

**In the name of God, Most Gracious, Most Merciful**



**Sharif University of Technology**

**Department of Chemical and Petroleum Engineering**

# Fluid Mechanics 1

***Professor: Dr. Bastani***

## References:

### ➤ **Transport Phenomena :**

By Bird , Stewart , Light Foot (chapters 1,2,3)

### ➤ **Fluid mechanics**

By Streeter (chapter 2)

### ➤ **Unit Operation of Chemical Engineering:**

By McCabe & Smith (chapters 1 to 5 and 8)

# Chapter 1

## تعریف سیال:

سیال ماده ای است که تنش برشی را بدون توجه به مقدار آن، تحمل نکرده و با عاملی که تنش برشی را ایجاد کرده است به طور

$$\text{تنش برشی (تغییر شکل Shear stress)} = \frac{\text{نیروی مماسی}}{\text{سطح}}$$

# fluids

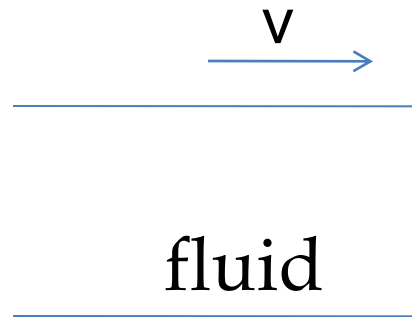
1. Compressible (تراکم پذیر)

Like gases

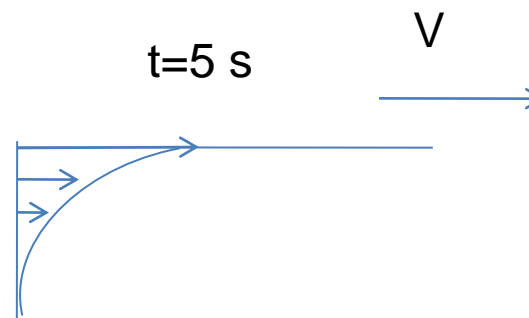
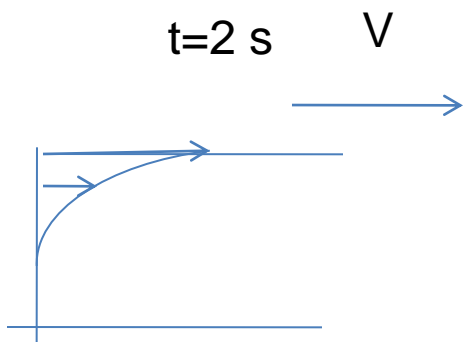
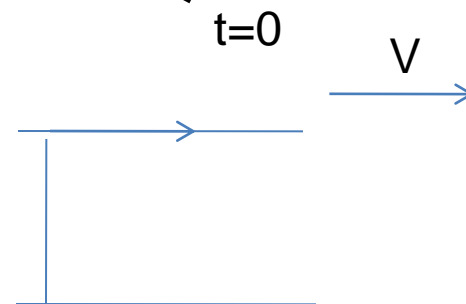
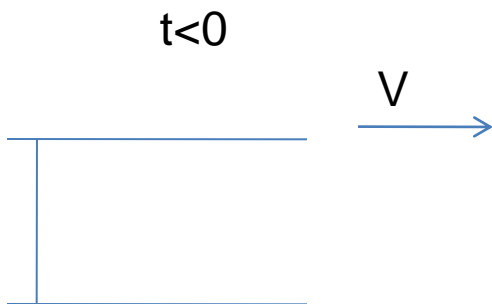
2. Incompressible (تراکم ناپذیر)

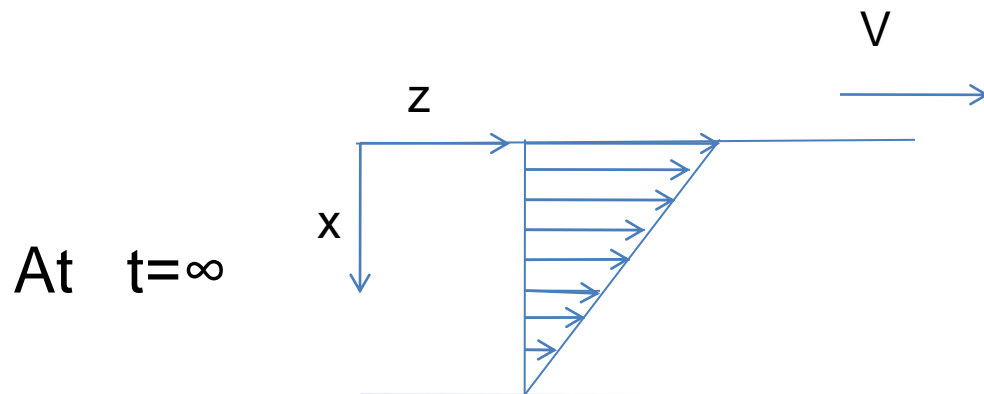
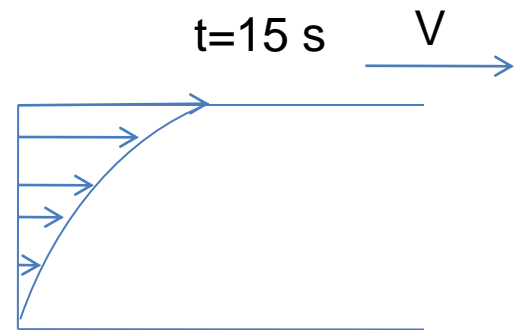
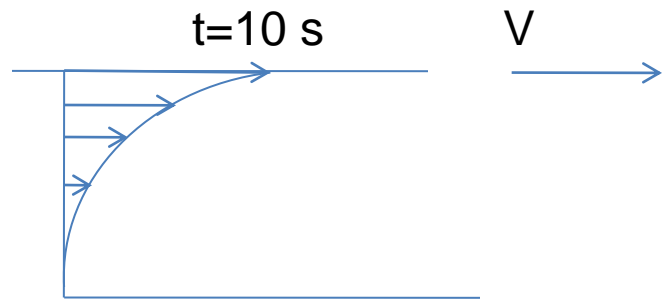
Like liquids

مثال: سیالی بین دو صفحه ی بی نهایت بزرگ موازی  
قرار دارد. اگر صفحه بالایی را بکشیم چه اتفاقی می  
افتد؟

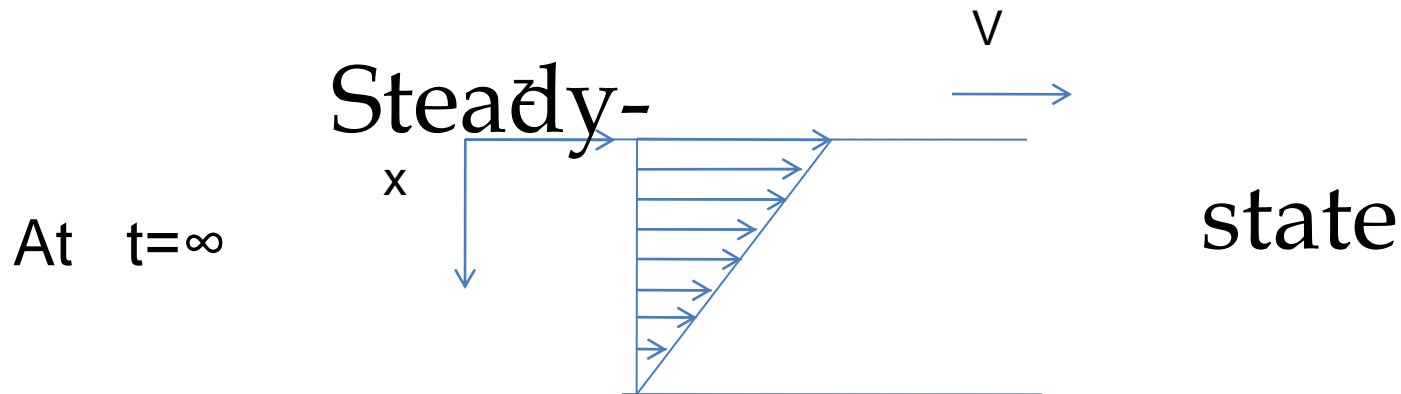


اگر تاریخچه ی تغییرات سرعت را در نظر بگیریم:





(یکنواخت-پایا)

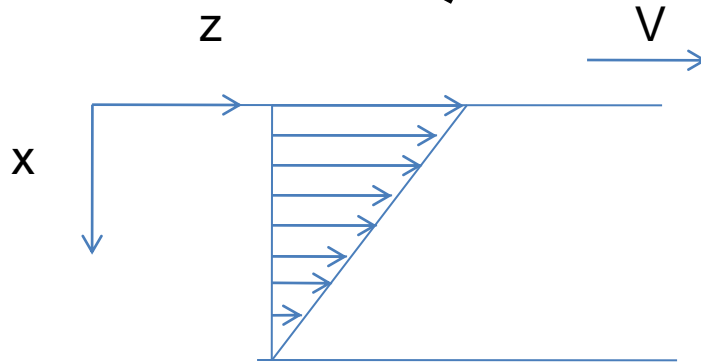


Steady-state

در یک فرایند شرایطی است که هیچ یک از متغیرهای سیستم در هیچ یک از نقاط با گذشت زمان تغییر نکند.



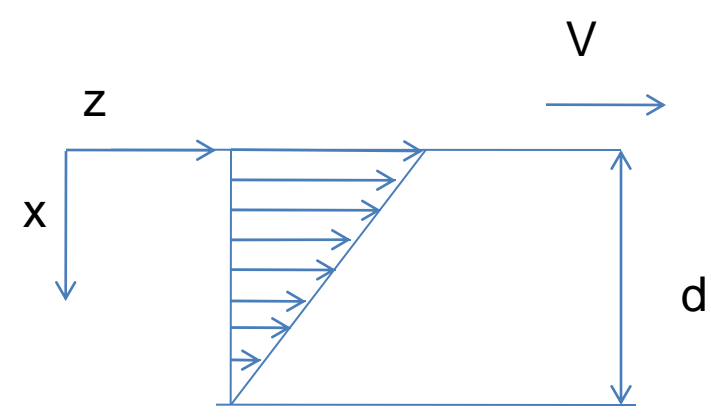
✓ حال در نظر داریم به نحوه یافتن توزیع سرعت به پردازیم. بدین منظور ابتدا بررسی نماییم که چه عواملی بر توزیع سرعت موثر است و هر عامل چگونه تأثیر میگذارد. برای این مطلب به بررسی نیروی افقی که پدید آورنده حرکت است پرداخته می شود



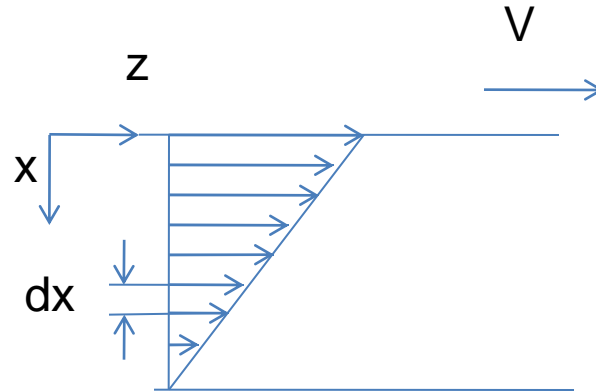
$V_z(x)$ : Velocity profile

$F_z$   
 (نیروی  
 برشی)

{  
 Type of fluid  
 V  
 d  
 A

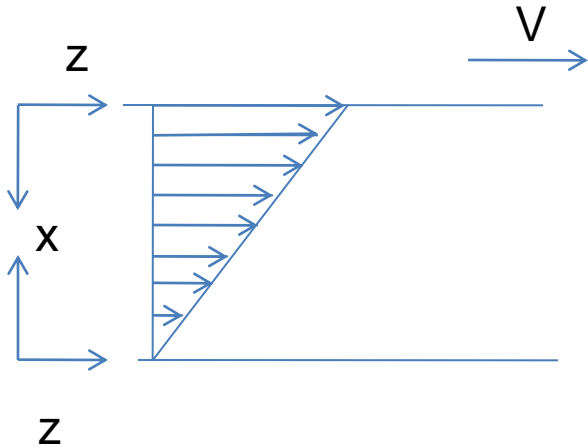


$$F_z \propto \frac{AV}{d} \Rightarrow \frac{F_z}{A} \propto \frac{V}{d} \Rightarrow \tau \propto \frac{V}{d}$$



$$\tau \propto \frac{V}{d} \implies \tau \propto \frac{V-0}{d-0} \implies \tau \propto \frac{dV_z}{dx} \implies \tau = \mu \frac{dV_z}{dx}$$

# قانون ویسکوزیته نیوتون:



viscosity

Velocity Gradient

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx}$$

Shear-Stress

تعریف ویسکوزیته:

ویسکوزیته یا ضریب چسبندگی مشخصه مقاومت سیال در مقابل حرکت است.

یعنی هر چه مقاومت سیال در مقابل حرکت بیشتر باشد ویسکوزیته اش بیشتر است و بالعکس.

برای یافتن بعد و واحدهای ویسکوزیته، بایستی طرفین رابطه قانون ویسکوزیته نیوتن همگن باشند.

اگر ویسکوزیته سیال ثابت باشد یعنی فقط تابع نوع سیال و شرایط

ترمودینامیکی باشد، سیال نیوتونی نامیده می شود. در غیر این صورت، سیال

غیر نیوتونی نامیده می شود.

*Fluids*

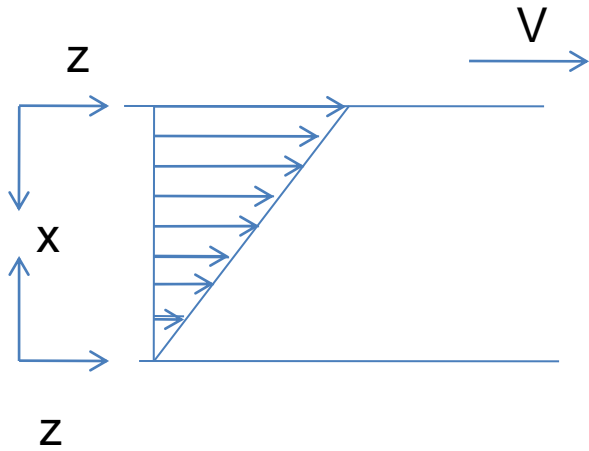
compressible

Incompressible

Newtonian

Non-Newtonian

# بعد ویسکوزیته:



$$\left[ \frac{ML}{T^2} \right] = [\mu] \left[ \frac{L}{T} \right]$$

$$[\mu] = \left[ \frac{M}{LT} \right]$$

# Viscosity (units)

$$SI: \frac{Kg}{m.s}$$

$$CGS: \frac{gr}{cm.s} \rightarrow \text{poise (واحد مرسوم ویسکوزیته)}$$

$$FPS: \frac{lb_m}{ft.s}$$

We also use: **centi-poise or cp**

$$1 \text{ cp} = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m.s}}$$

## Kinematic viscosity:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad [\nu] = \left[ \frac{L^2}{T} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} SI: \frac{m^2}{s} \\ CGS: \frac{cm^2}{s} \rightarrow \text{Stokes or centi-stokes} \\ FPS: \frac{ft^2}{s} \end{array} \right.$$



**Table 1.1-2** Viscosity of Water and Air at 1 atm Pressure

| Temperature<br>$T$ (°C) | Water (liq.) <sup>a</sup>    |   | Air <sup>b</sup>             |   |
|-------------------------|------------------------------|---|------------------------------|---|
|                         | Viscosity<br>$\mu$ (mPa · s) | Kinematic viscosity<br>$\nu$ (cm <sup>2</sup> /s) | Viscosity<br>$\mu$ (mPa · s) | Kinematic viscosity<br>$\nu$ (cm <sup>2</sup> /s) |
| 0                       | 1.787                        | 0.01787   | 0.01716                      | 0.1327  |
| 20                      | 1.0019                       | 0.010037  | 0.01813                      | 0.1505  |
| 40                      | 0.6530                       | 0.006581  | 0.01908                      | 0.1692  |
| 60                      | 0.4665                       | 0.004744  | 0.01999                      | 0.1886  |
| 80                      | 0.3548                       | 0.003651  | 0.02087                      | 0.2088  |
| 100                     | 0.2821                       | 0.002944  | 0.02173                      | 0.2298  |

<sup>a</sup> Calculated from the results of R. C. Hardy and R. L. Cottington, *J. Research Nat. Bur. Standards*, **42**, 573–578 (1949); and J. F. Swidells, J. R. Coe, Jr., and T. B. Godfrey, *J. Research Nat. Bur. Standards*, **48**, 1–31 (1952).

<sup>b</sup> Calculated from “Tables of Thermal Properties of Gases,” *National Bureau of Standards Circular* **464** (1955), Chapter 2.

$$\text{mPa}\cdot\text{s} = \text{cp}$$

**Table 1.1-3** Viscosities of Some Gases and Liquids at Atmospheric Pressure<sup>a</sup>

| Gases                            | Temperature<br><i>T</i> (°C) | Viscosity<br>$\mu$ (mPa · s) | Liquids   | Temperature<br><i>T</i> (°C) | Viscosity<br>$\mu$ (mPa · s) |
|----------------------------------|------------------------------|------------------------------|---|------------------------------|------------------------------|
| i-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub> | 23                           | 0.0076 <sup>c</sup>          | (C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub> O | 0                            | 0.283                        |
| SF <sub>6</sub>                  | 23                           | 0.0153                       |   | 25                           | 0.224                        |
| CH <sub>4</sub>                  | 20                           | 0.0109 <sup>b</sup>          | C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>                   | 20                           | 0.649                        |
| H <sub>2</sub> O                 | 100                          | 0.01211 <sup>d</sup>         | Br <sub>2</sub>                                 | 25                           | 0.744                        |
| CO <sub>2</sub>                  | 20                           | 0.0146 <sup>b</sup>          | Hg  | 20                           | 1.552                        |
| N <sub>2</sub>                   | 20                           | 0.0175 <sup>b</sup>          | C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH                | 0                            | 1.786                        |
| O <sub>2</sub>                   | 20                           | 0.0204                       |   | 25                           | 1.074                        |
| Hg                               | 380                          | 0.0654 <sup>d</sup>          |   | 50                           | 0.694                        |
|                                  |                              |                              | H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>                  | 25                           | 25.54                        |
|                                  |                              |                              | Glycerol  | 25                           | 934.                         |

<sup>a</sup> Values taken from N. A. Lange, *Handbook of Chemistry*, McGraw-Hill, New York, 15th edition (1999), Tables 5.16 and 5.18.

<sup>b</sup> H. L. Johnston and K. E. McKloskey, *J. Phys. Chem.*, **44**, 1038–1058 (1940).

<sup>c</sup> *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Press, Boca Raton, Fla. (1999).

<sup>d</sup> *Landolt-Börnstein Zahlenwerte und Funktionen*, Springer (1969).

**Table 1.1-4** Viscosities of Some Liquid Metals

| Metal | Temperature<br>$T$ (°C) | Viscosity<br>$\mu$ (mPa · s) |
|-------|-------------------------|------------------------------|
| Li    | 183.4                   | 0.5918                       |
|       | 216.0                   | 0.5406                       |
|       | 285.5                   | 0.4548                       |
| Na    | 103.7                   | 0.686                        |
|       | 250                     | 0.381                        |
|       | 700                     | 0.182                        |
| K     | 69.6                    | 0.515                        |
|       | 250                     | 0.258                        |
|       | 700                     | 0.136                        |
| Hg    | -20                     | 1.85                         |
|       | 20                      | 1.55                         |
|       | 100                     | 1.21                         |
|       | 200                     | 1.01                         |
| Pb    | 441                     | 2.116                        |
|       | 551                     | 1.700                        |
|       | 844                     | 1.185                        |

Data taken from *The Reactor Handbook*, Vol. 2, Atomic Energy Commission AECD-3646, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. (May 1955), pp. 258 et seq.

## ناپذیر:

با افزایش دما ویسکوزیته کاهش پیدا می کند.

با افزایش فشار تغییر نمی کند.

تأثیر درجه حرارت و فشار بر ویسکوزیته سیالات تراکم

## پذیر:

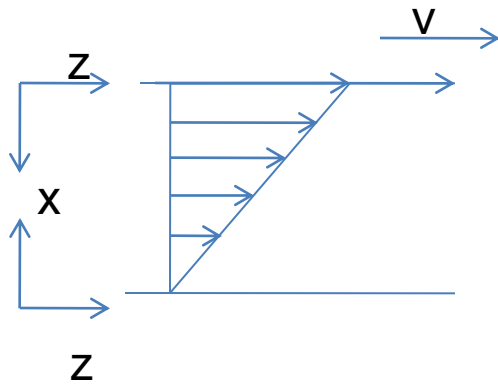
با افزایش دما ویسکوزیته افزایش پیدا می کند.

$$\mu \propto \sqrt{T} \text{ در گازها}$$

با افزایش فشار ویسکوزیته افزایش پیدا می کند.

$\mu$

# Momentum Transfer :



Rate : **كميت**  
**زمان**  
 Flux : **كميت**  
**زمان بتك**  
**طح**

$$\frac{Rate}{Flux} = \text{سطح}$$

**ممنتم** =  $mv$

$$d(mv)/dt = mdv/dt = ma = Fz$$

## More about rate of momentum transfer:

مومنوم کمیٹی برداری است در نتیجه Rate مومنوم نیز کمیٹی برداری است.

## Rate of momentum transfer:

□ نیرویی که می تواند به واسطه انتقال مومنوم اعمال شود!

□ نیروی مماسی که هر لایه با آن لایه ی دیگر را می

## More about flux of momentum transfer:

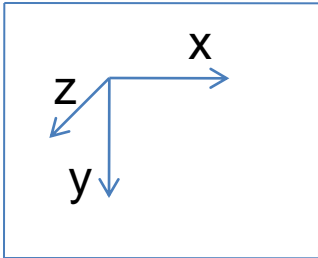
**Mass flux:**  $Flux = \frac{\text{جرم}}{\text{سطح} \cdot \text{زمان}}$  → سطح عمود بر جهت انتقال است. جرم برداری است! Flux

$$[\tau] = \left[ \frac{F_z}{A} \right]$$

جهت دارد و برداری است!  
نیرو  
تشنش برشی =  $\frac{\text{نیرو}}{\text{واحد سطح}}$

تشنش برشی بین لایه ↔ Flux of momentum transfer

مایع در راستای عمود بر تابلو (راستای z) (  $z$  )  
 آیا در جهت  $y$  تغییرات سرعت داریم؟



بلی ←  $\tau_{yz}$

در جهت  $x$  چطور؟

بلی ←  $\tau_{xz}$

در عین اینکه حرکت در جهت  $z$  است، در جهات

$x$  و  $y$  تغییر  $flux$  انتقالی، مو منتوم وقتی تغییر سرعت

در راستای  $x$  است توضیح دهید: 24



□ تمامی کمیت هایی که می شناسیم Tensor هستند.

□ کمیت های اسکالر Tensor درجه ی صفر و کمیت های برداری Tensor درجه ی

یک هستند. **(تنتن برشی)** که دو راستا باید در آن تعریف شود تا معنا پیدا کند، Tensor درجه ۲ است.

n : tensor order

3=تعداد مولفه های هر Tensor

$\tau$  حداکثر<sup>2</sup> = 9 = 3 component دارد.

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

# Non-Newtonian Fluids

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} \longrightarrow \text{Newtonian}$$

$$\tau_{xz} = -\eta \frac{dv_z}{dx} \longrightarrow \text{Non-Newtonian}$$

$\eta$  که ویسکوزیته سیال است ، توسط مدل هایی ( با توجه به جنس سیال ) بیان می شود.

# 1. Bingham's Model (Bingham Plastics)

$$\tau_{xz} = \pm \tau_0 - \mu_0 \frac{dv_z}{dx} \quad \tau_0: \text{Yield Stress} \quad \text{تنش}$$

If  $|\tau_{xz}| > \tau_0 \Rightarrow \text{Flow with Newtonian behaviour}$

تسلیم

اگر  $\tau_0$  بزرگتر شود، ماده حرکت می کند و رفتار

تنش از نیوتنی از خود نشان می دهد.  
If  $|\tau_{xz}| < \tau_0 \Rightarrow \frac{dv_z}{dx} = 0 \rightarrow \text{No Flow}$

اگر  $\tau_0$  کوچکتر شود،  
تنش از ماده حرکت نمی  
کند.

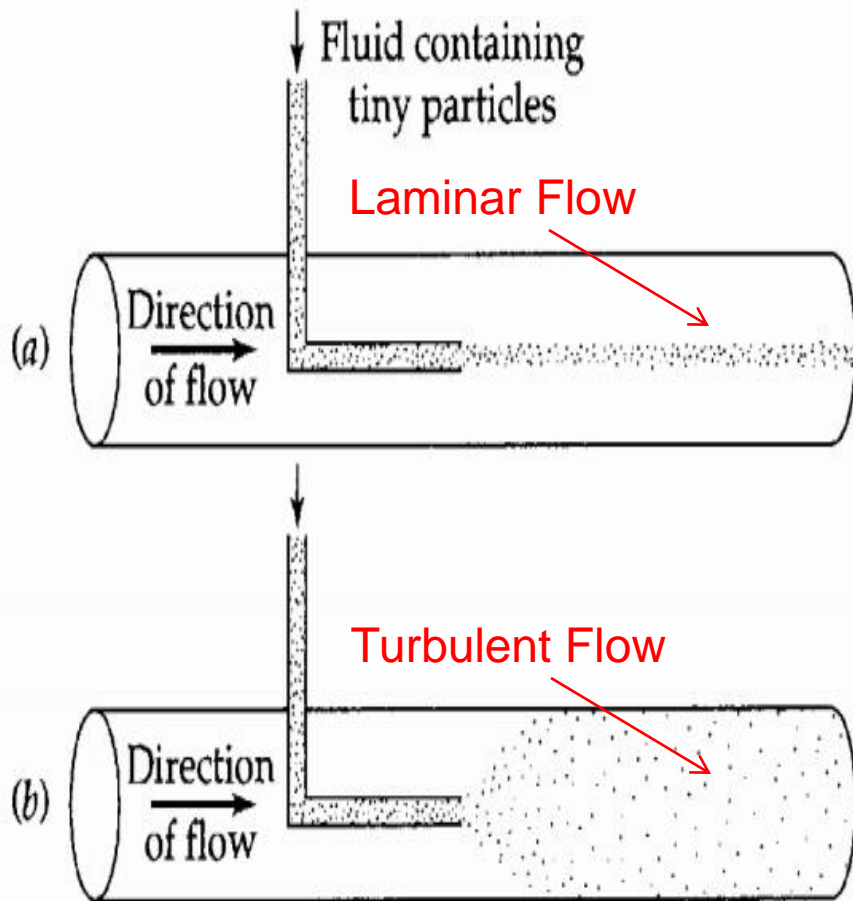
## Chapter 2

# Velocity Distribution in **Laminar Flow** :

(توزیع سرعت در جریان آرام)

فرض نهفته در عنوان، آرام بودن جریان است!!

جریان آرام: جریانی است که در آن سیال به صورت لایه لایه حرکت می کند و بین لایه ها فقط انتقال ممنتیم صورت گرفته و جرمی مبادله نمی شود و به عبارتی لایه ها ادغام نمی شوند.



**Fig. 2.0-1** (a) Laminar flow, in which fluid layers move smoothly over one another in the direction of flow, and (b) turbulent flow, in which the flow pattern is complex and time-dependent, with considerable motion perpendicular to the principal flow direction.

✓ قدم های لازم برای بدست آوردن توزیع سرعت:

۱. مشخص نمودن (مثل حالت یکنواخت سیال تراکم پذیر سیال)
۲. فرضیات نمودن محورهای مختصات مناسب: (نیوتونی و ...)
۳. انتخاب یک جزء کوچک (المنت) از سیستم  
Element

۴. نوشتن موازنه ی مومنتوم بر روی المنت (اصلی ترین مرحله)  
جهت حرکت:

ادامه چند صفحه بعد

یادآوری:

## Mass balance:

Input-output + generation-consumption = accumulation



## انواع فرآیندها:

processes

- Batch
- Semi-Batch
- Continuous

- steady state
- Unsteady state

## موازنه مومنتوم:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Rate of} \\ \text{momentum} \\ \text{in} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Rate of} \\ \text{momentum} \\ \text{out} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{sum of} \\ \text{acting} \\ \text{forces} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Rate of} \\ \text{Accumulation} \\ \text{of} \\ \text{momentum} \end{array} \right\}$$

# مراحل بعدی بدست آوردن توزیع سرعت:

۵. بدست آوردن معادله دیفرانسیل

توزیع تنش‌های برشی و انسیل بند ۵ و بدست

آوردن بدست آوردن توزیع تنش‌های برشی و انسیل توزیع

بهرحالت معادله دیفرانسیل ۷ و بدست

آوردن بدست آوردن توزیع تنش‌های برشی و انسیل با توجه به شرایط سرحدی

(Boundary Conditions)

شرایط سرحدی:

بیان واقعیت های فیزیکی موجود در مرزهای سیستم.

تعریف ریاضی:

بیان مقدار تابع به ازای مقادیر خاصی از متغیر

# متداول ترین شرایط سرحدی:

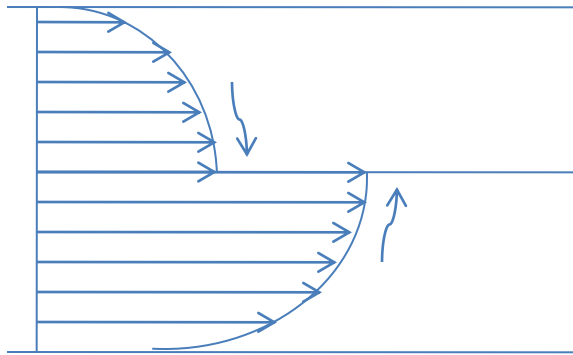
۱. در مرز مشترک جامد-سیال، سرعت سیال برابر با سرعت جداره جامد است. به عبارتی سیال به جداره چسبیده و لیز نمی خورد.

(no slip on the wall)

۲. در مرز مشترک گاز-مایع

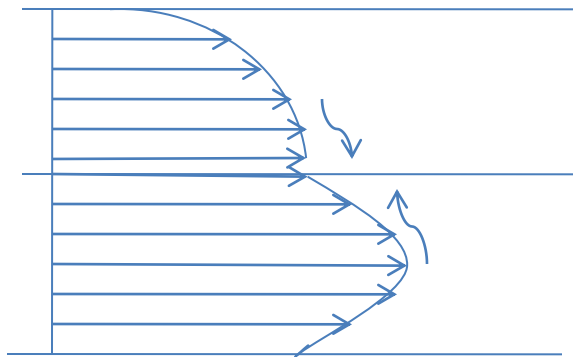
تنش برشی بسیار به صفر نزدیک است

## مثالی برای مرز مشترک مایع-



نفت

آب



نفت

آب

❖ مایع نمی تواند درست

باشد. زیرا از دو

طرف که به فصل

مشترک نزدیک

می شویم سرعت

❖ این توزیع نیستند

می توانند درست مغایر

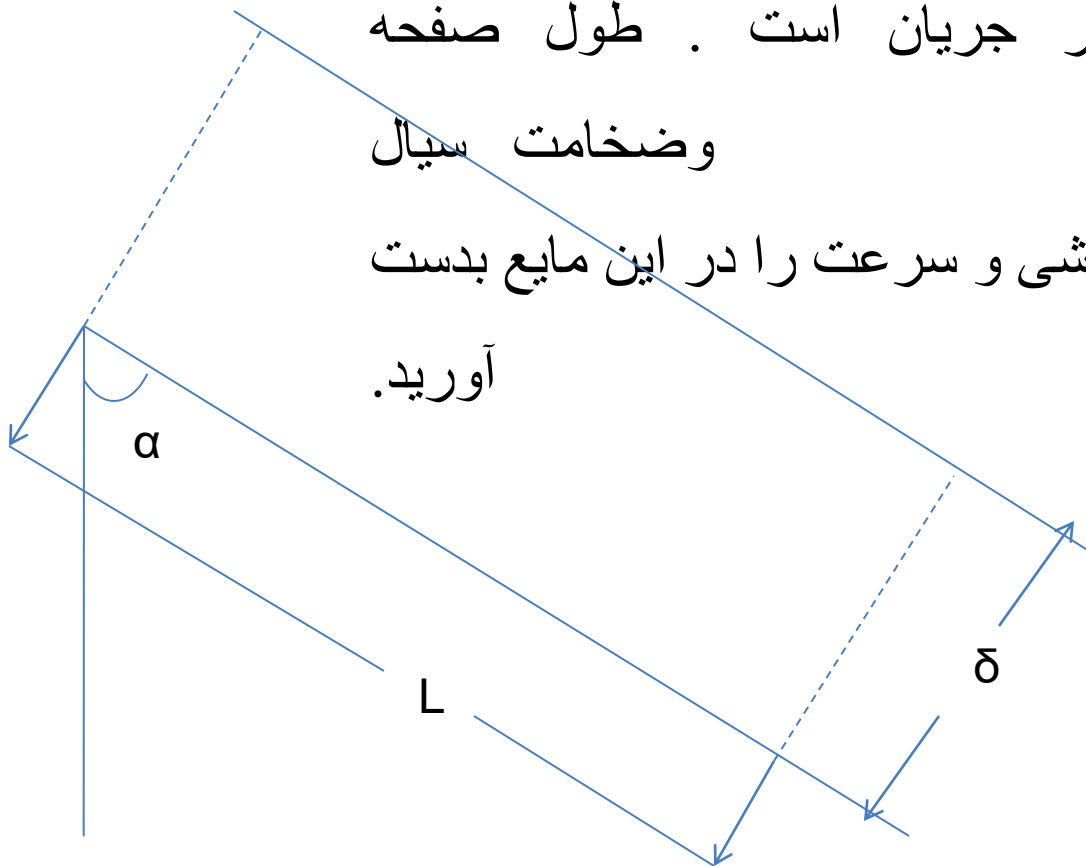
چون پیوستگی در مشترک

توزیع مرز است پیوسته

# Falling liquid Film

مثال  
اول:

یک فیلم بسیار نازک از یک مایع، بر روی سطح  $\alpha$  شیب داری که به صورت مایل قرار گرفته و با راستای قائم زاویه تشکیل می دهد در جریان است. طول صفحه عرض آن وضخامت سیال است. توزیع تنش برشی و سرعت را در این مایع بدست آورید.



• اولین اقدام تعیین دقیق فرضیات:

۱. حالت یکنواخت ( تغییرات زمانی کلیه کمیات برابر با صفر است)

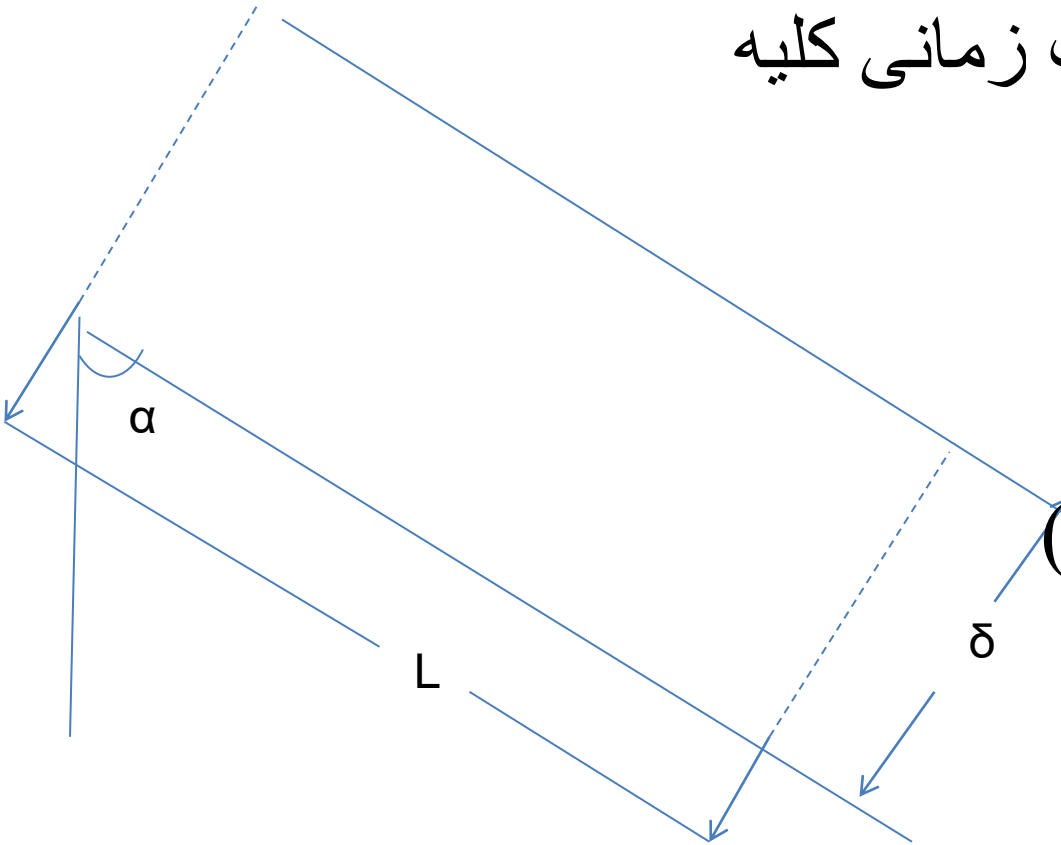
جرین کت

ایک ضوابط فیزیکی ثابت

(دانسیته و ویسکوزیته ثابت)

نویسنده

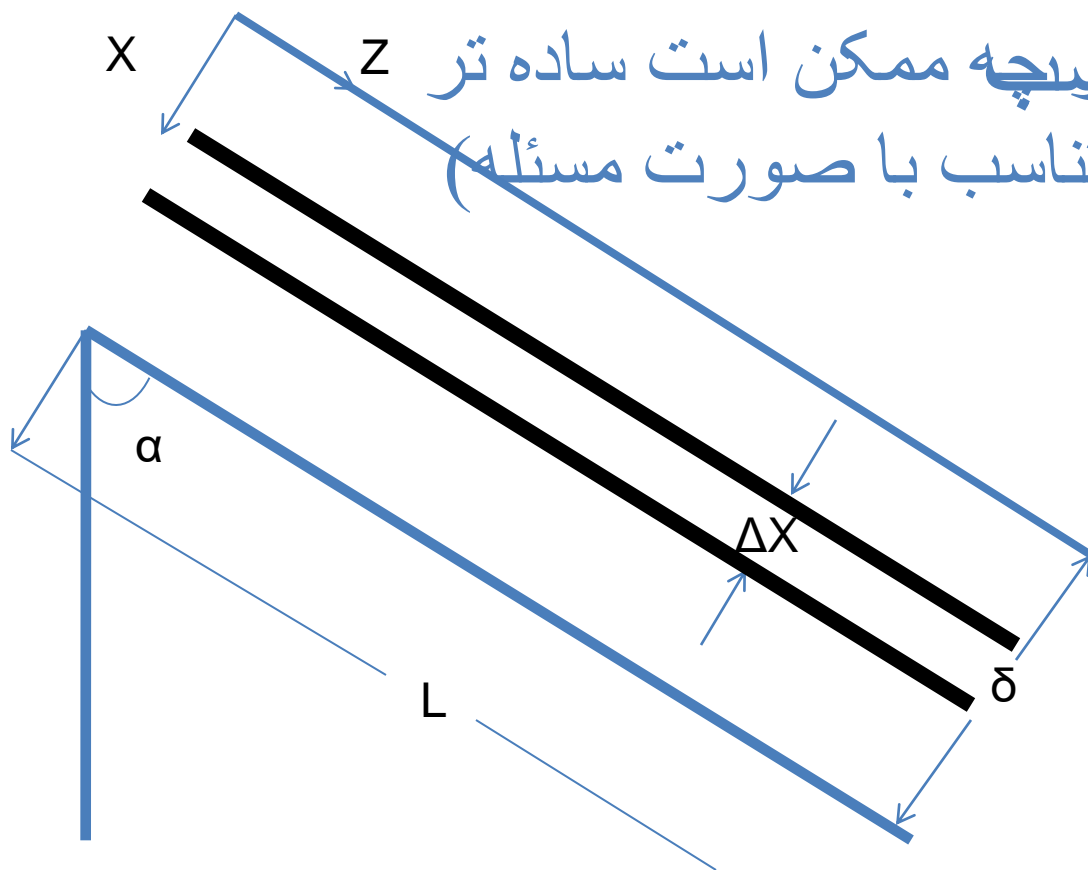
ای ناچیز



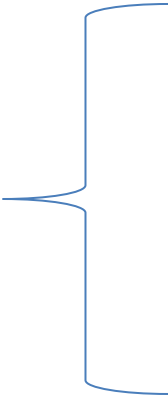


• تعیین محور های مختصات

• انتخاب المنت ~~مدرسه~~ <sup>مدرسه</sup> ممکن است ساده تر  
و متناسب با صورت مسئله




مکانیزم های مختلف انتقال  
حرارت:



Conduction  
Convection  
Radiation

مکانیزم های مختلف  
انتقال مومنتوم:

- 
- molecular
  - Convective

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rate of} \\ \text{momentum in} \\ \text{by convective} \\ \text{transport} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{rate of} \\ \text{momentum out} \\ \text{by convective} \\ \text{transport} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{rate of} \\ \text{momentum in} \\ \text{by molecular} \\ \text{transport} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{rate of} \\ \text{momentum out} \\ \text{by molecular} \\ \text{transport} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{force of gravity} \\ \text{acting on system} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Rate of} \\ \text{Accumulation} \\ \text{of momentum} \end{array} \right\}$$

سرعت ذخیره ی مومنتوم = مجموع نیروهای موثر + سرعت مومنتوم  
 خروجی - سرعت مومنتوم ورودی

Rate of z-momentum in  
 Across surface at x

$$(\tau_{xz}) \cdot (LW) \Big|_x \longrightarrow \text{Molecular}$$

Rate of z-momentum  
 out across surface at  
 $x + \Delta x$

$$-(\tau_{xz}) \cdot (LW) \Big|_{x+\Delta x} \longrightarrow \text{Molecular}$$

Rate of z-momentum  
 In across surface at  
 $z=0$

$$+\rho(w \cdot \Delta x \cdot v_z) \cdot v_z \Big|_{z=0} \longrightarrow \text{Convective}$$

Rate of z-momentum out  
 across surface at  $z=L$

$$-\rho(w \cdot \Delta x \cdot v_z) \cdot v_z \Big|_{z=L} \longrightarrow \text{Convective}$$

$$\begin{aligned}
& (\tau_{xz} \cdot LW)_x + \rho(W \Delta x v_z)_{z=0} - (\tau_{xz} \cdot LW)_{x+\Delta x} \\
& - \rho(W \Delta x v_z)_{z=L} + \rho(LW \Delta x) g \cos \alpha = \frac{\partial(mv_z)}{\partial t} \\
& = \frac{\partial(\rho LW \Delta x v_z)}{\partial t} = \rho LW \Delta x \frac{\partial v_z}{\partial t}
\end{aligned}$$

## Element Mass Balance:

$$\rho(w \Delta x v_z)_{z=0} = \rho(w \Delta x v_z)_{z=L} \rightarrow v_{z z=0} = v_{z z=L}$$

$$(\tau_{xz} \cdot LW)_x - (\tau_{xz} \cdot LW)_{x+\Delta x} + \rho(LW\Delta x)g\cos\alpha = 0$$

$$\div LW\Delta x \rightarrow \frac{(\tau_{xz})_x - (\tau_{xz})_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho g\cos\alpha = 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad -\frac{d\tau_{xz}}{dx} + \rho g\cos\alpha = 0 \rightarrow \frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g\cos\alpha$$

$$\tau_{xz} = (\rho g\cos\alpha)x + C_1$$

$$B.C \text{ at } x = 0 \quad \tau_{xz} \approx 0 \rightarrow C_1 = 0 \quad \Rightarrow \tau_{xz} = (\rho g\cos\alpha)x$$

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} = (\rho g\cos\alpha)x \rightarrow v_z = -\frac{\rho g\cos\alpha}{2\mu}x^2 + C_2$$

$$B.C \text{ at } x = \delta \quad v_z = 0 \rightarrow C_2 = \frac{\rho g \delta^2 \cos \alpha}{2\mu}$$

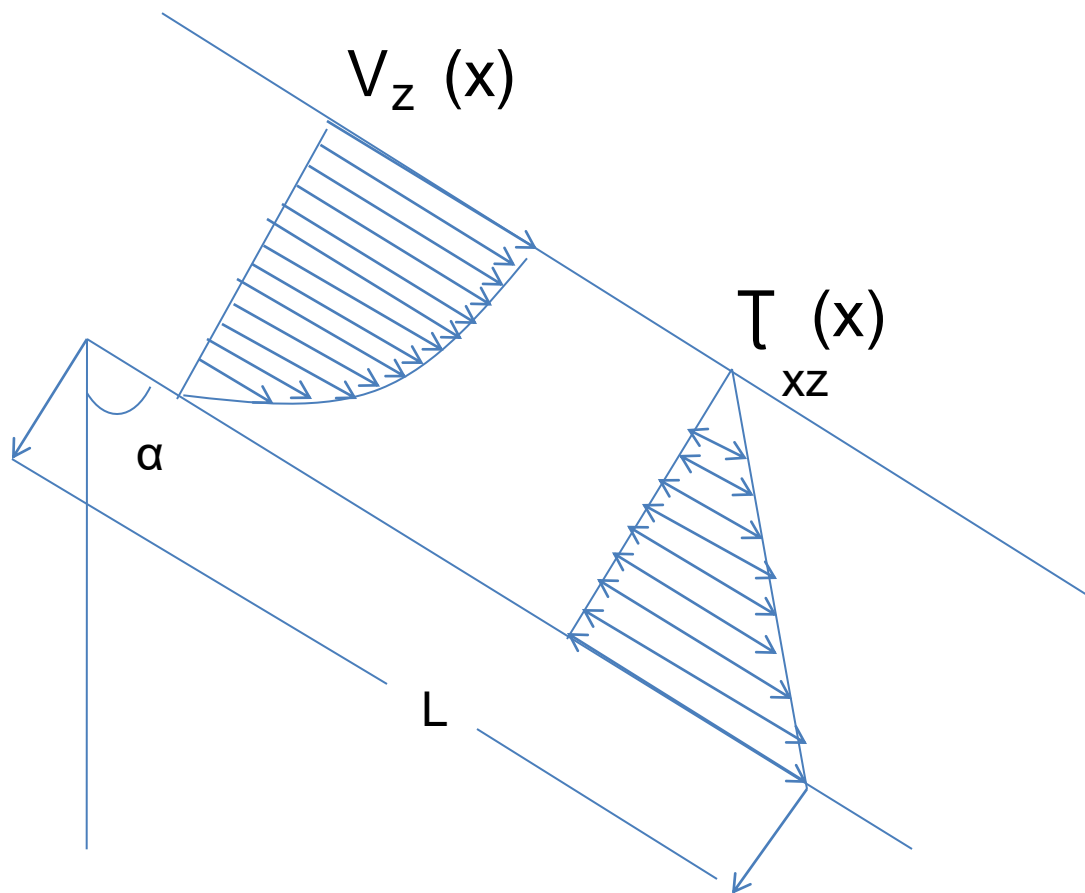


$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \alpha}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \quad \tau_{xz} = (\rho g \cos \alpha) x$$

معم سرعت سیال کجا اتفاق می افتد؟

$$x = 0 \rightarrow v_{zmax} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \alpha}{2\mu}$$

$$v_z = v_{zmax} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \leftarrow \text{Velocity profile}$$





## 2. Volumetric flow rate (دبی حجمی)

$$dQ = v_z dA = v_z dx dy$$

$$Q = \int_0^w \int_0^\delta v_z dx dy = \int_0^w \int_0^\delta \frac{\rho g \delta^2 \cos \alpha}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] dx dy$$
$$= w \int_0^\delta \frac{\rho g \delta^2 \cos \alpha}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] dx = \frac{\rho g w \delta^3 \cos \alpha}{3\mu}$$

$$Q = \frac{\rho g w \delta^3 \cos \alpha}{3\mu}$$

### 3. Average velocity

$$\langle v_z \rangle = \bar{v}_z$$

$$\bar{v}_z = \frac{Q}{A} = \frac{\int_0^w \int_0^\delta v_z dx dy}{\int_0^w \int_0^\delta dx dy} = \frac{\frac{\rho g w \delta^3 \cos \alpha}{3\mu}}{\delta w} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \alpha}{3\mu} = \frac{2}{3} v_{z_{max}}$$

#### 4. $F_z=?$

$$F_z = (\tau_{xz})_{x=\delta} LW = (\rho g \cos \alpha) \delta LW = \rho g LW \delta \cos \alpha$$

الفه ی نیروی وزن در جهت حرکت



# سوال: چگونه می توان از آرام بودن سیال اطمینان یافت؟

می توانیم مقدار  $Q$  بدست آمده از فرمول را با  
بدست آمده از طریق انجام آزمایش (با اندازه گیری زمان  
و حجم مقدار معینی از سیال) مقایسه نماییم.

# Reynold's Number

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v}_z l}{\mu}$$

- L : characteristic length
- $\rho$  : density
- $\mu$  : viscosity
- $\bar{v}_z$  : average velocity

$$N_{Re} = \frac{4\rho \bar{V}_z \delta}{\mu}$$

if  $N_{Re} < 4$  to 25  $\rightarrow$  laminar flow

if  $25 < N_{Re} < 1000$  to 2000  $\rightarrow$  laminar flow with Rippling

if  $N_{Re} > 2000 \rightarrow$  Turbulent flow

اگر دبی حجمی را داشته باشیم و ضخامت فیلم مایع را بخواهیم میتوانیم از رابطه به شکل زیر استفاده نماییم:

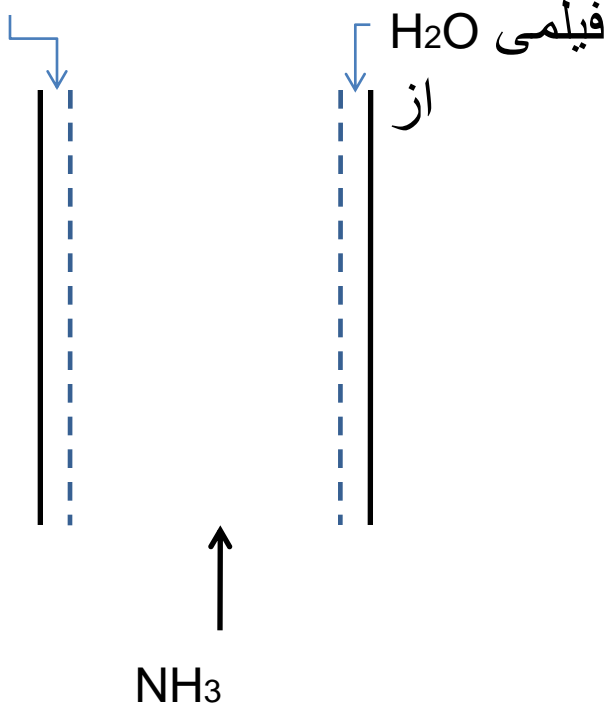
$$Q = \frac{\rho g W \delta^3 \cos \alpha}{3\mu} \rightarrow \delta = \left( \frac{3Q\mu}{\rho g W \cos \alpha} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\delta = \left( \frac{3\mu\Gamma}{\rho^2 g \cos \alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \dot{m} = \rho Q \quad \Gamma = \frac{\dot{m}}{W}$$

کاربرد:

باید چقدر باشد تا بیشترین مقدار آمونیاک ممکن جذب آب  $\delta$

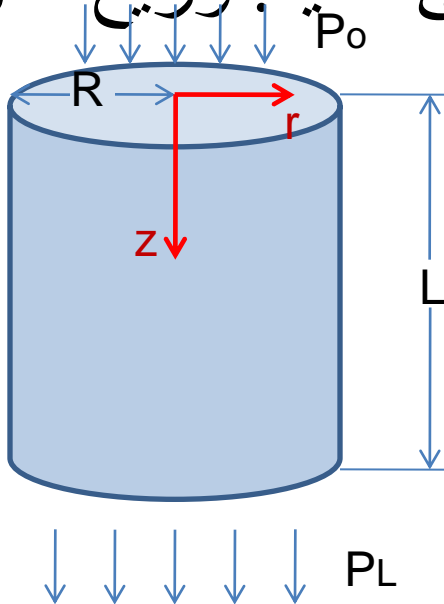
شود؟



## توزیع سرعت در لوله ها: Velocity profile in circular Tubes:

**سوال:** سیال تراکم ناپذیری با فشار  $p_0$  به یک لوله با طول  $L$  و شعاع  $R$  وارد شده و با فشار  $p_L$  آن را ترک می نماید. توزیع تنش برشی و سرعت را در سیال بدست آورید.

- ۱- فرضیات مانند مثال قبل می باشد.
- ۲- محورهای مختصات استوانه ای می باشد.





## روش حل مسئله:

$$\begin{aligned} & (\tau_{rz} 2\pi r L) \Big|_r - (\tau_{rz} 2\pi r L) \Big|_{r+\Delta r} + \rho(2\pi r \Delta r V_z) V_z \Big|_{z=0} - \rho(2\pi r \Delta r V_z) V_z \Big|_{z=L} \\ & + (2\pi r \Delta r P) \Big|_{z=0} - (2\pi r \Delta r P) \Big|_{z=L} + \rho(2\pi r \Delta r L) g \\ & = \frac{\partial(mv_z)}{\partial t} = \frac{\partial(2\pi r \Delta r \rho v_z)}{\partial t} = 2\pi r \Delta r \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) = 0 \end{aligned}$$

موازنه ی جرم المنت

$$\rho(2\pi r \Delta r v_z)_{z=0} = \rho(2\pi r \Delta r v_z)_{z=L} \rightarrow (v_z)_{z=0} = (v_z)_{z=L}$$

$$\div 2\pi\Delta rL \rightarrow \frac{(r\tau_{rz})_r - (r\tau_{rz})_{r+\Delta r}}{\Delta r} + \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)r = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)r \rightarrow r\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)\frac{r^2}{2} + C_1$$

$$r \neq 0 \rightarrow \tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

*B.C1 at  $r \approx 0$   $\tau_{rz} = \text{finite} \rightarrow C_1 = 0$*

$$\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)\frac{r}{2}$$

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) \frac{r}{2} \rightarrow v_z = -\frac{\left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) r^2}{4\mu} + C_2$$

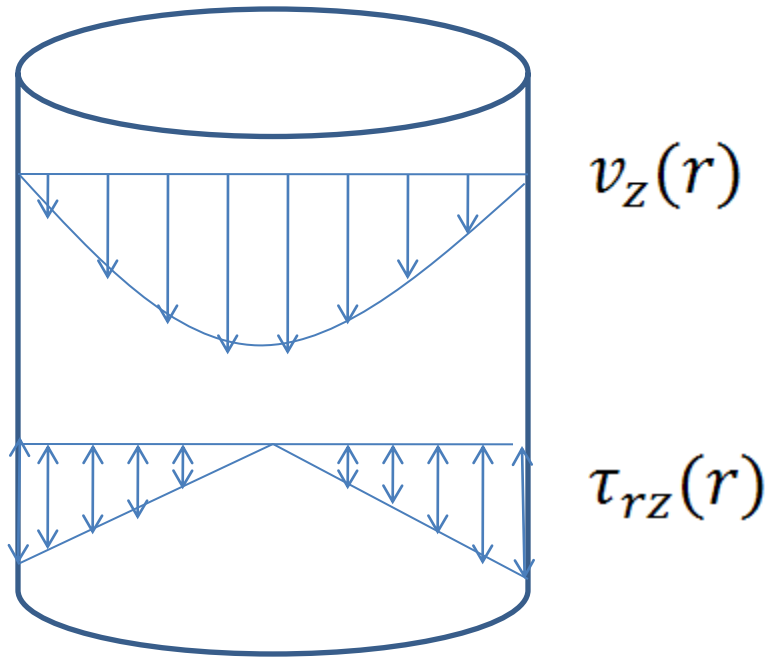
$$B.C2 \text{ at } r = R \quad v_z = 0 \rightarrow C_2 = \frac{\left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) R^2}{4\mu}$$

$$\longrightarrow v_z = \frac{\left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) R^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

$$\tau_{rz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) \frac{r}{2}$$

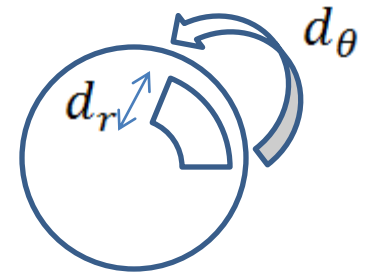
$$v_{zmax} = \frac{\left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) R^2}{4\mu}$$

$$v_z = v_{zmax} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$



## 2. Volumetric flow rate:

$$dQ = v_z dA = v_z (r d\theta) dr = v_z r dr d\theta$$



$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right) R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r dr d\theta$$

$$Q = \frac{\pi R^4 \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)}{8\mu}$$

*Eq : Hagen – poiseulle*

$$3) \quad \bar{v}_z = \frac{Q}{A} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} = \frac{\left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right) R^2}{8\mu}$$

$$\bar{v}_z = \frac{1}{2} v_{zmax} \quad v_{zmax} = 2 \bar{v}_z$$

$$4) F_z = (\tau_{rz})_{r=R} 2\pi RL$$

$$F_z = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) \frac{R}{2} \times 2\pi RL = (P_0 - P_L)\pi R^2 + \pi R^2 \rho g L$$

$$Q = \frac{\pi R^4 \left( \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right)}{8\mu}$$

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v}_z D}{\mu}$$

|                        |                 |            |
|------------------------|-----------------|------------|
| $N_{RE} < 2100$        | laminar flow    | جریان آرام |
| $2100 < N_{RE} < 4000$ | Transition flow | جریان گذرا |
| $N_{RE} > 4000$        | Turbulent flow  | جریان درهم |



# Ostwald's viscometer

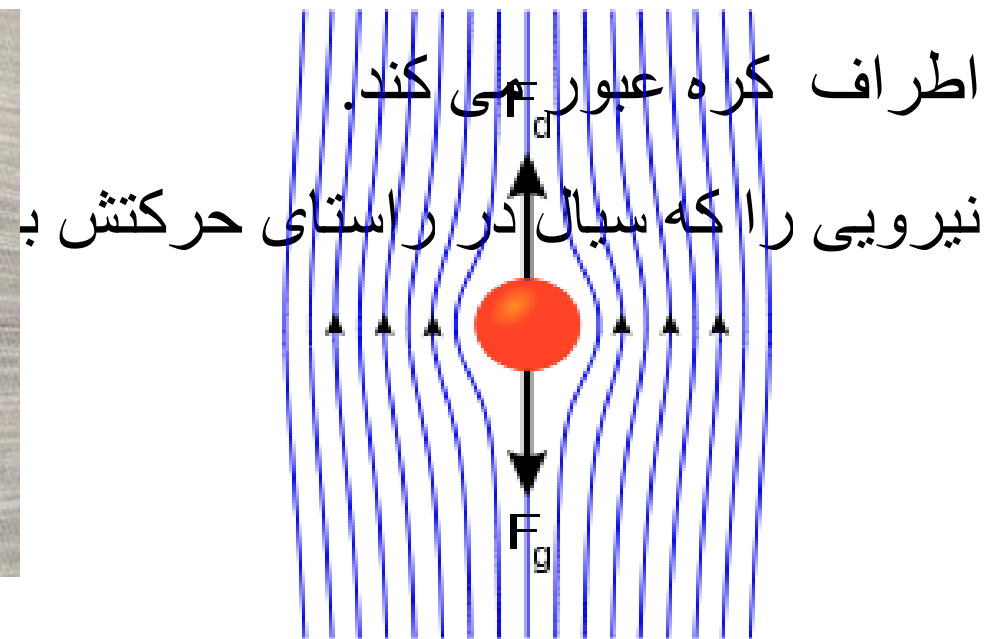
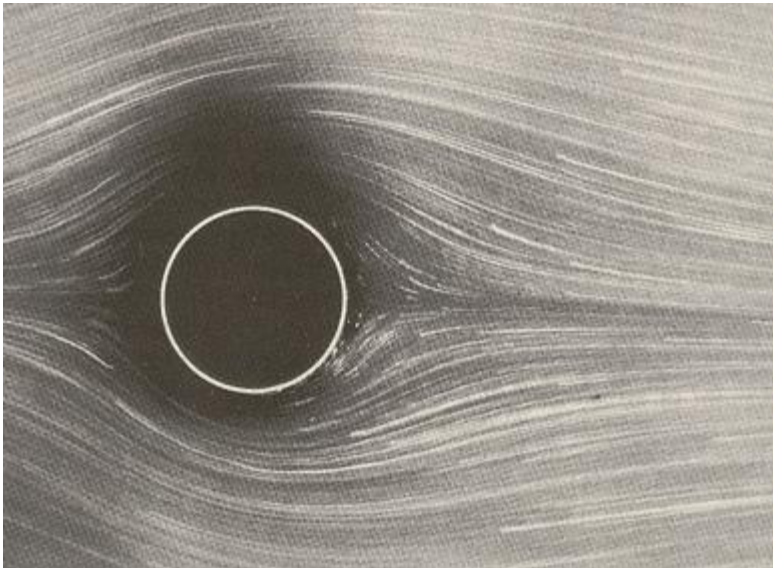


# Creeping flow Around a solid sphere

به یک کره ی

سوال: سیالی تراکم  $\rho$  پذیر با سرعت

جامد با شعاع  $R$  نزدیک شده به آن برخورد می کند و به صورت خزشی از



$u_\infty$  : Approaching velocity

# Creeping flow Around a solid sphere

حرکت خزشی چه نوع حرکتی است؟

برخورد یک نوع روغن سنگین به یک ساچمه را تصور کنید:  
برای سیالی با ویسکوزیته و دانسیته معین چنانچه شرط زیر برقرار باشد، حرکت خزشی است.

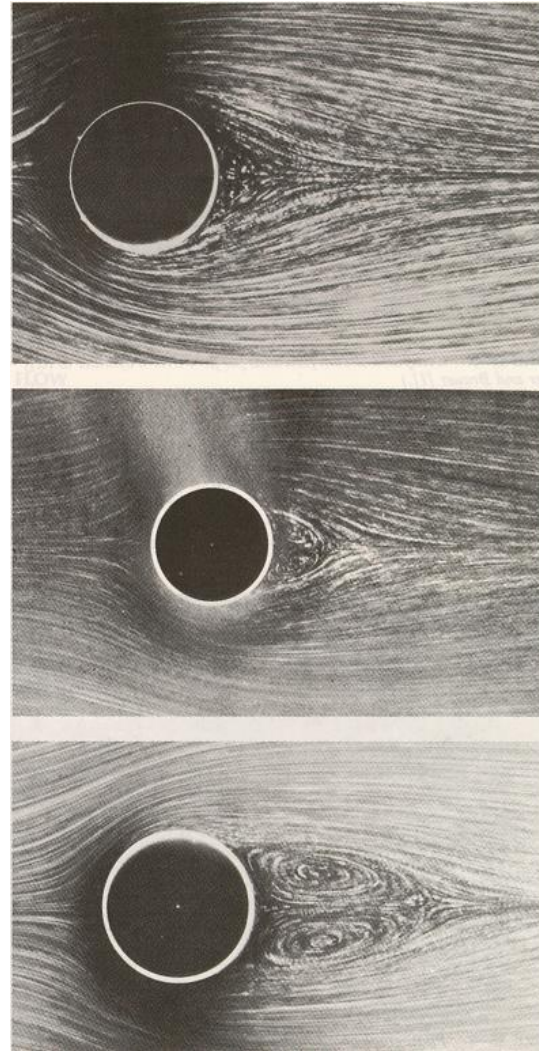
$$N_{Re,p} = \frac{\rho \bar{v}_z D_p}{\mu} < 0.1$$

قطر کره:  $D_p$

البته تا هم قابل  $N_{Re,p} < 10$   
قبول است.

# Creeping flow Around a solid sphere

Turbulent Flow:



## روش حل مسئله:

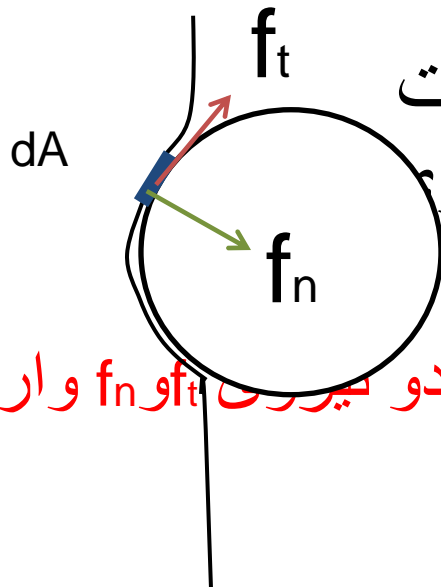
مراحل بدست آوردن توزیع سرعت و تنش و نیرو را برای جریان خزشی همانند جریان یک بعدی دنبال می کنیم:

۱. فرضیات: جریان خزشی، سیال نیوتونی، حرکت

یکنواخت، حرکت دو بعدی، خواص فیزیکی ثابت

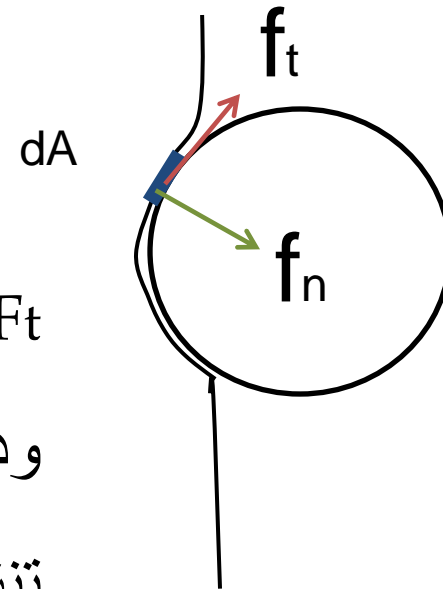
۲. انتخاب محورهای مختصات: مختصات کروم

۳. انتخاب المنت:



$dA$  را روی سطح کره اختیار می کنیم. به این المنت دو نیرو  $f_n$  و  $f_t$  وارد می شود.

- $F_t$ =tangential force
- $F_n$ =normal force



$F_t$ : نیرویی است که از درگیری سیال  
 و دیواره ی جامد حاصل می شود، منشا آن  
 تنش برشی است (از جنس نیروی  
 اصطکاکی است)

$$f_t = (\tau_{r\theta})_{r=R} dA \quad f_n = (P)_{r=R} dA$$

$F_n$  از نیروهای فشاری حاصل می شود

بدلیل وجود راستای حرکتی و تغییرات سرعت در هر جهت  
 حداقل 4 مولفه ی  $\tau$  خواهیم داشت :

$$\tau_{\theta r}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta\theta}, \tau_{rr}$$

بدلیل آرام بودن بیش از حد سیال تنها مورد قابل  
 توجه  $\tau_{r\theta}$  می باشد، چون مماس بر سطح کره در

راستای  $\theta$  اصطکاک داریم.

$$\tau_{r\theta} = \frac{3\mu u_{\infty}}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^4 \sin\theta$$

توزیع تنش برشی و فشار در سیال از روابط زیر

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{3\mu u_{\infty}}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta$$

بدست می آید. 71

معادلات مربوط به  $\tau_{r\theta}$ ,  $p$ ,  $v_\theta$ ,  $v_r$ :

$$\tau_{r\theta} = \frac{3\mu u_\infty}{2R} \left\langle \frac{R}{r} \right\rangle^4 \sin\theta$$

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{3\mu u_\infty}{2R} \left\langle \frac{R}{r} \right\rangle^2 \cos\theta$$

$$(\tau_{r\theta}) \Big|_{r=R} = \frac{3\mu u_\infty}{2R} \sin\theta$$

$$(p) \Big|_{r=R} = p_0 - \rho g R \cos\theta - \frac{3\mu u_\infty}{2R} \cos\theta$$



## مجموع نیروهای

مماسی تصویر شده در راستای حرکت

$$F_t = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\tau_{r\theta})_{r=R} \sin\theta dA$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(\tau_{r\theta})_{r=R} \sin\theta] R^2 \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi R\mu u_\infty$$

Friction drag نیروی کششی که به واسطه ی اصطکاک اتفاق می افتد.

$$F_n = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\langle p \rangle_{r=R} (-\cos\theta)] R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$F_n = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g (\text{Buoyancy}) + 2\pi R\mu u_\infty (\text{Form Drag})$$

$$F = F_B + F_D$$

$F_D$ : Drag Force

$F_B$ : Buoyant Force

$$F_D = 6\pi R\mu u_\infty \quad \text{stoke's law}$$

$$F = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 6\pi R\mu u_\infty$$

$$\Sigma F = ma$$

*Falling of a particle in a fluid :*

$$\Sigma F = ma$$

$$mg - F_B - F_D = ma$$

$$\frac{43}{3}\pi R^3 \rho_p g - \frac{43}{3}\pi R^3 \rho_f g - 6\pi R\mu u = \frac{43}{3}\pi R^3 \rho_p \frac{du}{dt}$$

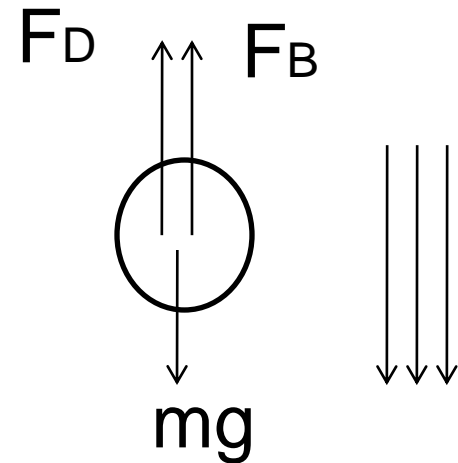
*m: mass of particle*

*$\rho_p$ : density of particle*

*$\rho_f$ : fluid's density*

*R: particle's radius*

*$\mu$ : fluid's viscosity*



$$\text{if } \frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow u = u_t = \frac{2R^2(\rho_p - \rho_f)g}{9\mu}$$

$u_t = \text{Terminal velocity} =$  ~~سر~~  $\text{سر}$



$$\mu = \frac{2R^2(\rho_p - \rho_f)g}{9u_t}$$

## Falling Ball viscometer:

اگر ذرات کروی با  $\rho$  و  $R$  معین، داخل سیال معین انداخته شود و سرعت حدی حرکت را اندازه بگیریم، می توانیم مقدار  $\mu$  را اندازه بگیریم.

$$\mu = \frac{2R^2(\rho_p - \rho_f)g}{9u_t}$$

## Chapter 3

# The equations of change for Isothermal systems

## معادلات تغییر در سیستم های هم دما

سیالی را در نظر می گیریم که با زمان و در همه جهات ،سرعت و خواص (دانشیته)اش تغییر می کند(حرکت چند بعدی است) .

1. The Equation of Continuity معادله پیوستگی ✓ معادلاتی
2. The Equation of Motion معادله حرکت
3. The Equation of Energy معادله انرژی

اگر از شما خواسته باشند که تغییرات تعداد ماهی های آب یک رودخانه را با زمان بررسی کنید. چگونه عمل می کنید؟

دو روش برای بیان معادلات:

۱- تغییرات کمیت ها (یا شکل معادله) از نقطه نظر ناظری ثابت

۲- تغییرات کمیت ها (یا شکل معادله) از دید ناظری که با سرعتی دلخواه در

سیال حرکت می کند.

۳- تغییرات کمیت ها (یا شکل معادله) از دید ناظری که با سرعت سیال در

حرکت است.

1. The partial time derivatives,  $\frac{\partial c}{\partial t}$

مشتق جزئی زمان

2. The Total Time derivatives,  $\frac{dc}{dt}$

مشتق کامل زمان

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial c}{\partial z}$$

3. The Substantial Time derivatives,  $\frac{Dc}{Dt}$

مشتق واقعی زمان

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z}$$



## The Equation of continuity معادله پیوستگی

The Overall Mass Balance On The Element

(Rate of mass in) - (Rate of mass out) =  
Rate of accumulation of mass

$$\begin{aligned}
 & [(\rho v_x)_x \Delta y \Delta z + (\rho v_y)_y \Delta x \Delta z + (\rho v_z)_z \Delta x \Delta y] \\
 & - [(\rho v_x)_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z + (\rho v_y)_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \\
 & + (\rho v_z)_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y] = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z)
 \end{aligned}$$

$$\div \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow & \frac{(\rho v_x|_x) - (\rho v_x|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{(\rho v_y|_y) - (\rho v_y|_{y+\Delta y})}{\Delta y} \\
 & + \frac{(\rho v_z|_z) - (\rho v_z|_{z+\Delta z})}{\Delta z} = \frac{\partial \rho}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right]$$

(partial)  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} +$$

$$v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

*substantial Form*  $\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$

## *Special cases:*

1. At steady state conditions:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0$$

2. For incompressible fluids:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

# The equation of motion:

Rate of momentum in - Rate of momentum out + sum of acting forces =  
Rate of accumulation of momentum

x-component:

$$\left. \begin{aligned} & [(\rho v_x \Delta y \Delta z) v_x \Big|_x + (\rho v_y \Delta x \Delta z) v_x \Big|_y + (\rho v_z \Delta x \Delta y) v_x \Big|_z] \\ & - [(\rho v_x \Delta y \Delta z) v_x \Big|_{x+\Delta x} + (\rho v_y \Delta x \Delta z) v_x \Big|_{y+\Delta y} + (\rho v_z \Delta x \Delta y) v_x \Big|_{z+\Delta z}] \end{aligned} \right\} \text{Convective momentum}$$

$$\left. \begin{aligned} & + [(\tau_{xx} \Delta y \Delta z)_x + (\tau_{yx} \Delta z \Delta x)_y + (\tau_{zx} \Delta x \Delta y)_z] \\ & - [(\tau_{xx} \Delta y \Delta z)_{x+\Delta x} + (\tau_{yx} \Delta z \Delta x)_{y+\Delta y} + (\tau_{zx} \Delta x \Delta y)_{z+\Delta z}] \end{aligned} \right\} \text{Molecular momentum}$$

$$\begin{aligned} & + (\rho \Delta y \Delta z)_x - (\rho \Delta y \Delta z)_{x+\Delta x} + \rho \Delta x \Delta y \Delta z g_x = \frac{\partial}{\partial t} (m v_x) \\ & = \frac{\partial (\rho \Delta x \Delta y \Delta z v_x)}{\partial t} = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\div \Delta x \Delta y \Delta z \Rightarrow$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z} \right] - \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = - \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho v v) - [\nabla \cdot \tau] - \nabla p + \rho g$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -[\nabla \cdot \tau] - \nabla p + \rho g$$

## Special cases:

1) *For Newtonian fluids with constant  $\rho$  &  $\mu$*

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \mu \nabla^2 v - \nabla p + \rho g \quad \text{Navier Stoke's Eq}$$

2) *For fluids when  $[\nabla \cdot \tau]$  is negligible:*

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \rho g \quad \text{Euler's Eq}$$

سیال

نیوتنی

تراویکم کوزی

نایزیر سیال کم

انار

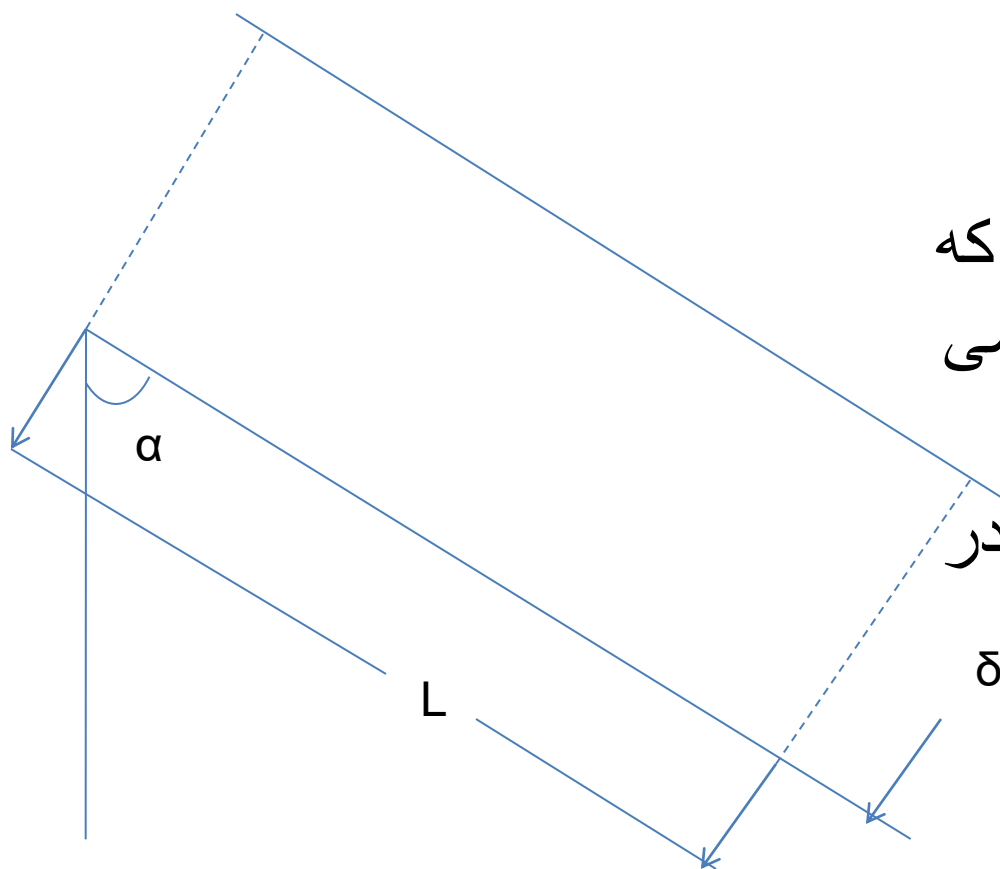
باشد

ویسکوز



# Falling liquid Film

مثال اول:



- یک film نازک از یک مایع با ضخامت  $\delta$  بر روی سطح شیب داری به طول  $L$  و عرض  $w$  که با راستای قائم زاویه  $\alpha$  تشکیل می دهد در جریان است .
- توزیع تنش برشی و سرعت را در این film مایع بدست آورید:

• اولین اقدام تعیین دقیق فرضیات:

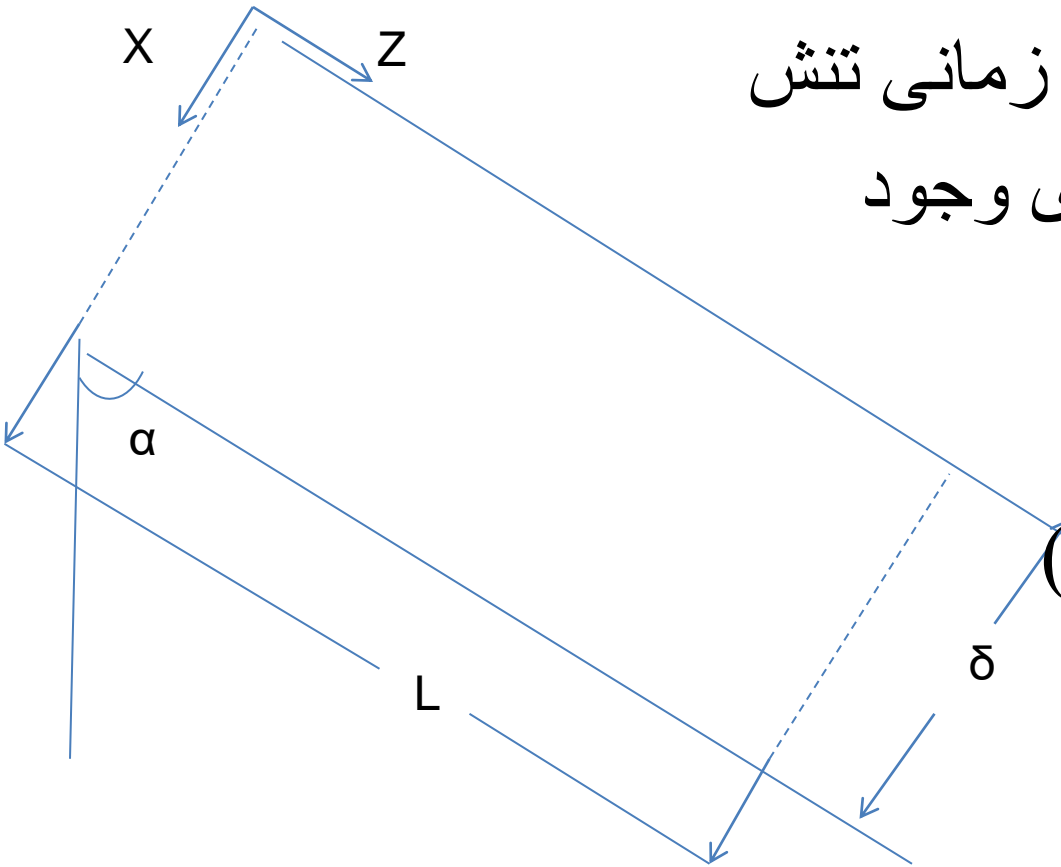
۱. حالت یکنواخت (تغییرات زمانی تنش و سرعت و هیچ کمیت دیگری وجود ندارد)

اینکه خواص فیزیکی ثابت

(دانسیتا و ویسکوزیته ثابت)

نویسنده

ای ناچیز



## The Equation of continuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

حرکت یک  
بعدی



$$v_x = v_y = 0$$

خواص فیزیکی ثابت  
ناچیز



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

System steady-state

$$\rightarrow \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \text{ and } \text{برای آرام} \rightarrow \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow v_z = v_z(x)$$

## The Equation of motion (Z-component):

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} - \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z$$

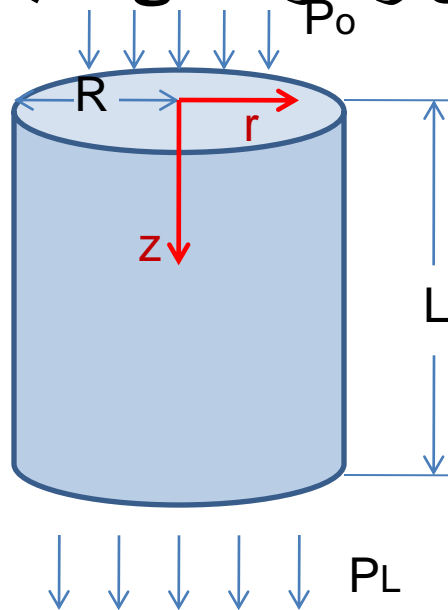
$$\tau_{yz} = -\mu \left[ \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] = 0$$

**App. B, Page 843 (Bird)**

$$\tau_{zz} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = \frac{-\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \rho g_z$$

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g_z = \rho g \cos \alpha$$

به یک لوله با طول  $L$   
آن را ترک می نماید. توزیع



**سوال دوم:** سیال تراکم ناپذیری با فشار  $P_L$  و شعاع  $R$  وارد شده و با فشار تنش برشی و سرعت را در سیال بدست آورید.  
(1) تعیین فرضیات:

جریان آرام، یکنواخت، نیوتونی، دانسیته و ویسکوزیته ثابت

(2) انتخاب محورهای مختصات:

(3) انتخاب المنت:

در نظر می گیریم که در راستای  $r$  تغییر سرعت

**The equation of continuity:**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

**The Equation of motion:**

**Z-component:**


$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) =$$
$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z$$

$$\tau_{\theta z} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] = 0$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] = 0$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

$$\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r}}_{F(r)} = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z}_{G(z)} = k$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = k \\ -\frac{dp}{dz} + \rho g_z = k \end{array} \right.$$



$$-dp = (k - \rho g_z) dz \rightarrow \int_{p_0}^{p_L} dp = \int_0^L (\rho g_z - k) dz \rightarrow k = \frac{p_0 - p_L}{L} + \rho g_z$$

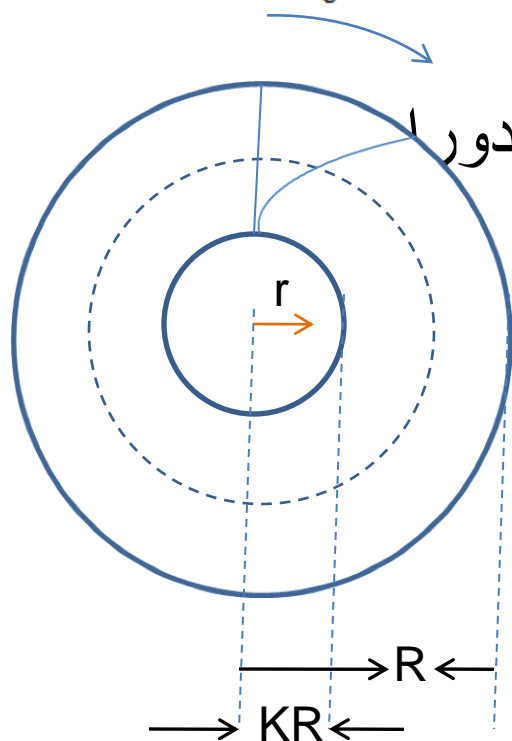
$$\rightarrow \frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \frac{p_0 - p_L}{L} + \rho g_z$$

$$\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \left( \frac{p_0 - p_L}{L} + \rho g_z \right) r$$

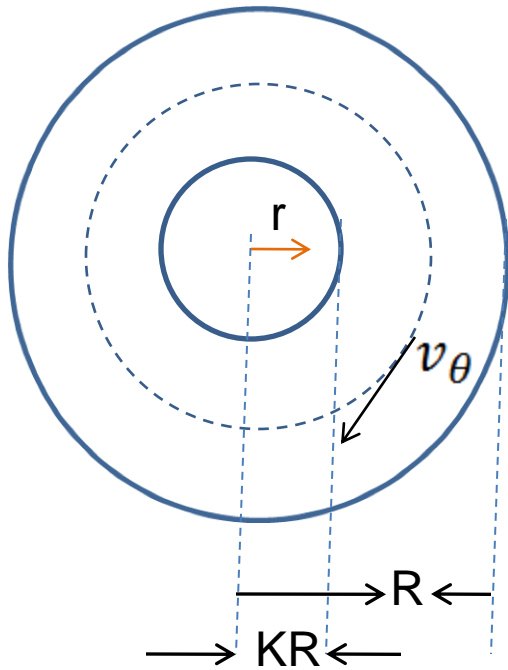
**سوال سوم:** سیال تراکم ناپذیری در فضای بین دو استوانه ی هم محور با شعاع های  $R$  و  $KR$  و طول  $L$  قرار گرفته است. استوانه ی بیرونی با سرعت معین زاویه ای  $\omega_0$  حول محور دور می کند.

الف) توزیع سرعت را در سیال بدست آورید.

ب) رابطه ای برای محاسبه ی گشتاور لازم جهت به دور آوردن استوانه ی بیرونی بدست آورید.







Equation of continuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

$$\rho = \text{constant} \rightarrow \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial(v_\theta)}{\partial z} = 0$$

}  $v_\theta = v_\theta(r)$

r- component:  $-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$

$\theta$ - component:  $0 = \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta) \right]$

Z- component:  $-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta) = c_1 \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dr} (rv_\theta) = c_1 r$$

$$rv_\theta = \frac{c_1 r^2}{2} + c_2 \quad \longrightarrow \quad v_\theta = \frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r}$$

BC.1  $r=R$   $v_\theta = R\omega_0$

BC.2  $r=KR$   $v_\theta = 0$



$$v_\theta = R\omega_0 \left( \frac{\frac{KR}{r} - \frac{r}{KR}}{K - \frac{1}{K}} \right)$$

رابطه  
توزیع  
سرعت<sup>98</sup>

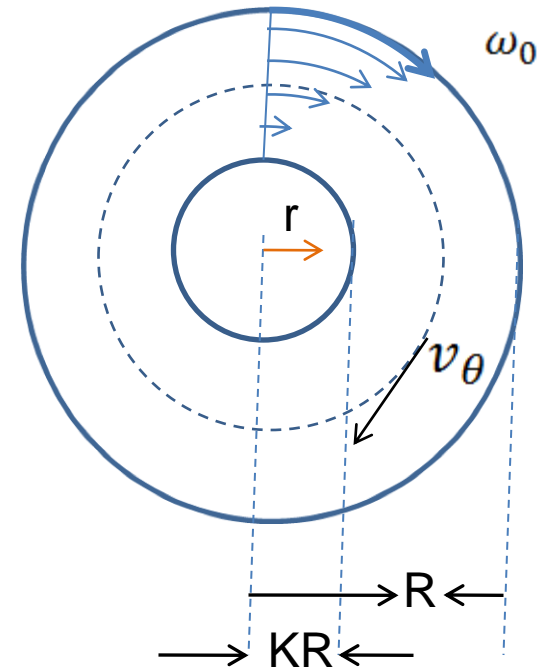
$$T = RF_t \quad F_t = (-\tau_{r\theta})\Big|_{r=R} 2\pi RL$$

$$\tau_{r\theta} = -\mu \left[ r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right] \quad \rightarrow$$

$$\tau_{r\theta} = -\mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{r\theta} = -2\mu R^2 \omega_0 \left( \frac{K^2}{1 - K^2} \right) \frac{1}{r^2}$$

$$T = 4\pi R^2 \omega_0 L \mu \left( \frac{K^2}{1 - K^2} \right)$$



نکته:

اساس کار Couette-Hatschek viscometer

ویسکومتر برای اندازه گیری ویسکوزیته

خمیر هاوسیالات نفتی از این

ویسکومتر استفاده می کنیم

نکته 1

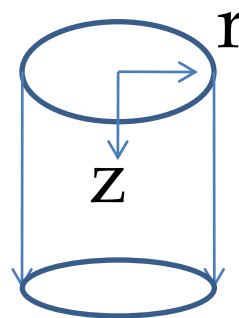
نکته

2

$$\mu = \frac{T(1 - K^2)}{4\pi R^2 \omega_0 L K^2}$$

$$p = p(r, \theta, z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} \rightarrow \text{یعنی در } z \text{ و } \theta \text{ ثابت}$$



$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

$$dp = \frac{\rho v_{\theta}^2}{r} dr + \rho g_z dz$$

$$p = F(r) + \rho g_z z + p_0$$

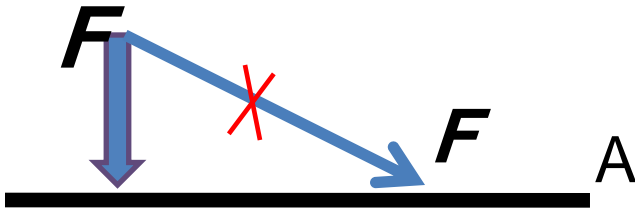
# استاتیک سیالات:

در این بخش پس از تعریف فشار به بیان توزیع فشار در حالات مختلف پرداخته خواهد شد.

توزیع فشار :  
1- توزیع فشار در سیالات ساکن  
2- در حال حرکت بدون تنش برشی

$$P = \frac{F}{A} \rightarrow F \perp A$$

تعریف فشار:



$$P_{\text{LOCAL}} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F}{A}$$

تعریف فشار موضعی:

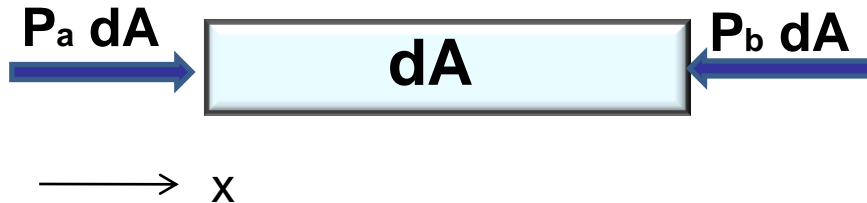
# توزیع فشار در سیال ساکن:

a) X-Component:

تغییر فشار در راستای افقی:

تعادل هیدروستاتیک:

در کلیه نقاطی از یک سیال ساکن که به یک فاصله از سطح زمین و یا هر سطح افقی دیگر قرار دارند، فشار برابر است.



اثبات:

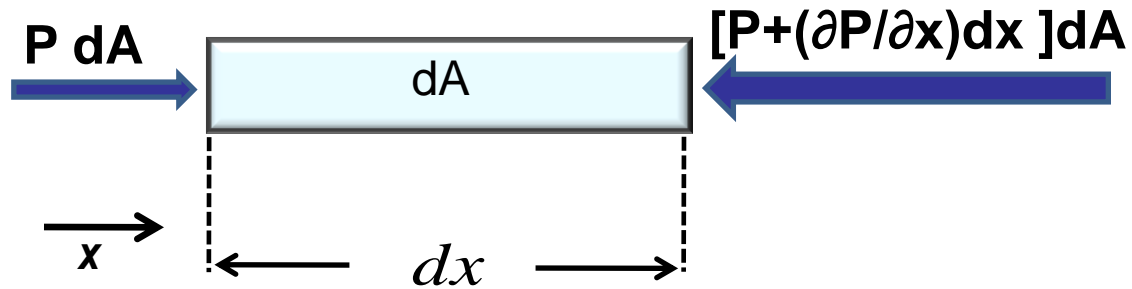
$$\sum F_x = 0$$



به علت سکون سیال

$$P_a dA - P_b dA = 0 \Rightarrow P_a dA = P_b dA \Rightarrow P_a = P_b$$

روش دیگر اثبات:

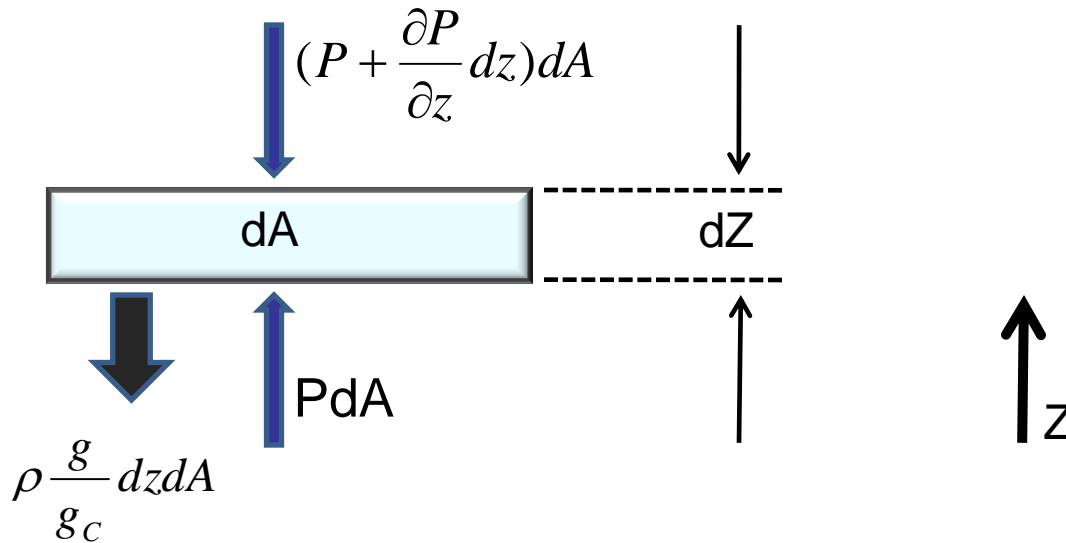


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P dA - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dA = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = 0}$$



b) Z-Component:

تغییر فشار در راستای Z (عمودی)



$$\sum F_Z = 0 \Rightarrow PdA - (P + \frac{\partial P}{\partial z} dz)dA - \rho \frac{g}{g_c} dzdA = 0$$



$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \frac{g}{g_c}$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \Rightarrow dP = -\rho \frac{g}{g_c} dz$$

حل معادله جهت دستیابی به توزیع فشار:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) تراکم ناپذیر } \rho = cte \\ \text{(b) تراکم پذیر } \rho \neq cte \end{array} \right\} \text{ میدانیم:}$$

a) Incompressible Fluids

$$P = -\rho \frac{g}{g_c} Z + p_0$$

یعنی افزایش ارتفاع موجب کاهش فشار می شود.

روش حل معادله برای سیالات تراکم نا پذیر:

$$\frac{dP}{\rho} + \frac{g}{g_c} dZ = 0 \xrightarrow{\int} \frac{P}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z = C$$

یعنی در هر نقطه ای از سیال تراکم ناپذیر مجموع این دو جمله مقدار ثابتی است.

$$\frac{P_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_a = \frac{P_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_b \quad \text{در نقاط a و b خواهیم داشت:}$$

$$\frac{P_a - P_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} (Z_a - Z_b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{g}{g_c} \Delta Z = 0$$

(b) سیالات تراکم پذیر: اگر سیال گاز ایده آل باشد خواهیم داشت:

$$PV = nRT = \frac{m}{M} RT \Rightarrow P \frac{V}{m} = \frac{RT}{M}$$

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{PM}{RT}$$

$$dP = -\frac{PM}{RT} \frac{g}{g_c} dZ$$

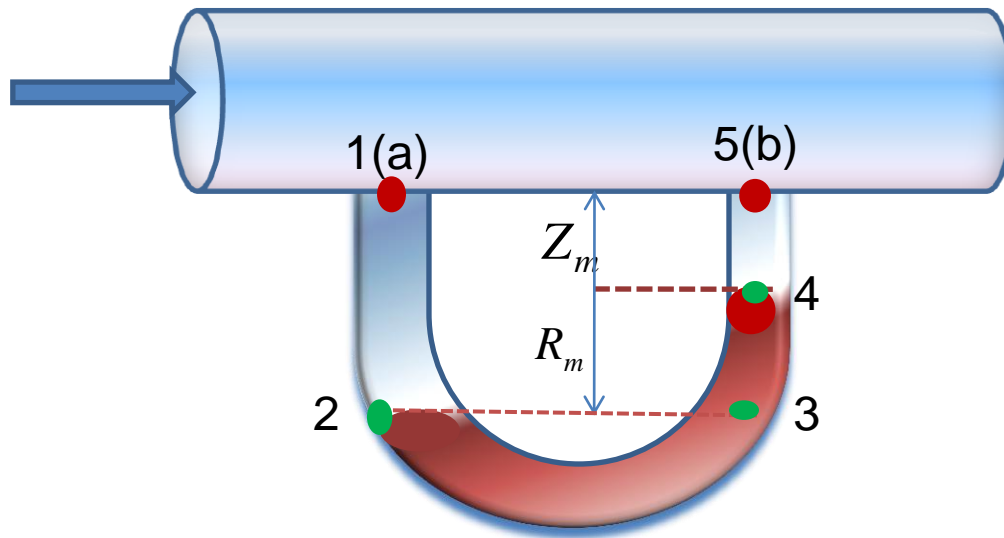
$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{M}{RT} \frac{g}{g_c} dZ$$

$$\ln \frac{P_b}{P_a} = -\frac{M}{RT} \left( \frac{g}{g_c} \right) (Z_b - Z_a)$$

$$\Rightarrow \frac{P_b}{P_a} = \exp \left[ \frac{-M}{RT} \left( \frac{g}{g_c} \right) (Z_b - Z_a) \right]$$

کاربرد این روابط در یک مانومتر قابل استفاده خواهد بود:

$$P_a - P_b = ?$$



$$P_a - P_b = P_1 - P_5 = ?$$

~~$$P_2 = P_1 + \rho_f \frac{g}{g_c} (R_m + Z_m)$$~~

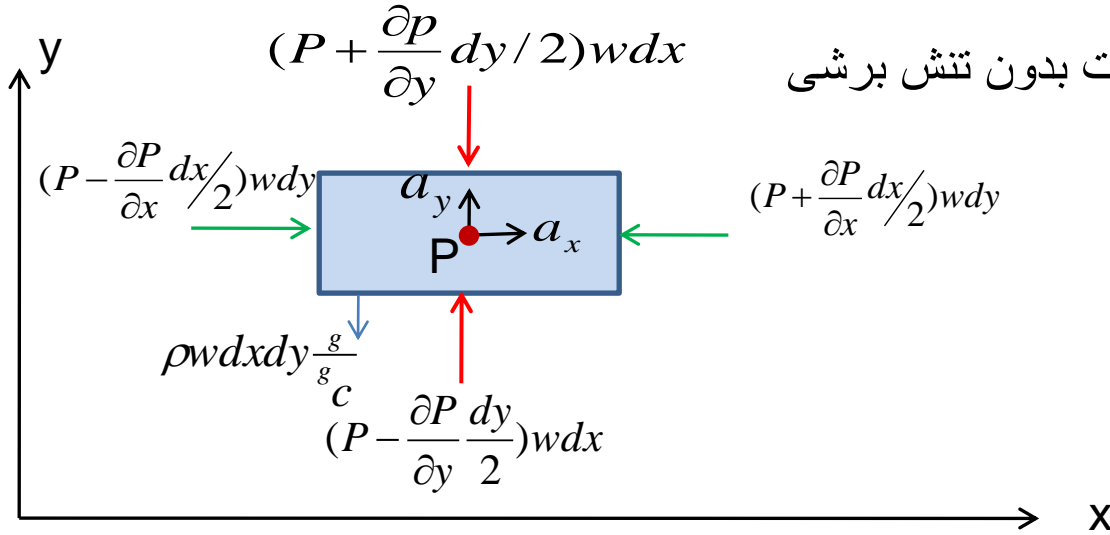
~~$$P_3 = P_2$$~~

~~$$P_4 = P_3 - \rho_m \frac{g}{g_c} R_m$$~~

~~$$P_5 = P_4 - \rho_f \frac{g}{g_c} Z_m$$~~

$$P_1 - P_5 = P_a - P_b = R_m \frac{g}{g_c} (\rho_m - \rho_f)$$

توزیع فشار در سیالات در حال حرکت بدون تنش برشی



**a) x- COMPONENT:**

$$\sum F_x = \frac{m a_x}{g_c} \Rightarrow (P - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{2}) w dy - (P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{2}) w dy =$$

$$= \frac{\rho w dx dy}{g_c} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \frac{a_x}{g_c}}$$

Y-Component:

$$\sum F_y = \frac{m a_y}{g_c}$$

$$\left(P - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) w dx - \left(P + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) w dx - \rho w dx dy \frac{g}{g_c}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho w dx dy a_y}{g_c}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho \frac{a_y + g}{g_c}$$

در اینصورت توزیع فشار از رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$dp = (\partial p / \partial x) dx + (\partial p / \partial y) dy \rightarrow$$

$$dp = -\rho \frac{a_x}{g_c} dx - \rho \frac{a_y + g}{g_c} dy$$

$$\Rightarrow P = -\rho \frac{a_x}{g_c} x - \rho \frac{a_y + g}{g_c} y + p_0$$

$$dP = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_x}{a_y + g}$$



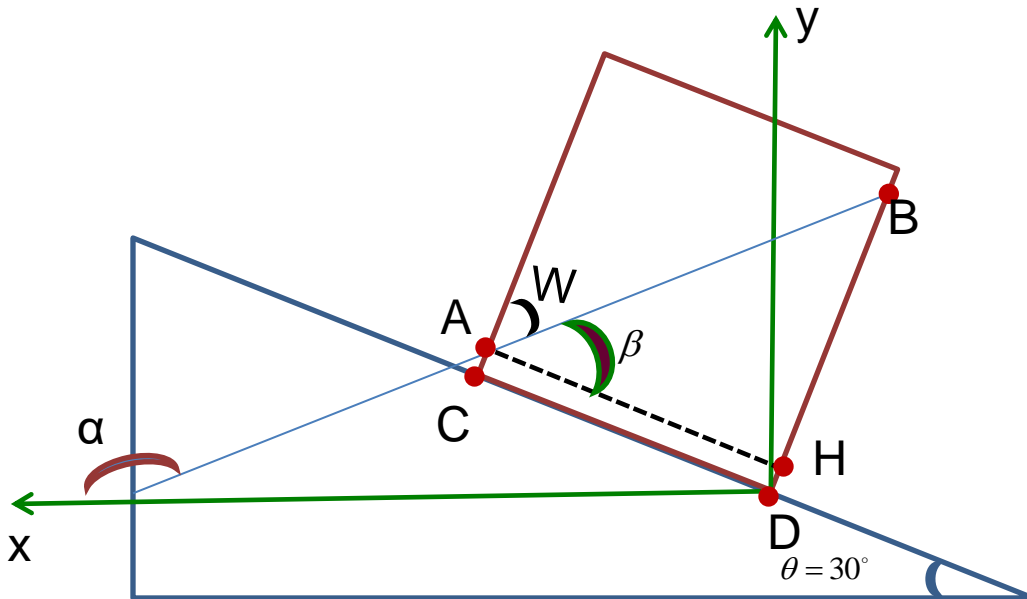
شیب صفحات Isobar

1- معادله فشار سطوح هم فشار:



جعبه ای به ابعاد 2ft تا نیمه از روغنی به چگالی نسبی 0.9 پر شده است. این جعبه با شتاب  $8.05 \frac{ft}{s^2}$  بر روی سطح شیب‌داری که دارای زاویه  $30^\circ$  است به سمت بالا حرکت میکند؛

(a) شیب مایع را در ظرف معین کنید.  
 (b) توزیع فشار در روغن را بدست آورید.

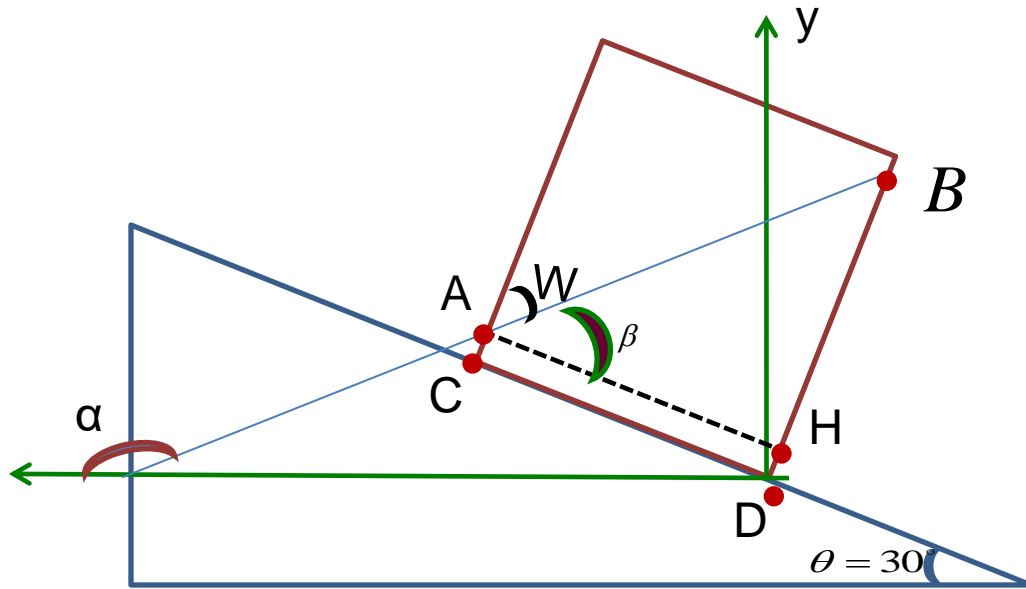


$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_x}{a_y + g} = -\frac{8.05 \cos 30}{8.05 \sin 30 + 32.2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -0.1925 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(-0.1925) = 169.1$$

$$P = P_0 - \rho \frac{a_x}{g_c} x - \rho \frac{a_y + g}{g_c} y =$$

$$P_0 - 0.9 \times 62.4 \frac{6.98}{32.2} x - 0.9 \times 62.4 \frac{4.02 + 32.2}{32.2} y$$



$$P = P_0 - 12.18x - 63.15y$$

$$\beta = 30 + (180 - 169.1) = 40.9^\circ \quad \longrightarrow \quad \tan \beta = \frac{BH}{AH} \Rightarrow BH = 1.73 \text{ ft}$$

$$V = 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ ft}^3$$

حجم جعبه

$$4 \text{ ft}^3 = \frac{8}{2} \text{ ft}^3$$

حجم روغن داخل جعبه

$$V = \frac{AC + BD}{2} \times 2 \times 2 = 4 \text{ ft}^3$$

$$AC + BD = 2'$$

$$AC + BH + DH = 2' \rightarrow AC = 0.135'$$

$$\Rightarrow AC = 0.135' \Rightarrow A \begin{cases} x_A = 1.665' \\ y_A = 1.117' \end{cases}$$

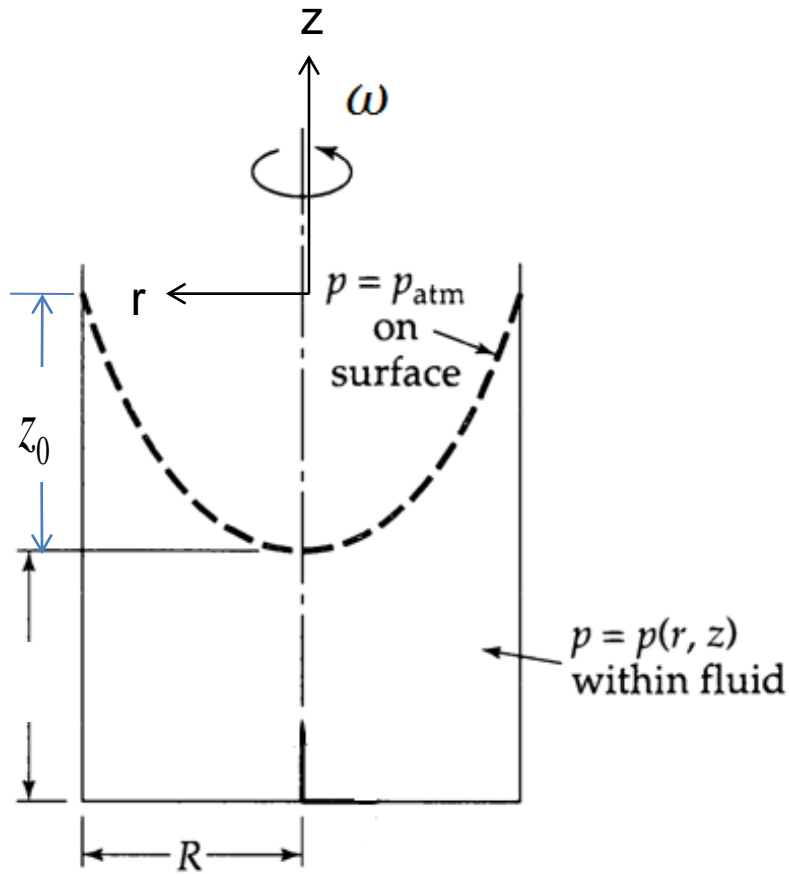
$$0 = P_0 - 12.18 \times 1.665 - 63.15 \times 1.117$$

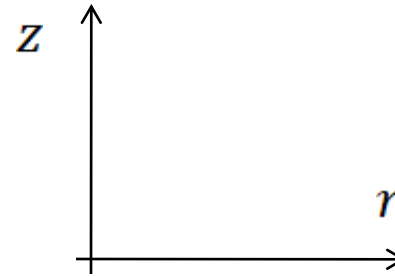
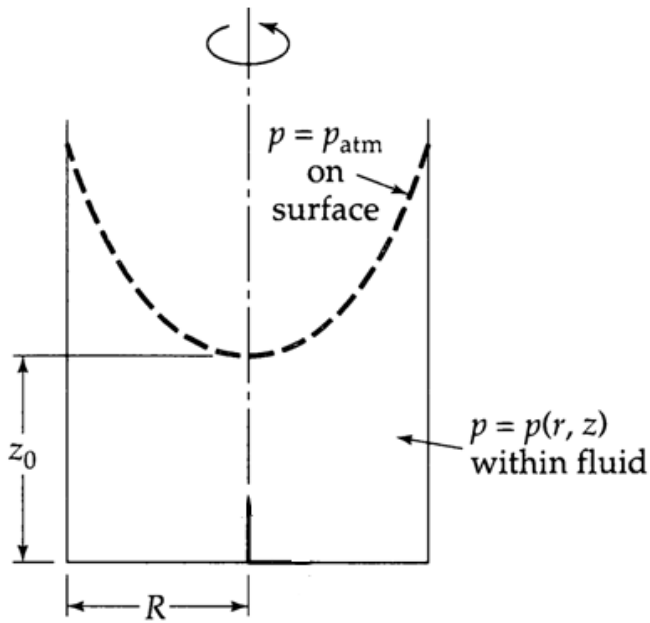
$$\Rightarrow P_0 = 91 \frac{\text{lb}_f}{\text{ft}^2} \text{ gauge}$$

# توزیع فشار در دوران اجباری :

سرعت زاویه ای  $\omega$

شتاب جانب مرکز  $a_r$





این حالت را مشابه مختصات کارتیزین در نظر میگیریم با این فرض که :

$$x = r \quad , \quad y = z \quad , \quad a_r = -r\omega^2 \quad , \quad a_z = a_y$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \frac{a_x}{g_c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{r\omega^2}{g_c}$$



$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \frac{a_z + g}{g_c}$$

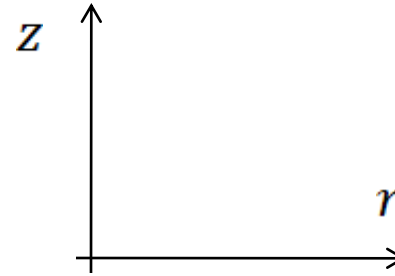
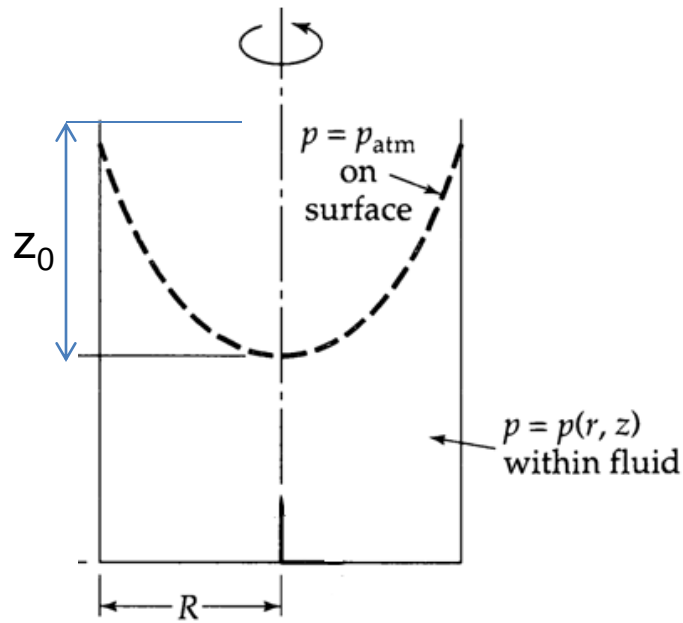
$$\Rightarrow dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial z} dz = \rho \frac{r\omega^2}{g_c} dr - \rho \frac{a_z + g}{g_c} dz$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \rho \frac{r^2 \omega^2}{2g_c} - \rho \frac{a_z + g}{g_c} z + P_0}$$

$$\text{if } dP = 0 \Rightarrow \rho \frac{r\omega^2}{g_c} dr = \rho \frac{a_z + g}{g_c} dz \Rightarrow$$

$$\boxed{z = \frac{\omega^2}{2(a_z + g)} r^2 + z_0}$$

همانطور که ملاحظه می شود سطوح هم فشار سهمی شکل هستند.



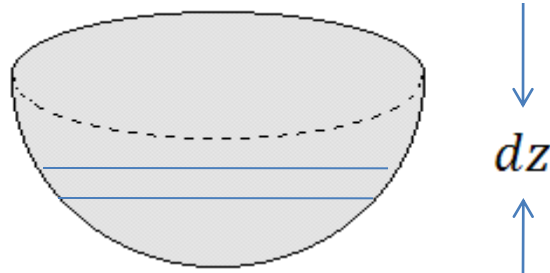
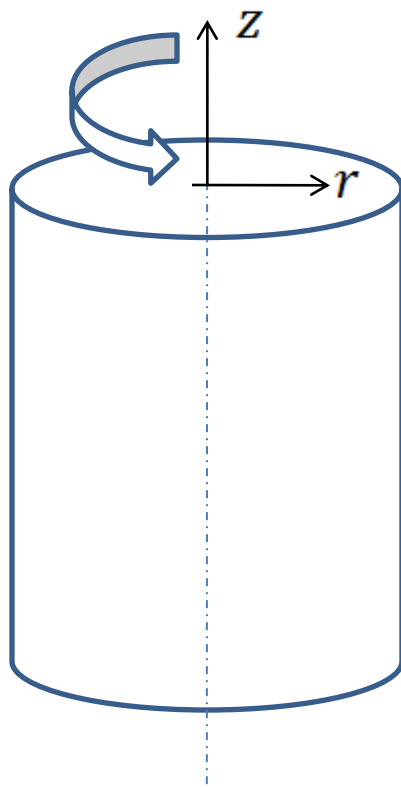
$$\text{if } a_z = 0 \implies z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0 \quad \begin{matrix} r=R \\ \implies \end{matrix} \quad 0 = \frac{R^2 \omega^2}{2g} + z_0$$

$$\implies z_0 = -\frac{R^2 \omega^2}{2g} \quad \implies \boxed{z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 - \frac{R^2 \omega^2}{2g}}$$

معادله سطح آزاد سیال



**مثال 1** استوانه ای به طول  $L$  و شعاع  $R$  پر از آب است و با سرعت زاویه ای  $\omega$  دوران میکند. حجم آب بیرون ریخته را محاسبه کنید.



$$dV = \pi r^2 dz \implies V = \int_V dV = \int_{z_0}^0 \pi r^2 dz$$

$$z = \frac{\omega^2}{2g_c} r^2 + z_0 \implies \frac{(z - z_0) 2g}{\omega^2} = r^2 \implies$$



$$V = \int_{z_0}^0 \frac{(z - z_0)}{\omega^2} 2g\pi dz \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{\pi R^4 \omega^2}{4g} = \frac{\pi R^2 z_0}{2}}$$

مثال 2) استوانه سوال قبل با چه سرعتی دوران کند که قعر سهموی به کف ظرف برسد؟

$$z_0 = -\frac{R^2 \omega^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad -L = -\frac{R^2 \omega^2}{2g} \quad \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2gL}{R^2}} = \boxed{\frac{1}{R} \sqrt{2gL}}$$

مثال 3) این استوانه با چه سرعتی دوران کند تا دایره ای به شعاع  $R_0$  کف ظرف خالی بماند؟

راه اول :

$$-\frac{R_0^2 \omega^2}{2g} - L = -\frac{R^2 \omega^2}{2g} \implies \omega = \sqrt{\frac{2gL}{R^2 - R_0^2}}$$

راه دوم : مقدار  $R_0$  را در معادله سطح آزاد قرار می دهیم :

$$\frac{(R^2 - R_0^2) \omega^2}{2g} = L \implies \omega = \sqrt{\frac{2gL}{R^2 - R_0^2}}$$

**مثال 4** استوانه ای به طول  $L$  و شعاع  $R$  که تا ارتفاع  $H$  پراز آب است با سرعت  $W$  دوران میکند. حجم آب بیرون ریخته را محاسبه کنید.

تا قبل از رسیدن به سرعت دوران بحرانی حجم خالی برابر همان حجم خالی اولیه است:

$$V = \frac{\pi R^4 \omega^2}{4g}$$

$$R^2 \omega_c^2 = 4g(L - H) \implies \omega_c = \frac{2}{R} \sqrt{g(L - H)} \implies$$

$$V = \frac{\pi R^4 \omega^2}{4g} - \pi R^2 (L - H)$$

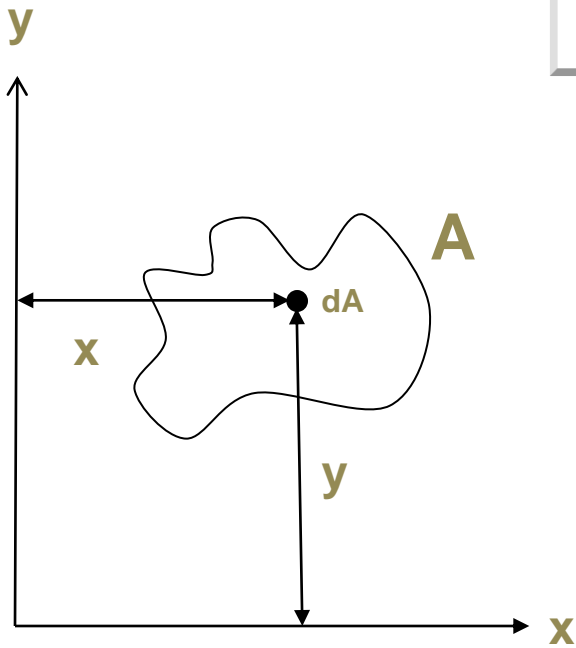
## هیدرو استاتیک سیالات

در این بخش به بررسی نیروهای وارده از طرف سیال ساکن به جداره جامد یا جداره هایی که سیال را احاطه کرده اند پرداخته خواهد شد.

**First & Second Moments, Centroid**

گشتاورهای اول و دوم سطح و مرکز سطح

گشتاورهای اول سطح نسبت به محورهای مختصات



$$I_x = \int_A y dA$$

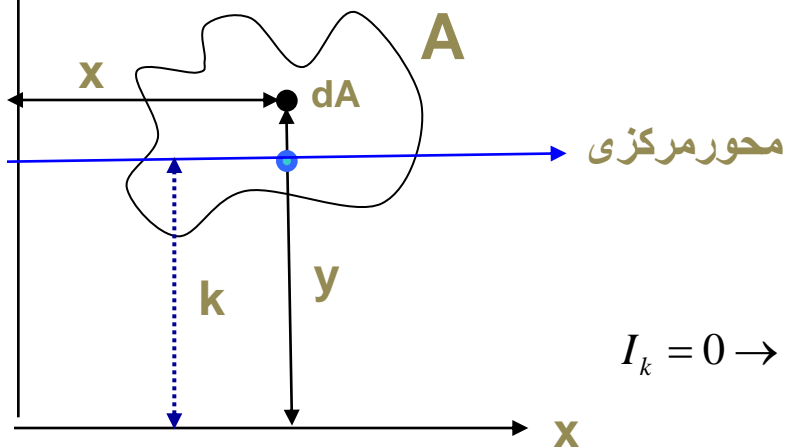
$$I_y = \int_A x dA$$

حال اگر محور  $x$  را به اندازه  $K$  واحد به موازات خودش جابجا کنیم خواهیم داشت:

$y$

$$I_k = \int_A (y - k) dA = \int_A y dA - \int_A k dA = I_x - kA$$

انتقال محور مختصات



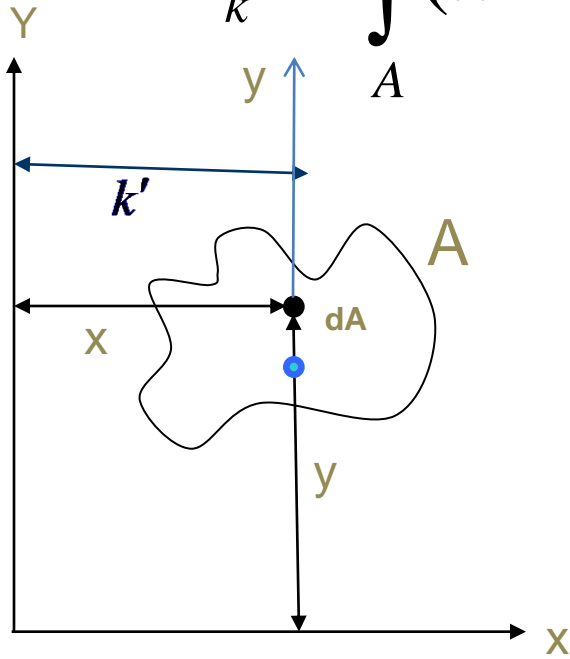
اگر گشتاور حول این محور صفر باشد، در این صورت این محور یک محور مرکزی است.

$$I_k = 0 \rightarrow I_x - kA = 0 \rightarrow K = \frac{I_x}{A} = \frac{\int_A y dA}{A} = \bar{y} \Rightarrow \int_A y dA = \bar{y}A$$

یعنی محور  $K$  یک محور مرکزی است. به همین طریق می توان محور مرکزی به موازات محور  $y$ ها را تعیین نمود.

حال اگر محور  $y$  را به موازات خودش جابجا کنیم

$$I_{k'} = \int_A (x - k') dA = \int_A x dA - \int_A k' dA = I_y - k'A$$



اگر گشتاور حول این محور برابر با صفر باشد، خواهیم داشت:

$$I_{k'} = 0 \rightarrow I_y - k'A = 0 \rightarrow k' = \frac{I_y}{A} = \frac{\int_A x dA}{A} = \bar{x} \Rightarrow \boxed{\int_A x dA = \bar{x}A}$$

محل برخورد دو محور مرکزی  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  را مرکز سطح گویند.

اگر یک صفحه نازک و هموزن داشته باشیم مرکز سطح آن منطبق بر مرکز ثقل آن است.

صفحه هموزن صفحه ای است که دانسیته آن در قسمتهای مختلف آن برابر است.



## گشتاورهای دوم سطح نسبت به محور مختصات، یا ممان اینرسی Moment of Inertia

$$I_{x-x} = \int_A y^2 dA$$

$$I_{y-y} = \int_A x^2 dA$$

گشتاور های دوم سطح نسبت به محور مختصات هیچگاه صفر نمی شوند زیرا  $x^2$  ها یا  $y^2$  ها همیشه نا منفی هستند.

## گشتاور دوم سطح نسبت به محورهای مرکزی

$I_G$ : گشتاور دوم سطح نسبت به محور مرکزی است که به موازات محور  $x$  هاست.

$$I_G = \int_A (y - \bar{y})^2 dA$$

$$I_G = \int_A y^2 dA - 2 \int_A y \bar{y} dA + \int_A \bar{y}^2 dA$$

$$I_G = I_{x-x} - 2\bar{y}^2 A + \bar{y}^2 A$$

$$I_G = I_{x-x} - \bar{y}^2 A \Rightarrow$$

$$I_{x-x} = I_G + \bar{y}^2 A$$

✓ هر سطحی در مسأله های این درس مطرح شود، centroid ( $\bar{y}$  and  $\bar{x}$ ) و  $I_G$  از دانسته های مسأله است و هیچگاه از ما خواسته نمی شود که آن ها را بدست بیاوریم.

$I_C$ : گشتاور دوم سطح نسبت به محور مرکزی که موازی با محور  $y$  هاست

$$I_C = \int_A (x - \bar{x})^2 dA$$

$$I_C = \int_A x^2 dA - 2 \int_A x \bar{x} dA + \int_A \bar{x}^2 dA$$

$$I_C = I_{y-y} - 2\bar{x}^2 A + \bar{x}^2 A$$

$$I_C = I_{y-y} - \bar{x}^2 A \Rightarrow \boxed{I_{y-y} = I_C + \bar{x}^2 A}$$

رای برخی از مقاطع مشخص هندسی معین مثل دایره ، مثلث و...  $I_G$  و  $I_C$  مشخص هستند.

محور های مرکزی برای شکل مشخص است.

مرکز سطح را در سطوح مختلف باید بشناسیم.

$I_G$  و  $I_C$  به صورت توابعی از سطح داده میشوند.

حاصلضرب ماند نسبت به دستگاه مختصات

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

• حال اگر مبدا مختصات را روی مرکز سطح قرار دهیم می خواهیم ببینیم که حاصلضرب ماند نسبت به محور های مختصات جدید چه تغییری میکند

$$\bar{I}_{xy} = \int_A (x - \bar{x})(y - \bar{y}) dA$$

$$\bar{I}_{xy} = \int_A xy dA - \int_A \bar{x}y dA - \int_A x\bar{y} dA + \int_A \bar{x}\bar{y} dA$$

$$\bar{I}_{xy} = I_{xy} - \bar{x}\bar{y}A - \bar{x}\bar{y}A + \bar{x}\bar{y}A$$

$$\bar{I}_{xy} = I_{xy} - \bar{x}\bar{y}A \quad \Rightarrow \quad I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y}A$$

نکته 1 : در سطوح هموزن و صاف مرکز سطح و مرکز ثقل بر هم منطبقند

نکته 2 : اگر یکی از محورهای مرکزی محور تقارن سطح باشد؛ آنگاه :

$$\bar{I}_{xy} = 0$$

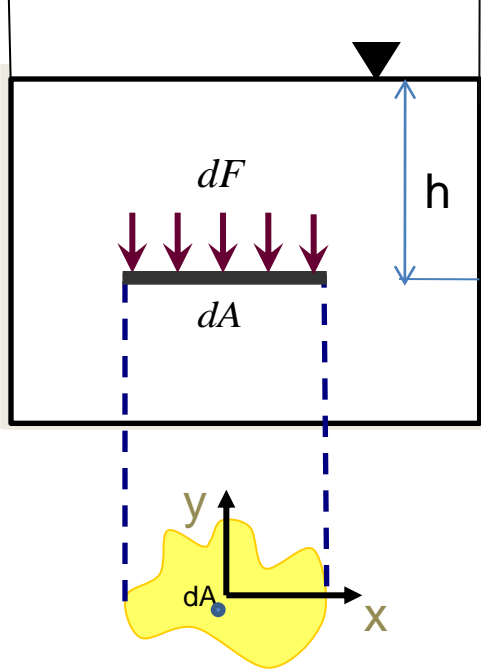
## محاسبه نیروهای وارده از طرف سیال ساکن به جداره های جامد

الف: یافتن نیروی وارد شده بر یک صفحه افقی و محاسبه نقطه اثر آن

### نکاتی چند در مورد محاسبه نیروی هیدرواستاتیک

● مقدار نیروی فشاری به المنت سطح بستگی دارد.

● نیرویی که از طریق فشار به المنت سطح وارد میشود نیروی جزیی نام دارد که به محل المنت سطح و به اندازه فشار آن بستگی دارد.



$$dF = p dA \Rightarrow F = \int_A p dA$$

$$F = \int \rho \frac{g}{g_c} h dA = \rho \frac{g}{g_c} h A$$

حجم آن مقداری از سیال  
که بالای سطح است.

$$\times \rho =$$

جرم آن مقداری از سیال  
که بالای سطح است.

$$\times \frac{g}{g_c} =$$

وزن آن مقداری از سیال  
که بالای سطح است.



## بدست آوردن نقطه اثر نیرو

مجموع گشتاور نیرو های جزئی  $dF$  = گشتاور حاصل از نیروی منتهجه (F)

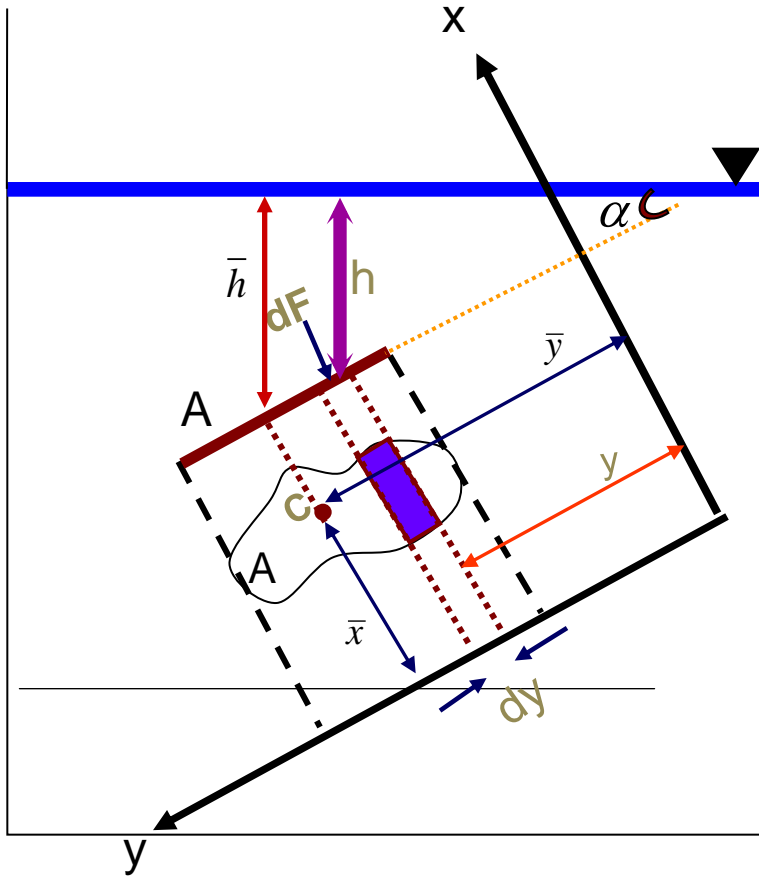
نقطه اثر نیرو را اصطلاحاً مرکز فشار یا **Pressure Center** گویند  $\begin{matrix} x_p \\ P \\ y_p \end{matrix}$

گشتاور حول محور x یک دستگاه دلخواه

$$\underbrace{F \cdot y_p}_{\text{گشتاور}} = \int_A y dF = \int_A y p dA = \int_A y \rho \frac{g}{g_c} h dA = \bar{y} A \rho \frac{g}{g_c} h$$

$$\rho \frac{g}{g_c} h A \cdot y_p = \rho \frac{g}{g_c} h \bar{y} A \quad \longrightarrow \quad \boxed{y_p = \bar{y}}$$

ب: بدست آوردن نیروی وارد بر یک صفحهٔ مایل



$$dF = PdA \Rightarrow F = \int_A PdA$$

$$dF = \rho \frac{g}{g_c} h dA$$

$$F = \int_A \rho \frac{g}{g_c} h dA; \quad h = y \sin \alpha$$

$$F = \int_A \rho \frac{g}{g_c} y \sin \alpha \cdot dA = \left( \rho \frac{g}{g_c} \sin \alpha \right) \int_A y dA$$

$$F = \left( \rho \frac{g}{g_c} \sin \alpha \right) \bar{y} A \in \bar{h} = \bar{y} \sin \alpha$$

$$\Rightarrow F = \rho \frac{g}{g_c} \bar{h} A = \bar{p} A$$

$$F = \bar{p} A$$

فشار در مرکز سطح

## بدست آوردن نقطه اثر نیرو

گشتاور نیروی  $F$  حول محورهای  $x$  و  $y$  باید برابر با مجموع گشتاورهای نیروهای جزئی حول آن محور ها باشد.

می خواهیم مختصات مرکز فشار را بدانیم بدانیم :  

$$p \begin{cases} x_p = ? \\ y_p = ? \end{cases}$$

$$y_p \cdot F = \int_A y dF \longrightarrow$$



$$\bar{y} \cdot A \cdot y_p = \int_A y^2 dA = I_{x-x} = I_G + \bar{y}^2 A \longrightarrow y_p = \frac{\bar{y}^2 + I_G}{\bar{y}A} = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A}$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A}$$

$I_G$  هیچگاه صفر نمی شود و در اینصورت داریم :

حول محور y:

$$x_p \cdot F = \int_A x dF \quad \longrightarrow \quad \rho \frac{g}{g_c} (\sin \alpha \bar{y}) A x_p = \int_A x \rho \frac{g}{g_c} (y \sin \alpha) dA$$

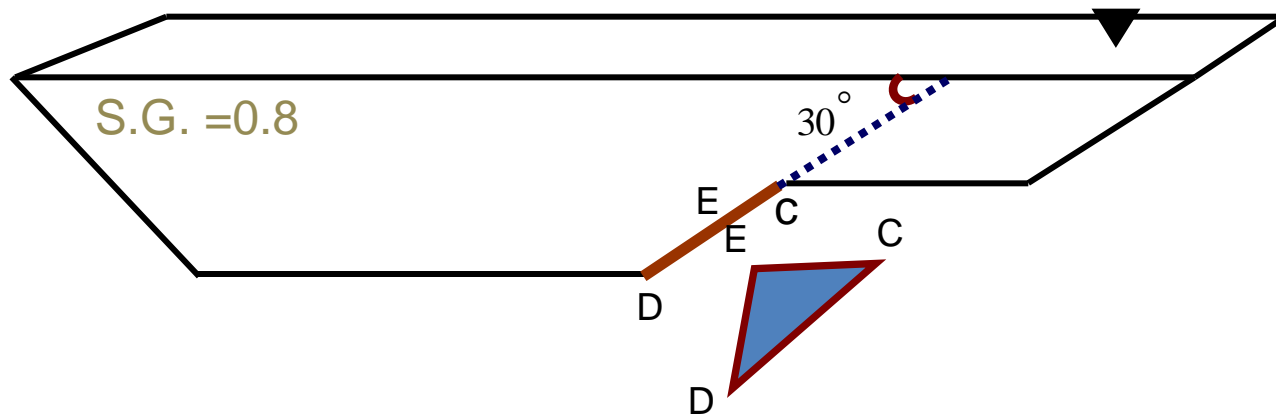
$$\bar{y} \cdot A \cdot x_p = \int_A xy dA = I_{x-y} = \bar{I}_{xy} + \bar{x} \bar{y} A \quad \longrightarrow \quad \bar{y} \cdot A \cdot x_p = \int_A xy dA = I_{x-y} = \bar{I}_{xy} + \bar{x} \bar{y} A$$

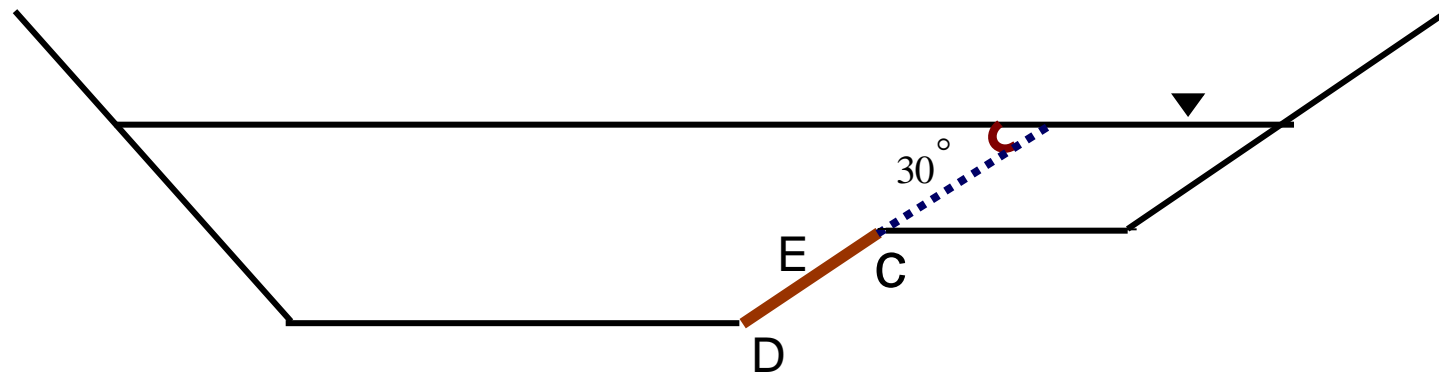
$$x_p = \frac{\bar{x} \bar{y} + \bar{I}_{xy}}{\bar{y} A} = \bar{x} + \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y} A} \quad \longrightarrow \quad \boxed{x_p = \bar{x} + \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y} A}}$$

دریچه مثلثی شکل  $CDE$  مطابق شکل در طول  $CD$  لولا شده است و با یک نیروی قائم  $P$  که در نقطه  $E$  اعمال میشود، باز میگردد. این دریچه روغنی به چگالی نسبی  $0.8$  را روی خود نگه داشته است و در جانب تحتانی با اتمسفر ارتباط دارد.

با صرفنظر از وزن دریچه

- (a) مقدار نیروی وارد شده بر دریچه را با استفاده از رابطه و انتگرال گیری محاسبه کنید.
- (b) موقعیت مرکز فشار را تعیین کنید.
- (c) مقدار نیروی مورد نیاز برای باز کردن دریچه را محاسبه کنید.

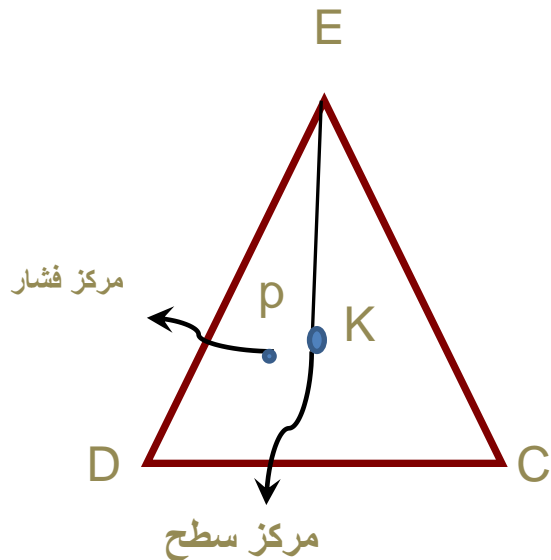




$$F = \bar{P}A$$

$\bar{P}$  فشار در مرکز سطح

2/3 از راس مثلث (متساوی الساقین) → "K" مرکز سطح مثلث → مرکز سطح مثلث = محل برخورد میانه ها



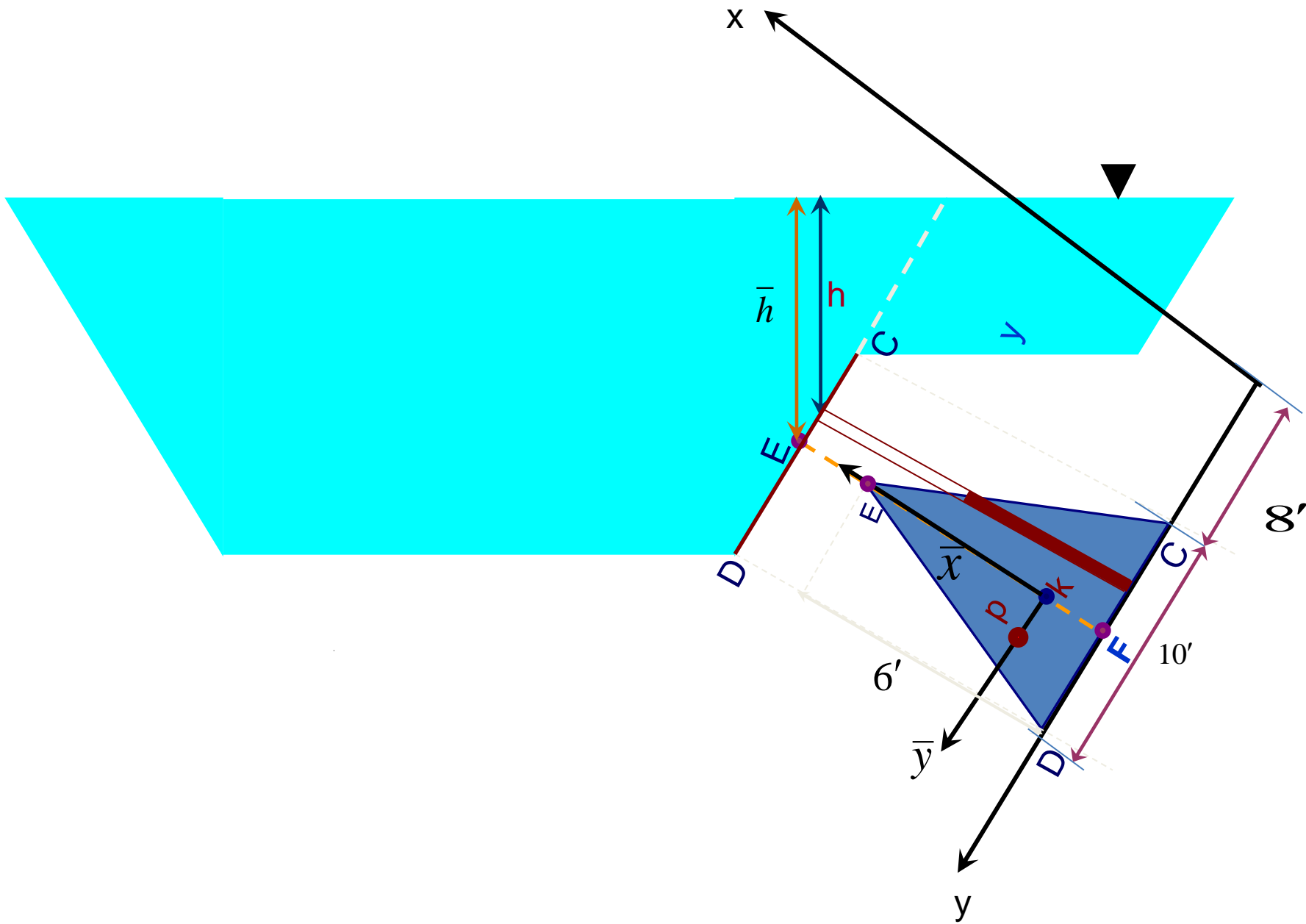
$$K \begin{cases} x_k = \frac{1}{3} \times 6 = 2' \\ y_k = \frac{10}{2} + 5 = 13' \end{cases}$$

$$F = \bar{P}A = \rho \frac{g}{g_c} \bar{h}A = 0.8 \times 62.4 \times \frac{32.2}{32.2} \times 13 \sin 30 \times \frac{6 \times 10}{2}$$

$$F = 9734.4 \text{ lb}_f$$

نیروی وارد از طرف سیال بر سطح دریچه

مقدار نیروی وارد شده بر درریچه با استفاده از انتگرال گیری



$$\begin{cases} x_p = \bar{x} + \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A} \\ y_p = \bar{y} + \frac{I_G}{\bar{y}A} \end{cases}$$

$$F = \int_A P dA = \int_A \rho \frac{g}{g_c} h dA$$

$$= \int_8^{18} \rho \frac{g}{g_c} h x dy = \int_8^{18} \rho \frac{g}{g_c} (y \sin \alpha) x dy$$

$$F = \left( \rho \frac{g}{g_c} \sin \alpha \right) \int_8^{18} xy dA = \left( \rho \frac{g}{g_c} \sin \alpha \right) \left[ \int_8^{13} xy dy + \int_{13}^{18} xy dy \right]$$



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

میدانیم که:

$$x = \frac{6}{5}(y - 8)$$

معادله خط CE

$$x = \frac{6}{5}(18 - y)$$

معادله خط DE

$$F = \left( \rho \frac{g}{g_c} \sin \alpha \right) \int_8^{18} xy dA = \left( \rho \frac{g}{g_c} \sin \alpha \right) \left[ \int_8^{13} xy dy + \int_{13}^{18} xy dy \right]$$

$$F = 0.8 \times 62.4 \times \frac{32.2}{32.2} \times \frac{1}{2} \left[ \int_8^{13} (y-8) y dy + \int_{13}^{18} (18-y) y dy \right]$$

$$F = 9734.4 \text{ lb}_f$$

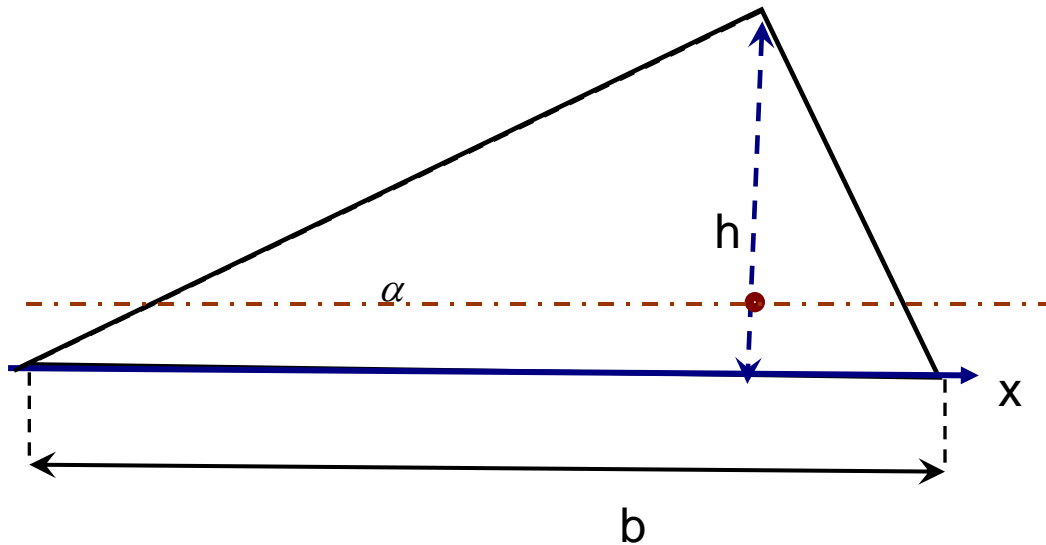
بدست آوردن مختصات  $P \begin{vmatrix} x_p \\ y_p \end{vmatrix}$

$$x_p = \bar{x} + \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A}$$

از آنجا که دریاچه مثلثی شکل به شکل یک مثلث متساوی الاضلاع است پس محور مرکزی  $x$  همان محور تقارن است  $\leftarrow \bar{I}_{xy} = 0$

$$x_p = \bar{x} = 2$$

بدست آوردن  $I_G$



گشتار دوم سطح نسبت به محور  $\alpha$

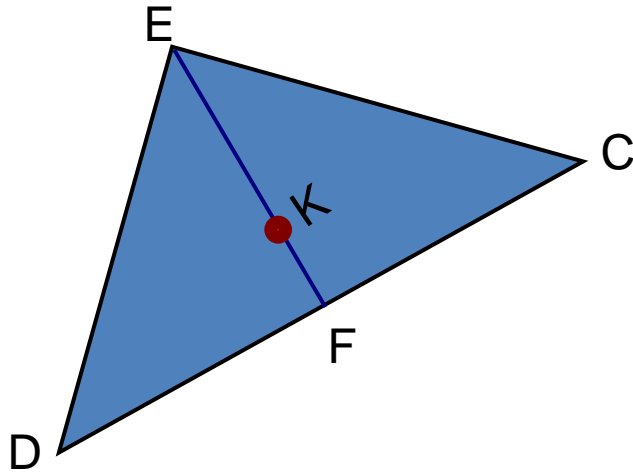
$$I_G = \frac{bh^3}{36}$$

گشتار دوم سطح نسبت به محور  $x$   $I_{x-x} = \frac{1}{12}bh^3$

چون محاسبه  $I_G$  بدین شکل مشکل است پس دریچه را به صورت دو مثلث در نظر میگیریم

$$EF=6$$

$$DF=5$$

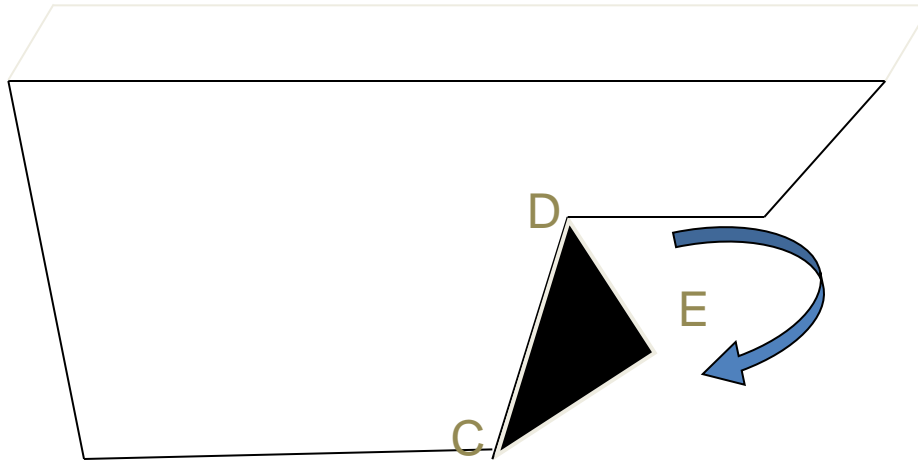


$$y_p = \left(13 + \frac{6 \times 5^3 \times 2}{12 \times 13 \times 36}\right) = 13.32'$$



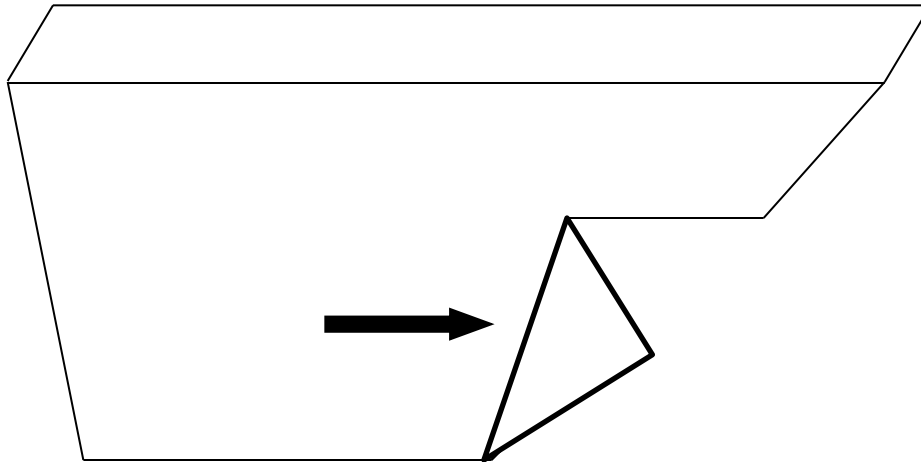
دو مثلث

مرکز فشار به اندازه  $0.32'$  از مرکز سطح پایین تر قرار دارد ولی  $x_p$  آن همان  $\bar{x} = 2'$  است.



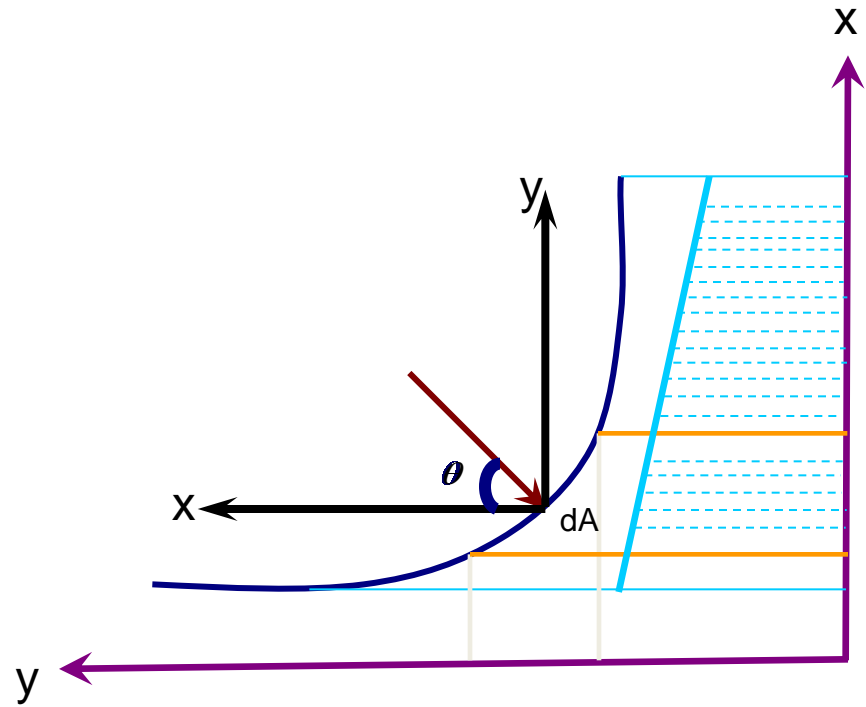
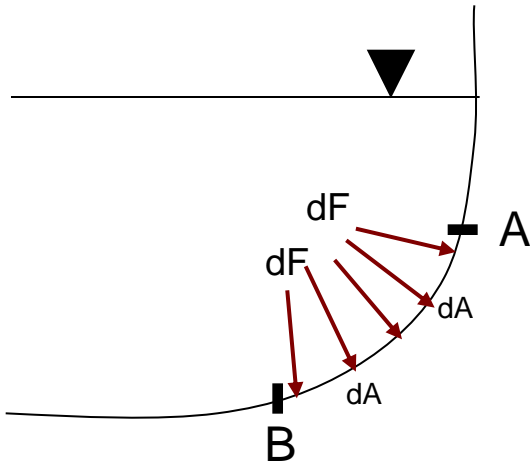
دوران، چرخش دریچه

$$F \times 2' \leq P \times 6'$$
$$9734.4 \times 2' \leq P \times 6'$$



جابجا شدن دریچه

ج: محاسبه نیرو بر روی سطوح خمیده



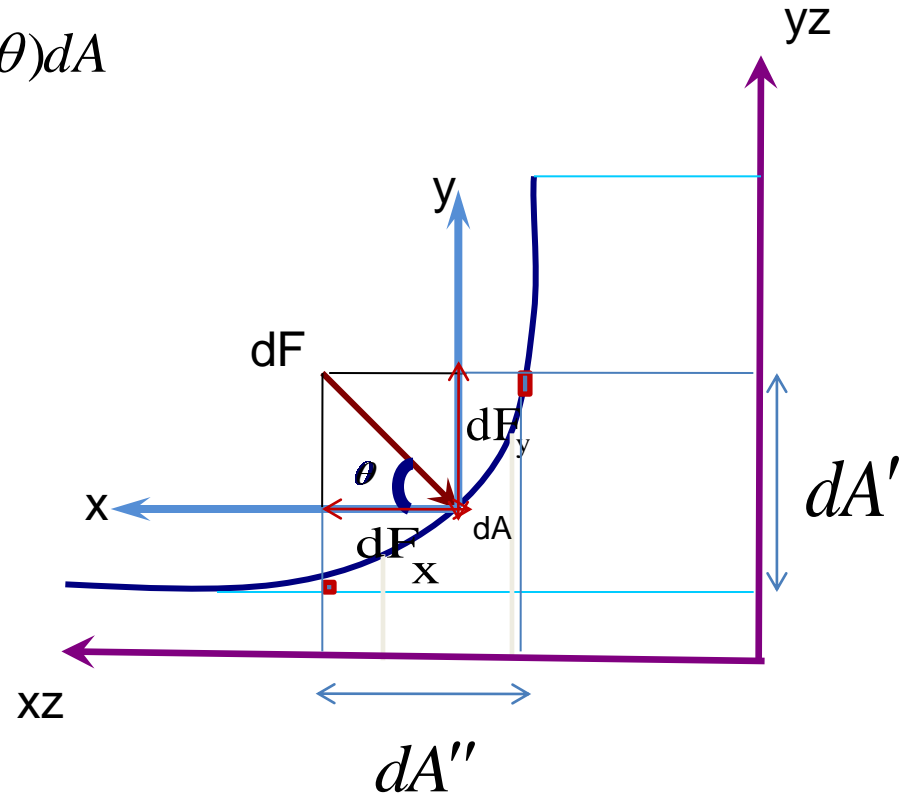
$$dF_x = p dA \cos \theta \Rightarrow F_x = \int_A (p \cos \theta) dA$$

$$dF_y = p dA \sin \theta \Rightarrow F_y = \int_A (p \sin \theta) dA$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$dA \cos \theta = dA'$$

$$dA \sin \theta = dA''$$



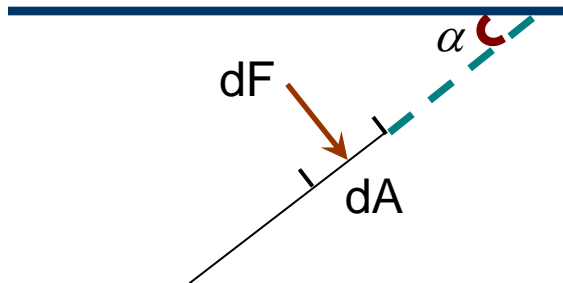
مولفه قائم نیرو = وزن سیالی که روی سطح قرار دارد.

مولفه افقی نیرو = نیروی وارد بر تصویر سطح بر روی یک صفحه عمودبست.



## The Pressure Prism

## منشور فشار



نیروی وارد شده بر المنت سطح  $dA$

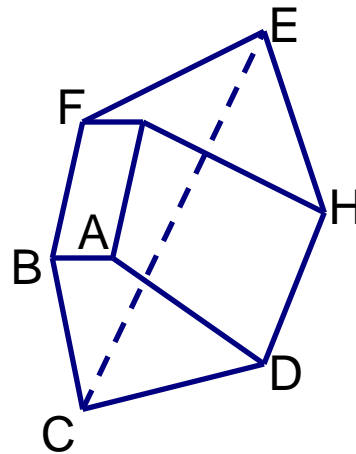
$$dF = p dA$$

ارتفاع      سطح قاعده

$$F = \int_A p dA$$

یعنی نیروی وارده، حجم منشور ناقصی که در هر نقطه از آن، ارتفاع برابر با فشار سیال در آن نقطه است

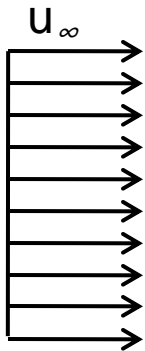
مقدار نیروی وارد بر منشور = حجم منشور



## Chapter 5

# Bernoulli's Equation

**Stream line**: ✓ مکان هندسی نقاطی است که یک ذره سیال در مسیر حرکت بر روی آن جابجا می شود. اگر خط جریان پیوسته نباشد، خط جریان قطع شده است.  
✓ خطی است که در هر نقطه مماس بر بردار سرعت سیال در آن نقطه است.



**Plug flow**: در این جریان بردار های سرعت در هر مقطع موازی و هم اندازه هستند.

## Equation of continuity.

We have a previous view of:

□ در حالت یکنواخت ، مقدار جرم سیالی که از هر مقطع  
مجرا عبور کند ثابت است. چون جرمی در مسیر ذخیره نمی  
شود ، یعنی در هر مقطع:  
 $\dot{m} = \rho \bar{v} S =$  مقدار ثابت

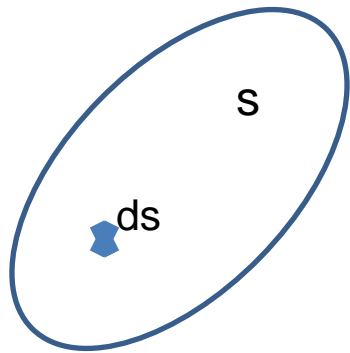
$$\dot{m} = \rho \bar{v} S = \rho_a \bar{v}_a S_a = \rho_b \bar{v}_b S_b = \dots$$

سرعت متوسط و نحوه ی

محاسبه ی آن:

$$dm = \rho v ds \quad \rightarrow \quad \dot{m} = \int_s \rho v ds$$

$$\dot{m} = \rho \bar{v} s$$



$$\bar{v} = \frac{\int_s \rho v ds}{\rho s} \quad \rightarrow \quad \bar{v} = \frac{1}{s} \int_s v ds$$

✓ نحوه ی ارتباط سرعت، فشار و position سیال در طول مسیر

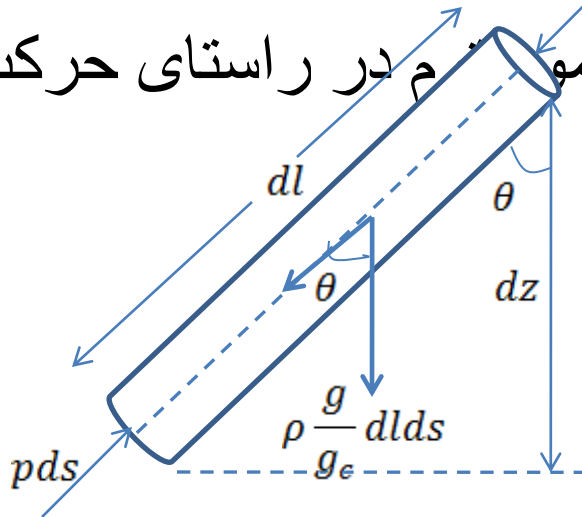
چگونه است؟

اگر سیال در حالت Steady state از مسیری عبور کند و در طی مسیر جریان Plug flow باشد، با نوشتن موازنه

$$\sum F_l = ma_l$$

سیال خواهیم داشت:

$$pds - \left(p + \frac{dp}{dl} dl\right) ds - \rho dl ds \frac{g}{g_c} \cos \theta = \rho dl ds \frac{a_l}{g_c}$$



$$\sum F_l = \frac{ma_l}{g_c}$$

$$pds - (p + \frac{dp}{dl} dl)ds - \rho dl ds \frac{g}{g_c} \cos \theta = \rho dl ds \frac{a_l}{g_c} \implies -\frac{dp}{dl} - \rho \frac{g}{g_c} \cos \theta = \rho \frac{a_l}{g_c}$$

$$\frac{dp}{dl} + \rho \frac{g}{g_c} \cos \theta + \rho \frac{a_l}{g_c} = 0$$

$$\cos \theta = \frac{dz}{dl}$$

$$a_l = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dl} \times \frac{dl}{dt} = u \frac{du}{dl}$$

$$\frac{dp}{dl} + \rho \frac{g}{g_c} \frac{dz}{dl} + \rho \frac{udu}{g_c dl} = 0$$

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{g}{g_c} dz + \frac{udu}{g_c} = 0 \quad \text{Euler's Equation}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \rho g$$

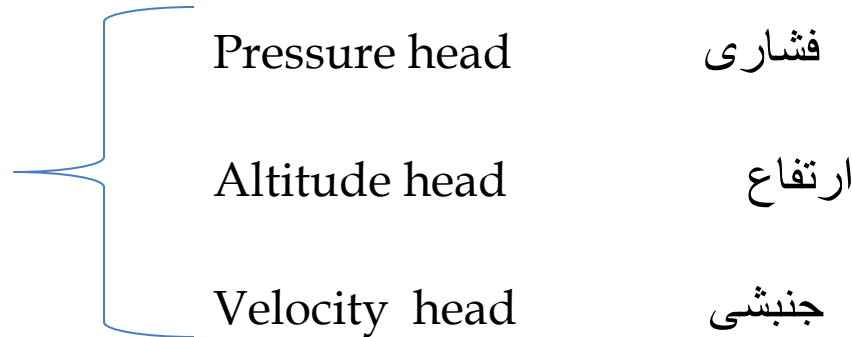
با صرف نظر از آثار

ویسکوزیته:  $\frac{p}{\rho} + \frac{g}{g_c} z + \frac{u^2}{2g_c} = C$  **Bernoulli's Eq.**

حال در نظر داریم مفاهیم جملات موجود در رابطه برنولی را بیان نماییم. اگر به بعد و واحد هر یک از جملات دقت شود ملاحظه می شود که همگی دارای بعد انرژی به ازای واحد جرم هستند که هر یک از آنها را هد می نامند.

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{u_a^2}{2g_c} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{u_b^2}{2g_c} = \dots$$

**Head**  
(راس):



$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{u_a^2}{2g_c} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{u_b^2}{2g_c} = \dots$$

اگر سیال در مسیر افقی حرکت کند:



# تصحیحات رابطه ی برنولی:

1- تصحیحات مربوط به افت انرژی: بی تردید اگر سیال از مقطع بر روی یک خط جریان به مقطع انرژی خواهد شد

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{u_a^2}{2g_c} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{u_b^2}{2g_c} + h_f$$

افت انرژی به ازای واحد جرم سیال

2- جایگزینی جمله مربوط به انرژی جنبشی:

$$dm = \rho v ds \rightarrow \dot{m} = \int_s \rho v ds$$
$$d\dot{E}_k = dm \times \frac{v^2}{2g_c} \rightarrow \dot{E}_k = \int_s \rho \frac{v^3}{2g_c} ds$$

$$\frac{P_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_a + \frac{\int_{s_a} \rho \frac{v_a^3}{2g_c} ds_a}{\int_{s_a} \rho v_a ds_a} = \frac{P_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_b + \frac{\int_{s_b} \rho \frac{v_b^3}{2g_c} ds_b}{\int_{s_b} \rho v_b ds_b} + h_f$$

$$\frac{u^2}{2g_c} = \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g_c}$$

$$\frac{u^2}{2g_c} = \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g_c} = \frac{\int_s \rho \frac{v^3}{2g_c} ds}{\rho \bar{v} s}$$

$$\alpha = \frac{1}{s} \int_s \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^3 ds$$

Kinetic Energy correction factor

ضریب تصحیح انرژی جنبشی



$$\frac{P_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_a + \frac{\alpha_a \times \bar{v}_a^2}{2g_c} = \frac{P_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_b + \frac{\alpha_b \times \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

3. اضافه کردن جمله ای برای وسائلی که به سیال انرژی می دهند یا از آن انرژی می گیرند.

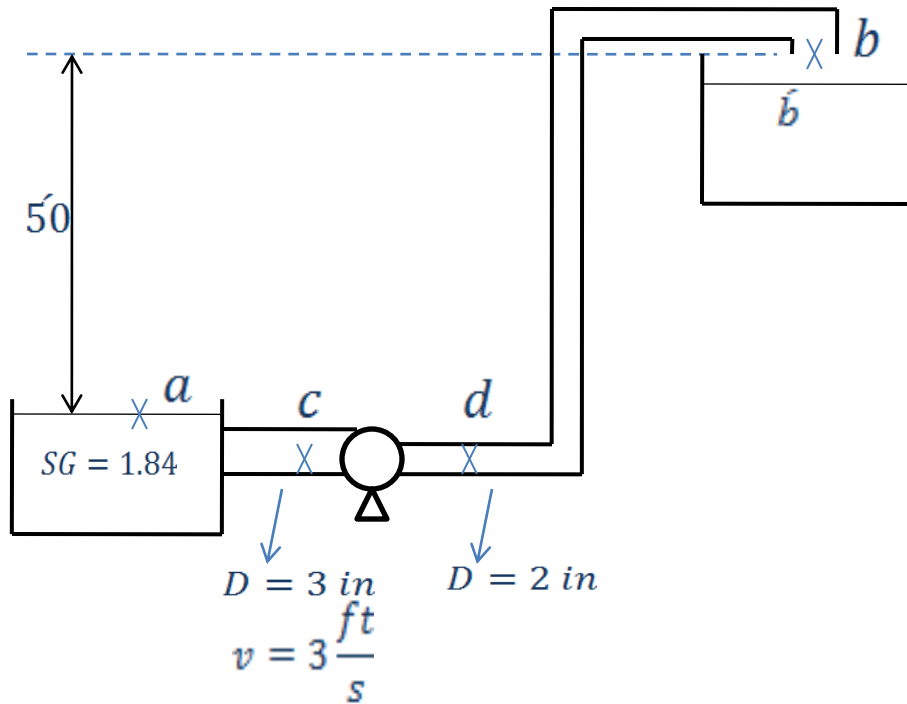
$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} \pm \eta W_p = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

$\eta$ : راندمان وسیله

$W_p$ : انرژی به ازای واحد جرم سیال

**سوال:** مطابق شکل پمپی با راندمان 60 درصد، محلولی با چگالی نسبی 1.84 را از داخل منبعی که به یک لوله با قطر 3 اینچ متصل است به مخزن دیگری انتقال می دهد. مخزن دوم توسط یک لوله با قطر 2 اینچ که به خروجی پمپ متصل است تغذیه می شود. انتهای لوله 2 اینچ در ارتفاع 50 فوت از سطح مایع در مخزن اولی قرار گرفته است. سرعت در لوله 3 اینچ، 3 فوت بر ثانیه می باشد.

الف) توان پمپ را محاسبه کنید. ب) چه اختلاف فشاری در  $\frac{ft \cdot lb}{lb_m}$  طرف پمپ ایجاد می شود؟ افت انرژی در تمامی خط لوله و سیستم 10 می باشد.



با نوشتن رابطه بر نولی بین مقاطع a و b که بین آنها خط جریان وجود دارد خواهیم داشت:

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} + \eta w_p = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

$$\bar{v}_b s_b = \bar{v}_c s_c \rightarrow \bar{v}_b = \bar{v}_c \left( \frac{s_c}{s_b} \right) = \bar{v}_c \left( \frac{D_c}{D_b} \right)^2 \rightarrow \bar{v}_b = 3 \left( \frac{3}{2} \right)^2 = 6.74 \frac{ft}{s}$$

$$\frac{p_a}{\rho_a} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} + \eta w_p = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

قابل صرف

$$\alpha \cong 1.0 \rightarrow \eta w_p \frac{g}{g_c} (z_b - z_a) + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

$$0.6w_p = \frac{32.2}{32.2}(50) + \frac{1 \times 6.75^2}{2 \times 32.2} + 10 \quad \rightarrow w_p = 101.1 \frac{ft \cdot lb_f}{lb_m}$$

$$\dot{m} = \rho_c \bar{v}_c s_c = 1.84 \times 62.4 \times 3 \times \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{12}\right)^2 = 17.66 \frac{lb_m}{s}$$

$$power = \frac{\dot{m}w_p}{550} = \frac{17.66 \times 101.1}{550} = 3.25 Hp$$

$$\frac{p_c}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_c + \frac{\alpha_c \bar{v}_c^2}{2g_c} + \eta w_p = \frac{p_d}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_d + \frac{\alpha_d \bar{v}_d^2}{2g_c} + h_f$$

$$\bar{v}_d \approx \bar{v}_b \rightarrow \bar{v}_d = \bar{v}_b = 6.75 \frac{ft}{s}$$

$$\frac{P_d - P_c}{1.84 \times 62.4} = 0.6 \times 101.1 + \frac{1 \times 3^2 - 1 \times 6.27^2}{2 \times 32.2}$$

$$\Delta P = 6902 \frac{lb_f}{ft^2} = 47.6 psi = 3.26 atm$$

## موازنه ماکروسکوپیک Macroscopic Momentum Balance

$$\sum F = \frac{1}{g_c} (\dot{M}_b - \dot{M}_a)$$

مومنتم

$$P_a S_a - P_b S_b + F_w - F_g = \frac{1}{g_c} (\dot{M}_b - \dot{M}_a)$$

مومنتم خروجی و ورودی سیال rate

$$dm = \rho v ds$$

$$d\dot{M} = \rho v^2 ds \rightarrow \dot{M} = \int_s \rho v^2 ds \rightarrow \dot{M} = \beta \rho \bar{v}^2 s$$

$$\rightarrow \beta = \frac{1}{s} \int_s \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2 ds$$

Momentum correction factor

ضریب تصحیح مومنتم

در نتیجه خواهیم داشت:

$$P_a S_a - P_b S_b + F_w - F_g = \frac{1}{g_c} (\beta_b \rho_b \bar{v}_b^2 S_b - \beta_a \rho_a \bar{v}_a^2 S_a)$$

$$= \frac{1}{g_c} (\beta_b \dot{m} \bar{v}_b - \beta_a \dot{m} \bar{v}_a) = \frac{\dot{m}}{g_c} (\beta_b \bar{v}_b - \beta_a \bar{v}_a)$$

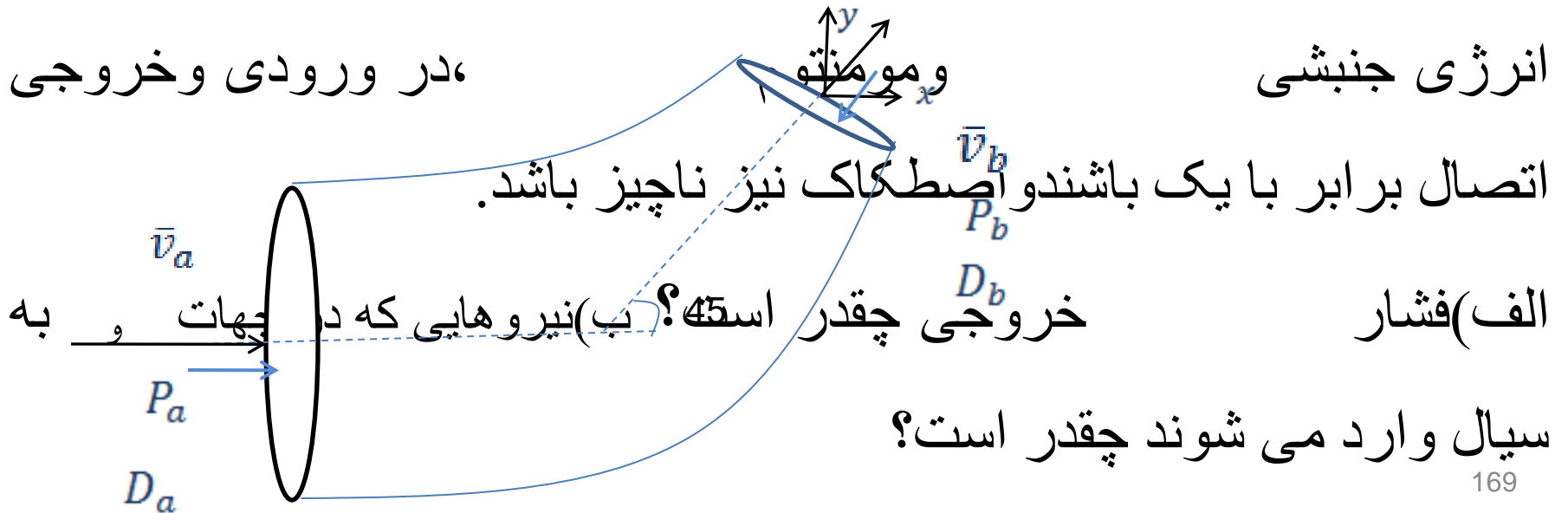
$$P_a S_a - P_b S_b + F_w - F_g = \frac{\dot{m}}{g_c} (\beta_b \bar{v}_b - \beta_a \bar{v}_a)$$

$\beta$  هم مانند  $\alpha$  در جریان در هم  
لوله ها خیلی به یک نزدیک  
است.



**سوال:** آب با دانسیته  $\frac{kg}{m^3}$  به طور افقی با سرعت  $\frac{m}{s}$  به طور افقی با سرعت  $\frac{KN}{m^2}$  و فشار وارد می شود.

به یک اتصال با قطر ورودی 50 میلیمتر وارد می شود. آب این اتصال را به طور افقی در همان سطح قبلی و با زاویه 45 درجه ترک می نماید قطر خروجی اتصال 20 میلیمتر می باشد. با فرض اینکه ضرایب تصحیح انرژی جنبشی در ورودی و خروجی



## روش حل مسئله:

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} + \eta w_p = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + \cancel{h_f^0}$$

$$\bar{v}_b = \bar{v}_a \left( \frac{S_a}{S_b} \right) = \bar{v}_a \left( \frac{D_a}{D_b} \right)^2 = 1 \times \left( \frac{50}{20} \right)^2 = 6.25 \frac{m}{s}$$

$$\frac{100000}{998} + \frac{1 \times 1^2}{2 \times 1} = \frac{P_b}{998} + \frac{1 \times 6.25^2}{2 \times 1} \rightarrow P_b = 81010 \text{ Pa gauge}$$

X – component:

$$P_a S_{a,x} - P_b S_{b,x} + F_{w,x} - F_{g,x} = \frac{\dot{m}}{g_c} (\beta_b \bar{v}_{b,x} - \beta_a \bar{v}_{a,x})$$

$$S_{a,x} = S_a = \frac{\pi}{4} \left( \frac{50}{1000} \right)^2 = 0.001964 \text{ m}^2 \quad S_{b,x} = S_b \cos \theta = \frac{\pi}{4} \times \left( \frac{20}{1000} \right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.000222 \text{ m}^2$$

$$\bar{v}_{a,x} = \bar{v}_a = 1.0 \frac{m}{s} \quad \bar{v}_{b,x} = \bar{v}_b \cos \theta = 6.25 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4.42 \frac{m}{s}$$

$$\dot{m} = \rho_a \bar{v}_a S_a = 998 \times 1.0 \times 0.001964 = 1.96 \frac{kg}{s}$$

$$100000 \times 0.001964 - 81010 \times 0.000222 + F_{w,x} = \frac{1.96}{1} (1 \times 4.42 - 1 \times 1) \quad F_{w,x} = -171.4 \text{ N}$$

*Y – component:*

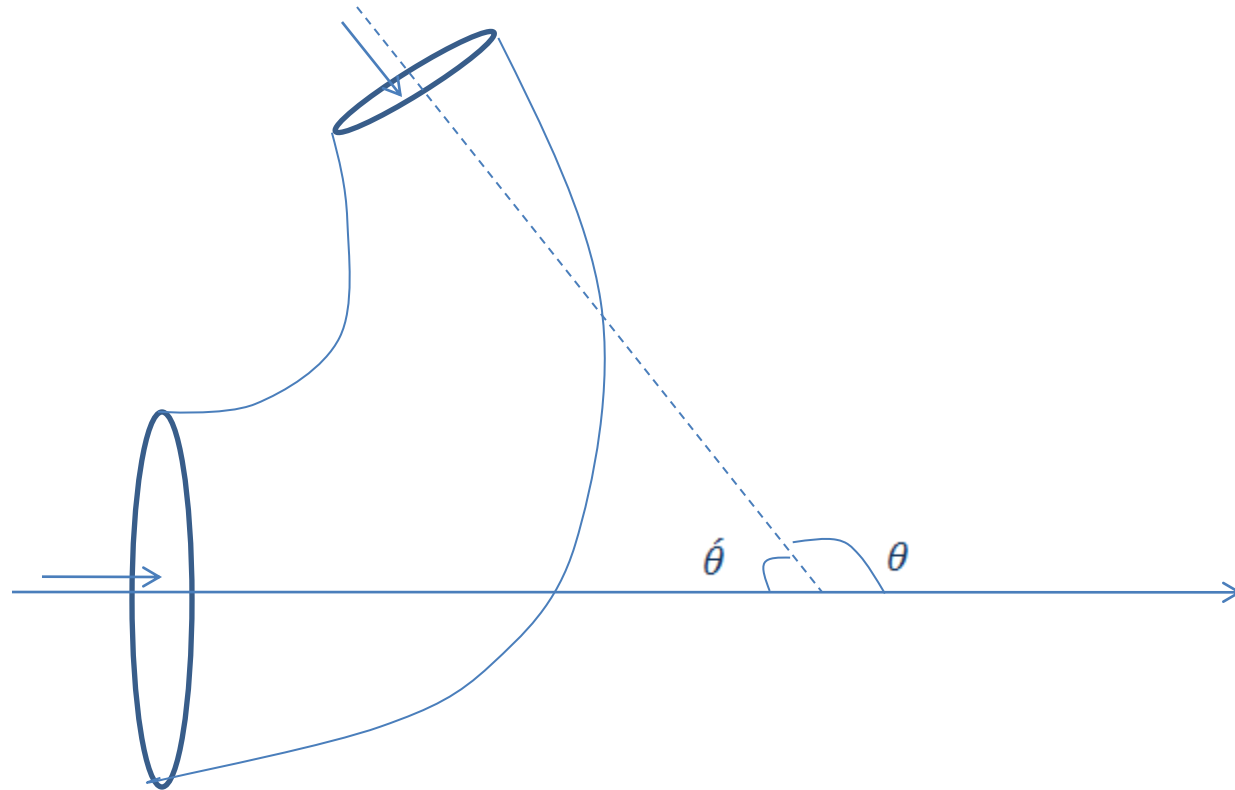
$$P_a S_{a,y} - P_b S_{b,y} + F_{w,y} - F_{g,y} = \frac{\dot{m}}{g_c} (\beta_b \bar{v}_{b,y} - \beta_a \bar{v}_{a,y})$$

$$S_{a,y} = 0, S_{b,y} = S_b \sin\theta = 0.000222 \text{ m}^2 \quad \bar{v}_{a,y} = 0, \bar{v}_{b,y} = \bar{v}_b \sin\theta = 4.42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$100000 \times 0 - 81010 \times 0.000222 + F_{w,y} - 0 = \frac{1.96}{1} (1 \times 4.42 - 1 \times 0)$$

$$F_{w,y} = 26.64 \text{ N}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 173.457 \text{ N}$$



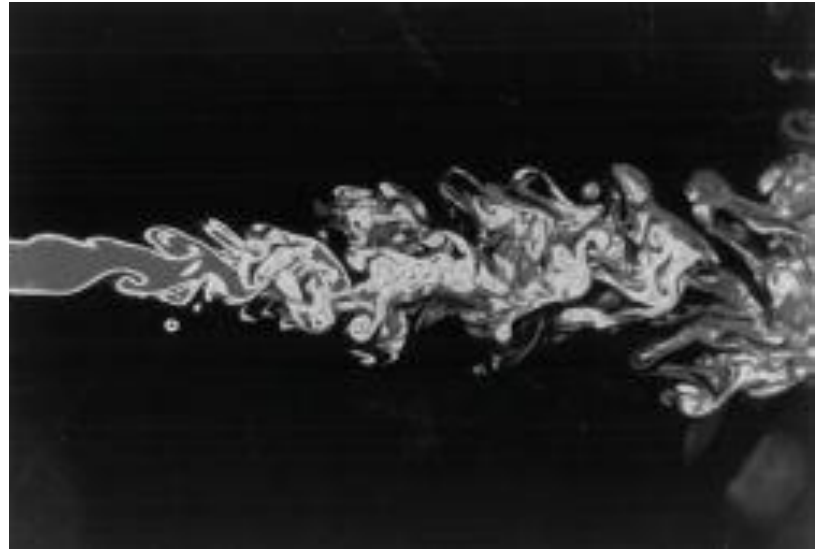
$$S_{a,x} = S_a \quad , S_{b,x} = S_b \cos\theta \quad , \quad \bar{v}_{a,x} = \bar{v}_a \quad , \bar{v}_{b,x} = \bar{v}_b \cos\theta$$

$$S_{a,y} = 0 \quad , S_{b,y} = S_b \sin\theta \quad , \quad \bar{v}_{a,y} = 0 \quad , \bar{v}_{b,y} = \bar{v}_b \sin\theta$$

## Chapter 6

Turbulence ,turbulent Flow :

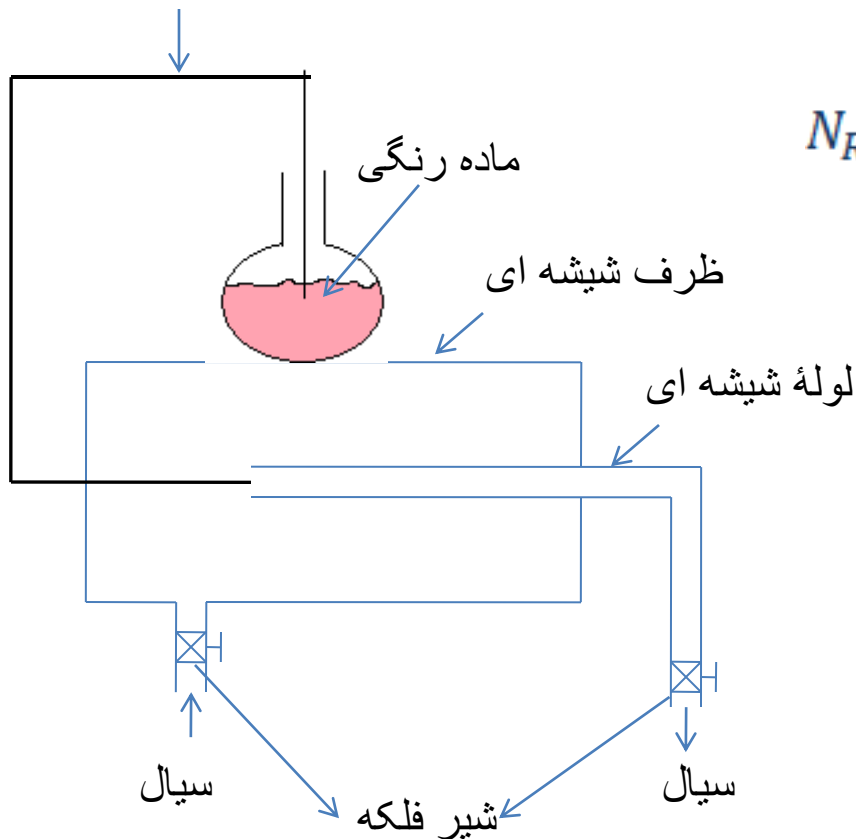
جریان درهم:



# آزمایش

## Reynold's Experiment

### رینولدز



$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu}$$

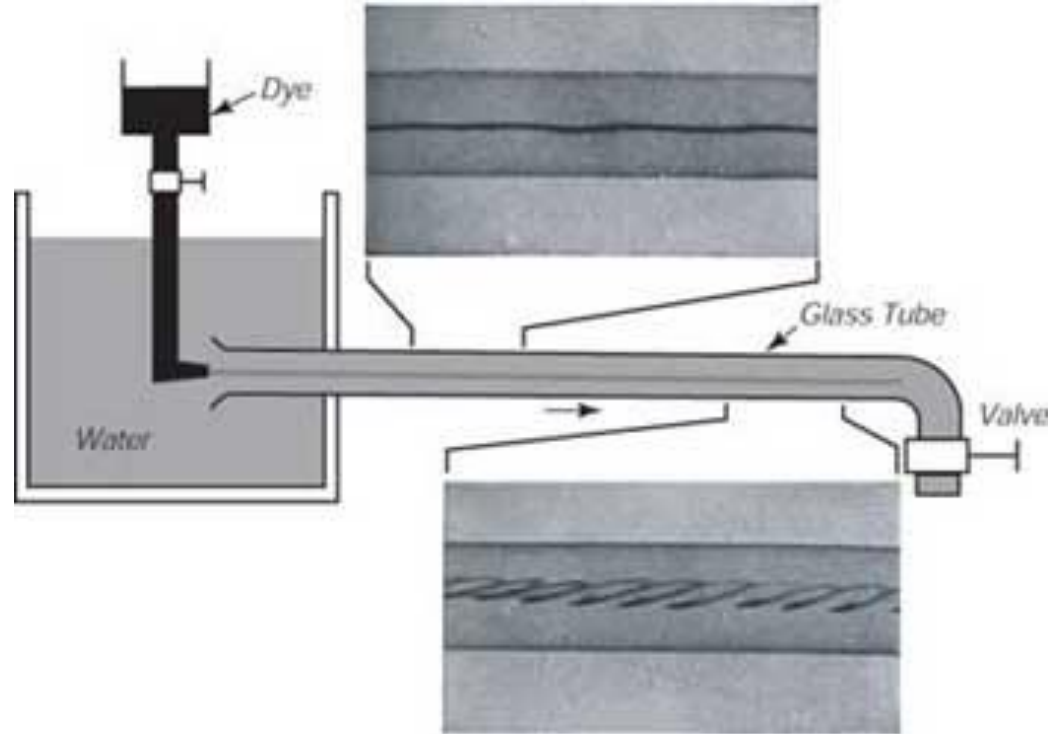
$N_{Re} < 2100$      *laminar Flow*

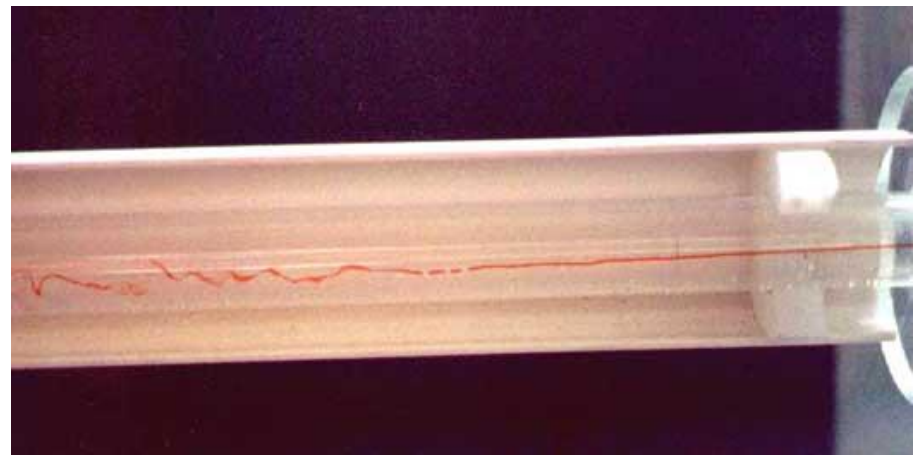
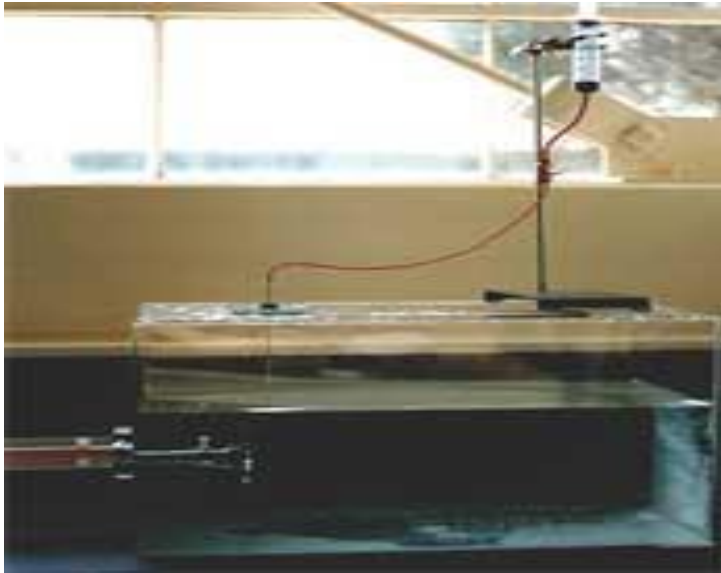
$2100 < N_{Re} < 4000$      *Transition Flow*

$N_{Re} > 4000$      *Turbulent Flow*

# Reynold's Experiment

# آزمایش رینولدز







# Turbulent Flow

**Eddy** : چرخانه :

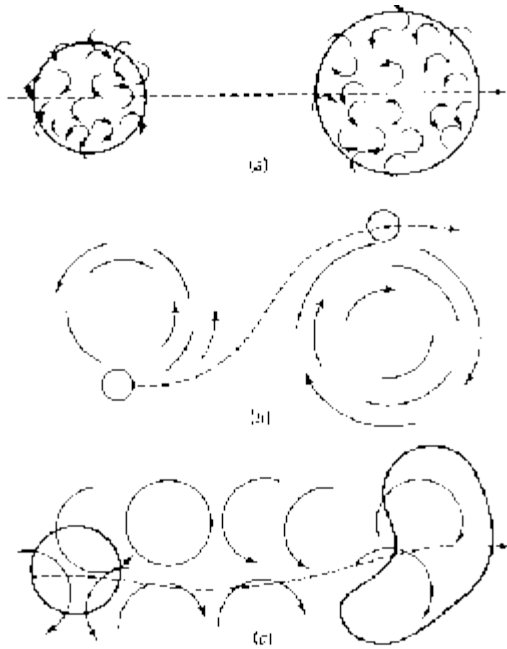
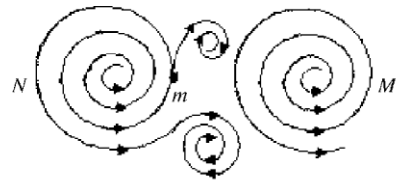
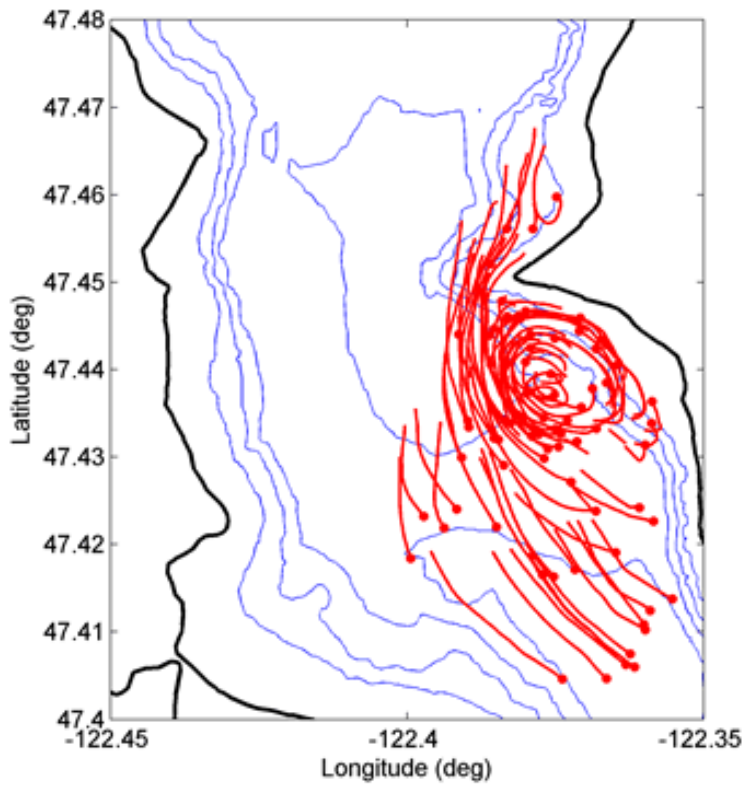
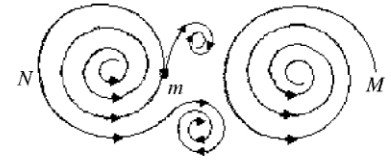


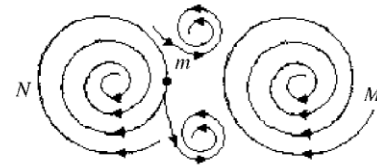
Figure 9: Scales of turbulence. (Seinfeld, 1986)



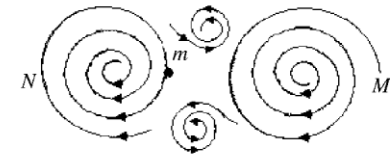
(a) Object  $m$  is situated as in Figure 2 (b)



(b) Object  $m$  is situated as in Figure 3 (a)



(c) Object  $m$  is situated as in Figure 2 (c)



(d) Object  $m$  is situated as in Figure 3 (d)



$$u_i = \bar{u} + u'$$

$$v_i = \bar{v} + v'$$

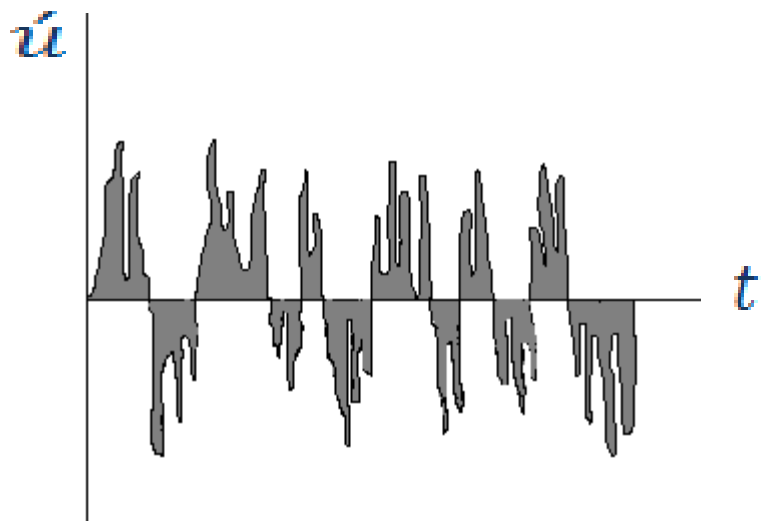
$$w_i = \bar{w} + w'$$

$u_i, v_i, w_i$ : *Instantaneous Velocities*

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ : *Average Velocities*


$u', v', w'$ : *Deviating velocities*

$$\bar{u} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} u dt \quad P_i = \bar{P} + \dot{P}$$



$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$$

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} u^2 dt \neq 0$$

if  $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$   Isotropic Turbulency

**Nature of  
Turbulency:**

Wall: اصطکاکی که سیال با دیواره دارد.

Free: برخورد دو جریان سیال در یک مقطع

## Intensity and scale of Turbulence:

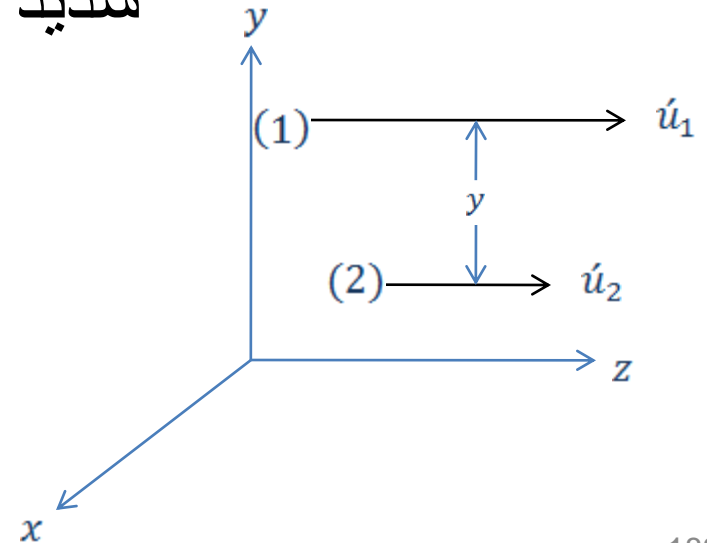
شدت توربولنسی

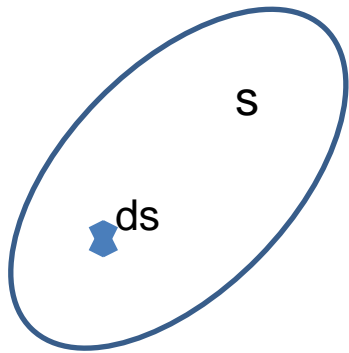
$$I = 100 \frac{\sqrt{u'^2}}{\bar{u}}$$

توربولنسی 0.5 – 2%  
توربولنسی شدید 5 – 10%

$$L_y = \int_0^{\infty} R_{\dot{u}} dy$$

correlation coefficient:  $R_{\dot{u}} = \frac{\overline{\dot{u}_1 \dot{u}_2}}{\sqrt{\overline{\dot{u}_1^2}} \times \sqrt{\overline{\dot{u}_2^2}}}$





$$dm = \rho u ds$$

$$d\dot{M} = \rho u^2 ds$$

$$\dot{M} = \int_s \rho u^2 ds > 0$$

$$(\tau_{xz})_l = -\frac{\mu}{g_c} \frac{du_z}{dx}$$

$$(\tau_{xz})_l = -\frac{E_m}{g_c} \frac{du_z}{dx}$$

$E_m = \text{Eddy Viscosity}$

$$(\tau_{xz})_{total} = -\left(\frac{E_m + \mu}{g_c}\right) \left(\frac{du_z}{dx}\right)$$

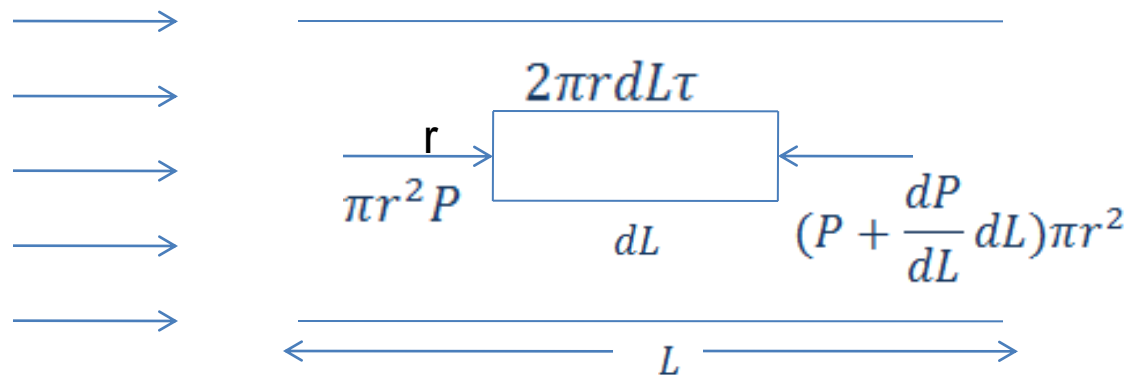
# Energy loss calculations

# محاسبات افت

## انرژی

$h_{f_s}$  Skin Friction

افت انرژی بواسطه  
اصطكاك





$$\pi r^2 P - \left( P + \frac{dP}{dL} dL \right) \pi r^2 - 2\pi r dL \tau = 0 \rightarrow \tau = -\frac{dP}{dL} \frac{r}{2} \rightarrow \tau_w = -\frac{dP}{dL} \frac{r_w}{2}$$

$$\tau_w = -\frac{dP}{dL} \frac{D}{4} = -\frac{\Delta P}{L} \frac{D}{4}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_1 + \frac{\alpha_1 \bar{v}_1^2}{2g_c} + \eta w_p = \frac{p_2}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_2 + \frac{\alpha_2 \bar{v}_2^2}{2g_c} + h_{fs}$$

*Fanning Friction Factor*  $f = \frac{\text{تنش در دیواره}}{\text{سرعت متوسط هد} \times \text{دانسیتة سیال}} = \frac{\tau_w}{\rho \frac{\bar{v}^2}{2g_c}}$

$$f = \frac{-\frac{\Delta P}{L} \frac{D}{4}}{\rho \frac{\bar{v}^2}{2g_c}} = \frac{\rho h_{fs} \frac{D}{4}}{\rho \frac{\bar{v}^2}{2g_c}} \Rightarrow h_{fs} = 4f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g_c} \Rightarrow h_{fs} = \frac{P_1 - P_2}{\rho} = \frac{-\Delta P}{\rho}$$

*Darcy's Friction Factor*

## محاسبه ضریب اصطکاک در

## Friction Factor calculation

جریان درون لوله ها:  
a) Laminar Flow

$$\tau = -\frac{\mu}{g_c} \frac{du}{dr} = -\frac{\Delta P r}{L 2} \rightarrow du = \frac{g_c \Delta P r}{\mu L 2} dr$$

$$\int_0^u du = \frac{g_c \Delta P}{2\mu L} \int_{r_w}^r r dr \rightarrow u = -\frac{g_c \Delta P}{4\mu L} r_w^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_w} \right)^2 \right]$$

$$U_{max} = -\frac{g_c \Delta P}{4\mu L} r_w^2 \rightarrow \frac{U}{U_{max}} = 1 - \left( \frac{r}{r_w} \right)^2$$

$$Q = \int_s u ds = \int_0^{r_w} 2\pi r u dr = \int_0^{r_w} \left[ -\frac{g_c \Delta P}{4\mu L} r_w^2 \right] \left( 1 - \left( \frac{r}{r_w} \right)^2 \right) 2\pi r dr$$

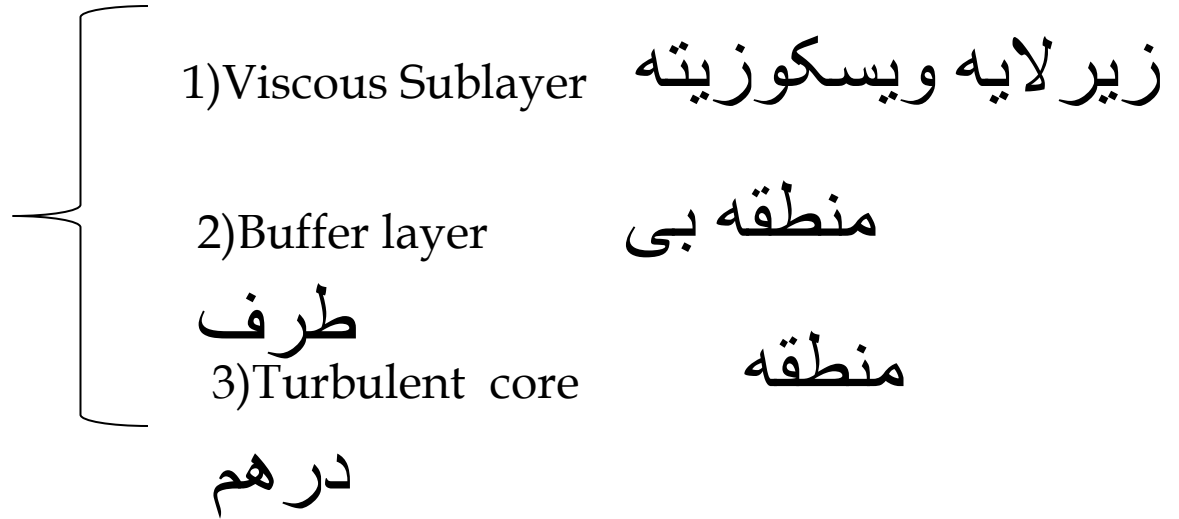
$$Q = -\frac{g_c \Delta P}{8\mu L} \pi r_w^4$$

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{-\frac{g_c \Delta P}{8\mu L} \pi r_w^4}{\pi r_w^2} = -\frac{g_c \Delta P}{8\mu L} r_w^2 = -\frac{g_c \Delta P}{32\mu L} D^2$$

$$f = \frac{\tau_w}{\rho \frac{\bar{v}^2}{2g_c}} = \frac{-\frac{\Delta P D}{L} \frac{1}{4}}{\rho \frac{\bar{v}^2}{2g_c} \left(-\frac{g_c \Delta P}{32\mu L} D^2\right)} = \frac{-\Delta P D 2g_c \times 32\mu L}{-\rho \bar{v} g_c \Delta P D^2 \times 4L} = \frac{16\mu}{\rho \bar{v} D} = \frac{16}{\frac{\rho \bar{v} D}{\mu}} = \frac{16}{N_{Re}}$$

$$f = \frac{16}{N_{Re}} \quad \text{for laminar flow}$$

Universal Velocity  
Distribution :

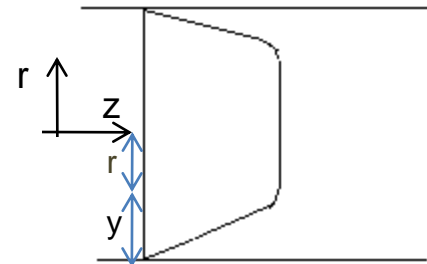


$$u^* = \bar{v} \sqrt{\frac{f}{2}} = \sqrt{\frac{\tau_w g_c}{\rho}} \quad \text{Friction Velocity}$$

$$u^+ = \frac{u}{u^*} \quad \text{dimensionless Velocity}$$

$$y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu} = \frac{y}{\mu} \sqrt{\tau_w g_c \rho} \quad \text{Dimensionless Distance}$$

$$r + y = R = r_w \quad dr + dy = 0 \rightarrow dr = -dy$$



## 1) Viscous sublayer

$$\tau = -\frac{\mu}{g_c} \frac{du}{dr} = \frac{\mu}{g_c} \frac{du}{dy} \quad u = u^* u^+ \rightarrow du = u^* du^+$$

$$y = \frac{\mu y^+}{\rho u^*} \rightarrow dy = \frac{\mu}{\rho u^*} dy^+ \quad \tau = \frac{\mu}{g_c} \frac{u^* du^+}{\frac{\mu}{\rho u^*} dy^+} = \frac{\rho u^{*2}}{g_c} \frac{du^+}{dy^+} = \tau_w \frac{du^+}{dy^+}$$

بدلیل نازک بودن لایه  $\tau \approx \tau_w = \tau_w \frac{du^+}{dy^+}$

$$\frac{du^+}{dy^+} = 1 \rightarrow u^+ = y^+ + C$$

$$B.C \text{ at } y = 0 \text{ or } y^+ = 0 \rightarrow u = 0 \text{ or } u^+ = 0 \rightarrow C = 0$$

$$u^+ = y^+$$

## 2) Buffer layer

$$2) u^+ = 5.00 \ln y^+ - 3.05 \quad (\text{رابطه تجربی})$$

## 3) Turbulent Core

$$\tau = - \left( \frac{\mu + E_m}{g_c} \right) \frac{du}{dr} \approx - \frac{E_m}{g_c} \frac{du}{dr} = \frac{E_m}{g_c} \frac{du}{dy}$$

$$\frac{\tau g_c}{\rho} = \frac{E_m}{\rho} \frac{du}{dy} = \epsilon_m \frac{du}{dy}$$

$\epsilon_m$ : Eddy kinematic viscosity

*Prandtl :*

$$1) \epsilon_m = f\left(y, \frac{du}{dy}\right)$$

$$2) \frac{\epsilon_m}{y^2 \frac{du}{dy}} = k^2 \rightarrow \epsilon_m = k^2 y^2 \frac{du}{dy} \qquad \frac{\tau g_c}{\rho} = k^2 y^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

$$3) \tau \approx \tau_w \rightarrow \frac{\tau_w g_c}{\rho} = k^2 y^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \rightarrow \sqrt{\frac{\tau_w g_c}{\rho}} = ky \frac{du}{dy} = u^*$$

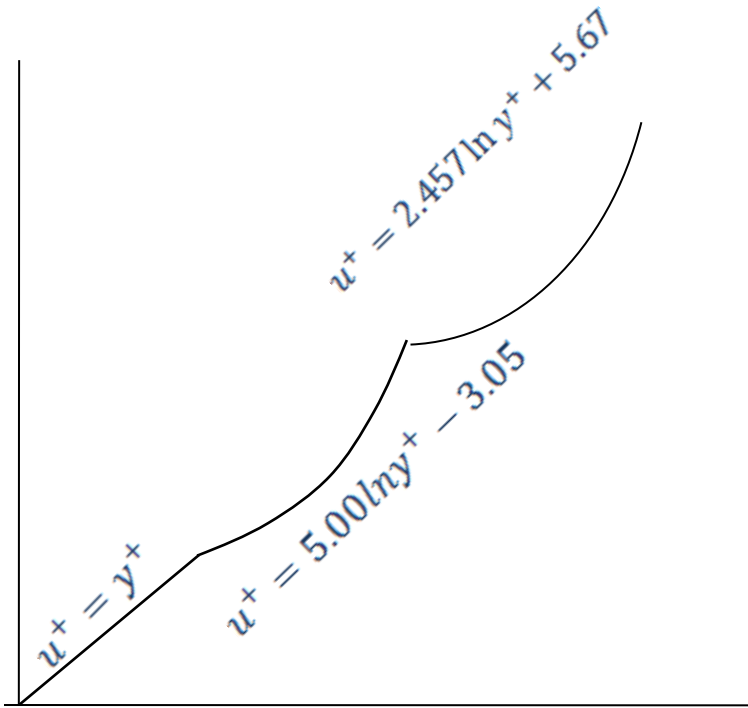
$$u^* = ky \frac{du}{dy} \rightarrow du = \frac{u^*}{k} \frac{dy}{y} \rightarrow u = \frac{u^*}{k} \ln y + C$$

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{k} \ln y + C_2 \rightarrow u^+ = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{\rho u^* y}{\mu} \times \frac{\mu}{\rho u^*} \right) + C_2 \rightarrow u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + C$$



$$\textit{Prandtl} \left\{ \begin{array}{l} k = 0.407 \\ \acute{C} = 5.67 \end{array} \right. \quad u^+ = 2.457 \ln y^+ + 5.67$$

$$\textit{Von - Karman} \left\{ \begin{array}{l} k = 0.4 \\ \acute{C} = 5.5 \end{array} \right. \quad u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$$



1) *Viscous sub layer:*  $y^+ < 5$

2) *Buffer layer:*  $5 < y^+ < 30$

3) *turbulent core:*  $y^+ > 30$

$$\text{Laminar Flow: } f = \frac{16}{N_{Re}}$$

$$\text{Prandle: } \frac{1}{\sqrt{f}} = 1.06 \log(N_{Re}\sqrt{f}) - 0.6$$

$$\text{Van - Karman: } \frac{1}{\sqrt{f}} = 4.0 \log(N_{Re}\sqrt{f}) - 0.4$$

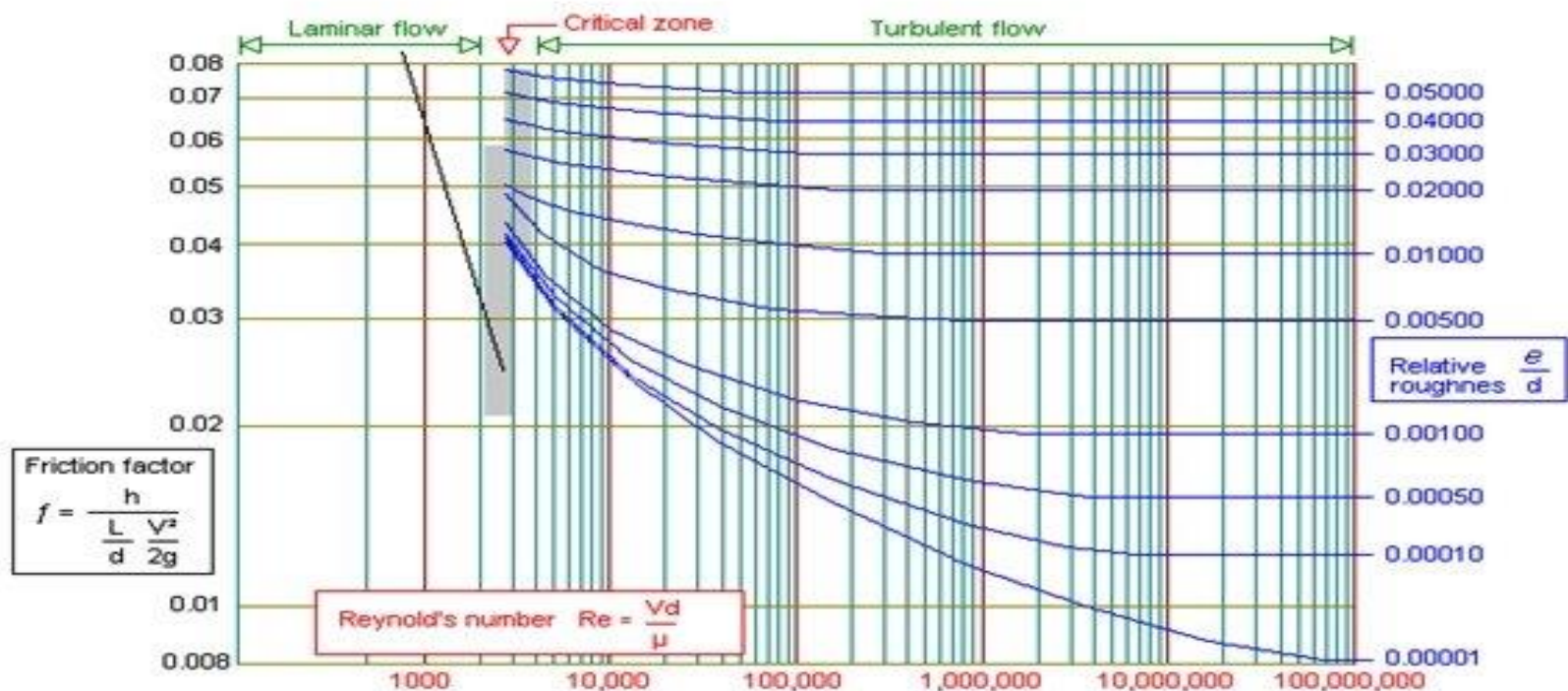
} ← **For turbulent flow**

$$\alpha = 1 + 0.78F(15 - 22.5\sqrt{F})$$

$$\beta = 1 + 3.91F$$

در جریان در هم:

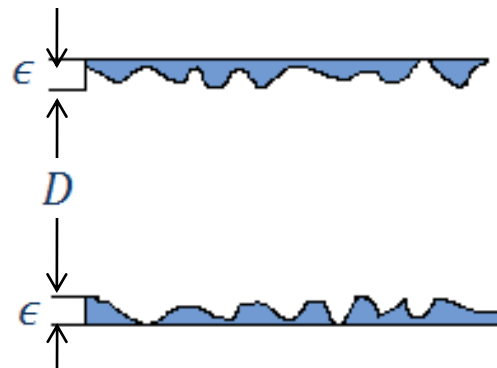
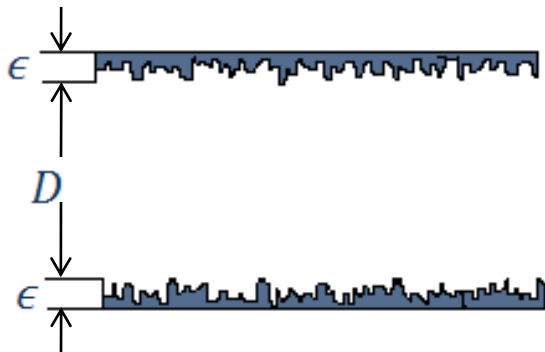
# Moody diagram:



$$f = f\left(N_{Re}, \frac{\epsilon}{D}\right) = f\left(N_{Re}, \frac{k}{D}\right)$$

$\frac{\epsilon}{D}$  : *Relative Roughness* زیری نسبی

$\epsilon$  or  $k$  : *Roughness* زیری



## **Friction from changes in velocity or direction :**

- 1. Sudden expansion**
- 2. Sudden contraction**
- 3. fittings**

# Friction From changes in velocity or Direction

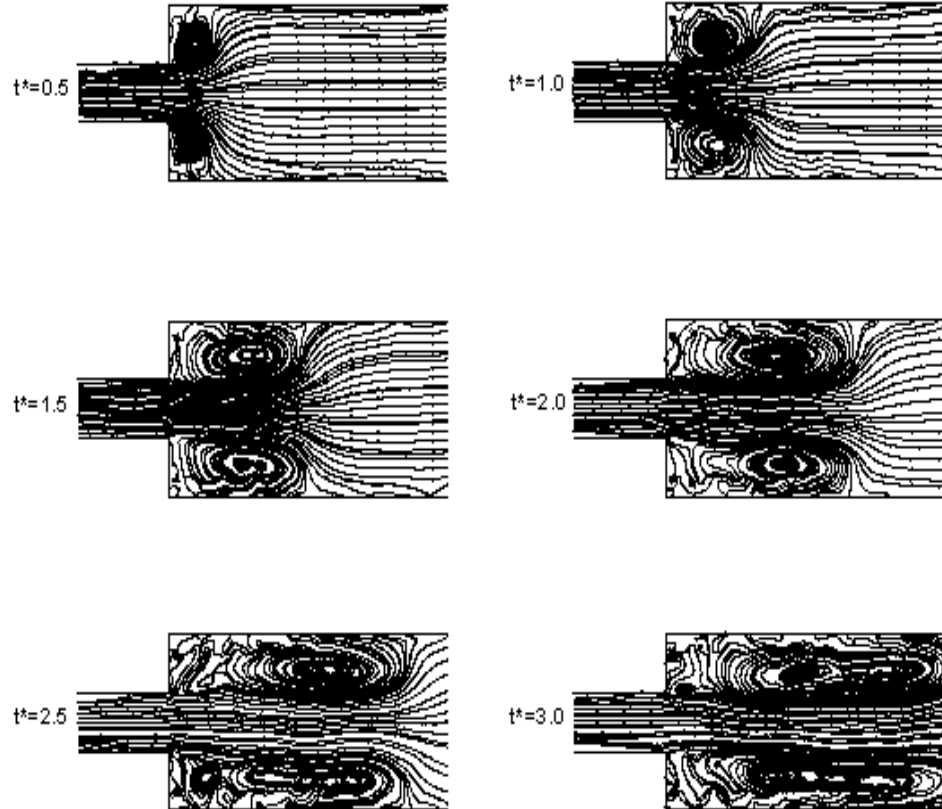
## 1. Sudden Expansion

ناگهانی

$$h_{fe} = K_e \frac{\bar{v}_a^2}{2g_c}$$

$$K_e = \left(1 - \frac{S_a}{S_b}\right)^2$$

انبساط



Sudden expansion, Reynolds number=3000

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

$$h_{fe} = \frac{P_a - P_b}{\rho} + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2 - \alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c}$$

$$\alpha_a = \alpha_b \approx 1.0 \rightarrow h_{fe} = \frac{P_a - P_b}{\rho} + \frac{\bar{v}_a^2 - \bar{v}_b^2}{2g_c},$$

$$\bar{v}_b = \bar{v}_a \left( \frac{S_a}{S_b} \right) \leftarrow \text{Mass balance}$$

$$h_{fe} = \frac{P_a - P_b}{\rho} + \frac{\bar{v}_a^2}{2g_c} \left[ 1 - \left( \frac{S_a}{S_b} \right)^2 \right]$$

$$P_a S_a - P_b S_b + F_w - F_g = \frac{\dot{m}}{g_c} (\beta_b \bar{v}_b - \beta_a \bar{v}_a) \quad \beta_a = \beta_b \approx 1.0$$

$$P_a S_b - P_b S_b = \frac{\rho \bar{v}_b S_b}{g_c} (\bar{v}_b - \bar{v}_a)$$

$$\rightarrow \frac{P_a - P_b}{\rho} = \frac{\bar{v}_b}{g_c} (\bar{v}_b - \bar{v}_a) = \frac{\bar{v}_a \left(\frac{S_a}{S_b}\right)}{g_c} \left[ \bar{v}_a \left(\frac{S_a}{S_b} - 1\right) \right] = \frac{\bar{v}_a^2}{2g_c} \left[ 2 \frac{S_a}{S_b} \left(\frac{S_a}{S_b} - 1\right) \right]$$

$$h_{fe} = \frac{\bar{v}_a^2}{2g_c} \left[ 2 \frac{S_a}{S_b} \left(\frac{S_a}{S_b} - 1\right) + 1 - \left(\frac{S_a}{S_b}\right)^2 \right]$$

$$h_{fe} = \frac{\bar{v}_a^2}{2g_c} \left[ 1 - \frac{S_a}{S_b} \right]^2$$

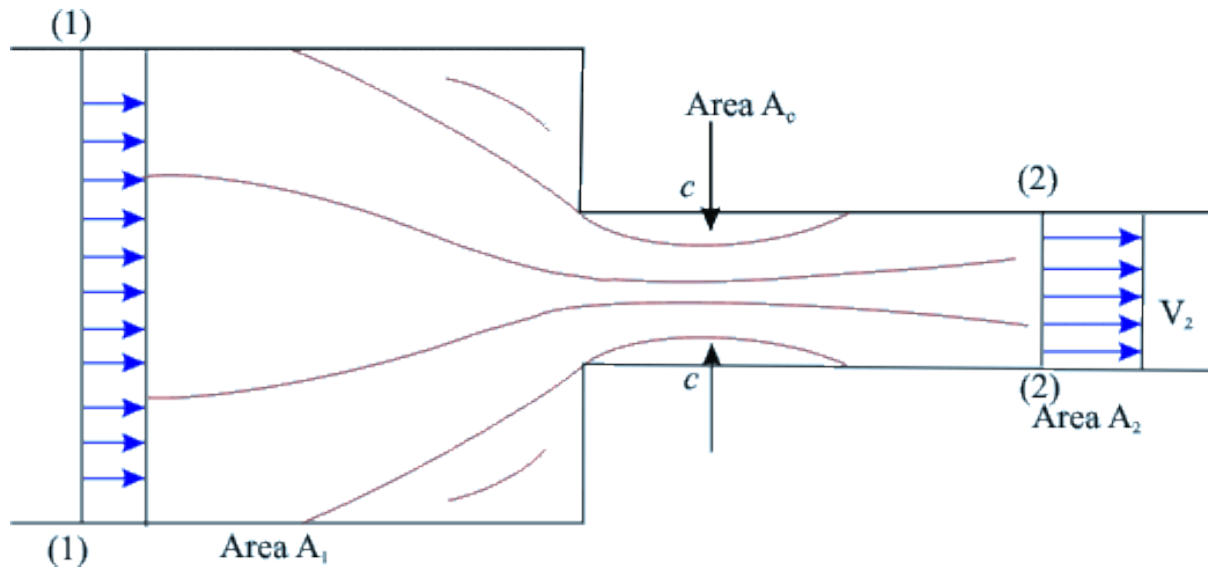
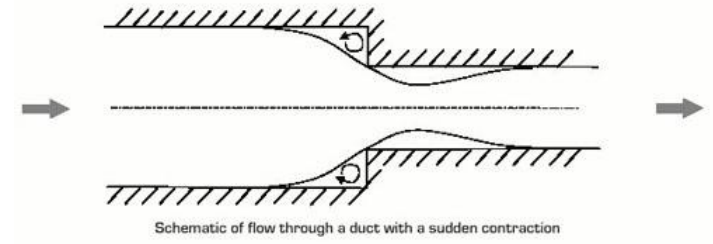
$$K_e = \left( 1 - \frac{S_a}{S_b} \right)^2 \quad 0.6 < K_e < 0.8$$



## 2) Sudden Contraction

انقباض ناگهانی

$$h_{fs} = K_c \frac{\bar{v}_b^2}{2g_c} \quad K_c = 0.4 \left(1 - \frac{S_a}{S_b}\right)$$



### 3) Fittings      اتصالات

$$h_{ff} = K_f \frac{\bar{v}^2}{2g_c}$$

| اتصال                  | K <sub>f</sub> |
|------------------------|----------------|
| Glob valve(wide- open) | 10.0           |
| Angle valve(wide-open) | 5.0            |
| Gate valve(wide-open)  | 0.2            |
| Gate valve(half-open)  | 5.6            |
| Return Bend            | 2.2            |
| Tee                    | 1.8            |
| Elbow 45               | 0.4            |
| Elbow 90               | 0.9            |

## ضریب اصطکاک در کانال های غیر استوانه‌ای

$$\text{شعاع هیدرولیکی} = \frac{\text{سطح مقطع عبور سیال}}{\text{محیط تر شده توسط سیال}} = r_H$$

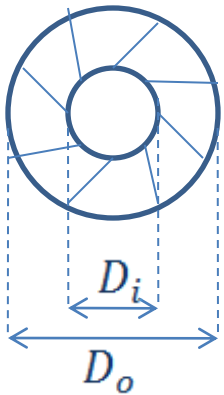
$$\text{قطر معادل} = 4r_H \quad \text{Equivalent Diameter}$$

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v} D_e}{\mu} = \frac{4\rho \bar{v} r_H}{\mu}$$

## Example:

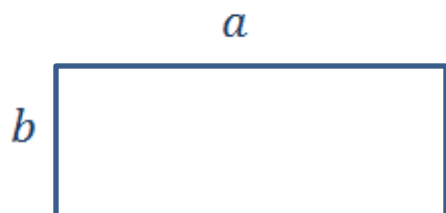


$$r_H = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4} \rightarrow D_e = a$$



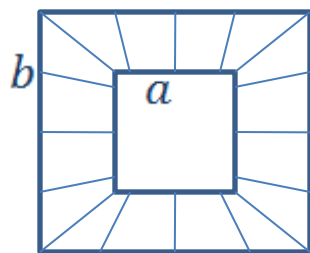
$$r_H = \frac{\frac{\pi}{4}D_o^2 - \frac{\pi}{4}D_i^2}{\pi D_o + \pi D_i} = \frac{\frac{1}{4}(D_o - D_i)(D_o + D_i)}{D_o + D_i} = \frac{D_o - D_i}{4}$$

$$D_e = D_o - D_i$$



$$r_H = \frac{ab}{2(a+b)}$$

$$D_e = \frac{2ab}{a+b}$$



$$r_H = \frac{b^2 - a^2}{4(a+b)} = \frac{b-a}{4}$$

$$D_e = b - a$$

## Apparent Density & Viscosity

$$\mu = \frac{\bar{\mu}}{\psi}$$
$$N_{Re} > 2100 \left\{ \begin{array}{l} \psi = \left( \frac{\bar{\mu}}{\mu_w} \right)^{0.17} \text{ For heating} \\ \psi = \left( \frac{\bar{\mu}}{\mu_w} \right)^{0.11} \text{ For cooling} \end{array} \right.$$
$$N_{Re} < 2100 \left\{ \begin{array}{l} \psi = \left( \frac{\bar{\mu}}{\mu_w} \right)^{0.38} \text{ For heating} \\ \psi = \left( \frac{\bar{\mu}}{\mu_w} \right)^{0.23} \text{ For cooling} \end{array} \right.$$

$\bar{\mu}$  ویسکوزیته سیال در دمای متوسط آن

$\mu_w$  : ویسکوزیته سیال در دمای دیوار

# انواع مسائل مربوط به

مسئله نوع

اول

مجهول  $h_{fs}, h_f$   
:

معلوم  $Q, \mu, \rho, D, \epsilon, L$   
م:

$$Q \xrightarrow{D} \bar{v} \rightarrow N_{Re} \xrightarrow{\frac{\epsilon}{D}, \text{Diagram}} f \rightarrow h_{fs} \xrightarrow{\text{مسیر}} h_f$$

**سوال:** افت انرژی را برای جریان 2000 gpm روغن در طول 1000 ft از لوله ای

چدنی به قطر 8 in محاسبه کنید. ویسکوزیته ی سینماتیک روغن 0.0001  $\frac{ft^2}{s}$  می باشد.

روش حل  
مسئله

$$Q = 2000 \text{ gpm} , \quad 448 \text{ gpm} = 1 \frac{ft^3}{s}$$

$$Q = \frac{2000}{448} = 4.46 \frac{ft^3}{s} , \quad \bar{v} = \frac{4.46}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{8}{12}\right)^2} = 12.8 \frac{ft}{s}$$

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu} = \frac{\bar{v} D}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{\bar{v} D}{\nu} = \frac{12.8 \times \frac{8}{12}}{0.0001} = 8.55 \times 10^4 , \quad \frac{\epsilon}{D} = \frac{0.00085}{\frac{8}{12}} = 0.0013$$

$$h_{fs} = 4 \times 0.006 \times \frac{1000}{\frac{8}{12}} \times \frac{12.8^2}{2 \times 32.2} = 91.8 \frac{ft \cdot lbf}{lbm}$$



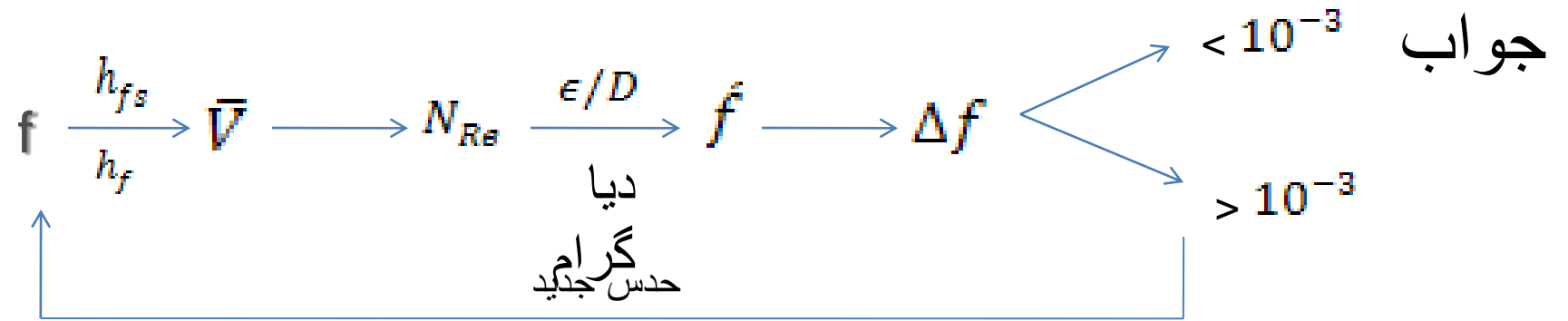
# مسئله نوع

دوم

مجهول :  $Q$

معلوم :  $\rho, \mu, D, L, \epsilon, h_{fs}$  or  $h_f$

$$h_{fs} = 4f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g_c}$$



$$h_f = h_{fs} + h_{fe} + h_{fc} + h_{ff}$$

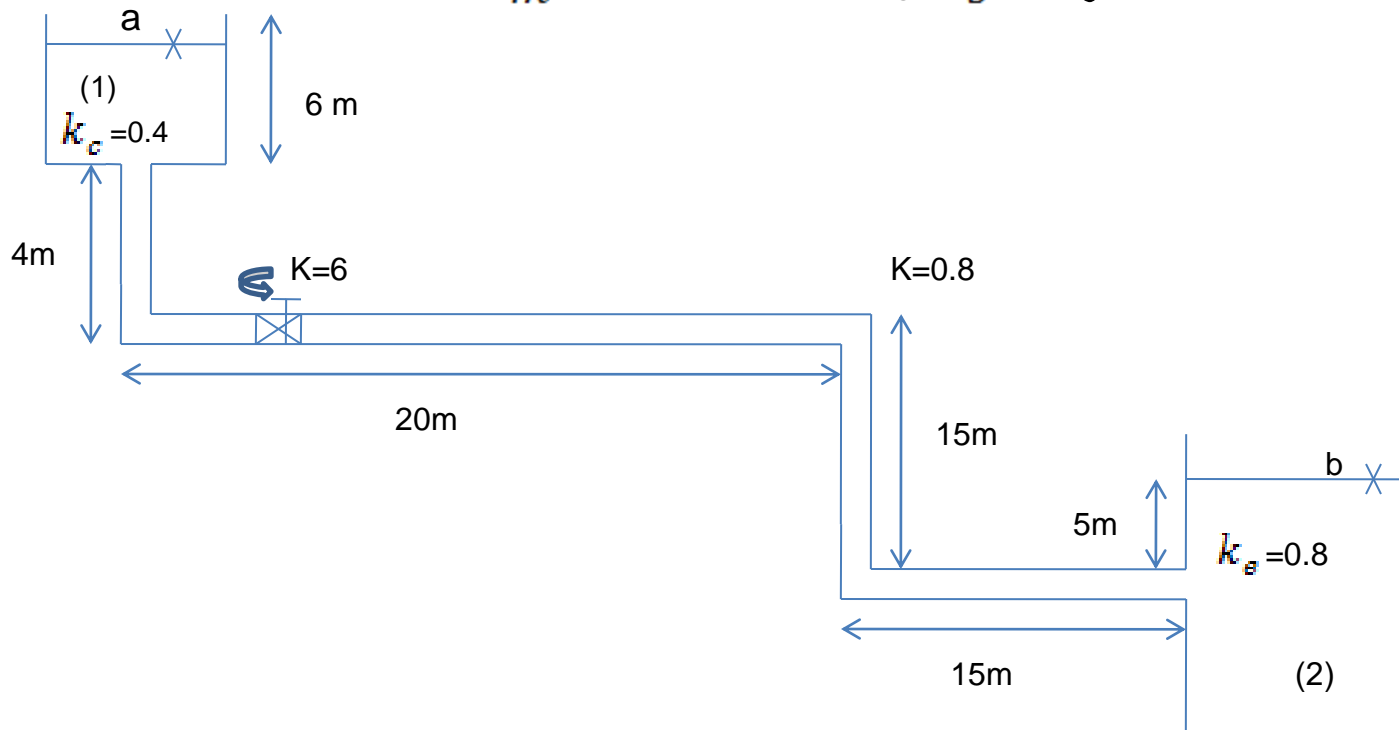
$$= 4f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g_c} + K_e \frac{\bar{v}_1^2}{2g_c} + K_c \frac{\bar{v}_2^2}{2g_c} + K_f \frac{\bar{v}_3^2}{2g_c}$$

$$h_f = \left( 4f \frac{L}{D} + (K'_e + K'_c + K'_f) \right) \frac{\bar{v}^2}{2g_c}$$

مجددا مطابق روش قبلی عمل می کنیم:

**سوال:** در شکل زیر مقدار جریان سیال از مخزن (۱) به (۲) را محاسبه کنید.

$\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$  ,  $\mu_c = 1 \text{ cp}$  ,  $g = 10 \frac{m}{s^2}$  ,  $\varepsilon = 0.005 \text{ m}$  (زبری لوله ها)



## روش حل مسئله

معادله ی برنولی a و b

$$\frac{P_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_a + \frac{\alpha_a \bar{V}_a^2}{2g_c} = \frac{P_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_b + \frac{\alpha_b \bar{V}_b^2}{2g_c} + h_f$$

$$\Rightarrow h_f = \frac{(Z_a - Z_b)g}{g_c} = \frac{(-5 + 15 + 4 + 6)10}{1} = 200 \frac{j}{kg}$$

$$h_f = \left( 4f \frac{4 + 20 + 15 + 15}{2 \times 0.0254} + 0.8 + 0.4 + 3 \times 0.8 + 6 \right) \frac{\bar{V}^2}{2 \times 1} = 200$$

$$200 = (4320f + 9.6) \frac{\bar{V}^2}{2} = (2160f + 4.8) \bar{V}^2$$

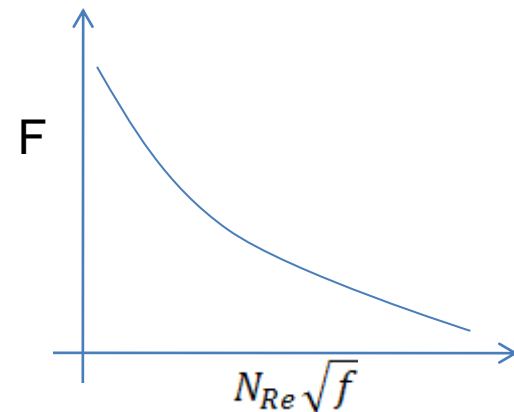
$$h_{fs} = 4f \frac{L \bar{V}^2}{D 2g_c} \Rightarrow f = \frac{2g_c D h_{fs}}{4L \bar{V}^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f} = \frac{1}{\bar{V}} \left( \frac{g_c D h_{fs}}{2L} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow N_{Re} \sqrt{f} = \frac{\rho D \bar{V}}{\mu} \times \frac{1}{\bar{V}} \left( \frac{g_c D h_{fs}}{2L} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\rho D}{\mu} \left( \frac{D g_c h_{fs}}{2L} \right)^{\frac{1}{2}}$$

*Trial & Error* :  $\bar{v} = 3.84 \frac{m}{s}$  ,  $Q = \bar{v}A$  ,  $Q = \bar{v}D^2 \frac{\pi}{4}$

yields  $\rightarrow Q = (3.84) \left( \frac{3.14}{4} \right) (0.0508)^2 = 0.153 \frac{m^3}{s}$



**سوال:** آب در 60°F در لوله ای به قطر 12 in و طول 1000 ft در حرکت است . افت

انرژی به واسطه ی اصطکاک در مسیر 20 می باشد . در صورتی که زبری

لوله  $\varepsilon = 0.004 \text{ ft}$   
 ویسکوزیته ی سینماتیک آب  $v = 1.25 \times 10^{-5} \frac{\text{ft}^2}{\text{s}}$   
 محاسبه کنید .  
 باشد دبی حجمی آب را

$$h_{fs} = 20 \frac{\text{ft} \cdot \text{lb}_f}{\text{lb}_m}$$

$$N_{Re} \sqrt{f} = \frac{\rho D}{\mu} \left( \frac{g_c D h_{fs}}{2L} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{D}{v} \left( \frac{g_c D h_{fs}}{2L} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{12}{12}}{1.25 \times 10^{-5}} \left( \frac{32.2 \times 1 \times 20}{2 \times 1000} \right)^{\frac{1}{2}} = 4.47 \times 10^4$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.004}{12} = 0.004 \Rightarrow f \approx 0.007$$

$$N_{Re} = \frac{4.47 \times 10^4}{\sqrt{0.007}} = 5.31 \times 10^5 \Rightarrow N_{Re} = \frac{\rho D \bar{V}}{\mu} = \frac{D \bar{V}}{v} \Rightarrow \bar{V} = \frac{v \times N_{Re}}{D}$$

$$\bar{V} = \frac{5.31 \times 10^5 \times 1.25 \times 10^{-5}}{\frac{12}{12}} = 6.63 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \Rightarrow Q = 6.63 \times \frac{3.14}{4} \left( \frac{12}{12} \right)^2 = 5.21 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}}$$

روش

حل

مسئله

**طول معادل یک اتصال :** طول لوله ای که افت انرژی اش برابر افت انرژی اتصال است .

$$4F \left( \frac{L_e}{D} \right) \left( \frac{\bar{V}^2}{2g_c} \right) = K \frac{\bar{V}^2}{2g_c} \quad \Rightarrow L_e = \frac{KD}{4F}$$

## مسئله

نوع سوم

سایز کردن یا Design :

مجهول : D

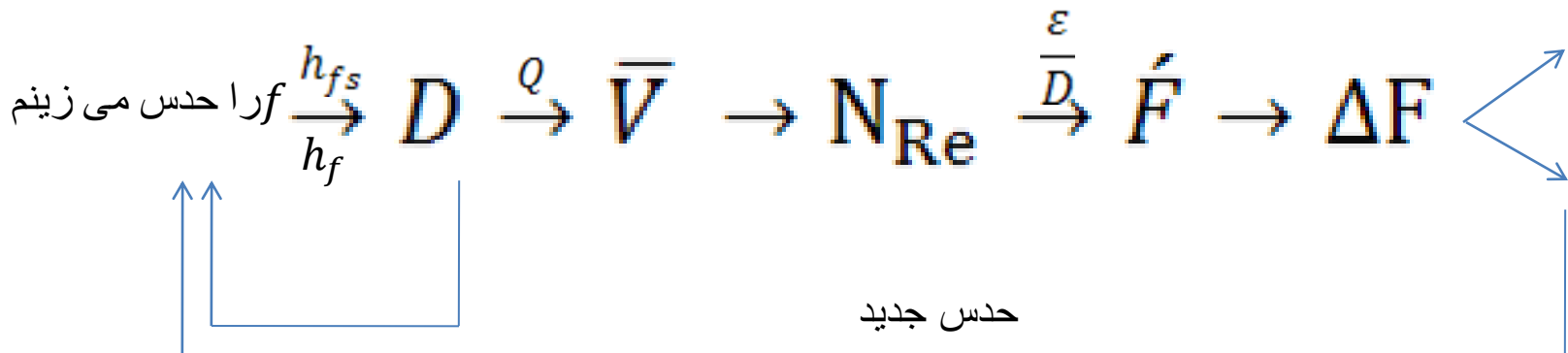
معلوم:  $\rho, \mu, \epsilon, Q, L, h_f$  or  $h_{fs}$

$$h_{fs} = 4f \frac{L \bar{v}^2}{D 2g_c}$$

$$h_{fs} = 4f \frac{L \frac{Q^2}{S^2}}{D 2g_c} = 4f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{\left(\frac{\pi^2}{16} D^4\right) 2g_c} = \frac{32fLQ^2}{g_c \pi^2 D^5}$$

جواب  $< 10^{-3}$

$> 10^{-3}$





$$h_f = h_{fs} + h_{fe} + \dots = \frac{32fLQ^2}{g_c \pi^2 D^5} + k_e \frac{Q^2}{D^4} + k_c \frac{Q^2}{D^4} + \dots$$

$$h_f = \frac{32fLQ^2}{\pi^2 g_c D^5} + \frac{AQ^2}{D^4} \Rightarrow h_f = \frac{af}{D^5} + \frac{b}{D^4} \Rightarrow D^5 + CD + df = 0$$

## سینماتیک

$$v = 0.0001 \frac{ft^2}{s}$$

را در طول  $L=10000$  ft با افت انرژی

$$h_{fs} = 75 \frac{ft \cdot lb_f}{lb_m}$$

## روش حل

حمل کند محاسبه کنید.

$$h_{fs} = \frac{32fLQ^2}{\pi^2 g_c D^5} \Rightarrow D^5 = \frac{32fLQ^2}{\pi^2 g_c h_{fs}} = \frac{32f \times 10000 \times 8.93^2}{3.14^2 \times 32.2 \times 75} = 10686 \text{ (می باشد)}$$

زبری لوله های 1)  $10686$

$$Q = \frac{4000}{448} = 8.93 \frac{ft^3}{s}$$

$$N_{Re} = \frac{\rho D \bar{V}}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi D \mu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{113800}{D} \quad (2)$$

$$f = 0.005 \text{ حدس} \rightarrow D = 1.398 \text{ ft} \rightarrow N_{Re} = 8.14 \times 10^4$$

می

$$\rightarrow f = 0.0048 \text{ غ}$$

حزنیم

$$f = 0.0048 \xrightarrow{(1)} D = 1.384 \xrightarrow{(2)} N_{Re} = 8.34 \times 10^4 \rightarrow f = 0.00475 \text{ ص}$$

جدید

وسایلی که سیالات را به  
جریان می اندازند:

## a) Compressible Fluids

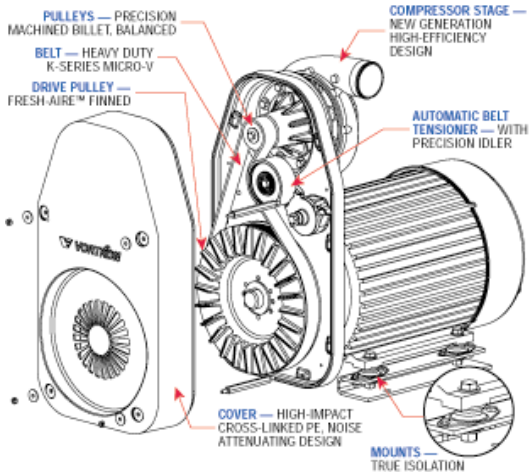
### 1) compressors

$$w_{pr} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_a}{\rho_a} \left[ \left( \frac{P_b}{P_a} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right] \quad \text{Adiabatic}$$

$\frac{P_b}{P_a}$  : Compression Ratio

$$w_{pr} = \frac{RT_0}{M} \ln \frac{P_b}{P_a} \quad \text{Isothermal}$$

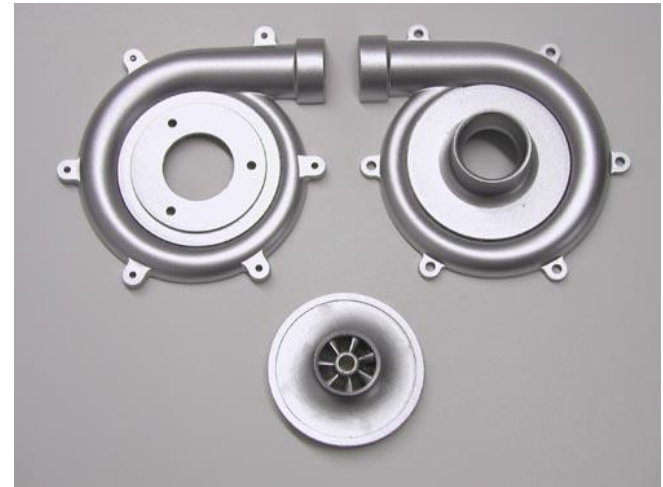
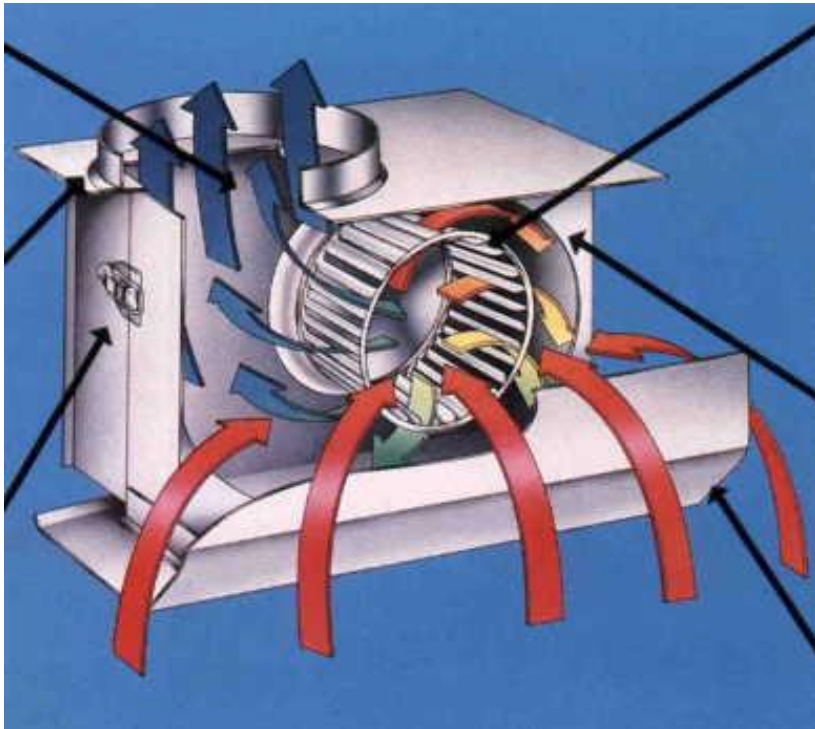
# 1) compressors



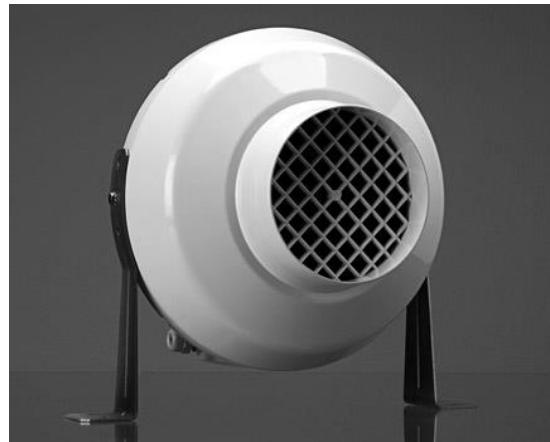
## 2) Fans هواكش



### 3) Blower نمونه

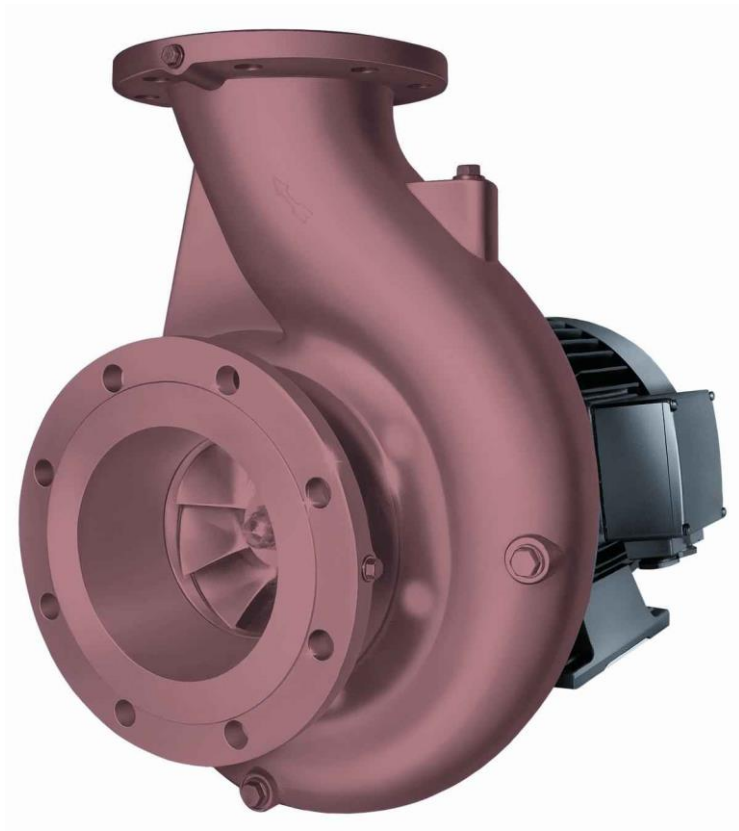


## 4) Ventilator تخطیه کننده



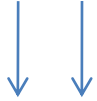
## b) Incompressible Fluids

### Pumps





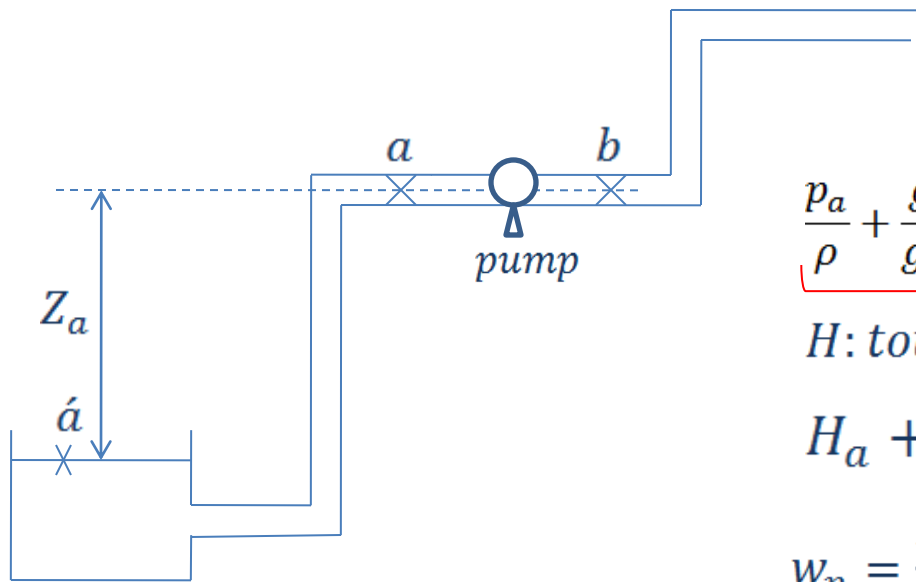
# Pumps



- اجزا
- 1. Suction قسمت
  - 2. Discharge قسمت فشار مکش

- زاد
- pumps
- Positive Displacement
  - Centrifugal

- Positive Displacement
- Reciprocal
    - Single Action
    - Double Action
  - Rotary



$$\underbrace{\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c}}_{H: \text{total head}} + \eta w_p = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

$H$ : total head

$$H_a + \eta w_p = H_b$$

$$w_p = \frac{H_b - H_a}{\eta} = \frac{\Delta H}{\eta}$$

$$P = \frac{\dot{m} \Delta H}{550 \eta} = \frac{\dot{m} \Delta H}{746 \eta} \quad \text{horse power}$$

شرط لازم برای جلوگیری از  
پدیده ی cavitations

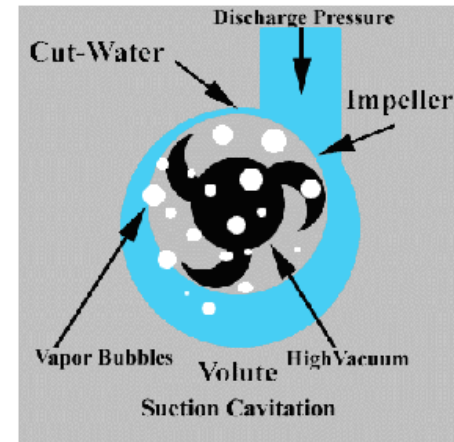
$$\frac{P_a}{\rho} + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} > \frac{P_v}{\rho}$$

$P_v$ : vapor pressure of fluid

$$\frac{P_a - P_v}{\rho} + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} > 0 \quad \text{Net Positive Suction Head}$$

$$H_{Sv} \text{ or } NPSH > 0$$

### Low Pressure/High Vacuum



$NPSH_{req}$  → required NPSH

5 – 10 ft : small centrifugal pumps

50 ft : large centrifugal

$$\frac{P_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} = \frac{P_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} + h_f$$

$$\frac{P_a}{\rho} = \frac{P_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} Z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} + h_f$$

$$\frac{p_a - p_v}{\rho} = \frac{p_a - p_v}{\rho} + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c} z_a + h_f$$

$$NPSH = \frac{p_a - p_v}{\rho} - \frac{g}{g_c} z_a - h_f$$

$$NPSH = \frac{g}{g_c} \left( \frac{p_a - p_v}{\rho} - h_f \right) - z_a$$

وسایلی که مقدار جریان سیال را  
اندازه گیری می کنند:

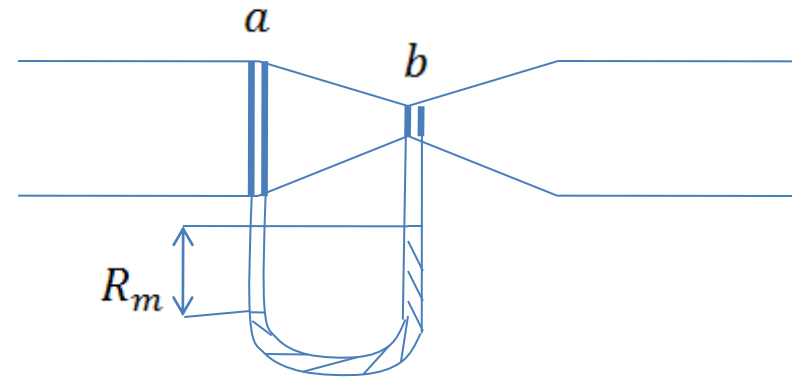
### 1) Venturi – meter

$$\frac{p_a}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_a + \frac{\alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} = \frac{p_b}{\rho} + \frac{g}{g_c} z_b + \frac{\alpha_b \bar{v}_b^2}{2g_c} + h_f$$

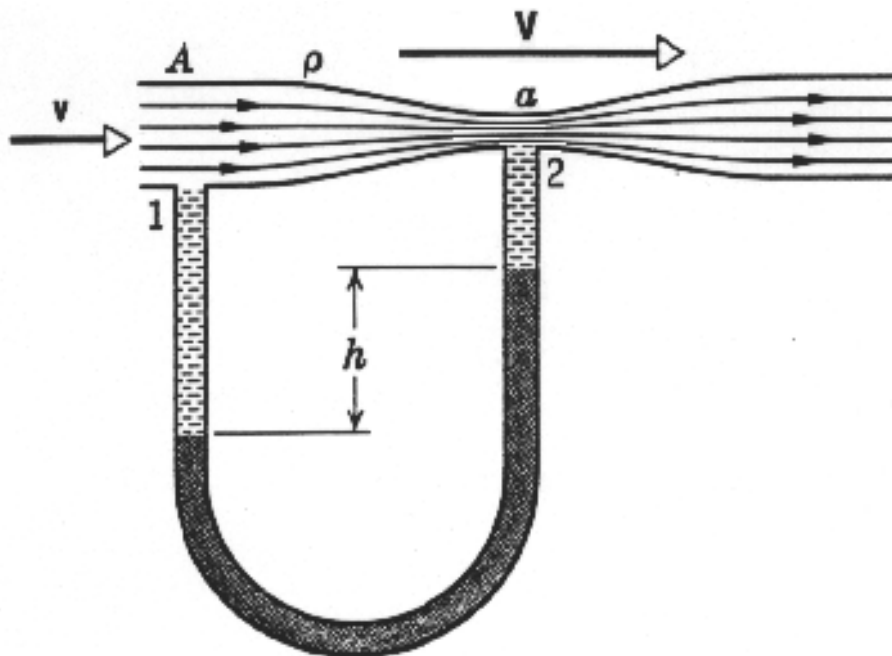
$$\frac{\alpha_b \bar{v}_b^2 - \alpha_a \bar{v}_a^2}{2g_c} = \frac{p_a - p_b}{\rho}$$

$$\bar{v}_a = \bar{v}_b \left( \frac{S_b}{S_a} \right) = \bar{v}_b \left( \frac{D_b}{D_a} \right)^2 = \beta^2 \bar{v}_b$$

$$\bar{v}_b = \frac{1}{\sqrt{\alpha_b - \alpha_a \beta^4}} \sqrt{\frac{2g_c(p_a - p_b)}{\rho}}$$



# 1) Venturi – meter



$$\bar{v}_b = \frac{C_v}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{\frac{2g_c(p_a - p_b)}{\rho}}$$

$C_v$  : Venturi Coefficient 0.98 – 0.99

$D : 2 - 8 \text{ in} \quad C_v = 0.98$

$D > 8 \text{ in} \quad C_v = 0.99$

$$\dot{m} = \frac{C_v S_b}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{2\rho g_c(p_a - p_b)}$$

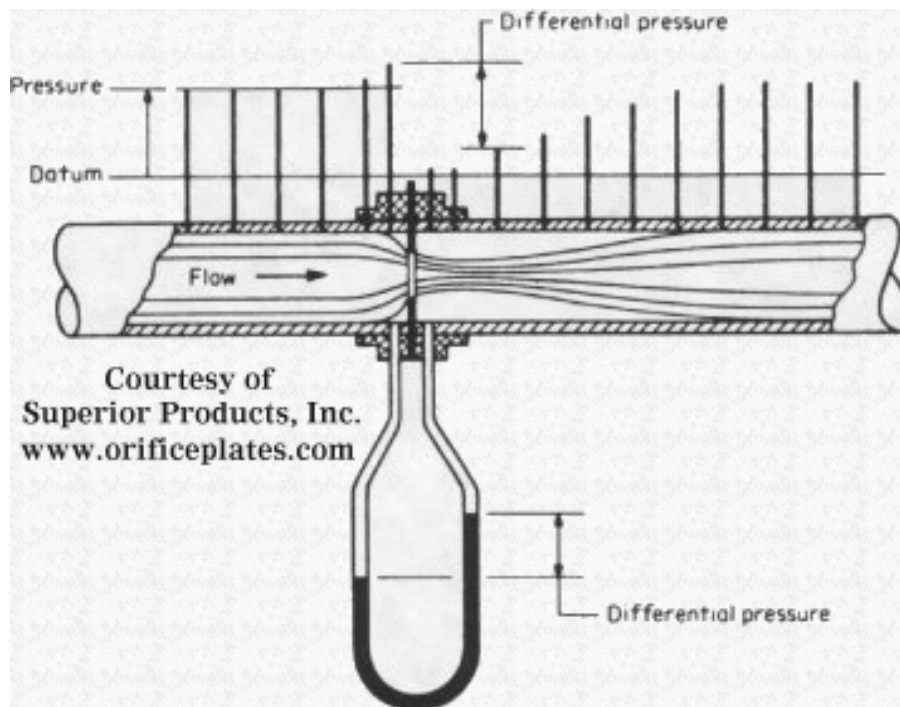
$$\dot{m} = \frac{C_v S_b Y}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{2\rho g_c(p_a - p_b)}$$

سیالات

تراکم ناپذیر

سیالات تراکم پذیر

## 2) Orifice – meter





## 2) Orifice – meter

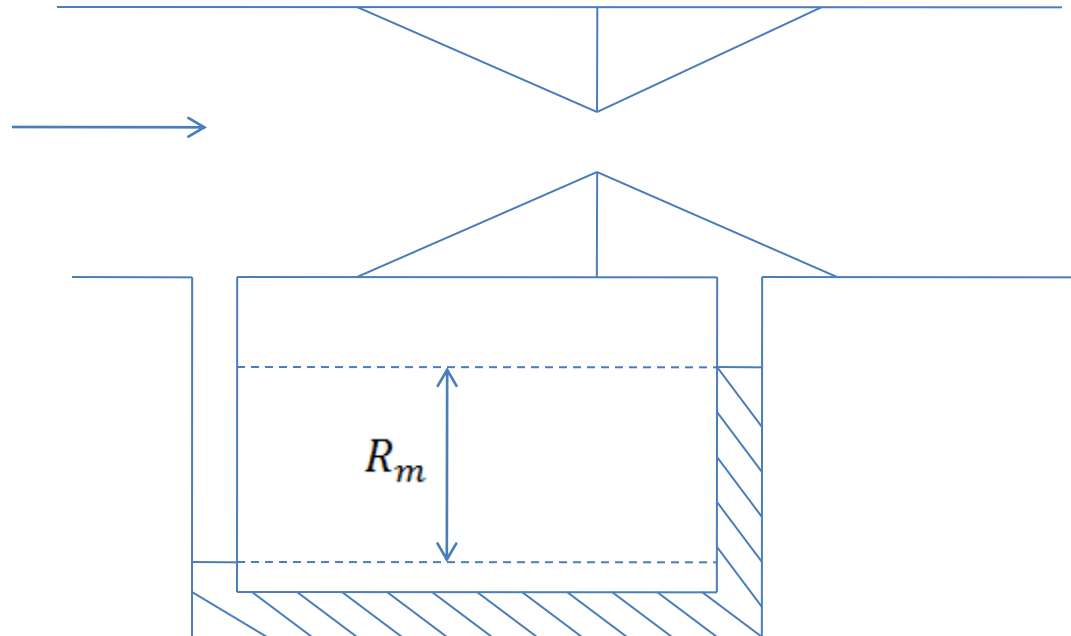
$$\beta = \frac{D_o}{D_p}, \quad N_{Re,o} = \frac{\rho u_o D_o}{\mu}$$

$$u_o = \frac{C_o}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{\frac{2g_c(p_a - p_b)}{\rho}}$$

$$C_o = C_o(N_{Re,o}, \beta)$$

$$\text{If } N_{Re,o} > 20000 \quad C_o \approx 0.61$$

$$u_o = \frac{0.61}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{\frac{2g_c(p_a - p_b)}{\rho}}$$



$$\dot{m} = \frac{C_0 S_0}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{2\rho g_c (p_a - p_b)}$$

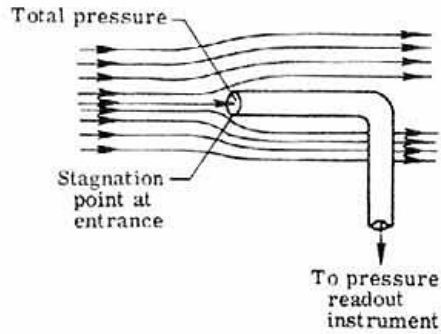
تراکم ناپذیر

$$\dot{m} = \frac{C_0 S_0 Y}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{2\rho g_c (p_a - p_b)}$$

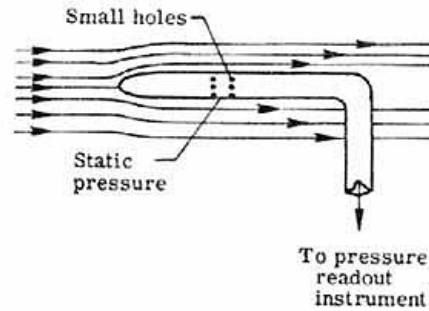
تراکم پذیر

ضریب انبساط حجمی  $Y = \left(\frac{P_b}{P_a}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[ \frac{\gamma(1 - \beta^4) \left[ 1 - \left(\frac{P_b}{P_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}{(\gamma - 1) \left(1 - \frac{P_b}{P_a}\right) \left[ 1 - \beta^4 \left(\frac{P_b}{P_a}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \right]} \right]^{\frac{1}{2}}$

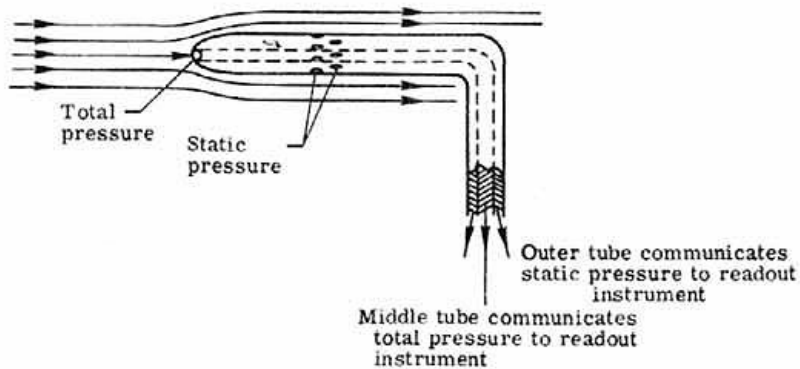
### 3) Pitot – Tube



(a) Pitot tube.



(b) Static tube.



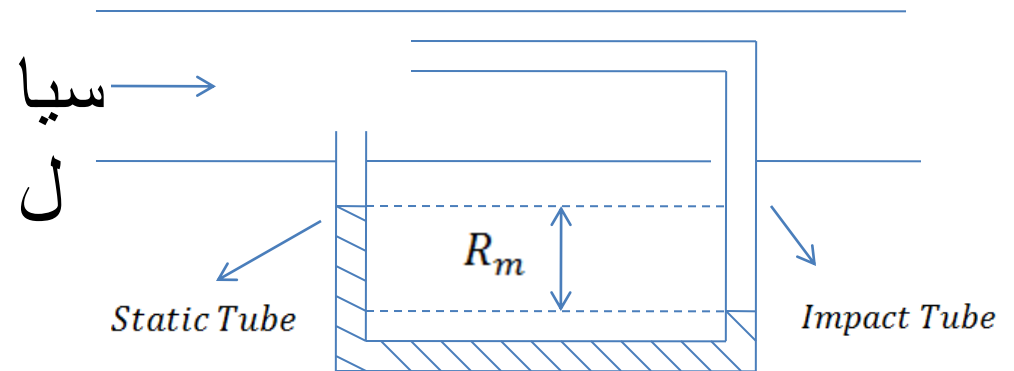
(c) Pitot-static tube.

### 3) Pitot – Tube

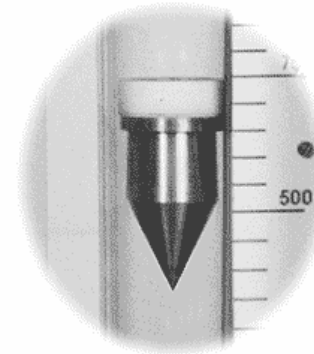
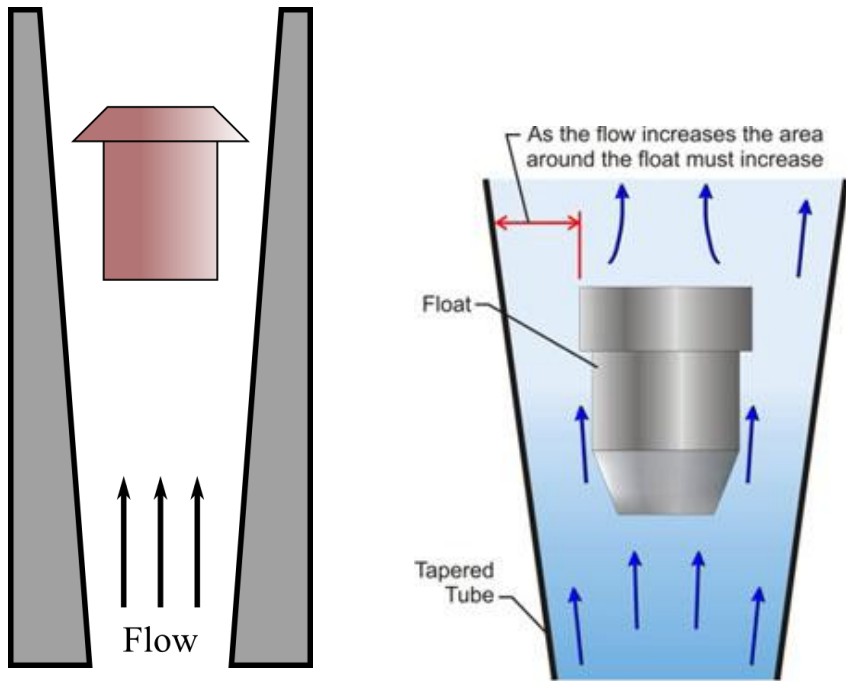
$$u = c \sqrt{\frac{2g_c(p_s - p_0)}{\rho}}$$

$P_s =$  Stagnation pressure

$P_0 =$  Static Pressure



# *Rota meter (Area – meter)*



# Dimensional Analysis    آنالیز ابعادی

*Buckingham Theory of  $\pi$  Therms*

اگر در مسئله ای  $n$  کمیت که دارای  $m$  بعد (مشترک یا مستقل) هستند، داشته باشیم  $(n-m)$  پارامتر بدون بعد مستقل وجود خواهد داشت که این کمیت ها در آن ها مرتب شده اند و حاصل ضرب این پارامتر های مستقل بدون بعد ارتباط بین  $n$  کمیت اولیه را بیان می نماید.

اگر  $A_n, \dots, A_2, A_1$  کمیت هایی باشند که در مسئله وجود دارند (مثل

نحوه ی تعیین گروه های بدون بعد به این صورت است که m عدد از کمیت های اولیه را که دارای بعدهای متفاوت هستند انتخاب نموده و آن ها را با یکی دیگر از کمیت ها که در گروه انتخاب شده مشارکت ندارد ادغام می نماییم و بدین

$$\pi_1 = A_1^{x_1} A_2^{y_1} A_3^{z_1} A_4$$

ترتیب هر گروه بدون بعد تعریف می شود. به عنوان مثال

$$\pi_2 = A_1^{x_2} A_2^{y_2} A_3^{z_2} A_5$$

اگر سه بعد M, L, T در مسئله ای وجود داشته باشد در این

$$\pi_{n-m} = A_1^{x_{n-m}} A_2^{y_{n-m}} A_3^{z_{n-m}} A_n$$

صورت گروه های بدون بعد با انتخاب A1, A2, A3 عبارت اند

... سپس ابعاد  $A$  را در رابطه ها جاگزین نموده و سمت دیگر را مساوی با کمیت ای که در آن توان های  $M, L, T$  برابر با صفر است قرار می دهیم. و در نتیجه برای هر گروه بدون بعد سه معادله و سه مجهول بدست می آید که قابل حل است. سپس از حل معادلات توان های کمیت های گروه بدون بعد مشخص می شود.

اگر در مسئله ای فقط دو بعد موجود باشد در این صورت دو کمیت

به عنوان کمیت های تکراری انتخاب شده و با هر یک از کمیات



□ اگر در حالتی دو کمیته  $A$  دارای بعد مشترک باشند یکی از گروه‌های بدون بعد نسبت آن دو کمیته خواهد بود. البته انتخاب کمیته‌های تکراری  $A$  نیاز به تجربه و شناخت خوب از مسئله دارد.

□ اگر یکی از کمیته‌ها خودش بی بعد باشد یکی از گروه‌های بدون بعد همان کمیته است.

**سوال:** جریان حجمی خروجی از یک لوله ی افقی موئین به افت فشار به ازای واحد طول لوله به قطر لوله و ویسکوزیته ی سیال بستگی دارد

فرم را آورید.

| <i>quantity</i>                              | <i>Symbol</i>        | <i>dimension</i> |
|--|----------------------|------------------|
| <i>Discharge</i>                             | $Q$                  | $L^3 T^{-1}$     |
| $\frac{\text{Pressure Drop}}{\text{length}}$ | $\frac{\Delta P}{L}$ | $ML^{-2}T^{-2}$  |
| <i>Diameter</i>                              | $D$                  | $L$              |
| <i>Viscosity</i>                             | $\mu$                | $ML^{-1}T^{-1}$  |

## روش حل مسئله

$$n = 4, m = 3, n - m = 1$$

$$\pi_1 = Q^{x_1} \left( \frac{\Delta P}{L} \right)^{y_1} D^{z_1} \mu$$

$$\pi_1 = (L^3 T^{-1})^{x_1} (M L^{-2} T^{-2})^{y_1} L^{z_1} M L^{-1} T^{-1} = M^0 L^0 T^0$$

$$(For L) : 3x_1 - 2y_1 + z_1 - 1 = 0 \rightarrow z_1 = -4$$

$$(For M) : y_1 + 1 = 0 \rightarrow y_1 = -1$$

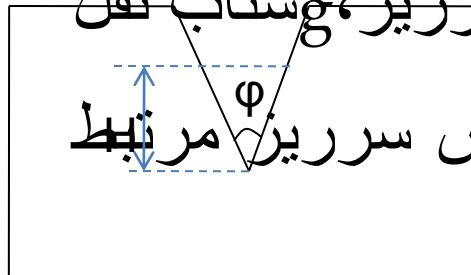
$$(For T) : -x_1 - 2y_1 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1$$

$$\pi = Q \left( \frac{\Delta P}{L} \right)^{-1} D^{-4} \mu \quad \pi = \frac{Q\mu}{\frac{\Delta P}{L} D^4} = C_1 \rightarrow Q = C_1 \left( \frac{\frac{\Delta P}{L} D^4}{\mu} \right)$$

$$F \left( Q, \frac{\Delta P}{L}, D, \mu \right) = 0 \rightarrow f \left( \frac{Q\mu}{\frac{\Delta P}{L} D^4} \right) = 0$$

**سوال:** یک سرریز V شکل که زاویه رأس آن  $\phi$  می باشد بر سر راه یک سیال در یک کانال باز قرار گرفته است، مشخص شده است که Q دبی

حجمی سیال گذرنده از سرریز با H ارتفاع سیال پشت سرریز، g شتاب ثقل



|                             |              |   |           |           |        |
|-----------------------------|--------------|---|-----------|-----------|--------|
| کمیت                        | Q            | H | g         | $V_0$     | $\phi$ |
| و زاویه رأس سرریز مرتبط بعد | $L^3 T^{-1}$ | L | $LT^{-2}$ | $LT^{-1}$ | -      |

است. معادله این ارتباط را بیابید.

**روش حل**

$$n = 5, m = 2, n - m = 3$$

$$\pi_1 = H^{x_1} g^{y_1} Q$$

$$\pi_1 = H^{x_1} g^{y_1} Q \rightarrow \pi_1 = L^{x_1} (LT^{-2})^{y_1} L^3 T^{-1} = L^T$$

$$\pi_2 = H^{x_2} g^{y_2} V_0 \rightarrow \pi_2 = L^{x_2} (LT^{-2})^{y_2} LT^{-1} = L^0 T^0$$

$$\pi_3 = \phi$$

$$\pi_1 \begin{cases} (\text{for } L) & x_1 + y_1 + 3 = 0 \\ (\text{for } T) & -2y_1 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}, x_1 = -\frac{5}{2}$$

$$\pi_2 \begin{cases} (\text{for } L) & x_2 + y_2 + 1 = 0 \\ (\text{for } T) & -2y_2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow y_2 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\pi_1 = Qg^{-\frac{1}{2}}H^{-\frac{5}{2}} = \frac{Q}{\sqrt{gH^2}^{\frac{5}{2}}} \quad \pi_2 = V_0g^{-\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}} = \frac{V_0}{\sqrt{gH}} \quad \pi_3 = \phi$$

$$Q = \sqrt{gH^2}^{\frac{5}{2}} F_1\left(\frac{V_0}{\sqrt{gH}}, \phi\right) \quad F\left(\frac{Q}{\sqrt{gH^2}^{\frac{5}{2}}}, \frac{V_0}{\sqrt{gH}}, \phi\right) = 0$$

$$Q = V_0H^2 F_2\left(\frac{V_0}{\sqrt{gH}}, \phi\right)$$