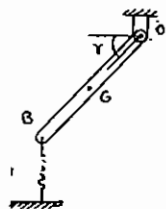
$$\ddot{\theta} + \frac{kl + mg}{4ml} \theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3}{4} \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l} \right)}$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۸۴ - ۸۳

میله همگن OB در مجموعه ارتعاشی نشان داده شده در حالت استاتیکی با افق زاویه γ را می‌سازد. طول و جرم میله به ترتیب m, l است و مرکز جرم میله در $\frac{l}{2}$ واقع است. فرکانس طبیعی این مجموعه برای زاویه کوچک نوسان حول حالت استاتیکی آن کدام است؟



$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m} \cos \gamma} \quad (۲)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad (۱)$$

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l}\right) \cos \gamma} \quad (۴)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{l}} \quad (۳)$$

چون کوپل ناشی از نیروی وزن میله زمانی که ارتعاشات حول حالت استاتیکی است، همواره در یک جهت است، پس نقشی در معادلات حرکت سیستم ندارد. θ زاویه انحراف از حالت تعادل استاتیکی است.

$$\Sigma M_o = J_o \ddot{\theta}$$

$$-k \delta(l) = \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta}$$

$$-k(l\theta) = \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{1}{3} m \ddot{\theta} + k \theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۸۰ - ۷۹

در حالت تشدید، وقتی که مستهلک‌کننده به صورت اصطکاک خشک (کولمب) عمل نماید دامنه ارتعاش

(۲) محدود می‌باشد.

(۱) به سمت صفر میل می‌کند.

(۴) به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

(۳) بستگی به ضریب اصطکاک دارد.

ضریب میرایی لزجی معادل سیستم با میرایی کولمب، با استفاده از برابری انرژی تلف شده توسط میرایی لزجی $(\pi c_{eq} \omega X^2)$ با

انرژی تلف شده توسط میرایی کولمب $(4F_d X)$ به دست می‌آید.

$$\pi c_{eq} \omega X^2 = 4F_d X \Rightarrow c_{eq} = \frac{4F_d}{\pi \omega X}$$

از طرفی، دامنه ارتعاش برای سیستم با میرایی لزجی برابر است با:

$$X = \frac{F_o}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c_{eq} \omega)^2}}$$

با جایگزینی c_{eq} در رابطه فوق نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{kX}{F_o} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{4F_d}{\pi F_o}\right)^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

در حالت تشدید $\omega = \omega_n$ است و دامنه به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

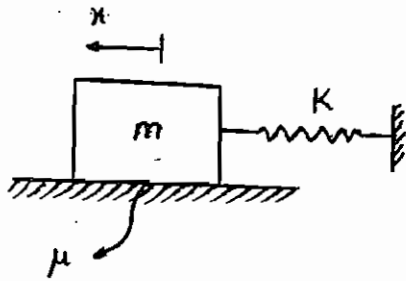
تست مهندسی مکانیک: سال ۷۸ - ۷۷

یک تیر آهنی و یک تیر چوبی با اندازه‌ها و شرایط تکیه‌گاهی یکسان مفروض هستند، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (۱) شکل مشخصه (مودها) و فرکانس‌های طبیعی آن‌ها یکسان است.
 - (۲) شکل مشخصه (مودها) و فرکانس‌های طبیعی آن‌ها متفاوت است.
 - (۳) شکل‌های مشخصه (مودها) این دو تیر مشابه هم هستند، ولی فرکانس‌های طبیعی آن‌ها یکسان نیستند.
 - (۴) شکل‌های مشخصه (مودها) این دو تیر متفاوت، ولی فرکانس‌های طبیعی آن‌ها یکسان است.
- شکل مودهای ارتعاشی فقط به ابعاد هندسی و شرایط تکیه‌گاهی وابسته است. پس در مورد این دو تیر که اندازه و شرایط تکیه‌گاهی یکسان دارند با هم مشابه است، ولی فرکانس طبیعی علاوه بر ابعاد و شرایط تکیه‌گاهی به خواص ماده تشکیل دهنده تیر نیز بستگی دارد. بنابراین فرکانس‌های طبیعی تیر آهنی و چوبی با هم متفاوت است.
- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۸ - ۷۷

دامنه ارتعاش آزاد با وجود اصطکاک خشک چگونه می‌شود؟



- (۱) دامنه به صورت نمایی کم می‌شود و به سمت صفر میل می‌کند.
- (۲) دامنه به صورت نمایی خطی کم می‌شود و به سمت صفر میل می‌کند.
- (۳) دامنه به صورت خطی کم می‌شود ولی به سمت صفر میل نمی‌کند.
- (۴) دامنه به صورت نمایی کم می‌شود ولی به سمت صفر میل نمی‌کند.

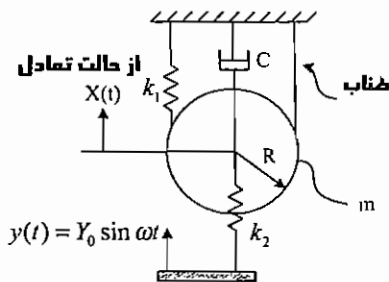
دامنه ارتعاشات سیستم جرم و فنر با اصطکاک خشک (میرایی کولمب) با گذشت زمان به طور خطی کاهش می‌یابد و ارتعاشات آن

حول نقطه $\frac{F_d}{K}$ صورت می‌گیرد. یعنی وقتی که t به سمت بی‌نهایت میل می‌کند دامنه به $\frac{F_d}{K}$ نزدیک می‌شود.

گزینه ۳ صحیح است.

سؤالات ۱۳۸۶

۱- با توجه به شکل نشان داده شده استوانه‌ای به جرم m و به شعاع R نگهداری شده است. پایه فنر k_2 دارای حرکت هارمونیک $y(t) = Y_0 \sin \omega t$ می‌باشد. معادله حرکت این سیستم کدام است؟ x تغییر مکان مرکز جرم دیسک است.



$$\frac{3}{2} m\ddot{x} + (4k_1 + k_2)x + c\dot{x} = k_2 Y_0 \sin \omega t \quad (۱)$$

$$\frac{3}{2} m\ddot{x} + (2k_1 + k_2)x + c\dot{x} = k_2 Y_0 \sin \omega t \quad (۲)$$

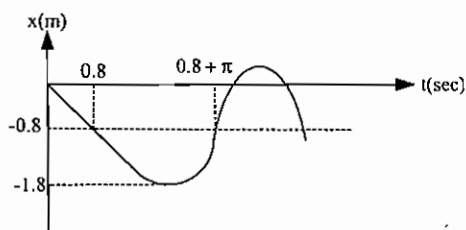
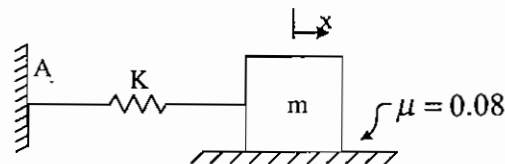
$$m\ddot{x} + (4k_1 + k_2)x + c\dot{x} = k_2 Y_0 \sin \omega t \quad (۳)$$

$$m\ddot{x} + (2k_1 + k_2)x + c\dot{x} = k_2 Y_0 \sin \omega t \quad (۴)$$

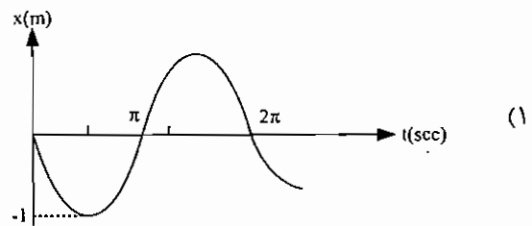
۲- جسمی به جرم $m = 1 \text{ kg}$ بر سطحی با ضریب اصطکاک $\mu = 0.08$ مطابق شکل به فنری به سختی $k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ وصل است. اگر

سطح را با سرعت $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به طرف چپ حرکت دهیم و این سرعت ثابت باشد، چنانچه نقطه A محل اتصال فنر به دیوار همواره

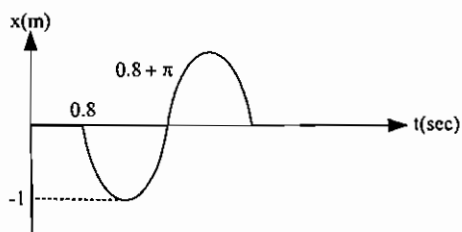
ساکن باشد و $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ فرض شود، منحنی x بر حسب t کدام است؟



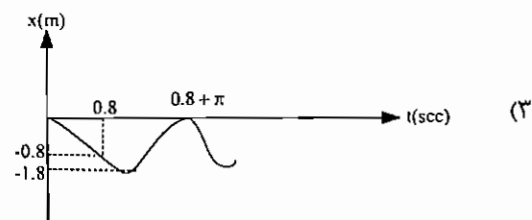
(۲)



(۱)

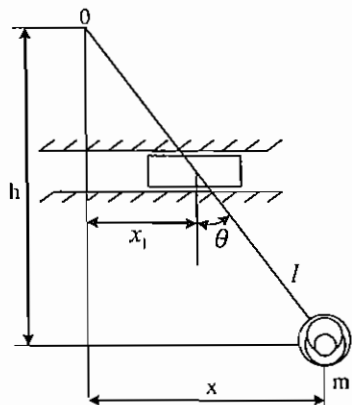


(۴)



(۳)

۳- نقطه آویز آونگ ساده با حرکت هماهنگ $x_1 = X_1 \sin \omega t$ در خط افق نوسان می‌کند. اگر حرکت پاندول در زوایا و تغییر مکان‌های کوچک نوسان کند. فاصله h که در آن گره تشکیل می‌شود، کدام است؟



$$h = l \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 \quad (1)$$

$$h = l \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \quad (2)$$

$$h = l \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \quad (3)$$

$$h = l \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right) \quad (4)$$

سؤالات ۱۳۸۷

۱- لاستیکی زیر موتوری جهت تقلیل دامنه ارتعاش قرار داده شده است. موتور به اندازه ۱۰ سانتی‌متر در لاستیک فرو می‌رود. سرعت دورانی (برحسب دور در دقیقه) که در آن موتور حداکثر دامنه در جهت قائم خواهد داشت چقدر است؟ فرض کنید

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

$$\frac{10}{\pi} \text{ (۴)}$$

$$10 \text{ (۳)}$$

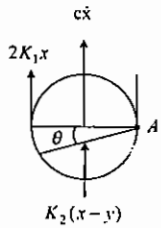
$$\frac{100}{\pi} \text{ (۲)}$$

$$\frac{300}{\pi} \text{ (۱)}$$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۶

۱- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

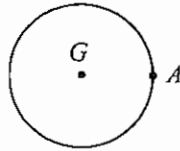
چون نقطه A حرکت غلتش بدون لغزش انجام می‌دهد مرکز آنی دوران است پس:



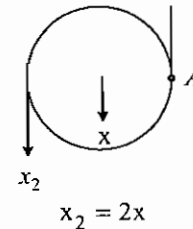
$$\Rightarrow x = R\theta \Rightarrow \sum M_A = I_A \ddot{\theta} \Rightarrow \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + CR\dot{\theta}R + 2k_1R\theta \times (2R) + k_2(R\theta - y)R = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + (4k_1 + k_2)x = k_2y = k_2Y_0 \sin \omega t$$

توجه:



$$I_A = I_G + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$



۲- گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با شروع حرکت سطح به سمت چپ و ایجاد حرکت نسبی جسم و سطح، نیروی اصطکاک برابر

$F_S = \mu_S N = \mu_S mg = 0.08 \times 10 = 0.8 \text{ N}$ به جرم در جهت خلاف حرکت جسم m نسبت به زمین (یعنی به سمت چپ) وارد

می‌شود که این نیرو به صورت خطی باعث فشرده شدن فنر تا نقطه تعادل یعنی $x = \frac{f}{k} = \frac{0.8}{1} = 0.8 \text{ m}$ به سمت چپ یعنی منفی

می‌شود. بنابراین گزینه ۲ و ۳ می‌توانند درست باشند و از نقطه تعادل به بعد به دلیل داشتن انرژی جنبشی جرم m و تبدیل آن به

انرژی پتانسیل فنر و تکرار این عمل باعث حرکت نوسانی جرم با دامنه 1 cm می‌شود و از آنجا که می‌دانیم اصطکاک خشک تغییری در

فرکانس طبیعی سیستم ایجاد نمی‌کند پس برای این سیستم مانند یک سیستم جرم و فنر ساده داریم:

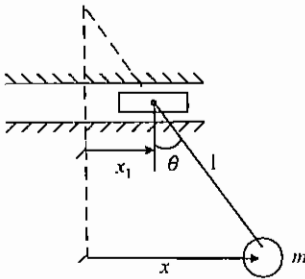
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi(s) \text{ و } \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

نکته: دامنه 1 m حرکت نوسانی به دلیل داشتن سرعت $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در نقطه تعادل جرم و تبدیل آن به انرژی پتانسیل فنر در

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow x = 1 \text{ m} \right)$$

به دست می‌آید که البته در این محاسبات از اصطکاک صرف‌نظر شده است.

۳- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



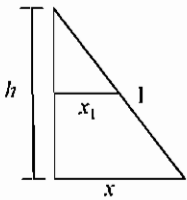
$$x = x_1 + l\theta \Rightarrow \theta = \frac{x - x_1}{l}$$

$$\text{معادله حرکت: } m\ddot{x} = -mg\theta = -\frac{mg}{l}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{l}x = \frac{g}{l}x_1 \begin{cases} x_1 = X_1 \sin \omega t \\ x = X \sin \omega t \end{cases}$$

$$\Rightarrow -X\omega^2 \sin \omega t + \frac{g}{l}X \sin \omega t = \frac{g}{l}X_1 \sin \omega t \Rightarrow X = \frac{\frac{g}{l}X_1}{\frac{g}{l} - \omega^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \frac{g}{l} = \omega_n^2 \Rightarrow X = \frac{X_1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \Rightarrow \left|\frac{X_1}{X}\right| = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$



$$\text{قضیه تالس} \Rightarrow \frac{h}{|X|} = \frac{h-1}{|X_1|} \Rightarrow h \left|\frac{X_1}{X}\right| = h-1$$

$$\Rightarrow h \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] = h-1 \Rightarrow h = 1 \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2$$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۲

۱- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

نکته .

۱- حداکثر دامنه در سرعتی اتفاق می‌افتد که فرکانس طبیعی لاستیک با سرعت محور معادل می‌شود.

۲- فرکانس طبیعی برای سیستم برابر است با $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta S}}$ که در آن ΔS ، تغییر مکان استاتیکی است. (چون $mg = k\Delta S$)

پس خواهیم داشت:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta S}} = \sqrt{\frac{10 \frac{m}{s^2}}{0.1 \text{ m}}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_{\max} = \omega_n = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 10 \times \frac{1}{2\pi} \times 60 = \frac{300}{\pi} \text{ rpm}$$

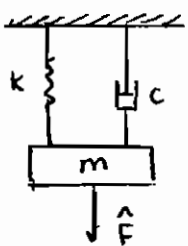
فصل چهارم

ارتعاشات گذرا

ارتعاشات گذرا هنگامی صورت می‌گیرد که یک سیستم تحت تاثیر یک محرک خارجی غیرهارمونیک ناگهانی $F(t)$ قرار بگیرد. پاسخ سیستم به این نیروی محرک غیرهارمونیک، پاسخی گذرا است که در فرکانس‌های طبیعی سیستم روی می‌دهد. سه نیروی غیرهارمونیک موردنظر ما نیروی ضربه‌ای، نیروی پله‌ای و نیروی شیب هستند.

۱ - پاسخ به نیروی تحریک ضربه‌ای

نیروهای ضربه‌ای نیروهایی با دامنه بزرگ هستند که در بازه زمانی کوتاهی اثر می‌کنند و انتگرال زمانی این نیروها یعنی سطح محصور شده در زیر منحنی نیرو - زمان ضربه نامیده می‌شود.



$$\int F dt = \int \hat{F} \delta(t) dt = \hat{F}$$

ضربه واحد، ضربه‌ای است که مقدار آن یک است: $\hat{F}=1$

نیروی ضربه‌ای باعث تغییر سرعت جسم می‌شود بدون این‌که تغییر مکان قابل ملاحظه‌ای در جسم به وجود بیاید، یعنی ضربه \hat{F} به

جرم m سرعت اولیه $V_0 = \frac{\hat{F}}{m}$ می‌دهد.

در مورد یک سیستم غیرمیرا که تحت تاثیر ضربه \hat{F} قرار گرفته است، پاسخ سیستم عبارت است از:

$$x(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\omega_n} \sin \omega_n t + x(0) \cos \omega_n t = \frac{V_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x(0) \cos \omega_n t$$

در صورتی که سیستم در ابتدا ساکن باشد $x(0)=0$ و پاسخ سیستم عبارت است از:

$$x(t) = \frac{\hat{F}}{m \omega_n} \sin \omega_n t$$

$$x = \hat{F} h(t)$$

که در آن $h(t)$ پاسخ سیستم به ضربه واحد است. در مورد سیستم غیرمیرا $h(t)$ عبارت است از:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n t$$

اگر سیستم دارای میرایی باشد، پاسخ سیستم به نیروی ضربه عبارت‌اند از:

$$x(t) = \frac{\hat{F}}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

که در آن $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ فرکانس نوسانات میرا شده است.

در مورد سیستم دارای میرایی عبارتند از: $h(t), x(t)$

$$x(t) = \hat{F}h(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

۲ - پاسخ به نیروی تحریک پله‌ای:

می‌خواهیم عکس‌العمل سیستم جرم، فنر و دمپر را به نیروی تحریک پله‌ای با مقدار F_0 تعیین کنیم.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 u(t)$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}$$

حل معادله حرکت سیستم مجموع جواب‌های همگن و خصوصی معادله فوق خواهد بود که با فرض شرایط اولیه صفر برابر است با:

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t - \psi) \right], \quad \tan \psi = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

در حالت بدون میرا $c=0$ است و معادله حرکت سیستم و پاسخ سیستم عبارت خواهند بود از:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 u(t)$$

$$x(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t + \frac{F_0}{k}$$

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t) = F_0 g(t)$$

$$g(t) = \frac{1}{k} (1 - \cos \omega_n t)$$

که در آن $g(t)$ پاسخ سیستم به پله واحد است.

نکته: دقت داشته باشید که تابع ضربه واحد مشتق تابع پله واحد است و متناظر با آن پاسخ سیستم به تابع ضربه، مشتق پاسخ سیستم به تابع پله است.

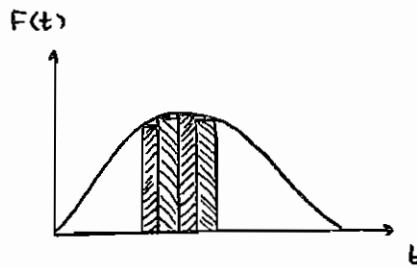
$$\delta(t-\tau) = \frac{du(t-\tau)}{dt}$$

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

پاسخ در حوزه زمانی

انتگرال کانولوشن \Leftarrow برای پاسخ به ضربه

انتگرال دو هامل \Leftarrow برای پاسخ به پله



$$\Delta x = \hat{F}h(t-t_0)$$

$$= F(\tau)\Delta t h(t-\tau)$$

$$x(t) = \int_0^{t_0} F(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

انتگرال فوق انتگرال کانولوشن با شرایط اولیه صفر نام دارد.

۳- پاسخ به نیروی تابع شیب

$$F(t) = c \cdot t \cdot u(t)$$

$$\text{راه اول } x(t) = x_h + x_p \quad t=0: \begin{cases} x=0 \\ \dot{x}=0 \end{cases}$$

$$\text{راه دوم } x(t) = \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t c\tau u(\tau) \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n(t-\tau)d\tau$$

$$x(t) = \frac{c}{m\omega_n} \int_0^t \tau \sin \omega_n(t-\tau)d\tau$$

باید انتگرال جز به جز بگیریم.

انتگرال	مشتق
$\sin \omega_n(t-\tau)$	τ
$\frac{1}{\omega_n} \cos \omega_n(t-\tau)$	1
$\frac{-1}{\omega_n^2} \sin \omega_n(t-\tau)$	0

$$x(t) = \left[\frac{\tau}{\omega_n} \cos \omega_n(t-\tau) + \frac{1}{\omega_n^2} \sin \omega_n(t-\tau) \right] \Big|_0^t$$

$$x(t) = \frac{c}{k} \left(1 - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \right) u(t) = cr(t)$$

$$\text{واحد } r(t) = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \right) u(t)$$

۴- تحریک پایه:

اغلب در سیستم‌های دینامیکی، تکیه‌گاه تحت تاثیر یک حرکت ناگهانی که به وسیله تغییر مکان، سرعت و یا شتاب آن مشخص می‌شود قرار می‌گیرد. در این صورت معادله حرکت را بر حسب تغییر مکان نسبی $z = x - y$ به صورت زیر بیان می‌کنند:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

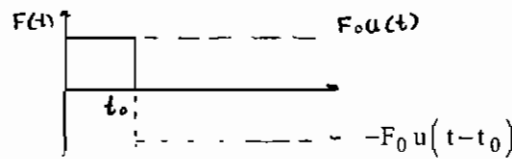
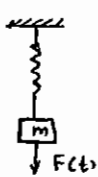
در این حالت پاسخ سیستمی با تحریک پایه مشابه نتایج سیستمی است که توسط نیرو تحریک شده با این تفاوت که در آن عبارت $\frac{F_0}{m}$ با عبارت \ddot{y} جایگزین شده است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t-t_0) dt = \phi(t_0)$$

$$۱) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta'(t-t_0) dt = -\phi'(t_0)$$

$$۲) \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t) \delta(t-t_0) dt = \phi'(t_0)$$

قضیه:



مثال : پاسخ به ورودی $F(t)$ در شکل زیر را بیابید. ابتدا تابع ورودی را می‌نویسیم:

$$F(t) = F_0 u(t) - F_0 u(t-t_0)$$

$$x(t) = F_0 g(t) u(t) - F_0 g(t-t_0) u(t)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t) u(t) - \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n (t-t_0)] u(t-t_0)$$

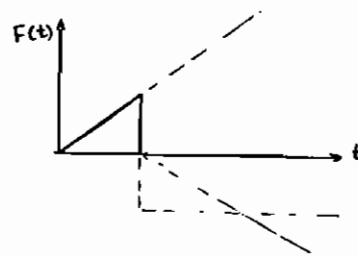
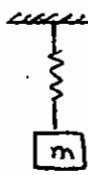
پاسخ سیستم در زمانهای مختلف عبارت‌است از:

$$t < 0 \quad x(t) = 0$$

$$0 < t < t_0 \quad x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t)$$

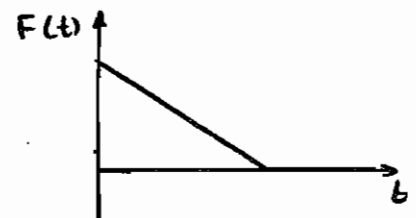
$$t > t_0 \quad x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t) - \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n (t-t_0)]$$

مثال : پاسخ به ورودی $F(t)$ در شکل‌های زیر را بیابید.



$$F(t) = \frac{F_0}{k} t u(t) - \frac{F_0}{t_0} (t-t_0) u(t-t_0) - F_0 u(t-t_0)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{t_0} \frac{1}{k} \left[t - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \right] u(t) - \frac{F_0}{t_0} \frac{1}{k} \left[(t-t_0) - \frac{\sin \omega_n (t-t_0)}{\omega_n} \right] u(t-t_0) - \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t) u(t-t_0)$$

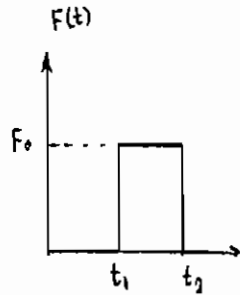
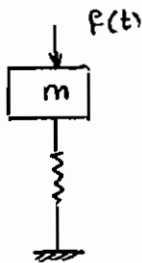


$$F(t) = -\frac{F_0}{t_0} (t-t_0) [u(t) - u(t-t_0)]$$

$$= -\frac{F_0}{t_0} (t-t_0) u(t) + \frac{F_0}{t_0} (t-t_0) u(t-t_0)$$

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۶-۷۷

طبق شکل زیر اگر عکس العمل یک سیستم غیر میرای جرم و فنر در برابر تحریک پله‌ای برابر $\frac{F_0}{K}[1 - \cos\omega_n t]$ باشد، $x(t)$ عکس العمل تحریک نشان داده شده برای این سیستم به ازاء $t > t_2$ کدام است؟



$$\frac{F_0}{K} [\sin\omega_n(t-t_1) - \cos\omega_n(t-t_2)] \quad -1$$

$$\frac{F_0}{K} [\sin\omega_n(t-t_2) - \cos\omega_n(t-t_2)] \quad -2$$

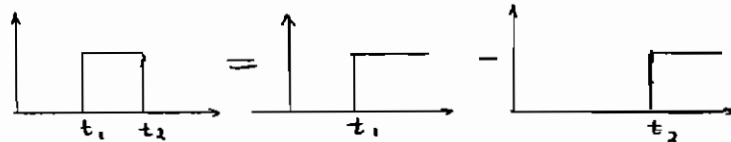
$$\frac{F_0}{K} [1 - \cos\omega_n(t-t_2) + \cos\omega_n(t-t_2)] \quad -3$$

$$\frac{F_0}{K} [\cos\omega_n(t-t_2) - \cos\omega_n(t-t_1)] \quad -4$$

مسئله را می‌توان با استفاده از اصل برهم نهش (سوپرپوزیشن) حل نمود.

$$x_1(t) = \frac{F_0}{K} [1 - \cos\omega_n(t-t_1)]$$

$$x_2(t) = \frac{F_0}{K} [1 - \cos\omega_n(t-t_2)]$$



$$t > t_2 : x(t) = x_1(t) - x_2(t) = \frac{F_0}{K} [\cos\omega_n(t-t_2) - \cos\omega_n(t-t_1)]$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

فصل پنجم

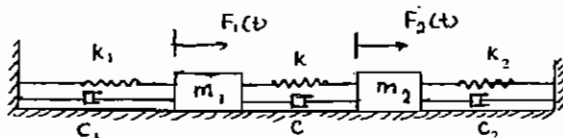
سیستم‌های دو درجه آزادی

در حالت کلی، حرکت یک سیستم n درجه آزادی توسط n معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم بیان می‌شود. تعداد فرکانس‌های طبیعی این سیستم برابر با تعداد درجات آزادی آن است. هر فرکانس طبیعی متناظر با یک مود ارتعاشی است و حرکت سیستم ترکیبی از حرکات مربوط به این مودهای ارتعاشی خواهد بود.

در این بخش نیز همانند قسمت قبل ارتعاشات را در دو حالت مورد بررسی قرار می‌دهیم.

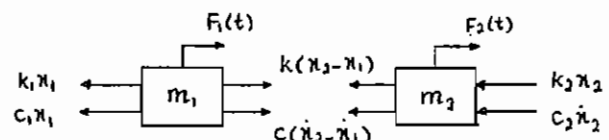
۱- ارتعاشات آزاد

۲- ارتعاشات اجباری



سیستم نشان داده شده در شکل یک سیستم دو درجه آزادی است. باید دیاگرام آزاد هر یک از دو جسم m_2, m_1 را رسم کنیم و معادلات حرکت دو جسم را بنویسیم.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F_1 - k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 - k(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = F_2 + k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_2 \end{cases}$$



سیستم دو درجه آزادی دارای دو معادله حرکت و دو فرکانس طبیعی است.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c + c_1) \dot{x}_1 - c \dot{x}_2 + (k_1 + k) x_1 - k x_2 = F_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - c \dot{x}_1 + (c + c_2) \dot{x}_2 + (k_2 + k) x_2 - k x_1 = F_2(t) \end{cases}$$

بهتر است که این معادلات را به صورت ماتریسی بنویسیم:

$$[M][\ddot{x}] + [C][\dot{x}] + [K][x] = [F(t)]$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c+c_1 & -c \\ -c & c+c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k & -k \\ -k & k_2+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

دقت کنید که هر سه ماتریس جرم $[M]$ ، میرایی $[C]$ و سختی $[K]$ متقارن هستند.

$$[M]=[M]^T, [C]=[C]^T, [K]=[K]^T$$

پس فرم کلی معادله دیفرانسیل سیستم دو درجه آزادی به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{bmatrix}$$

در صورتی که سیستم بدون استهلاک در نظر گرفته شود ماتریس میرایی $[C]$ صفر است.

اگر در ماتریس جرم عناصر غیرقطری غیرصفر باشند $(m_{12} \neq 0, m_{21} \neq 0)$ ، سیستم دارای کوپلینگ دینامیکی است.

و اگر در ماتریس سختی عناصر غیرقطری غیرصفر باشند $(k_{12} \neq 0, k_{21} \neq 0)$ ، سیستم دارای کوپلینگ استاتیکی است.

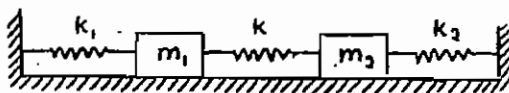
و اگر در ماتریس میرایی عناصر غیرقطری غیرصفر باشند $(c_{12} \neq 0, c_{21} \neq 0)$ ، سیستم دارای کوپلینگ سرعت است.

۱- ارتعاشات آزاد سیستم‌های دو درجه آزادی و بدون استهلاک

سیستم دو درجه آزادی زیر را که تحت فرکانس‌های طبیعی خود نوسان می‌کند (دارای ارتعاشات آزاد است) در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - kx_1 + (k + k_2)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = X_1 e^{st}, \quad x_2 = X_2 e^{st}$$



برای به دست آوردن نسبت دامنه‌ها یا مودهای ارتعاشی به ترتیب زیر

عمل می‌کنیم:

x_1, x_2 و مشتقات آن‌ها را در معادلات حرکت جایگذاری می‌کنیم.

معادله دامنه‌ها:

$$\begin{cases} [(k+k_1) + m_1 s^2] X_1 - k X_2 = 0 \\ -k X_1 + [(k+k_2) + m_2 s^2] X_2 = 0 \end{cases}$$

شرط داشتن جواب‌های غیر صفر برای دستگاه معادلات فوق این است که دترمینان ضرایب صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} (k+k_1) + m_1 s^2 & -k \\ -k & (k+k_2) + m_2 s^2 \end{vmatrix} = 0$$

با حل این دترمینان به یک معادله درجه ۴ برای s می‌رسیم که ریشه‌های آن عبارت‌اند از:

$$s_{1,2} = \pm j\omega_1 \quad s_{3,4} = \pm j\omega_2$$

به ω_1 و ω_2 فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌گویند.

$$\text{پاسخ کل سیستم} \begin{cases} x_1 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_{11}) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \psi_{12}) \\ x_2 = A_{21} \sin(\omega_1 t + \psi_{21}) + A_{22} \sin(\omega_2 t + \psi_{22}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_{11} = \psi_{21} = \psi_1 \\ \psi_{12} = \psi_{22} = \psi_2 \end{cases}$$

$$\text{نسبت دامنه} \quad u_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}}, \quad u_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}}$$

با جایگذاری در معادلات بالا داریم:

$$\begin{cases} x_1 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \psi_2) \\ x_2 = u_1 A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + u_2 A_{12} \sin(\omega_2 t + \psi_2) \end{cases}$$

نسبت دامنه u_1 را در فرکانس طبیعی اول ω_1 و نسبت دامنه u_2 را در فرکانس طبیعی دوم ω_2 به دست می‌آوریم و اثبات می‌شود که مقدار آن برابر است با:

مقادیر X_2, X_1 مربوط به ω_1 را به صورت $X_2^{(1)}, X_1^{(1)}$ و مقادیر X_2, X_1 مربوط به ω_2 را به صورت $X_2^{(2)}, X_1^{(2)}$ نشان می‌دهیم:

$$u_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}}, \quad u_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}}$$

پس از به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی با استفاده از معادلات حرکت می‌توان نسبت دامنه‌ها یا مودهای ارتعاشی را به دست آورد.

$$\begin{cases} u_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{(k+k_1) - m_1 \omega_1^2}{k} = \frac{k}{(k+k_2) - m_2 \omega_1^2} \\ u_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{(k+k_2) - m_1 \omega_2^2}{k} = \frac{k}{(k+k_1) - m_1 \omega_2^2} \end{cases} \quad u_1 \text{ و } u_2 \text{ (نسبت دامنه‌های سیستم) کاملاً به خواص سیستم بستگی دارند.}$$

حال که u_1 و u_2 مشخص شدند، تنها ۴ مجهول و ۴ شرط مرزی برای جواب‌ها باقی می‌ماند. پس جواب‌ها عبارت‌اند از:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \end{Bmatrix} A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + \begin{Bmatrix} 1 \\ u_2 \end{Bmatrix} A_{12} \sin(\omega_2 t + \psi_2)$$

اگر کاری کنیم که $A_{12} = 0$ شود، شکل جابه‌جایی سیستم در فرکانس اول (ω_1) خواهد بود و اصطلاحاً می‌گوییم سیستم در مود اول ارتعاش می‌کند. در این صورت شکل پاسخ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \end{Bmatrix} A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1)$$

اما اگر $A_{11} = 0$ شکل جابه‌جایی سیستم در فرکانس دوم (ω_2) را خواهیم داشت و سیستم در مود دوم ارتعاش می‌کند. در این صورت شکل پاسخ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ u_2 \end{Bmatrix} A_{12} \sin(\omega_2 t + \psi_2)$$

در حالت کلی داریم:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1) \\ A_{12} \sin(\omega_2 t + \psi_2) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} P_1(t) &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1) \\ P_2(t) &= A_{12} \sin(\omega_2 t + \psi_2) \end{aligned}$$

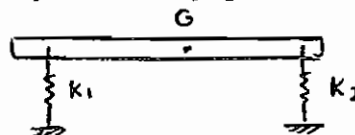
$$[u] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

ماتریس $[u]$ را ماتریس مودال می‌نامیم.

مثال: سیستم دو درجه آزادی (خطی + دورانی) زیر را در نظر بگیرید. این سیستم دارای دو حرکت انتقالی و دورانی است. پس دارای دو درجه آزادی θ, x است. این دو مختصه کاملاً از هم مستقل هستند. معادله ماتریسی حرکت را به دست آورید.

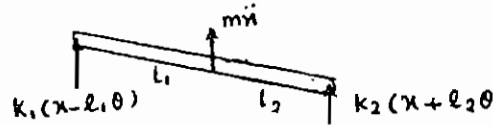
$$\Sigma F_x = m\ddot{x}$$

$$\Sigma M_G = J\ddot{\theta}$$



$$\begin{cases} -k_1(x-l_1\theta) - k_2(x+l_2\theta) = m\ddot{x} \\ k_1(x-l_1\theta)l_1 - k_2(x+l_2\theta)l_2 = J_c\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + (k_1+k_2)x - (k_1l_1 - k_2l_2)\theta = 0 \\ J_c\ddot{\theta} - (k_1l_1 - k_2l_2)x + (k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\theta = 0 \end{cases}$$



و معادله ماتریسی حرکت عبارت خواهد بود از:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -(k_1l_1 - k_2l_2) \\ -(k_1l_1 - k_2l_2) & k_1l_1^2 + k_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

در حالت کلی اگر المان‌های غیر قطری غیر صفر باشند، می‌گوییم سیستم دارای کوپلینگ است.

$m_{12}, m_{21} \neq 0 \rightarrow$ کوپلینگ دینامیکی

$c_{12}, c_{21} \neq 0 \rightarrow$ کوپلینگ سرعت (دمپینگ)

$k_{12}, k_{21} \neq 0 \rightarrow$ کوپلینگ استاتیکی

معادلات به دست آمده در مثال قبل وابسته هستند، چون دارای کوپلینگ استاتیکی می‌باشند. حال اگر سیستم طوری بود که $k_1l_1 = k_2l_2$ می‌بود، سیستم دی‌کوپله و کوپلینگ استاتیکی برطرف می‌شد.

نکته: نوع کوپلینگ موجود در معادلات سیستم یک خاصیت ذاتی سیستم نمی‌باشد، بلکه بستگی به مختصات استفاده شده برای سیستم دارد و امکان دارد بتوان از مختصاتی استفاده نمود که با استفاده از آن معادلات حرکت به دست آمده کوپله نمی‌باشد. به چنین مختصاتی مختصات اصلی یا مبنا می‌گویند. مزیت چنین مختصاتی آن است که معادلات دی‌کوپله حرکت را می‌توان به صورت مجزا حل نمود.

اگر در سیستم دو درجه آزادی، ماتریس جرم $[M]$ و ماتریس سختی $[K]$ را داشته باشیم، برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی سیستم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\det[K - M\omega^2] = 0$$

مقادیر ω به دست آمده از رابطه فوق را در فرمول نسبت دامنه‌ها قرار می‌دهیم و به ازای هر فرکانس طبیعی، مود ارتعاشی مربوط به آن را به دست می‌آوریم.

مختصات اصلی

این مختصات دارای این خاصیت است که اگر وارد سیستم شود، ماتریس‌های جرم و سختی قطری می‌شوند و معادلات سیستم اصطلاحاً دی‌کوپله می‌شود. یعنی معادلات ماتریسی حرکت به فرم زیر خواهند بود.

$$(k_{12} = k_{21} = 0, m_{12} = m_{21} = 0)$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{p}_1 + k_{11}p_1 = 0 \\ m_{22}\ddot{p}_2 + k_{22}p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = A_{11}\sin(\omega_1 t + \psi_1) \\ p_2 = A_{12}\sin(\omega_2 t + \psi_2) \end{cases}$$

در این معادلات $\omega_2^2 = \frac{k_{22}}{m_{22}}$ ، $\omega_1^2 = \frac{k_{11}}{m_{11}}$ به سادگی محاسبه می‌شوند.

اگر این معادلات را در مختصات دلخواه عمومی $\{q\}$ بنویسیم که در آن کوپلینگ استاتیکی و دینامیکی وجود دارد خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} A_{11}\sin(\omega_1 t + \psi_1) + \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} A_{12}\sin(\omega_2 t + \psi_2)$$

بنابراین رابطه بین مختصات اصلی و مختصات عمومی به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

$$\{q\} = [u]\{P\} \Rightarrow \{p\} = [u]^{-1}\{q\}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

اگر داشته باشیم:

$$\{P\} = \frac{1}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}} \begin{bmatrix} u_{22} & -u_{12} \\ -u_{21} & u_{11} \end{bmatrix} \{q\}$$

مختصات اصلی عبارت است از:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases}$$

مثال: مختصات اصلی سیستمی که معادلات حرکت آن به صورت زیر داده شده است را به دست بیاورید.

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} : [K] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی داریم:

$$m\omega^2 = k \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$m\omega^2 = 3k \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$|[K] - [M]\omega^2| = 0$$

با فرض $x_2 = X_2 e^{st}$ و $x_1 = X_1 e^{st}$ می‌رسیم.

$$\text{معادله دامنه‌ها} \begin{cases} (2k - m\omega^2)X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + (2k - m\omega^2)X_2 = 0 \end{cases}$$

$$u_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{2k - m\omega^2}{k} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad u_1 = 1$$

$$u_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-k}{2k - m\omega^2} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad \rightarrow \quad u_2 = -1$$

$$[u] = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\{p\} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases}$$

دو معادله را یکبار با هم جمع و یکبار از هم کم می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} [m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k(x_1 + x_2)] = 0 \\ \frac{1}{2} [m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3k(x_1 - x_2)] = 0 \end{cases}$$

با تعریف p_1 و p_2 در بالا داریم:

$$\begin{cases} m\ddot{p}_1 + kp_1 = 0 \\ m\ddot{p}_2 + 3kp_2 = 0 \end{cases}$$

معادلات فوق معادلات حرکت بر حسب مختصات اصلی هستند.

۲- ارتعاشات اجباری سیستم‌های دو درجه آزادی و بدون استهلاک

معادله حرکت سیستم ارتعاشی دو درجه آزادی در حالت ارتعاشات اجباری بدون مستهلک کننده به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

پاسخ در ارتعاشات اجباری همیشه دارای فرکانسی برابر با فرکانس تحریک است. برای حل باید پاسخ را به صورت هارمونیک در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \sin \omega t \\ x_2 = X_2 \sin \omega t \\ F_1 = F_{10} \sin \omega t \\ F_2 = F_{20} \sin \omega t \end{cases}$$

بعد از جایگذاری داریم:

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_{11}\omega^2 & k_{12} - m_{12}\omega^2 \\ k_{21} - m_{21}\omega^2 & k_{22} - m_{22}\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

$$Z_{rs}(\omega) = k_{rs} - m_{rs}\omega^2$$

$Z(\omega)$ ماتریس امپدانس نامیده می‌شود.

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

$$\{x\} = [Z(\omega)]^{-1} \{F_0\}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

الف - خاصیت تعامد مودهای طبیعی

اگر ϕ_1 و ϕ_2 مودهای طبیعی یک سیستم ارتعاشی باشند داریم:

$$\phi_1^t [M] \phi_2 = 0$$

یعنی مودهای طبیعی نسبت به ماتریس جرم متعامدند.

$$\phi_1^t [K] \phi_2 = 0$$

یعنی مودهای طبیعی نسبت به ماتریس سختی نیز متعامدند.

دو محدودیت داریم: $[M]^t = [M]$, $\omega_1 \neq \omega_2$ یعنی باید ماتریس‌های جرم و سختی متقارن باشند. و ϕ_1 و ϕ_2 مودهای دو فرکانس متفاوت باشند.

اگر سیستم مورد نظر سه درجه آزادی باشد دارای سه مود طبیعی ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 خواهد بود و مودهای طبیعی دو به دو نسبت به ماتریس جرم و سختی متعامدند، یعنی:

$$\phi_1^t [M] \phi_2 = 0, \phi_1^t [M] \phi_3 = 0, \phi_2^t [M] \phi_3 = 0$$

$$\phi_1^t [K] \phi_2 = 0, \phi_1^t [K] \phi_3 = 0, \phi_2^t [K] \phi_3 = 0$$

$$\phi_1^t [M] \phi_1 \neq 0, \phi_2^t [M] \phi_2 \neq 0, \phi_3^t [M] \phi_3 \neq 0$$

$$\phi_1^t [K] \phi_1 \neq 0, \phi_2^t [K] \phi_2 \neq 0, \phi_3^t [K] \phi_3 \neq 0$$

سختی مودال (۱) سختی مودال (۲) سختی مودال (۳)

برای نرمالیزه کردن مودهای طبیعی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. α را طوری تعیین می‌کنیم که جرم مودال برابر یک شود.

$$\phi_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi_1^t [M] \phi_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow 2m\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{2m}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

اگر مودهای طبیعی یا ϕ ها به روش فوق نرمالیزه کنیم، جرم‌های مودال برابر با ۱ می‌شوند.

$$\begin{aligned} \phi_1^t [M] \phi_1 = 1 & \rightarrow \begin{cases} \phi_1^t [K] \phi_1 = \omega_1^2 \\ \phi_2^t [K] \phi_2 = \omega_2^2 \end{cases} \\ \phi_2^t [M] \phi_2 = 1 & \end{aligned}$$

این روش، آنالیز مودال نام دارد.

ب - دی کوپله کردن

فرض کنید مسئله دارای معادلات حرکت به فرم زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

با دی کوپله کردن دستگاه معادلات فوق به دو معادله مجزا برای x_1 و x_2 می‌رسیم و مسئله را با آنالیز مودال حل می‌کنیم.

برای این منظور یک تبدیل مختصات انجام می‌دهیم.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\{x\} = [\phi]\{q\}$$

$[\phi]$ ماتریسی $n \times n$ است که ستون‌هایش مودهای طبیعی ارتعاش سیستم هستند:

$$[M][\phi][\ddot{q}] + [K][\phi]\{q\} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\phi]^t [M][\phi][\ddot{q}] + [\phi]^t [K][\phi]\{q\} = [\phi]^t \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

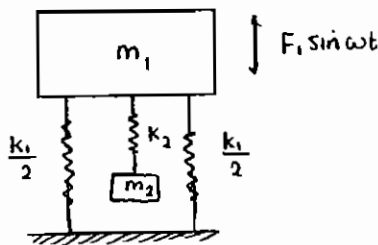
$$\begin{bmatrix} \phi_1^t M \phi_1 & \phi_1^t M \phi_2 & \phi_1^t M \phi_3 \\ \phi_2^t M \phi_1 & \phi_2^t M \phi_2 & \phi_2^t M \phi_3 \\ \phi_3^t M \phi_1 & \phi_3^t M \phi_2 & \phi_3^t M \phi_3 \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \phi_1^t K \phi_1 & \phi_1^t K \phi_2 & \phi_1^t K \phi_3 \\ \phi_2^t K \phi_1 & \phi_2^t K \phi_2 & \phi_2^t K \phi_3 \\ \phi_3^t K \phi_1 & \phi_3^t K \phi_2 & \phi_3^t K \phi_3 \end{bmatrix} \{q\} = \begin{bmatrix} \phi_1^t F(t) \\ \phi_2^t F(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

طبق روش نرمالیزه کردن مودهای طبیعی، عناصر روی قطر اصلی جرم‌های مودال و سختی‌های مودال هستند و بقیه عناصر (بنا به تعامد بردارهای ویژه) صفرند و ماتریس‌هایی که در $\{\ddot{q}\}$ و $\{q\}$ ضرب می‌شوند قطری می‌شوند و مسئله از حل معادلات ساده یک درجه آزادی حل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix} \{q\} = \begin{bmatrix} \phi_1^T F(t) \\ \phi_2^T F(t) \\ \phi_3^T F(t) \end{bmatrix}$$

ج - جاذب دینامیکی ارتعاشات

جرم جاذب، جرمی است مانند m_2 در شکل زیر که توسط فنری با سختی k_2 به سیستم تحت ارتعاشات اجباری اضافه می‌شود و نقش جذب‌کننده دینامیکی ارتعاشات را به عهده دارد. این جرم می‌تواند به گونه‌ای انتخاب شود که ارتعاشات جرم اصلی m_1 را به صفر برساند.



به‌طور کلی اگر در سیستمی فرکانس طبیعی با فرکانس نیروی محرک برابر شده یعنی $\omega = \omega_n$ باشد سیستم دچار حالت تشدید شده و باید به فکر راه‌حلی برای آن بود.

برای حل این مشکل راه‌حل‌های متعددی وجود دارد:

۱- تغییر ω_n یا فرکانس طبیعی سیستم (با تغییر k یا m)

۲- افزودن استهلاک به سیستم

۳- افزایش درجه آزادی سیستم با اضافه کردن یک جرم جاذب به سیستم. به این جرم و فنر m_2, k_2 که به سیستم اولیه اضافه شده و با فرکانس تحریک ارتعاش می‌کند، جاذب دینامیکی ارتعاشات می‌گوییم.

این جرم ارتعاشات سیستم اولیه را کاهش می‌دهد و دامنه حرکت جرم m_1 را به صفر می‌رساند. معادلات حرکت مجموعه سیستم و جاذب دینامیکی ارتعاشات عبارت‌است از:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_{10} \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & +k_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{z_{22}F_{10} - z_{12}F_{20}}{z_{11}z_{22} - z_{12}^2} \xrightarrow{F_{20}=0} X_1 = \frac{z_{22}F_{10}}{z_{11}z_{22} - z_{12}^2} \\ X_2 = \frac{-z_{12}F_{10} + z_{11}F_{20}}{z_{11}z_{22} - z_{12}^2} \xrightarrow{F_{20}=0} X_2 = \frac{-z_{12}F_{10}}{z_{11}z_{22} - z_{12}^2} \end{cases}$$

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F_{10}}{\left[(k_2 - m_2 \omega^2) \right] \left[(k_1 + k_2) - m_1 \omega^2 \right] - k_2^2}$$

برای این که $X_1 = 0$ باید:

$$k_2 - m_2 \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

یعنی در $\omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$ دامنه حرکت جرم m_1 صفر می‌شود.

چون سیستم در حال تشدید است و فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی سیستم، یعنی $\omega_n^2 = \frac{k_1}{m_1}$ برابر شده رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2}$$

در این شرایط جرم m_2 دامنه حرکتی برابر X_2 دارد:

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{-k_2^2} = \frac{-F_0}{-k_2} \Rightarrow k_2 X_2 = -F_0$$

مطابق رابطه فوق سیستم جاذب دینامیکی ارتعاشات یا جرم m_2 ، نیروی مساوی مخالف جهت با نیروی تحریک را اعمال می‌کند.

د - سیستم‌های نیمه معین

سیستم نیمه معین، سیستمی است که یکی از فرکانس‌های طبیعی‌اش صفر باشد و یا به عبارت دیگر، سیستم فاقد نوسان می‌باشد و می‌توان این‌طور در نظر گرفت که هیچ حرکت نسبی بین دو جرم موجود در سیستم وجود ندارد و کل سیستم به صورت یک جسم صلب جابه‌جا می‌شود.

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2)$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$|[K] - [M]\omega^2| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} k - m_1\omega^2 & -k \\ -k & k - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(k - m_1\omega^2)(k - m_2\omega^2) - k^2 = 0$$

$$k^2 + m_1 m_2 \omega^2 - k(m_1 + m_2)\omega^2 - k^2 = 0$$

$$\omega^2 [m_1 m_2 \omega^2 - k(m_1 + m_2)] = 0$$

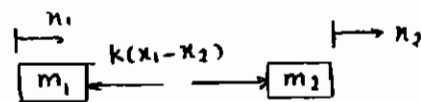
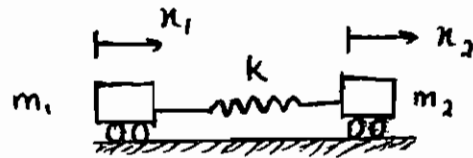
$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2^2 = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$

در صورتی که دو جرم m_1, m_2 مساوی باشند فرکانس طبیعی غیر صفر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$m_1 = m_2 = m \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{2k}{m}$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \sin \omega t \\ x_2 = X_2 \sin \omega t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (k - m\omega^2)X_1 - kX_2 = 0 \\ (k - m\omega^2)X_2 - kX_1 = 0 \end{cases}$$



$$u_1 = \frac{X_2}{X_1} \Big|_{\omega=\omega_1=0} = 1 \quad u_2 = \frac{X_2}{X_1} \Big|_{\omega=\omega_2=\sqrt{\frac{2K}{m}}} = -1$$

$$u_1 = 1 = \frac{A_{21}}{A_{11}}$$

$$u_2 = -1 = \frac{A_{22}}{A_{11}}$$

توجه شود در این سیستم‌ها در مود اول چون $\omega = 0$ است، هر دو جرم مانند یک جسم صلب به یک اندازه و به یک سمت حرکت می‌کنند.

در مود دوم چون فرکانس داریم حرکت سیستم نوسانی است.

هـ- روش لاگرانژ:

این روش، روشی کلی است که از آن می‌توان در استخراج معادلات حرکت یک سیستم n درجه آزادی استفاده نمود. به‌طور کلی معادلات حرکت یک سیستم n درجه آزادی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial q_i} = P_i^{nc} \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$P_i = P_i^c + P_i^{nc} + P_i^d$$

$$\text{سرعت عام} = \dot{q}_i$$

$$\text{نیروهای عام} = P_i$$

$$\text{نیروهای لزجی خطی} = P_i^d$$

$$\text{مختصات عام مستقل} = q_i$$

$$\text{انرژی جنبشی} = T$$

$$\text{انرژی پتانسیل} = U$$

$$\text{نیروهای کنسرواتیو} = P_i^c$$

$$\text{نیروهای غیر کنسرواتیو غیر از لزجی} = P_i^{nc}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial q_i} = P_i^{nc} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

مثال: سیستم دو درجه آزادی زیر را در نظر بگیرید. معادلات حرکت این سیستم را به روش لاگرانژ به دست آورید.

اولین قدم محاسبه انرژی‌ها شامل انرژی جنبشی، پتانسیل و انرژی تلف شده در اثر میرایی است.

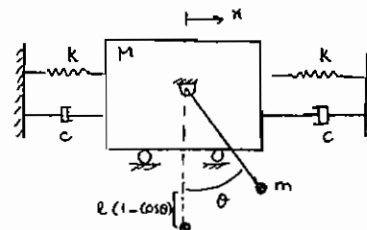
فنرها با هم موازی هستند، پس فنر معادل $2k$ می‌باشد.

دمپرها نیز با هم موازی هستند پس دمپر معادل $2c$ می‌باشد.

$$\text{انرژی پتانسیل } U = \frac{1}{2}(2k)x^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\text{انرژی تلف شده } R = \frac{1}{2}(2c)\dot{x}^2$$

$$\text{انرژی جنبشی } T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mV_c^2$$



$$\begin{cases} y_c = l \cos \theta \\ x_c = x + l \sin \theta \end{cases} \quad \text{به دست آوردن } V_c$$

$$V_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_c = -l \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{x}_c = \dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

$$V_c^2 = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\text{انرژی جنبشی } T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta)$$

در رابطه انرژی جنبشی ترم اول مربوط به جرم M و ترم دوم مربوط به جرم m است. چون ارتعاشات سیستم به صورت آزاد صورت می‌گیرد، نیروهای عام P_i همه صفر هستند.

$$P_i = 0$$

حال مقادیر محاسبه شده را در معادله لاگرانژ قرار می‌دهیم.

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 0 \right. \quad (1)$$

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0 \right. \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M \dot{x} + m \dot{x} + m l \dot{\theta} \cos \theta \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = M \ddot{x} + m \ddot{x} + m l \ddot{\theta} \cos \theta - m l \dot{\theta}^2 \sin \theta$$

$$(1) \Rightarrow M \ddot{x} + m \ddot{x} + m l \ddot{\theta} \cos \theta - m l \dot{\theta}^2 \sin \theta + 2kx + 2c\dot{x} = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 2c\dot{x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 2kx$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} + m l \dot{x} \cos \theta \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = m l^2 \ddot{\theta} + m l \ddot{x} \cos \theta - m l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -m l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta \quad \text{و} \quad \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = m g l \sin \theta$$

$$(2) \Rightarrow m l^2 \ddot{\theta} + m l \ddot{x} \cos \theta - m l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta - m l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + m g l \sin \theta$$

در دو معادله (1)، (2) برای خطی کردن با فرض زاویه انحراف کوچک θ ، تبدیلات $\sin \theta \rightarrow \theta$ و $\cos \theta \rightarrow 1$ را در نظر می‌گیریم و نیز پارامترهای $\dot{\theta}^2$ ، $\dot{x} \dot{\theta}$ را صفر فرض می‌کنیم.

بنابراین معادلات حرکت سیستم عبارت‌اند از:

$$(1) \quad [(M+m)\ddot{x} + m l \ddot{\theta} + 2c\dot{x} + 2kx = 0$$

$$(2) \quad [m l^2 \ddot{\theta} + m l \ddot{x} + m g l \theta = 0$$

$$\Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} M+m & m l \\ m l & m l^2 \end{bmatrix} : [C] = \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : [K] = \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & m g l \end{bmatrix}$$

سؤالات ۱۳۸۵

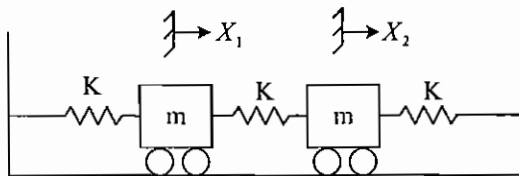
۱ - سیستم دو درجه آزادی زیر را در نظر بگیرید. برای این سیستم:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & m \\ m & m \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \quad (۲)$$

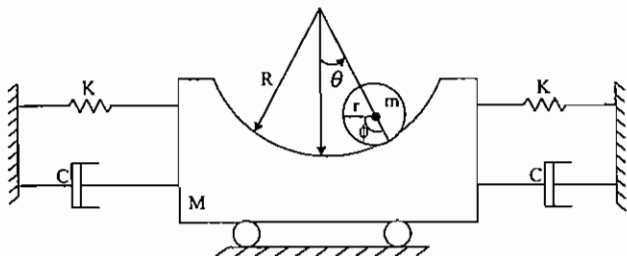
۳) سیستم همواره دارای فرکانس طبیعی $\omega_n = 0$ می‌باشد.

۴) در صورتی که یکی از جرم‌ها $m = 0$ شود سیستم دارای یک فرکانس طبیعی $\omega_n = 0$ خواهد بود.



سوالات ۱۳۸۶

۱- برای شکل زیر معادله حرکت جنبشی، پتانسیل و انرژی از دست رفته کدامیک از گزینه‌ها می‌باشد؟



$$KE_0 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$$

$$PE_0 = Kx^2 + mg(R-r)(1-\cos\theta) \quad (۱)$$

$$DE_0 = C\dot{x}^2$$

$$KE_0 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$$

$$PE_0 = Kx^2 + mg(R-r)(1-\cos\theta) \quad (۲)$$

$$DE_0 = C\dot{x}^2$$

$$KE_0 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$PE_0 = Kx^2 + mg(R-r)(1-\cos\theta) \quad (۳)$$

$$DE_0 = C\dot{x}^2$$

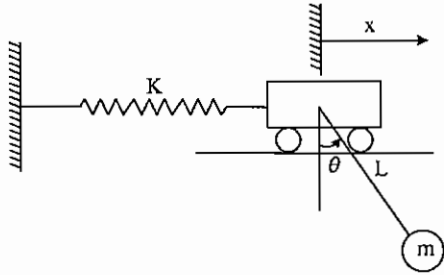
$$KE_0 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}(R-r)\cos\theta \right] + \frac{1}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$$

$$PE_0 = Kx^2 + mg(R-r)(1-\cos\theta) \quad (۴)$$

$$DE_0 = C\dot{x}^2$$

سؤالات سال ۱۳۸۸

۱- اگر دامنه حرکت θ کوچک باشد، فرکانس طبیعی عبارتست از:



$$\sqrt{\frac{g}{2L + \frac{mg}{k}}} \quad (۲)$$

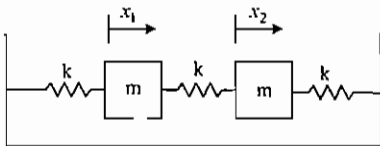
$$\sqrt{\frac{g}{L + \frac{mg}{k}}} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{mg}{2L + \frac{g}{k}}} \quad (۴)$$

$$\sqrt{\frac{mg}{L + \frac{g}{k}}} \quad (۳)$$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۵

۱- گزینه ۲ صحیح می باشد.

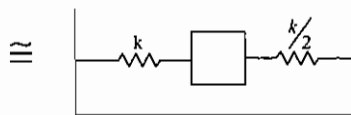
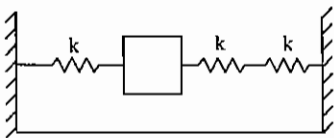


$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 &= kx_2 \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 &= kx_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

پس گ: ۰: ۲ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2k - m\omega^2) - k^2 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} (2k - m\omega^2) - k &= 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} \\ (2k - m\omega^2) + k &= 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{aligned}$$

و در حالتی که یکی از جرمها صفر شود پس سیستم تبدیل به سیستم روبه رو می شود:

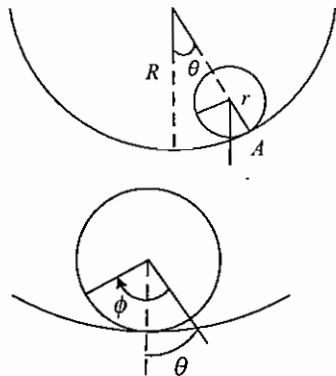


$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{3 \frac{k}{2}}{m}} = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۶

۲ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

برای واگن چون همیشه روی سطح افقی است پس $PE_1 = 0$ و برای انرژی جنبشی آن $KE_1 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$ و برای استوانه که حرکت انتقالی به همراه دورانی دارد انرژی جنبشی آن از حرکت ناشی از مرکز جرم به علاوه دوران جسم حل مرکز جرم ناشی می‌شود:



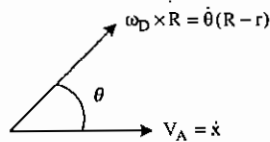
$$R\theta = r\phi \Rightarrow \phi = \frac{R\theta}{r}$$

$$\text{دوران مطلق} = \phi - \theta \Rightarrow \omega_D = \dot{\phi} - \dot{\theta} = \dot{\theta} \left(\frac{R}{r} - 1 \right)$$

دیسک

نقطه تماس استوانه با واگن مرکز آنی دوران برای استوانه محسوب می‌شود پس سرعت مرکز جرم استوانه از سرعت نقطه A که همان سرعت واگن (\dot{x}) به علاوه سرعت نسبی مرکز جرم نسبت به A به دست می‌آید:

$$V_G = V_A + V_{G/A}$$



پس برای انرژی جنبشی استوانه داریم:

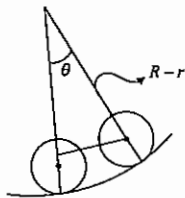
$$KE_2 = \text{دوران حول مرکز جرم} + \text{انتقال مرکز جرم} = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_D^2$$

$$KE_2 = \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2 (R-r)^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}(R-r)\cos\theta \right] + \frac{1}{2} \frac{1}{2} mR^2 \left(\dot{\theta} \frac{R}{r} - 1 \right)^2$$

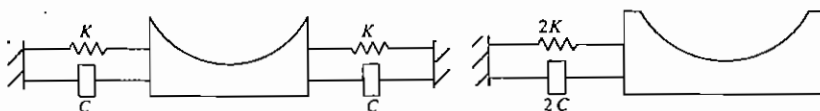
$$\Rightarrow KE_t = KE_1 + KE_2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m \left[\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2 (R-r)^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}(R-r)\cos\theta \right] + \frac{1}{4}m\dot{\theta}^2 (R-r)^2$$

با محاسبه انرژی جنبشی می‌توان جواب صحیح را انتخاب نمود.

$$PE_{1g} = PE_{1g} + PE_{2g} = 0 + mg(R-r)(1-\cos\theta)$$



$$\Rightarrow PE_{ts} = \frac{1}{2}2kx^2 = kx^2$$



$$\Rightarrow PE = kx^2 + mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

$$DE = \frac{1}{2}(2c)\dot{x}^2 = c\dot{x}^2$$

پاسخ سؤالات ۱۳۸۸

۱- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با استفاده از روش لاگرانژ این مسأله حل می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2 + mgL(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mgL\theta^2$$

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x} + L\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} mL^2\dot{\theta}^2 + mL\dot{x}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = kx, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = mgL\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + mL\dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta} + mL\dot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + mL\ddot{\theta} + kx = 0 \\ mL\ddot{x} + mL^2\ddot{\theta} + mgL\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m & mL \\ mL & mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mgL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = 0$$

حال فرکانس های طبیعی این سیستم را به دست می‌آوریم:

$$|k - M\omega^2| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -mL\omega^2 \\ -mL\omega^2 & mgL - mL^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow mL(k - m\omega^2)(g - L\omega^2) = m^2L^2\omega^4$$

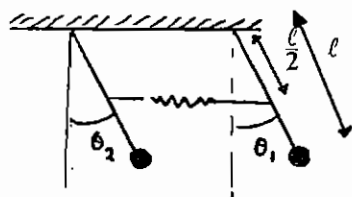
$$\Rightarrow kg - kL\omega^2 - mg\omega^2 + m^2L^2\omega^4 = m^2L^2\omega^4$$

$$\Rightarrow \omega^2(mg + kL) = kg \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{L + \frac{mg}{k}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L + \frac{mg}{k}}}$$

تست‌های دوره‌ای

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۹ - ۷۸

اگر θ_{12} و θ_{22} به ترتیب دامنه‌های زاویه نوسان کوچک میله‌های ۱ و ۲ در مود دوم باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



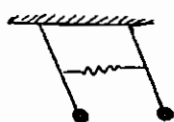
۱- $\theta_{22} = -\theta_{12}$ و ماکزیمم نیروی فنر عبارت است از: $k l \theta_{12}$

۲- $\theta_{22} = -\theta_{12}$ و ماکزیمم نیروی فنر عبارت است از: $2k l \theta_{12}$

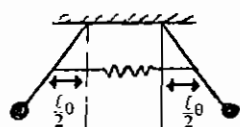
۳- $\theta_{22} = -\theta_{12}$ و نیروی فنر همواره صفر است.

۴- $\theta_{22} = -\theta_{12}$ و ماکزیمم فنر عبارت است از: $k l \theta_{12}$

سیستم مقارن است. پس مودهای ارتعاشی آن به صورت هم فاز و فاز متقابل می‌باشد و عبارت‌اند از $\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ، $\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$



اگر سیستم در مود اول یعنی $\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ نوسان کند $\theta_{11} = \theta_{21}$ ، تغییر طولی در فنر ایجاد نمی‌شود و نیروی فنر برابر صفر است.



اگر سیستم در مود دوم یعنی $\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ نوسان کند $\theta_{12} = -\theta_{22}$ ،

مقدار تغییر طول فنر $2 \left(\frac{1}{2} \theta_{12} \right)$ یا $l \theta_{12}$ می‌شود و بنابراین نیروی فنر $k l \theta_{12}$ است.

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۵ - ۷۴

فرکانس ارتعاشات آزاد یک سیستم یک درجه آزادی با استهلاک کم

۱- بسته به میزان استهلاک ممکن است بزرگتر یا کوچکتر از فرکانس طبیعی غیر استهلاکی آن باشد.

۲- بستگی به دامنه ارتعاشات دارد.

۳- همیشه بزرگتر از فرکانس طبیعی غیر استهلاکی آن است.

۴- همیشه کوچکتر از فرکانس طبیعی غیر استهلاکی است.

چون $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ، پس $\omega_d < \omega_n$ و فرکانس ارتعاشات آزاد با استهلاک کم همیشه کوچکتر از فرکانس طبیعی غیر استهلاکی است.

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۴-۷۵

دامنه ارتعاشات آزاد یک سیستم یک درجه آزادی در سیکل‌های متوالی اندازه‌گیری شده و مقادیر ۵۰ و ۴۵ و ۴۰ و ۳۵ و ... ثبت گردیده است.

۱- این سیستم دارای استهلاک لزج است. ۲- این سیستم دارای استهلاک خشک است.

۳- این سیستم دارای استهلاک هیستریزیس است. ۴- چنین نتایجی برای هیچ استهلاکی امکان ندارد.

در صورت وجود اصطکاک خشک یا میرایی کولمب کاهش دامنه در سیکل‌های متوالی با زمان به صورت خطی است. چون در هر سیکل دامنه به اندازه ثابتی کم شده استهلاک از نوع اصطکاک خشک است. گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

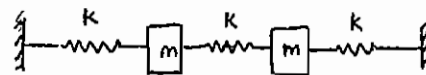
تست مهندسی مکانیک: سال ۶۸-۶۷

برای یک سیستم دو درجه آزادی نشان داده شده اطلاعات زیر موجود است.

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} +2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{0.624 \frac{k}{m}} \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} 0.73 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 = \sqrt{2.366 \frac{k}{m}} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{bmatrix}$$



تبدیل مختصاتی که معادلات فوق را دی کوپله می‌کند کدام است؟

$$X_2 = q_2 + 0.73q_1, \quad X_1 = q_1 - 2.73q_1 \quad -1$$

$$X_2 = q_1 - q_2, \quad X_1 = q_1 + q_2 \quad -2$$

$$X_2 = q_1 + q_2, \quad X_1 = 0.73q_1 - 2.73q_2 \quad -3$$

$$X_2 = -2.73q_1 + 0.73q_2, \quad X_1 = q_1 + q_2 \quad -4$$

تبدیل مختصاتی که معادلات را دی کوپله می‌کند، عبارت‌است از:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = [\phi] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.73 & -2.73 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

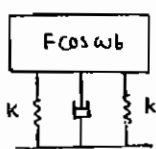
$$x_1 = 0.73q_1 - 2.73q_2$$

$$x_2 = q_1 + q_2$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۶۸-۶۷

اگر X ماکزیمم دامنه باشد. ماکزیمم نیروی منتقل شونده به فونداسیون در شکل زیر برابر است با:



$$F_t = kX \sqrt{1 + \left(\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad -2$$

$$F_t = kX \sqrt{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad -1$$

$$F_t = kX \sqrt{\left(4\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + 4} \quad -4$$

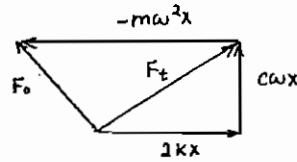
$$F_t = kX \sqrt{4 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad -3$$

نیروی وارد بر فوندانسیون مجموع فازوری نیروهای دمپر و فنرها می‌باشد. این دو نیرو 90 درجه اختلاف فاز دارند.

$$F_t = \sqrt{(2kX)^2 + (c\omega X)^2} = kX \sqrt{4 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}$$

$$\frac{c}{k} = \frac{c}{c_c} \cdot \frac{c_c}{k} = \zeta \cdot \frac{2m\omega_n}{k} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

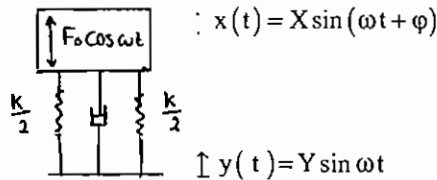
$$F_t = kX \sqrt{4 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۶۸-۶۷

در سیستم نشان داده شده حداکثر نیروی منتقل شده به جرم برابر است با:



$$\sqrt{(kX)^2 + (c\omega X)^2} \quad -1$$

$$\sqrt{(kY)^2 + (c\omega Y)^2} \quad -2$$

$$\sqrt{[k(X-Y)]^2 + [\omega(X-Y)]^2} \quad -3$$

-4 هیچ کدام

تغییر مکان نسبی $z(t)$ را به صورت تفاضل $y(t), x(t)$ در نظر می‌گیریم.

$$F_t = \frac{k}{2}(x-y) + \frac{k}{2}(x-y) + c(\dot{x}-\dot{y}) = k(x-y) + c(\dot{x}-\dot{y})$$

$$z(t) = x(t) - y(t), \quad z(t) = Z \sin(\omega t - \beta)$$

$$F_t = kZ \sin(\omega t - \beta) + c\omega Z \cos(\omega t - \beta)$$

$$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

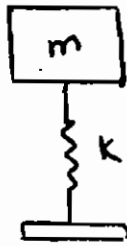
$$|F_t| = Z \sqrt{k^2 + c^2 \omega^2} = \frac{m\omega^2 Y \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۰ - ۶۹

در سیستم شکل زیر حرکت پایه با رابطه $x_f = e \sin \omega t$ داده شده است. حرکت پایدار جرم m به ازاء $\omega > \sqrt{\frac{k}{m}}$ برابر است با:

$$\left(r = \frac{\omega}{\omega_n} \right)$$



$$x_f = e \sin(\omega t)$$

$$x(t) = \frac{e}{1-r^2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad -1$$

$$x(t) = \frac{ke}{m} \sin(\omega t - \pi) \quad -$$

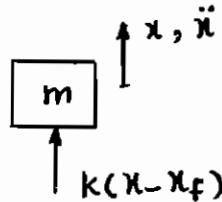
$$x(t) = \frac{e}{1-r^2} \sin(\omega t - \pi) \quad -3$$

$$x(t) = \frac{ke}{m} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad -4$$

معادله حرکت را برای سیستم فوق می‌نویسیم:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_f) \Rightarrow m\ddot{x} + kx = kx_f$$

$$X = \frac{ke}{k - m\omega^2} = \frac{e}{1 - \frac{m}{k}\omega^2} = \frac{e}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{e}{1 - r^2}$$



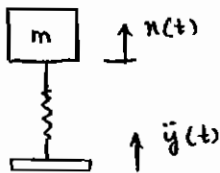
$$\omega < \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow x(t) = \frac{e}{1-r^2} \sin \omega t$$

$$\omega > \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow x(t) = \frac{e}{1-r^2} \sin(\omega t - \pi)$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست سال ۷۳ - ۷۲

در سیستم نشان داده شده به پایه شتاب $\ddot{y}(t) = Y_0 u(t)$ وارد می‌شود. تغییر مکان جرم m نسبت به پایه برابر است با:



$$\frac{Y_0}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) \quad -1$$

$$\frac{Y_0}{k} (1 - \cos \omega_n t) \quad -2$$

$$\frac{Y_0}{k} (1 - \sin \omega_n t) \quad -3$$

$$\frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t) \quad -4$$

با رسم دیاگرام آزاد جرم m داریم:



$$-k(x - y) = m\ddot{x}$$

$$z = x - y \Rightarrow x = z + y$$

$$-kz = m(\ddot{z} + \ddot{y})$$

$$m\ddot{z} + kz = -m\ddot{y} = -mY_0 u(t)$$

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = -Y_0 u(t)$$

$$z(t) = z_h + z_p = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t + \left(\frac{-Y_0}{\omega_n^2} \right) (\cos \omega_n t - 1)$$

شرایط اولیه $z(0)=0$, $\dot{z}(0)=0$

$$A - \frac{Y_0}{\omega_n^2} = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{Y_0}{\omega_n^2} , \quad A_2 = 0$$

$$z(t) = \frac{Y_0}{\omega_n^2} \cos \omega_n t - \frac{Y_0}{\omega_n^2} = \frac{Y_0}{\omega_n^2} (\cos \omega_n t - 1)$$

روش دوم: شتاب اولیه وارد به پایه معادل ضربه است. پاسخ سیستم بدون میرا به ضربه پله‌ای با اندازه F_0 برابر است با:

$$x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t)$$

$$F_0 = m\ddot{y} = mY_0 u(t)$$

$$x(t) = \frac{mY_0 u(t)}{k} (1 - \cos \omega_n t) = \frac{Y_0}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) u(t)$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد. (البته یک منق‌ی اختلاف دارد).

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۲-۷۳

معادله حرکت سیستم نشان داده شده در جهت x برابر است با:

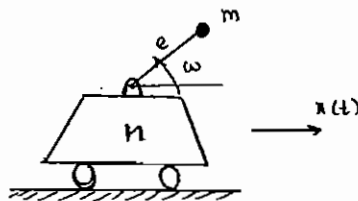
$$m\ddot{x} = me\omega^2 \cos \omega t \quad (1)$$

$$M\ddot{x} = me\omega^2 \cos \omega t \quad (2)$$

$$\ddot{x} = e\omega^2 \cos \omega t \quad (3)$$

$$(M+m)\ddot{x} = me\omega^2 \cos \omega t \quad (4)$$

معادله حرکت مجموعه را در راستای محور x ها می‌نویسیم.



\ddot{x} : شتاب جرم M در راستای محور x ها

شتاب جرم m در راستای محور x ها: $\frac{d^2}{dt^2}(x + e \cos \omega t)$

$$M\ddot{x} + m \frac{d^2}{dt^2}(x + e \cos \omega t) = 0 \Rightarrow (M+m)\ddot{x} - me\omega^2 \cos \omega t = 0$$

$$\Rightarrow (M+m)\ddot{x} = me\omega^2 \cos \omega t$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۷-۷۸

در یک سیستم ارتعاشی ۲ درجه آزادی ماتریس جرم و سختی فنر به صورت:

$$[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

داده شده است. کدام یک از پاسخهای زیر برای فرکانسهای طبیعی و شکل مودها صحیح است؟

جواب	$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}_{\omega_1}$	$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}_{\omega_2}$	ω_1	ω_2
(۱)	1	1	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$
(۲)	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
(۳)	∞	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
(۴)	1	1	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$

ماتریسهای جرم و سختی قطری هستند (عناصر غیرقطری آنها صفر است). بنابراین سیستم دی کوپله است (هم از نظر استاتیکی و هم از نظر دینامیکی). در سیستم دی کوپله فرکانس طبیعی معادل مودهای ارتعاشی به صورت زیر به دست می آید:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{3}$$

$$\text{معادله دامنه‌ها} = \{ [K] - [M] \omega^2 \} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 - 2\omega^2 & 0 \\ 0 & 9 - 3\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} (4 - 2\omega^2)x_1 = 0 \\ (9 - 3\omega^2)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 2\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{2} \\ 9 - 3\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{3} \end{cases}$$

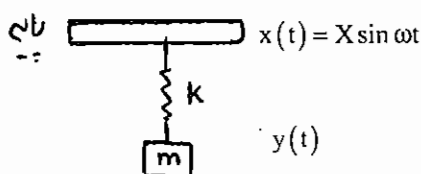
$$\text{مود اول } \omega = \sqrt{2} \Rightarrow 3 \times X_2 = 0 \Rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow \left. \frac{X_1}{X_2} \right|_{\omega_1} = \infty$$

$$\text{مود دوم } \omega = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} 0 \times X_2 = 0 \Rightarrow X_2 \neq 0 \\ -2X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left. \frac{X_1}{X_2} \right|_{\omega_2} = 0$$

گزینه ۳ صحیح می باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۴ - ۷۳

جرم m از فنر خطی با ضریب k آویزان شده است. پایه فنر مطابق شکل حرکت سینوسی با فرکانس ω ارتعاش می کند. در چه فرکانسی دامنه جا به جایی جرم برابر جابه جایی پایه می گردد؟



۱- $\omega = 1.414\omega_n$

۲- $\omega = 2\omega_n$

۳- $\omega = 2.828\omega_n$

۴- $\omega = 0.707\omega_n$

نکته: دامنه جابه‌جایی جرم و پایه فقط در نسبت‌های فرکانسی 0 ، $\sqrt{2}$ برابر یک می‌شود یعنی:

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{2} \Rightarrow \omega = 1.414 \omega_n$$

در صورتی‌که این نکته را به‌خاطر نداشته باشیم، باید مسئله را به روش کلی حل کنیم:
طبق روابطی که برای حرکت پایه داشتیم:

$$m\ddot{y} = k(x - y)$$

$$m\ddot{y} + ky = kx$$

$$x = x e^{i\omega t} \quad , \quad y = y e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$\frac{x}{y} = \left| \frac{k}{k - m\omega^2} \right| = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right| = 1$$

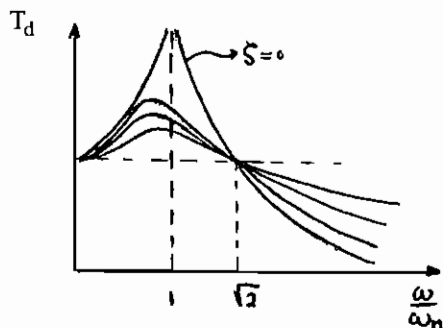
$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\omega}{\omega_n} = 0 \\ \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{2} \rightarrow \omega = \sqrt{2} \omega_n = 1.414 \omega_n \end{cases}$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک: سال ۷۵ - ۷۴

اگر در ارتعاشات اجباری یک سیستم یک درجه آزادی ضریب تقویت کوچکتر از واحد باشد،....

- ۱- فرکانس نیروی خارجی بزرگتر از فرکانس طبیعی است.
- ۲- فرکانس نیروی خارجی کوچکتر از فرکانس طبیعی است.
- ۳- ممکن است فرکانس نیرو بزرگتر از فرکانس طبیعی باشد.
- ۴- ضریب تقویت بستگی به فرکانس نیروی خارجی ندارد.



با توجه به منحنی ضریب تقویت بر حسب $\frac{\omega}{\omega_n}$:

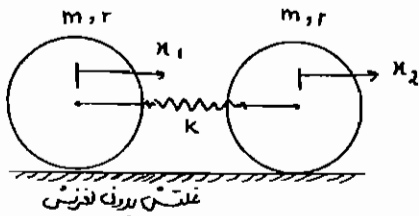
در $\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{2}$ ضریب تقویت برابر یک است.

در $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ ضریب تقویت کوچکتر از یک است.

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال: دو دیسک مشابه توسط فنر k به هم وصل شده‌اند. فرکانس طبیعی سیستم چقدر است؟

چون سیستم قید ندارد در یک مود مثل جسم صلب حرکت می‌کند و $\omega_1 = 0$



به علت تقارن، در وسط فنر گره داریم. بنابراین همان‌طور که در شکل مشخص شده چون نقطه وسط (گره) هیچ حرکتی ندارد، می‌توان به جای کل سیستم، فرکانس طبیعی یکی از دیسک‌ها را که نصف فنر به آن متصل است، محاسبه نمود. سختی نصف فنر $2k$ خواهد بود:

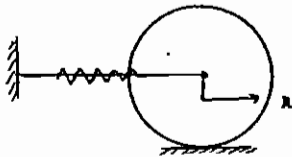
$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} mr^2 \right) \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2$$

$$U = \frac{1}{2} (2k) x^2$$

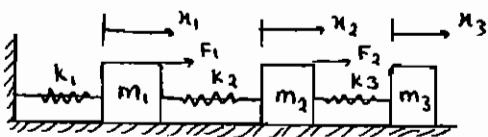
$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + 2kx = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} m \ddot{x} + 2kx = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{4k}{3m}$$



تست مهندسی مکانیک: سال ۸۰ - ۷۹

در سیستم ارتعاشی روبه‌رو، رابطه بین نیروهای f_2, f_1 را طوری به دست آورید که جرم m_3 هیچ حرکتی نکند.



$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{-k_1}{k_1 + k_2} \quad (1)$$

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{-k_2}{k_1 + k_2} \quad (2)$$

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{-k_1 + k_2}{k_1 + k_2 + k_3} \quad (3)$$

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{-k_1 + k_2}{k_1 + k_2 + k_3} \quad (4)$$

سیستم سه درجه آزادی است. ابتدا معادلات حرکت سه جرم m_1, m_2, m_3 را می‌نویسیم. x_3 را مساوی صفر می‌گذاریم تا

نسبت $\frac{f_2}{f_1}$ به دست بیاید.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 = f_2 \\ m_3 \ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = X_1 e^{st} \quad x_2 = X_2 e^{st} \quad x_3 = X_3 e^{st} \quad f_1 = F_1 e^{st} \quad f_2 = F_2 e^{st}$$

$$[s^2 M - K] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

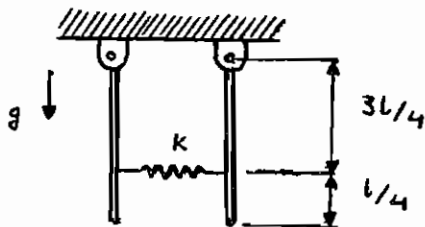
$$-k_3 x_2 + k_3 x_3 = 0 \xrightarrow{x_3=0} x_2 = 0$$

$$\begin{cases} (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = f_1 \\ -k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = f_2 \end{cases} \xrightarrow{x_2=0} \begin{matrix} f_2 = -k_2 \\ f_1 = k_1 + k_2 \end{matrix}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک - سال ۸۲

مطلوب است محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم نشان داده شده در شکل (میله‌ها یکنواخت به طول l و جرم m می‌باشند).



$$\omega_1^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l}, \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\omega_2^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} + \frac{27}{8} \frac{k}{m}, \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l}, \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\omega_2^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} - \frac{27}{8} \frac{k}{m}, \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

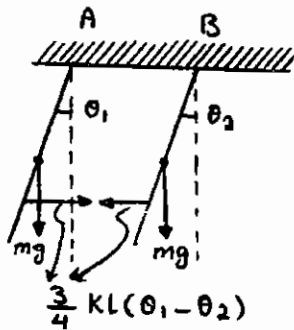
$$\omega_1^2 = \frac{3}{4} \frac{g}{l}, \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\omega_2^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} + \frac{9}{8} \frac{k}{m}, \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l}, \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\omega_2^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} + \frac{27}{8} \frac{k}{m}, \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

سیستم دو درجه آزادی است. ابتدا باید دیاگرام آزاد را رسم کنیم و سپس معادلات حرکت را استخراج نماییم:



$$\Sigma M_A = I_A \ddot{\theta}_1$$

$$-\frac{3}{4}kl(\theta_1 - \theta_2)\left(\frac{3}{4}l\right) - mg\left(\frac{1}{2}\theta_1\right) = \frac{1}{3}ml^2 \ddot{\theta}_1$$

$$\Sigma M_B = I_B \ddot{\theta}_2$$

$$\frac{3}{4}kl(\theta_1 - \theta_2)\left(\frac{3}{4}l\right) - mg\left(\frac{1}{2}\theta_2\right) = \frac{1}{3}ml^2 \ddot{\theta}_2$$

دو معادله فوق را به فرم ماتریسی می‌نویسیم.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}ml & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ml \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{9}{16}kl + \frac{1}{2}mg & -\frac{9}{16}kl \\ -\frac{9}{16}kl & \frac{9}{16}kl + \frac{1}{2}mg \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = 0$$

مقادیر فرکانس طبیعی از رابطه زیر محاسبه می‌گردند:

$$\det(K - M\omega^2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{16}kl + \frac{1}{2}mg - \frac{1}{3}ml\omega^2 & -\frac{9}{16}kl \\ -\frac{9}{16}kl & \frac{9}{16}kl + \frac{1}{2}mg - \frac{1}{3}ml\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{9}{16}kl + \frac{1}{2}mg - \frac{1}{3}ml\omega^2\right)\left(\frac{9}{16}kl + \frac{1}{2}mg - \frac{1}{3}ml\omega^2\right) - \left(-\frac{9}{16}kl\right)\left(-\frac{9}{16}kl\right) = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l}$$

$$\omega_2^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} + \frac{27}{8} \frac{k}{m}$$

و مودهای طبیعی ارتعاش به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$[K - M\omega^2]x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{16}kl + \frac{1}{2}mg - \frac{1}{3}ml\left(\frac{3}{2} \frac{g}{l}\right) & -\frac{9}{16}kl \\ -\frac{9}{16}kl & \frac{9}{16}kl + \frac{1}{2}mg - \frac{1}{3}ml\left(\frac{3}{2} \frac{g}{l}\right) \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{9}{16}kl + \frac{1}{2}mg - \frac{1}{2}mg\right)x_1 - \left(\frac{9}{16}kl\right)x_2 = 0$$

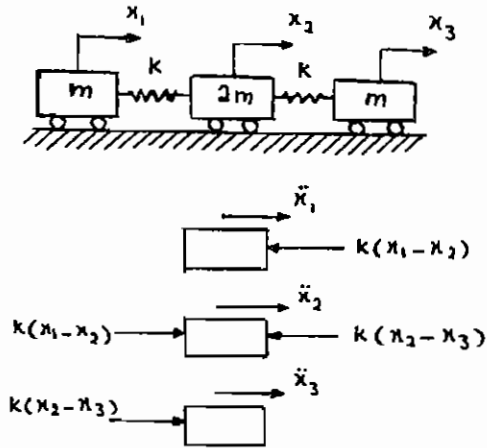
$$\left(\frac{9}{16}kl\right)x_1 - \left(\frac{9}{16}kl\right)x_2 = 0 \Rightarrow \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن مود دوم ارتعاش، مقدار ω_2^2 را در معادله $[K - M\omega^2]x = 0$ جایگذاری می‌کنیم.

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک - سال ۸۳

فرکانس‌های طبیعی سیستم در شکل مقابل کدامند؟



$$0, \sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{k}{2m}} \quad (1)$$

$$0, \sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (2)$$

$$0, \sqrt{\frac{k}{2m}}, \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{k}{2m}}, \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (4)$$

معادلات حرکت سه جرم را به شکل زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 \\ 2m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 = 0 \\ m\ddot{x}_3 - kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

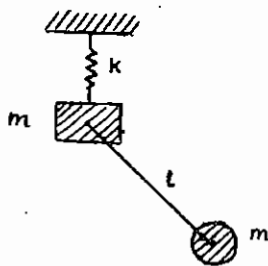
$$\det(K - M\omega^2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک - سال ۸۳

فرکانس (و یا فرکانس‌های) طبیعی سیستم روبه‌رو برابر است با:



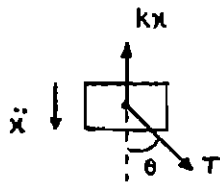
$$\frac{k}{m}, \frac{g}{l} \quad (1)$$

$$\frac{g}{2l}, \frac{k}{2m} \quad (2)$$

$$\frac{g}{l}, \frac{k}{2m} \quad (3)$$

$$\frac{g}{2l}, \frac{k}{4m} \quad (4)$$

ابتدا باید دیاگرام آزاد هر یک از دو جسم را رسم کنیم و معادلات حرکت آنها را بنویسیم.



$$\sum F_x = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = T \cos \theta - kx, \quad \cos \theta \approx 1$$

$$m\ddot{x} + kx = T$$

توجه کنید نوسانات پاندول باید کوچک فرض شود تا معادلات را بتوان خطی فرض نمود.

$$\sum F_y = m\ddot{a}_y$$

$$mg \cos \theta - T = m\ddot{x} \cos \theta$$

$$mg - m\ddot{x} \approx T$$

را از یکی از معادلات در معادله دیگر جایگذاری می‌کنیم.

$$m\ddot{x} + kx = mg - m\ddot{x} \Rightarrow 2m\ddot{x} + kx = mg \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{k}{2m}$$

حال معادله حرکت جسم دوم را به دست می‌آوریم.

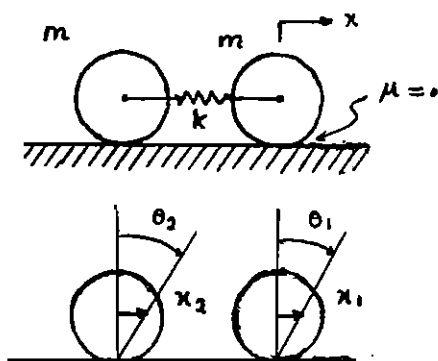
$$\sum F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -mg \sin \theta = m\ddot{\theta}, \quad \sin \theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + g\theta = 0 \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{g}{l}$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد (البته مقادیر گزینه‌ها ω^2 است).

تست:

برای سیستم ارتعاشی مقابل، فرکانس‌های طبیعی سیستم به ازای نوسانات کوچک کدام است؟



$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{2k}{3m} \quad (1)$$

$$\omega_2^2 = \frac{4k}{m}, \quad \omega_1^2 = 0 \quad (2)$$

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{4k}{3m} \quad (3)$$

$$\omega_2^2 = \frac{2k}{m}, \quad \omega_1^2 = 0 \quad (4)$$

انرژی پتانسیل $U = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$

انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}_2^2$

$$x_1 = r\theta_1 \Rightarrow \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{x}_1}{r}$$

$$x_2 = r\theta_2 \Rightarrow \dot{\theta}_2 = \frac{\dot{x}_2}{r}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}(mr^2)\left(\frac{\dot{x}_2^2}{r^2} + \frac{\dot{x}_1^2}{r^2}\right)$$

$$\text{معادلات لاگرانژ} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad q_i = x_i, \quad i=1,2,\dots$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + \frac{1}{2}m\ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 \\ \frac{3}{2}m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det(K - M\omega^2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} k - \frac{3}{2}m\omega^2 & -k \\ -k & k - \frac{3}{2}m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{4k}{3m}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست:

اگر ماتریس سختی و ماتریس جرم یک سیستم دو درجه آزادی به صورت زیر باشد، فرکانس‌های طبیعی سیستم کدام‌اند؟

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{2}, \quad \omega_2 = \sqrt{3} \quad (۱)$$

$$\omega_1 = 4, \quad \omega_2 = 9 \quad (۲)$$

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 1 \quad (۳)$$

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 3 \quad (۴)$$

$$\det(K - M\omega^2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 - \omega^2 & 1 \\ 1 & 3 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2 - \omega^2)(3 - \omega^2) - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = 2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{2} \\ \omega_2^2 = 3 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک - سال ۷۰ - ۶۹

معادلات دیفرانسیل حرکت یک سیستم دو درجه آزادی به صورت زیر داده شده است.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \sin 20t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

بزرگترین فرکانس طبیعی سیستم برابر است با:

(۱) $2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (۲) $2\sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (۳) هیچ کدام (۴) $8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

مقادیر

$$\det [K - M\omega^2] = 0$$

$$\begin{vmatrix} 24 - 4\omega^2 & -4 \\ -4 & 6 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(24 - 4\omega^2)(6 - \omega^2) - 16 = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{4} = 2, \quad \omega_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

گزینه ۲ صحیح می باشد.

تست مهندسی مکانیک - سال ۸۰ - ۷۹

با توجه به اضافه نمودن جاذب دینامیکی ارتعاشات به سیستم اصلی، کدام گزینه غلط است؟

(۱) جرم اصلی و جرم جاذب، هم فاز حرکت خواهند کرد.

(۲) ارتعاشات سیستم اصلی صفر است، ولی سیستم فرعی ارتعاش می کند.

(۳) مقدار نیروی وارد از طرف جاذب برابر نیروی تحریک است.

(۴) فرکانس طبیعی سیستم جاذب به طور مجزا برابر فرکانس تحریک می باشد.

اضافه کردن جرم جاذب به جرم اصلی اغلب به منظور میرا نمودن ارتعاشات سیستم اصلی صورت می گیرد و جرم جاذب نیروی مساوی و مختلف‌الجهت با نیروی تحریک اعمال می کند و گاهی حتی ارتعاشات جرم اصلی به صفر می رسد. بنابراین جرم اصلی و جرم جاذب هم فاز حرکت نخواهند کرد.

گزینه ۱ صحیح می باشد.

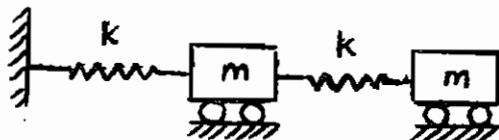
تست مهندسی مکانیک - سال ۷۹ - ۷۸

اگر فرکانس‌های طبیعی اول و دوم سیستم نشان داده شده به ترتیب ω_1, ω_2 باشند، نسبت $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ تقریباً برابر کدام یک از گزینه‌های

زیر است؟

(۱) 0.4 (۲) 1

(۳) 2.6 (۴) 6.9



معادلات حرکت سیستم عبارت‌اند از:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

فرکانس‌های طبیعی سیستم از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\det [K - \omega^2 M] = 0$$

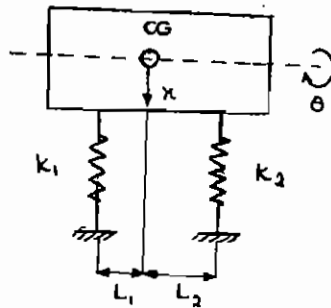
$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{(3 - \sqrt{5})}{2}, \quad \omega_2^2 = \frac{(3 + \sqrt{5})}{2}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{2}} = 2.61$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک - سال ۷۸ - ۷۷

در سیستم شکل زیر ضریب سختی k_2 برای غیر کوپل شدن استاتیکی و دینامیکی حرکات انتقالی x زاویه‌ای θ کدام است؟ ($L_2 = 2L_1$)



$$k_2 = \frac{1}{2} k_1 \quad (1)$$

$$k_2 = 2k_1 \quad (2)$$

$$k_2 = 8k_1 \quad (3)$$

(۴) حرکات x, θ برای جميع مقادير k_2 کوپل شده‌اند.

معادلات حرکت سیستم عبارت‌اند از:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 L_2 - k_1 L_1 \\ k_2 L_2 - k_1 L_1 & k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

معادلات فوق فقط دارای کوپلینگ دینامیکی هستند و برای دی کوپله شدن دینامیکی باید عناصر غیرقطری ماتریس سختی صفر شوند.

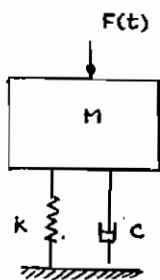
$$k_2 L_2 - k_1 L_1 = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{L_1}{L_2} k_1 = \frac{1}{2} k_1$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک - سال ۷۸ - ۷۷

نیروی هارمونیک $F(t) = F \sin \omega t$ بر مجموعه‌ای مطابق شکل اثر می‌کند. در حالی که $\omega \gg \omega_n$ باشد، افزایش میرایی چه تاثیری بر

ضریب انتقال ($TR = \frac{\text{دامنه نیروی منتقل شده به پایه}}{\text{دامنه نیروی وارده}}$) دارد؟



$$TR = \frac{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{2} \Rightarrow TR = 1$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2} \Rightarrow TR < 1$$

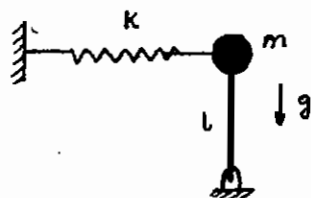
$$\frac{\omega}{\omega_n} < \sqrt{2} \Rightarrow TR > 1$$

در این تست چون $\omega \gg \omega_n$ است، ضریب انتقال TR کوچکتر از یک است و افزودن یک مقدار مساوی به صورت و مخرج یک کسر کوچکتر از یک مقدار کسر یعنی TR را افزایش می‌دهد. این مقدار افزوده شده میرایی (ζ) است که در فرمول TR به صورت و مخرج کسر افزوده می‌شود.

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک - سال ۷۸ - ۷۷

در شکل زیر فرکانس طبیعی با افزایش g (شتاب ثقل) چگونه می‌شود؟



(۱) افزایش می‌یابد.

(۲) کاهش می‌یابد.

(۳) فرقی نمی‌کند.

(۴) بستگی به k, m نیز دارد.

$$T = \frac{1}{2} m (R \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k (R \theta)^2 = \frac{1}{2} k R^2 \theta^2$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} m R^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + k R^2 \theta \dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2}{3} \frac{k}{m} \theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{k}{m}}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست:

معادلات حرکت سیستمی به قرار زیر است. فرکانس‌های طبیعی و مدهای طبیعی این سیستم کدامند؟

$$\ddot{x} = -(x-y) - x$$

$$2\ddot{y} = (x-y) - y$$

$$\left\{ \begin{matrix} -2.73 \\ 1.00 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 0.73 \\ 1.00 \end{matrix} \right\}, \sqrt{2.36}, \sqrt{0.63} \quad (۱)$$

$$\left\{ \begin{matrix} -2.73 \\ 1.00 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 0.73 \\ 1.00 \end{matrix} \right\}, \sqrt{3.24}, \sqrt{1.35} \quad (۲)$$

$$\left\{ \begin{matrix} -0.35 \\ 1.00 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 0.27 \\ 1.00 \end{matrix} \right\}, \sqrt{3.24}, \sqrt{1.35} \quad (۳)$$

$$\left\{ \begin{matrix} -0.35 \\ 1.00 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 0.24 \\ 1.00 \end{matrix} \right\}, \sqrt{1.90}, \sqrt{0.90} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2x - y = 0 \\ 2\ddot{y} - x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +2 & -1 \\ -1 & +2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\det[K - M\omega^2] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 - \omega^2 & -1 \\ -1 & 2 - 2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2 - \omega^2)(2 - 2\omega^2) - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = 0.63 \\ \omega_2^2 = 2.36 \end{cases}$$

با جایگذاری ω_1, ω_2 در معادله ماتریسی فوق، مدهای طبیعی سیستم به دست می‌آیند. گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک - سال ۸۳ - ۸۲

یک قطعه لاستیک تحت آزمایش بوده و روی آن وزنه‌ای برابر N قرار داده‌ایم. تغییر مکان استاتیکی آن ۱ سانتی‌متر اندازه گرفته شده است. وزنه را به مقدار ۲ سانتی‌متر پایین کشیده و رها می‌کنیم. پس از سه سیکل نوسان دامنه ۲ سانتی‌متر می‌گردد. ضریب استهلاک سیستم کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۷

(۳) ۴

(۴) ۱

$$1 = c$$

$$2 = 2c$$

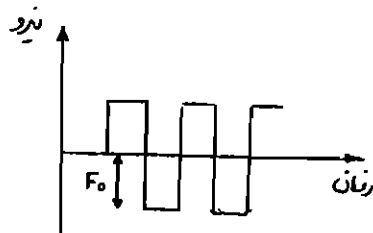
$$\delta = 1 \left(\frac{-1}{2} \right) \Rightarrow \delta = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{2} \right) = \frac{1}{8}$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\pi^2 + \delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + 1}}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مهندسی مکانیک - سال ۸۳ - ۸۲

یک سیستم جرم و فنر یک درجه آزادی بدون استهلاک تحت تاثیر نیروی پریودیک مربعی شکل نشان داده شده در شکل می‌باشد. چنانچه با استفاده از روش تبدیل فوریه، این نیرو تبدیل به نیروهای هارمونیک ساده گردد و در این تبدیل فقط از سه ترم اول بسط استفاده شود، در محاسبات چند درصد خطا در تابع نیرو اعمال خواهد شد؟



(۱) ۱

(۲) ۱۲

(۳) ۱

(۴) ۴

این تابع تابعی فرد است. اگر دوره تناوب آن برابر 2τ باشد، ضرایب بسط فوریه آن برابر خواهند بود با:

$$a = 0 \quad b = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) dt = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) dt$$

$$b = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \left[-\frac{\tau}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right] dt = \frac{2}{\pi} \left[1 - (-1) \right]$$

$$b_1 = \frac{0}{\pi} \quad b_2 = 0 \quad b = \frac{0}{\pi}$$

$$f(t) = 0 = \frac{0}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) + \frac{0}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) + \dots$$

(t) مقدار خطاست.

$$\begin{aligned}
 (t) &= \int_0^t \left(1 - \frac{\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)}{\pi} \right) dt \\
 &= \int_0^t \left(1 - \frac{\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)}{\pi} \right) dt \\
 &= \int_0^t \left(1 - \frac{\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)}{\pi} \right) dt \\
 &= \int_0^t \left(1 - \frac{\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)}{\pi} \right) dt
 \end{aligned}$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مناسبت‌تر بود این تست به‌جای درس ارتعاشات در درس ریاضی مهندسی مطرح می‌گردید!