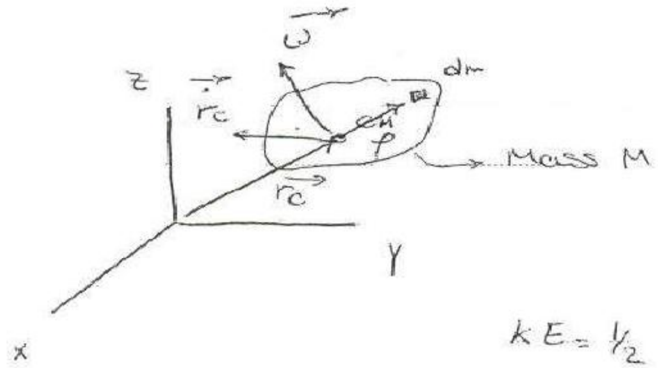
فصل سوم

کار و انرژی اجسام صلب

انرژی جنبشی جسم صلب



با مجموعه ذرات

$$KE = \tfrac{1}{2} M(\dot{\vec{r}}_c)^2 + \tfrac{1}{2} \sum m_i |\dot{\vec{\rho}}_i|^2$$

سرعت ذره نسبت به مرکز جرم

for rigid bodies:

$$\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

سرعت ذره جسم

$$KE = \tfrac{1}{2} M V_c^2 + \tfrac{1}{2} \iiint |\vec{\omega} \times \vec{\rho}|^2 \, dm$$

$$\iiint_M |\vec{\omega}\times\vec{\rho}|^2\,dm = \iiint_M |\vec{\omega}\times\vec{\rho}| \cdot |\vec{\omega}\times\vec{\rho}|\,dm$$

اگر xyz مرکز جرم منطبق گردد :

$$= \iiint_M \{ [(\omega_x i + \omega_y j + \omega_z k) \times (x i + y j + z k)] \cdot [\,''\,] \} dm$$

$$= I_{xx}\omega_x^2 - I_{xy}\omega_x\omega_y - I_{xz}\omega_x\omega_z + \cdots$$

$$\Rightarrow KE = \tfrac{1}{2} M v_c^2 + \tfrac{1}{2}\big(I_{xx}\omega_x^2 - I_{xy}\omega_x\omega_y - I_{xz}\omega_x\omega_z$$

$$- I_{yx}\omega_y\omega_x + I_{yy}\omega_y^2 - I_{yz}\omega_y\omega_z$$

$$- I_{zx}\omega_z\omega_x - I_{zy}\omega_z\omega_y + I_{zz}\omega_z^2 \big)$$

For principal Axis

$$KE = \tfrac{1}{2} M v_c^2 + \tfrac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 \right)$$

For pure rotation

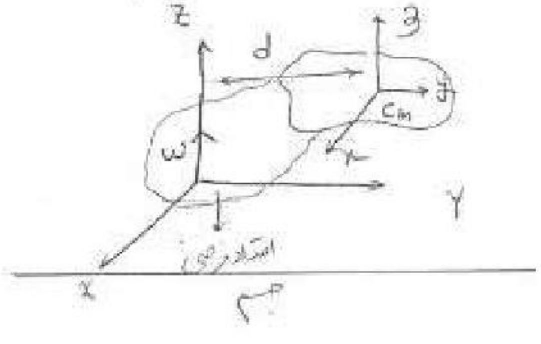
$$KE = \tfrac{1}{2} M v_c^2 + \tfrac{1}{2} I_{zz}\omega_z^2$$

اگر محور z موازی محور دوران جسم

$$v_c = \omega d$$

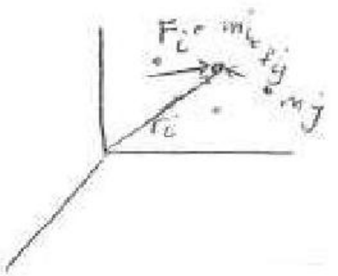
$$KE = \tfrac{1}{2}\left(I_{zz} + M d^2\right)\omega^2$$

$$KE = \tfrac{1}{2} \underset{\llcorner\!\to}{I}\, \omega^2$$ محور دوران



روابط کار و انرژی

در سیستم ذرات



$$\int_1^2 \vec{F_i}\, d\vec{r_i} + \int_1^2 \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \cdot dr_i$$
$$= \frac{1}{2}(m_i v_i^2)_2 - \frac{1}{2}(m_i v_i^2)_1$$

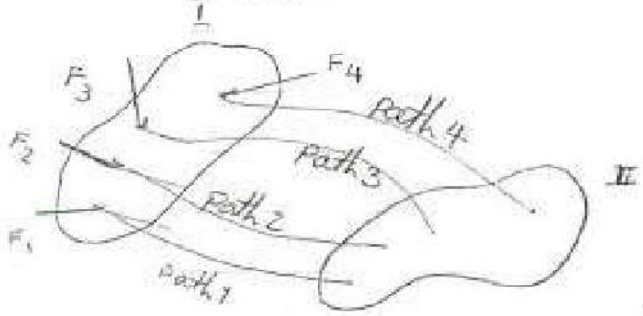
برای ذره m_i

$$f_{ij} = f_{ji} \longrightarrow f_{ij}\, dr_i \neq f_{ji}\, dr_j$$

برای سیستم ذرات $f_{ij}(dr_i - dr_j) \neq 0$ در یک جسم صلب نیروهای داخلی کاری انجام نمی دهند اما نیروهای داخلی بین اجسام صلب می توانند کار انجام دهند

برای جسم صلب $f_{ij}(dr_i - dr_j) = 0$

$$(\text{work})_{I,II} = \underset{\text{Path 1}}{\int_I^{II} \vec{F_1}\cdot d\vec{s_1}} + \underset{\text{Path 2}}{\int_I^{II} \vec{F_2}\cdot d\vec{s_2}} + \cdots + \underset{\text{Path n}}{\int_I^{II} \vec{F_n}\cdot d\vec{s_n}}$$



$$W_k\Big|_I^{II} = \Delta KE$$

سیستم کانسرواتیو

$$\Delta KE + \Delta PE = 0$$
$$W_k^c\Big|_I^{II} = -\Delta PE$$

$$\Delta KE + \Delta PE = W_k^{nc}\Big|_I^{II}$$

سیستم غیرکانسرواتیو

معادلات ایمپالس – مومنتوم

$\vec{F}$ کل نیروهای خارجی وارد بر جسم صلب باشد .

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot dt = \underset{\checkmark}{I_{lin}} = (M\vec{v_C})_2 - (M\vec{v_C})_1$$

linear Impulse

تغییر مومنتوم خطی سیستم

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(mv)$$

برای سیستم دارای n جسم صلب

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot dt = \left[\sum_{i=1}^{n} M_i(\vec{v_C})_i\right]_2 - \left[\sum_{i=1}^{n} M_i(\vec{v_C})_i\right]_1$$

برآیند نیروهای خارجی وارد بر اجسام صلب

برای نقطه A

1- ثابت

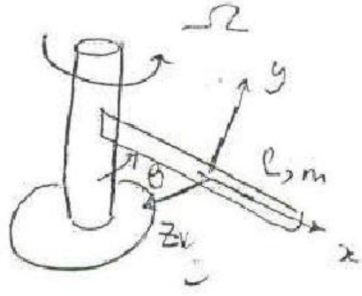
2- مرکز جرم

3- شتاب آن از مرکز جرم عبور کند

$$\vec{M_A} = \dot{\vec{H_A}}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M_A\,dt = I_{ang} = (\vec{H_A})_2 - (\vec{H_A})_1$$

مثال : میله به میله قائم متصل است که می تواند دوران کند هدف پیدا کردن انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل میله را محاسبه کنید.



$$\vec{\omega} = -\Omega\cos\theta\, i + \Omega\sin\theta\, j + \dot{\theta}\, k$$

$$I_{xx} = 0 \qquad I_{yy} = I_{zz} = \tfrac{1}{12} m l^2$$

$$T = \tfrac{1}{2} m (v_C)^2 + \tfrac{1}{2} I_{xx}\, \omega_x^2 + \tfrac{1}{2} I_{yy}\, \omega_y^2 + \tfrac{1}{2} I_{zz}\, \omega_z^2$$

$$v_C = \vec{\omega} \times \vec{r} = (-\Omega\cos\theta\, i + \Omega\sin\theta\, j + \dot{\theta}\, k) \wedge (L/2\; i)$$

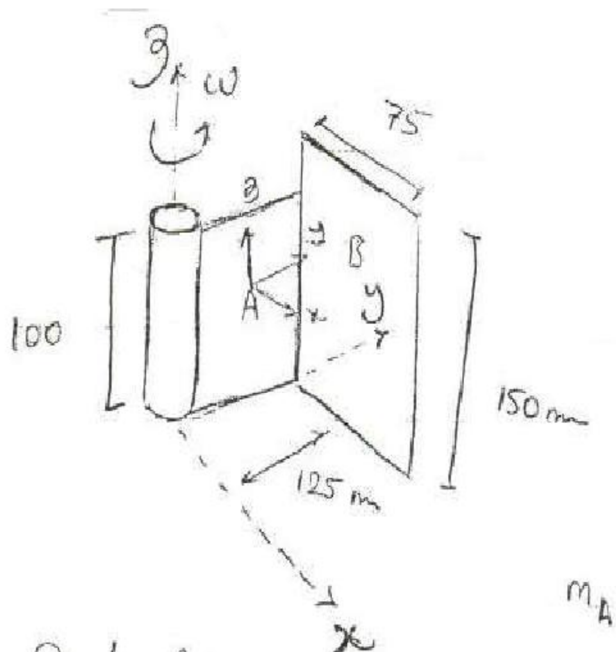
$$= -\Omega\, l/2 \sin\theta\, \hat{k} + \dot{\theta}\, l/2\, \hat{j}$$

$$\tfrac{1}{2} m v_C^2 = \tfrac{1}{2} m\left((\dot{\theta}\, l/2)^2 + (-\Omega\, l/2 \sin\theta)^2 \right)$$

$$\Rightarrow T = \tfrac{1}{6} m l^2 (\Omega^2 \sin\theta + \dot{\theta}^2)$$

$$V = -mg\, l/2 \cos\theta$$ نقطه B مبنا

مثال : از ضخامت دو ورق صرف نظر می کنیم



جرم واحد سطح = 70 kg/m²

$\omega = 30$

$H_O = ?$

$T = ?$

$m_A = 0.1 \times 0.125 \times 70 = 0.875 \text{ kg}$

$m_B = 0.15 \times 0.075 \times 70 = 0.788 \text{ kg}$

Part A:

$$I_{xx} = \frac{1}{12} m_A \left[0.1^2 + 0.125^2\right] + m \times \left[\left(\frac{0.125}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.1}{2}\right)^2\right]$$

$$= 0.00747 \text{ kg m}^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{3} m_A (0.1)^2 = 0.00292 \text{ kg m}^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{3} m_A (0.125)^2 = 0.00456 \text{ kg m}^2$$

$$I_{xz} = I_{xy} = 0$$

$$I_{yz} = m_A \left(\frac{0.1}{2} \times \frac{0.125}{2}\right)$$

به صورت مشابه برای Part B بدست می آید

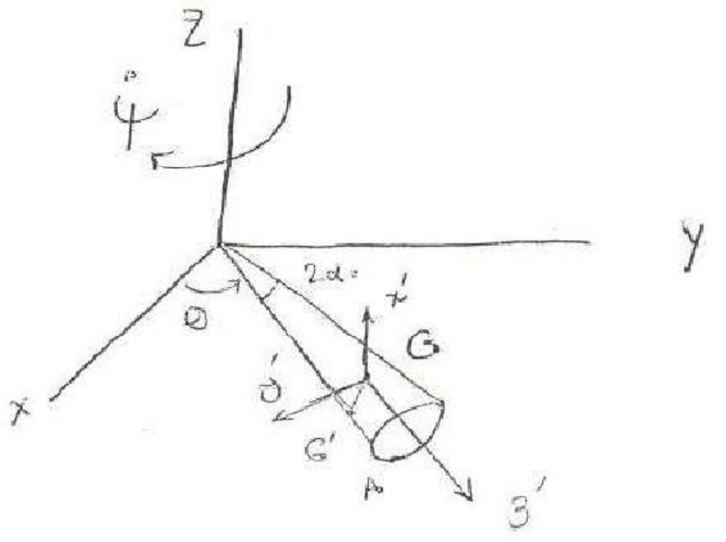
$$I_{xx} = 0.0257 \ \mathrm{kg\,m^2}$$
$$I_{yy} = 0.0103 \ \mathrm{kg\,m^2}$$
$$I_{zz} = 0.018 \ \mathrm{kg\,m^2}$$
$$I_{xy} = 0.00369 \ \mathrm{kg\,m^2}$$
$$I_{xz} = 0.00228$$
$$I_{yz} = 0.0102$$

الف) $$H_O = \left(I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \right) i + \left(\qquad \right) j + \left(\qquad \right) k$$

$$\omega_x = \omega_y = 0$$
$$\omega_z = 30$$
$$\Rightarrow H_O = 30\left(-0.00221\, i - 0.0101\, j + 0.018\, k \right)$$

ب) $$T = \tfrac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\vec{H}_O = \tfrac{1}{2}\left(30\hat{k}\right)\cdot\left(\qquad \right) = 8.25 \ \text{Joule}$$

مثال : مخروطی به ارتفاع h و شعاع قاعده R داریم انرژی جنبشی مخروط را بدست آورید . مخروط با سرعت 4 دوران می کند. زاویه بین محور x و خط تماس با مخروط صفحه xy است.



G' تصویر نقطه G بروی صفحه xy

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG'} + \overrightarrow{GG'}$$

$$\overrightarrow{OG} = OG\cos\alpha\cdot\cos\theta\, I + OG\cos\alpha\cdot\sin\theta\, J + OG\sin\alpha\cdot K$$

xyz [illegible] K, J, I

$OG = 3/4 h$

$OG = 3/4 h \left[\cos\alpha_0 \cos\theta \, \hat{I} + \cos\alpha_0 \sin\theta \, \hat{J} + \sin\alpha \, K \right]$

$$\sin\alpha_0 = \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \qquad OG = \frac{3h}{4\sqrt{h^2+R^2}} \left[h\cos\theta \, \hat{I} + R\sin\theta \, \hat{J} + R\hat{K} \right]$$

$$\cos\alpha_0 = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

[illegible] // OA [illegible]

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \cot\alpha_0 \left(\cos\theta \, \hat{I} + \sin\theta \, \hat{J} \right)$$

$$= \frac{\dot{\varphi} h}{R} \left(\cos\theta \, \hat{I} + \sin\theta \, \hat{J} \right)$$

$$\omega^2 = h^2/R^2 \; \dot{\varphi}^2$$

$$\vec{V}_G = \vec{\omega} \times \vec{OG} = \frac{3h^2}{4\sqrt{R^2+h^2}} \dot{\varphi} \left(\sin\theta \, \hat{I} + \cos\theta \, \hat{J} \right)$$

$$|\vec{V}_G| = \bar{v} \longrightarrow \bar{v}^2 = \frac{9h^4}{16(R^2+h^2)} \dot{\varphi}^2$$

$$I_{x'} = I_{y} = \frac{3}{20} M \left(R^2 + h^2/4 \right)$$

$$I_{z'} = 3/10 \, MR^2$$

$$? \left\{ \begin{aligned} \omega_{x'} &= -\dot{\varphi} \cos\alpha_0 \\ \omega_{y'} &= 0 \\ \omega_{z'} &= \dot{\varphi} \frac{\cos^2\alpha_0}{\sin\alpha_0} \end{aligned} \right.$$

$$T = 1/2 \, Mv^2 + 1/2 \left[I_{x'} \omega_{x'}^2 + I_{y'} \omega_{y'}^2 + I_{z'} \omega_{z'}^2 \right] =$$

فصل چهارم . مکانیک تحلیلی

مقدمه :

1-اساس مکانیک نیوتنی تعادل و نیرو است. اما اساس مکانیک تحلیلی کار و انرژی (توابع اسکالر) است.

2-در مکانیک تحلیلی از مختصات عمومی یا مختصات تعمیم یافته (Generaliged) استفاده می کنیم برخلاف مکانیک نیوتنی که مختصات مورد استفاده معنی فیزیکی دارند.

3 در مکانیک تحلیلی نیروهای قیدی که کار انجام نمی دهند در مسئله ظاهر نمی شوند. اما بعد از حل مسئله می توان این نیروها را بدست آورد. اما در مکانیک نیوتنی تمام نیروهای قیدی را باید منظور کنیم.

مختصات تعمیم یافته

سیستم دارای N ذره است.

3N درجه آزادی برای تبیین حرکت سیستم لازم است.(هر ذره 3 درجه آزادی دارد چون ذره است دوران نمی کند)

$$\vec{r_i} = \vec{r_i}(x_i, y_i, z_i) = x_i\,\hat{i} + y_i\,\hat{j} + z_i\,\hat{k} \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \qquad n = 3N$$

$$y_1 = y_1(q_1, q_2, \dots q_n)$$

$$z_1 = z_1(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$x_2 = x_2(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

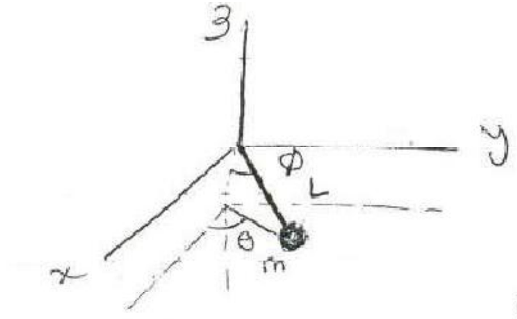
$$\vdots$$

$$z_N = z_N(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\begin{array}{|ll}
x_1 & q_1 \\
y_1 & q_2 \\
z_1 & q_3 \\
\vdots & \vdots \\
x_N & \vdots \\
y_N & \\
z_N & q_{3N} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{مختصات فیزیکی} & \text{مختصات تعمیم یافته}
\end{array}$$

پاندول کروی Spherical Peodulum



$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} L \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix}$$

q می‌توانند هر چیزی باشند.

$$q_1 = L$$
$$q_2 = \theta$$
$$q_3 = \phi$$

$$\begin{cases} x = q_1 \cos q_2 \sin q_3 = L \cos\theta \sin\phi \\ y = q_1 \sin q_2 \sin q_3 = L \sin\theta \sin\phi \\ z = -q \cos q_3 = -L \cos\phi \end{cases}$$

if $L = cte$

$$x^2 + y^2 + z^2 = cte = l^2$$

معادله قید : نشان دهنده این است که مختصات تعمیم یافته با هم ارتباط دارند پس تعداد مختصات کمتری برای تبیین سیستم نیاز است.

اگر سیستمی با N ذره داشته باشیم و m معادله قید داشته باشیم

$$P = n - m = 3N - m$$

↲ درجه‌ی آزادی سیستم

یا تعداد مختصات مستقل

مورد نیاز $\longrightarrow q_k \qquad k = 1, 2, \ldots, P$

سیستم مقید | Constrained Generalyzed Co

غیرمقید | Un Constrained

به ازای کدام q_k که مستقل هستند استفاده می‌کنیم.

م

$q_k(t)$ Generalized Co

$\Downarrow$

$\dot{q}_k(t)$ Generalized velocity

$\left.\begin{matrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{matrix}\right\} \longrightarrow$ فضای حالت state space $\Rightarrow$ تعداد بعد فضا ، $2n$

$q_1 \qquad \dot{q}_1$

$q_2 \qquad \dot{q}_2$

$q_3 \qquad \dot{q}_3$

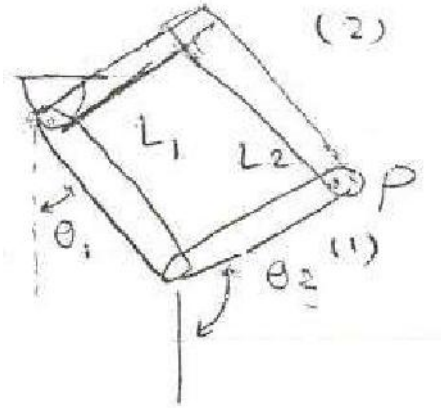
$\vdots \qquad \vdots$

$q_n \qquad \dot{q}_n$

Ambigvous Gen . Co

اگر در مسئله پاندول ار مختصات X و L و Q استفاده کنیم به ازای یک X مشخص و L و Q مشخص دو مکان برای پاندول پیدا می کنیم.

در حل مسائل باید از این نوع مختصات اجتناب کنیم.



برای مشخص کردن مختصات باید دو زاویه θ_1 و θ_2 را داشته باشیم.

اگر از مختصات کارتزین X و Y استفاده کنیم مسئله ما در جواب دارد یعنی برای رسیدن به نقطه P دو مکانیزم خواهیم داشت.

در این مسئله مختصات X و Y ، مختصات گیج کننده است.

دو نکته مهم :

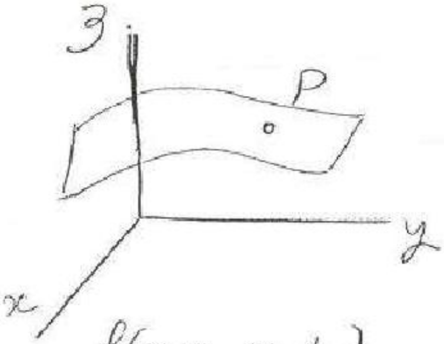
1-مختصات تعمیم یافته (مستقل یا وابسته) یک Set (مجموعه) واحد نیستند و انعطاف پذیری زیادی وجود دارد.

2-اگر مختصات تعمیم یافته انتخاب می شود (خصوصاً از نوع مستقل) از Ambigvity اجتناب شود.

قیود Constraints

معادله قید ⟵ تشریح کننده هندسه یا سینماتیک قید است.

نیروهای قید ⟵ نیروهای تماس



نقطه P موظف است در صفحه حرکت کند .

$f(x, y, z, t) = 0$

معادله قید است برای حرکت جسم در فضا

$\leftarrow$ Configuration Constraint

در حالت کلی :

$f(q_1, \dots, q_n, t) = 0$

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3}dq_3 + \quad + \frac{\partial f}{\partial q_n}dq_n + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0$$

Constraint relation in pfaffian form

به زمانی که معادله قید را به صورت دیفرانسیلی بنویسیم .

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

velocity Constior Motion Const.

$$\rightarrow \begin{cases} a_x\dot{x}+a_y\dot{y}+a_z\dot{z}+a_0=0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_k + a_{j0}=0 \end{cases}$$

$$j=1,2,\dots,m$$

تعداد معادلات قیدی

a_x و a_y و a_z و a_{jk} و a_{j0} تابع زمان و مختصات تعمیم یافته هستند

قید هولونومیک Holonomic

قیدی است که ان قید را هم می توان به صورت Confiycration نوشت و هم به صورت velocity نوشت.

قید غیر هولونومیک non Holonomic ← زمانی که نتوان آن قید را به دو صورت نوشت.

در قیود هولونومیک ما از معادله Velocity می توانیم انتگرال بگیریم و F را بدست آوریم اما غیر هولونومیک انتگرال پذیر نیست یعنی چنین F وجود ندارد.

قید هولونومیک

$$f_j(q_1,\dots,q_n)=0$$

قید $x^2+y^2+z^2+\ell^2=0$ تابع زمان است زیرا X و Y و Z تابع زمان هستند.

یعنی به صورت منحنی implicite تابع زمان است.

اما تابع $x^2+y^2+z^2+t^2-l^2=0$ به صورت صریح explicite تابع زمان است.

اگر قید هولونومیکی داشته باشیم که به صورت صریح تابع t نباشد :

$$f_j(q_1,\dots,q_n)=0$$ scleronomic

و اگر به صورت صریح تابع t باشد :

$$f_j(q_1,\dots,q_n,t)=0$$ Rheonomic

$$f(q_1,q_2,\dots,q_n)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial q_n}\dot{q}_n=0$$

scleronomic

Rheonomic

$$f(q_1,q_2,\dots,q_n,t)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial q_n}\dot{q}_n+\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

قیود: هولونومیک ✓ / غیرهولونومیک ✓

این نوع قیود را به صورت نوع اول
یا فرم کلی می‌توان نوشت و به صورت فرم اول نوشته می‌شود

فرمول کلی $$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_k+a_{j0}=0$$ تعداد قیود $J=1,2,\dots,m$

قیود هولونومیک

$$f(x, y, z) = 0$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} = 0$$

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

$$\vec{V} = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla f \cdot \vec{V} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} = 0$$

$\Rightarrow \quad \nabla f \cdot \vec{V} \quad \Rightarrow$ سرعت بر صفحه مماس است

چون وقتی یک جسمی مقید به حرکت بر صفحه است

سرعت آن باید بر صفحه مماس باشد

✓ نیروی قیدی وجود دارد که جسم را بر روی صفحه نگه می دارد در واقع نیروی قیدی عمود بر صفحه سبب نگه داشتن ذره بر روی صفحه می گردد.

$$\vec{F'} = F'\hat{n} \quad \xrightarrow{\text{بردار یکه عمود بر سطح}} \quad = F'_x\, i + F'_y\, j + F'_z\, \hat{k}$$

$$\vec{F'} \perp V \quad \text{و} \quad \nabla f \cdot \vec{V} = 0$$

$$n \parallel \nabla f \Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{\nabla f}}{|\vec{\nabla} f|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}}{\left[(\ )^2 + (\ )^2 + (\ )^2\right]^{1/2}}$$

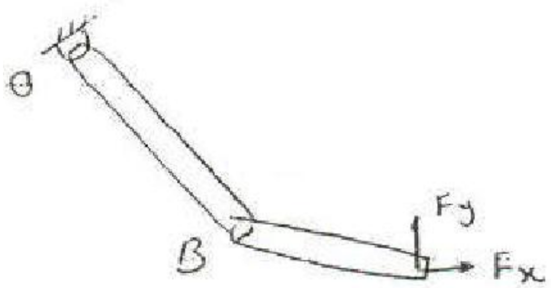
$$\Rightarrow \frac{F'_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{F'_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{F'_z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

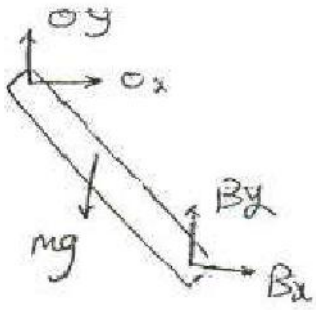
حال می خواهیم کار انجام شده توسط نیروی قید در هنگام جابه جایی جسم از $\vec{r}$ به r + dr را بدست آوریم.

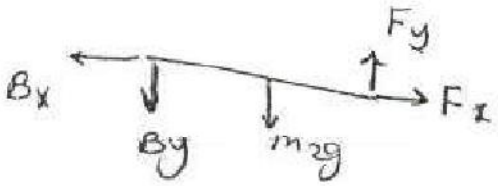
$$dw = \vec{F'} \cdot d\vec{r} = \frac{F'}{|\vec{\nabla} f|}\, \nabla \vec{f} \cdot \vec{dr} = 0$$

کار انجام شده توسط نیروی قیدی هولونومیک که مستقل از زمان است همواره صفر است (قیود workless)

(به صورت صریح)







کار نیروهای قیدی در کل مجموعه برابر صفر است.یعنی اگر یک میله را در نظر بگیریم B کار را انجام می دهد اما در نهایت مجموع این دو کار برابر صفر است.

نیروهای نرمال نظیر نیروهای تکیه گاهی نیروهای قیدی هستند.

اما نیروهای اصطکاک همیشه نیروهای قیدی نیستند اگرچه مقدار انها به نیروهای نرمال وابسته است.

در مسائل استاتیکی نیروی اصطکاک را نیروی قیدی می گیرد چون مانع از حرکت جسم می شود. **اما در** مسائل دینامیکی نیروی اصطکاک فقط مانند یک نیروی خارجی بر روی سیستم عمل می کند ، پس **نیروی قیدی محسوب نمی شود.**

اگر قید هولونومیک به صورت

$$f(x,y,z,t)=0$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} = \frac{-\partial f}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{v} \neq 0$$

$$dw = \vec{F}' \cdot dr = \frac{F'}{|\nabla \cdot \vec{f}|} \cdot \vec{\nabla f} \cdot \vec{dr} \neq 0$$

کار نیروهای قیدی دیگر صفر نیست.

قیود غیر هولونومیک

$$a_x\dot{x} + a_y\dot{y} + a_z\dot{z} + a_0 = 0$$

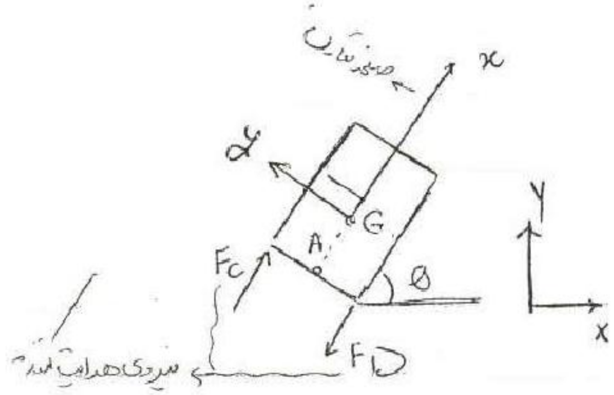
یا

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_k + a_{j0} = 0 \qquad j = 1,2,\ldots,m$$

تعداد قیود

یکی از قیود معروف غیر هولونومیک غلتش یک جسم بر روی زمین است. یک گوی بر روی زمین 2 درجه ازادی دارد یعنی هم می تواند بلغزد هم بغلتد. اما در غلتش ناب قیدی وجود دارد که از لغزیدن ان جلوگیری می کند. این قید قیدی غیر هولونومیک است (چرا؟ بعداً می فهمید!)

می خواهیم سرعت نقطه A همواره بر روی صفحه تقارن ان باقی بماند.



$$\vec{V_A} = \dot{x}_A \hat{I} + \dot{y} \hat{J}$$

قید : $\vec{V_A} \cdot \hat{j} = 0$

$$\hat{j} = \cos\theta \hat{J} - \sin\theta \hat{I}$$

که θ تابعی از زمان است

$$\Rightarrow -\dot{x}_A \sin\theta + \dot{y}_A \cos\theta = 0$$

$$\dot{x}_A = \frac{\dot{y}_A}{tg\theta}$$

این قیدی غیر هولونومیک است زیرا هیچ f وجود ندارد که اگر از آن نسبت به x مشتق بگیریم $-\sin\theta$ نمی شود و اگر نسبت به y مشتق بگیریم $\cos\theta$ نمی شود.

در خودرو عدم لغزش چرخ ها و اصطکاک جانبی چرخ ها باعث این اتفاق می شود.

سوال : چگونه تشخیص دهیم که آیا قیدی هولونومیک است یا خیر؟

از نظر ریاضی به منظور اینکه قید در فرم pfaffian یا فرم سرعت انتگرال پذیر باشد به فرم lonfiguration ، رابطه قید باید شرایط دیفرانسیل پذیری را ارضاء نماید.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_k + a_{j0} = 0 \qquad (*)$$

$$f_j(q_1, \dots, q_n, t) = 0$$

اگر از f_j دیفرانسیل گرفته شود و بر فاکتور انتگرال گیری $g_j(q_1, \dots, q_n)$ تقسیم شود:

$$df_j = \frac{1}{g_j}\frac{\partial f_j}{\partial q_1}dq_1 + \dots + \frac{1}{g_j}\frac{\partial f_j}{\partial q_n}dq_n$$

$$+ \frac{1}{g_j}\frac{\partial f_j}{\partial t}dt = 0$$

$$\therefore \quad \frac{df_j}{dt} = \frac{1}{g_j}\frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dots + \frac{1}{g_j}\frac{\partial f}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{1}{g_j}\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad (**)$$

$$*, ** \Rightarrow \frac{\partial f_j}{\partial q_k} = g_j a_{jk}, \quad \frac{\partial f_j}{\partial t} = g_j a_{j0} \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

برای اینکه رابطه * قید هولونومیک باشد لازم است تابع f_j و فاکتور انتگرالی g_j چنان یافت شود که رابطه ** برقرار گردد.

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial q_k \partial q_r} = \frac{\partial}{\partial q_r}(g_j a_{jk})$$

$$\text{و} \quad \frac{\partial^2 f_j}{\partial q_k \partial q_r} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(g_j a_{jr}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial q_r \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_r}\left(g_j a_{j0}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial q_r \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(g_j a_{jr}\right)$$

$k, r = 1, 2, \dots, n$

$j = 1, \dots, m$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial q_r}\left(g_j a_{jk}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(g_j a_{jr}\right) \\ \frac{\partial}{\partial q_r}\left(g_j a_{j0}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(g_j a_{jr}\right) \end{cases}$$

$k, r = 1, \dots, n \qquad j = 1, \dots, m$

اگر تابع g_j به گونه ای پیدا شود که در دو شرط بالا صدق کند آنگاه قید هولونومیک است

تمام قیودی که به صورت غیر تساوی وجود دارند غیر هولونومیک هستند چون هرگز نمی توان f = 0 را نوشت.

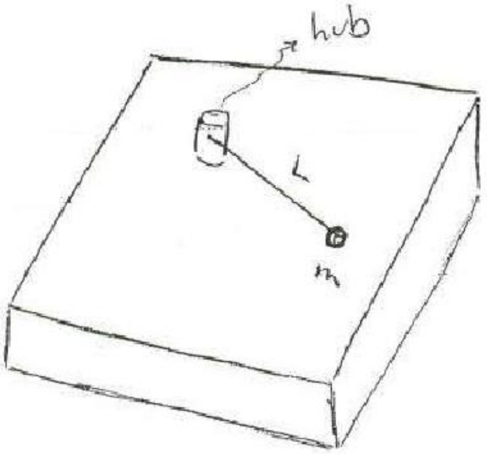
$$f(q_1, \dots, q_n, t) \geq 0$$

$$\sum a_k \dot{q}_k + a_0 \geq 0$$

قید غیر هولونومیک

در سیستم هایی که نیروهای قیدی در بازه ای از زمان نیروی قیدی وجود دارد و در بازه ای از زمان قیود وجود ندارد قید غیر هولونومیک است.

مثال : جرمی به طنابی با طول اولیه L متصل است و حول hub دوران می کند اصطکاک قابل صرف نظر کردن است .



حالت الف : طناب حول hub جمع نمی شود.

$$x^2 + y^2 - L^2 = 0 = f(x,y)$$

قید هولونومیک

نیروی قید : کشش طناب : کار انجام نمی دهد

حالت دوم : طناب حول hub جمع می شود

که hub نازک است

$\Sigma M_O = 0 \rightarrow H = cte$ با پایستاری اندازه حرکت زاویه ای

مسأله از نوع نیروی مرکزی $r = L - r_0 \theta$

r_0 : شعاع hub

$$H_o = m r^2 \dot{\theta} = cte \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = h = cte > 0$$

$$\dot{r} = -r_0 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{-\dot{r}}{r_0}$$

$$\Rightarrow \quad r^2\dot{\theta} = \frac{-\dot{r}r^2}{r_0} = h$$

$$r^2\dot{r} = -r_0 r^2\dot{\theta} = -r_0 h = C \qquad C<0$$

$$\Rightarrow \quad r^3/3 = Ct + D \Big|_{t=0 \quad r=L} \longrightarrow D = L^3/3$$

$$f(x,y,t) = \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{3} - \frac{\ell^3}{3} - Ct = 0$$

(Rheonomic) شیهولونومیک

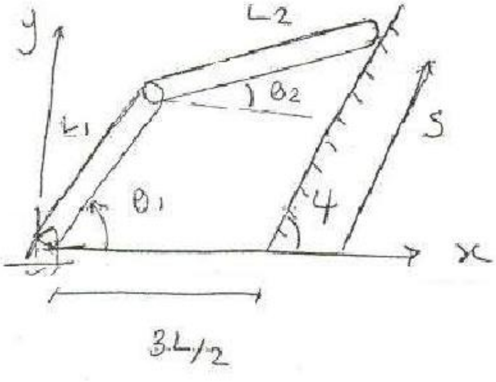
$$\vec{r} = r\hat{e}_r \quad , \quad \vec{\dot{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$F' = -F\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}' \cdot \vec{\dot{r}} = -F\dot{r} \neq 0$$

از نازک بودن hub در فرض کردن نیرو به صورت مرکزی استفاده شد در صورتی که اگر hub بزرگ باشد دیگر نیروی مرکزی به سمت شعاع نیست.

مثال :



$\theta_1 ، \theta_2$ + یک معادله قید ⇐ یک درجه آزادی

$$\vec{r}_p = (L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos\theta_2)\,i + (l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2)\,J$$

یا $\quad r_p = \frac{3L}{2}\,i + S\cos\psi\,\hat{i} + S\sin\psi\,\hat{J}$

$$\begin{cases} \left(L_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 = \frac{3L_1}{2} + S\cos\psi\right) \times \sin\psi \\ \left(l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 = S\sin\psi\right) \_ \cos\psi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \text{sum:} \quad \underbrace{\cos\theta_1 + \frac{L_2}{L_1}\cos\theta_2 - \frac{1}{tg\,\psi}\sin\theta_1 - \frac{L_2}{L_1 tg\,\psi}\sin\theta_2 = 3/2}_{f(\theta_1,\theta_2)=0}$$

مشتق گیری زمانی $\quad \underbrace{\left(\sin\theta_1 + \frac{\cos\theta_1}{tg\,\psi}\right)}_{a_1}\dot{\theta}_1 + \underbrace{\frac{l_2}{l_1}\left(\sin\theta_2 + \frac{\cos\theta_2}{tg\,\psi}\right)}_{a_2}\dot{\theta}_2 = 0$

فرم سرعت
معادله قید

گیرین وود – روزلیت

تغییر مکان فرضی یک سیستم از وضع حقیقی تغییر مکان مجازی نامیده می شود.

تغییر مکان سیستم را از وضع ممکنه در زمان t به یک وضع خیلی نزدیک دیگری برای همان زمان t

کار مجازی و جابه جایی مجازی Virtual Disp . & Virtual works

$\delta x , \delta y , \delta z$

$\delta q_1 , \delta q_2 , \cdots , \delta q_n \longrightarrow$ virtual Disp

$\delta \dot{x} , \delta \dot{y} , \delta \dot{z}$

$\delta \dot{q}_1 , \delta \dot{q}_2 , \cdots , \delta \dot{q}_n \longrightarrow$ virtual velocity

خصوصیات جا به جایی مجازی

1 جا به جایی مجازی بسیار کوچک است. Infinitesimal

2 جا به جایی مجازی با قیود سیستم هماهنگ (constat) است ولی کاملاً اختیاری می شود.

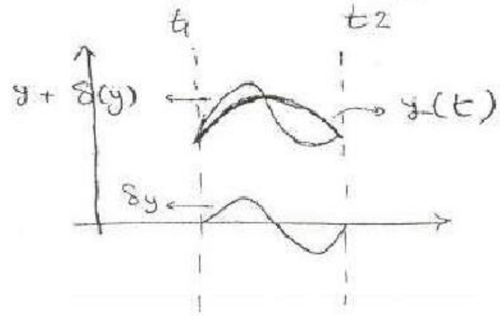
3-جا به جایی و یا سرعت مجازی با ثابت نگه داشتن زمان حاصل می شود. به عبارتی جا به جایی مجازی به صورت لحظه ای رخ می دهد و در اعمال انها زمان وارد نمی شود.

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\delta r = \delta x\,\hat{i} + \delta y\,\hat{j} + \delta z\,\hat{k}$$

b

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial r}{\partial q_n}\delta q_n = \sum \frac{\partial r}{\partial q_k}\delta q_k$$



$$x = x(q_1, \ldots, q_n)$$

$$y = y(q_1, \ldots, q_n)$$

$$z = z(q_1, \ldots, q_n)$$

$$\delta r = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial q_k}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial q_k}\hat{k} \right) \delta q_k$$

در سیستم های دینامیکی t متغیر های مستقل و X و Y و Z یا $q_1, \ldots, q_n$ متغیرهای وابسته هستند.

$$\delta \dot{q}_K = \delta\left(\frac{dq_K}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\delta q_K\right)$$

virtual velocity,

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial r}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial r}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial r}{\partial t}$$

مشتق نسبت به q_k

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_K} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_K} \qquad K = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \quad \delta r = \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_K}\,\delta q_K$$

$f(x, y, z, t) = 0$

قید هولونومیک

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z$$

اگر قید به فرم

$$a_x \dot{x} + a_y \dot{y} + a_z \dot{z} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jK}\,\dot{q}_K + a_{j0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_x \delta x + a_y \delta y + a_z \delta z = 0$$

$$a_{j1}\delta q_1 + a_{j2}\delta q_2 + \dots + a_{jn}\delta q_n = 0$$

کار مجازی

$$\delta w = \vec{F} \cdot \vec{\delta r}$$

$$f(x, y, z, t) = 0 \Rightarrow \vec{F}' = F'_x i + F'_y j + F'_z k = \frac{F'}{|\nabla f|} \vec{\nabla f}$$

نیروی قیدی

کار نیروی قیدی $\delta w' = \vec{F}' \cdot \vec{\delta r} = F'_x \delta x + F'_y \delta y + F'_z \delta z$

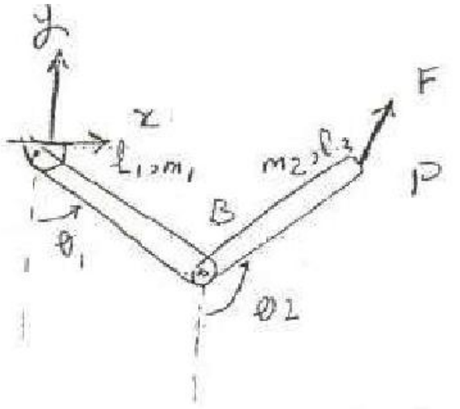
$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial r}{\partial q_n} \delta q_n$$

$$\delta F = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y +$$

$$\delta w' = \frac{F'}{|\nabla f|} \nabla f \cdot \delta r = 0$$

کار مجازی نیروهای قیدی علاوه بر کار واقعی آن‌ها (در سیستم‌های هولونومیک) برابر صفر است.

مثال :



$$\delta\theta_1 , \delta\theta_2$$

$$\overrightarrow{F_B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$$

$$F_{G_1} = -m_1 g \hat{j}$$

$$\overrightarrow{r_B} = l_1 \sin\theta_1 \hat{i} - l_1 \cos\theta_1 \hat{j}$$

$$r_{G_1} = \frac{l_1}{2} \sin\theta_1 \hat{i} - \frac{l_1}{2} \cos\theta_1 \hat{j}$$

$$\overrightarrow{\delta r_B} = \underbrace{l_1 \cos\theta_1}_{\frac{\partial x}{\partial \theta_1}} \delta\theta_1 \hat{i} + \underbrace{l_1 \sin\theta_1}_{\frac{\partial y}{\partial \theta_1}} \delta\theta_1 \hat{j}$$

$$\delta r_{G_1} = \frac{l_1}{2} \cos\theta_1 \, \delta\theta_1 \hat{i} + \frac{l}{2} \sin\theta_1 \, \delta\theta_1 \hat{j}$$

$$\delta w_{link1} = F_{G_1} \cdot \delta r_{G_1} + F_B \cdot \delta r_B$$

2nd: $$\delta w_{link2} = -\vec{F}_B \, \delta r_B + \vec{F} \cdot \delta r_p + F_{G2} \, \delta r_{G2}$$

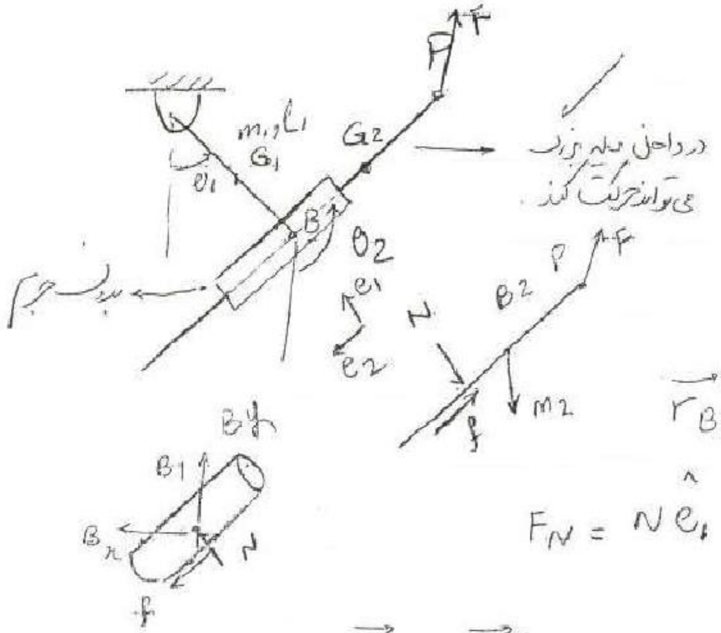
$$r_p = (l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2)\, i - (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2)\, \hat{j}$$

$r_{G2} = \cdots$
$\delta r_p = \cdots$
$\delta r_{G2} = \cdots$

$$\delta w_{To} = \delta w_{link1} + \delta w_{link2}$$

$$= F \, \overrightarrow{\delta r_p} - m_2 g j \, \delta r_{G2} - m_1 g \, j \cdot \delta r_{G1}$$

مثال :



$$\vec{r}_{B_1} = \vec{r}_{B_1} \qquad \vec{r}_{B_2} = \vec{r}_{B_1} + q\,\hat{e}_2$$

$$F_N = N\hat{e}_1 \,,\quad f_f = f\hat{e}_2$$

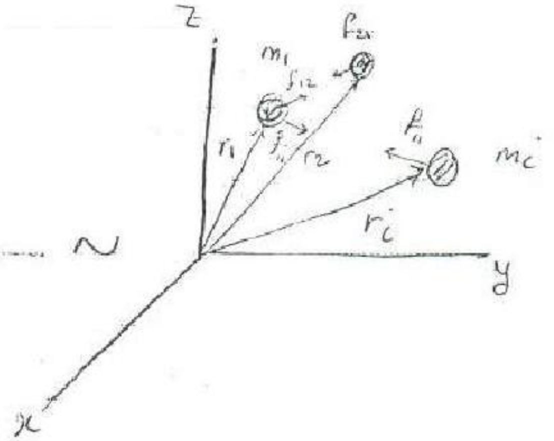
$$\delta w_{link1} = \underbrace{\left(\vec{f}_N + \vec{f}\right)}_{\vec{B}} \delta r_{B_1} - m_1 g\,\hat{j}\;\delta r_{G_1}$$

$$\delta w_{link2} = -\left(\vec{F}_N + \vec{f}\right)\delta r_{B_2} + \vec{F}\cdot\vec{\delta r_P} - m_2 g\;\vec{\delta r_{G_2}}$$

چون میله 2 در داخل اولی می لغزد

$$\delta W_t = \delta w_{link1} + \delta w_{link2} = F\cdot\delta r_P - m_2 g\,\hat{j}\;\delta r_{G_2}$$
$$- m_1 g\, j\,\delta r_{G_1} - f\delta q$$

نیروهای تعمیم یافته Generaliged Forces



F_{ij} : نیروی اعمال شده از طرف ذره‌ی j ام بر ذره i ام

$$\vec{R_i} = \vec{F_i} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} F_{ij}}_{F_i'} \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

برآیند — نیروی خارجی — نیروهای داخلی

$$\delta w_i = R_i \cdot \delta r_i$$

$$\delta w = \sum_i \delta w_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} \cdot \vec{\delta r_i} + \sum_{i=1}^{N} F_i' \cdot \delta r_i$$

صفر

کار مجازی نیروهای قیدی صفر است.

$$\delta w = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} \cdot \vec{\delta r_i}$$

$$\vec{r_i} = \vec{r_i}(\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_n}, t) \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

مختصات تعمیم یافته

$$\vec{\delta r_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k \Rightarrow \delta w = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_k} \right) \delta q_k$$

$W_{1\to 2} = V_1 - V_2$ $\qquad \delta W = V(q_j, t) - V(q_j + \delta q_i, t)$

کانسرواتیو $\qquad$ غیرکانسرواتیو $\qquad \delta W = \sum \left[-\frac{\partial}{\partial q_j} V(q_j, t) \right] \delta q_j$

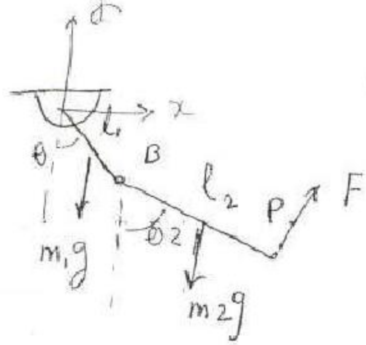
$Q_k = Q_{kc} + Q_{knc}$ $\qquad Q_{kc} = -\frac{\partial}{\partial q_i} V(q_j, t)$ $\qquad$ ثابت کنید

[illegible]

$= \frac{-\partial V}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^{N} F_{inc} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_k}$

خلاصه سه روش نیروهای تعمیم یافته

۱- $\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} \cdot \delta \vec{r_i}$ نوشته شود سپس از عبارت δW، ضرایب δq_k جمع گردد $(k = 1, 2, \dots, n)$



مثال: نیروهای که کار انجام می‌دهند F و $m_1 g$ و $m_2 g$ می‌باشند
بقیه نیروهای عکس‌العمل هستند.

$$\vec{r}_{G_1} = \frac{L_1}{2}\sin\theta_1 \, i - \frac{l}{2}\cos\theta \, j$$

$$\vec{r}_{G_2} = \left(L_1 \sin\theta + \frac{l_2}{2}\cos\theta_2\right) i - \left(L_1 \cos\theta_1 + \frac{L_2}{2}\cos\theta_2\right) j$$

$q_1 = \theta_1 \qquad q_2 = \theta_2$

$$\delta W = -m_1 g j \, \delta r_{G_1} - m_2 g j \, \delta r_{G_2} + \vec{F} \cdot \delta \vec{r_P} \rightarrow Q_1$$

$$= \left(F_x L_1 \cos\theta_1 + F_y L_1 \sin\theta_1 - m_2 g L_1 \sin\theta_1 - m_1 g \frac{L}{2} \sin\theta_1\right) \delta\theta_1$$

$$+ \left(F_x L_2 \cos\theta_2 + F_y l_2 \sin\theta_2 - m_2 g \frac{L_2}{2} \sin\theta_2\right) \delta\theta_2$$

$$\downarrow Q_2$$

$$= \sum Q \, \delta q_1 + Q_2 \, \delta q_2$$