Sample Questions

Dr. Etemadi

مسئله ۱ – ریشه معادله $xe^{0.5x} + 1.2x - 5 = 0$ در محدوده $[1,2]$ را با استفاده از روش نقطه ثابت و با ارائه محاسبات لازم، محاسبه نمائید. نقطه شروع برابر $x = 1$ می باشد.

$x = \frac{5}{e^{0.5x} + 1.2}$	$g(x) = \frac{5}{e^{0.5x} + 1.2}$
$g'(x) = \frac{-5e^{0.5x}}{2(e^{0.5x} + 1.2)^2}$	$\lvert g'(x)\rvert < 1 \quad \forall x \in [1,2]$
$\lvert g'(1)\rvert = \left\lvert\frac{-5e^{0.5}}{2(e^{0.5} + 1.2)^2}\right\rvert < 0.5079$	$\lvert g'(2)\rvert = \left\lvert\frac{-5e^{0.5\times 2}}{2(e^{0.5\times 2} + 1.2)^2}\right\rvert < 0.4426$
$x_{i+1} = \frac{5}{e^{0.5x_i} + 1.2}$	

با شروع از نقطه $x = 1$: پاسخ: $x = 1.5050$

مسـئله ۲ – بـا اسـتفاده از روش نیـوتن ریشـه دسـتگاه معـادلات غیرخطـی ذیـل را محاسـبه کنیـد. نقطـه شـروع $(x_i, y_i) = (2.5,2.0)$ فرض می شود.

$$f_1(x,y) = -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) = 0$$

$$f_2(x,y) = 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$

حل: محاسبه ژاکوبین مسئله:

$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)$	$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$
$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 18x$	$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 50y$

$$det[J(f_1,f_2)] = det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right) & 0 \\ 18x & 50y \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)50y$$

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^k \\ y^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right) & 0 \\ 18x & 50y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) \\ 9x^2 + 25y^2 - 225 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^k \\ y^k \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 50y & 0 \\ -18x & -\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right) \end{bmatrix}}{-\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)50y} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) \\ 9x^2 + 25y^2 - 225 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^k \\ y^k \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 50y^k & 0 \\ -18x^k & -\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x^k}{2}} - e^{-\frac{x^k}{2}}\right) \end{bmatrix}}{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x^k}{2}} - e^{-\frac{x^k}{2}}\right)50y^k} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x^k}{2}} + e^{-\frac{x^k}{2}}\right) \\ 9(x^k)^2 + 25(y^k)^2 - 225 \end{bmatrix}$$

با شروع از نقطه $(x_i, y_i) = (2.5,2.0)$

$i = 1$	$x = 3.1388$	$y = 2.4001$	$Error\ in\ x = 0.25551$	$Error\ in\ y = 0.20003$
$i = 2$	$x = 3.0339$	$y = 2.3855$	$Error\ in\ x = 0.03340$	$Error\ in\ y = 0.00607$
$i = 3$	$x = 3.0312$	$y = 2.3859$	$Error\ in\ x = 0.00091$	$Error\ in\ y = 0.00016$

مسئله ۴ - تقریب اسپلاین مرتبه ۳ برای داده های جدول را با استفاده از شرایط انتهائی حالت اول تعیین نموده و مقدار تابع در $x = 12.7$ محاسبه نمائید.

i	x	$f(x)$
1	8	5
2	11	9
3	15	10
4	18	8
5	22	7

حل: تعداد $n = 5$ نقطه داده، تعداد توابع اسپلاین $i = 1, \cdots, 4$

توابع اسپلاین به فرم

$$f_i(x) = \frac{a_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{a_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \left[\frac{y_i}{h_i} - \frac{a_i h_i}{6}\right](x_{i-1} - x) + \left[\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{a_{i+1} h_i}{6}\right](x - x_i) \qquad i = 1, \cdots 4$$

که $h_i = x_{i+1} - x_i$

چهار معادله حاصل دارای ۵ ضریب مجهول a_1، a_2، a_3، a_4 و a_5 می باشند. برای اسپلاین مرتبه ۳ طبیعی $a_1 = a_5 = 0$. سایر ضرائب با استفاده از دستگاه معادلات جبری حاصل برای مشتقات مرتبه ۲ محاسبه می شوند.

$$i = 1 \quad h_1 a_1 + 2(h_1 + h_2)a_2 + h_2 a_3 = 6\left[\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right]$$

$$i = 2 \quad h_2 a_2 + 2(h_2 + h_3)a_3 + h_3 a_4 = 6\left[\frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2}\right]$$

$$i = 3 \quad h_3 a_3 + 2(h_3 + h_4)a_4 + h_4 a_5 = 6\left[\frac{y_5 - y_4}{h_4} - \frac{y_4 - y_3}{h_3}\right]$$

$$i = 1 \quad 3a_1 + 2(3 + 4)a_2 + 4a_3 = 6\left[\frac{10 - 9}{4} - \frac{9 - 5}{3}\right]$$

$$i = 2 \quad 4a_2 + 2(4 + 3)a_3 + 3a_4 = 6\left[\frac{8 - 10}{3} - \frac{10 - 9}{4}\right]$$

$$i = 3 \quad 3a_3 + 2(3 + 4)a_4 + 4a_5 = 6\left[\frac{7 - 8}{4} - \frac{8 - 10}{3}\right]$$

$$i=1 \quad 3\times 0+2(3+4)a_2+4a_4=6\left[\frac{10-9}{4}-\frac{9-5}{3}\right]$$

$$i=2 \quad 4a_2+2(4+3)a_3+3a_4=6\left[\frac{8-10}{3}-\frac{10-9}{4}\right]$$

$$i=3 \quad 3a_3+2(3+4)a_4+4\times 0=6\left[\frac{7-8}{4}-\frac{8-10}{3}\right]$$

$$\begin{cases} 14a_2+4a_3=-6.5 \\ 4a_2+14a_3+3a_4=-5.5 \\ 3a_3+14a_3=2.5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_2=-0.3665 \\ a_3=-0.3421 \\ a_4=0.2519 \end{cases}$$

$$f_1(x)=(-0.02036)(x-8)^3+1.667(11-x)^3+3.188(x-8) \qquad 8\le x\le 11$$

$$f_2(x)=(-0.01527)(15-x)^3+(-0.01427)(x-11)^3+2.4948(15-x) + 2.728(x-11) \qquad 11\le x\le 15$$

$$f_3(x)=(-0.019)(18-x)^3+0.014(x-15)^3+3.504(18-x) + 2.5407(x-15) \qquad 15\le x\le 18$$

$$f_4(x)=0.0105(22-x)^3+1.832(22-x)+1.75(x-18) \qquad 18\le x\le 22$$

$$f_2(12.7)=(-0.01527)(15-12.7)^3+(-0.01427)(12.7-11)^3+2.4948(15-12.7) + 2.728(12.7-11)=\mathbf{10.11}$$

مسئله ۱: پاسخ دستگاه معادله همگن ذیل را بدست آورید. در صورتی که بردار ثابت $b=[1;1;1]$ باشد، پاسخ دستگاه معادله $Ax=b$ را بدست آورید.

حل: الف) ماتریس را می توان بصورت پلکانی نوشت. در اینصورت رتبه ماتریس بر مبنای تعداد لولاهای ماتریس پلکانی مشخص می شود.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}R_2-4R_1\rightarrow R_2\\ R_3-7R_1\rightarrow R_3\end{matrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{bmatrix} \qquad R_3-2R_2\rightarrow R_3$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad \mathrm{rank}(A)=2$$

المان های لولا در ستون های اول و دوم هستند پس یک متغیر آزاد در ستون سوم وجود دارد که x_3 است.

فرم معادلات را می نویسیم:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2(-2x_3) + x_3 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 4x_3 + x_3 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

که با توجه به متغیر آزاد x_3 ، تعداد بی نهایت جواب وجود دارد.

ب) با توجه به پائین رتبه بودن ماتریس A، تعداد مجهولات (M) بیشتر از تعداد معادلات (N) می باشد. لذا روش پیشنهادی روش مینیمم نرم است. مطابق روش فوق برای دستگاه مذکور حل پیشنهادی عبارتست از: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T[\mathbf{A}\mathbf{A}^T]^{-1}\mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3125 \\ 0 \\ 0.6250 \end{bmatrix}$$

مسئله ۲: با استفاده از روش نیوتن – رافسون روشی برای محاسبه $\sqrt[3]{9}$ تا دقت ۶ رقم بعد از اعشار ارائه نموده و مقدار آن را محاسبه نمائید.

حل: محاسبه $\sqrt[3]{9}$ معادل محاسبه ریشه $f(x) = 9 - x^3$ است و چنانچه $x > 0$، در اینصورت ریشه $f(x) = 0$ عبارتست از: $x = \sqrt[3]{9}$ ، که معادله تکرار با استفاده از روش نیوتن – رافسون عبارتست از:

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$	$x_{k+1} = x_k - \frac{9 - x_k^3}{-3x_k^2}$	$x_{k+1} = x_k + \frac{9 - x_k^3}{3x_k^2}$

جدول محاسبات از روش نیوتن-رافسون در محیط Excel

x_k	$9-x_k^3$	$3x_k^2$	$x_k+(9-x_k^3)/(3x_k^2)$	x_{k+1}
1.000000	8.000000	3.000000	3.666667	3.666667
3.666667	-40.296296	40.333333	2.667585	2.667585
2.667585	-9.982560	21.348028	2.199975	2.199975
2.199975	-1.647631	14.519664	2.086499	2.086499
2.086499	-0.083524	13.060431	2.080104	2.080104
2.080104	-0.000256	12.980492	2.080084	2.080084
2.080084	0.000000	12.980246	2.080084	2.080084

مسئله ۴- جدول داده های ذیل را با یک تابع منمنی اسپلاین مکعبی با شرایط نقاط ابتدائی و انتهائی بصورت $S_0 = S_1$ و $S_n = S_{n-1}$ تقریب زده و مقدار تابع در $x = 0.2$ را محاسبه نمائید. (تذکر: S_i : مشتق دوم تابع)

x	−0.50	0.00	0.25	1.00
y	0.731	1.000	1.268	1.718

حل: رابطه مقادیر مشتقات مرتبه دوم:

$$i = 1 \rightarrow S_1 = S_2$$

$$S_{i-1}(x_{i-1} - x_i) + 2S_i(x_{i-1} - x_{i+1}) + S_{i+1}(x_i - x_{i+1}) = 6\left(\frac{y_{i-1} - y_i}{x_{i-1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right) \quad i = 2,3$$

$$i = n \rightarrow S_n = S_{n-1} \rightarrow i = 4 \rightarrow S_4 = S_3$$

$$i = 2 \rightarrow S_1(x_1 - x_2) + 2S_2[(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)] + S_3(x_2 - x_3) = 6\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right)$$

$$i = 3 \rightarrow S_2(x_2 - x_3) + 2S_3[(x_2 - x_3) + (x_3 - x_4)] + S_4(x_3 - x_4) = 6\left(\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} - \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}\right)$$

$$x_1 - x_2 = h_1 \qquad x_2 - x_3 = h_2 \qquad x_3 - x_4 = h_3$$

$$i = 1 \rightarrow S_1 = S_2$$

$$i = 2 \rightarrow h_1S_1 + 2[h_1 + h_2]S_2 + h_2S_3 = 6\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right)$$

$$i = 3 \rightarrow h_2S_2 + 2[h_2 + h_3]S_3 + h_3S_4 = 6\left(\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} - \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}\right)$$

$$i = 4 \rightarrow S_4 = S_3$$

$$h_1S_2 + 2[h_1 + h_2]S_2 + h_2S_3 = 6\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right)$$

$$h_2S_2 + 2[h_2 + h_3]S_3 + h_3S_3 = 6\left(\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} - \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}\right)$$

$$[3h_1 + 2h_2]S_2 + h_2 S_3 = 6\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right)$$

$$h_2 + [2h_2 + 3h_3]S_3 = 6\left(\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} - \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 - x_2 = -0.5 & x_2 - x_3 = -0.25 & x_3 - x_4 = -0.75 \\ y_1 - y_2 = -0.269 & y_2 - y_3 = -0.268 & y_3 - y_4 = -0.45 \end{array}$$

$$[3(-0.5) + 2(-0.25)]S_2 + (-0.25)S_3 = 6\left(\frac{-0.269}{-0.5} - \frac{-0.268}{-0.25}\right)$$

$$(-0.25)S_2 + [2(-0.25) + 3(-0.75)]S_3 = 6\left(\frac{-0.268}{-0.25} - \frac{-0.45}{-0.75}\right)$$

$$\begin{bmatrix} -2.0 & -0.25 \\ -0.25 & -2.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} -0.534 \\ 0.472 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.204 \\ 2.832 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7506 \\ -1.1890 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.751 \\ 1.751 \\ -1.189 \\ -1.189 \end{bmatrix}$$

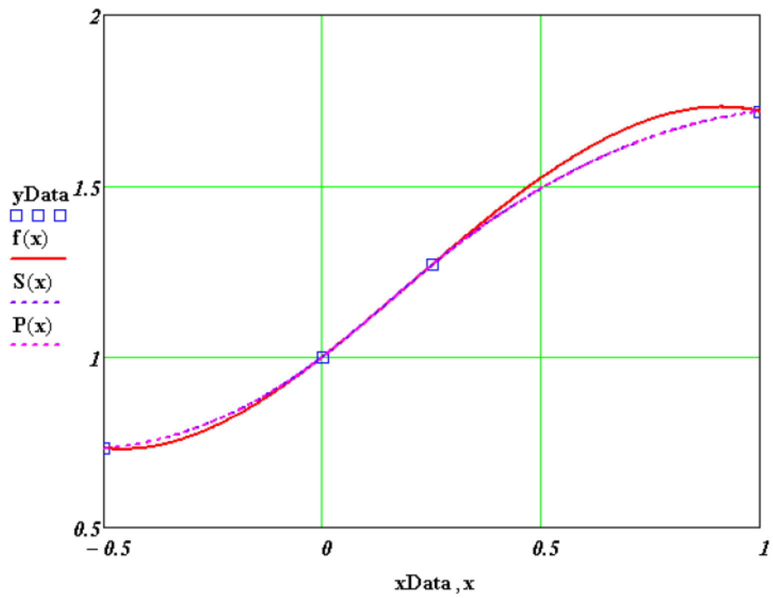
$$f_{i,i+1}(x) = \frac{S_i}{6}\left[\frac{(x - x_{i+1})^3}{x_i - x_{i+1}} - (x - x_{i+1})(x_i - x_{i+1})\right] - \frac{S_{i+1}}{6}\left[\frac{(x - x_i)^3}{x_i - x_{i+1}} - (x - x_i)(x_i - x_{i+1})\right] + \frac{y_i(x - x_{i+1}) - y_{i+1}(x - x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

$$f_{2,3}(x) = \frac{S_2}{6}\left[\frac{(x - x_3)^3}{x_2 - x_3} - (x - x_3)(x_2 - x_3)\right] - \frac{S_3}{6}\left[\frac{(x - x_2)^3}{x_2 - x_3} - (x - x_2)(x_2 - x_3)\right] + \frac{y_2(x - x_3) - y_3(x - x_2)}{x_2 - x_3}$$

$$f_{2,3}(x) = \frac{1.751}{6}\left[\frac{(x - 0.25)^3}{-0.25} - (x - 0.25)(-0.25)\right] - \frac{1.189}{6}\left[\frac{(x)^3}{-0.25} - (x)(-0.25)\right] + \frac{(x - 0.25) - 1.268(x)}{-0.25}$$

$$f_{2,3}(x) = -1.969\,x^3 + 0.88\,x^2 + 0.977\,x + 1$$

$$f_{2,3}(0.2) = 1.215$$



- Use Simpson and four point Gauss method to evaluate the following Integral

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{4}\left[f(-1) + 3f\left(-\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1)\right]$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx = \frac{1}{4}\left[e^{-(-1)^2} + 3e^{-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} + 3e^{-\left(\frac{1}{3}\right)^2} + e^{-(1)^2}\right] = 1.5261987$$

- Gauss method

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx = (0.34785485)e^{-(-0.86113631)^2} + (0.65214515)e^{-(-0.33998104)^2} + (0.65214515)e^{-(0.33998104)^2} + (0.34785485)e^{-(0.86113631)^2} = 1.49333462$$

2. Solve this diff. equ. using Taylor method

$y'' = 2y$	$y(0) = 0$	$y'(0) = 1.0$

$y'' = 2y$

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ 2y_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}'' = \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2' \\ 2y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \end{bmatrix}$$

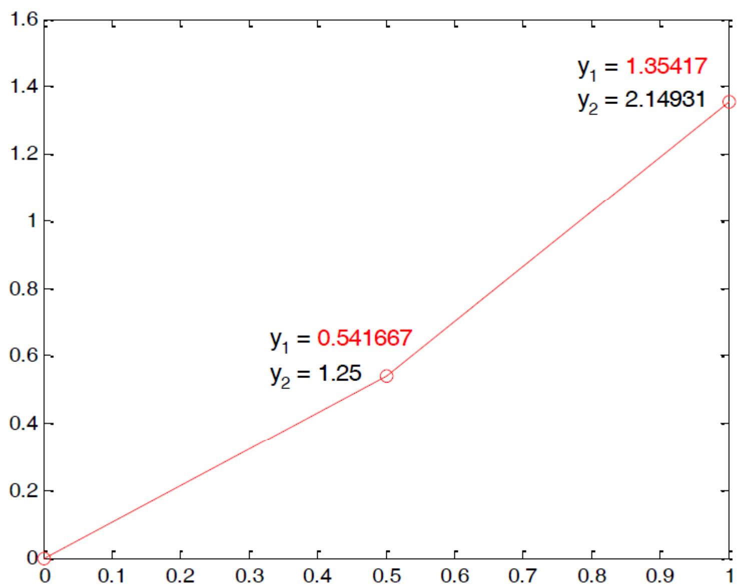
$$\mathbf{y}''' = \begin{bmatrix} y_1''' \\ y_2''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1' \\ 2y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_2 \\ 2(2y_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t+h) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{y}'(t)h + \frac{1}{2!}\mathbf{y}''(t)h^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{y}'''(t)h^3$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t+h) \\ y_2(t+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} h + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} h^2 + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} y_1''' \\ y_2''' \end{bmatrix} h^3$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t+h) \\ y_2(t+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} y_2(t) \\ 2y_1(t) \end{bmatrix} + \frac{h^2}{2}\begin{bmatrix} 2y_1(t) \\ 2y_2(t) \end{bmatrix} + \frac{h^3}{6}\begin{bmatrix} 2y_2(t) \\ 4y_1(t) \end{bmatrix}$$

	t		
عبارات بسط تیلور	0	0.5	1
$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0.541667 \\ 1.25 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} y_2(t) \\ 2y_1(t) \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 \\ 2(0) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.25 \\ 2(0.541667) \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2y_1(t) \\ 2y_2(t) \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 2(0) \\ 2(1) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2(0.541667) \\ 2(1.25) \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2y_2(t) \\ 4y_1(t) \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 2(1) \\ 4(0) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2(1.25) \\ 4(0.541667) \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} y_1(t+h) \\ y_2(t+h) \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{0.5^2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2(1) \end{bmatrix} + \frac{0.5^3}{6} \begin{bmatrix} 2(1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.541667 \\ 1.25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.541667 \\ 1.25 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.083334 \end{bmatrix} + \frac{0.5^2}{2} \begin{bmatrix} 1.083334 \\ 2.5 \end{bmatrix} + \frac{0.5^3}{6} \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.166668 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.354167 \\ 2.149306 \end{bmatrix}$



الف) با استفاده از روش ۳ نقطه ای گوس – لژاندر انتگرال زیر تا دقت ۶ رقم معنی دار محاسبه نمائید.

$$\boxed{\int_1^5 \frac{dt}{t}}$$

ب) ضمن محاسبه تعداد تقسیمات برای دست یابی به خطای محاسباتی مشابه حالت الف از روش ذوزنقه، انتگرال فوق را محاسبه نمائید.

حل: طبق روش گوس-لژاندر ۳ نقطه ای

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right)dx = \frac{b-a}{2}(A_0f_0 + A_1f_1 + A_2f_2)$$

بردار نقاط : $x = \left[-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right]'$ بردار وزن ها: $A = \left[\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}\right]'$

تابع جدید پس از تغییر متغیر: $f(x) = f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right)$ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$f = [0.689272, 0.333333, 0.219819]'$ $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ $f(t) = \frac{1}{t}$

حل با استفاده از روش گوس- لژاندر: $2(A^Tf) = 2\left[\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}\right]\begin{bmatrix} 0.689272 \\ 0.333333 \\ 0.219819 \end{bmatrix} = 1.602694$

حل دقیق: $\int_1^5 \frac{dt}{t} = \ln(t)|_1^5 = 1.609438$

خطای محاسبات در مقایسه با حل دقیق: $|1.609438 - 1.602694| = 0.006744$

برای کسب دقت یکسان با استفاده از روش ذوزنقه از هر یک از توابع $f(t) = \frac{1}{t}$ و یا رابطه تغییر متغیر یافته $f(x)$ می توانیم استفاده می کنیم. در صورت استفاده از تابع ابتدائی:

$f(t) = \frac{1}{t}$ $f'(t) = -\frac{1}{t^2}$ $f''(t) = \frac{2}{t^3}$

مشتق دوم تابع پیوسته و : $0.016 \le f''(t) \le 2$ $1 \le x \le 5$

$E = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\zeta)$ $E = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\zeta)$ $E = -\frac{4^3}{12n^2}f''(\zeta)$

$$\frac{4^3 \times 2}{12n^2} \leq 0.006744 \qquad n \geq \sqrt{\frac{2 \times 4^3}{12 \times 0.006744}} \qquad n \geq 39$$

در صورت استفاده از تابع تغییر متغیر یافته $f(x)$ خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} \qquad f'(x) = -\frac{2}{(2x+3)^2} \qquad f''(x) = \frac{8}{(2x+3)^3}$$

مشتق دوم تابع پیوسته و :

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad 0.0064 \leq f''(x) \leq 8$$

$$E = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\zeta) \qquad E = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\zeta) \qquad E = -\frac{8}{12n^2} f''(\zeta)$$

$$\frac{2 \times 8}{3n^2} \leq 0.006744 \qquad n \geq \sqrt{\frac{2 \times 8}{3 \times 0.006744}} \qquad n \geq 28$$

روش ذوزنقه:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_1) + 2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$2\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2(0.8055335) = 1.611067 \qquad E = 1.6291E-3$$