* فهرست موضوعی :

* بخشهای ضمیمه جزوه :

نمونه مساله

* مساله اول : روش حذفی گاوس
* مساله دوم : روش حذفی گاوس
* مساله سوم : روش تجزیه LU Decomposition
* مساله چهارم : روش تجزیه LU Decomposition
* مساله پنجم : حل معادلات با روشهای ژاکوبی و گاوس - سایدل
* مساله ششم : مشتق گیری عددی
* مساله هفتم : انتگرال گیری عددی

* مساله هشتم : روش اویلر
* مساله نهم : روش اویلر
* مساله دهم : روش اویلر اصلاح شده

$\boxed{\text{یادآوری در مورد خطاها}}$

$\boxed{\text{جداول مهم و کاربردی}}$

* جدول و معادله ADAMS – BASHFORTH
* جدول و معادله ADAMS – MOULTON
* جدول ضرایب مشتق گیری
* الگوریتم رانگ کوتا Fehlberg

$\boxed{\text{خلاصه درس}}$

## * ریاضیات مهندسی پیشرفته

سرفصل دروس ← ریاضیات عددی

بارم بندی نمره نهایی:
- ← تکلیف ⇐ ۸ نمره : برنامه نویسی
- ← پروژه ⇐ ۷ نمره : کار تحقیقی (موضوع تا نیمه آبان باید تعیین شود)
- ← امتحان پایان ترم ۵ نمره

منابع درسی:
- ← APPLIED NUMERICAL ANALYSIS (GERALD)
- ← محاسبات عددی (دکتر پورپاک) جهاد دانشگاهی

برنامه کامپیوتری:
- ← MATLAB7
- ← کتاب راهنما : نگرش نوین بر کاربرد ریاضیات با MATLAB (جان وایلی)

---

## * بررسی روشهای ماتریسی (MATRIX METHOD FOR LINEAR ALGEBRIA EQU.):

برای حل این معادلات از دستگاه روبرو استفاده می کنیم که داریم :

$$AX=C$$

($A$ ← یک ماتریس مربعی است که ضرایب معادله را دارد / $X$ ← متغیرهای وابسته است / $C$ ← ماتریس پاسخ می باشد)

دستگاه معادله ها به صورت زیر است :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n &= c_m
\end{aligned}
$$

در معادله بالا اگر به صورت ماتریسی بنویسیم، داریم :

$$
\left|\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & x_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & x_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & x_n
\end{array}\right|
=
\left|\begin{array}{c}
c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n
\end{array}\right|
$$

تعداد ردیف $i = 1, 2, \dots, n$

تعداد ستون $j = 1, 2, \dots, m$

## * روش حذفی گاوس :

برای حل معادله روش حذف کردن را اعمال می کنیم تا به یک ماتریس مثلثی بالا برسیم . برای رسیدن به ماتریس بالا مثلثی می بایست اعضاء زیر قطر اصلی صفر گردد . به عبارت دیگر با انجام مراحل حذف کردن ماتریس ما به صورت صفحه بعد در می آید :

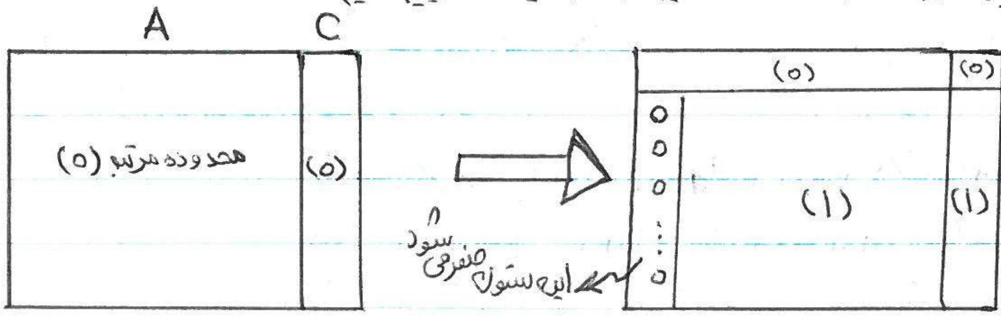
$$\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & C_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & C_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & C_3^{(0)} \end{array}\right| \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & C_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & C_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & C_3^{(2)} \end{array}\right|$$

**توجه:** در ماتریس بالامثلثی که در بالای صفحه بدست آمده اعدادی را درون پرانتزی ببینید که در بالای اعضاء ماتریس قرار گرفته اند، به این اعداد مرتبه ماتریس می گویند. این اعداد بیانگر تغییرات اعمال شده بر روی عضو مورد نظر است. چون ماتریس برای تبدیل شدن به بالامثلثی می بایست به صورت ستونی اعضایش تغییر کند. به طور کلی تعداد تغییرات (n-1) مرحله می باشد. به این روش Forward Elimation می گویند. برای مراحل بعدی جایگزینی از آخر به اول بر می گردیم که به روش Backward Subsitution معروف است:

$$X_3 = \frac{C_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \qquad X_2 = \frac{C_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} X_3}{a_{22}^{(1)}} \qquad X_1 = \frac{C_1^{(0)} - a_{12}^{(0)} X_2 - a_{13} X_3^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$$

**تذکر** ← روش Forward Elimation برای مقادیر a و روش Backward Sub برای مقادیر X استفاده می شود*

اگر ماتریس مربعی را به صورت نمادین به شکل زیر در نظر بگیریم داریم:




با توجه به شکل بالا معادله ما به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + \cdots + a_{1n}^{(0)} x_n &= C_1^{(0)} \\ 0 \quad + a_{22}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)} x_n &= C_2^{(1)} \\ 0 \quad + a_{32}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{3n} x_n &= C_3^{(1)} \\ \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad & \\ 0 \quad + a_{n2}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n &= C_n^{(1)} \end{aligned}$$

این رد… همه صفر هست…

اگر دستگاه را A بنامیم با استفاده از اولین معادله از دستگاه A (ماتریس ضرایب a که در ابتدا فرض شد) داریم:

$$X_1 = \frac{C_1^{(0)} - a_{12}^{(0)} X_2 - a_{13}^{(0)} x_3 - \cdots - a_{1n}^{(0)} x_n}{a_{11}^{(0)}} \quad \text{(B)}$$

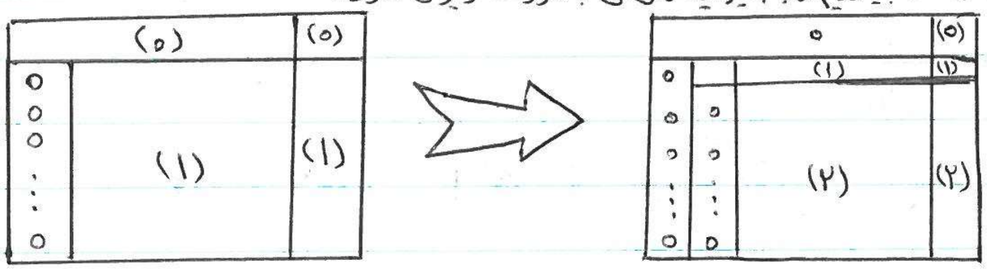
**تذکر مهم** ← اگر $a_{11}^{(0)} = 0$ می بایست ردیف یا ستون را جابجا کنیم*

مقدار X را که بدست آوردیم به جای A قرار می دهیم و ستون $a_{ij}$ ما حذف می گردد. برای بدست آوردن یک مرحله به صورت زیر عمل می کنیم:

برای بدست آوردن مرحله ۱

$$\begin{cases} a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}\, a_{1j}^{(0)} \longleftarrow \begin{cases} i = 2, \dots, n \\ j = 2, \dots, n \end{cases} \\[2ex] C_i^{(1)} = C_i^{(0)} - \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}\, C_1^{(0)} \qquad i = 2, \dots, n \end{cases}$$

در مرحله دوم زیر قطر اصلی ستون دوم را صفر می کنیم. با استفاده از دومین معادله از دستگاه C معادله را برای $x_2$ بدست بیاوریم و با جایگزین کردن آن به صورت (نمادین) زیر می شود:




با توجه به شکل بالا معادله ها به صورت زیر می شود:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + a_{13}^{(0)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(0)} x_n &= C_1^{(0)} \\ a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n &= C_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)} x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)} x_n &= C_3^{(2)} \\ &\vdots \\ a_{3n}^{(2)} x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)} x_n &= C_n^{(2)} \end{aligned}$$

اگر مقادیر جدید را جایگزین کنیم ستون دوم از معادله سوم تا آخر حذف می گردد. برای اعمال تغییرات ۲ مرحله ای به صورت زیر عمل می کنیم:

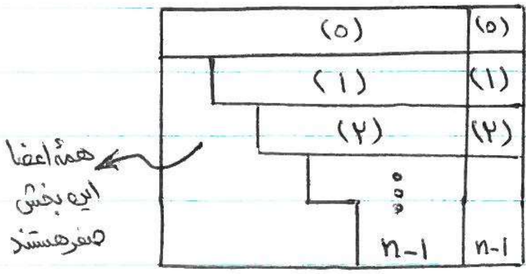
برای بدست آوردن ۲ مرحله

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \times a_{2j}^{(1)} \quad \begin{cases} i = 3, \dots, n \\ j = 3, \dots, n \end{cases} \\[2ex] C_i^{(2)} = C_i^{(1)} - \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \times C_2^{(1)} \qquad i = 3, \dots, n \end{cases}$$

اگر این کار را برای مرحله دیگر نیز اعمال شود تا به مرحله حذف k ام برسیم:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \times a_{kj}^{(k-1)} \quad \begin{cases} i = k+1, \dots, n \\ j = k+1, \dots, n \end{cases} \\[2ex] C_i^{(k)} = C_i^{(k-1)} - \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \times C_k^{(k-1)} \qquad i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

اگر این کار را انجام دهیم در نهایت در مراحل بعدی در انتها به ماتریس بالا مثلثی به صورت زیر می رسیم :




$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}^{(0)} \qquad j = 1, \dots, n$$

$$C_i^{(0)} = C_i^{(0)}$$

در هر مرحله قبل از حذف کردن باید شرایط $a_{kk}^{(k-1)}$ صفر نباشد را بررسی می کنیم . برای این کار از روش Backward Subsituation استفاده می کنیم که در آن از آخر به اول می آییم :

$$X_n = \frac{C_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$X_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \left[ C_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} X_j \right] \qquad i = n-1, \dots, 1$$

در ادامه برای روشن شدن مساله کار خود را با مثالی بیان می کنیم . ماتریسی به صورت زیر در اختیار داریم :

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & 5 \\ -4 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 9 \end{array}\right|$$

همانطور که ملاحظه می کنید $a_{11}$ ما صفر شده است . این مساله اینجا مشکل می کند . برای رفع مشکل یا باید جای ستون اول را با یکی دیگر از ستون ها عوض کنیم و یا جای سطر ها را . جای ستونها را عوض نمی کنیم چون در معادلات با تعویض جای ستون ضرایب متغیر ها تغییر می کند بنابرین جای سطرها را عوض می کنیم . تعویض سطرها باید به گونه ای باشد که :

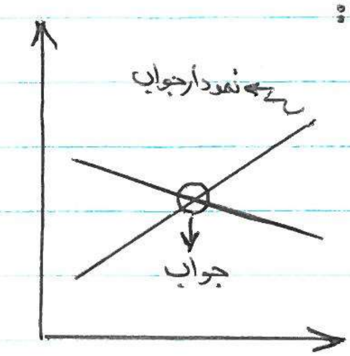
$$a_{ij} \neq 0 \qquad i = j$$

اما گاهی اوقات ماتریس ما به جای صفر مطلق عدد بسیار کوچکی شکل زیر دارد :

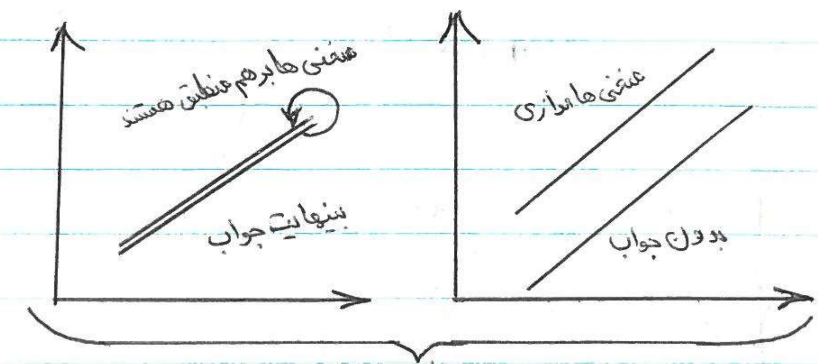
$$\left|\begin{array}{cccc|c} 0/00001 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & 5 \\ -4 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 9 \end{array}\right|$$

این عدد بسیار کوچک که در $a_{11}$ قرار دارد باعث می شود تا در هنگام حل ماتریس دچار خطا می شود که به خطا ایجاد شده Round of error گفته می شود .

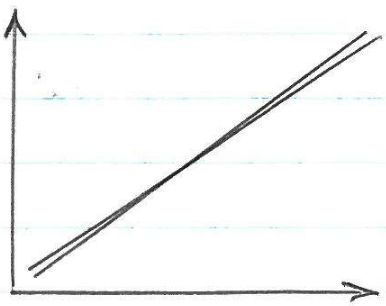
قبل از اینکه پیرامون تاثیر Round of error بر محاسبات ماتریسی بگوییم بهتر است پیرامون جواب معادلات توضیح بدهم. با توجه به شکل نمودار انواع جوابها به صورت زیر است:




Well Condition




Singular



ill Condition

این نمودارها اگر دچار خطا شوند تاثیر بسیار کمی بر پاسخ دارند اما گاهی نمودار به صورت ill Condition است مثل شکل روبرو که در این حالت شیب ۲ منحنی بسیار نزدیک به همدیگر است.

در نمودار روبرو با کوچکترین خطا جواب دچار خطاهای زیادی می شود

کاری که می توان انجام داد این است که از اعداد بسیار کوچک صرفنظر می کنیم

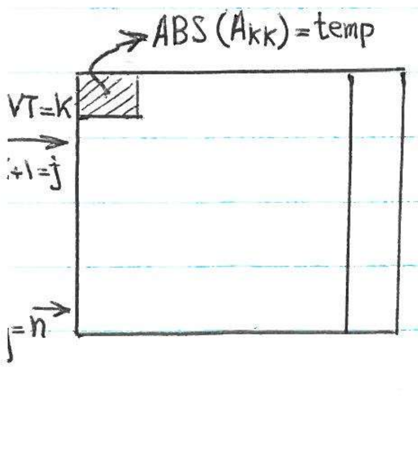
برای این کار عددی را که بزرگترین قدر مطلق را دارد جایگزین ~~[illegible]~~ سطر اول می کنیم که دارای عدد کوچک می باشد:

$$\left|\begin{array}{cccc|c} ۰/۰۰۰۱ & ۳ & ۱ & ۲ & ۲ \\ -۲ & ۱۰ & ۲ & -۱ & ۴ \\ ۴ & ۲ & -۱ & ۷ & ۵ \\ -۹ & ۴ & ۳ & ۳ & ۳ \end{array}\right|$$

در ستون اول قدر مطلق ۹- از همه بیشتر است بنابرین سطر ۴ را با سطر اول تعویض می کنیم

$$\left|\begin{array}{cccc|c} -۹ & ۴ & ۳ & ۳ & ۳ \\ -۲ & ۱۰ & ۲ & -۱ & ۴ \\ ۴ & ۲ & -۱ & ۷ & ۵ \\ ۰/۰۰۰۱ & ۳ & ۱ & ۲ & ۲ \end{array}\right|$$

$\boxed{\text{قدر مطلق ABS}}$




نکته ← فرض می کنیم ماتریسی به صورت روبرو داریم:

اگر بخواهیم جابجایی را انجام بدهیم ۲ کار زیر را باید بکنیم:

اول ← تعیین کنیم ردیف جابجایی کدام است.

دوم ← ردیفی که باید عوض شود K است.

برای ردیف $j = K+1$ تا ردیف $n$ در همان ستون $K$ باید ببینیم که آیا قدرمطلق (ABS) :

$$\text{ABS } a_{ik} > \text{Temp} \xrightarrow{\text{اگر بله باشد}} PVT = i$$

$$\text{Temp} = \text{ABS } a_{ik}$$

مقدار عددی $a_{ik}$ است

اگر عمل مقایسه فوق را تا انتها انجام دهیم به جایی می رسیم که بالاترین قدرمطلق می رسیم و آنگاه آن را با سطر صفر (سطر اول) عوض می کنیم سپس روابط زیر را اعمال می کنیم :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \times a_{kj}^{k-1} \\[2ex] C_i^{(k)} = C_i^{(k-1)} - \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \times C_k^{k-1} \end{cases}$$

انجام این اعمال برای هر سطر و ستون بسیار وقت گیر است بنابراین به صورت کلی از روابط زیر استفاده می کنیم :

$$a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \times a_{kj} \qquad \begin{cases} i = k+1, \dots, n \\ j = k+1, \dots, n \end{cases}$$

$$C_i = C_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \times C_k \qquad i = k+1, \dots, n$$

$$X_n = \frac{C_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[ C_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} X_i \right]_{i = n+1, \dots, 1}$$

## * روش گاوس - جردن :

روشهای ماتریسی به دلیل خطاهای زیاد و طولانی بودن عملیات مربوط به آن روش مورد قبول در تمامی شرایط نیست به همین دلیل از روش تکرار استفاده می کنیم . ما در محاسباتمان با ماتریسهای ۳ قطری بیشتر سروکار داریم بنابراین از روش الگوریتم توماس استفاده می کنیم . در مسائل با معادلات $AX=C$ سروکار داریم که به ازای مقادیر مختلف $C$ آن را حل می کنیم . برای همین ماتریس $A^{-1}$ بدست می آید : $X=A^{-1}C$

بنابراین از روش گاوس - جردن استفاده می کنیم . در ماتریس مرتبه سوم زیر داریم :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & C_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & C_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C_3 \end{array} \right|$$

در روش گاوس جردن به جای اینکه ماتریس را به ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم که برای این کار نسبت به گاوس حذفی چند کار را می بایست انجام داد :

صفحه بعد ←

① می بایست هم مقادیر بالا و هم مقادیر زیر قطر اصلی ماتریس را صفر کنیم.

② مقادیر قطر اصلی را می بایست به مقدار یک تبدیل کنیم: $i = 1, \ldots, n$ $\quad X_L = C_i^{(n)}$

با اعمال تغییرات گاوس جردن ماتریس مورد نظر ما اینچنین تغییر پیدا می کند:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & C_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & C_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C_3 \end{array}\right| \xrightarrow{\text{پس از اعمال گاوس جردن}} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & C_1^{(3)} \\ 0 & 1 & 0 & C_2^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & C_3^{(3)} \end{array}\right|$$

نکته

اگر در کنار ماتریس A یک ماتریس واحد قرار دهیم و عمل آن را روی ماتریس واحد انجام دهیم به ماتریس $A^{-1}$ می رسیم:

$$X = A^{-1} . C$$

وقتی ماتریس $A^{-1}$ بدست آمد: $i = 1, \ldots, n$

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-1} C_j$$

## روش LU Decomposition:

$A = L . U$ (پایین مثلثی، بالا مثلثی)

ماتریسی مثل A داریم که آن را به ۲ ماتریس مثلثی تبدیل می کنیم:

برای این کار با یک جایگزینی می توان آن را انجام داد:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

قطر اصلی را برای ماتریس بالا مثلثی باید یک شود. به عنوان مثال در ماتریس زیر داریم:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

در روابط بالا $(n-2)$ معادله باید صورت گیرد. که $L \times U$ ضرب می کنیم و با A مقایسه می کنیم. اگر A به L و U

$AX=C \longrightarrow AX-C=0$ تبدیل شود با مقادیر C به جواب برسیم و داریم :

$UX=D \longrightarrow UX-D=0$

عبارت را در L ضرب می کنیم $\Longrightarrow LUX-LD=0 \longrightarrow \boxed{LD=C}$ , $\boxed{UX=D}$

مراحل کار به صورت زیر است :

① $A=LU$ decomposition

② $LD=C$ Forward Subsitation

③ $UX=D$ Backward Subsitation

همه ماتریسها را در هم ضرب می کنیم و در مقادیر A جایگزین می کنیم :

① ردیفهای L را درستون اول U ضرب می کنیم

با این کار ستون اول ماتریس L بدست می آید .

$L_{11}=a_{11}$

$L_{21}=a_{21}$

$L_{31}=a_{31}$

$L_{41}=a_{41}$

$L_{i1}=a_{i1} \qquad i=1,2,\ldots,n$

② ردیف اول L را درستون U ضرب می کنیم

$L_{11}=a_{11}$ تکراری

$L_{11}U_{12}=a_{12} \longrightarrow U_{12}=\frac{a_{12}}{L_{11}}$

$L_{11}U_{13}=a_{13} \longrightarrow U_{13}=\frac{a_{13}}{L_{11}} \qquad U_{ij}=\frac{a_{ij}}{L_{11}} \qquad j=2,\ldots,n$

$L_{11}U_{14}=a_{14} \longrightarrow U_{14}=\frac{a_{14}}{L_{11}}$

با این کار اول ستون L به دست آمد و در مراحل بعد ردیفهای L را درستون U ضرب می کنیم .

③ ردیفهای L را درستون های دوم U ضرب می کنیم :

$L_{11}U_{12}=a_{12}$ تکراری

$L_{21}U_{12}+L_{22}=a_{22} \longrightarrow L_{22}=a_{22}-L_{21}U_{12}$

$L_{31}U_{12}+L_{32}=a_{32} \longrightarrow L_{32}=a_{32}-L_{31}U_{12}$

$L_{41}U_{12}+L_{42}=a_{42} \longrightarrow L_{42}=a_{42}-L_{41}U_{12}$

④ ردیفهای U را درستونهای L ضرب می کنیم :

$L_{21}=a_{21}$ تکراری $\qquad L_{21}U_{12}+L_{22}=a_{22}$ تکراری

$L_{21}U_{13}+L_{22}U_{23}=a_{23} \longrightarrow U_{23}=\frac{a_{23}-L_{21}U_{13}}{L_{22}}$

$L_{21}U_{14}+L_{22}U_{24}=a_{24} \longrightarrow U_{24}=\frac{a_{24}-L_{21}U_{14}}{L_{22}}$

در حالت کلی L ها n تا ستون داریم و U تعداد n-1 ردیف دارد. به این ترتیب در نهایت داریم:

$$L_{i1} = a_{i1} \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad \boxed{A}$$

$$U_{ij} = \frac{a_{ij}}{L_{11}} \qquad j = 2,\dots,n \qquad \boxed{B}$$

برای ردیف‌ها و ستون‌های اولیه به کار می‌بریم

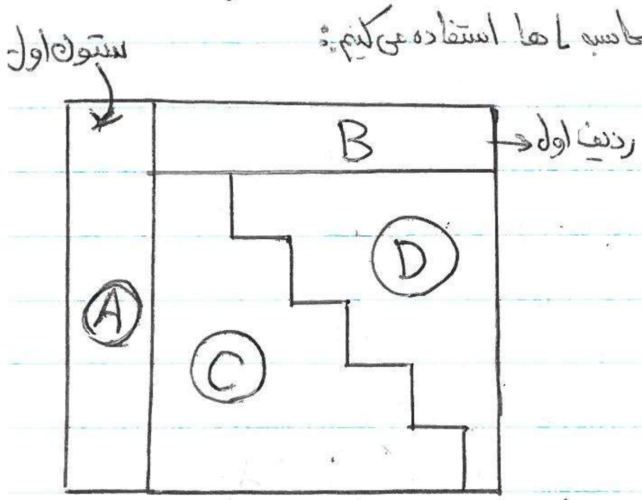
$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=j-1} L_{ik} U_{kj} \qquad \begin{cases} j = 2,\dots,n \\ i = j,\dots,n \end{cases} \qquad \boxed{C}$$

$$U_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=i-1} L_{ik} U_{kj}}{L_{ii}} \qquad \begin{cases} i = 2,\dots,n-1 \\ j = i+1,\dots,n \end{cases} \qquad \boxed{D}$$

بعد از اینکه مراحل بالا انجام شد برای ستون‌ها و سطرهای بعدی انجام می‌شود

---

به معادلات بالا دقت کنید اگر ماتریس A را در نظر بگیرید. (ماتریس مربعی $n\times n$) در روابط A که مربوط به محاسبهٔ ستون اول A می‌شود برای محاسبه L ها استفاده می‌کنیم:




رابطه B را برای ستون دوم به بعد داریم.
زیر قطر اصلی از رابطه C استفاده می‌شود.
بالای قطر اصلی از رابطه D استفاده می‌گردد.
ماتریس A در ابتدا همان A اصلی است.
وقتی روی آن تغییرات انجام شود ماتریس L و U بدست می‌آید که پایین قطر اصلی L و بالای آن U می‌باشد.

حال می‌خواهیم ۲ حلقهٔ D و C را در یک حلقه اعمال کنیم و $j$ را به عنوان شمارنده ستون‌ها در نظر می‌گیریم. وقتی D را اعمال می‌کنیم $i$ و $j$ شمارنده هستند که برای حلقهٔ خارجی انجام می‌دهیم. هرجا $i$ دیدیم بنویسیم $j$ و هرجا $j$ دیدیم بنویسیم $k$. این حلقه را همزمان با یک شمارنده انجام می‌دهیم. این کار را تا ردیف $n$ ادامه می‌دهیم و U آن را حساب می‌کنیم.

در روش LU Decomposition ما می بایست برای حل مسائل ۳ مرحله زیر را اعمال کنیم:

① $A = L \times U$

② $LD = C$

③ $D = UX$

آنچه در صفحات قبل گفته شد، تنها برای محاسبه قسمت ① بود. در واقع ما قسمت ① را انجام می دهیم تا L و D را تعیین کنیم. از L بدست آمده در مرحله دوم D را حساب می کنیم و D بدست آمده را برای بدست آوردن X در مرحله سوم استفاده می کنیم.

در قسمت دوم ما اگر بخواهیم معادلات را حل کنیم به صورت زیر عمل می کنیم:

$$LD = C \Longrightarrow \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

در رابطه بالا ماتریس L در قسمت اول حساب شد. ماتریس C نیز در صورت مساله مشخص است. اما ماتریس D برای ما مجهول است. برای محاسبه مقادیر d به صورت زیر عمل می کنیم:

$$d_1 = \frac{C_1}{l_{11}} \qquad d_i = \frac{C_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} d_k}{l_{ii}} \qquad i = 2, \ldots, n$$

در ادامه برای حل قسمت ③ از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$D = UX \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

در ماتریس بالا مقدارهای $X_1$ و $X_2$ و $X_3$ و $X_4$ پس از ضرب سطرهای ماتریس U در ستون X به صورت روبرو حساب می گردد:

$$X_4 = d_4$$

$$X_3 = d_3 - U_{34} X_4$$

$$X_2 = d_2 - U_{23} X_3 - U_{24} X_4$$

$$X_1 = d_1 - U_{12} X_2 - U_{13} X_3 - U_{14} X_4$$

به طور خلاصه برای مقادیر $X$ از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$X_n = d_n$$

$$X_j = d_j - \sum_{k=j+1}^{n} U_{jk}\, x_k \qquad j = n-1, \dots, 1$$

با توجه به موارد گفته شده می توان به راحتی مقادیر $x$ را برای چند معادله - چند مجهول حساب کرد. اما باید به این موضوع هم توجه داشت که برای برنامه نویسی ستونهای $L$ را داخل یک حلقه و ستونهای $U$ را درون حلقه دیگر قرارداد. اما این حلقه ها نباید از همدیگر جدا باشند. در این ماتریسها $j$ شمارنده ستون و $i$ شمارندهٔ ردیفها می باشد. کاری که باید انجام داد این است که محاسبات را باید داخل حلقه انجام بدهیم. ما می دانیم که ردیف آخری برای $U$ نداریم بنابراین $L$ را برای ستون ۲ تا $n-1$ می نویسیم:

$$C' \quad L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=j-1} L_{ik}\, U_{kj} \qquad \begin{cases} i = j, \dots, n \\ j = 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

توجه

رابطه $C$ را به ۲ قسمت $C'$ و $E$ تقسیم کرده ایم که $C'$ شامل عناصر ستونی $U$ از ۲ تا یکی مانده به آخر است و $E$ اختصاص به عنصر آخر ماتریس $U$ دارد.

$$E \quad L_{ji} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{n-1} L_{jk}\, U_{kj} \qquad j = n$$

حالا داخل حلقه قسمت $D$ را هم اعمال می کنیم. در این حلقه شمارنده $i$ است. بنابراین در رابطه مربوط به آن هرجا $i$ دیدیم به جای آن $j$ بنویسیم و هرجا $j$ دیدیم بنویسیم $k$ و هرکجا $k$ دیدیم $i$ بنویسیم. با توجه به این مطلب رابطه $D'$ به صورت زیر بدست می آید:

$$D' \quad U_{jk} = \frac{a_{jk} - \sum_{i=1}^{i=j-1} L_{ji}\, U_{ik}}{L_{jj}} \qquad k = j+1, \dots, n$$

وقتی برای $L$ ما ۲ قسمت $C'$ و $E$ ایجاد کردیم ناخواسته $D'$ به جای $D$ قرار می گیرد. با این حال برای اجرای برنامه $A$ و $B$ را نیز می بایست تغییر دهیم. برای تغییر $A$ و $B$ می بایست چنین عمل کنیم:

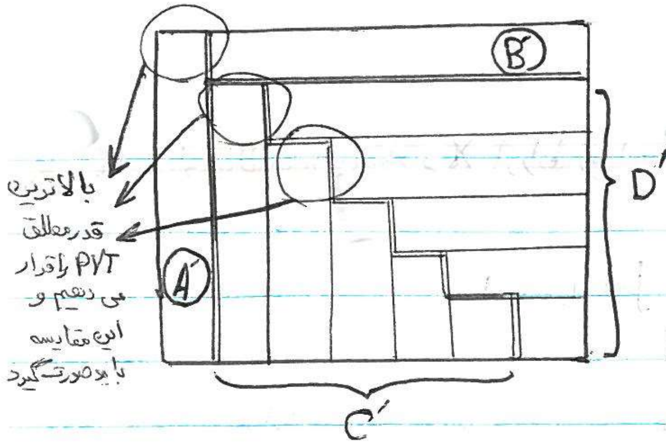
(۱) مقادیر $L$ و $U$ را که در رابطه $A$ و $B$ داشتیم برمی داریم و به جای آن $a$ قرار می دهیم.

(۲) هرجا $i$ دیدیم به جای آن $j$، هرجا $j$ دیدیم به جای آن $k$ و هرجا $k$ دیدیم به جای آن $i$ قرار می دهیم.

با این ۲ تغییر داریم:

$$A' \quad a_{i1} = a_{i1} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$B' \quad a_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{11}} \qquad j = 2, \dots, n$$



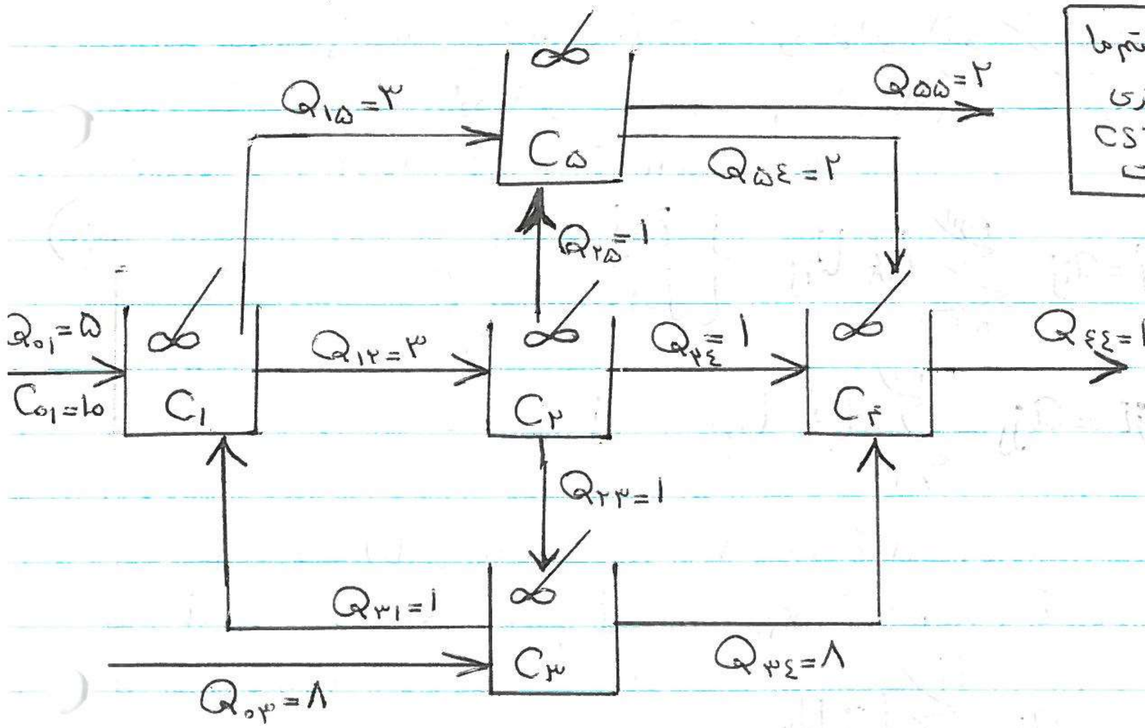

با توجه به گفته های صفحه قبل اعمالی را که انجام می دهیم به صورت نمادین در شکل روبرو بیان می کنیم:

توجه ⇐ $\boxed{\text{PVT می بایست بعد از محاسبهٔ ستون L و قبل از محاسبهٔ سطر U صورت بگیرد}}$

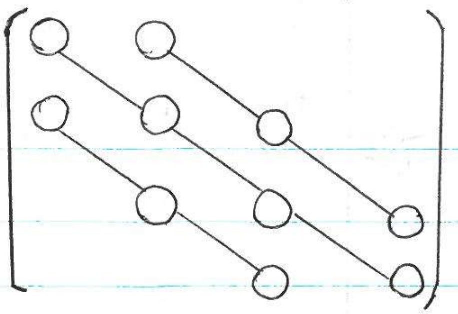
---

مثال: ماتریس معادله زیر را با کمک LU Decomposition حل کنید

سیستم ما راکتوری CSTR است



# * الگوریتم توماس :



گاهی اوقات ما ماتریس ۳ قطری داریم :
در این ماتریسها همانطوری که مشاهده می کنید دایره ها بیانگر مقادیر مجهول ما می باشد . غیر از این دایره ها بقیه عناصر صفر هستند به عبارت دیگر عناصر غیر صفر عبارتند از :

$$a_{ii} \qquad i=1,\dots,n$$
$$a_{j,j+1} \qquad j=1,\dots,n-1$$
$$a_{j,j-1} \qquad j=2,\dots,n$$

خیلی اوقات وقتی با معادلات دیفرانسیل سروکار داریم ، به ماتریس ۳ قطری می رسیم و گاهی محاسباتمان را به گونه ای تنظیم می کنیم که حتماً به ماتریس ۳ قطری برسیم . حل این گونه معادلات بسیار ساده است . از این ماتریس با روش LU Decomposition استفاده می گردد . به این عملیات روش توماس گفته می شود . به عنوان مثال در ماتریس ۴×۴ زیر داریم : $A = L\times U$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای LU ماتریسهای سه قطری با توجه به روابطی که داریم به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} & L_{11}U_{14} \\ L_{21} & L_{21}U_{12}+L_{22} & L_{21}U_{13}+L_{22}U_{23} & L_{21}U_{14}+L_{22}U_{24} \\ L_{31} & L_{31}U_{13}+L_{32} & L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+L_{33} & L_{31}U_{14}+L_{32}U_{24}+L_{33}U_{34} \\ L_{41} & L_{41}U_{14}+L_{42} & L_{41}U_{14}+L_{42}U_{24}+L_{43} & L_{41}U_{14}+L_{42}U_{24}+L_{43}U_{34}+L_{44} \end{bmatrix}$$

با توجه به مقایسه ماتریس بالا با ماتریس A داریم : $A = L\times U$

ماتریس $L$ =

$$\begin{bmatrix} L_{11} & & & \\ L_{21}\to a_{21} & L_{22} & & \\ L_{31}\to 0 & L_{32}\to a_{32} & L_{33} & \\ L_{41}\to 0 & L_{42}\to 0 & L_{43}\to a_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & \beta_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{ماتریس } U = \begin{pmatrix} 1 & U_{12} & \cancel{U_{13}} & \cancel{U_{14}} \\ 0 & 1 & U_{23} & \cancel{U_{24}} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

در روش توماس ماتریسهای غیرصفرها $2n-1$ می شود. حال اگر بخواهیم در هم ضرب کنیم داریم:

$\beta_i = l_{ii}$ $\quad i = 1,\dots,n$

$\gamma_j = U_{j,j+1}$ $\quad j = 1,\dots,n-1$

اگر ردیف اول را در ستون اول ضرب کنیم، داریم:

$$\beta_{11} = a_{11}$$

اگر چنانچه ردیف اول را در ستون دوم ضرب کنیم داریم:

$$\beta_1 \gamma_1 = a_{12} \longrightarrow \boxed{\gamma_1 = \frac{a_{12}}{\beta_1}}$$

و چنانچه ردیف دوم در ستون دوم ضرب کنیم داریم:

$$a_{21}\gamma_1 + \beta_2 = a_{22} \longrightarrow \boxed{\beta = a_{22} - a_{21}\gamma_1}$$

اگر ردیف دوم را در ستون سوم ضرب بکنیم آنگاه داریم:

$$\beta_2 \times \gamma_2 = a_{23} \longrightarrow \boxed{\gamma_2 = \frac{a_{23}}{\beta_2}}$$

اگر ردیف سوم را در ستون سوم ضرب بکنیم داریم:

$$\beta_3 = a_{33} - a_{32}\gamma_2$$

در نهایت اگر این اعمال خود را ادامه بدهیم برای $i$ مرحله داریم:

$$\beta_{11} = a_{11}$$

$$\gamma_j = \frac{a_{j,j+1}}{\beta_j} \quad j = 1,\dots,n-1$$

$$\beta_j = a_{jj} - a_{j,j-1}\gamma_{j-1} \quad j = 2,\dots,n$$

این همان روش LU Decomposition است که در کنار آن باید روابط زیر را حساب کرد:

$$L \times D = C$$

$$U \times X = D$$

نکته

در اینجا PVT احتیاجی نداریم چون از لحاظ تقسیم بر صفر برای معادلات ۳ قطری مناسب است

در ماتریسهای کوچک از روشهای ماتریسی و حل و خطا استفاده می کنند، اما برای ماتریسهای بزرگ فقط باید از روش حل و خطا استفاده کرد *

به طور خلاصه در الگوریتم توماس برای ماتریس ۳ قطری داریم:

$$\beta_1 = a_{11}$$

$$\gamma_j = \frac{a_{j,j+1}}{\beta_j} \qquad j = 1,\dots,n-1$$

$$\beta_j = a_{jj} - a_{j,j-1} \times \gamma_{j-1} \qquad j = 2,\dots,n$$

در رابطه روبرو ابتدا $\gamma$ را حساب می‌شود پس از آن $\beta$ را اعمال می‌نماییم

اگر ماتریس A به صورت زیر موجود باشد می‌توان آن را به حاصلضرب ۲ ماتریس به صورت زیر درآورد:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & & \\ a_{21} & \beta_2 & & & \\ & a_{32} & \beta_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n,n-1} & \beta_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & & \\ & 1 & \gamma_2 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \gamma_n \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = L \times U}$$

طبق روش LU Decompsition برای حل معادله ۳ مرحله‌ی زیر را اعمال می‌کنیم:

① $A = L \times U$

② $C = L \times D$

③ $D = U \times X$

آنچه در بالا گفته شد برای مرحله ① بود. حال مرحله‌ی ② را برای ماتریس ۴×۴ مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & & & \\ a_{21} & \beta_2 & & \\ & a_{32} & \beta_3 & \\ & & a_{43} & \beta_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

در ماتریس گفته شده در صفحهٔ قبل مقادیر $d$ عبارتست از:

$$d_1 = \frac{C_1}{\beta_1}$$

$$d_2 = \frac{C_2 - a_{21} d_1}{\beta_2}$$

$$d_3 = \frac{C_3 - a_{32} d_2}{\beta_3}$$

$$d_4 = \frac{C_4 - a_{43} d_3}{\beta_4}$$

$$\vdots$$

$$d_k = \frac{C_k - a_{k,k-1} d_{k-1}}{\beta_k} \qquad k = 2, \dots, n$$

حالا مرحله سوم عملیات را نیز انجام می دهیم:

$$UX = D \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & \\ & 1 & \gamma_2 & \\ & & 1 & \gamma_3 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

در بالا کار خود را با عملیات Backward Subsitiotion محاسبات را انجام داده ایم ، در نتیجه محاسبات داریم:

$$X_1 = d_1 - X_2 \gamma_1$$

$$X_2 = d_2 - X_3 \gamma_2$$

$$X_3 = d_3 - X_4 \gamma_3$$

$$X_4 = d_4 \quad \text{یا} \quad X_n = d_n$$

$$\vdots$$

$$X_k = d_k - X_{k+1} \gamma_k$$

به طور خلاصه ۳ مرحله در زیر بیان شده است

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A = L \times U$ | $\beta_1 = a_{11}$ | | |
| | $\gamma_i = \frac{a_{j,j+1}}{\beta_i}$ | | $j = 1, \dots, n-1$ |
| | $\beta_j = a_{jj} - a_{j,j-1} \times \gamma_{j-1}$ | | $j = 2, \dots, n$ |
| $C = L \times D$ | $d_1 = \frac{C_1}{\beta_1}$ | $d_k = \frac{C_k - a_{k,k-1} d_{k-1}}{\beta}$ | $k = 2, \dots, n$ |
| $D = U \times X$ | $X_n = d_n$ | $X_k = d_k - X_{k+1}$ | $k = 1, \dots, n-1$ |

روش الگوریتم توماس در مقایسه با LU Decomposition تعداد مجهول کمتری نیاز دارد. روش LU Decomposition تعداد مجهولاتش $n^2$ بود. اما روش توماس $2(n-1)$ مجهول دارد. همچنین نیاز به PVT ندارد که این روش باعث شده تا مناسب ترین روش برای حل معادلات ODE باشد. در معادلات ODE به معادلات ۳ قطری می رسیم و اگر معادلات از جایی دیگر بدست بیاید و PVT را انجام دهیم از روش های LU Decomposition و دیگر روشهای موجود استفاده می کنیم.

همانطور که در قبل نیز گفتیم روشهای ماتریسی دارای خطای زیادی است که این خطاها در معادلات «ill Condition» تولید خطای زیادی می کند. برای درک بهتر این موضوع ، یک دستگاه معادلات خطی 100x100 را در نظر می گیریم. این ماتریس فقط می بایست از روش توماس حل کرد. اما اگر کمتر از 100x100 باشد هم می توان از روش ماتریسی و هم از روش توماس استفاده کرد. معادلات زیر را در اختیار داریم:

$$0/0003 x_1 + 3x_2 = 2/0001 \quad \Longrightarrow \quad x_1 + 10000x_2 = 6667$$

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad\qquad -9999x_2 = -6666$$

جواب قطعی → $\boxed{x_1 = 1/3 \quad x_2 = 2/3}$

$$\boxed{x_2 = \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{2/0001 - 2(2/3)}{0/0003} = \frac{1}{3}}$$

همانطوری که در بالا مشاهده می کنید $x_1$ و $x_2$ مقادیر قطعی را نمایش هستند. حال اگر این مقادیر اندکی تغییر پیدا کند ، درصدهای ما خطا پیدا می کند. میزان خطا برحسب تغییرات $x_1$ و $x_2$ داریم

| $x_2$ | $x_1$ | درصد خطا |
|---|---|---|
| $x_2 = 0/6667$ | $x_1 = 0/3$ | 10% |
| $x_2 = 0/66667$ | $x_1 = 0/33$ | 1% |
| $x_2 = 0/666667$ | $x_1 = 0/333$ | 0/1 % |
| $x_2 = 0/6666667$ | $x_1 = 0/3333$ | 0/01 % |

این مقدار خطا شاید در نگاه اول بی اهمیت به نظر بیاید ولیکن در مساله آینده به شما می گویم که این خطای کم اندازه چقدر جواب را دچار خطا می نماید:

$$x_1 + 2x_2 = 10$$

$$1/1 x_1 + 2x_2 = 10/4$$

| $a_{21}$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| 1/1 | 4 | 3 |
| با ۲ درصد خطا → 1/08 | 5 | 2/5 |
| با ۵ درصد خطا → 1/05 | 8 | 1 |

$$\boxed{x_1 = \frac{10 - 10/4}{1 - 1/1} = 4}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{10/4 - 10(1/1)}{2 - 2(1/1)}}$$

آنچه در صفحه قبل گفته شد، برای معادلات «ill Condition» بود. اما برای معادلات Singular (معادلاتی که نمودارهای آن بر هم منطبق و یا موازی همدیگر باشند) از دترمینان ماتریس کمک می گیریم. اگر شیبها همگی با همدیگر برابر باشند، دترمینان آن صفر است:

معادلات Singular $\underset{\text{دترمینان}}{D}=0$

یادآوری

* نکاتی در مورد دترمینان:

(1) هرگاه یک سطر یا یک ستون از ماتریس $A$ در عدد حقیقی $K$ ضرب شود مقدار دترمینان $K$ برابر می گردد.

(2) هرگاه $A$ یک ماتریس مربع از درجه $n$ باشد داریم: $|KA| = K^n . |A|$

(3) هرگاه جای ۲ سطر یا ستون عوض شود، دترمینان در $(-1)$ ضرب می گردد.

(4) هرگاه ۲ سطر یا ستون ماتریس با هم برابر باشد، مقدار دترمینان صفر می گردد.

(5) دترمینان یک ماتریس قطری یا مثلثی برابر است با حاصلضرب عناصر روی قطر اصلی آن.

(6) اگر تمام عناصر یک سطر یا ستون ماتریسی صفر باشد، مقدار دترمینان صفر است.

(7) دترمینان یک ماتریس با دترمینان ترانهادهٔ آن برابر است.

(8) اگر به سطر یا ستونی مضربی از سطر یا ستون دیگر اضافه گردد مقدار دترمینان تغییر نمی کند.

(9) $|A^n| = |A|^n$ (10) $|AB| = |A||B|$ (11) $|A^k| = |A|^k$

(12) هرگاه $A$ و $B$ دو ماتریس $n \times n$ باشند، داریم: $|AB| = |BA|$

در روش حذفی گاوس گفته شد که ما به ماتریس بالا مثلثی می رسیم. (Uper training Matrix)

با توجه به نکات گفته شده در بالا، دترمینان ماتریس به صورت زیر است:

$$D = (a_{11} . a_{22} . a_{33} \cdots a_{nn})(-1)^P$$

در این رابطه $P$ بیانگر تعداد تغییرات در روش گاوس است

اگر یکی از مقادیر $a$ صفر بشود، آنگاه دترمینان صفر می گردد. نتیجه اینکه معادلات ما Singular می گردد. بنابراین دترمینان ماتریس معادلات را در روش حذفی گاوس حساب می کنیم، اگر صفر شد معادلات ما Singular است.

توجه کنید که فقط دترمینان به تنهایی نمی تواند بگوید که ماتریس ما جزو ill Condition است. بنابراین ماتریسها را بر یک عدد تقسیم می کنیم که به این کار عملیات Scaleing می گویند. این تقسیم باید به بزرگترین عددی که ظاهر می شود صورت گیرد. باز هم با این ۲ روش (دترمینان و Scaleing) نمی توان ill Condition را تعیین کرد.

روش دیگر استفاده از (نُرم) برداری است. نُرم ملاکی است برای اندازه گیری بردار که رابطه کلی آن برای $X$ به صورت زیر است:

$$\bar{X} = \|X\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

نُرم ۱ بردار $\Rightarrow \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$

نُرم P بردار $\Rightarrow \|X\|_P = \left(\sum_{i=1}^{n} |X_i|^P\right)^{\frac{1}{P}}$

همین رابطه بدست آوردن نُرم را هم می‌توان برای ماتریسها انجام داد. که آن را نُرم اقلیدسی می‌گویند و با علامت $\bar{\bar{A}}$ نمایش می‌دهند. نُرم اقلیدسی P برای ماتریس عبارتست از:

$$\|x\|_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2}}$$

نُرم دیگر ماتریس colum sum norm است. اگر ماتریس $n \times n$ داشته باشیم و قدرمطلق همه درایه‌ها را باهمدیگر جمع بزنیم و برای هر ستونی عددی بدست بیاید و بزرگترین آن را انتخاب می‌کنیم:

$$\underbrace{\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|}$$

به عنوان مثال در ماتریس روبرو داریم:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۱ \\ ۲ & -۷ & ۹ \\ ۶ & ۱۱ & ۲۳ \end{bmatrix}$$

۱۱ ۲۲ ۳۳ ← مجموع ستونها

به طور کلی اگر بخواهیم « Condition noumber » را برای ماتریس A حساب کنیم می‌بایست colum sum norm ماتریسهای A و $A^{-1}$ را بدست آوریم:

$$\text{Condition}.N\ [A] = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

در رابطه بالا A همان ماتریس اصلی‌مان است. ماتریس $A^{-1}$ نیز را با روش گاوس - جردن بدست می‌آوریم. دستگاه معادلات روبرو را در اختیار داریم: $AX = C$

در این رابطه بردار خطا $\{e\}$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\{e\} = \{X\} - \{\bar{X}\}$$

در رابطه بالا $\{X\}$ بیانگر جواب واقعی « true Solution » است. همچنین $\{\bar{X}\}$ بیانگر جوابی است که از روش ماتریسی بدست می‌آید « Appoximate Solution »

برای چک کردن درستی محاسبات از $\{r\}$ یا resigual « باقیمانده » به صورت رابطه زیر استفاده می‌کنند:

$$\underbrace{\{r\} = \{C\} - [A]\{\bar{X}\}}$$

در رابطه بالا $\{C\}$ بیانگر ماتریس جواب است. $[A]$ بیانگر ماتریس ضرایب است. $\{\bar{X}\}$ نیز بیانگر X هایی است که ما بدست آورده‌ایم.

برای بدست آوردن حد اول و حد دوم خطا در یک محاسبه از روش زیر استفاده می کنیم :

$$\frac{1}{Condition[A]} \cdot \frac{||r||_1}{||C||_1} \leqslant \frac{||e||_1}{||x||_1} \leqslant Condition[A] \cdot \frac{||r||_1}{||C||_1}$$

رابطه وسطی را که در بالا مشاهده می کنید ، بیانگر محدوده ای است که می توانیم خطا داشته باشیم مطرح می کند.

اگر Condition Number عدد بزرگی باشد ، نمی تواند قابل توجه باشد. فرض کنید در یک عددی ماتریسی را ضرب کنیم به طوری مقدار نُرم ۱ عبارت C با $10^0$ بشود:

$$||C||_1 = 10^0$$

در این حالت خاص که در بالا آورده شده است ، داریم :

Single presioum $10^{-6}$

Double presioum $10^{-12}$

اگر ما Condition[A] و بعد از آن محدودهٔ خطا «bounds on relation error» را داشته باشیم می توانیم :

Single presioum $||r|| = 10^{-6}$

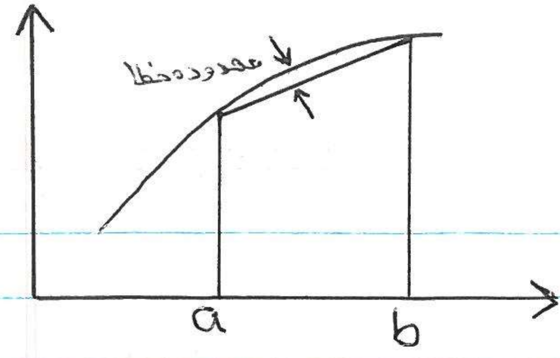
مقدار مناسب

با توجه به جدول زیر رابطه موجود میان Condition[A] و محدوده خطا بیان شده است :

| Condition[A] | محدودهٔ خطا |
|---|---|
| $10^{10}$ | $10^{-6} \leqslant \frac{\|\|e\|\|_1}{\|\|x\|\|_1} \leqslant 10^{4}$ |
| $10^{6}$ | $10^{-12} \leqslant \frac{\|\|e\|\|_1}{\|\|x\|\|_1} \leqslant 10^{0}$ |
| $10^{0}$ | $10^{-6} \leqslant \frac{\|\|e\|\|_1}{\|\|x\|\|_1} \leqslant 10^{-6}$ |
| $10^{-10}$ | $10^{-22} \leqslant \frac{\|\|e\|\|_1}{\|\|x\|\|} \leqslant 10^{-12}$ |

اگر Condition Number کوچک بود در آن هنگام می بایست از «Double Pressium» استفاده کرد. آنگاه $||r|| = 10^{-12}$ می شود.

برای درک بهتر موضوع یک مثال را در صفحه بعدی بیان شده است :




تابعی به صورت $f(x)$ با نمودار روبرو داریم:
ما قصد داریم با روش عددی انتگرال آن را محاسبه کنیم

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{سطح زیر نمودار}$$

همانطوری که ملاحظه می نمایید اگر با روش ذوزنقه ای انتگرال را حساب کنیم مقداری خطا در تابع ایجاد می شود. با روش سیمپسون این خطا کمتر می شود ولی هنوز وجود دارد، به طور کلی با محاسبات خطا جواب عددی ما به جواب قطعی یعنی سطح زیر نمودار نزدیک می گردد. ما برای محاسبه خطا اعداد را حساب می کنیم تا مقدار Condition Number بدست بیاید. بعد از آن محدوده خطا را بدست می آوریم. اگر Condition Noumb ما بزرگ باشد از همان روش Double Prisioum استفاده می کنیم تا به خطا کمتر برسیم.

**یادآوری**

روشهای انتگرال گیری عددی به طور کلی به صورتهای زیر است:

روش مستطیلی ⟵ $\int_a^b f(x)\,dx = h\left[f_0+f_1+f_2+\dots+f_n\right]$

روش ذوزنقه ⟵ $\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{f_0}{2}+f_1+f_2+\dots+f_{n-1}+\frac{f_n}{2}\right]$

روش سیمپسون $\frac{1}{3}$ ⟵ $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+2f_2+\dots+2f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n\right]$

(ضرایب جملات اول و آخر یک / ضرایب جملات فرد ۴ و ضرایب جملات زوج ۲)

روش سیمپسون $\frac{3}{8}$ ⟵ $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{3}{8}h\left[f_0+3f_1+3f_2+2f_3+\dots+3f_{n-3}+3f_{n-2}+3f_{n-1}+f_n\right]$

(ضرایب جملات اول و آخر یک / ضریب جملات مضرب ۳ ← ۲ / ضریب سایر جملات ← ۳)

روش گاوس ⟵ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ $\boxed{x = \frac{[(b-a)t-(a+b)]}{2}}$

روش نقطه میانی ⟵ $\int_a^b f(x)\,dx = h\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\dots+f\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)\right]$

**توجه**

پیرامون مباحث خطاها چند صفحه ای از کتاب تست کارشناسی ارشد بهزاد خداکرمی کپی شده است که در انتهای جزوه ضمیمه گردیده است.

تابع فرضی $f(x)$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| ۰/۵ | +۰/۷ |
| ۰/۶ | -۰/۲ |
| ۰/۵۸ | +۰/۰۳ |
| ۰/۵۸۱ | -۰/۰۰۲ |
| ۰/۵۸۰۸ | +۰/۰۰۰۰۰۰۱ |

## روش ژاکوبی :

در قبل گفته شد که برای محاسبات می توانیم از روشهای حل تکراری هم استفاده کنیم برای این کار باید حدس اولیه داشته باشیم. تابع فرضی $f(x)$ را در نظر بگیرید، در این تابع ابتدا یک $x$ را حدس می زنیم و برای رسیدن به حدس قطعی از روش درونیابی استفاده می کنیم. در اینجا ما از رابطه تکراری خواهیم استفاده کنیم که تغییر اندازه در ریشه را برای ما محاسبه می کند. برای این کار ابتدا بازه را انتخاب می کنیم. بعد بازه را کوچک می کنیم تا به جواب قطعی برسیم. روشهای تکراری مثل بالا همگراست ولی گاهی روشهایی وجود دارد که واگرا می شود. ویژگی روشهای تکراری این است که باید همگرا شود. سرعت همگرایی می بایست بالا برود و با محاسبات تکرار کمتر به جواب نهایی برسیم. روشهای تکراری در آن متفاوت است که ما برای محاسبات خود معادلات دیفرانسیل زیر را در اختیار داریم:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots + a_{1n}X_n = C_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \dots + a_{2n}X_n = C_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 + \dots + a_{nn}X_n = C_n$$

ما نمی توانیم برای $n$ معادله، $n$ حدس بزنیم بنابراین یک رابطه تکرار برای معادله اول حساب می کنیم:

$$X_1 = \{C_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - \dots - a_{1n}X_n\}/a_{11}$$
$$X_2 = \{C_2 - a_{21}X_1 - a_{23}X_3 - \dots - a_{2n}X_n\}/a_{22}$$
$$X_3 = \{C_3 - a_{31}X_1 - a_{32}X_2 - a_{34}X_4 - \dots - a_{3n}X_n\}/a_{33}$$
$$\vdots$$
$$X_n = \{C_n - a_{n1}X_1 - a_{n2}X_2 - \dots - a_{n,n-1}X_{n-1}\}/a_{nn}$$

معمولاً حدس اولیه را (۰) درنظر می گیریم. برای محاسبات نیز از آن استفاده می نماییم:

حدس اولیه $X_i^k = 0$

گاهی اوقات باید روی حدس اولیه حساسیت به خرج بدهیم ولی برای این معادلات صفر می گیریم. برای رابطه تکراری که می بایست اعمال کنیم، داریم:

حدس اولیه $X_i^{(k)} = 0 \qquad i = 1, \dots, n \qquad (k=0)$

مرتبه عملیات

روش تکرار برای محاسبه مرتبه $(K+1)$ داریم:

$$X_1^{(K+1)} = \left\{ C_1 - a_{12}X_2^{(K)} - a_{13}X_3^{(K)} - \dots - a_{1n}X_n^{(K)} \right\} / a_{11}$$

$$X_2^{(K+1)} = \left\{ C_2 - a_{21}X_1^{(K)} - a_{23}X_3^{(K)} - \dots - a_{2n}X_n^{(K)} \right\} / a_{22}$$

$$X_3^{(K+1)} = \left\{ C_3 - a_{31}X_1^{(K)} - a_{32}X_2^{(K)} - a_{34}X_4^{(K)} - \dots - a_{3n}X_n^{(K)} \right\} / a_{33}$$

$$\vdots$$

$$X_n^{(K+1)} = \left\{ C_n - a_{n1}X_1^{(K)} - a_{n2}X_2^{(K)} - \dots - a_{n,n-1}X_{n-1}^{(K)} \right\} / a_{nn}$$

روابط تکراری که در بالا گفته شد، به شرطی برقرار است که:

$$a_{ii} \neq 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

به این روش محاسبات، روش جاکوبی (جایگزینی همزمان) گفته می‌شود. برای این روش باید موارد زیر را در نظر بگیرید:

شروع → $\left| x_i^{K+1} - x_i^{K} \right| <$ Tolerance for all $i = 1, \dots, n$ → بله → اتمام شد

نه → دوباره $x_i$ های خود را ادامه می‌دهیم:

$x_i^{(K)} = x_i^{(K+1)} \qquad i = 1, \dots, n$

به طور کلی الگوریتم روش ژاکوبی در زیر بیان شده است:

Count=1 شمارنده

$I_{max} = 100$

$ToL = 0/000001$

Initial guess $X_{OLD_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, n$

→ $i = 1, \dots, N$

$X_{New_i} = \left[ C_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_{OLD_i} \right] / a_{ii}$

if $\left| X_{New_i} - X_{OLD_i} \right| < ToL$ for all $i = 1, \dots, n$ $\xrightarrow{\text{Yes}}$ Done

$\xleftarrow{\text{NO}}$ Count = Count + 1

if Count $> I_{max}$ $\xrightarrow{\text{Yes}}$ Stop

NO

$X_{OLD_i} = X_{New_i} \qquad i = 1, \dots, n$

## روش گاوس - سایدل (جایگزینی متوالی):

اصول کلی این روش دقیقاً مثل روش ژاکوبی است. تنها یکسری تغییرات جزئی در آن وجود دارد. به طور خلاصه روش گاوس - سایدل به شکل زیر است:

① حدس اولیه $\quad X_i^{(k)}=0 \quad i=1,\dots,n \quad$ (k مرتبه عملیات) $K=0$

② 

$$X_1^{(k+1)}=\left\{C_1-a_{12}X_2^{(k)}-a_{13}X_3^{(k)}-\dots-a_{1n}X_n^{(k)}\right\}/a_{11}$$

$$X_2^{(k+1)}=\left\{C_2-a_{21}X_1^{(k+1)}-a_{23}X_3^{(k)}-\dots-a_{2n}X_n^{(k)}\right\}/a_{22}$$

$$X_3^{(k+1)}=\left\{C_3-a_{31}X_1^{(k+1)}-a_{32}X_2^{(k+1)}-a_{34}X_4^{(k)}-\dots-a_{3n}X_n^{(k)}\right\}/a_{33}$$

$$\vdots$$

$$X_n^{(k+1)}=\left\{C_n-a_{n1}X_1^{(k+1)}-a_{n2}X_2^{(k+1)}-\dots-a_{n,n-1}X_{n-1}^{(k+1)}-a_{nn}X_n^{(k)}\right\}/a_{nn}$$

③ $\left|X_i^{(k+1)}-X_i^{(k)}\right| < \text{Tolerance}$ برای تمام $i=1,\dots,n$ $\xrightarrow{\text{بله}}$ انجام شد

از لحاظ همگرایی و سرعت عمل، روش گاوس - سایدل از روش ژاکوبی سرعت عمل بیشتری دارد. برای این کار یکسری شرایط کافی را می‌توان درک کرد. به عنوان مثال اگر ماتریس قطر اصلی غالب باشد، این روش همیشه همگرا است. یعنی:

$|$ سایر اجزاء بر روی قطر اصلی $| \leq |a_{ii}|$

به عنوان مثال ماتریس ۴x۴ قطر اصلی غالب زیر را در اختیار داریم:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

diagonally dominat

قطر اصلی غالب زمانی است که: $\quad |a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \boxed{i=1,\dots,n}$

گاهی اوقات جواب‌هایمان نه همگرا می‌شود نه واگرا و یک حالت بلاتکلیفی ایجاد می‌شود که برای خروج از این حالت می‌بایست در محاسباتمان تغییراتی ایجاد بنماییم. اگر ماتریس قطر اصلی غالب باشد، برای

این کار از روش تکراری استفاده می کنیم و مطمئن هستیم که ۱۰۰ درصد همگرا است که شرط ما کافی می باشد. برای خارج شدن از حالت بلاتکلیفی می توان با افزایش شمارش تکرار را افزایش داد که بعد از ۱۰۰ مرحله تکرار آن را بدست می آوریم و تا ۱۰۰ مرحله باید مشخص کرد که همگرا است یا واگرا. اگر تا ۱۰۰ مرحله همگرا نشد باید تغییری در کارهای خود بدهیم.

این روش تفاوت جزئی با روش ژاکوبی دارد. در روش ژاکوبی جابجایی مرحله ای ولی در گاوس-سایدل همزمان صورت می گیرد. برای روش گاوس-سایدل به طور کلی الگوریتم زیر را داریم:

## Gauss-Seidel:

$Count = 1$

$I_{max} = 100$

$Tol = 0/000001$

initial guess

$X_{OLD_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, n$

$X_{R_i} = X_{OLD_i} \qquad i = 1, \dots, n$

$i = 1, \dots, n \Longrightarrow X_{New_i} = \Big[C_i - \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} X R_i}\Big] / a_{ii}$

Relaxation: $X_{New_i} = W \times X_{New_i} + (1-W) X_{OLD_i}$

$X_{R_i} = X_{New_i}$

if $|X_{New_i} - X_{OLD_i}| < Tol$ for $i = 1, \dots, n \xrightarrow{\text{بله}}$ انجام شد

نه

$Count = Count + 1$

نه

If $Count > I_{max} \xrightarrow{\text{بله}} STOP$

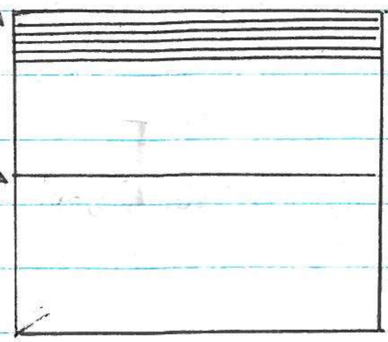
توجه

Absolute Error $\left|X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)}\right| < Tol$ for $i = 1, \dots, n$

relative Error $\left|\dfrac{X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)}}{X_i^{(k+1)}}\right| \times 100\% < Tol$ for $i = 1, \dots, n$

Sum of Absolute $\sum_{i=1}^{n} \left|X_i^{k+1} - X_i^{k}\right| \leqslant Tol$

گاهی اوقات تعداد خطاها بسیار زیاد می‌شوند برای همین یک خط در ماتریس در نظر می‌گیرند.

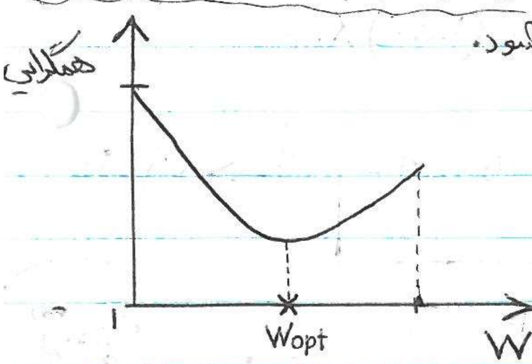



و برحسب این خط تمام خطاها را در ماتریس تعیین می‌نماییم.
در برنامه کامپیوتری که در صفحه قبل آورده شده است ما این سطر را در نقش ۲ خط $i$ و $X_{R_i}$ قرار می‌دهیم. برای این سطرها از Relaxation استفاده می‌کنیم که عبارت است از:

$$X_{New} = W \times X_{New} + (1-W)\, X_{OLD_i}$$

در روشهای تکراری ممکن است جوابها واگرا شود. اگر در محاسبات عددی خودمان روش گاوس - سایدل اعمال گردد ممکن است محاسبات ما همگرا شود. اگر همگرا نشد از روش Relaxation استفاده می‌کنیم. در فرمول Relaxation میزان $X_{New}$ برحسب مقدار $W$ تعیین می‌گردد. مقدار $W$ هیچ رابطه خاصی ندارد. برای محاسبات معمولاً یکسری روشهایی وجود دارد که برای معادلات غیرخطی استفاده می‌گردد ولی برای استفاده از Relaxation می‌بایست نکات زیر را در نظر بگیرید:

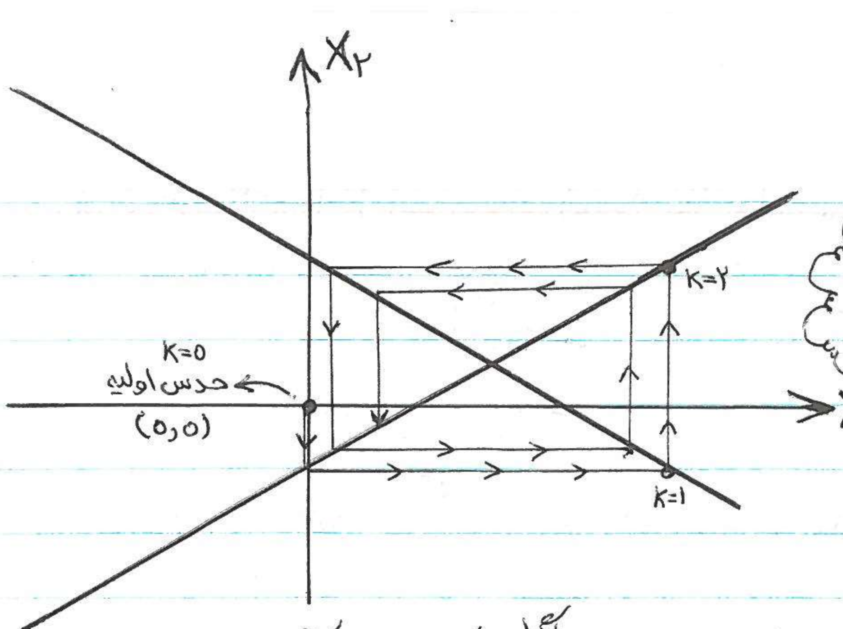
* نکته ۱: همیشه محاسبات خودمان را با $(W=1)$ آغاز می‌کنیم و همیشه برمبنا $(W=1)$ برنامه ما آغاز می‌گردد. با این کار ۲ حالت برای ما پدید خواهد آمد. یا با $(W=1)$ همگرایی داریم و یا با $(W=1)$ واگرایی داریم.
* نکته ۲: اگر $(W=1)$ واگرا شود، آنگاه $W$ را کوچکتر می‌کنیم (Under Relaxation) $0<W<1$
* نکته ۳: اگر با $(W=1)$ همگرا شود آنگاه ما $W$ را بزرگتر می‌کنیم تا سریعتر به جواب برسیم $1<W<2$
* نکته ۴: افزایش بیش از حد $W$ باعث ایجاد واگرایی می‌شود.
* نکته ۵: در رابطه همگرایی یک $W_{opt}$ پدید می‌آید که در نمودار روبرو مشخص شده است. مقدار $W_{opt}$ رابطه خاصی ندارد. برای بدست آوردن $W_{opt}$ معمولاً مساله را به ازای مقادیر مختلف حساب می‌کنند و بعد $W$ را بدست می‌آورند.




برای Relaxation به عنوان مثال ما نموداری با ۲ معادله ۲ مجهول زیر در نظر می‌گیریم که آن را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = C_1 \longrightarrow a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - C_1 = 0$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = C_2 \longrightarrow a_{21}X_1 - a_{22}X_2 - C_2 = 0$$

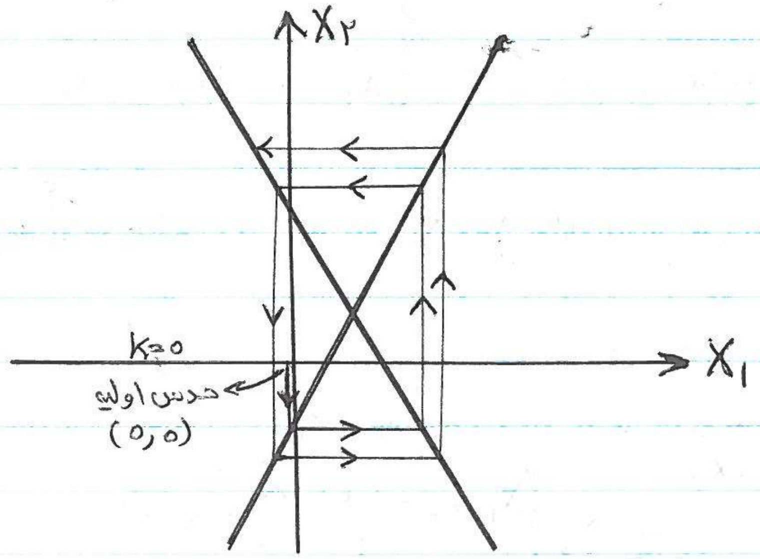
نمودار رابطه فوق را در صفحه بعد مشاهده می‌کنید و توضیحات ضروری نیز در کنار آن داده شده است:




همانطور که ملاحظه می کنید از $X_0$ که حدس اولیه است شکل ما همگرا می شود*

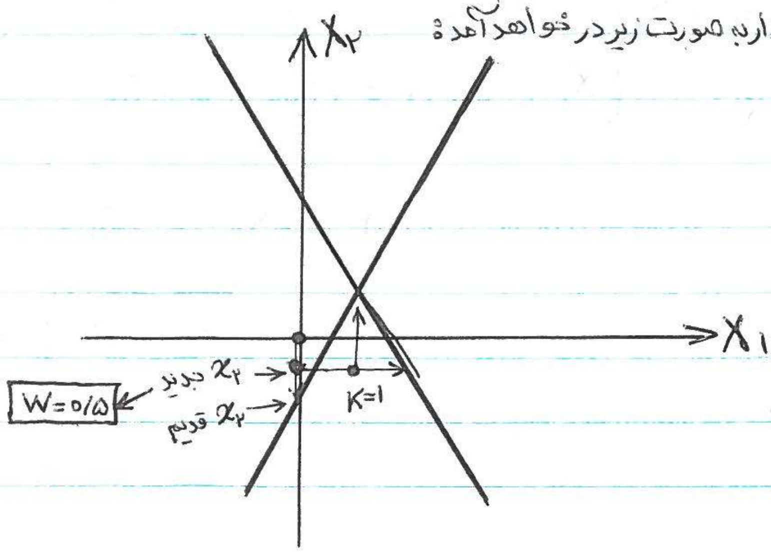
$$\text{حدس اولیه} = \begin{cases} X_1^0 = 0 \\ X_2^0 = 0 \end{cases}$$

حال اگر معادلات ما به گونه ای بود که به صورت واگرا درآید نمودار آن به صورت زیر می شود:




همانطور که ملاحظه می کنید از $X_0$ که حدس اولیه است شکل ما واگرا می گردد

در نمودار بالا حدس اولیه را صفر قرار می دهیم. اگر $x_1$ را صفر گذاشته و در مراحل مختلف اعمال کنیم، مشاهده می کنیم که در نهایت واگرا می شود. حال اگر از رابطه W استفاده کنیم و در فرمول Relaxation مقدار W را کمتر از یک قرار دهیم نمودار به صورت زیر در خواهد آمد:




همانطور که ملاحظه می کنید نمودار رو برو خیلی سریع همگرا شد و این مساله به خاطر انتخاب مناسب W است

در حالتی که ما از Relaxation استفاده می کنیم (به عنوان مثال نمودار پایین صفحه قبل) به جای $X_2$ از $X_2$ Relaxation که آن نمودار Update شده است داریم:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = C_1 \longrightarrow X_2 = \frac{C_1 - a_{11}X_1}{a_{12}}$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = C_2 \longrightarrow X_1 = \frac{C_2 - a_{22}X_2}{a_{21}}$$

اگر ماتریس معادلات ما قطر اصلی قالب باشد، همگرایی داریم ولی اگر قطر اصلی قالب نباشد همگرایی ندارد و باید از Relaxation استفاده کرد و باید از روابطی که در بالا گفته شده داریم:

$X_1^{(0)} = 0$

$X_2^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} X_2^{(1)} = \dfrac{C_1 - a_{11}X_1^{(0)}}{a_{12}} \\ X_2^{(1)} = W X_2^{(1)} - (1-W) X_2^{(0)} \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1^{(1)} = \dfrac{C_2 - a_{22}X_2^{(1)}}{a_{21}} \\ X_1^{(1)} = W X_1^{(1)} + (1-W) X_1^{(0)} \end{cases}$$

---

**مثال** در معادلات روبرو مقادیر $X_1$ و $X_2$ به ازای $(W = 0/5)$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 = 5 \\ 3X_1 + 4X_2 = 6 \end{cases}$$

ما حدس اول را به این ترتیب قرار می دهیم: $X_1 = 0$ و $X_2 = 0$

برای به دست آوردن مقادیر $X_1$ و $X_2$ نیز طبق فرمول به صورت زیر عمل می کنیم:

$$X_1^{(1)} \quad \begin{cases} X_1^{(1)} = \dfrac{C_2 - a_{22}X_2^{(1)}}{a_{21}} \\ X_1^{(1)} = W X_1^{(1)} + (1-W) X_1^{(0)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X_1^{(1)} = \dfrac{6 - 4 \times 1/25}{3} = 0/333 \\ X_1^{(1)} = (0/5)(0/333) + (0/5)(0) = 0/1667 \end{cases}$$

---

$$X_2^{(1)} \quad \begin{cases} X_2^{(1)} = \dfrac{C_1 - a_{11}X_1^{(0)}}{a_{12}} \\ X_2^{(1)} = W X_2^{(1)} - (1-W) X_2^{(0)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X_2^{(1)} = \dfrac{5 - 1 \times (0)}{2} = \dfrac{5}{2} \\ X_2^{(1)} = (0/5) \times \dfrac{5}{2} + (0/5)(0) = 1/25 \end{cases}$$

حال مقدارهای $X_1$ و $X_2$ را در جدول روبرو بیان می کنیم:

| | $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|---|
| $k=0$ | 0 | 0 |
| $k=1$ | 1,667 | 0/333 |

**تذکر مهم**

ما در این مثال می بایست اول $X_2$ را حساب کنیم چون در رابطه $X_1$ داریم: $X_1 = \dfrac{C_2 - a_{22}.X_2^{(1)}}{a_{21}}$

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_3 = 1 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 2 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 4 \end{cases}$$

مثال ۲: در معادلات روبرو $X_1$ و $X_2$ و $X_3$ را حساب کنید:

معادله فوق را یک مرتبه با حدس اولیه $\begin{bmatrix} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{bmatrix}$ و با کمک روش ژاکوبی و یک مرتبه به کمک روش گاوس - سایدل به ازای $(W=1)$ و $(W=0/5)$ حل می نماییم:

← روش ژاکوبی:

$$X_1^{(K+1)} = \frac{2 - 2X_2^{(K)} + 3X_3^{(K)}}{1}$$

$$X_2^{(K+1)} = \frac{1 - 2X_1^{(K)} - X_3^{(K)}}{-1}$$

$$X_3^{(K+1)} = \frac{4 - X_1^{(K)} - X_2^{(K)}}{1}$$

با توجه به معادلات روبرو و به طور ذهنی محاسبات را انجام می دهیم

| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|
| K=0 | ۰ | ۰ | ۰ |
| K=1 | ۲ | -۱ | ۴ |
| K=2 | ۱۶ | +۷ | +۳ |

با روش ژاکوبی مشاهده می کنیم که معادلات ما واگرا می شود بنابرین به سراغ روش گاوس - سایدل می رویم:

## * روش گاوس - سایدل:

$$X_1^{(K+1)} = \frac{2 - 2X_2^{(K)} + 3X_3^{(K)}}{1}$$

$$X_2 = \frac{1 - 2X_1^{(K)} - X_3^{(K)}}{-1}$$

$$X_3 = \frac{4 - X_1^{(K+1)} - X_2^{(K+1)}}{1}$$

برای این روش یک جدول تشکیل می دهیم و با کمک روابط روبرو ذهنی آن را کامل می کنیم:

| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|
| K=0 | ۰ | ۰ | ۰ |
| K=1 | ۲ | ۳ | -۱ |
| K=2 | -۷ | -۱۶ | +۲۷ |

همانطور که مشاهده می کنید در مرحله دوم محاسبات ما شروع به واگرا شدن می نماید بنابرین معادلات را بر مبنا $(W=0/5)$ به کار می بریم. با کمک روابط Relaxation جدول بالا را به صورت زیر و با معادلات زیر بازنویسی می کنیم:

$$X_1^{(K+1)} = (1-W)\,X_1^{(K)} + W\,X_1^{(K+1)}$$

$$X_2^{(K+1)} = (1-W)\,X_2^{(K)} + W\,X_2^{(K+1)}$$

$$X_3^{(K+1)} = (1-W)\,X_3^{(K)} + W\,X_3^{(K+1)}$$

| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|
| K=0 | ۰ | ۰ | ۰ |
| K=1 | ۱ | ۰/۵ | ۱٫۲۵ |
| K=2 | ۲٫۸۷۵ | ۴٫۵ | |

همانطور که ملاحظه می فرمایید با $(W=0/5)$ نیز واگرا می شود، بنابرین یک $W$ جلوتر را انتخاب می کنیم. و با $W$ جدید همگرایی را بررسی می کنیم. آنقدر $W$ را به کار می بریم تا اینکه در نهایت به مقادیر اصلی $X$ ها یعنی موارد زیر برسیم:

$X_1 = 1$ و $X_2 = 2$ و $X_3 = 1$

# * معادلات غیرخطی :

درمعادلات غیرخطی دیگر نمی توان از ماتریس استفاده کرد. می بایست در این قبیل معادلات از روشهای تکراری استفاده کنیم و ممکن است واگرا شود در آن صورت با عملیات Relaxation مشکل ما حل خواهد شد.

**یادآوری**

معادله دیفرانسیل معادله‌ای است که شامل مشتقات اول و یا بالاتر باشد. معادلات دیفرانسیل به ۲ دسته تقسیم بندی می شود: ① معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) / ② معادلات دیفرانسیل جزئی PDE

معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) شامل مشتقات معمولی بوده و دارای یک متغیر است. معادلات دیفرانسیل جزئی شامل مشتقات جزئی بوده و دارای بیش از یک متغیر مستقل است. در معادلات دیفرانسیل تعاریف زیر را داریم:

* مرتبه: مرتبه بالاترین مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را مرتبه معادله دیفرانسیل می گویند.

* درجه: توان بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را درجه آن معادله می گویند.

معادلات دیفرانسیل معمولی را می توان به ۲ دسته خطی و غیرخطی تقسیم بندی کرد:

هرگاه معادلات دیفرانسیل برحسب متغیر وابسته و مشتقات آن یعنی $y', y'', \dots, y^{(n)}$ خطی باشد آن را خطی می نامیم. معادله زیر یک معادله دیفرانسیل مرتبه n اُم خطی در حالت کلی را نشان می دهد:

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)\,y = g(x)$$

در غیر این صورت معادلات غیرخطی است. اگر $g(x)=0$ معادله همگن و اگر $g(x)\neq 0$ باشد معادله ناهمگن است.

* جواب معادله: در حالت کلی هر تابعی که در معادله دیفرانسیل صادق باشد جواب آن معادله دیفرانسیل نامیده می شود:

← جواب عمومی: جوابی است که به ازای مرتبه معادله دارای ثابت باشد و به ازاء هر ثابت در معادله صدق کند.

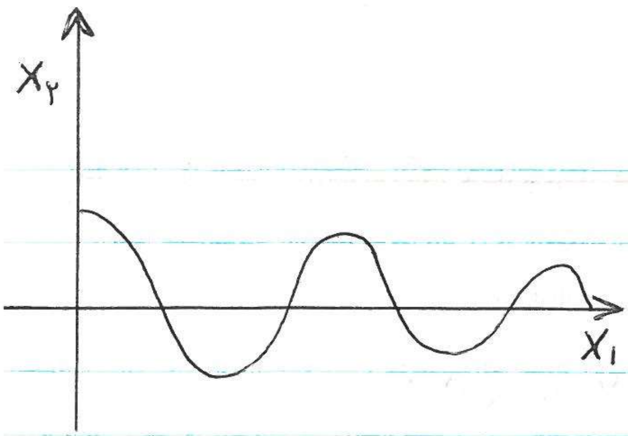
← جواب خصوصی: به جوابهایی گفته می شود که با شرایط مرزی و شرایط اولیه آنها تعیین گردد.

← جواب غیرعادی: جوابی است که منحنی نمایش آن بر کلیه منحنی های مربوط جواب مماس باشد.

درمعادلات غیرخطی ما اول به سراغ Single nonliniear Equation یعنی یک معادله یک مجهول می رویم. برای این کار می بایست ببینیم که به ازاء چه مقادیری از $x$ مقدار $f(x)$ ما صفر می گردد. به عنوان مثال در معادله درجه دوم زیر مقادیر $x$ که $f(x)$ را صفر می کند به صورت زیر محاسبه می گردد: $f(x)=0$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\text{برای بدست آوردن ریشه}} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{-b}$$

گاهی اوقات معادلات ما آنقدر طولانی می گردد که با رابطه فوق نمی توان آن را محاسبه کرد. به عنوان مثال در




شکل روبرو نموداری را مشاهده می‌کنید:
نمودار روبرو بیش از یک جواب دارد و می‌بایست هرکدام از جوابها را مورد بررسی قرار دهیم و کاربرد آنها را مشاهده کنیم. اما گاهی $f(x)=0$ ما پیچیده‌تر می‌شود که برای این کار از روش بسته استفاده می‌کنند. در آن صورت یک جدول تشکیل می‌دهند که مقادیر $x$ را در آن حدس می‌زنند و براساس آن مقادیر $f(x)$ را بدست می‌آورند:

| $x$ | ۰/۵ | ۰/۷ | ۰/۳ | ۰/۳۵ | ۰/۳۴ | ۰/۳۴۵ | ۰/۳۴۴۸ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ۳۵۳ | ۳۷۴۳ | -۱۲۴ | +۲۵ | -۱۶ | ۰/۰۲۵ | -۰/۰۰۰۰۰۰۳ (جواب‌ها) |

در جدول بالا از روش تکرار استفاده می‌کنیم که برای این کار بازه‌ای را در نظر می‌گیریم و تغییرات آن را محاسبه می‌کنیم. در این محاسبات رابطه خود را خطی در نظر می‌گیریم و بازه بین ۲ حدس اول خود را نصف می‌کنیم تا به جواب برسیم. به این روش نصف کردن یا Bisection گفته می‌شود.

**تذکر مهم** ← روش نصف کردن Bisection تنها برای زمانی کاربرد دارد که نمودار ما تنها یک جواب داشته باشد. اگر در بالای صفحه گفته شده که روش حدس و خطا برای نمودارهای چند جوابه است تنها حالت کلی داشته که در ادامه بیشتر توضیح داده خواهد شد.

برای روش نصف کردن Bisection ما روابط زیر را در اختیار داریم که این روابط بر روی نمودار نمایش داده شده است:

① $X_L \cdot f(X_L) < 0$

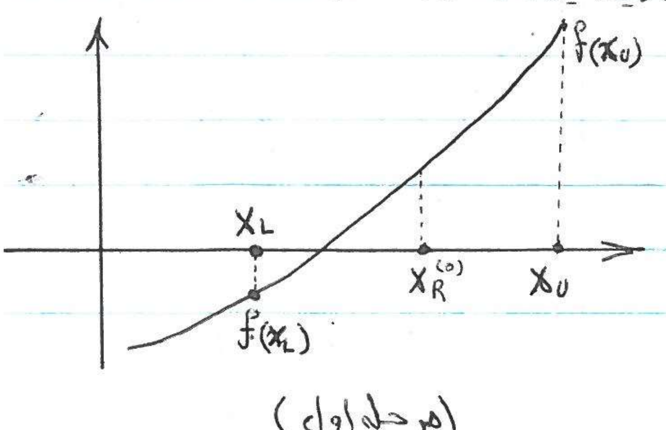
② $X_R \cdot f(X_U) > 0$

③ $f(x_L) \cdot f(x_R) < 0 \longrightarrow x_R > 0 \Rightarrow X_U = X_R$

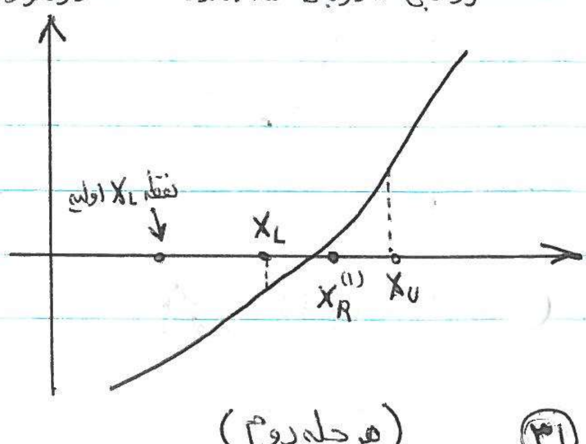
$f(x_L) \cdot f(x_R) > 0 \longrightarrow x_R < 0 \Rightarrow X_L = X_R$

$f(x_L) \cdot f(x_R) = 0 \Rightarrow$ به جواب رسیده‌ایم

روابطی که در بالا گفته شده است، در نمودارهای زیر نمایش داده شده است:




(مرحله اول)




(مرحله دوم)

همانطور که در صفحه قبل مشاهده کردید مرحله به مرحله نقطه $X_R$ به جواب ما نزدیکتر می گردد و این روش نصف کردن تا آنجا ادامه می یابد که $X_R$ به نزدیکترین فاصله ممکن با جواب برسد. بنابراین اگر بخواهیم بدانیم که خطا چقدر است می بایست از روش relative error برای سنجش خطا استفاده کنیم:

$$\text{relative error}: \left|\frac{X_R^{New}-X_R^{old}}{X_R^{New}}\right| \times 100\% < 1\times 10^{-5}$$

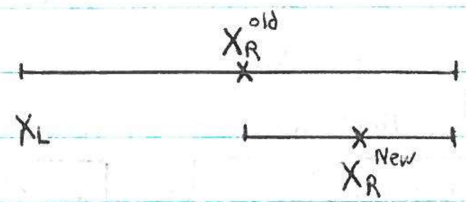
ما در بررسی های خود سیستماتیک بازه ها را تعقیب می کنیم و می خواهیم عبارت را برای آن بدست بیاوریم،

اگر $X_R^{New}$ برابر باشد با:

$$X_R^{New}=\frac{X_L+X_u}{2} \quad (\text{مرحله اول})$$

$$X_R^{New}-X_R^{old}=\frac{X_u-X_L}{2}$$

فرض کنید برای $X_l$ و $X_u$ به صورت زیر داشته باشیم:



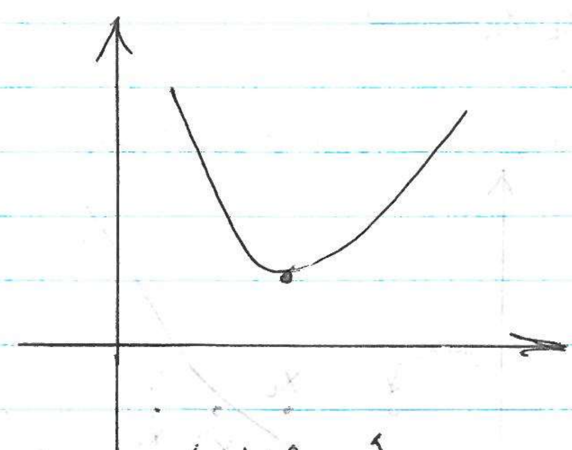

$$X_R^{New}=\frac{X_U+X_L}{2}$$

$$X_R^{New}-X_R^{old}=\frac{X_U-X_L}{2}$$

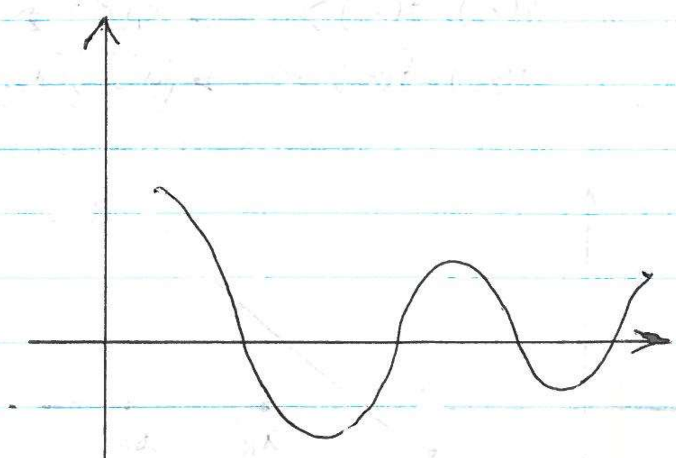
عبارتی که ما برای خطا داریم به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\left|\frac{X_R^{New}-X_R^{old}}{X_R^{New}}\right| \times 100 < 1\times 10^{-5} \Longrightarrow \left|\frac{X_U-X_L}{X_U+X_L}\right| \times 100 < 1\times 10^{-5}$$

اما گاهی اوقات پیش می آید که رابطه ما به گونه ای می شود که ریشه نداریم و یا چند ریشه داریم که در این مواقع روشهای بسته مناسب نیستند چون این روشها برای زمانی کاربرد دارد که فقط یک ریشه داشته باشیم. شکل زیر نمودار مواردی است که از روش بسته (Close Methode) نمی توان استفاده کرد:



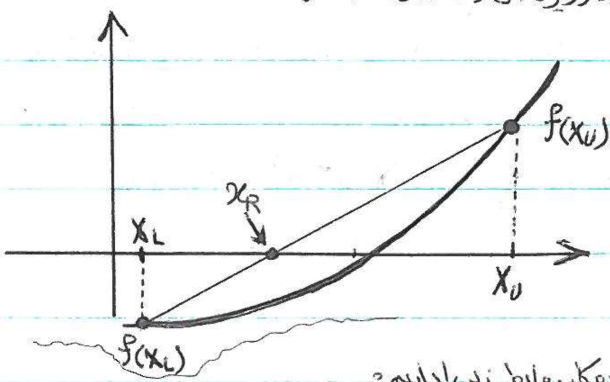
(ریشه نداریم)



(چند ریشه داریم)

## * روش میان یابی خطی :

در این روش ما دیگر نصف نمی کنیم بلکه درونیابی خطی انجام می دهیم. در مرحله اول یک $X_L$ تعیین می کنیم و به ازای آن مقدار $X_L$ مثبت است. این مطلب در نمودار زیر نشان داده شده است :




در این روش ما به صورت خطی عمل می کنیم و برای این کار روابط زیر را داریم :

① $X_L \cdot f(X_L) < 0$

$X_U \cdot f(X_U) > 0$

② $X_R = X_U + \dfrac{f(x_0)(X_L - x_0)}{f(X) - f(x_0)}$

③ $f(X_L) \cdot f(X_R) < 0 \xrightarrow{x_R = x_U}$

$f(X_L) \cdot f(X_R) > 0 \xrightarrow{x_R = x_L}$

$f(X_L) \cdot f(X_R) = 0 \longrightarrow$ انجام شد

این روش زیاد کاربرد ندارد، چون ما می خواهیم به سراغ روشهایی با تعداد مجهولات زیاد برویم که این روشهای بسته کارایی ندارد، بنابراین به سراغ روشهای باز می رویم. روش باز یا Open Meth. شامل روشهایی است که ما به ۲ حدس اولیه نیازی نداریم و تنها با یک حدس اولیه کار خود را شروع می کنیم؛ $f(x)=0$ حدس اولیه

معمولاً محاسبات ما به ۳ روش زیر صورت می گیرد :

① گاوس - سایدل

② نیوتون - رافسون

③ نیوتون - رافسون False position

---

## * نیوتون - رافسون :

ما یک رابطه تکرار بدست می آوریم که در آن داریم :

$f(x)=0 \longrightarrow x=g(x)$

در روش نیوتون - رافسون داریم: $X^{New}=x^{old}-\frac{f(x^{old})}{f'(x^{old})}=g(x)$

ولی به روشهای دیگری می توان $g(x)$ را بدست آورد که داریم:

$$f(x)=ax^2+bx+c=0 \qquad x=g(x)$$

در رابطه نیوتون - رافسون می بایست به ۲ طرف رابطه یک مقدار $x$ ضرب کنیم. این مقدار کاملاً اختیاری است. به عنوان مثال در معادله زیر داریم:

$$f(x)=3x^2-5x+7=0$$

$$\searrow x\left(f(x)=3x^2-5x+7=0\right) \to x=g(x) \to x=\frac{3x^2+7}{5}$$

ما می توانیم طرفین را به هر عددی که مایل هستیم، ضرب کنیم.

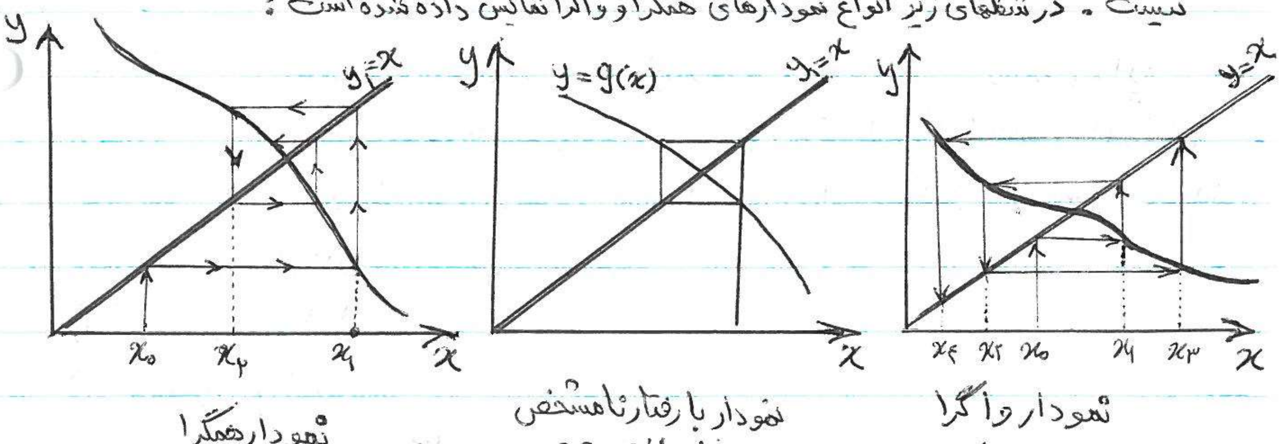
گاهی اوقات $g(x)$ ها از فرمولهای مسئله بدست می آید و محاسبه آن کار خاصی ندارد: وقتی $g(x)$ بدست آمد به عنوان تکرار می توان از آن استفاده کرد که بنویسیم:

$$x=g(x) \qquad x^{k+1}=g(x^k)$$

$X^{k=0}=X^{(0)}$ حدس اولیه

$X^{(1)}=g(x_0)$

وقتی حدس زدیم و $x$ جدید حاصل شده می بایست برای مقادیر $x$ ها چک کرد که $|x^{k+1}-x^k|<Tol$ است یا نه. اگر رابطه برقرار نباشد باید حدس را در مرحله تکرار (۱) و (۲) و ... تکرار کرد تا به حد کمتر از Tolerance برسیم. امکان دارد این عملیات واگرا شود و هیچ تنظیمی برای همگرایی آن نیست. در شکلهای زیر انواع نمودارهای همگرا و واگرا نمایش داده شده است:




نمودار همگرا Converges — نمودار با رفتار نامشخص OSCillating — نمودار واگرا diverges

ما همیشه می دانیم که روابط ما از ۲ حالت خارج نیست یا همگرا است و یا واگرا که اگر نمودار ما واگرا شد می بایست از Relaxation استفاده بنماییم.

مثال ⟸ معادله روبرو را در اختیار داریم : $f(x)=x^2-5=0$

در این معادله مقادیر زیر را برای $g(x)$ محاسبه می کنیم که با توجه به این مقادیر وضعیت آن به صورتهای زیر در خواهد آمد :

(a) $X=g(x)=5+x-x^2$ همگرا

(b) $X=g(x)=\frac{5}{x}$ نامشخص

(c) $X=g(x)=1+x-\frac{x^2}{5}$ بعضی از مواقع همگرا و بعضی مواقع غیرهمگرا

(d) $X=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)=g(x)$ واگرا

موارد فوق از بین بینهایت مورد مختلف انتخاب شده است .

---

* روش نیوتون - رافسون False-position :

برای حل معادلات غیرخطی با روشهای حدس و خطا ، تا پیش از این روشهای بسته (close) و باز (Open) گفته شده به طور کلی عبارتند از :

1. گاوس - سایدل : $x=g(x) \longrightarrow x^{(k+1)}=g(x^{k+1})$

2. نیوتون - رافسون : $x^{k+1}=x^k-\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$

3. نیوتون - رافسون False-position : $x^{k+1}=x^k-\frac{f(x^k)}{\left(\frac{f(x^k)-f(x^{k-1})}{x^k-x^{k-1}}\right)}$

در هنگام استفاده از False-position می بایست مقادیر زیر تعیین گردد :

$x^{k-1} \quad x^k \quad x^{k+1}$

$f(x^{k-1}) \quad f(x^k) \quad f(x^{k+1})$

در روش False-position با کمک روش عددی محاسبات صورت می گیرد . در حالی که در روش نیوتون - رافسون می بایست از روش تحلیلی استفاده کنیم . روش نیوتون رافسون ، روش درجه دوم است . و خطا ما متناسب با توان دوم خطا مرحله های قبلی خود است . روش نیوتون

رافسون درجه دوم نیست. تعداد محاسبات در روش False-position کمتر می گردد. مثال زیر را در نظر بگیرید. با کمک مثال زیر ۳ روش را با هم مقایسه می کنیم. اگر:

$$f(x)=x^3+x^2-3x+3$$

Tolerance = 0/000001

برای روش $X=g(x)$ می بایست رابطه تکرار را بدست آوریم:

**گائوس سایدل**

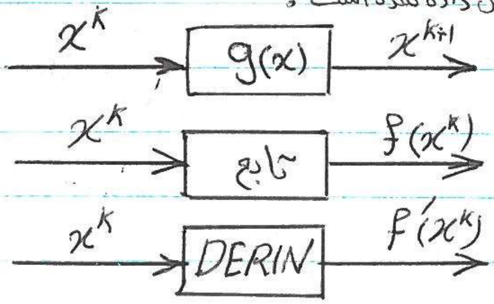
$$X=g(x)=x^3-x^2-3x+3 \longrightarrow$$ به طرفین معادله $2x^3$ اضافه کرده ایم

$$X=g(x)=\frac{x^3-x^2+3x+3}{2x^2}$$

**نیوتون رافسون**

$$x^{k+1}=x^k-\frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \longrightarrow x^{k+1}=x^k-\frac{x_k^3+x_k^2-3x_k-3}{3x_k^2+2x_k-3}$$

نحوه عملکرد نیوتون رافسون به طور شماتیک در شکل زیر نمایش داده شده است:

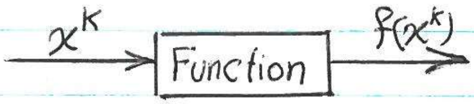



همانطوری که ملاحظه می کنید تابع $g(x)$ مقدار $x^k$ را به $x^{k+1}$ تبدیل می نماید. برای اینکار با روش تحلیلی ابتدا $x^k$ به $f(x^k)$ و همچنین $x^k$ به $f'(x^k)$ تبدیل می گردد. با $f(x^k)$ و $f'(x^k)$ که حاصل شد ما $x^{k+1}$ را محاسبه می نمائیم.

**نیوتون - رافسون False-position**

$$x^{k+1}=x^k-\frac{f(x^k)}{\left(\frac{f(x^k)-f(x^{k-1})}{x^k-x^{k-1}}\right)}$$

در روش False-position ما دیگر مجبور نیستیم از روش تحلیلی استفاده کنیم و $g(x)$ تعیین کنیم و ... در اینجا فقط $f(x^{k+1})$ را مطابق شکل روبرو حساب می کنیم:




بدین ترتیب که $x^k$ وارد تابع و $f(x^k)$ بدست می آید و از آن برای محاسبه $x^{k+1}$ استفاده می کنیم. $x^{k-1}$ را هم مقدارش توسط خودما تعیین می گردد.

اگر روشها را با همدیگر مقایسه کنیم، در روش اول با یک حدس اولیه (۱) شروع می کنیم. و برای رسیدن به خواسته مساله می بایست ۲۷ مرحله عملیات تکرار انجام دهیم. اگر از روش نیوتون - رافسون استفاده کنیم خطاها متناسب با مرتبه ۲ خطا است و می بایست هم از $f(x^k)$ و هم $f(x^{k+1})$ و هم $f'(x)$ استفاده کنیم. و با انجام عملیات با ۸ مرحله به جواب می رسیم. اگر حدس $x^0=1$ و $x^1=1/1$ بگیریم تعداد مراحل تکرار ما یازده مرحله

حدس اولیه

گاوس-ساید (1) $x^0=1$

نیوتن رافسون (۲) $x^0=1$

alse-positi (۱٫۶/۸) $\begin{cases} x^0=1 \\ x^1=1.1 \end{cases}$

می گردد. با توجه به این مطالب در روبرو داریم:

در روش گاوس - سایدل می بایست تعداد مراحل زیادی را برای رسیدن به جواب انجام بدهیم. در روش نیوتن - رافسون می بایست ۳-تا متغیر را تعیین کنیم. ما هم اینک قصد داریم تا روش سوم را مورد بررسی قرار دهیم. ما تا حالا $f(x)=0$ داشتیم ولی اکنون $\bar{f}(\bar{x})=0$ داریم:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$$

این دستگاه معادلات یا خطی است و یا غیر خطی می باشد. در روش گاوس -سایدل می بایست $n$-تا حدس اولیه را بدست بیاوریم و بعد رابطه تکرار آن را تعریف کنیم:

$$x_1=g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x_2=g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n=g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

اگر معادلات خطی باشد در این معادلات $x_i$ ظاهر نمی گردد. به طور کلی این روش غیرخطی است. برای آن رابطه تکرار بدست می آوریم و کار خود را آغاز می کنیم:

(1) Initial guess

(۲)

$$\begin{cases} x_1^k = g_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ x_1^{k+1} = (1-W)\,x_1^k + W\,x_1^{k+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2^k = g_2(x_1^{k+1}, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ x_2^{k+1} = (1-W)\,x_2^k + W\,x_2^{k+1} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} x_i^k = g_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k) \\ x_i^{k+1} = (1-W)\,x_i^k + W\,x_i^{k+1} \end{cases}$$

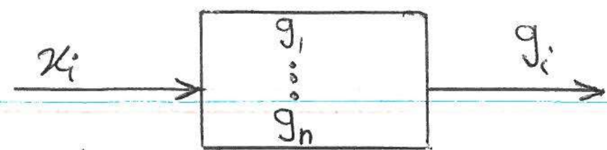
$$\vdots$$

$$\begin{cases} x_n^{k+1} = g(x_1^{k+1}, \dots, x_{n-1}^{k+1}, x_n^k) \\ x_n^{k+1} = (1-W)\,x_n^k + W\,x_n^{k+1} \end{cases}$$

نه

(۳) $|x_i^{k+1}-x_i^k| < Tol$ for all $i=1, \dots, n$ $\xrightarrow{\text{بله}}$ انجام شد

اگر بتوانیم روابط تکراری را به گونه ای بدست بیاوریم که $x_i$ ما ظاهر نشود به طوری که $g_1$ دیگر $x_1$ و $g_2$، $x_2$ یا برای $g_i$ های دیگر مستقل از $x_i$ باشد، از لحاظ همگرایی بهتر می شود. از این رو اگر قصد نوشتن برنامه داشته باشیم




بهتر است به صورت زیر عمل کنیم :

در اینجا کاربر ما مسئولیت دارد و همانا معرفی کردن $g_i$ ها خواهد بود. گاهی اوقات این روابط از فرمولاسیون مساله بدست می‌آید و معمولاً از ODE به PDE به معادلات جبری می‌رسیم. اگر غیرخطی باشد، خطی و اگر خطی باشد، خطی می‌گردد. با حلقه‌های تکرار می‌توان این روابط را حساب کرد ولی در لبه مرزها دیگر حلقه اعمال نمی‌گردد و شکل تکرار با روابط میانی تفاوت پیدا خواهد کرد.

برای رابطه نیوتون - رافسون وقتی $f(x)=0$ است رابطه تکرار به صورت زیر نوشته می‌گردد : $f(x)=0$

$$x^{r+1}=x^r-\frac{f(x^r)}{f'(x^r)}$$

همانطور که در رابطه فوق نیز مشاهده می‌کنید، می‌بایست $f(x^r)$ و $f'(x^r)$ را حساب کنیم :

$$f'(x^r)\cdot\Delta x^r=-f(x^r)\longleftarrow\boxed{\Delta x^r=x^{r+1}-x^r}$$

اگر بخواهیم می‌توانیم همین داستان را به دستگاهی از معادلات تعمیم بدهیم جایی که $x_1$ تا $x_n$ که با ماتریس ژاکوبی سروکار داریم به صورت $\frac{\partial}{\partial x_i}$ است :

$$J(x^r)\cdot\Delta\bar{x}^r=-\bar{f}(\bar{x}^r)$$

توجه

طبق تعریف ماتریس ژاکوبی به صورت زیر تعریف می‌گردد :

$$\bar{\bar{J}}(x^r)=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

با توجه به موارد بالا ماتریس ژاکوبی ما به صورت زیر در می‌آید :

$$A\,Z=b$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{\bar{x}^r}\begin{bmatrix}X_1^{r+1}-X_1^r\\ X_2^{r+1}-X_2^r\\ \vdots\\ X_n^{r+1}-X_n^r\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}f_1(x_1^r,x_2^r,\ldots,x_n^r)\\ f_2(x_1^r,x_2^r,\ldots,x_n^r)\\ \vdots\\ f_n(x_1^r,x_2^r,\ldots,x_n^r)\end{bmatrix}$$

مقادیر ماتریس ما به ازاء مقادیر قبلی محاسبه می‌گردد. با روش‌های ماتریسی $A$ را بدست می‌آوریم و آن را در ضرب می‌کنیم تا به $b$ برسیم. به طور کلی ما داریم :

$$Z_i=X_i^{r+1}-X_i^r$$

$$b_i=(-1)\,f_i(x_1^r,x_2^r,\ldots,x_n^r)$$

$$A_{ij}=\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\bar{x}^r}$$

* مراحل عملیات ما برای نوشتن برنامه به صورت زیر است:

① نیاز به حدس اولیه داریم.

② نیاز به روشی داریم که برای ما تک تک مقادیر را محاسبه کند تا $A_{ij}$ ها بدست بیاید.

③ بعد از $A_{ij}$ ها $b$ را بدست می آوریم

④ از روی $b_i$ مقدارهای $Z_i$ را حساب می کنیم

⑤ $Z_i$ بدست آمده را برای محاسبه $x_i^{r+1}$ استفاده می کنیم

⑥ $x_i^{r+1}$ را با Tolerance مقایسه می کنیم.

$$A.Z=b$$
$$Z_i=X_i^{r+1}-X_i^r$$
$$b_i=(-1)f_i(x_1^r,x_2^r,\dots,x_n^r)$$
$$A_{ij}=\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\bar{x}^r}$$

با توجه به مراحلی که در بالا گفته شد، الگوریتم این مساله به صورت زیر است:

① Initial guess $X_i^{r=0}$ $\quad i=1,2,\dots,n$

② evalation $n^2$ partial clenition

$$A_{ij}=\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\bar{x}=\bar{x}^r}$$

③ $b_i=-f_i(x_1^r,x_2^r,\dots,x_n^r)$

$$b_1=-f_1(x_1^r,x_2^r,\dots,x_n^r)$$
$$\vdots$$
$$b_n=-f_n(x_1^r,x_2^r,\dots,x_n^r)$$

در خط ④ برنامه داریم:

① روش ماتریسی حذفی گاوس GE

② روش ماتریسی گاوس-سایدل GS

③ روش LU DeCompo. LU

④ روش ژاکوبی J

④ Solve $AZ=b$ using GE, GS, LU, GS, J for linear Equation

⑤ $X_i^{r+1}=Z_i+X_i^r$

⑥ $\left|\frac{X_i^{r+1}-X_i^r}{X_i^{r+1}}\right|\times 100\% < Tol$ for all $i$ $\xrightarrow{\text{بله}}$ انجام شد

نه

$X_i^r=X_i^{r+1}$ $\quad i=1,\dots,n$

با تغییراتی جزئی می توان به روابط نیوتون رافسون False-position را توضیح داد. در مثال زیر داریم:

$$f_1(x_1,x_2)=X_1^2+X_2^2+e^{X_1}+7{,}7183X_1=0$$

$$f_2(x_1,x_2)=X_2+e^{X_2}+X_1^3-10{,}389=0$$

مثال بالا را که داریم با ۳ روشی که داریم می خواهیم حل کنیم: (گاوس-سایدل، نیوتون رافسون، False position)

← روش گاوس-سایدل: این روش را با حدس و خطا حساب می کنیم.

← روش نیوتون-رافسون: می بایست از طریق $f(x_1)$ و $f'(x_1)$ بدست بیاوریم برای این کار به صورت زیر عمل می کنیم:

GS

گاوس سایدل

$$X_1=g_1(x_1,x_2)=\frac{x_1^2+x_2^2+e^{x_1}}{7{,}7183}$$

$$X_2=g_2(x_1,x_2)=10{,}389-e^{x_1}-x_1^3$$

حال برای روش نیوتون ـ رافسون اگر می خواهیم عمل کنیم، مطابق شکل زیر می بایست عمل کنیم:

معادلات خطی $\xrightarrow{x_i^r} \boxed{\text{function}} \longrightarrow f_i$

$f_1$ و $f_2$ را قرار می دهیم $\xrightarrow{x_i^r} \boxed{\text{Deriv}} \longrightarrow A_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{\bar{x}_i^r}$

$\xrightarrow[b_i]{A_{ij}} \boxed{\text{LU}} \longrightarrow Z_i$ به صورت تحلیلی بدست می آید

با توجه به شکلهایی که در بالا گفته شد و طبق دستورهای بالا داریم:

$$A_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2x_1 + e^{x_1} - 2.7183 \qquad A_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2x_2$$

$$A_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 3x_1^2 \qquad A_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1 + e^{x_2}$$

تنها پیچیدگی کارها در مرحلهٔ DERIV است. می بایست در این مرحله فرمولها را بدهیم تا محاسبات انجام گیرد. کاربر همانطور که قبلاً $\frac{\partial f}{\partial x}$ یا $f$ را تعیین زدند باز هم از تعریف $\delta$ استفاده می کنند و آن را حساب می کنند. روش نیوتون ـ رافسون False position مثل همان روش نیوتون رافسون است با این تفاوت که در $A_{ij}$ به جای محاسبه تحلیلی با ماتریس ژاکوبین با کمک evalute Partiar Using Per turbation استفاده می کنیم و داریم:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x}=\bar{x}_r} \approx \frac{f_1(x_1^r+\delta, x_2^r, x_3^r, \dots, x_n^r) - f_1(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)}{(x_1^r+\delta) - x_1^r} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\text{Partiation}: \delta \\ \text{Variable}\ 1\times10^{-5}\end{array}}$$

بنابراین می بایست یکسری عملیات انجام دهیم. رابطه بالا را به صورت زیر خواهیم نوشت:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{\bar{x}=x^r} \approx \frac{f_1(X_1^r, X_2^r+\delta, X_3^r, \dots, X_n^r) - f_1(X_1^r, \dots, X_n^r)}{\delta}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{\bar{x}=x^r} \approx \frac{f_i(x_1^r, \dots, x_{j-1}^r, x_j^r+\delta, x_{j+1}^r, \dots, x_n^r) - f_i(x_1^r, \dots, x_n^r)}{\delta}$$

در محاسبات بالا $n^2$ ضریب می بایست بدست بیاید و $n^2$ عملیات انجام بدهیم، بدین ترتیب که یکمرتبه $f_1$ را در $x_1$ و $x_2$ و ... و $x_n$ انجام می دهیم. بعد از آن $f_2$ را در $x$ها و بعد تا $f_n$ معادله در $x_1$ و $x_2$ و ... و $x_n$ انجام می دهیم. $n^2$ محاسبه که صورت بگیرد، جمله اول صورت کسرها ایجاد می شود و جمله دوم از روی $x^r$ ها بدست می آید. این محاسبات هم صورت مسأله را می دهد و هم برای بدست آوردن سمت راست موثر است.

**نکته**

یکبار که $x_1$ را محاسبه کردیم می بایست برای $x_2$ مقادیر را از نو انجام بدهیم و بعد برای $x$ های بعدی این عملیات را انجام دهیم. حلقهٔ داخلی که ابتدا برای $x_2$ و بعد تا $x_n$ صورت می گیرد. از آن به بعد دستورالعمل مثل روش نیوتون رافسون است.

① initial guess

② evalation $n^2$ partial clenition

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}=x^r} \approx \frac{f_1(x_1^r+\delta, x_2^r, \dots, x_n^r) - f_1(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)}{(x_1^r+\delta) - x_1^r}$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}=x^r} \approx \frac{f_1(x_1^r, x_2^r+\delta, x_3^r, \dots, x_n^r) - f_1(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)}{\delta}$$

$$\vdots$$

$$\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\bar{x}=x^r} \approx \frac{f_1(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{j-1}^r, x_j^r+\delta, x_{j+1}^r, \dots, x_n^r) - f_i(x_1^r, \dots, x_n^r)}{\delta}$$

③ $b_i = -f_i(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$

$$b_1 = -f_1(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$$

$$\vdots$$

$$b_n = -f_n(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$$

④ Solve $AZ=b$

⑤ $x_i^{r+1} = Z_i + x_i^r$

⑥ $\left|\dfrac{x_i^{r+1} - x_i^r}{x_i^{r+1}}\right| \times 100 < Tol$ for all $i \xrightarrow{\text{بله}}$ انجام شد

نه $x_i^r = x_i^{r+1} \quad i=1,\dots,n$

در حدس هامی بانیست شرایط مساله را درک کنیم. به عنوان مثال:

$$f_1(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2 + e^{X_1} - 7.7183\, X_1 = 0$$

$$f_2(X_1, X_2) = X_2 + e^{X_2} + x_1^3 - 10.389 = 0$$

مطابق روش گاوس - سایدل داریم:

$$\begin{cases} X_1^{k+1} = g_1(x_1^k, x_2^k) = \dfrac{\left({x_1^{k}}^{2} + {x_2^{k}}^{2} + e^{x_1^k}\right)}{7.7183} \\ \text{Relaxation } X_1 \end{cases}$$

$X_1 = 0.5$

$X_2 = 0.5$

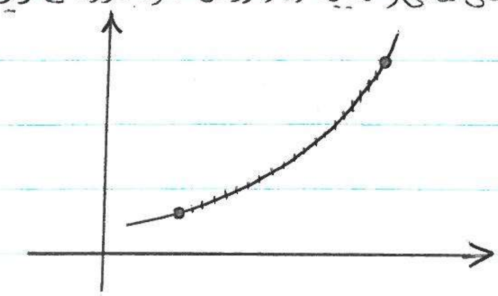
$$\begin{cases} X_2 = g_2(x_1^k, x_2^k) = 10.389 - e^{x_2} - x_1^3 \\ \text{Relaxation } X_2 \end{cases}$$

درمثالهای بالا با Relaxation ($W=۰/۳$) شروع به همگرایی می کند. با ($W=۰/۲$) همگرا می شود و در ۴۸ مرحله همگرا می شود. اگر محاسباتمان را با نیوتون - رافسون انجام دهیم با حدس اولیه (۰/۵) و حدس (۰/۷) نیز.

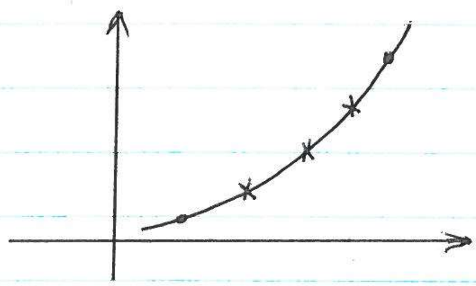
جواب دیگری نرسیم. در هر صورت با Initial guess برابر ۰/۵ در ۷ مرحله به جواب می رسیم.

در روش نیوتون رافسون False position به مانند نیوتون-رافسون معمولی است. با این تفاوت که به جای ژاکوبین روش عددی استفاده می کنیم. در این روش با ۸ مرحله به جواب می رسیم.

در این مسائل برای حدس اولیه می توان بر روی منحنی نقاطی را تعبیه کرد و روش کار به صورتهای زیر است:



(۱) تعداد نقاط بیشماری را تعیین می کنیم. پس از آن با کمک روشهای ماتریسی مقادیر $A_{ij}$ را حساب می کنیم و برحسب آن عملیات مربوط به محاسبه جواب را انجام می دهیم.



(۲) چند نقطه بر روی منحنی مشخص می کنیم با میان یابی منحنی مربوطه را رسم می کنیم و برحسب آن تعداد معادلات را بدست می آوریم و برحسب آن عملیات مربوط به محاسبه جواب را انجام بدهیم.

---

* برنامه محاسبات نیوتون رافسون False-position:

اساس روش این به صورت روابط زیر است:

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\bar{x}^r} = \frac{f_i(x_1^r, \ldots, x_{j-1}^r, x_j^r+\delta, x_{j+1}^r, \ldots, x_n^r) - f_i(x_1^r, \ldots, x_n^r)}{\delta}$$

$$Az = b$$

$$b_i = f_i(x_1^r, \ldots, x_n^r) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

در داخل مرحله $f_1$ الی $f_n$ را انجام می دهیم. به عبارت دیگر ما می بایست $n+2$ عملیات انجام بدهیم پس از آن مبنا کار خودمان را روش LU یا دیگر دستگاه ها قرار می دهیم.

در صفحه آینده ما برنامه کامپیوتری روش نیوتون رافسون False-position را بیان کرده ایم:

$X_{OLD_i}$ = initial guess $(r=0)$ ← اگر ما در مرحله قبلی $X_{OLD_i}$ داشته باشیم

$X_i = X_{OLD_i}$

حلقه اول

$i = 1, \dots, N$

$XD_i = X_i + \delta$ ← برای حلقه $i = 1, 2, \dots, n$ به صورت روبرو می شود

Call Function $(X, F)$ ← Function را صدا می زنیم و در واقع $x$ را می دهیم و $F$ از آن خارج می گردد

حلقه دوم

$i = 1, \dots, n$

$b_i = -1 \times F_i$ ← این مقدار مربوط به قسمت زیر می باشد:

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{\bar{x}^r} = \frac{f_i(x_1^r, \dots, x_{j-1}^r, x_j^r + \delta, x_{j+1}^r, \dots, x_n^r) - f_i(x_1^r, \dots, x_n^r)}{\delta}$$

جمله $F_{R_i} = F_i$ جمله سمت راست می باشد.

$F_{R_i} = F_i$

$i = 1, \dots, n$

$X_i = XD_i$ ← برای $x_i$ از $x_D$ استفاده می کند، بقیه هنوز $x$ هستند

Call Function $(X_i, F_i)$

$X_i = X_{OLD_i}$

$j = 1, \dots, n$ ← برای حلقه دیگر $F$ های به دست آمده $F_1$ تا $F_n$ در $F_i$ ها هستند

$F_{D_{j,i}} = F_j$

$i = 1, \dots, n$

$j = 1, \dots, n$

$$A_{ij} = \frac{FD_{ij} - FR_i}{\delta}$$

با انجام کارهایی که در بالا گفته شد هم $b_i$ ها و هم $A_{ij}$ ها بدست می آید.

---

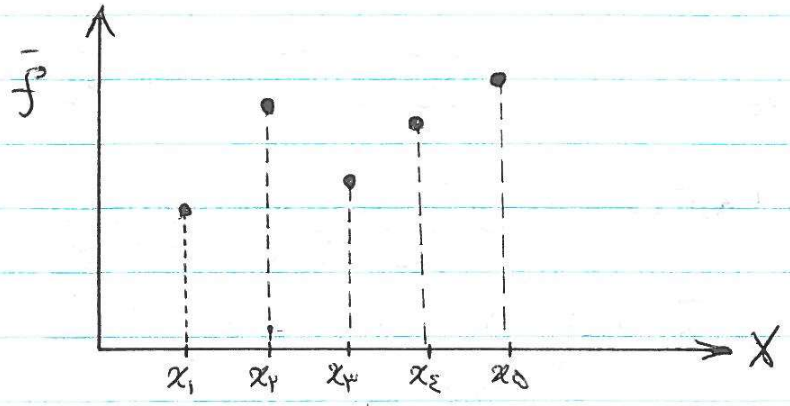
## درونیابی:

تا به اینجا ما با $f(x)=0$ و $\bar{f}(\bar{x})=0$ که اولی برای غیرخطی و دومی برای سیستمهای هم خطی و هم غیرخطی به کار می رفت برای اولی روشهای گاوس و نیوتن رافسون را بررسی کردیم. و حالا برای دومی داریم:

$\bar{f}(\bar{x}) = 0$
- → غیرخطی (نیوتن رافسون / False-position / نیوتن - رافسون / گاوس - سایدل)
- → خطی
  - → ماتریسی ← برای ماتریس ۳ قطری از روش توماس
  - → گاوس - سایدل

تا حالا از روشهایی که در بالا ذکر کرده ایم و در ادامه حل معادلات و در نهایت به دسته ای از معادلات $n$ معادله $n$ مجهول می رسیم که بعضی مواقع خطی و بعضی مواقع غیرخطی که این مسائل را در معادلات دیفرانسیل نشان می دهند.

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل اگر به ازای مقدارهای مختلف از $x$ ، مقدار $f$ را داشته باشیم :




این داده ها که در بالا مشاهده می کنید همگی هم فاصله هستند . مقادیر $x_1$ تا $x_n$ با داشتن نقاط بدست می آید که این نقاط بهترین رفتار $f$ را نشان می دهند که به دو دسته کلی Regrassion و Interpolation تقسیم می کنیم.

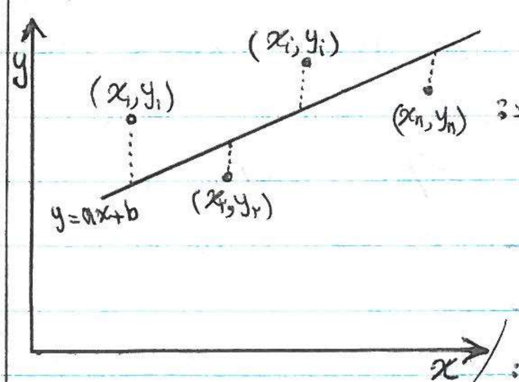
* Regrassion : برای نمودار بالا ما بهترین خط را از نقاط روی نمودار عبور می دهیم . به این کار Regrassion می گوییم که در دوره کارشناسی برای نوشتن گزارشهای آزمایشگاهی از آن استفاده می کردیم . اگر برای بیان خط مذکور از $x$ و $y$ استفاده کنیم داریم : $y = a_0 + a_1 x$

می خواهیم $a_0$ و $a_1$ را به گونه ای بدست بیاوریم که مربع خطاها حداقل شود . به جای اینکه از درجه یک استفاده کنیم اگر از درجه $n$ استفاده کنیم داریم : $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

## یادآوری

* روش کمترین مربعات :

هرگاه مجموعه ای از نقاط مانند $(x_1,y_1)$ ، $(x_2,y_2)$ ، ... ، $(x_n,y_n)$ داشته باشیم و بخواهیم تابعی مثل $y=f(x)$ را بدست بیاوریم که این مقادیر را به همدیگر مرتبط سازند از روش کمترین مربعات استفاده می کنیم : در روش کمترین مربعات از مینیمم سازی جذر میانگین مربع خطاها استفاده می شود و این هم موقعی حاصل می شود که مجموعه مربعات فواصل عمودی نقاط از منحنی میانگین حداقل شود .




فرض می کنیم منحنی میانگین خطی به معادله $y=ax+b$ می شود :

در این حالت باید عبارت زیر مینیمم گردد :

$$E=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

اگر عبارت بالا را یکبار نسبت به $a$ و یکبار نسبت به $b$ مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول زیر بدست می آید :

$$\begin{cases} bn + a\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i & \boxed{\text{خود معادله}} \\ b\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \boxed{x_i \times \text{معادله}} \end{cases}$$

ادامه یادآوری در صفحه بعد

ادامه یادآوری از صفحهٔ قبل

از حل دستگاه ۲ معادله ۲ مجهولی که در صفحهٔ قبل حل کردیم مقادیر $a$ و $b$ به صورت زیر می‌گردد:

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \quad / \quad b=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

در حالت کلی اگر بخواهیم از چند جمله ای درجه $n$ برای منحنی میانگین استفاده کنیم داریم:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

با انجام یکسری عملیات ریاضی به $n+1$ معادله نرمال زیر که می بایست به صورت همزمان حل گردد می رسیم:

$$\begin{aligned}
&a_0 n+a_1\sum x_i+a_2\sum x_i^2+\dots+a_n\sum x_i^n=\sum y_i\\
&a_0\sum x_i+a_1\sum x_i^2+a_2\sum x_i^3+\dots+a_n\sum x_i^{n+1}=\sum x_i y_i\\
&\vdots\\
&a_0\sum x_i^n+a_1\sum x_i^{n+1}+a_2\sum x_i^{n+2}+\dots+a_n\sum x_i^{2n}=\sum x_i^n y_i
\end{aligned}$$

ماتریس مربوط به دستگاه معادلات فوق به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^n\\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{n+1}\\ \vdots & & & & \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \dots & \sum x_i^{2n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum y_i\\\sum x_i y_i\\\vdots\\\sum x_i^n y_i\end{bmatrix}$$

که با حل این دستگاه معادلات ضرایب $a_0$ و $a_1$ و ... و $a_n$ بدست می آید:

مثال) در یک آزمایش نتایج زیر حساب شده است، مناسب ترین خط مستقیم $y=ax+b$ که با استفاده از روش حداقل مربعات بدست آورید:

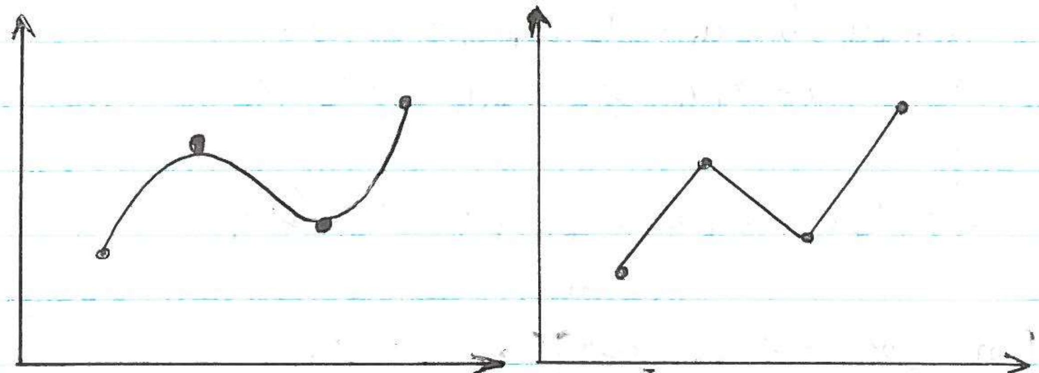
| $x$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | -۰/۹ | ۱,۲ | ۲,۸ | ۵,۲ | ۶,۸ |

حل) ابتدا مقادیر $x_i$ و $y_i$ و $x_i^2$ و $x_i y_i$ را مطابق جدول زیر بدست می آوریم:

| | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $x_i y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| | ۱ | -۰/۹ | ۱ | -۰/۹ |
| | ۲ | ۱,۲ | ۴ | ۲,۴ |
| | ۳ | ۲,۸ | ۹ | ۸,۴ |
| | ۴ | ۵,۲ | ۱۶ | ۲۰,۸ |
| | ۵ | ۶,۸ | ۲۵ | ۳۴ |
| مجموع | ۱۵ | ۱۵,۱ | ۵۵ | ۶۴,۷ |

$$\begin{cases} bn+a\sum x_i=\sum y_i\\ b\sum x_i+a\sum x_i^2=\sum x_i y_i\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}۵b+۱۵a=۱۵,۱\\ ۱۵b+۵۵a=۶۴,۷\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}a=۱,۹۴\\ b=-۲,۸\end{cases}$$

برای رسم بهترین درجه n ام برای بحث ما با روش polynomial Regrassion معمولاً برای داده های آزمایشگاهی به کار می رود. با در نظر گرفتن خطاها مقدار آنها را به حداقل می رسانیم. در مقایسه با Regrassion در این نقاط هیچگونه خطایی ندارد. آن موقع می بایست یک رفتاری را تخمین بزنیم و روی آن هیچ خطایی نداریم و اگر رفتار $f$ را با $\phi$ تخمین بزنیم $f$ و $\phi$ می بایست باهم برابر باشند که در این حالت از Linear Interpolation استفاده می کنیم بدین ترتیب که بین هر ۲ نقطه یک خط راست رسم می کنیم. اگر ۲ نقطه خط درجه یک و چنانچه $n$ نقطه داشته باشیم منحنی درجه $(n-1)$ رسم می کنیم. تفاوت Regrasion و Interpolation در زیر نشان داده شده:

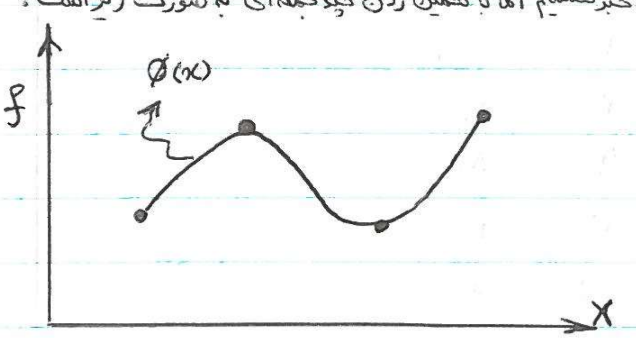


Regrassion Interpolation

کار دیگری که می توانیم انجام دهیم این است که بین هر ۳ نقطه منحنی درجه ۲ و الی تا نقطه $n+1$ که منحنی درجه $n$ رسم می کنیم. به این کار برای منحنی درجه دوم quadratic و منحنی درجه سوم cubic و ... دیگر روی نقاط هیچ خطایی نداریم. عملیات Regrassion بر روی ماشین حساب انجام می گردد ولی در عملیات Interpolation می بایست به صورت زیر عمل بکنیم:

$$f(x) = \phi(x) + \underbrace{R(x)}_{\text{خطا}} \qquad \underbrace{R(x)=0 \quad x=x_i \quad i=0,1,2,\dots,n}_{\text{بر روی نقاط}}$$

پیرامون $R(x)$ هیچ اطلاعی نداریم و از رفتار آن نیز بی خبر هستیم اما با تخمین زدن چندجمله ای به صورت زیر است:




نمودار روبرو نمودار $\phi(x)$ است که فقط نقاط را داریم و از روی آن می خواهیم تخمین بزنیم و از روی آن $f(x)$ را بدست بیاوریم که برای $f'(x)$ داریم:

$$f'(x) = \phi_n'(x) + R'(x)$$

در رابطه بالا $R'(x)$ ما دیگر صفر نیست. این خطاها به تعداد درجات منحنی و تعداد نقاط و اندازه فواصل بستگی دارد. انتخاب ما به طور کلی به صورتهای زیر است:

الف) از چندجمله ای درجه بالا حساب می کنیم که فرمول پیچیده ایجاد می نماید

ب) فاصله نقاط بر روی منحنی را تا حد ممکن کوچک در نظر می گیریم.