توجه مهم   پیشگفتار

مجموعه پیوست در حقیقت کپی مطالب مورد بحث در کلاس دینامیک سازه ها می باشد که بصورت ترانسپران (کاغذ شفاف) بوده و برای صرفه جویی در وقت کلاس و افزایش راندمان آن در اختیار دانشجویان قرار می گیرد تا دانشجو با دقت بیشتر به مطالب توجه نماید و وقت وی صرف نوشتن مطالب از روی ترانسپران نشود.

بنابراین مجموعه این مطالب بصورت کلی و کلان بوده و همراه با مباحث شفاهی اینجانب در کلاس و توضیحات تکمیلی، کامل می باشد و به تنهایی دارای تمامی جزئیات نخواهد بود.

جهت کتب رفرنس (مرجع) و کتب تمرینات به کتابهای زیر مراجعه شود:

۱ـ دینامیک سازه ها   چاپ ششم دانشگاه تهران   تالیف   خسروبرگی

۲ـ دینامیک سازه های شهرآلات   چاپ اول دانشگاه تهران   ترجمه خسروبرگی

* کتاب اول دارای تئوری دینامیک سازه ها و مثال های حل شده و حل نشده است و کتاب دوم نیز دارای مباحث دینامیک سازه ها (بیشتر از مباحث جدید و کاربردی) و همچنین تعداد زیادی مسائل حل شده و تمرینات می باشد.

خسروبرگی

بسمه تعالی

دینامیک سازه ها - کارشناسی ارشد - ۳ واحد

کتاب مرجع : دینامیک سازه ها ، خسروبرگی - انتشارات دانشگاه تهران

اهم مطالب مورد بحث در طول سال

۱- ضرورت آموزش و ارائه درس (امور تحصیلی - امور حرفه ای مهندسی طراحی)

۲- یادآوری اصول دینامیک سازه ها (با توجه به درس اصول مهندسی زلزله در مقطع کارشناسی)

الف - خصوصیات (متغیر زمان - تفاوت تحلیل دینامیکی و استاتیکی - ارتعاش)

ب - درجه آزادی و روش های کاهش (جرم متمرکز - تغییر مکان تعمیم داده شده - اجزاء محدود)

ج - نیروهای مقاوم (الاستیک و میرایی - رفتار و مکانیزم حرکت)

د - سختی و حالتهای مختلف برای سیستم های ساده و پیچیده

ه - روش های تعیین معادلات حاکم بر رفتار سازه (تعادل دینامیکی - دالامبر - کار مجازی - روش انرژی ...) در حالت سیستم های یک درجه آزادی

و - ارتعاش آزاد و حل معادله مربوط - حالتهای بحرانی و زیر بحرانی و فوق بحرانی

ز - بررسی معادله حرکت و حل آن در بارگذاری هارمونیکی و نتایج آن - انتگرال دوهامل

۳- تحلیل سیستم های معادل یک درجه آزادی در برابر بارگذاری ضربه ای و نتایج بحث

۴- روش های عددی تحلیل دینامیکی سازه ها برای سیستم های یک درجه آزادی

۵- رفتار غیرخطی سازه ها در حالت تحلیل دینامیکی برای سازه های یک درجه آزادی

۶- روش رایلی در تحلیل دینامیکی سازه ها و کاربرد آن در تعیین خصوصیات دینامیکی

۷- تعیین معادله حرکت برای سیستم های چند درجه آزادی و بررسی ارتعاش آزاد آنها و سیستم های پیوسته

۸- تحلیل دینامیکی سازه های چند درجه آزادی به روش آنالیز مودال و نتایج حاصل

۹- روش تبدیل فوریه در تحلیل دینامیکی سازه ها و کاربرد و نتایج آن

۱۰- روش های عددی تحلیل دینامیکی برای سازه های چند درجه آزادی و پایداری آنها - رفتار غیرخطی

فصل اول - ضرورت ارائه درس دینامیک سازه ها

در رشته مهندسی عمران اکثر سازه ها (ابنیه) تحت اثر نیروهای دینامیکی هستند. نیروهایی که مقدار (شدت)، جهت و احتمالاً نقطه اثر آنها با زمان تغییر می کنند و البته نرخ تغییرات فوق بنحوی است که پدیده ارتعاش که مشخصه اصلی رفتار دینامیکی است در سازه بوجود می آید. $P(t)$

ابنیه مهم و بارگذاری دینامیکی وارد

انواع سدها - زلزله، هیدرودینامیک (پدیده اندرکنش سازه - خاک - آب)
ارتعاش تجهیزات و ماشین های نیروگاه

انواع پل ها - زلزله، ترافیک، ترمز، باد، ضربه، جریان رودخانه

سیلوها - ویدانژ (تخلیه سریع مواد ذخیره شده)، زلزله، حرکت تسمه ها

برج آب - زلزله، هیدرودینامیک، باد

اسکله و سکوهای فراساحلی - امواج دریا، زلزله، برخورد کشتی، جریانهای دریایی، باد

دکل و دودکش، برج های خنک کننده - زلزله، باد

استحکامات و پناهگاهها - انفجار (دور - نزدیک - مجاور - برخورد مستقیم)، زلزله

تأسیسات هسته ای - انفجار هسته ای، زلزله، برخورد هواپیما

ورزشگاه ها - تشویق تماشاچیان، زلزله

لوله ها - زلزله، عبور سیال

برج های ساختمانی - زلزله، باد

تونل ها - عبور و ترافیک قطار، زلزله

هدف : تطبیق و سازگاری تحلیل با رفتار واقعی (دینامیکی)

روش برخورد در گذشته : به دلیل پیچیدگی و سختی ← حالت معادل استاتیکی

تغییر و تحول اخیر : پیشرفت چشمگیر در فن‌آوری سخت‌افزاری و نرم‌افزاری
(کامپیوترها)

روش امروزی : بکارگیری روش های تحلیل دینامیکی در حد امکانات

اصلاح آیین‌نامه های طراحی مطابق با نتایج حاصل

تغییرات آتی : در نظر گرفتن حالتهای واقعی بارگذاری (اتفاقی و تصادفی)
حالت های تحلیل تصادفی (تحلیل ریسک و قابلیت اعتماد)
بارگذاری منفرد و مجموعه ← طیف بارگذاری

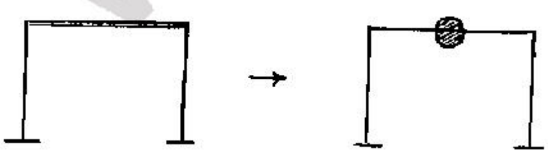
فصل دوم - یادآوری اصول دینامیک سازه ها

- قانون حاکم : اصل دوم نیوتن $\Sigma \vec{F} = m\ddot{\vec{u}}$

u : تغییرمکان $\dot{u}$: سرعت $\ddot{u}$: شتاب

- درجه آزادی و روش های کاهش آن متناسب با امکانات در دسترس

الف - روش تمرکز جرم   Lumped-mass Procedure

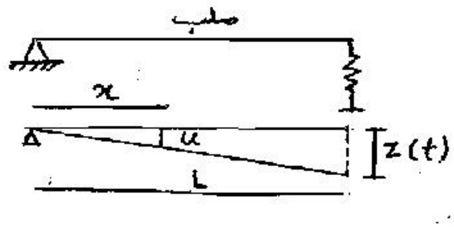


ب - روش تغییرمکان های تعمیم داده شده   Generalized Displacement

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\,\phi_i(x)$$

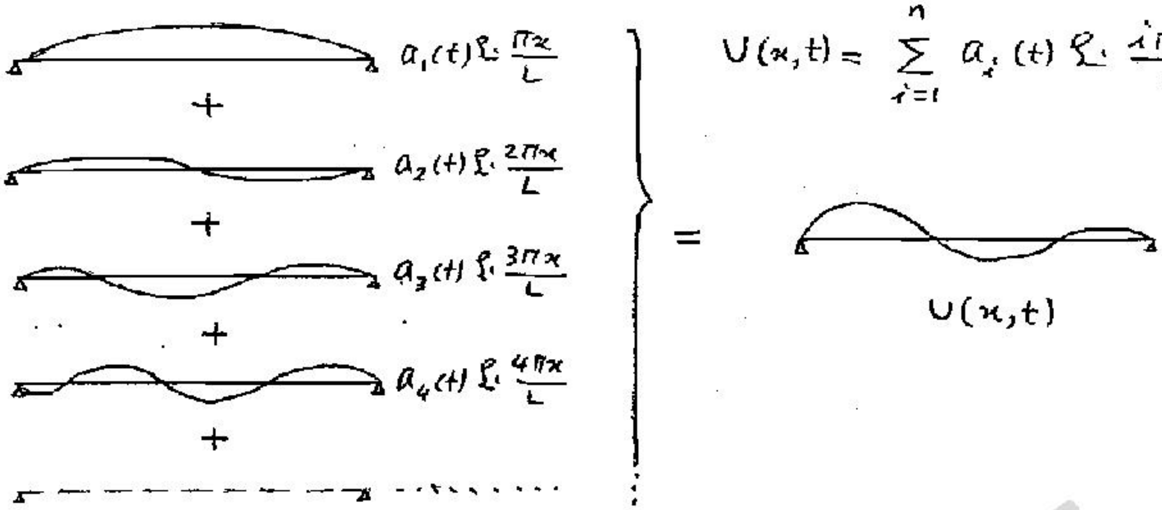
$a_i(t)$ تابع زمانی

$\phi_i(x)$ تابع مکانی (شرایط حدی و سازگاری)



تشابه مثلث ← $u(x,t) = \frac{x}{L}\cdot z(t)$

فرض : تیر صلب ← $n=1$



$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\sin\frac{i\pi x}{L}$$

ج - روش اجزاء محدود   Finite Element concept

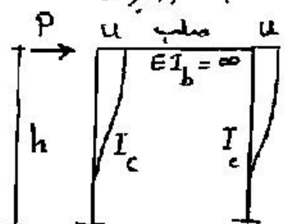
- مبانی خاص خود در تمرکز خواص رفتاری سازه در تعداد محدود گره (درجه آزادی)

د - روش اجزاء مرزی

- تمرکز خواص رفتاری محیط مورد نظر در نقاطی در مرز با محیط (سازه) دیگر

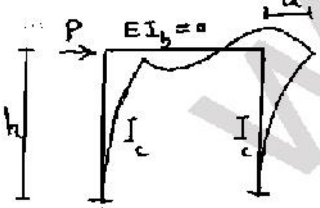
- نیروهای مؤثر در رفتار دینامیکی

الف - نیروی سختی (فنرها، تکیه‌گاه‌ها، الاستیک ...) f_s بعنوان نیروی مقاوم دربرابر حرکت



$$\xrightarrow{\text{از تحلیل سازه‌ها}} P = \frac{24EI_c u}{h^3} \rightarrow u=1 \rightarrow P = K = \frac{24EI_c}{h^3}$$

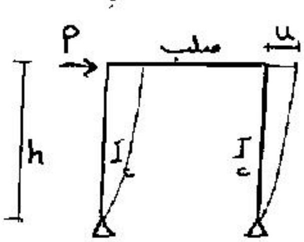
$$P = f_s = Ku$$



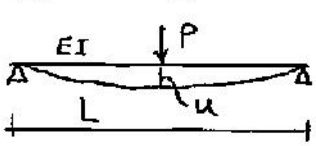
$$k = \sum_{\text{تعداد ستون}} \frac{3EI_c}{h^3} = \frac{6EI_c}{h^3}$$

حالت خطی (رفتاری)

مورد نظر است.



$$K = \sum \frac{3EI_c}{h^3} = \frac{6EI_c}{h^3}$$



$$P = \frac{48EIu}{L^3} \rightarrow u=1 \rightarrow K = \frac{48EI}{L^3}$$

$$P = \frac{3EIu}{L^3} \rightarrow u=1 \rightarrow K = \frac{3EI}{L^3}$$

* در تعبیه سختی ، جهت و نقطه موردنظر باید معلوم باشد (درجه آزادی)
* در حالت چند درجه آزادی ← ماتریس سختی با عناصر K_{ij}

K_{ij} نیرو در درجه آزادی i وقتی تغییر مکان یا چرخش واحد در درجه آزادی j اعمال می شود و سایر درجات آزادی گرفته می شوند.

در تعبیه سختی : مدل سازی و تعبیه درجات آزادی خیلی مهم است.

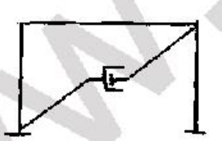
ب - نیروی میرایی (استهلاک) f_D بعنوان نیروی مقاوم در برابر حرکت

این نیرو از مکانیزم های مختلف اتلاف انرژی در حرکت (ارتعاش) ناشی می شود.
اصطکاک در اتصالات ، ترک ها ، مصالح و ......

مکانیزم های پیچیده و نامعلوم ← روش مناسب لحاظ کردن در معادلات،
رفتاری آن است که معادل میرایی لزجی فرض شود.

حالت خطی مدنظر است. Viscous damper → $f_D = C\dot{u}$

پدیده میرایی به ابعاد و هندسه سازه ارتباطی ندارد ولی به نوع مصالح و نوع اتصالات وابسته است.
تبدیل مکانیزم های واقعی اتلاف انرژی به مکانیزم لزجی از طریق آزمایش روی مدل



Damper مدل
(کمک فنر)

ضریب میرایی C یا درصد میرایی در عمل بصورت تجربی تعبیه می شود

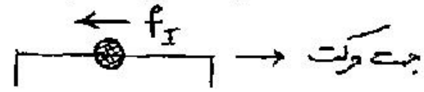
ج - نیروی اینرسی (لختی) f_I از قانون دوم نیوتن بدست می آید

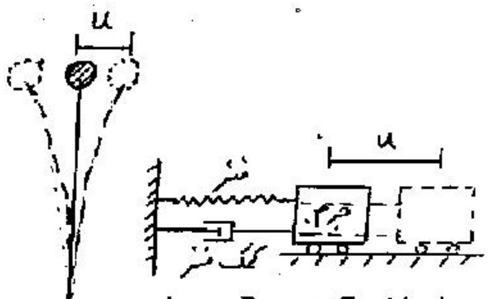
$$\Sigma \vec{F} = m\ddot{\vec{u}} \rightarrow \Sigma \vec{F} - m\ddot{\vec{u}} = 0$$

علامت منفی : مقاوم در برابر حرکت

$$f_I = m\ddot{u}$$

چون از قانون ناشی می شود ، ارائه مدل فیزیکی بی معنی است





مدل ریاضی (تحلیلی) سیستم معادل
جرم - فنر - کمک فنر

نیرو و درصد میرایی در سیستم های مرتعش

در سیستم مرتعش روبرو، وقتی جرم به اندازه u جابجا شود، کشش آمدگی ارتجاعی ستون (کشیدگی فنر) بکار می‌آید تا جرم به موقعیت اولیه برگردد. این نیرو در ستون یا فنر که تابع تغییرمکان u می‌باشد، بنام نیروی فنر (سختی) موسوم است (f_s). البته اگر u کوچک باشد، این نیرو تابع خطی u است. جرم موردنظر با یک سرعت مشخص به موقعیت اولیه برگشته و به سمت دیگر پرت خواهد شد و بنابراین مرتعش می‌شود.

چنانچه سیستم ارتجاعی باشد و اتلاف انرژی وجود نداشته باشد، جرم برای همیشه مرتعش خواهد بود، ولی در عمل، اصطکاک با هوا، اصطکاک بین ذرات سیستم یا در اتصالات، تسلیم مصالح و بوجود آمدن ترک ها و اصطکاک بین آنها و غیره، باعث اتلاف انرژی ارتعاش شده، بطوریکه طی زمان، ارتعاش مستهلک شده و از بین می‌رود. نیروهایی که باعث اتلاف انرژی می‌شوند بنام نیروهای میرایی (استهلاک) Damping موسوم هستند.

اگر نیروی میرایی متناسب با سرعت حرکت جرم باشد، به آن میرایی لزجی گفته می‌شود. اگرچه در عمل، میرایی بطور خالص لزجی نمی‌باشد ولی فرض می‌گردد که چنین باشد که این امر به دلیل سهولت حل معادلات حرکت می‌باشد. معمولاً برای میرایی غیرلزجی می‌توان میرایی لزجی معادل آنرا که دارای تأثیر مشابه در حرکت باشد، بدست آورد که این امر کاملاً تجربی است.

همانطوریکه قبلاً گفته شد، میرایی یک سازه بستگی به مصالح آن، ماهیت اتصالات، کیفیت ساخت، نوع پی و... دارد. نیروی میرایی لزجی معادل $f_D = C\dot{u}$

انتخاب میرایی در یک سیستم، معمولاً دلخواه است بویژه به این دلیل که میرایی با کرنش مصالح و طبیعت و جزئیات ساخت، متغیر است.

میرایی در تحلیل دینامیکی سازه ها بصورت درصد میرایی بکار می‌رود: $\xi = \frac{C_{\text{موجود}}}{C_{cr}}$

حدود درصد میرایی برای مصالح مختلف به شرح زیر است:

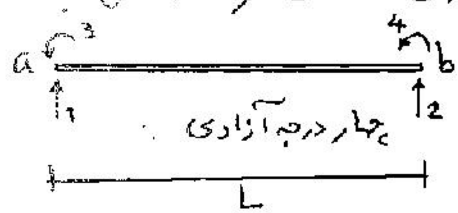
بتن	5 - 10%	افزایش با کرنش
فولاد	2 - 5%	" "
بنائی	4 - 10%	" "
خاک	10 - 30%	" "

چوب 2-10% به دلیل تفاوت زیاد تغییرات در کیفیت چوب، مقادیر نامطمئن است.

محاسبه سختی یک قاب خمشی

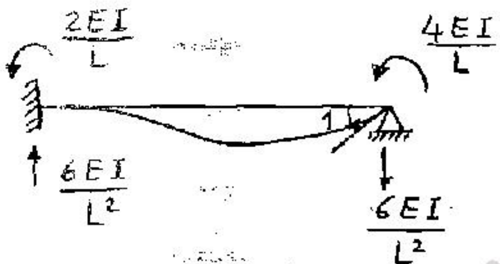
یادآوری: برای محاسبه لنگر و برش در یک المان سازه‌ای (تیر یا ستون)، ضرایب سختی برای المان مورد نیاز است. موضوع برای یک المان همگن بطول L و ممان اینرسی I و مدول ارتجاعی E، بطور شماتیک ارائه می‌شود.

ضرایب سختی برای چرخش گره در شکل الف و برای انتقال گره در شکل ب نشان داده شده است.

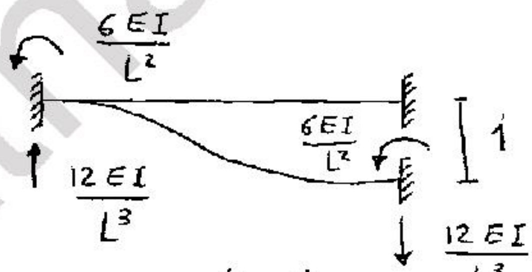


به جهت‌ها و شماره گذاری توجه شود.

K_{ij} (ضرایب سختی) طبق تعریف: نیرو در i وقتی تغییرمکان واحد در j داده می‌شود.



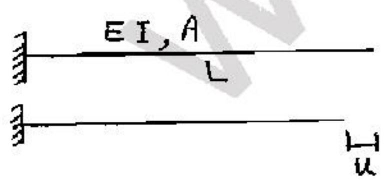
(الف)



(ب)

برای محاسبه ضرایب سختی، در درجه آزادی مربوط تغییرمکان یا چرخش واحد اعمال می‌شود در حالی که سایر درجات آزادی مقید درنظر گرفته می‌شوند.

درجه آزادی محوری به دلیل صلبیت زیاد درنظر گرفته نشده است.



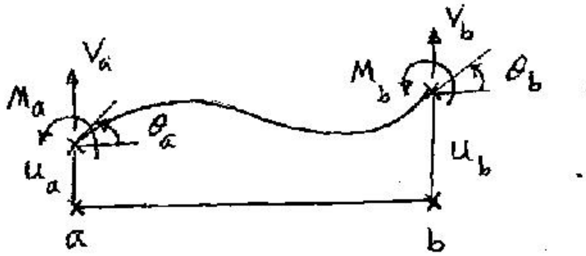
$$\sigma = E\epsilon$$

$$\frac{P}{A} = E\,\frac{u}{L} \Rightarrow P = \frac{EAu}{L}$$

تعریف ضریب سختی ←

$$u=1 \longrightarrow P \to K \Rightarrow K = \frac{EA}{L}$$ عدد بزرگ

بنابراین برای المان تیر و با توجه به چهار درجه آزادی نشان داده شدهٔ مربوط به تغییرمکان‌های u_a، u_b و چرخش‌های θ_a و θ_b، لنگر خمشی و نیروی برشی در گره‌ها برابر خواهد بود با:



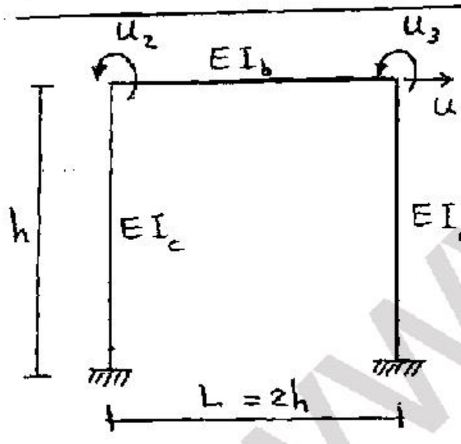
تغییرشکل کلی عضو خمشی

$$M_a = \frac{4EI}{L}\theta_a + \frac{2EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b$$

$$M_b = \frac{2EI}{L}\theta_a + \frac{4EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b$$

$$V_a = \frac{12EI}{L^3}u_a - \frac{12EI}{L^3}u_b + \frac{6EI}{L^2}\theta_a + \frac{6EI}{L^2}\theta_b$$

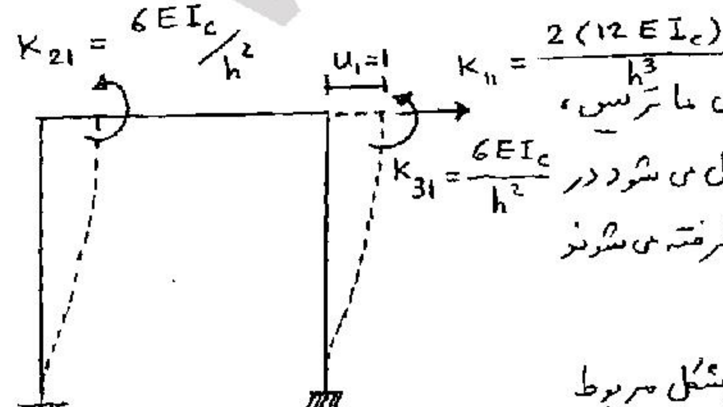
$$V_b = -\frac{12EI}{L^3}u_a + \frac{12EI}{L^3}u_b - \frac{6EI}{L^2}\theta_a - \frac{6EI}{L^2}\theta_b$$



مثال - مطلوبست محاسبه سختی جانبی قاب نشان داده شده با توجه به درجات آزادی مورد نظر؟

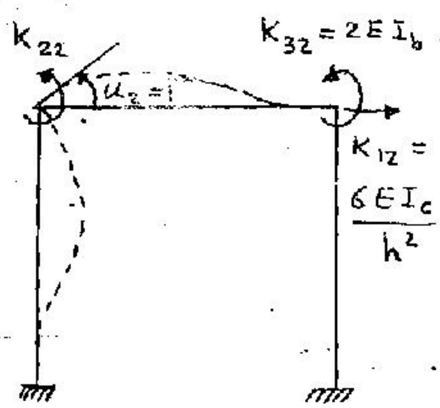
از روش های مختلف تحلیل سازه از جمله پخش لنگر و غیره می توان مساله را حل نمود. در اینجا از تعریف ضرایب تأثیر سختی استفاده می شود.

سه درجه آزادی داریم ← ماتریس سختی 3x3 خواهد بود.



برای بدست آوردن ضرایب ستون اول ماتریس، در تغییر مکان u_1، تغییر مکان واحد اعمال می شود در حالی که سایر تغییر مکان‌های درجات آزادی گرفته می شوند یعنی: $u_1 = 1$ و $u_2 = u_3 = 0$

نیروهای K_{i1} (ضرایب سختی) و تغییر شکل مربوط در شکل روبرو نمایش داده شده است. [از تحلیل سازه ۲ یادآوری]:



برای تعیین ضرایب ستون دوم ماتریس سختی (K_{i2}) خواهیم داشت: $u_1 = u_3 = 0$ و $u_2 = 1$

برای ضرایب K_{i3} (ستون سوم ماتریس) مشابه حالت دو عمل می شود: $u_1 = u_2 = 0$ و $u_3 = 1$

$$K_{22} = \frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_b}{L}$$

اگر در حالت خاص $I_b = I_c$ و $L = 2h$ باشد، ماتریس سختی بصورت زیر خواهد بود:

$$[K] = \frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}$$

اگر قاب تحت اثر نیروی جانبی (مثلاً f_s) قرار داشته باشد، معادله حاکم برای تغییر شکل قاب بصورت زیر خواهد بود ($[K]\{u\} = \{f_s\}$):

$$\frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_s \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

از معادلات ردیف ۲ و ۳ خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} 6h^2 & h^2 \\ h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} 6h \\ 6h \end{Bmatrix} u_1 = -\frac{6}{7h}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} u_1$$

رابطه اخیر در معادله حاکم رفتاری قرار گیرد، خواهیم داشت:

$$f_s = \left(\frac{24EI_c}{h^3} - \frac{EI_c}{h^3}\,\frac{6}{7h}\,\langle 6h \quad 6h\rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) u_1$$

$$f_s = \frac{96}{7}\left(\frac{EI_c}{h^3}\right) u_1$$

$u_1 = 1 \rightarrow f_s \rightarrow K \Rightarrow$ سختی جانبی قاب $\boxed{K = \frac{96}{7}\,\frac{EI_c}{h^3}}$

این روش که همراه با حذف چرخش های گره هاست، به عنوان روش حذف استاتیکی معروف است،

- با توجه به مباحث پایه‌ای مطرح در حالت سازه‌های معادل یک‌درجه آزادی
مطالب بعدی در این حالت خواهد بود. SDOF
Single-Degree-of-Freedom Systems

- نوشتن معادلات رفتاری (معادله حرکت)

الف - کاربرد مستقیم اصل دوم نیوتن

$$\Sigma F = m\ddot{u}$$
$$P(t) - f_s - f_D = m\ddot{u}$$

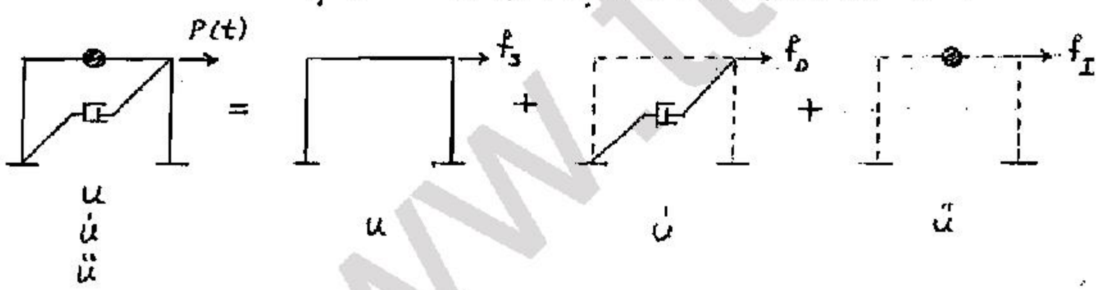
$$m\ddot{u} + f_D + f_s = P(t)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = P(t)$$

ب - تعادل دینامیکی (اصل دالامبر (D'Alembert's Principle)

مشابه حالت اول با بیان متفاوت؛ نیروی $m\ddot{u}$ از ابتدا نیروی تمام است.

ج - ترکیب مولفه‌های نیروهای سختی، میرایی و جرم
در حالت رفتار خطی و در اصول مشابه حالتهای الف و ب

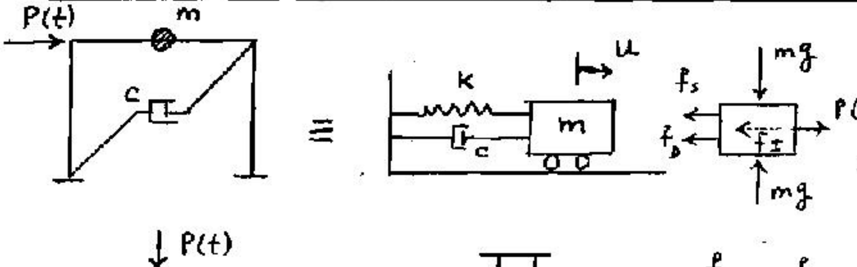


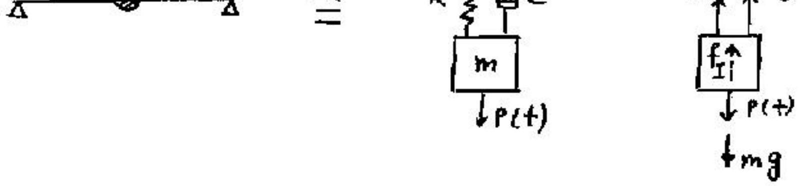
د - روش کار مجازی: تصور تغییرمکان کاذب و صفر بودن کار انجام شده

هـ - اصل انرژی: اصل بقای انرژی (جنبشی و پتانسیل ...)

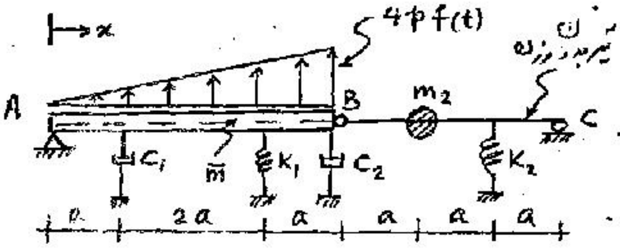
مدل سازی رفتاری

سیستم جرم - فنر - کمک فنر





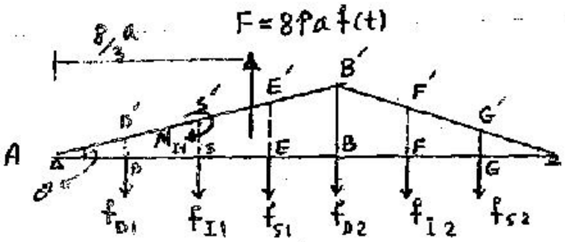
* مطلوبست تعیین معادله حرکت سیستم داده شده در روبرو ؟



حل :

از روش متعارف تعادل استفاده می‌کنیم :

ارتعاش در دامنه‌ی کوچک است (رفتار خطی)،
سیستم را در یک لحظه (مثلاً t) در حالت تغییر شکل
نشان می‌دهیم (به همراه نیروی موثر) :
سیستم معادل یک درجه آزادی به نقطه شاخص
یا درجه آزادی شاخص را $Z(t) = BB'$ انتخاب می‌کنیم.



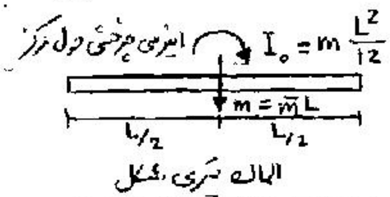
$$DD' = \frac{Z}{4}\ ,\ EE' = \frac{3}{4}Z\ ,\ FF' = \frac{2}{3}Z\ ,\ GG' = \frac{1}{3}Z\ ,\ SS' = \frac{Z}{2}$$

تعیین نیروهای موثر :

$$f_{S1} = K_1(EE') = K_1\frac{3}{4}Z(t)\ ,\ f_{S2} = K_2(GG') = K_2\frac{1}{3}Z(t)\ ,\ f_{D1} = C_1(\dot{DD'}) = C_1\frac{1}{4}\dot{Z}(t)$$

$$f_{D2} = C_2\dot{Z}(t)\ ,\ f_{I1} = m_1(\ddot{SS'}) = m_1\frac{\ddot{Z}(t)}{2} = \bar{m}\,2a\,\ddot{Z}(t)$$ ← AB اینرسی انتقالی المان

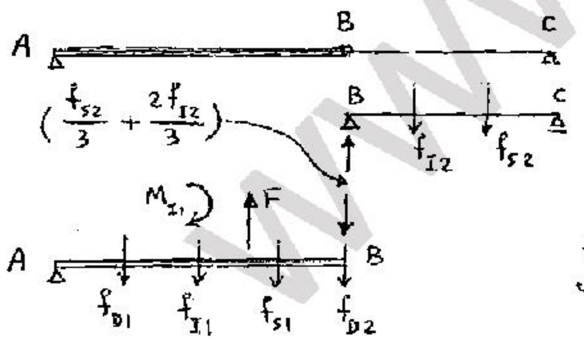
$$f_{I2} = m_2(\ddot{FF'}) = m_2\frac{2}{3}\ddot{Z}(t)$$



المان تیری شکل

$$\begin{cases} M_{I1} = I_o\ddot{\theta} = \left[4a\bar{m}\times\frac{(4a)^2}{12}\right]\frac{\ddot{Z}(t)}{4a} = \frac{4}{3}a^2\bar{m}\ddot{Z}(t) \\ \theta = \frac{BB'}{4a} = \frac{Z}{4a} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{Z}}{4a} \end{cases}$$

دسترسی به معادله حرکت از روش تعادل ← $\Sigma M_{/A} = 0$



$\Sigma M_{/A} = 0$

$$\underbrace{f_{I1}\times 2a + M_{I1} + \frac{2f_{I2}}{3}\times 4a}_{\text{اینرسی جرمی}} + \underbrace{f_{D1}\times a + f_{D2}\times 4a}_{\text{میرایی}} +$$

$$\underbrace{f_{S1}\times 3a + \frac{f_{S2}}{3}\times 4a}_{\text{سختی}} = \underbrace{8pa\,f(t)\times\frac{8}{3}a}_{\text{نیروی خارجی تحمیلی}}$$

پس از جاگذاری عبارت‌ها و ساده کردن روابط در نهایت خواهیم داشت :

$$\underbrace{\left(\frac{4}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}m_2\right)}_{\text{جرم موثر}}\ddot{Z}(t) + \underbrace{\left(\frac{C_1}{16} + C_2\right)}_{\text{میرایی موثر}}\dot{Z}(t) + \underbrace{\left(\frac{9}{16}K_1 + \frac{K_2}{9}\right)}_{\text{سختی موثر}}Z(t) = \underbrace{\frac{16}{3}pa\,f(t)}_{\text{نیروی موثر}}$$

$$\underline{m^*\ddot{Z}(t) + C^*\dot{Z}(t) + K^*Z(t) = P^*(t)}$$

معادله سیستم معادل یکدرجه آزادی

با جرم موثر ، میرایی موثر، سختی موثر و نیروی موثر

توجه: با توجه به ارائه درس مهندسی زلزله در نیمسال بعدی، حالتهای حرکت زمین بعنوان عامل ارتعاش در سازه ها در مدل سازی و تحلیل ها در درس دینامیک سازه ها ارائه نمی شود.

- روش های حل معادلات حرکت

الف - روش کلاسیک و متعارف (مستقیم) Classical Solution

حل معادله دیفرانسیل - حل عمومی و جواب خصوصی با اعمال شرایط اولیه

ب - روش انتگرال دوهامل Duhamel's Integral رفتار خطی

ج - روش های تبدیل Transform Methods رفتار خطی

تبدیل لاپلاس و فوریه ← تحلیل در میدان فرکانس

* مناسب برای تحلیل های اندرکنش محیط های غیر یکنواخت

* روش عددی قوی و سریع FFT

د - روش های عددی Numerical Methods رفتار خطی و غیرخطی

الگوریتم های مختلف و پایداری روش

- پاسخ یا واکنش سازه Response

از حل معادله حرکت ← $u(t)$ بدست می آید

مفهوم پاسخ شامل همه نوع مجهول محاسباتی و طراحی می تواند باشد

تغییر مکان، سرعت، شتاب، تنش، نیرو و .....

معمولاً در طراحی u_{max} و پاسخ های حداکثر بکار گرفته می شوند.

- نیرو های اجزاء Element Forces

از حل معادله حرکت (دینامیکی) ← $u(t)$ حاصل می شود و برای تیر و ستونها می تواند لنگر خمشی و نیروی برشی حاصل شود.

$f_s(t) = K\,u(t)$

توجه: برای طراحی، از تنش های مجازی استفاده می شود که از آزمایش استاتیکی مصالح بدست می آید و کافی است از f_s برای ارزیابی نیروها استفاده شود.

برای بدست آوردن پاسخ کامل باید از جواب دینامیکی و استاتیکی (ترکیب) استفاده شود: تغییر مکان تحت اثر وزن باید ملحوظ شود. $u^t(t) = u_p(t) + u_s$

دستگاه واحد (مقیاس)

رابطه اساسی $f = ma$

شتاب × جرم = نیرو

دستگاه SI →
- واحد نیرو = N نیوتن
- شتاب = m/s^2 متر بر ثانیه توان ۲
- جرم = Kg کیلوجرم kg mass
- $= N.s^2/m$

دستگاه MKS →
- واحد نیرو = kgf
- شتاب = m/s^2
- جرم = $kgf.s^2/m$

$$1\ kgf = 9.81\ N$$

شتاب ثقل $g = 9.81\ m/s^2 = 981\ cm/s^2$

$$= 386\ in/s^2 = 32.2\ ft/s^2$$

$$1\ kip = 1000\ lbf = 453.4\ kgf = 4448.2\ N$$

$$1\ psi = 6894.8\ N/m^2 = 0.7\ t/m^2$$

$$1\ kip/in = 175126\ N/m$$

$$1\ in = 2.54\ cm$$

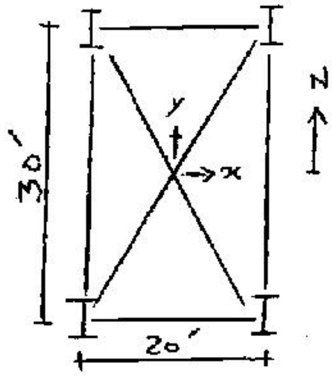
$m = \frac{W}{g}$ برای بکارگیری جرم (m)، مناسب است در فرمول ها از استفاده شود (W وزنه).

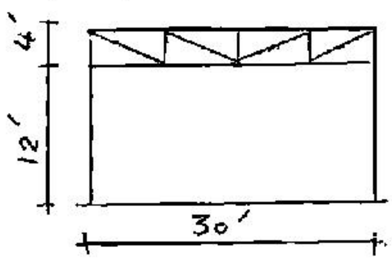
* وزنه مانند نیرو است.

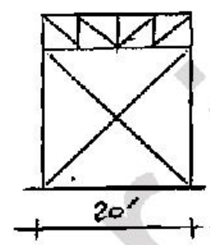
مثال - یک ساختمان صنعتی یک طبقه $20' \times 30'$ - در جهت شمال جنوب قاب خمشی و در جهت شرقی - غربی بصورت مهار بندی شده است. وزن در سقف $30\ lb/ft^2$ و مهار های افقی در سقف زیر خرپای سقف است. ممان اینرسی ستونها:

$$\begin{cases} I_x = 82.8\ in^4 \\ I_y = 18.3\ in^4 \end{cases}$$

مهارها تمام میلگرد بقطر $1''$ و $E = 29000\ ksi$ و مطلوبست تعیین معادله حرکت در جهات شمال جنوب - غرب شرق







$$m = \frac{W}{g} = \frac{30 \times (30 \times 20)}{386} = 46.63\ \ lb\text{-}s^2/in$$

* با توجه به ضربدری های افقی سقف می توان عملکرد سقف را بصورت دیافراگم فرض نمود.

الف - جهت شمال - جنوب: سختی جانبی دو قاب خمشی عبارت است از

$$K_{N-S} = 4\left(\frac{12\,EI_x}{h^3}\right) = 4\ \frac{12(29 \times 10^3)(82.8)}{(12 \times 12)^3} = 38.58\ \ kips/in$$

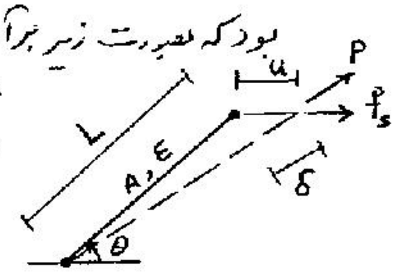
معادله حرکت S-N : $\underline{m\ddot{u} + K_{N-S}\,u = 0}$

ب - جهت شرقی - غربی: معمولاً وقتی از مهار استفاده می شود، فرض می گردد که قاب ها صلب بوده و برای انتقال نیروی تمام (بار مرده و زنده) هستند و بار جانبی توسط مهارها تحمل می شود (با اتصال مفصلی). بنابراین سختی جانبی جمع سختی هریک از مهارها خواهد بود که بصورت زیر برآورد می شود:

$$P = \frac{AE}{L}\delta \qquad ①$$

$$\begin{cases} A = 0.785\ in^2 \\ L = 23.3\ \ ft \end{cases}$$

$f_s = P\cos\theta$ و $u = \delta/\cos\theta$



$$P = f_s/\cos\theta\ ,\quad \delta = u\cos\theta \xrightarrow{\text{در معادله ①}}$$

$$f_s = K_{\text{مهار}}\,u \longrightarrow \quad K_{\text{مهار}} = \frac{AE}{L}\cos^2\theta \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{20}{\sqrt{12^2 + 20^2}} = 0.8575$$

$$K_{\text{مهار}} = \frac{0.785(29 \times 10^3)}{23.3 \times 12}(0.8575)^2 = 59.8\ \ kips/in$$

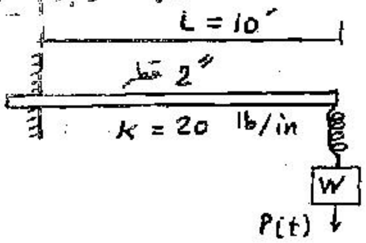
هر قاب دارای دو مهاربند است ولی یکی در کشش است که مقاومت جانبی را ایجاد می‌نماید و دیگری در فشار رفتار می‌کند که فرض می‌شود به کمانش برسد (در اثر بارهای محوری) و بسیار کم در مقاومت جانبی مشارکت می‌نماید، چون که دو قاب مهاربند بود پس!

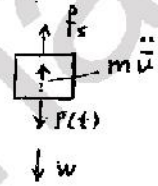
$$K_{E-W} = 2 \times 59.8 = 119.6 \quad kips/in$$

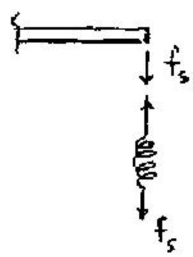
معادله حرکت : $m\ddot{u} + K_{E-W}\, u = 0$

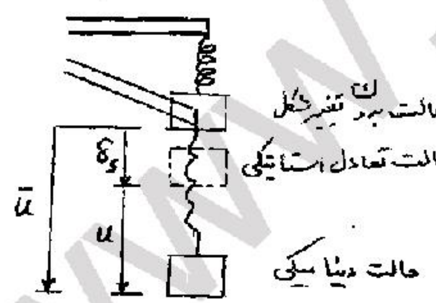
توجه: سختی یک ستون در جهت شرق-غرب $K_{ستون} = \frac{12 E I_y}{h^3} = 2.13 \ kips/in$ است که به هر حال از نظر نسبی قابل توجه نمی‌باشد (پس صرفنظر شد).

مثال - با توجه به سیستم زیر که وزنه W توسط فنری از انتهای یک تیر طره آویزان است، معادله حرکت وزنه W را بنویسید، تیر فلزی است ($E = 29000 \ ksi$) و از جرم تیر صرفنظر می‌شود.









$$m\ddot{\bar{u}} + f_s = W + P(t)$$

$$f_s = K_e \bar{u}$$

$$m\ddot{\bar{u}} + K_e \bar{u} = W + P(t)$$

$$\bar{u} = \delta_s + u$$

$$\ddot{\bar{u}} = 0 + \ddot{u}$$

δ_s تغییرمکان در اثر W (استاتیکی)

u " " $P(t)$ (دینامیکی)

$K_e \delta_s = W \quad \rightarrow \quad \underline{m\ddot{u} + K_e u = P(t)}$ معادله حرکت، K_e باید محاسبه شود.

ملاحظه می‌شود وقتی معادله بر حسب تغییرمکان دینامیکی u است، وزنه در معادله اثر ندارد. معمولاً معادله حرکت از حالت استاتیکی به بعد نوشته و حل می‌شود پس اثر حالت استاتیکی ملحوظ می‌شود (اگر رفتار خطی باشد).

محاسبه سختی موثر $\qquad f_s = k_e \bar{u} \quad (1)$

$$\bar{u} = \delta_{\text{تیر}} + \delta_{\text{فنر}} \quad (2)$$

$\delta_{\text{تیر}}$ عبارت از تغییرشکل انتهای تیر طره است

$\delta_{\text{فنر}}$ " " " " فنر است.

با توجه به شکل کوچک صفحه قبل: $\quad f_s = k\delta_{\text{فنر}} = k_{\text{تیر}}\,\delta_{\text{تیر}} \quad (3)$

در معادله (2) بجای $\bar{u}$ از (1) و بجای δها از (3) قرار می‌دهیم:

$$\frac{f_s}{k_e} = \frac{f_s}{k} + \frac{f_s}{k_{\text{تیر}}} \quad \text{یا} \quad k_e = \frac{k\,k_{\text{تیر}}}{k + k_{\text{تیر}}}$$

$k = 20\ \text{lb/in} \rightarrow$ و $\quad k_{\text{تیر}} = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3(29\times10^6)\,[\pi(1)^4/4]}{(10\times12)^3} = 39.54\ \text{lb/in}$

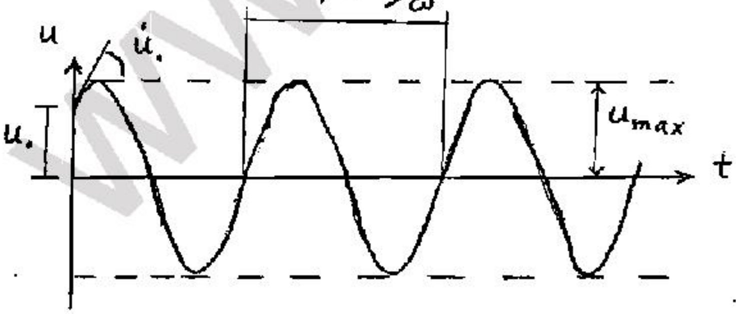
$$\Rightarrow \underline{K_e = 13.28\ \text{lb/in}}$$

ارتعاش آزاد SDOF

الف - بدون میرایی $\qquad m\ddot{u} + ku = 0$

شرایط اولیه $\quad u_0$ و $\dot{u}_0 \longrightarrow u(t) = u_0 \cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

پریود، فرکانس و فرکانس زاویه‌ای طبیعی سیستم

$$\delta_s = W/k = mg/k \quad \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{g/\delta_s}\ ,\quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/\delta_s}\ ,\quad T = 2\pi\sqrt{\delta_s/g}$$

دامنه حرکت $\quad u_{max} = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2}$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی بدون میرایی

$f_I + f_s = 0$

شرایط اولیه فرضی: $\begin{cases} u(t=0)=u_0 \\ \dot u(t=0)=\dot u_0 \end{cases}$

$m\ddot u + ku = 0 \rightarrow \ddot u + \frac{k}{m}u = 0$

$m\neq 0 \,,\, k\neq 0 \rightarrow k/m=\omega^2 \rightarrow$ فعلاً ω مفهوم فیزیکی ندارد.

(1) $\ddot u + \omega^2 u = 0 \longrightarrow$ برای حل $\longrightarrow$ پاسخ فرضی $u(t)=\bar c\, e^{st}$

$\dot u = \bar c s e^{st} \rightarrow \ddot u = \bar c s^2 e^{st} \Rightarrow$ در معادله (1) $\bar c e^{st}(s^2+\omega^2)=0$

$\bar c e^{st}\neq 0 \rightarrow s^2+\omega^2=0 \rightarrow s=\pm i\omega \quad (i=\sqrt{-1})$

$\Rightarrow$ پاسخ معادله $u(t)=\bar c_1 e^{i\omega t}+\bar c_2 e^{-i\omega t}$ (2)

ترجیح می دهیم، رابطه از حالت تابع اکسپوننشیل به حالت هارمونیک نوشته شود.

از رابطه مثلثاتی اولر استفاده می کنیم: $e^{\pm i\theta}=\cos\theta \pm i\sin\theta$

$\Rightarrow (2) \rightarrow u(t)=\bar c_1\cos\omega t + i\bar c_1\sin\omega t + \bar c_2\cos\omega t - i\bar c_2\sin\omega t$

$$u(t)=\underbrace{(\bar c_1+\bar c_2)}_{A}\cos\omega t + \underbrace{(i\bar c_1 - i\bar c_2)}_{B}\sin\omega t$$

$$u(t)=A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

برای تعیین ضرایب ثابت A و B از شرایط اولیه استفاده می کنیم:

$u(t=0)=u_0=A\times 1+B\times 0 \rightarrow A=u_0$

$\dot u(t)=-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$

$\dot u(t=0)=\dot u_0=-A\omega\times 0+B\omega\times 1 \rightarrow B=\dot u_0/\omega$

$$\boxed{u(t)=u_0\cos\omega t+\frac{\dot u_0}{\omega}\sin\omega t}$$

به کمک روابط مثلثاتی $u(t)=\rho\sin(\omega t+\alpha)$

$\rho = u_{max}=\sqrt{u_0^2+\left(\frac{\dot u_0}{\omega}\right)^2}$

$\alpha = \mathrm{Arc\,tg}\ \frac{\omega u_0}{\dot u_0}$

پاسخ بصورت تابع هارمونیکی است با دامنه ρ (u_{max}) و سیکل تناوب با فاصله زمانی T (پریود تابع). فاصله زمانی T عبارت است از مدتی که آرگومان تابع یعنی $(\omega t+\alpha)$ به مقدار 2π افزایش می یابد:

$(\omega t+\alpha)+2\pi=\omega(t+T)+\alpha \Rightarrow T=2\pi/\omega$

f فرکانس: تعداد سیکل در یک ثانیه $\quad f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \omega=2\pi f$

پس ω تعداد سیکل تناوب در 2π ثانیه که به فرکانس زاویه ای موسوم است.

مثال - در ساختمان صنعتی مثال های قبل مطلوبست برآورد ω ، T و f در دو جهت ؟

$$\omega_{N-S} = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{38.58}{0.04663}} = 28.73 \quad Rad/sec$$

$$T_{N-S} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{28.73} = 0.219 \quad sec$$

$$f_{N-S} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.219} = 4.57 \quad Hz$$

$$\omega_{E-W} = \sqrt{\frac{119.6}{0.04663}} = 50.64 \quad Rad/sec$$

$$T_{E-W} = \frac{2\pi}{50.64} = 0.124 \quad sec \quad , \quad f_{E-W} = \frac{1}{0.124} = 8.06 \quad Hz$$

$$\omega_{N-S} < \omega_{E-W}$$

مثال - در مثال های قبل (طره با وزنه در انتها)، مطلوبست تعیین f و T

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/\delta_s} \quad , \quad \delta_s = \frac{W}{K_e} = \frac{20}{13.28} = 1.494 \quad in$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{386}{1.494}} = 2.56 \quad Hz \quad , \quad T = \frac{1}{f} = 0.391 \quad sec$$

ارتعاش آزاد SDOF

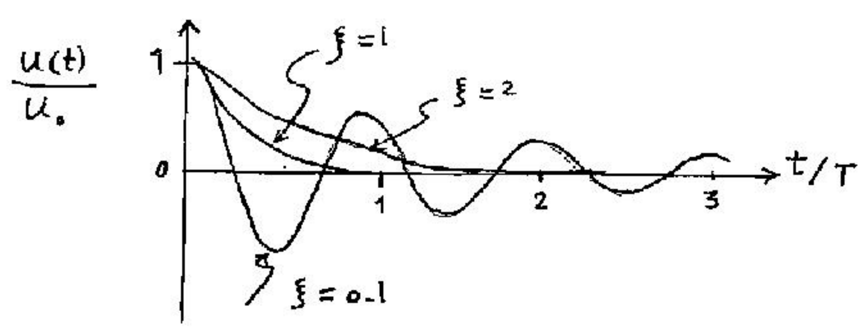
ب - حالت با میرایی

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

$$\begin{cases} K/m = \omega^2 \quad , \quad \underbrace{C_{cr}}_{\text{میرایی بحرانی}} = 2m\omega \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0 \\ \underbrace{\xi}_{\text{درصد میرایی}} = \dfrac{C_{\text{موجود}}}{C_{cr\,\text{بحرانی}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = C_{cr} \rightarrow \xi = 1 & \text{حالت بحرانی} \\ C > C_{cr} \rightarrow \xi > 1 & \text{حالت فوق بحرانی} \end{cases}$$

در عمل (واقعیت) : حالت زیر بحرانی $\xi < 1$ یا $C < C_{cr}$



برای ساختمانها ، پل ، سد ، تأسیسات صنعتی ، سازه های دریایی و .... $\xi < 0.1$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک‌درجه آزادی با میرائی

$$f_I + f_D + f_S = 0$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \rightarrow m \neq 0 \rightarrow \ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0 \quad ①$$

جواب فرضی : $u(t)=\bar{c}e^{st}$, $\dot{u} = \bar{c}se^{st}$, $\ddot{u} = \bar{c}s^2e^{st} \rightarrow$ ① در

$$\bar{c}e^{st}\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2\right) = 0 \rightarrow s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$S = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \rightarrow$ سه حالت برای زیر رادیکال متصور است

اگر $\frac{c}{2m} = \omega \rightarrow$ مقدار c را بحرانی نامند $\Rightarrow \boxed{c_{cr} = 2m\omega}$

اگر از درصد استهلاک استفاده شود $\xi = \frac{c_{\text{موجود}}}{c_{cr}} \rightarrow S = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2-1}$

$$\frac{c}{2m} = \frac{c\omega}{2m\omega} = \frac{c\omega}{c_{cr}} = \xi\omega \nearrow$$

تابع پاسخ اکسپوننسیل ← جواب S عدد حقیقی ← حالت بحرانی $\xi = 1$ یا 100% ← زیر رادیکال صفر

" " " ← جواب S دو عدد حقیقی ← حالت فوق بحرانی $\xi > 1$ ← زیر رادیکال مثبت

که در عمل، ارتعاش آزاد کلیه ابنیه (سازه‌های متعارف عمرانی) دارای میرائی خیلی کمتر از بحرانی است و تابع پاسخ دارای حالت نوسانی (ارتعاش) است: $\xi \ll 1$ یا 100% , $c_{\text{موجود}} \ll c_{cr}$

برای بدست آوردن تابع پاسخ :

$S = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1-\xi^2}$, $\omega\sqrt{1-\xi^2} = \omega_D$ فرض می‌کنیم $\Rightarrow$

$$S = -\xi\omega \pm i\omega_D \Rightarrow u(t) = \bar{c}_1 e^{-\xi\omega t + i\omega_D t} + \bar{c}_2 e^{-\xi\omega t - i\omega_D t}$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\left(\bar{c}_1 e^{i\omega_D t} + \bar{c}_2 e^{-i\omega_D t}\right)$$

عبارت داخل پرانتز شبیه پاسخ ارتعاش آزاد بدون میرایی است فقط ω به ω_D تبدیل شده، پس می‌توانیم به کمک رابطه اولر مثلثاتی، پاسخ را بصورت هارمونیک نوشت :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\left(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\right)$$

$\dot{u}_0$ و u_0 از شرایط اولیه $\Rightarrow A = u_0$, $B = \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}$

$$\boxed{u(t) = e^{-\xi\omega t}\left(u_0\cos\omega_D t + \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}\sin\omega_D t\right)}$$

می‌توان دو تابع هارمونیک را تبدیل به یک تابع نمود :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\rho\sin(\omega_D t + \alpha) = e^{-\xi\omega t}\rho\cos(\omega_D t - \theta)$$

که

$\rho = \sqrt{A^2+B^2}$, $\alpha = Arctan\, A/B$, $\theta = Arctan\, B/A$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\left[u_0 \cos\omega_D t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}\right)\sin\omega_D t\right]$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$ فرکانس زاویه‌ای میرایی

$\omega_D \# \omega$ برای $\xi < 0.2$

$$T_D = \frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}}$$ پریود طبیعی میرایی

دامنه حرکت در ارتعاش آزاد با میرایی در هر سیکل حرکت کاهش می‌یابد و پوش آنها :

$$\pm \rho e^{-\xi\omega t} \quad , \quad \rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}\right)^2}$$

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = \exp\left(\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \rightarrow \delta = \ln\frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\sqrt{1-\xi^2} \simeq 1 \Rightarrow \delta \simeq 2\pi\xi$$

کاهندگی لگاریتمی

معمولاً بهتر است بجای دو سیکل متوالی از چند سیکل فاصله برای کاهندگی لگاریتمی استفاده شود ،

$$\frac{u_1}{u_{j+1}} = \frac{u_1}{u_2}\,\frac{u_2}{u_3}\,\frac{u_3}{u_4}\cdots\frac{u_j}{u_{j+1}} = e^{j\delta}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{j}\ln\frac{u_1}{u_{j+1}} \simeq 2\pi\xi$$

رابطه بیان کننده تعداد سیکل لازم برای کاهش 50% دامنه حرکت :

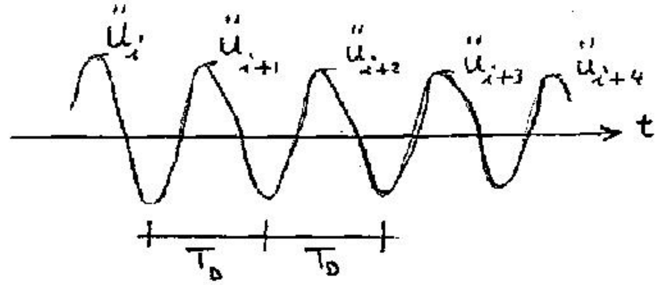
$$j_{50\%} \simeq \frac{0.11}{\xi}$$

تعیین تحلیلی درصد میرایی ممکن نیست لذا از روش های تجربی استفاده می شود . یکی از این روش ها ، حالت ارتعاش آزاد سازه واقعی است ،

$$\xi = \frac{1}{2\pi j}\ln\frac{u_i}{u_{i+j}} \quad \text{یا} \quad \xi = \frac{1}{2\pi j}\ln\frac{\ddot{u}_i}{\ddot{u}_{i+j}}$$

اگر آزمایش اجازه ثبت u را بدهد — اگر آزمایش اجازه ثبت شتاب را بدهد

معمولاً در عمل حالت ثبت شتاب سازه در آزمایش ارتعاش آزاد سهل تر است ،



شتاب نگاشت ارتعاش آزاد سازه

از شکل می توان ارتعاش آزاد را بررسی و پریود واقعی را محاسبه نمود و از روش تحلیلی و کاربرد سختی و جرم نیز محاسبه و مقایسه کرد تا دقت تعیین سختی و جرم ارزیابی شود.

مثال - مطلوبست تعیین پریود طبیعی و درصد میرایی یک قاب (مدل) که تحت آزمایش ارتعاش آزاد قرار گرفته است. نتیجه آزمایش بصورت زیر است:

Peak	Time, t_i (sec)	Peak, $\ddot{u}_i$ (g)
1	1.110	0.915
11	3.844	0.076

$$T_D = \frac{3.844 - 1.110}{10} = 0.273 \text{ sec}$$

$$\xi = \frac{1}{2\pi(10)} \ln \frac{0.915g}{0.076g} = 0.0396 \text{ یا } 3.96\%$$

مثال - یک مخزن آب هوایی که خالی است درنظر گرفته می شود، یک کابل به مخزن متصل بوده و نیروی افقی 16.4 kips اعمال شده که باعث 2" تغییرمکان افقی مخزن شده است، کابل بصورت ناگهانی قطع و ارتعاش آزاد رخ می دهد، در پایان چهار سیکل کامل، زمان ۲ ثانیه و دامنه حرکت 1" می باشد. با اطلاعات فوق مطلوبست محاسبه: الف) درصد میرایی ب) پریود طبیعی بدون میرایی ج) سختی موثر سیستم د) وزن موثر سیستم هـ) ضریب میرایی و) تعداد سیکل لازم برای اینکه دامنه حرکت به 0.2" کاهش یابد.

الف) در ۴ سیکل دامنه از ۲ به ۱ رسیده $\quad j_{50\%} \simeq \frac{0.11}{\xi} \rightarrow \xi = \frac{0.11}{4} = 0.0275 = 2.75\%$

ب) $T_D = \frac{2.0}{4} = 0.5 \text{ sec}$, $T \simeq T_D = 0.5 \text{ sec}$, ج) $K = \frac{16.4}{2} = 8.2 \ \frac{\text{kips}}{\text{in}}$

د) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.5} = 12.57 \ \text{Rad/s}$

$$m = \frac{K}{\omega^2} = \frac{8.2}{(12.57)^2} = 0.0519 \ \text{kip-sec}^2/\text{in}$$

$$W = mg = (0.0519)\,386 = 20.03 \quad \text{kips}$$

ه) $C = \xi\,(2\sqrt{km}) = 0.0275\left[2\sqrt{8.2\,(0.0519)}\right] = 0.0359$ kip-sec/in

و) $\xi \simeq \dfrac{1}{2\pi j}\ln\dfrac{u_1}{u_{1+j}} \quad \rightarrow j \simeq \dfrac{1}{2\pi(0.0275)}\ln\dfrac{2}{0.2} = 13.32 \sim 13$ سیکل

مثال - وزن آب لازم برای پر کردن مخزن آب هوایی در مثال قبل برابر 80 kips می‌باشد. مطلوبست تعیین پریود طبیعی و درصد میرایی مخزن پر؟

$$W = 20.03 + 80 = 100.03 \quad \text{kips}$$

$$m = \frac{100.03}{386} = 0.2591 \quad \text{kip-s}^2/\text{in}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2591}{8.2}} = 1.12 \quad \text{sec}$$

$$\xi = \frac{C}{2\sqrt{km}} = \frac{0.0359}{2\sqrt{8.2\,(0.2591)}} = 0.0123 = 1.23\%$$

انرژی ارتعاش آزاد

انرژی یک سیستم SDOF در اثر ارتعاش آزاد (شرایط اولیه u_0 و $\dot{u}_0$) در لحظه شروع:

$$E_i = \frac{1}{2}k(u_0)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{u}_0)^2$$

در هر لحظه از ارتعاش آزاد، انرژی کل از جمع دو انرژی است: انرژی جنبشی E_K و انرژی پتانسیل از کرنش E_s:

$$E_K = \frac{1}{2}m\dot{u}^2(t) \quad , \quad E_s = \frac{1}{2}k\,u^2(t)$$

بجای $u(t)$ از معادلش در حالت ارتعاش بدون میرایی قرار می‌دهیم:

$$E_s(t) = \frac{1}{2}k\left[u_0\cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t\right]^2$$

$$E_K(t) = \frac{1}{2}m\omega^2\left[-u_0\sin\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\cos\omega t\right]^2$$

انرژی کل:

$$E_K(t) + E_s(t) = \frac{1}{2}k\,u_0^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{u}_0^2$$

مقدار کل انرژی در هر لحظه مستقل از زمان بوده و برابر انرژی لحظه ابتدایی است (میرایی صرفنظر شده).

واکنش سیستم‌های SDOF در بارگذاری هارمونیک

این بخش از مباحث کلاسیک و پایه‌ای دینامیک سازه‌هاست، چرا؟
از یک طرف اکثر بارها بصورت هارمونیکی بیان می‌شوند (نیروی نامتعادل ماشینهای چرخان، امواج دریا، زلزله، بارهای پریودیک و .....)،
از طرف دیگر، درک رفتار سازه‌ها در برابر نیروهای هارمونیک کمک فراوانی به درک واکنش سازه در برابر سایر نیروها می‌نماید.
در ضمن نوع تابع هارمونیک و نتایج حاصل از تحلیل و تفسیر آنها ساده می‌باشد.

$$P(t) = P_0 \sin \Omega t$$

الف - حالت بدون میرایی:

$$m\ddot{u} + Ku = P_0 \sin \Omega t \qquad \beta = \frac{\Omega}{\omega}$$

$$u(t) = \left[u_0 \cos\omega t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega} - \frac{P_0}{K}\frac{\beta}{1-\beta^2}\right)\sin\omega t\right] + \frac{P_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2}\sin\Omega t$$

اگر شرایط اولیه صفر باشد

$$u(t) = \frac{P_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2}(\underbrace{\sin\Omega t}_{\text{پایدار}} - \underbrace{\beta \sin\omega t}_{\text{گذرا}}) \qquad : \quad u_0 = \dot{u}_0 = 0$$

$$R(t) = \frac{u(t)}{u_{st}} \qquad \text{ضریب رفتار} \qquad \leftarrow \quad u_{st} = \frac{P_0}{K}$$

$$R_{max}(t) = D = \frac{u_{max}(t)}{u_{st}} = \frac{\frac{P_0}{K}\frac{1}{1-\beta^2}\overset{1}{\cancel{\sin\Omega t}}}{P_0/K} = \frac{1}{|1-\beta^2|}$$

ضریب بزرگنمایی تغییرمکان

حالت تشدید (رزونانس) $\Omega = \omega \rightarrow \beta = 1 \rightarrow D = \frac{1}{0} = \infty$

$u(t) \nearrow \infty \longrightarrow$ با رفع ابهام:

$$u(t) = -0.5\,\frac{P_0}{K}\,(\omega t \cos\omega t - \sin\omega t)$$

اگر میرایی درنظر گرفته شود ، برای محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل باید از $u(t)$ حالت ارتعاش آزاد با میرایی استفاده نمود.

انرژی کل در این حالت دارای تابع کاهشی در زمان خواهد بود چون مقداری از انرژی به صورت انرژی استهلاک می‌شود که در مدت زمان صفر تا t برابر :

$$E_D = \int_0^u f_D(t)\,du = \int_0^u c\dot{u}\,du = \int_0^t c\dot{u}^2\,dt$$

مقدار انرژی کل اولیه (لحظه اول شروع ارتعاش) به مرور مستهلک خواهد شد .

ب- حالت با میرایی :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \sin \Omega t$$

$$u(t) = e^{-\xi \omega t}(A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + M \sin \Omega t + N \cos \Omega t$$

$$M = \frac{P_0}{k} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

A و B از شرایط اولیه بدست می‌آید.

$$N = \frac{P_0}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

اگر از جواب گذرا صرفنظر شود :

$$u(t) \simeq u_p(t) = \rho \sin(\Omega t - \alpha)$$

$$\rho = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\alpha = \operatorname{Arctan}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

$$D = \frac{\rho}{P_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$\beta \to 1 \Rightarrow D = \frac{1}{2\xi}$ در رزونانس

توجه : حداکثر D در مقادیری قدری کمتر از $\beta = 1$

$$\frac{dD}{d\beta} = -4\beta(1-\beta^2) + 8\xi^2\beta = 0 \rightarrow \beta^2 = 1 - 2\xi^2$$

برای مثال $\xi = 15\%$ ← حداکثر D بازاء $\beta = 0.977$ حاصل می‌شود.

اگر از جواب گذرا صرفنظر نشود (با شرایط اولیه صفر $u_0 = \dot{u}_0 = 0$) :

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\xi} \left[e^{-\xi\omega t} \left(\cos \omega_D t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D t \right) - \cos \omega t \right]$$

ترم sin در عبارت بالا کوچک است (صرفنظر می‌شود) ، $\omega_D \simeq \omega$:

$$u(t) \simeq \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\xi} \left(e^{-\xi\omega t} - 1 \right) \cos \omega t$$

برای حالت حذف جواب گذرا :

۱- اگر $\beta << 1$ (تغییرات نیرو آهسته است) ، ضریب بزرگنمایی D کمی بزرگتر از یک است و مستقل از میرایی ، پس رفتار دینامیکی مانند تغییرشکل استاتیکی است. $u_{max} \simeq \rho \simeq \frac{P_0}{K}$

* سختی سیستم کنترل کننده است. $D \simeq 1$

۲- اگر $\beta \gg 1$ (تغییرات نیرو سریع است) ، با افزایش β مقدار D به سمت صفر میل می‌کند و میرایی اثر زیادی ندارد. برای مقادیر بزرگ β ، ترم β^4 در بیان عبارت D تعیین کننده است و تقریباً داریم :

$$D = \frac{\rho}{P_0/K} \simeq \frac{1}{\beta^2} = \frac{\omega^2}{\Omega^2}$$

* جرم کنترل کننده است. دامنه حرکت $\rho \simeq \frac{P_0}{K}\frac{\omega^2}{\Omega^2} = \frac{P_0}{m\Omega^2}$

۳- اگر $\beta \simeq 1$ (فرکانس بارگذاری و فرکانس طبیعی سیستم تقریباً برابر است) ، مقدار D بسیار به درصد میرایی حساس است. تغییرشکل دینامیکی خیلی از تغییرشکل استاتیکی بزرگتر است. $\rho = \frac{P_0/K}{2\xi} = \frac{P_0}{C\omega}$

* میرایی کنترل کننده است.

مثال - دامنه حرکت (با تقریب ρ) یک سیستم معادل یک درجه آزادی تحت اثر دو حالت بارگذاری هارمونیکی بصورت زیر است؛ مطلوبست تخمین درصد میرایی سیستم؟

$\Omega = \omega \leftarrow \rho = 5''$ و $\Omega = 5\omega \leftarrow \rho = 0.02''$ ،

$\omega = \Omega$:

$\Omega = 5\omega$

$$\rho = \frac{P_0}{K}\frac{1}{2\xi} = 5 \quad , \quad \rho \simeq \frac{P_0}{K}\frac{1}{\beta^2} = \frac{P_0/K}{25} = 0.02 \rightarrow \frac{P_0}{K} = 0.5''$$

$$\downarrow \quad \xi = 0.05 = 5\%$$

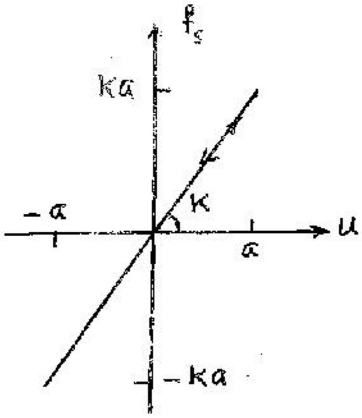
صفحه ۲۲ وجود ندارد.

برآورد درصد میرایی از روش تشدید هارمونیکی

تئوری: نوسان کننده ساده مستهلک شونده با فرکانس زاویه‌ای ω

$$P(t) = P_0 \sin \omega t \qquad , \ \Omega = \omega \rightarrow \beta = 1$$

$$u(t) = u_p(t) = \frac{P_0}{K} \frac{1}{(2\xi\beta)^2} (-2\xi\beta\cos\omega t)$$



$$u(t) = -\frac{P_0}{2K\xi} \cos \omega t$$

الف - نیروی f_s در فنر $\quad f_s = K u(t)$

داشته $\quad a = P_0 / 2K\xi$

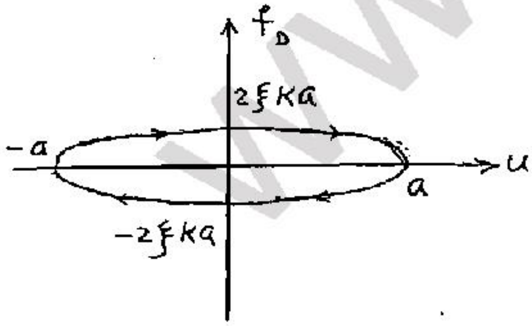
ب - نیروی f_D در میراگر $\quad f_D = c.\dot{u}(t)$

$$\frac{c}{m} = 2\xi\omega \rightarrow c = 2m\xi\omega \rightarrow f_D = 2m\xi\omega\dot{u}$$

$$u(t) = -a\cos\omega t \rightarrow \dot{u}(t) = a\omega\sin\omega t$$

$$f_D = 2m\xi\omega a\omega\sin\omega t = 2m\xi\omega^2 a\sin\omega t$$

$$\omega^2 = K/m \rightarrow \omega^2 m = K \rightarrow f_D = 2K\xi a \sin\omega t$$



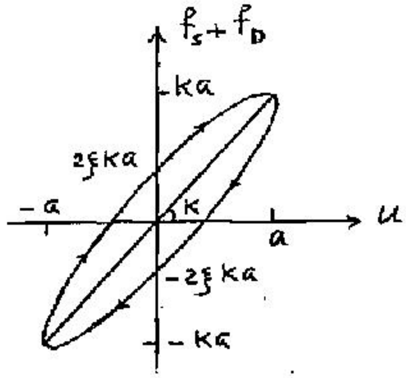
$$\frac{f_D}{2K\xi a} = \sin\omega t \rightarrow \left(\frac{f_D}{2K\xi a}\right)^2 = \sin^2\omega t$$

$$\sin^2\omega t = 1 - \cos^2\omega t = 1 - u^2/a^2$$

تابع بیضی $\quad f_D^2 / (2K\xi a)^2 = 1 - u^2/a^2$

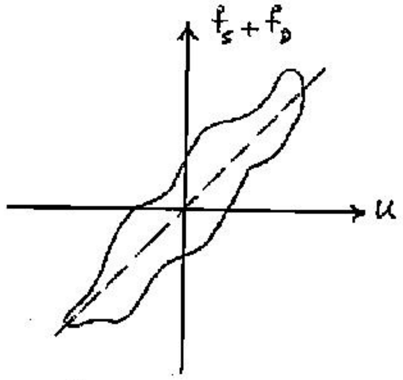
در یک سیکل کامل ، مقدار انرژی پتانسیل در فنر تماماً پس داده می‌شود ولی انرژی استهلاک شده در میراگر مصرف می‌شود و مقدار آن برابر سطح زیر بیضی است :

$$A = 2\pi a^2 K\xi \Rightarrow \xi = \frac{A}{2\pi a^2 K}$$



رابطه بین مجموع دو نیروی f_s و f_D و تغییر مکان u :
شکل پوسته آمده برای حالت تئوریک و ایده‌آل بوده است.

از شکل مساحت بیضی، مقدار a و K محاسبه و درصد میرایی نسبی تخمین زده می‌شود



(منحنی در حالت واقعی)

$$\xi = A / 2\pi a^2 K$$

بتن مسلح 7% ‌‌‌‌ بتن پیش تنیده 5%

فولادی پیچ و مهره 7% ‌‌‌‌ فولادی جوش شده 4%

(توصیه سازمان انرژی اتمی آمریکا)

مقدار انرژی مستهلک شده یک سیستم SDOF در یک سیکل تحت اثر $P(t)=P_0\sin\Omega t$ (جواب پایدار) :

$$E_D=\int f_D\,du=\int_0^{2\pi/\Omega}(c\dot u)\dot u\,dt=\int_0^{2\pi/\Omega}c\dot u^2\,dt$$

$$=c\int_0^{2\pi/\Omega}[\Omega\rho\cos(\Omega t-\alpha)]^2\,dt=\pi c\Omega\rho^2$$

توجه از قبل داشتیم : $u(t)\simeq u_p(t)=\rho\sin(\Omega t-\alpha)$

مثال - نیروی مقاوم برای حرکت جسمی در یک سیال با توان دو سرعت رابطه دارد $f_D=\pm b\dot u^2$
مطلوبست تعیین ضریب میرایی معادل لزجی C_{eq} برای چنین نیرویی که بر سیستم مرتعش تحت اثر نیروی هارمونیکی با دامنه حرکت ρ و فرکانس زاویه‌ای Ω و همچنین تخمین ρ در حالت $\omega=\Omega$ ؟

حل : اگر زمان از حالت تغییر مکان حداکثر منفی در نظر باشد : $u(t)=-\rho\cos\Omega t$

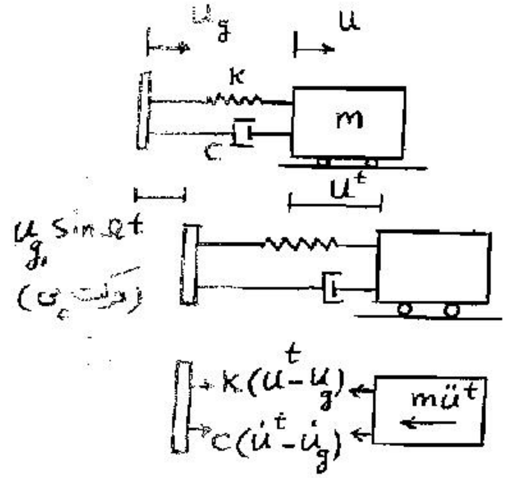
$$E_D=\int f_D\,du=\int_0^{2\pi/\Omega}f_D\dot u\,dt=2\int_0^{\pi/\Omega}f_D\dot u\,dt=2\int_0^{\pi/\Omega}(b\dot u^2)\dot u\,dt=$$

$$2b\Omega^3\rho^3\int_0^{\pi/\Omega}\sin^3\Omega t\,dt=\frac{8}{3}b\Omega^2\rho^3$$

$$\pi C_{eq}\Omega\rho^2=\tfrac{8}{3}b\Omega^2\rho^3 \rightarrow \underline{C_{eq}=\tfrac{8}{3\pi}b\Omega\rho}$$

از قبل $\rightarrow \Omega=\omega \rightarrow \rho=\dfrac{P_0}{c\omega} \rightarrow \underline{\rho=\left(\dfrac{3\pi}{8b}\dfrac{P_0}{\omega^2}\right)^{1/2}}$

کاهندگی ارتعاش



الف ـ انتقال حرکت از تکیه گاه به سازه

ماشین آلات ـ عبور قطار ـ انفجار ـ زلزله ...

$$u_g(t) = u_{g_0}\sin\Omega t \rightarrow \dot{u}_g = u_{g_0}\,\Omega\cos\Omega t$$

برای سادگی u^t را با u نشان می دهیم.

$$m\ddot{u} + c(\dot{u}-\dot{u}_g) + k(u-u_g) = 0$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \underbrace{k u_{g_0}\sin\Omega t + c\Omega u_{g_0}\cos\Omega t}_{P_0\sin(\Omega t+\alpha)}$$

$$\frac{c\Omega}{k} = \frac{2c\Omega}{2m\omega^2} = \frac{2c\Omega}{\underbrace{2m\omega\times\omega}_{c_{cr}}} = 2\xi\beta$$

$$P_0 = u_{g_0}\sqrt{k^2+(c\Omega)^2} = u_{g_0}\,k\sqrt{1+(2\xi\beta)^2} \quad , \tan\alpha = \frac{c\Omega}{k} = 2\xi\beta$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0\sin(\Omega t+\alpha) \rightarrow u_{max} = \frac{P_0}{k}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

حداکثر تغییر مکان منتقله از پی سازه به خود سازه وقتی پی بصورت $u_{g_0}\sin\Omega t$ ارتعاش می کند.

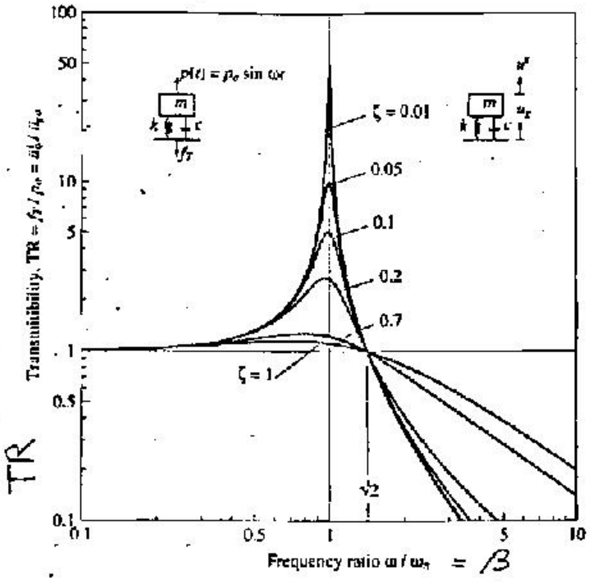
مساله مهم در کاهندگی ارتعاش ؛ حفاظت سیستم از ارتعاشات مزاحم ناشی از حرکت تکیه گاه است.

ضریب قابلیت انتقال ؛ معیاری جهت تعیین میزان انتقال حرکت از پی به دستگاه

$$TR = \frac{u_{max}}{u_{g_0}} = \frac{\frac{P_0}{k}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}}{P_0/k\,\frac{1}{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$$\Leftarrow \quad D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \leftarrow \sin$$ در بارگذاری

$$\boxed{TR = D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}$$



- به ازای $\beta = \sqrt{2}$ همه منحنی ها از یک نقطه عبور و TR=1 (حداکثر تغییرمکان مستقله سیستم برابر حداکثر (دامنه) ارتعاش پی).

- هرچه β از $\sqrt{2}$ بزرگتر باشد، ضریب انتقال کاهش پیدا می‌کند، بنابراین تغییرمکان مستقله کمتر می‌شود.

- هرچه ξ کمتر باشد، ضریب انتقال کمتر می‌شود! تأثیر نیروی میرایی هم و هرچه کمتر باشد، بهتر است، نقش نیروی میرایی ؟ نامطلوب!

u_{max} تغییرمکان حداکثر سیستم است ولی برای نیروی داخلی سازه در اثر حرکت تکیه‌گاهی باید تغییرمکان نسبی معلوم باشد: u_r

$$u_r = u - u_g$$

$$m\ddot{u}_r + c\dot{u}_r + ku_r = -m\ddot{u}_g = m u_{g0}\,\Omega^2 \sin \Omega t$$

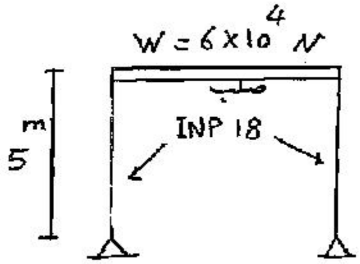
$$P_{eff} = -m\ddot{u}_g$$

$$u_{r\,max} = \frac{m u_{g0}\Omega^2}{k}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\frac{m\Omega^2}{k} = \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \beta^2 \longrightarrow \frac{u_{r\,max}}{u_{g0}} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$u_{r\,max} = u_{g0}\, D\, \beta^2$$

مثال ـ $u_g(t) = 0.4 \sin 4t$ (cm) تحریک وارد بر پی



$$\begin{cases} E = 2.1\times10^{6}\ \mathrm{kg/cm^2} \\ I = 1450\ \mathrm{cm^4} \end{cases}$$
$\xi = 5\%$

TR = ?

حداکثر تنش موجود در ستونها ؟

$$K = \frac{6EI}{h^3} = 146.2\ \mathrm{kgf/cm} = \frac{6\times2.1\times10^{6}\times1450}{(500)^3}$$

$$K = 146.2\times9.8\times100 = 143276\ \mathrm{N/m} \quad , \quad u_{g_0} = 0.4\ \mathrm{cm}$$

$$\omega = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{143276\times9.8}{6\times10^4}} = 4.84\ \mathrm{Rad/s}$$

$$\Omega = 4\ \mathrm{Rad/s} \rightarrow \beta = 4/4.84 = 0.826$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-0.826^2)^2 + (2\times0.05\times0.826)^2}} = 3.046$$

$$TR = 3.046\sqrt{1+(2\times0.05\times0.826)^2} = 3.056$$

$$u_{r\,max} = u_{g_0} D \beta^2 = 0.4\times3.046\times(0.826)^2 = 0.83\ \mathrm{cm}$$

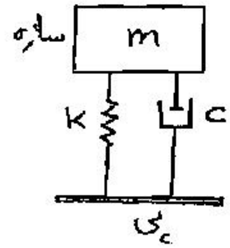
نیروی هر ستون $= \dfrac{146.2\times0.83}{2} = 60.67\ \mathrm{kgf}$

لنگر حداکثر هر ستون $M_{max} = 60.67\times500 = 30335\ \mathrm{kgf\text{-}cm}$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I/h} = \frac{30335}{1450/9} = 188.3\ \mathrm{kgf/cm^2}$$

INP18 → h = 9

ب ـ انتقال نیرو از سازه به تکیه‌گاه



در طراحی پی های با سیستم های مرتعش بکار می‌رود. سازه مرتعش است و هدف تعیین مقدار نیروی منتقله از سازه به تکیه‌گاه است.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \sin\Omega t$$

جواب پایدار $u(t) = \rho \sin(\Omega t - \alpha)$

$$\rho = \frac{P_0}{k}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} = \frac{P_0}{k}\times D$$

برآیند نیروهای انتقال یافته از سازه به زمین برابر مجموع نیروهای فنر و کمک فنر است.
در استاتیک فقط نیروی ku منتقل می‌شود اما در دینامیک، ku و $c\dot{u}$ منتقل می‌شود:

$$R = f_s + f_D = ku + c\dot{u}$$

$$R = \rho\left[k\sin(\Omega t-\alpha) + c\Omega\cos(\Omega t-\alpha)\right] = \rho\sqrt{k^2 + c^2\Omega^2}\,\sin(\Omega t-\alpha+\gamma)$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c\Omega}{k}\right) = 2\xi\beta$$

$$(\alpha-\gamma) = \theta \quad \text{زاویه فاز} \rightarrow \tan\theta = \frac{\tan\alpha - \tan\gamma}{1+\tan\alpha\tan\gamma} = \frac{2\xi\beta^{3}}{1-\beta^2+4\xi^2\beta^2}$$

$$R = \rho K\sqrt{1+\left(\frac{c\Omega}{k}\right)^2}\,\sin(\Omega t-\theta) = P_0 D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}\,\sin(\Omega t-\theta)$$

$$R_{max} = \frac{P_0\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

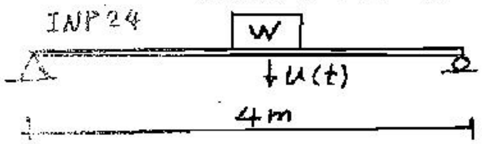
TR: قابلیت انتقال در این حالت عبارت از نسبت حداکثر نیروی انتقال یافته به تکیه‌گاه به حداکثر نیروی هارمونیکی وارد بر سازه است.

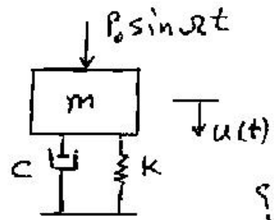
$$TR = \frac{R_{max}}{P_0} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} = D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$$

شبیه حالت الف

انتقال حرکت از تکیه‌گاه به سازه و انتقال نیرو از سازه به تکیه‌گاه از یک فرمول پیروی می‌کند.
(منحنی تغییرات TR مشابه است).

مثال -





$\xi = 10\%$

نیروی انتقال یافته از موتور به تیر؟

$P(t) = (3\times10^4)\sin 40t \quad N$

از وزن تیر صرف نظر می گردد

$I_x = 4250 \ cm^4 \quad , \quad E = 2.1\times10^6 \ Kg/cm^2$

حل:

$$K = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48\times2.1\times10^6\times4250}{(400)^3} = 6694 \quad kgf/cm$$

$$K = 6694\times9.8\times100 = 6560120 \quad N/m$$

$$\omega = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{6560120\times9.8}{20\times10^3}} = 56.7 \quad Rad/s$$

$$\beta = \Omega/\omega = \frac{40}{56.7} = 0.7$$

$$u_{st} = P_0/K = \frac{3\times10^4}{6560120}\times100 = 0.46 \ cm$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-0.7^2)^2 + (2\times0.1\times0.7)^2}} = 1.89$$

$$\rho = \frac{P_0}{K} D = 0.46\times1.89 = 0.87 \ cm$$ حداکثر تغییر مکان

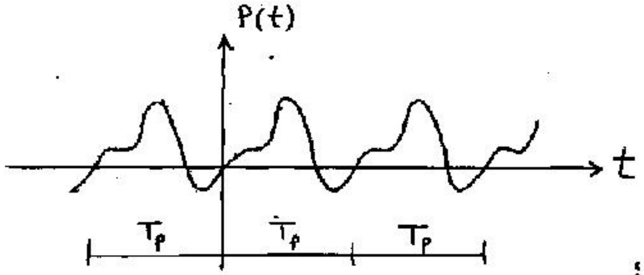
$$TR = D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2} = 1.89\sqrt{1+(2\times0.1\times0.7)^2} = 1.91$$

$$P_{max} = P_0\times TR = 3\times10^4\times1.91 = 5.73\times10^4 \ N$$

تاثیر نیروی دینامیکی

Periodic Excitation — پاسخ سیستم SDOF به بارگذاری پریودیک

نیروی پریودیک نیرویی که تابع آن پس از یک پریود ثابت، عیناً تکرار شود (پریود T_p).



نیروی پروانه کشتی، امواج روی سکوهای دریایی،
نیروی گردابی باد بر ساختمانهای بلند و لاغر و
خیلی نیروهای دیگر، پریودیک یا نزدیک به آن هستند؛

شبیه‌سازی زلزله و حرکت اتومبیل روی دهانه بلند پل‌ها به دلیل اثر بلند مدت خزش از آن جمله می‌باشند،

با کمک بسط سری فوریه، نیروی پریودیک به ترم‌های هارمونیک تبدیل می‌شود (رفتار سازه خطی).

$$P(t)_{\text{پریودیک}} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\,dt$$ مقدار متوسط $P(t)$ در یک پریود

$$\begin{cases} \Omega = \dfrac{2\pi}{T_p} \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\cos(n\Omega t)\,dt \quad , \quad b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\sin(n\Omega t)\,dt$$

در تئوری ∞ ترم ولی در عمل چند ترم اول برای همگرایی کافی است.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$$

$$\beta_n = \frac{\Omega_n}{\omega} = \frac{\frac{2\pi n}{T_p}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{nT}{T_p} = \frac{n\Omega_1}{\omega} \quad , \quad \Omega_n = n\Omega_1$$

از حل معادله برای هر ترم بارگذاری $\Rightarrow u(t)$

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \Big\{ \left[2\xi\beta_n a_n + (1-\beta_n^2) b_n\right] \sin\Omega_n t +$$

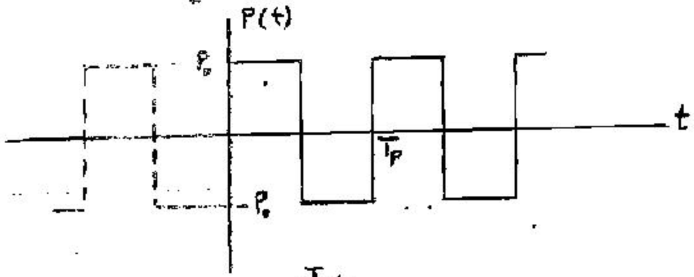
$$+ \left[(1-\beta_n^2) a_n - 2\xi\beta_n b_n\right] \cos\Omega_n t \Big\}$$

$u(t)$ یک تابع پریودیک با پریود T_p

تأثیر نسبی هر ترم بستگی مستقیم به مقدار a_n و b_n از مولفه نیروی $P(t)$ و همینطور ضریب β_n دارد.

مثال - مطلوبست تحلیل یک SDOF تحت اثر نیروی پریودیک

$$P(t)=\begin{cases} P_o & 0\leqslant t\leqslant T_p/2 \\ -P_o & T_p/2\leqslant t\leqslant T_p \end{cases}$$



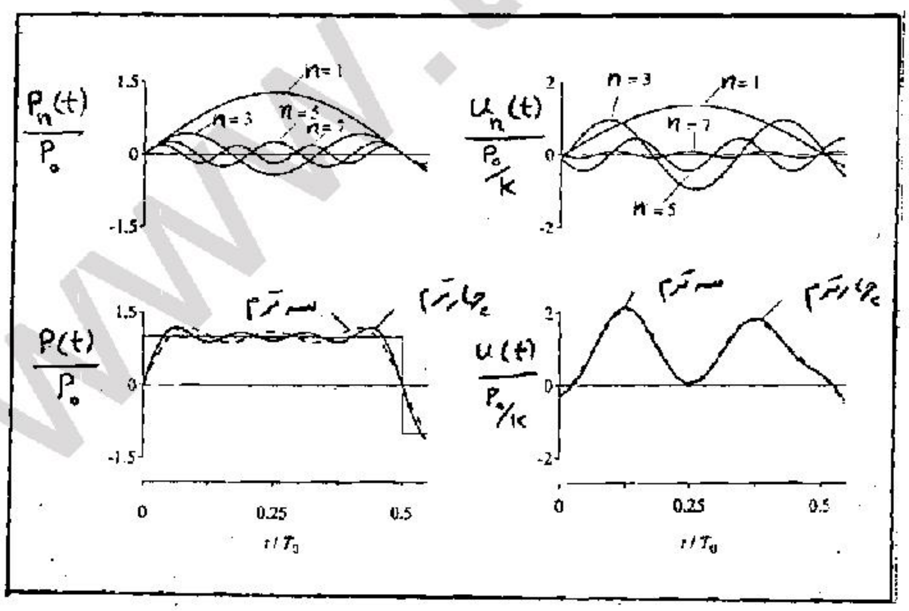
$$a_o=\frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}P(t)\,dt=0$$

$$a_n=\frac{2}{T_p}\left[P_o\int_0^{T_p/2}\cos(n\Omega t)\,dt+(-P_o)\int_{T_p/2}^{T_p}\cos(n\Omega t)\,dt\right]=0$$

$$b_n=\frac{2}{T_p}\left[P_o\int_0^{T_p/2}\sin(n\Omega t)\,dt+(-P_o)\int_{T_p/2}^{T_p}\sin(n\Omega t)\,dt\right]=\begin{cases}0 & \text{زوج } n\\ 4P_o/n\pi & \text{فرد } n\end{cases}$$

$$P(t)=\sum P_n(t)=\frac{4P_o}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\Omega t)$$

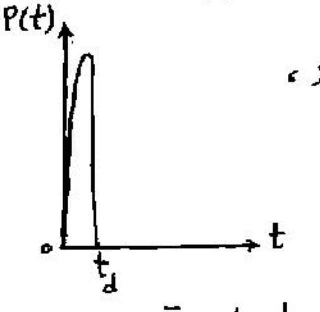
$$u(t)=\frac{P_o}{k}\,\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n}\,\frac{(1-\beta_n^2)^2\sin(n\Omega t)-2\xi\beta_n\cos(n\Omega t)}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}$$



تحلیل دینامیکی SDF در بارگذاری اختیاری و کلی (انتگرال دوهامل)

Duhamel's integral (Response to ARBITRARY Force)

قبل از پرداختن به بارگذاری کلی (بدون محدودیت خاص)، تحلیل دینامیکی در برابر بار آنی دیده می شود. مدت زمان اعمال بار بقدری کوتاه که سیستم فرصت عکس العمل ندارد، بنابراین تغییرمکان در فاز بارگذاری تقریباً صفر است. میرایی در این نوع بارگذاری اثر بسیار ناچیز دارد. جواب سیستم در فاز ارتعاش آزاد خواهد بود: $t > t_d$



$\bar{t} = t - t_d$

شرایط اولیه در لحظه t_d برآورد شده و رابطه ارتعاش آزاد (بدون میرایی) نوشته می شود.

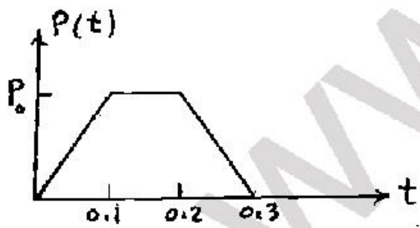
ضربه = اندازه مقدار حرکت $\Rightarrow \int_0^{t_d} P(t)\,dt = m\Delta\dot{u} = m(\dot{u}_{t_d} - \underbrace{\cancel{\dot{u}_0}}_{\text{صفر}}) = m\dot{u}_{t_d}$

$u_{t_d} \# 0$ و $\dot{u}_{t_d} = \frac{\int P(t)dt}{m}$

رابطه ارتعاش آزاد $u(\bar{t}) = \frac{\dot{u}_{t_d}}{\omega}\sin\omega\bar{t} + \underbrace{\cancel{u_{t_d}\cos\omega t}}_{\text{صفر}} = \frac{\int_0^{t_d} P(t)\,dt}{m\omega}\sin\omega\bar{t}$

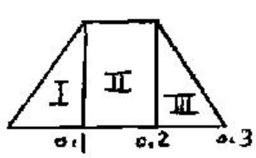
معمولاً اگر $t_d \ll \frac{T}{4}$ باشد، جواب تقریبی فوق، قابل قبول خواهد بود.

مثال- یک سیستم SDF با T=0.4 sec تحت بار ذوزنقه ای شکل است. $u(t=1.8) = ?$



$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} = 15.7$ Rad/s , $t_d = 0.3 > \frac{T}{4}$

روش مستقیم یا ...



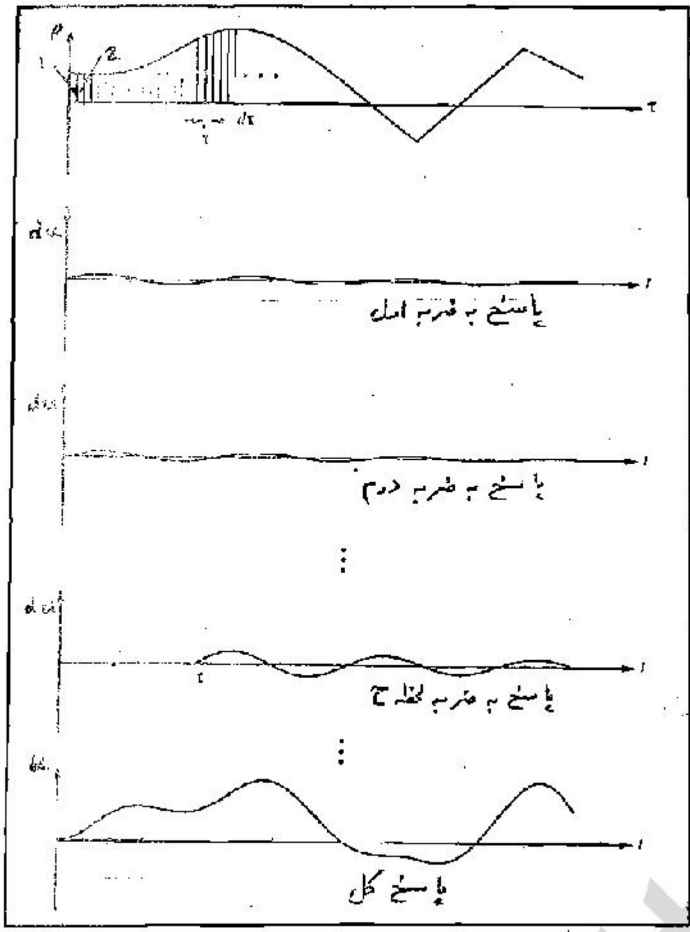
فقط فاز I: $t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_1(\bar{t} = 1.7) = \frac{0.1P_0}{2m\omega}\sin(1.7\omega)$

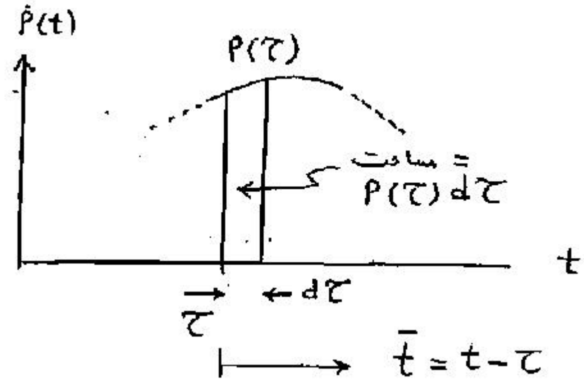
فقط فاز II: $t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_2(\bar{t} = 1.6) = \frac{0.1P_0}{m\omega}\sin(1.6\omega)$

فقط فاز III: $t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_3(\bar{t} = 1.5) = \frac{0.1P_0}{2m\omega}\sin(1.5\omega)$

سیستم خطی $\rightarrow u(t=1.8) = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{0.1P_0}{2m\omega}(\sin1.7\omega + 2\sin1.6\omega + \sin1.5\omega)$

اینک روش انتگرال دوهامل تشریح می شود:





$$du(\bar{t}) = \frac{P(\tau)\,d\tau}{m\omega}\sin\omega\bar{t}$$

$$\int_0^t du = u(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

انتگرال دیوهامل برای حالت بدون میرایی

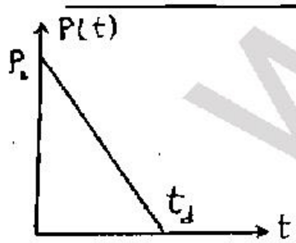
جواب خیلی دقیق است چون $d\tau \ll \frac{T}{4}$

پاسخ انتگرال دوهامل برای حالت با میرایی

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t P(\tau)\,e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

اگر تابع $P(t)$ پیچیده باشد یا شکل خاصی نداشته باشد، از روش برآورد عددی استفاده می شود،

در عمل، روش های عددی انتگرال دوهامل از کارایی خوبی برخوردار نمی باشند.



مثال - مطلوبست تحلیل یک SDF با روش انتگرال دوهامل برای بارگذاری زیر:

حالت بدون میرایی:

$$P(t) = P_0\left(1-\frac{t}{t_d}\right) \qquad 0 \le t \le t_d$$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P_0\left(1-\frac{\tau}{t_d}\right)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

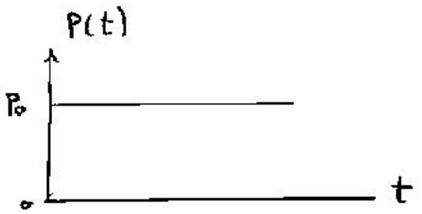
پس از عملیات پر حجم انتگرال گیری (شرایط اولیه صفر فرض شده است):

$$u(t) = \frac{P_0}{k}\left[1-\frac{t}{t_d}-\cos\omega t+\frac{1}{\omega t_d}\sin\omega t\right] \qquad 0 \le t \le t_d$$

برای $t > t_d$ (ارتعاش آزاد):

باید u و $\dot{u}$ در لحظه t_d برآورد شود و در رابطه ارتعاش آزاد قرار گیرد.

پاسخ سیستم SDF در چند حالت بارگذاری خاص



الف - STEP Force $\quad m\ddot{u}+ku=P(t)=P_0$

جواب بدون میرایی $\quad u(t)=\frac{P_0}{k}(1-\cos\omega t)$

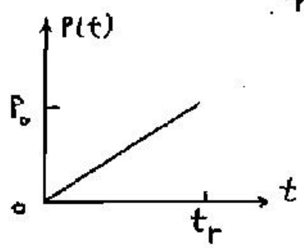
در این حالت $\quad u(t)_{max} = 2\frac{P_0}{k} \quad$ به ازای لحظه‌ای که پاسخ حداکثر می‌شود.

حالت با میرایی:

$$u(t)=\frac{P_0}{k}\left[1-e^{-\xi\omega t}\left(\cos\omega_D t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D t\right)\right]$$

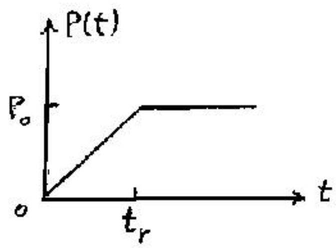
تحلیل بالا از روش مستقیم (حل معادله دیفرانسیل) یا انتگرال دوهامل قابل حصول است.

ب - RAMP Force (نیروی افزاینده خطی) $\quad P(t)=P_0\frac{t}{t_r}$



رفتار سازه خطی است، $\xi=0$: $\quad u(t)=\frac{P_0}{k}\left(\frac{t}{t_r}-\frac{\sin\omega t}{\omega t_r}\right)$

ج - STEP Force with FINITE RISE time (بدون میرایی)



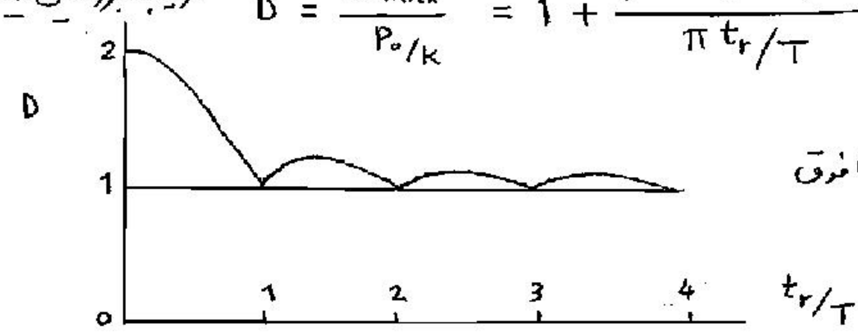
$$P(t)=\begin{cases}P_0\,(t/t_r) & t\leq t_r\\ P_0 & t\geq t_r\end{cases}$$

$$u(t)=\frac{P_0}{k}\left(\frac{t}{t_r}-\frac{\sin\omega t}{\omega t_r}\right)\qquad t\leq t_r$$

$$u(t)=P_0/k\left\{1-\frac{1}{\omega t_r}\left[\sin\omega t-\sin\omega(t-t_r)\right]\right\}\qquad t\geq t_r$$

$$u(t)_{max}=P_0/k\left\{1+\frac{1}{\omega t_r}\sqrt{(1-\cos\omega t_r)^2+(\sin\omega t_r)^2}\right\}\qquad t\geq t_r$$

ضریب بزرگنمایی دینامیکی $\quad D=\frac{u_{max}}{P_0/k}=1+\frac{|\sin(\pi t_r/T)|}{\pi t_r/T}$

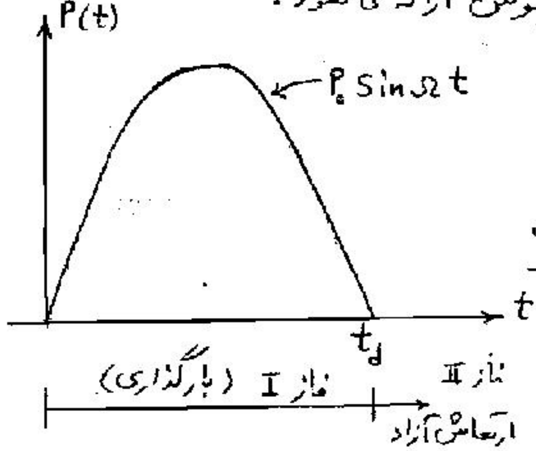


طیف جواب برای بارگذاری فوق
حالت بدون میرایی

تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه‌ای PULSE Excitation

انواع بارگذاری ضربه‌ای مثلثی، مستطیلی، نصف هارمونیک و... بر سازه‌ها اثر می‌کنند.

* جزئیات تحلیل برای نمونه در مورد بار ضربه‌ای نصف سینوس ارائه می‌شود.



موج انفجار، ترمز جرثقیل های بزرگ، افزایش ناگهانی نیروی موتور از جمله بارهای ضربه‌ای هستند، معمولاً اثر میرایی خیلی کم است.

تحلیل در دو فاز انجام می‌شود: فاز I و فاز II

تحلیل فاز بارگذاری (I) $\quad 0 \leq t \leq t_d$

شرایط اولیه صفر است.

$$m\ddot{u} + ku = P_0 \sin\Omega t$$

$$u(t) = \frac{P_0}{k}\,\frac{1}{(1-\beta^2)}\left(\sin\Omega t - \beta\sin\omega t\right)$$

آیا u_{max} در فاز I است یا II ؟

$$\frac{du}{dt} = \frac{P_0}{k}\,\frac{1}{(1-\beta^2)}\left(\Omega\cos\Omega t - \beta\omega\cos\omega t\right) = 0$$

$$\Omega\cos\Omega t - \Omega\cos\omega t = 0 \Rightarrow \cos\Omega t = \cos\omega t$$

$$\Omega t = 2\pi n \pm \omega t \rightarrow \text{لحظه پاسخ حداکثر} \quad t_{max} = \frac{2\pi n}{\Omega \pm \omega} = \frac{2\pi n}{\Omega\left(1 \pm \frac{2t_d}{T}\right)}$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{2\pi/2t_d}{2\pi/T} = \frac{T}{2t_d}$$

برای اینکه حداکثر در فاز I باشد باید $\quad t_{max} < t_d$

بارگذاری نصف sin پس سیکل اول $(n=1)$ و اگر با علامت منفی ادامه دهیم خواهیم داشت $\beta \leq -1$ که معنی ندارد پس رابطه شرطی را با $n=1$ و علامت + بررسی می‌کنیم.

$$t_{max} = \frac{2\pi}{\Omega\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} = \frac{2\pi}{\Omega\left(1+\frac{2t_d}{T}\right)} \leq t_d \Rightarrow \frac{2\pi}{1+\frac{1}{\beta}} \leq \Omega t_d = \pi \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{2t_d} = \frac{\pi}{t_d} \rightarrow \Omega t_d = \pi \qquad \Rightarrow \boxed{\beta \leq 1 \text{ یا } \Omega \leq \omega \text{ یا } \frac{T}{2} \leq t_d}$$

تحلیل فاز ارتعاش آزاد (II) $t > t_d$

برای رابطه ارتعاش آزاد $u(\bar t) = \frac{\dot u(\bar t=0)}{\omega}\sin\omega\bar t + u(\bar t=0)\cos\omega\bar t$ باید تغییرمکان و سرعت در لحظه t_d تعیین شوند (لحظه $\bar t=0$ یعنی $t=t_d$).

از رابطه فاز I مقادیر u_{t_d} و $\dot u_{t_d}$ محاسبه می‌شوند: $\Omega t_d = \pi \to \sin\Omega t_d = \sin\pi = 0$

$$u(t_d) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)}\left(\sin\Omega t_d - \beta\sin\omega t_d\right)$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} \to \omega = \Omega/\beta \to \omega t_d = \frac{\Omega t_d}{\beta} = \frac{\pi}{\beta} \Rightarrow u(t_d) = [illegible] \frac{\beta\sin\frac{\pi}{\beta}}{[illegible]\beta^2)}$$

برای محاسبه [illegible]

$$\dot u(t_d) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)}\left(\Omega\cos\Omega t_d - \Omega c [illegible]\right)$$

$$\dot u(t_d) = -\frac{P}{k} [illegible] (1 + \cos\pi/\beta)$$

پس:

$$u(\bar t) = -\frac{P_0}{k}\frac{\beta}{(1-\beta^2)}\left[(1+c[illegible]\,\pi/\beta)\,[illegible] + \sin\frac{\pi}{\beta}\cos\omega\bar t\right]$$

برآورد حداکثر تغییرمکان در فاز II:

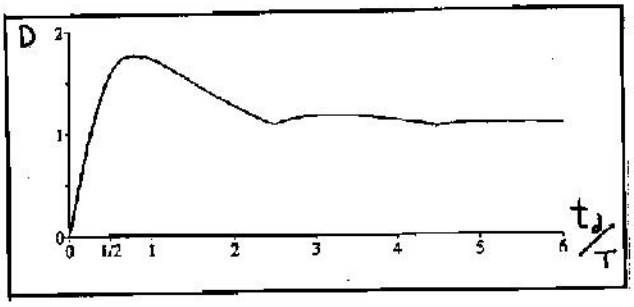
$$u(\bar t) = \rho\sin(\omega [illegible]) \qquad \rho = \sqrt{u_{t_d}^2 + \left(\frac{\dot u_{t_d}}{\omega}\right)^2}$$

$u_{max}(\bar t) = \rho$ که اگر بجای u_{t_d} و $\dot u_{t_d}$ از معادلات [illegible] شود:

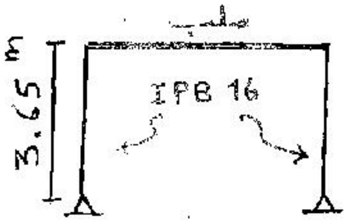
$$\text{II فاز: } [illegible] \frac{P_0}{k}\frac{2\beta}{(1-\beta^2)}\cos\frac{\pi}{2\beta}$$

تهیه طیف پاسخ بارگذاری نصف سینوسی

با توجه به تعیین تغییرمکان حداکثر در فاز I و II می‌توان ضریب بزرگنمایی را محاسبه و برحسب $\frac{t_d}{T}$ های مختلف، منحنی مربوط ترسیم شود.



مثال - قاب یک طبقه مطابق شکل مفروض است. پریود طبیعی قاب برابر 0.5 sec و ستونها از مقطع IPB 16 می باشد ($E = 2.1\times10^{6}\ kg/cm^2$). مطلوبست تعیین پاسخ حداکثر قاب تحت اثر بار ضربه‌ای نیم سینوس با حداکثر مقدار 1.8 ton و $t_d = 0.25$ sec. منظور از پاسخ در این مساله حداکثر تغییرمکان در بالای قاب و حداکثر تنش خمشی در ستونها؟



$$IPB\ 16 \longrightarrow I_x = 2492\ cm^4 \quad , \quad W_x = 311\ cm^3$$

$$t_d/T = \frac{0.25}{0.5} = 0.5 \xrightarrow{\text{طیف مربوط}} D = 1.5$$

$$K_{\text{یک ستون}} = \frac{3EI}{h^3} = \frac{3(2.1\times10^6)2492}{(3.65\times100)^3} = 322.85\ kg/cm$$

$$K_{\text{قاب}} = 2\times322.85 = 645.7\ kg/cm$$

$$P_0/K = \frac{1800}{645.7} = 2.79\ cm$$

$$u_{max} = \frac{P_0}{K}\times D = 2.79\times1.5 = 4.185\ cm$$

$$M = \frac{3EI}{h^2}u_{max} = \frac{3\times2.1\times10^6\times2492}{(365)^2}\times4.185 = 493171.86\ kg\text{-}cm$$

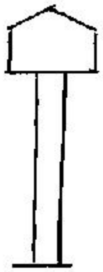
برآورد لنگر از روش دیگر: $\quad \# \ 4.93\ t\text{-}m$

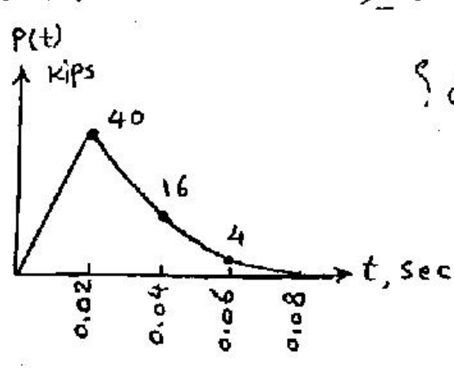
$$f_{s\,max} = K\,u_{max} = P_0\times D = 1.8\times1.5 = 2.7\ ton$$

$$M = \frac{f_{s\,max}}{2}\times h = \frac{2.7}{2}\times3.65 \ \# \ 4.93\ ton\text{-}m$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{4.93\times10^5}{311} = 1585\ kg/cm^2$$

مثال - برج آب مثال های قبل با ارتفاع 80′ تحت اثر نیروی P(t) ناشی از انفجار قرار می‌گیرد، مطلوبست تعیین حداکثر برش و لنگر خمشی در پای برج؟





از مثال های قبل:

$$\begin{cases} K_{\text{برج}} = 8.2\ kips/in \\ T_{\text{برج}} = 1.12\ sec \end{cases}$$

حل مثال -

$$t_d / T = \frac{0.08}{1.12} = 0.071 < 0.25 \rightarrow \text{OK}$$ روش تقریبی

از قانون ذوزنقه برای محاسبه انتگرال (مساحت منحنی بارگذاری) استفاده می شود :

$$\int_0^{0.08} P(t)\,dt = \frac{0.02}{2}\left[0 + 2(40) + 2(16) + 2(4) + 0\right] = 1.2 \ \text{kip-Sec}$$

$$u(t) = \frac{\int P(t)\,dt}{m\omega} \sin\omega t \rightarrow u_{max} = \frac{\int P(t)\,dt}{m\omega} = \frac{I}{m\omega}$$

$$u_{max} = \frac{I}{K}\,\frac{2\pi}{T} = \frac{(1.2)\,2\pi}{(8.2)(1.12)} = 0.821 \ \text{in}$$

$$f_{s\,max} = K\,u_{max} = (8.2)(0.821) = 6.73 \ \text{kips}$$

$\Rightarrow$ برش حداکثر $V_b = 6.73$ kips , $M_b = 6.73 \times 80 = 538$ kip-ft

---

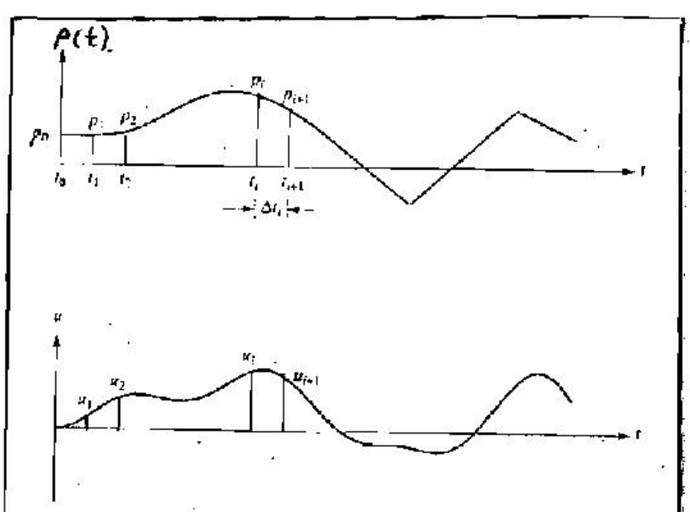
ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

برای انواع بارگذاری دینامیکی بویژه اگر نیرو دارای تابع ریاضی مشخصی نباشد : $P(t)$

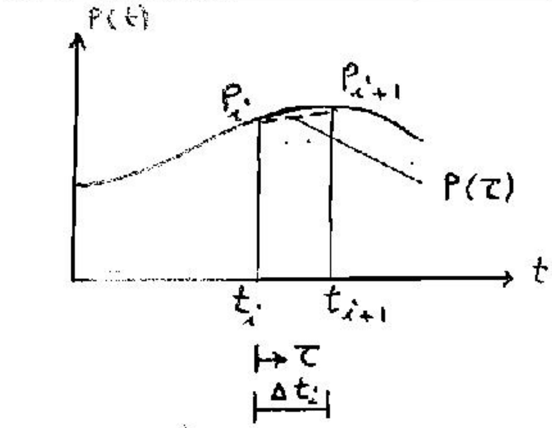
مسائل مهم : دقت ، همگرایی ، پایداری و نکات برنامه نویسی و اجرا در کامپیوتر در مورد روش عددی مورد نظر

انواع روش : سه روش کلی عددی : درون یابی تابع نیرو - تفاضل محدود در بیان سرعت و شتاب - فرض تغییرات محلی شتاب

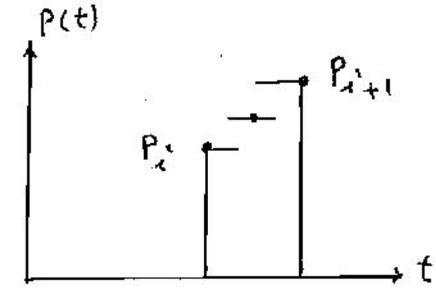


الف - روش های عددی متکی بر درون یابی در تابع نیرو

Numerical Solution Based on interpolation of the Excitation



درون یابی خطی تابع نیرو



درون یابی ثابت تابع نیرو

$$\tilde{P}_i = P(\tau) = P_i \text{ یا } P_{i+1} \text{ یا } \frac{P_i + P_{i+1}}{2}$$

$$P(\tau) = P_i + \left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right)\tau$$

۱- درون یابی ثابت تابع نیرو

برای سادگی: از میرایی صرفنظر میکنیم - جواب کل از دو قسمت تشکیل شده است:

- جواب سیستم تحت اثر نیروی ثابت در فاصله زمانی Δt_i بدون شرایط اولیه

- جواب سیستم در حالتی که نیرو وجود ندارد و فقط شرایط اولیه وجود دارد (ارتعاش آزاد)

$$m\ddot{\tilde{u}} + k\tilde{u} = \tilde{P}_i \longrightarrow \tilde{u}_p = \frac{\tilde{P}_i}{k} \qquad (1)$$

$$\tilde{u}_c = A_1 \sin\omega\tau + A_2 \cos\omega\tau$$

$$\tilde{u}(\tau) = \frac{\tilde{P}_i}{k} + A_1 \sin\omega\tau + A_2 \cos\omega\tau \qquad (\tilde{u}(0) = \dot{\tilde{u}}(0) = 0)$$

$$A_1 = 0 \;,\; A_2 = -\tilde{P}_i/k \longrightarrow \tilde{u}(\tau) = \frac{\tilde{P}_i}{k}(1-\cos\omega\tau)$$

$$\hat{u}(\tau) = u_i \cos\omega\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin\omega\tau$$ ارتعاش آزاد (نیرو $\tilde{P}_i$ وجود ندارد): (۲)

$$u(\tau) = \tilde{u}(\tau) + \hat{u}(\tau)$$

$$u(\tau) = u_i \cos\omega\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin\omega\tau + \frac{\tilde{P}_i}{k}(1-\cos\omega\tau)$$

$$\dot{u}(\tau) = \omega\left[-u_i \sin\omega\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega}\cos\omega\tau + \frac{\tilde{P}_i}{k}\sin\omega\tau\right]$$

اگر در روابط قبلی $\tau=\Delta t_i$ قرار گیرد، تغییر مکان و سرعت در لحظه t_{i+1} بدست می‌آید،

$$u_{i+1}=u_i\cos(\omega\Delta t_i)+\frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin(\omega\Delta t_i)+\frac{\tilde{P}_i}{K}\left[1-\cos(\omega\Delta t_i)\right]$$

$$\dot{u}_{i+1}=\omega\left\{-u_i\sin(\omega\Delta t_i)+\frac{\dot{u}_i}{\omega}\cos(\omega\Delta t_i)+\frac{\tilde{P}_i}{K}\sin(\omega\Delta t_i)\right\}$$

۲ـ درون یابی خطی تابع نیرو $\qquad P(\tau)=P_i+\left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right)\tau$

جزئیات حالت بدون میرایی ارائه می‌شود. جواب کل از سه قسمت تشکیل شده است:

نیروی ثابت P_i بدون شرایط اولیه + شرایط اولیه بدون نیرو (ارتعاش آزاد) + نیروی خطی $\tau\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}$ بدون شرایط اولیه (جزئیات دو مورد اول در حالت 1 دیده شد و اینجا جزئیات مورد سوم):

$$m\ddot{\bar{u}}+K\bar{u}=\left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right)\tau \qquad \left(\bar{u}(0)=\dot{\bar{u}}(0)=0 \quad , \quad 0<\tau<\Delta t_i\right)$$

$$\bar{u}_p=\frac{1}{K}\left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right)\tau \quad , \quad \bar{u}_c=A_1\sin\omega\tau+A_2\cos\omega\tau$$

$$\bar{u}(\tau)=\bar{u}_p+\bar{u}_c=\left(\frac{\Delta P_i}{K\Delta t_i}\right)\tau+A_1\sin\omega\tau+A_2\cos\omega\tau$$

$$\bar{u}(0)=0\rightarrow A_2=0 \quad , \quad \dot{\bar{u}}(0)=0\rightarrow A_1=-\frac{\Delta P_i}{\omega K\Delta t_i}$$

$$\bar{u}(\tau)=\left(\frac{\Delta P_i}{K}\right)\left(\frac{1}{\omega\Delta t_i}\right)(\omega\tau-\sin\omega\tau)$$

اگر $\tau=\Delta t_i$ پاسخ در لحظات t_{i+1} بدست می‌آید (جواب ۲ مورد اول نیز لحاظ شده است):

$$u_{i+1}=u_i\cos\omega\Delta t_i+\frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin\omega\Delta t_i+\frac{P_i}{K}(1-\cos\omega\Delta t_i)+\frac{\Delta P_i}{K}\left(\frac{1}{\omega\Delta t_i}\right)(\omega\Delta t_i-\sin\omega\Delta t_i)$$

$$\dot{u}_{i+1}=\omega\left\{-u_i\sin\omega\Delta t_i+\frac{\dot{u}_i}{\omega}\cos\omega\Delta t_i+\frac{P_i}{K}\sin\omega\Delta t_i+\frac{\Delta P_i}{K}\left(\frac{1}{\omega\Delta t_i}\right)(1-\cos\omega\Delta t_i)\right\}$$

$$\begin{cases} u_{i+1} = A P_i + B P_{i+1} + C u_i + D \dot{u}_i \\ \dot{u}_{i+1} = A' P_i + B' P_{i+1} + C' u_i + D' \dot{u}_i \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{k}\left\{\frac{2\xi}{\omega \Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{1-2\xi^2}{\omega_D \Delta t} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\omega_D \Delta t - \left(1+\frac{2\xi}{\omega\Delta t}\right)\cos\omega_D \Delta t\right]\right\}$$

$$B = \frac{1}{k}\left[1-\frac{2\xi}{\omega\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{2\xi^2-1}{\omega_D \Delta t}\sin\omega_D \Delta t + \frac{2\xi}{\omega\Delta t}\cos\omega_D \Delta t\right)\right]$$

$$C = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D \Delta t + \cos\omega_D \Delta t\right) \quad \Big| \quad D = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{1}{\omega_D}\sin\omega_D \Delta t\right)$$

$$A' = \frac{1}{k}\left\{-\frac{1}{\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\xi}{\Delta t\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\omega_D \Delta t + \frac{1}{\Delta t}\cos\omega_D \Delta t\right]\right\}$$

$$B' = \frac{1}{k\Delta t}\left[1 - e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D \Delta t + \cos\omega_D \Delta t\right)\right]$$

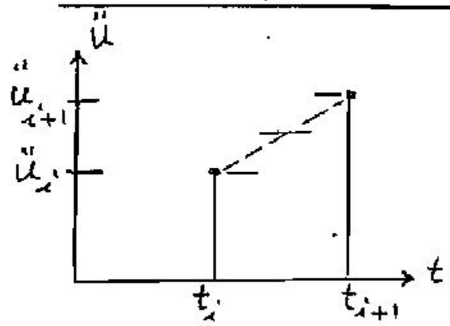
$$C' = -e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D \Delta t\right) \quad \Big| \quad D' = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\cos\omega_D \Delta t - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D \Delta t\right)$$

اگر Δt ثابت فرض شود، ضرایب A تا D' یکبار محاسبه می شود. دقت روش وابسته به Δt است که هرچه کوچکتر باشد، بهتر است. در حالت $\Delta t \leq \frac{T}{10}$ جوابها قابل قبول است، مساله در حالت خطی صادق است. مثال: جزئیات صورت مساله و جدول پاسخ در ورق جداگانه

ب - روش‌های عددی تحلیل دینامیکی SDF استوار بر تغییرات مختلف شتاب (گام به گام)

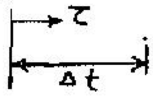
Numerical solution Based on Approximating Derivative

(Step - by - Step Numerical integration)



اساس روش‌ها: در یک گام زمانی، تغییرات شتاب در حالتهای مختلف فرض می‌شود (ثابت، متوسط یا خطی) و با انتگرال گیری از رابطه شتاب، رابطه تغییرمکان حاصل می‌شود.

$0 \leqslant \tau \leqslant \Delta t$



۱- روش عددی گام به گام با شتاب ثابت ابتدای گام

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i \quad (1) \xrightarrow{\text{انتگرال}} \dot{u}(\tau) = \ddot{u}_i \tau + A \rightarrow$$ اعمال شرایط اولیه در $\tau = 0$

$$\dot{u}(0) = \dot{u}_i \rightarrow A = \dot{u}_i \rightarrow \dot{u}(\tau) = \ddot{u}_i \tau + \dot{u}_i \quad (2)$$

$$\tau = \Delta t \longrightarrow \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t\, \ddot{u}_i \quad (3)$$

انتگرال رابطه (۲) $\rightarrow u(\tau) = \frac{1}{2} \ddot{u}_i \tau^2 + \dot{u}_i \tau + B \rightarrow \tau = 0 \;,\; u(0) = u_i$

$$\rightarrow B = u_i \rightarrow u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{1}{2} \ddot{u}_i \tau^2 \quad (4)$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow u_{i+1} = u_i + \Delta t\, \dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_i \quad (5)$$

برای بدست آوردن $\ddot{u}_{i+1}$ ، سرشکن کردن خطاها از رابطه اصلی تعادل کمک گرفته می‌شود:

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = P_{i+1} \quad (6)$$

بجای u_{i+1} از (۵) ، بجای $\dot{u}_{i+1}$ از (۳) قرار می‌دهیم:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m} \left\{ P_{i+1} - ku_i - (c + k\Delta t)\dot{u}_i - \left(c\Delta t + \frac{k\Delta t^2}{2}\right)\ddot{u}_i \right\} \quad (7)$$

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$ ۲ـ روش عددی گام به گام با شتاب متوسط

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \dot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) + A_1 \rightarrow \tau = 0 \,,\, \dot{u}(0) = \dot{u}_i$$ اعمال شرایط اولیه

$$\rightarrow A_1 = \dot{u}_i \rightarrow \dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \frac{1}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})\tau \rightarrow \tau = \Delta t \rightarrow$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \Rightarrow \Delta\dot{u}_i = \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (1)$$

$\dot{u}(\tau)$ انتگرال از $\rightarrow u(\tau) = \dot{u}_i \tau + \frac{1}{4}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})\tau^2 + A_2$

$$\tau = 0 \rightarrow u(0) = u_i \rightarrow A_2 = u_i \rightarrow u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{1}{4}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})\tau^2$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (2)$$

$$u_{i+1} - u_i = \Delta u_i = \dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}(2\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) = \dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}(2\ddot{u}_i) + \frac{\Delta t^2}{4}\Delta\ddot{u}_i$$

$$\Delta\ddot{u}_i = \frac{4}{\Delta t^2}(\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t) - 2\ddot{u}_i \quad (3)$$

$$(2) \rightarrow \Delta u_i = \dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \Rightarrow \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) = \frac{2}{\Delta t}(\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t)$$

$$(1) \rightarrow \Delta\dot{u}_i = \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) = \frac{2}{\Delta t}(\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t) \Rightarrow$$

$$\Delta\dot{u}_i = \left(\frac{2}{\Delta t}\right)\Delta u_i - 2\dot{u}_i \quad (4)$$

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = P_{i+1} \,,\, m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = P_i$$

$$\Rightarrow m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + k u_i = \Delta P_i \quad (5)$$

در رابطه (5) بجای $\Delta\ddot{u}_i$ و $\Delta\dot{u}_i$ از روابط (3) و (4) استفاده می کنیم:

$$m\left[\frac{4}{\Delta t^2}\Delta u_i - \frac{4}{\Delta t^2}\dot{u}_i \Delta t - 2\ddot{u}_i\right] + c\left[\frac{2}{\Delta t}\Delta u_i - 2\dot{u}_i\right] + k\Delta u_i = \Delta P_i$$

$$K_i^* \Delta u_i = \Delta P_i^* \leftarrow (6) \quad K_i^* = K + \frac{2c}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2}$$

$$\Delta P_i^* = \Delta P_i + \left[\left(\frac{4m}{\Delta t}\right) + 2c\right]\dot{u}_i + 2m\ddot{u}_i$$

بنابراین از رابطه ⑥ مقدار Δu_i و در حقیقت u_{i+1} و سپس از روابط ④ و ③ مقادیر

$\Delta \dot{u}_i$ و $\Delta \ddot{u}_i$ که $\dot{u}_{i+1}$ و $\ddot{u}_{i+1}$ را ارائه می‌دهند ، حاصل می‌شوند ،

برای سرشکن کردن خطاها در هر گام می‌توان $\ddot{u}_{i+1}$ را از رابطه تعادل محاسبه نمود!

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{m}\left(P_i - c\dot{u}_i - K u_i\right)$$

روش فوق را روش NEWMARK'S β $\left(\beta = \frac{1}{4} , \gamma = \frac{1}{2}\right)$ گویند

۳- روش عددی گام به گام با شتاب خطی

$0 \leqslant \tau \leqslant \Delta t$

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\tau \xrightarrow{\text{انتگرال}} \dot{u}(\tau) = \ddot{u}_i \tau + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{1}{2}\tau^2 + A_1$$

اعمال شرایط اولیه $\dot{u}(0) = \dot{u}_i \rightarrow A_1 = \dot{u}_i \rightarrow \dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \tau + \frac{\Delta \ddot{u}}{2\Delta t}\tau^2$

$$m\Delta \ddot{u}_i + c\Delta \dot{u}_i + K\Delta u_i = \Delta P_i \qquad (1)$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\Delta t^2$$

$$\Delta \dot{u}_i = \ddot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\Delta \ddot{u}_i \qquad (2)$$

$$\dot{u}(\tau) \text{ انتگرال از } \rightarrow u(\tau) = \dot{u}_i \tau + \frac{\ddot{u}_i}{2}\tau^2 + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{\tau^3}{6} + A_2$$

$$u(0) = u_i \rightarrow A_2 = u_i \rightarrow u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{\ddot{u}_i}{2}\tau^2 + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{\tau^3}{6}$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{\ddot{u}_i}{2}\Delta t^2 + \frac{\Delta \ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{\Delta t^3}{6}$$

$$\Delta u_i = \dot{u}_i \Delta t + \ddot{u}_i \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta \ddot{u}_i \frac{\Delta t^2}{6} \qquad (3)$$

از رابطه ③ $\Rightarrow \Delta \ddot{u}_i = \frac{6}{\Delta t^2}\Delta u_i - \frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i - 3\ddot{u}_i \qquad (4)$

در رابطه ② بجای $\Delta \ddot{u}_i$ از ④ $\Leftarrow$ $\Delta \dot{u}_i = \frac{3}{\Delta t}\Delta u_i - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i \qquad (5)$

در رابطه ① یعنی معادله جزئی حرکت بجای $\Delta \ddot{u}_i$ و $\Delta \dot{u}_i$ از معادل آنها از ④ و ⑤ قرار

می‌دهیم :

$$m\left[\frac{6}{\Delta t^2}\Delta u_i - \frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i - 3\ddot{u}_i\right] + C\left[\frac{3}{\Delta t}\Delta u_i - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right] +$$

$$+ K\Delta u_i = \Delta P_i \qquad \Rightarrow$$

$$\tilde{K}\,\Delta u_i = \Delta\tilde{P}_i \qquad (6) \rightarrow \tilde{K} = K + \frac{6}{\Delta t^2}m + \frac{3}{\Delta t}C$$

$$\Delta\tilde{P}_i = \Delta P_i + m\left[\frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i + 3\ddot{u}_i\right] + C\left[3\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right]$$

به این روش، روش NEWMARK'S β $\left(\beta=\frac{1}{6}, \gamma=\frac{1}{2}\right)$ مشهور شد.

در هر گام می‌توان مقدار C و K آن لحظه را قرار داد (برای رفتار غیر خطی)،

در این روش نیز می‌توان برای سرشکن کردن خطاها، مقدار $\ddot{u}_{i+1}$ را از معادله حرکت محاسبه نمود،

مساله به Δt حساس است (از نظر پایداری و دقت):

اشاره: پایداری روش های Newmark بصورت زیر بیان می شود:

جزئیات در مباحث پیشرفته دینامیک سازه‌ها $\leftarrow$ $\dfrac{\Delta t}{T} \leqslant \dfrac{1}{\pi\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{\gamma-2\beta}}$

برای حالت شتاب متوسط $\gamma=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{4}$ $\leftarrow$ $\dfrac{\Delta t}{T} < \infty$

یعنی روش شتاب متوسط برای هر مقدار Δt، پایدار است. البته در عمل مقادیر منطقی در نظر گرفته می شود.

برای حالت شتاب خطی $\gamma=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{6}$ $\leftarrow$ $\dfrac{\Delta t}{T} \leqslant 0.551$

یعنی پایداری روش مشروط است. البته در عمل، معمولاً Δt کوچک فرض می شود و این شرط برقرار است. برای مثال در حالت زلزله، برای درنظر گرفتن تغییرات شتاب زلزله ثبت شده معمولاً Δt برابر 0.02 یا 0.01 درنظر گرفته می شود که با توجه به پریود طبیعی سازه‌ها، این Δt کمتر از 0.551 T خواهد بود.

معمولاً $\Delta t \leqslant \dfrac{T}{10}$ مناسب است.

خلاصه نتایج روش های عددی گام به گام

۱- روش شتاب ثابت ابتدای گام

$$
\begin{cases}
u_{i+1} = u_i + \Delta t\, \dot{u}_i + \dfrac{\Delta t^2}{2}\, \ddot{u}_i \\
\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t\, \ddot{u}_i \\
\ddot{u}_{i+1} = \dfrac{1}{m}\left\{P_{i+1} - K u_i - (C + K\Delta t)\,\dot{u}_i - \left(C\Delta t + \dfrac{K\Delta t^2}{2}\right)\ddot{u}_i\right\}
\end{cases}
$$

۲- روش شتاب متوسط

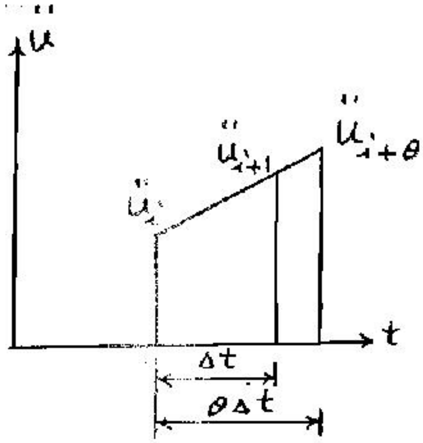
$$
\begin{cases}
u_{i+1} = \left\{P_{i+1} + m\left(\dfrac{4}{\Delta t^2} u_i + \dfrac{4}{\Delta t}\dot{u}_i + \ddot{u}_i\right) + C\left(\dfrac{2}{\Delta t} u_i + \dot{u}_i\right)\right\} \Big/ \left(\dfrac{4m}{\Delta t^2} + \dfrac{2C}{\Delta t} + K\right) \\
\dot{u}_{i+1} = -\dot{u}_i + \dfrac{2}{\Delta t}\left(u_{i+1} - u_i\right) \\
\ddot{u}_{i+1} = \dfrac{4}{\Delta t^2}\left(u_{i+1} - u_i - \Delta t\, \dot{u}_i\right) - \ddot{u}_i
\end{cases}
$$

۳- روش شتاب خطی

$$
\mathrm{I}\quad u_{i+1} = \left\{P_{i+1} + m\left(\frac{6}{\Delta t^2} u_i + \frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i + 2\ddot{u}_i\right) + C\left(\frac{3}{\Delta t} u_i + 2\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right)\right\} \Big/ \left(\frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3C}{\Delta t} + K\right)
$$

$$
\mathrm{II}\quad \dot{u}_{i+1} = \frac{3}{\Delta t}\left(u_{i+1} - u_i\right) - 2\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i
$$

$$
\mathrm{III}\quad \ddot{u}_{i+1} = \frac{6}{\Delta t^2}\left(u_{i+1} - u_i - \Delta t\, \dot{u}_i - \frac{\Delta t^2}{3}\ddot{u}_i\right)
$$



روش عددی گام به گام WILSON - θ

اساس روش مشابه روش گام به گام شتاب خطی است با این تفاوت که E.L. WILSON فرض می‌کند شتاب در فاصله زمانی کمی بزرگتر از Δt ، خطی است ($\theta\Delta t$).

این امر برای تضمین پایداری روش شتاب خطی است و مقدار θ معمولاً بین 1.4 تا 2 در نظر گرفته می‌شود. روابط اصلی این روش مشابه روابط I ، II و III از روش شتاب خطی است و فقط بجای $i+1$ از $i+\theta$ و بجای Δt از $\theta\Delta t$ استفاده شده است.

$$\ddot{u}_{i+\theta} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}\left\{u_{i+\theta} - u_i - \theta\Delta t\,\dot{u}_i - \frac{(\theta\Delta t)^2}{3}\ddot{u}_i\right\} \qquad a$$

$$\dot{u}_{i+\theta} = \frac{3}{\theta\Delta t}\left(u_{i+\theta} - u_i\right) - 2\dot{u}_i - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{u}_i \qquad b$$

$$u_{i+\theta} = \left\{P_{i+\theta} + m\left[\frac{6u_i}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{u}_i + 2\ddot{u}_i\right] + C\left[\frac{3}{\theta\Delta t}u_i + 2\dot{u}_i + \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right]\right\} \Big/ \left[\frac{6m}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{3C}{\theta\Delta t} + K\right] \qquad c$$

چونکه فرض شده که شتاب بطور خطی از زمان t_i تا $t_{(i+\theta)}\Delta t$ تغییر می‌کند ، بنابراین نیروی مؤثر هم فرض می‌شود که در این فاصله زمانی ، خطی تغییر می‌کند و $P_{i+\theta}$ بصورت :

$$P_{i+\theta} = P_i + \left(\frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t}\right)\theta\Delta t = P_i\,(1-\theta) + P_{i+1}\,\theta \qquad d$$

از رابطه c مقدار $u_{i+\theta}$ بدست آمده و آنرا در رابطه a قرار داده و $\ddot{u}_{i+\theta}$ محاسبه می‌شود.

شتاب در گام زمانی معمولی Δt از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{\theta} \qquad e$$

مقدار $\ddot{u}_{i+1}$ را در رابطه (f) $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\left(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}\right)$

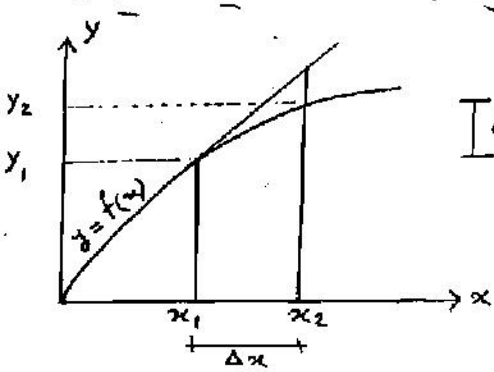
و همینطور در رابطه (g) $u_{i+1} = u_i + \Delta t\,\dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{3}\ddot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{6}\ddot{u}_{i+1}$

از رابطه شتاب خطی قرار داده و سرعت و تغییر مکان در لحظه t_{i+1} بدست می‌آید.

ج - روش عددی تحلیل دینامیکی SDF استوار بر تفاضل محدود سرعت و شتاب

CENTRAL DIFFERENCE METHOD (Finite Difference F.D.)

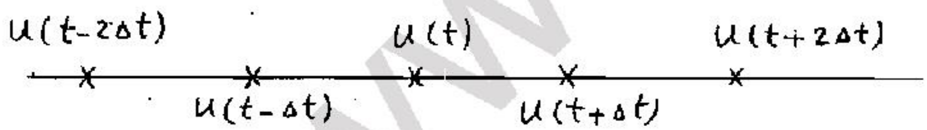
یکی از روش های حل دستگاه معادله دیفرانسیل آن است که به نحوی شتاب و سرعت را برحسب تغییرمکان بیان کرد، در این حالت مساله دینامیکی به صورت استاتیکی تبدیل می‌شود.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \frac{dy}{dx} \xrightarrow{\text{ریاضیات}} \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در ریاضیات کاربردی $\frac{\Delta y}{\Delta x} \simeq \frac{dy}{dx}$

$$\dot{u}(t) = \underbrace{\frac{du}{dt}}_{\text{شکل مشکل برای حل}} \simeq \underbrace{\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}}_{\text{شکل آسانه برای حل}}$$



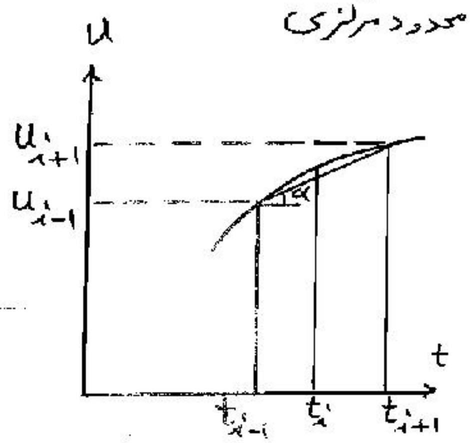
$\frac{du}{dt} \simeq \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_t = \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}$ Forward F.D. تفاضل محدود پیش رونده

$\frac{du}{dt} \simeq \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_t = \frac{u(t) - u(t-\Delta t)}{\Delta t}$ Backward F.D. تفاضل محدود پس رونده

$\frac{du}{dt} \simeq \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_t = \frac{u(t+\Delta t) - u(t-\Delta t)}{2\Delta t}$ Central F.D. تفاضل محدود مرکزی

معمولاً در روش های عددی، روش تفاضل محدود مرکزی از خطای کمتری نسبت به دو روش دیگر برخوردار است.

جزئیات روش عددی تحلیل دینامیکی SDF از طریق تفاضل محدود مرکزی

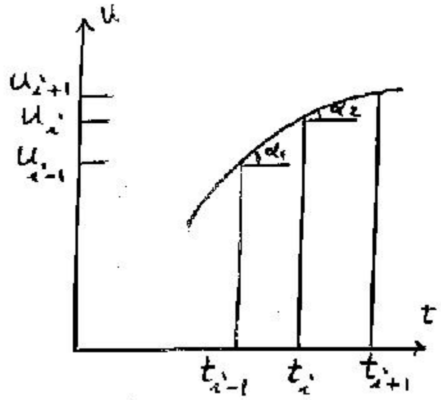


با توجه به اصول روش تفاضل محدود مرکزی :

$$\alpha = \dot{u}_i = \frac{1}{2\Delta t}\left(u_{i+1} - u_{i-1}\right) + R \quad \text{خطا} \qquad (1)$$

$$\alpha_1 = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t}$$

$$\frac{\text{تغییرات } \alpha \text{ (سرعت)}}{\text{زمان}} = \text{شتاب} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\Delta t} = \ddot{u}_i$$



$$\ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{\Delta t^2}\left(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\right) + R \qquad (2)$$

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = P_i \qquad (3)$$

از خطا صرفنظر و از دو رابطه (1) و (2) در (3) قرار داده و u_{i+1} را محاسبه می‌کنیم :

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right)u_{i+1} = P_i + \left(-k + \frac{2m}{\Delta t^2}\right)u_i + \left(\frac{c}{2\Delta t} - \frac{m}{\Delta t^2}\right)u_{i-1} \qquad (4)$$

پس از تعیین u_{i+1} از روابط (1) و (2) می‌توانه $\dot{u}_i$ و $\ddot{u}_i$ را تعیین کرد.

با توجه به رابطه (4) و در شروع کار، نیاز به u_0 و u_{-1} می‌باشد. روابط ۱ و ۲ برای لحظه $t=0$ نوشته شده و بطور همزمان حل می‌شوند تا رابطه u_{-1} حاصل شود :

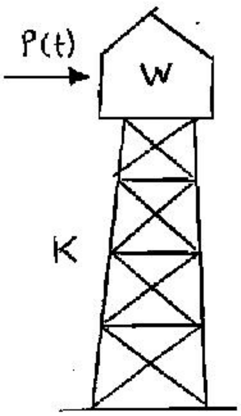
$$u_{-1} = u_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_0 - \Delta t\,\dot{u}_0 \qquad (5)$$

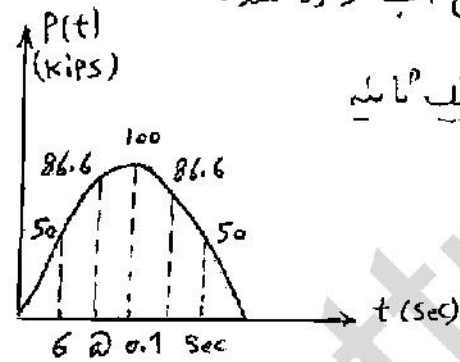
در یک مساله واقعی، دو پارامتر از سه پارامتر u_0 ، $\dot{u}_0$ و $\ddot{u}_0$ کافی است.

توجه : در تمام روش ها، یکی از سه رابطه اصلی بکار گرفته شده، رابطه حرکت در لحظه t_{i+1} بوده بجز روش تفاضل محدود مرکزی که معادله حرکت در لحظه t_i بکار رفت.

روش هایی که معادله حرکت در لحظه $t+\Delta t$ را لازم دارند، روش‌های ضمنی Implicit گویند.
و روش هایی که معادله حرکت در لحظه t را لازم دارند، روش‌های صریح explicit گویند.
در تحلیل سیستم های چند درجه آزادی، عملیات محاسباتی بیشتری در روش ضمنی نسبت به روش صریح وجود خواهد داشت، در ضمن روش های صریح فقط بصورت مشروط پایدار خواهند بود در حالی که برخی روش های ضمنی بصورت غیر مشروط پایدار می باشند.

مثال - مطلوبست تحلیل دینامیکی برج آب داده شده تحت بار نصف سینوسی مطابق شکل در یک ثانیه با $\Delta t = 0.1$ sec ؟ $\xi = 10\%$





معادل پایه $K = 100$ kips/in

$W = 978.8$ kips

$$m = \frac{W}{g} = \frac{978.8}{386.4} = 2.533 \quad \frac{\text{kips-s}^2}{\text{in}}$$

$$\omega = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{100}{2.533}} = 6.283 \quad \text{Rad/s}$$

برای مقایسه، از ۵ روش عددی شتاب ثابت، متوسط، خطی، θ ویلسون و تفاضل مرکزی استفاده می شود.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6.283} \# 1 \ \text{sec}$$

$$\Delta t = 0.1 = \frac{T}{10}$$

در فرمول ها مقدار c لازم است:
$$C = 2\xi\omega m = 3.183 \quad \text{kip-s/in}$$

شرایط اولیه صفر است:
$$u_0 = \dot{u}_0 = \ddot{u}_0 = 0$$

روابط اصلی ۵ روش به شرح زیر بدست می آید:

الف - روش شتاب ثابت ابتدای گام

$$u_{i+1} = u_i + 0.1\,\dot{u}_i + 0.005\,\ddot{u}_i \qquad (a)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + 0.1\,\ddot{u}_i \qquad (b)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{2.533}\left(P_{i+1} - 100\,u_i - 13.183\,\dot{u}_i - 0.8183\,\ddot{u}_i\right) \qquad (c)$$

نتایج حاصل برای یک ثانیه در جدول اول

ب - روش شتاب متوسط

$$1176.9\,u_{i+1} = P_{i+1} + 11076.9\,u_i + 104.5\,\dot{u}_i + 2.533\,\ddot{u}_i \qquad (d)$$

$$\dot{u}_{i+1} = 20\,(u_{i+1} - u_i) - \dot{u}_i \qquad (e)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 400\,(u_{i+1} - u_i) - 40\,\dot{u}_i - \ddot{u}_i \qquad (f)$$

نتایج حاصل برای یک ثانیه در جدول دوم

ج - روش شتاب خطی

$$1715.3\,u_{i+1} = P_{i+1} + 1615.3\,u_i + 158.35\,\dot{u}_i + 5.225\,\ddot{u}_i \qquad (g)$$

$$\dot{u}_{i+1} = 30\,(u_{i+1} - u_i) - 2\,\dot{u}_i - 0.05\,\ddot{u}_i \qquad (h)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 600\,(u_{i+1} - u_i) - 60\,\dot{u}_i - 2\,\ddot{u}_i \qquad (i)$$

نتایج حاصل برای یک ثانیه در جدول سوم

د - روش WILSON-θ $\theta = 1.5$ فرض می‌کنیم

از روابط روشی که با حروف لاتین در جزئیات آمده بود استفاده می‌شود.

مقادیر m ، c و k و Δt و θ را در رابطه c قرار می‌دهیم.

$$839.13\, u_{i+\theta} = P_{i+\theta} + 739.13\, u_i + 107.69\, \dot{u}_i + 5.305\, \ddot{u}_i$$

$P_{i+\theta}$ ازرابطه (d) محاسبه می‌شود. $\ddot{u}_{i+\theta} = 266.7(u_{i+\theta} - u_i) - 40\dot{u}_i - 2\ddot{u}_i$

رابطه (a)

ازرابطه (e) ← $\ddot{u}_{i+1} = 0.6667\, \ddot{u}_{i+\theta} + 0.3333\, \ddot{u}_i$

درنهایت رابطه اخیر را در معادلات (f) و (g) قرارداده:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + 0.05\ (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

$$u_{i+1} = u_i + 0.1\, \dot{u}_i + 0.00333\, \ddot{u}_i + 0.00167\, \ddot{u}_{i+1}$$

نتایج مراحل گام به گام در یک ثانیه در جدول چهارم

هـ ـ روش تفاضل محدود مرکزی

مقادیر m ، c ، k و Δt را در رابطه (٤) قرارداده خواهیم داشت:

$$269.21\, u_{i+1} = P_i + 406.6\, u_i - 237.39\, u_{i-1}$$

روابط (١) و (٢) : $\dot{u}_i = 5(u_{i+1} - u_{i-1})$

$$\ddot{u}_i = 100\ (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

برای شروع ازرابطه (٥) مقدار u_{-1} محاسبه می‌شود، چونکه درمساله u_0 ، $\dot{u}_0$ و $\ddot{u}_0$

صفراست پس u_{-1} هم صفراست،

نتایج مراحل گام به گام در یک ثانیه در جدول پنجم

توجه شود در جداول بجای i از n استفاده شده است ،

روابط مربوط به محاسبه نتایج دقیق تحت اثر بار نصف Sin :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{2t_d} = \frac{2\pi}{2\times 0.6} = \frac{\pi}{0.6} = 5.236 \quad Rad/s$$

$$P_0 = 100 \quad kips \qquad P(t) = P_0 \sin \Omega t = 100 \sin(5.236t)$$

$$\omega = 6.283 \rightarrow \beta = \frac{\Omega}{\omega} = 0.833$$

برای $t > 0.6$ (ارتعاش آزاد) باید شرایط اولیه آن در $t=0.6$ برآورد شود.

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 6.283\sqrt{1-0.1^2} = 6.2515 \quad Rad/s$$

پاسخ سازه برای حالت بارگذاری (میرا)

$$U(t) = \frac{P_0}{K}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left\{(1-\beta^2)\sin\Omega t - 2\xi\beta\cos\Omega t\right\} +$$

$$\frac{P_0}{K}\frac{e^{-\xi\omega t}}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left\{2\xi\beta\cos\omega_D t + \frac{\Omega}{\omega_D}\left(1+\beta^2-2\frac{\omega_D^2}{\omega^2}\right)\sin\omega_D t\right\}$$

در رابطه $t=0.6$ قرار داده و $U(t=0.6)$ تعیین می‌شود.

از فرمول $U(t)$ مشتق گرفته و در لحظه $t=0.6$ سرعت $\dot{U}(t=0.6)$ به دست می‌آید

رابطه ارتعاش آزاد بصورت زیر است:

$$U(t) = e^{-\xi\omega(t-0.6)}\left\{\frac{\dot{U}(0.6)+U(0.6)\xi\omega}{\omega_D}\sin\omega_D(t-0.6) + U(0.6)\cos\omega_D(t-0.6)\right\}$$

نتایج شتاب متوسط و خطی خوب است ولی شتاب ثابت خوب نیست.

برای شتاب ثابت باید از Δt خیلی کوچکتر استفاده شود.

پایداری و خطاهای محاسباتی در روش‌های عددی

Stability & Computational Error of Numerical Procedures

* پایداری روش عددی یعنی الگوریتم روش طوری باشد که با تغییر کوچک در گام زمانی Δt جوابهای مساله زیاد تغییر نکند (در روش‌های ناپایدار به ازای برخی Δt، جوابها اشتباه و خیلی دور از جواب واقعی خواهد بود).

* با بررسی معیار خطا بر حسب Δt های مختلف برای یک روش عددی، می‌توان شرط پایداری را تعیین نمود (روش‌های پایدار غیر مشروط - روش‌های پایدار مشروط).

روش عددی شتاب متوسط پایدار غیر مشروط - شتاب خطی و تفاضل محدود مرکزی پایدار مشروط

* در سیستم‌های معادل یک درجه آزادی، مساله پایداری روش عددی معمولاً مطرح نیست چون Δt بطور کسری کوچکتر از حد پایداری خواهد بود (به دلیل T کوچک این سیستم‌ها).

در سیستم‌های چند درجه آزادی به دلیل نقش پریودهای مودهای بالاتر، مناسب و لازم است از روش‌های غیر مشروط استفاده کنیم.

خطاهای محاسباتی از چند طریق وارد روش عددی می‌شود:

الف - Round-off error ناشی از گرد کردن اعداد تولید شده بوسیله محاسبات تکراری

$\frac{1}{5} = 0.2$, $\frac{1}{3} = 0.333......$

ب - Propagated error خطای پخشیدگی تولید شده در اثر جایگزینی معادله دیفرانسیل بوسیله تفاضل محدود معادل

ج - Truncation error تولید شده در اثر بیان u_{i+1} یا $\dot{u}_{i+1}$ توسط تعداد محدود عبارت در بسط سری تیلور