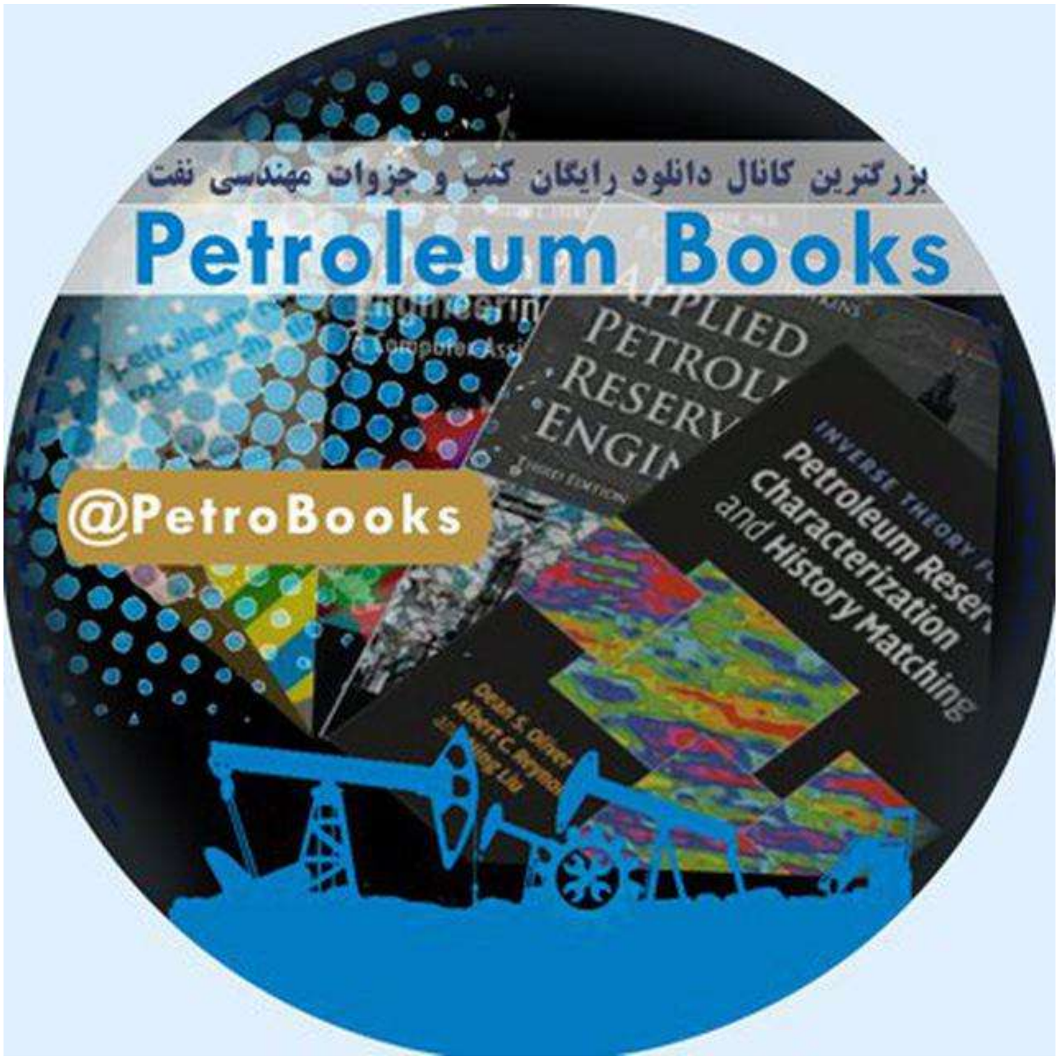
بزرگترین کانال تلگرامی کتب وجزوات مهندسی نفت کشور



لینک عضویت

ص ۱ Mass eq. « بنام خدا » مکانیک سیالات [illegible]

(A)

Mass balance $\Rightarrow$ [Rate of mass in the system] (1) − [Rate of mass out of system] (2) + [Rate of mass generated in the system] (3) = [Rate of mass accumulate center volume in the system] (4)

term (1), (2) $\rightarrow$ bulk flow (convection term)

term (3) $\rightarrow$ source term , term (4) $\rightarrow$ inventery

اثبات ترم (1), (2) $\rightarrow$ (1) $v \cdot df = \phi \xrightarrow{\times \text{دانسیته}} \underbrace{\rho \times v \times df}_{\text{mass fluid}} \xrightarrow[\text{ترم}]{\text{از } f} -\iint_{f_{in}} \rho \cdot v \cdot df$

علامت منفی برای اینکه خلاف جهت بودن $\vec{v}$ و df در سطح ورودی

(2) $-\iint_{f_{out}} \rho \cdot v \cdot df$, (1) − (2) = total = $\iint_{f_{total}} \rho \cdot v \cdot df$

هم جهت بودن در سطح خروجی

(3) اثبات ترم $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{No reaction} \\ \text{No nuclear activites} \end{array} \right. = 0$

(4) اثبات ترم $\rightarrow \underbrace{\iiint \rho \cdot d\tau}_{\text{حجم (1)}} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}(\iiint \rho \cdot d\tau)} \underbrace{\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau}_{\text{حجم (2)}}$

$\Rightarrow -\underbrace{\iint \rho v \cdot dt}_{\text{انتگرال دوگانه}} = \underbrace{\iiint_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau}_{\text{انتگرال سه گانه}} \xrightarrow[\text{به سه گانه}]{\text{تبدیل انتگرال دوگانه}}$ با قرار دادن ترم ها در معادله داریم:

$$\Rightarrow -\cancel{\iiint_\tau} \nabla \cdot (\rho \cdot v) \cancel{d\tau} = +\cancel{\iiint_\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \cancel{d\tau} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \rho v = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Continuty equation

for incompressible fluid $\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot v = 0}$

(B) اثبات کنید : $\nabla \cdot \rho v = \rho \nabla \cdot v + v \cdot \nabla \rho$

حل: $\nabla \cdot \rho v = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z$

$+ \frac{\partial v_x}{\partial x} \rho + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \rho + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \rho = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y +$

$\frac{\partial \rho}{\partial z} v_z = \rho \nabla \cdot v + v \cdot \nabla \rho$

ص ۳ «به نام خدا» [illegible]

Navier stock's Eq.

in T, f, ρ, μ, P, gravity force (g), shear force (σ) : are Know

با استفاده (از بقای مومنتم) →

$$\textcircled{1}\begin{bmatrix}\text{rate of} \\ \text{momentum} \\ \text{in of convection}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{rate of} \\ \text{momentum} \\ \text{out of convection}\end{bmatrix}\textcircled{2} + \textcircled{3}\begin{bmatrix}\text{rate of} \\ \text{momentum} \\ \text{in by moleculars} \\ \text{diffusion}\end{bmatrix} - \textcircled{4}\begin{bmatrix}\text{rate of} \\ \text{momentum} \\ \text{out by moleculars} \\ \text{diffusion}\end{bmatrix} +$$

$$\textcircled{5}\begin{bmatrix}\text{External force} \\ \text{on the system}\end{bmatrix} = \textcircled{6}\begin{bmatrix}\text{rate of accumulation} \\ \text{with in the system}\end{bmatrix}$$

①, ② = bulk motion

③, ④ = velocity gradiant

⑤ = { a: pressure force, b: body force }

⑥ = inventery

اثبات ترم (1,2) $\rightarrow \sigma \cdot df = \text{integraid } \text{volume} \xrightarrow{\times \text{دانسیته}}$

$\rho \cdot v \cdot df = \text{mass fluid} \xrightarrow{\times \sigma} \rho \cdot v \cdot \sigma \cdot df = \text{rate of momentum}$

$$\boxed{-\oiint \rho \cdot v \cdot \sigma \cdot df}$$

علت علامت منفی: ورودی / خروجی

اثبات ترم (3,4) $\rightarrow \boxed{-\oiint \tau \cdot df}$

اثبات ترم 5a) pressure force $\rightarrow \boxed{-\oiint P \cdot df}$

اثبات ترم 5b) body force $\rightarrow \rho \times F \times \tau \rightarrow \iiint_\tau \rho F \, d\tau$ (نیروی وارده به واحد جرم در حجم)

$\cancel{\frac{lbm}{ft^3}} \; \frac{lbf}{\cancel{lbm}} \; \cancel{ft^3} \Rightarrow \boxed{lbf}$

$\hookrightarrow \boxed{\iiint_\tau \rho \cdot F \cdot d\tau}$

6 (اثبات ترم) $\underbrace{\iiint v}_{\text{حجم سیال}} \xrightarrow{\times \text{دانسیته}} \underbrace{\iiint v \cdot \rho}_{\substack{\text{جرم سیال} \\ (v \cdot \rho = m)}} \xrightarrow{\times \text{سرعت}} \underbrace{v \cdot \rho \cdot d\tau}_{\text{مومنتم}} \xrightarrow[\text{تغییرات نسبت به زمان}]{\partial/\partial t} \underbrace{\frac{\partial(v \cdot \rho)}{\partial t} d\tau}_{\text{Rate of momentum}}$

$$\longrightarrow \boxed{\iiint_\tau \frac{\partial(v \cdot \rho)}{\partial t} d\tau}$$

(نیروی برشی)

با قرار دادن تمام ۶ term : $-\frac{1}{g_c} \oiint \rho \cdot v \cdot \sigma \cdot df - \oiint \tau \cdot dt - \oiint_f P \, df + \iiint_\tau \rho \cdot F \cdot d\tau$

$$\Rightarrow \frac{1}{g_c} \iiint_\tau \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} d\tau$$

→ Applical divergenes theoreme of Gause:

$$-\frac{1}{g_c} \iiint_\tau \nabla(\rho \cdot v \cdot \sigma) d\tau - \iiint_\tau (\nabla \cdot \tau) d\tau - \iiint_\tau (\nabla P) d\tau + \iiint_\tau \rho F \cdot d\tau$$

شتاب

$$\Rightarrow \frac{1}{g_c} \iiint_\tau \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} d\tau$$

به نام خدا

مکانیک سیالات در محیط های متخلخل

ادامه جلسه قبل :

$$\underbrace{-\frac{1}{g_c}\nabla\cdot(\rho\, v\, \nabla) - \nabla\cdot\tau - \nabla p + \rho F = \frac{1}{g_c}\cdot\frac{\partial(\rho\cdot v)}{\partial t}}_{\text{Eq. of motion}}$$

Eq. of motion — معادله اساسی حرکت

حال می‌توان اینگونه تشریح کرد:

اولین ترم از سمت راست $\rightarrow \frac{1}{g_c}\cdot\frac{\partial(\rho\cdot v)}{\partial t}$ و assume $\rho = \underset{\text{ثابت}}{const} \rightarrow \frac{\rho}{g_c}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$

اولین ترم از سمت چپ $\rightarrow \underbrace{-\frac{1}{g_c}\nabla\cdot(\rho\nabla\cdot\nabla)}_{1} \rightarrow \underbrace{-\frac{1}{g_c}\left[\cancel{\rho\nabla(\nabla v)}^{*} + \nabla v(\rho\cdot v)\right]}_{2}$

$\xrightarrow[\text{و راست و دانسیته ثابت}]{\text{با فرض داشتن ترم های چپ}} \underbrace{-\frac{\rho}{g_c}\left[\nabla\cdot(\nabla v) + \nabla\cdot v\right]}_{**}$

یادآوری: $\left[\nabla\cdot\rho v = v\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot v\right]$

اثبات همین فرمول : $\rightarrow \frac{\rho}{g_c}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\rho}{g_c}(v\cdot\nabla)v \longrightarrow \boxed{\frac{\rho}{g_c}\frac{Dv}{Dt}}$

(وقتی دانسیته ثابت باشد پس incompressible fluid داریم پس ترم * (در حالت ۲) حذف می‌شود.)

$\left(-\nabla\cdot\tau - \nabla p + \rho\cdot f = \frac{\rho}{g_c}\frac{Dv}{Dt}\right.$ و $\left.\tau = -\mu\cdot\nabla\cdot v\right)$ داریم

داریم $\rightarrow \boxed{\frac{\mu}{g_c}\nabla^2 v - \nabla p + \rho f = \boxed{\frac{\rho}{g_c}\frac{Dv}{Dt}}}$ $\rightarrow$ Novian Stock's Eq.

رابطه اساسی در حرکت سیال

lbf $\leftarrow \left(\frac{g}{g_c}\right)$

lbm $\leftarrow \left(\frac{g}{g_c}\right)$

- بدست آوردن معادله Eurler از معادله stock's :

$\mu = 0 \rightarrow \nabla\cdot\tau = 0 \rightarrow \boxed{-\nabla p + \rho\cdot\frac{g}{g_c} = \frac{\rho}{g_c}\frac{Dv}{Dt}} \rightarrow$ معادله Eurler

Bernollie = Eq. of strean Line

معادله برنولی (Bernollie) :

consider Term $\frac{\rho g}{g_c} \Rightarrow -\nabla\left(\rho\cdot\frac{g}{g_c}\cdot z\right) \rightarrow -\nabla\left(p + \frac{\rho g}{g_c}z\right) = \frac{\rho}{g_c}\frac{Dv}{Dt}$

$\rightarrow -\nabla\left(p + \rho\frac{g}{g_c}z\right) = \underbrace{\frac{\rho}{g_c}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\rho}{g_c}(\nabla\cdot v)v}_{\frac{Dv}{Dt}}$ (۵)

جلسه ۴

« بقیه ی مبحث »

اثبات
ادامه معادله برنولی :

ادامه بحث سیالات در محیط های متخلخل

(Vortex جریانی است که باعث می شود سطح سیال به شکل مخروطی در بیاید)

$$\downarrow\ (v\cdot\nabla)v = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{grad}\, v^2 - v \times \mathrm{curl}\, v$$

$$\rightarrow -\nabla\left(p + \rho \frac{g}{g_c} z\right) = -\frac{\rho}{g_c} v \times \mathrm{curl}\, v + \frac{\rho}{g_c}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\rho}{2g_c}\nabla v^2 \qquad (\boxtimes)$$

ابتدا $(v\nabla)v$ را جایگزین کرده سپس $\times g_c$ ضرب کردیم. (از معادله پایین صفحه قبل Δ)

$$\rightarrow -\nabla\left(p + \rho\cdot\frac{g}{g_c}z + \frac{\rho v^2}{2g_c}\right) \underset{\downarrow}{=} \frac{\rho}{g_c}\left(\frac{\partial v}{\partial t} - v \times \mathrm{curl}\, v\right) \rightarrow \text{صفر}$$

گرفته شده از معادله $\boxtimes$

1. flow is irrtational $\rightarrow \mathrm{curl}\, v = 0$
2. steady state flow $\rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$

$$\rightarrow \nabla\left(p + \rho\cdot\frac{g}{g_c}z + \frac{\rho v^2}{2g_c}\right) = 0 \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} p + \rho\frac{g}{g_c}z + \frac{\rho v^2}{2g_c} = \underset{\text{ثابت}}{\mathrm{const}}$$

$$\frac{\div \rho g \ \text{طرفین}}{(\rho g = \gamma)\text{ و}} \rightarrow \boxed{\frac{P}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = \mathrm{const}}$$

اثبات معادله برنولی
Eq. Bernollie

نکته : برای حالت استاتیک و برای معادله برنولی داریم : (بدلیل نبودن Term سرعت پس $\frac{v^2}{2g} = 0$ است.)

$$\frac{P}{\gamma} + z + \cancel{\frac{v^2}{2g}}_{\,0} = \mathrm{const} \longrightarrow \underbrace{\frac{P}{\gamma}}_{\text{pressure head}} + \underbrace{z}_{\text{elevation head}} = \underbrace{\mathrm{const}}_{\text{total heed}}$$

Energy Eq که شامل ۳ زوه است :

a) Kinetic energy در اثر سرعت بوجود می آید
b) Potential energy در اثر تغییرات سرعت (positions) بدست می آید.
c) Internal energy در اثر انرژی داخلی حاصل می شود.

c_v = head capacity and constant vo[lume]
c_p = " " " " pres[sure]

انرژی داخلی $IE \Rightarrow c_v(T - T_0)$

$\underset{\text{انرژی جنبشی}}{\text{Kinetic } E} = K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \left(\frac{v^2}{2g_c}\right)$ برای واحد جرم ، Potential $E = \rho g z \Rightarrow \left(PE = \frac{g}{g_c} z\right)$ انرژی پتانسیل برای واحد جرم

تبدیل واحد کمی انرژی $\rightarrow \underset{\text{ژول}}{J} = \dfrac{778 \ \mathrm{lbf\text{-}ft}}{\mathrm{BTU}}$

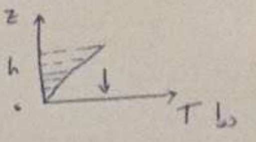
« بنام خدا »

مکانیک سیالات در محیط‌های متخلخل

Fourein law of thermal conductivity : $\left\{ \begin{array}{l} t \to \infty \text{ and} \\ \text{steady state} \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Q}{A} \propto \frac{T^{\text{دما}}}{h_{\text{عمق}}} \\ \frac{Q}{A} \propto \frac{dt}{dz} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\frac{Q}{A} = -K \frac{dt}{dz}}$$

(نمودار، حرارت دمای به عمق / مثل خطرات آب) عمق h



$$q_z = -K \frac{\partial T}{\partial z},\ q_y = -K \frac{\partial T}{\partial y},\ q_x = -K \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow q = \vec{i} q_x + \vec{j} q_y + \vec{k} q_z$$

$$\to q = \vec{i}\left(-K \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \vec{j}\left(-K \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \vec{k}\left(-K \frac{\partial T}{\partial z}\right) \Rightarrow q = \underbrace{-K}_{K} \Big(\underbrace{\vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z}}_{\nabla T} \Big)$$

$$\to \boxed{q = -K \nabla T} \to \text{Fourier law}$$

- هر سیالی که از این رابطه پیروی کند را به نام Fourein Fluid می‌شناسند.
- حال می‌توان معادله Fourein law را برای ۲ حالت دیگر هم نوشت:

Cylindrical cordinate : $q_r = -K \frac{\partial t}{\partial r},\ q_\theta = -K \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta},\ q_z = -K \frac{\partial t}{\partial z}$

Spherical cordinate : $q_r = -K \frac{\partial t}{\partial r},\ q_\theta = -K \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta},\ q_\phi = -K \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial t}{\partial \phi}$

« Energy Eq. for solids » τ = حجم , F = سطح , Solid = Hemogeneous ,

T, ρ, c_p, c_v, q, P → all one knew , using conversion law for energy :

$$\underset{①}{\begin{bmatrix} \text{Rate of} \\ \text{Energy in} \end{bmatrix}} - \underset{②}{\begin{bmatrix} \text{Rate of} \\ \text{Energy out} \end{bmatrix}} + \underset{③}{\begin{bmatrix} \text{Rate of} \\ \text{energy generated} \end{bmatrix}} = \underset{④}{\begin{bmatrix} \text{Rate of energy} \\ \text{accumulation} \end{bmatrix}}$$

Since we have Solid : $\underset{\text{جنبشی}}{KE} = 0,\ \underset{\text{پتانسیل}}{PE} = 0,\ \underset{\text{درونی}}{IE} = 0 \Rightarrow$

② و ① ترم‌ها، دبی ترم → $q = \text{Rate of energy} = \frac{BTu}{Ft^2 \cdot sec} \xrightarrow[\frac{BTu}{Sec} \text{ تبدیل واحد}]{} -\oiint \underset{\frac{BTu}{Ft^2 \cdot sec}}{q} \cdot \underset{\cancel{Ft^2}}{dF} \to \frac{BTu}{Sec}$

③ ترم، ثبات ترم → A را برابر با مقدار تولید شده فرض می‌کنیم → $A = \frac{BTu}{Ft^3 \cdot sec} \Rightarrow \iiint_\tau \underset{\frac{BTu}{\cancel{Ft^3} \cdot sec}}{A}\ \underset{\cancel{Ft^3}}{d\tau} \Rightarrow \frac{BTu}{Sec}$

④ ترم، دبی تجمع → $(IE)\, d\tau \to \rho \cdot c_p (T - T_0)\, d\tau \xrightarrow{\text{مشتق زمانی}} \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho \cdot c_p (T - T_0)\, d\tau\right]$,

فرضیات $\left\{ \begin{array}{l} T_0 = 0 ,\quad c_p = \text{const} \\ \tau = \text{حجم و دمای} ,\quad \rho = \text{const} \end{array} \right. \to \iiint_\tau \rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t}\, d\tau$

→ ترم ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار دادن →

معادله انرژی برای جامدات

$$-\oint_F q \cdot dF + \iiint_\tau A \cdot d\tau = \iiint_\tau \rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} d\tau$$

Applied Gauss theorem $\rightarrow - \iiint_\tau (\nabla q) d\tau + \iiint_\tau A \cdot d\tau = \iiint_\tau \rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} d\tau$

$$\xrightarrow[\iiint_\tau d\tau]{\text{[illegible]}} -\nabla q + A = \rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} \xrightarrow{q \text{ [illegible]}} K \nabla^2 T + A = \rho \, c_p \frac{\partial T}{\partial t} \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{K}{\rho \cdot c_p}}_{(a^2)} \nabla^2 T + \frac{A}{\rho \cdot c_p} = \boxed{a^2 \nabla^2 T + \frac{A}{\rho c_p}} \rightarrow \text{Energy Eq. for Solids}$$

[illegible]

Eq. of Energy Transfer: Fluid is flowing, $\tau =$ حجم, $F =$ سطح,

$T, \rho, c_p, P, v \rightarrow$ all are know, using conservation law for energy:

$$\begin{bmatrix}\text{Rate of energy} \\ \text{in the form of} \\ \text{heat in by conduction}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\sim \ \sim \ \sim \\ \sim \ \sim \ \sim \\ \sim \text{ out by } \sim\end{bmatrix} + \begin{pmatrix}\sim \sim \text{ internal} \\ \text{energy in by} \\ \text{convection}\end{pmatrix} - \begin{bmatrix}\sim \ \sim \ \sim \\ \sim \text{ out by} \\ \sim\end{bmatrix} + \begin{pmatrix}\sim \sim \text{ kinetic} \\ \text{energy in by} \\ \text{convection}\end{pmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix}\sim \ \sim \ \sim \\ \sim \text{ out by} \\ \sim\end{bmatrix} + \begin{pmatrix}\sim \ \sim \text{ energy} \\ \text{in the form of} \\ \text{work down by surrounding} \\ \text{on the system}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sim \ \sim \ \sim \\ \text{generated in} \\ \text{the system}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sim \ \sim \ \sim \text{ accumulation} \\ \text{in term of (IE and KE)} \\ \text{in the system}\end{pmatrix}$$

(* علامت ترم‌هایی که out دارند در واقع منفی است.)

②,① ترم → [illegible] $-\oint_F q \cdot dF$ ① / ④,③ ترم → bulk flow → IE $\times \rho \Rightarrow$ mass $\times$ IE (BTU/ft³) $= \rho (c_v \approx c_p) T$

$\Rightarrow -\oint_F \rho \cdot c_v \cdot T (V \cdot dF)$ ②

⑥,⑤ ترم $\frac{v^2}{2g_c} = [\text{[illegible]}] \left(\frac{\text{lbf}\cdot\text{ft}}{\text{lbm}}\right) \xrightarrow[\div J]{\text{BTU [illegible]}} \frac{v^2}{2g_c J} \left(\frac{\text{BTU}}{\text{lbm}}\right) \xrightarrow[\text{[illegible]} \times]{\text{mass [illegible]}} \frac{\rho v^2}{2 g_c J} \left(\frac{\text{BTU}}{\text{ft}^3}\right)$

$\xrightarrow[\text{ft}^3]{\text{[illegible]}} \times v \cdot dF \ (\text{ft}^3/\text{sec})) \rightarrow \text{BTU/sec} \longrightarrow -\oint_F \frac{\rho v^2}{2 g_c J} (v \cdot dF)$ ③

⑦ ترم: [illegible]: work is
- a) gravity force [illegible]
- b) Pressure 〃 [illegible]
- c) viscosity 〃 [illegible]

7-a: $\rho \cdot d\tau \xrightarrow{\text{[illegible]}} \rho \cdot (v \, g/g_c) d\tau \longrightarrow \text{mass} \times (v \cdot g/g_c) =$ [illegible] $\left(\frac{\text{lbf}\cdot\text{ft}}{\text{sec}}\right)$

$\longrightarrow \iiint_\tau \rho \left(v \cdot \frac{g}{g_c J}\right) d\tau$ ④

⑤

7-b: $-P \, dF \rightarrow P \cdot v \cdot dF \longrightarrow -\oint_F P \cdot v \cdot dF$

7-c: $-\oint_F \left(\frac{\tau \cdot v}{J}\right) dF$ ⑥ / ⑧ ترم: $\iiint_\tau A \cdot d\tau$ ⑦

صـ ۸ «بنام خدا»

معادلات پایه در محیط متخلخل

(۸) جمله ۸ : $\rho \cdot C_v \cdot T,\ \frac{\rho v^2}{2g_c \cdot J} \Longrightarrow \oiiint \left(\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2g_c J}\right) \underbrace{d\tau}_{\text{حجم}}$ $\frac{\text{تغییرات}}{\text{نسبت به زمان}}$

$$\oiiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2g_c \cdot J}\right] d\tau \Longrightarrow \oiiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2g_c J}\right] d\tau \quad (8)$$

$\xrightarrow[\text{ها Term}]{\text{کنار هم گذاشتن همه}}$ $-(1)-(2)-(3)+(4)-(5)-(6)+(7)=(8)$

Applied divergence Theorim of Gause :

$$-\oiiint_\tau (\nabla \cdot q)\, d\tau - \oiiint_\tau \nabla \cdot (\rho c_v T v)\, d\tau - \oiiint_\tau \nabla \left(\frac{\rho v^2 v}{2g_c \cdot J}\right) d\tau +$$

$$\oiiint_\tau \rho \left(\frac{v \cdot g}{g_c \cdot J}\right) d\tau - \oiiint_\tau \frac{\nabla \cdot (P \cdot v)}{J}\, d\tau - \oiiint_\tau \frac{\nabla (\tau \cdot v)}{J}\, d\tau +$$

$$\oiiint_\tau A\, d\tau = \oiiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2g_c J}\right) d\tau$$

$\xrightarrow{\text{حذف حجم از طرفین}}$ $-\nabla q - \nabla(\rho \cdot c_v \cdot T v) - \nabla\left(\frac{\rho v^2 v}{2g_c J}\right) + \rho\left(\frac{v \cdot g}{g_c \cdot J}\right) - \frac{\nabla \cdot (P v)}{J} -$

$$\frac{\nabla (\tau \times v)}{J} + A = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2g_c \cdot J}\right) \rightarrow \text{general Eq of Energy}$$

معادله عمومی انرژی

mass Eq. $\longrightarrow$ first law of fick : $\dot{J}_A = \vec{i}\, \dot{J}_{Ax} + \vec{J}\, \dot{J}_{Ay} + \vec{K}\, \dot{J}_{Az} =$

$$\dot{J}_A = -D_{AB}\left(\vec{i}\frac{dc_A}{dx} + \vec{J}\frac{dc_A}{dy} + \vec{K}\frac{dc_A}{dz}\right) = -D_{AB} \nabla C_A$$: قانون اول fick

mass transfer in solid : if multi system $\longrightarrow$ Binary system : A, B

$\tau =$ حجم , $F =$ سطح

(1) [rate of moles of A in] $-$ (2) [$\sim\ \sim\ \sim$ of A out] $+$ (3) [$\sim\ \sim\ \sim$ of A generation] $=$ (4) [rate of moles accumulation] $A \to B$

(2), (1) اثبات $\rightarrow$ $\dot{J}_A =$ mole flux vector $= \frac{\text{moles}}{ft^2 \cdot sec}$, $-\oiint \dot{J}_A \cdot dF$ $\quad \frac{\text{mole}}{\cancel{ft^2} \cdot sec}\ \cancel{ft^2}\ \left(\frac{\text{mole}}{sec}\right)$

(3) اثبات $\rightarrow$ $R_A = \frac{\text{moles}}{ft^3 \cdot sec}$, $\oiiint_\tau R_A\, d\tau$

(4) اثبات $\rightarrow$ $C_A = \frac{\text{mole}}{ft^3} \rightarrow C_A \cdot d\tau = \text{moles}$ $\quad \frac{\text{mole}}{\cancel{ft^3}}\ \cancel{ft^3}$, $\oiiint_\tau \frac{\partial c_A}{\partial t}\, d\tau$

معادله انتقال جرم Solid

$\xrightarrow[\text{ترم ها}]{\text{کنار هم گذاشتن}}$ $-\oiint_F \dot{J}_A \cdot dF + \oiiint_\tau R_A\, d\tau = \oiiint_\tau \frac{\partial c_A}{\partial t}\, d\tau \xrightarrow[\text{Applied}]{\text{Gause}} -\oiiint (\nabla \dot{J}_A)\, d\tau + \oiiint_\tau R_A\, d\tau = \oiiint_\tau \frac{\partial c_A}{\partial t}\, d\tau$

$\xrightarrow{\text{حذف حجم}}$ $\boxed{-\nabla \cdot \dot{J}_A + R_A = \frac{\partial c_A}{\partial t}}$

«به نام خدا»

تفاوت با اثبات قبلی ترم ۳ و ۴ اضافه شده

[illegible]

General Eq. of mass transfer

$$\begin{bmatrix}\text{rate of moles}\\ \text{of A in by molecular}\\ \text{diffusion}\end{bmatrix}_{1} - \begin{bmatrix}\sim\ \sim\ \sim\\ \sim\ \text{A out}\ \sim\ \sim\sim\\ \sim\end{bmatrix}_{2} + \begin{bmatrix}\sim\ \sim\ \sim\\ \text{of A in by}\\ \text{convection}\end{bmatrix}_{3} - \begin{bmatrix}\sim\ \sim\sim\\ \text{of A out by}\\ \sim\end{bmatrix}_{4} +$$

$$\begin{bmatrix}\sim\ \sim\sim\\ \text{of A generation}\end{bmatrix}_{5} = \begin{bmatrix}\sim\ \sim\ \sim\\ \text{of A accumulation}\end{bmatrix}_{6}$$

2, 1 ترم → (a) $\boxed{-\oiint_F J_A \cdot dF}$ / 4, 3 ترم → $C_A \cdot v\, dF \left(\frac{mole}{sec}\right) \rightarrow$ (b) $\boxed{-\oiint_F C_A \cdot v \cdot dF}$

$\frac{mole}{ft^3}\ \frac{ft}{sec}\ ft^2$

5 ترم → (c) $\boxed{+\oiiint_\tau R_A\, d\tau}$ / 6 ترم (d) $\boxed{\oiiint_\tau \frac{\partial C_A}{\partial t}\, d\tau}$

[illegible]

$$\rightarrow -a - b + c = d \xrightarrow[\text{Gause}]{\text{Applied}} -\oiiint_\tau (\nabla \cdot J_A)\, d\tau - \oiiint_\tau \nabla \cdot (C_A \cdot v)\, d\tau +$$

$$\oiiint_\tau R_A\, d\tau = \oiiint_\tau \frac{\partial C_A}{\partial t}\, d\tau \xrightarrow{\text{[illegible]}} \frac{\partial C_A}{\partial t} = -\nabla \cdot J_A - \nabla \cdot (C_A \cdot v) + R_A$$

$$\rightarrow \frac{\partial C_A}{\partial t} = -\nabla J_A - v \cdot \nabla C_A - C_A \nabla \cdot v + R_A \xrightarrow[\text{Stock's}]{\text{[illegible]}} \frac{\partial C_A}{\partial t} + v \cdot \nabla C_A = D_{AB} \nabla^2 C_A - C_A \nabla \cdot v + R_A$$

$$\rightarrow \frac{DC_A}{Dt} + C_A \nabla \cdot v = D_{AB} \nabla^2 C_A + R_A \xrightarrow[\text{Fluid}]{\text{For incompressible}} v \cdot \nabla = 0 \longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{DC_A}{Dt} = D_{AB} \nabla^2 C_A + R_A} \rightarrow \text{General Eq. mass transfer for solids}$$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ (μ → dynamic viscosity, ρ → density)

↓ Kienetic viscosity

$a^2 = \frac{K}{\rho \cdot C_p} \rightarrow$ Thermal diffision

[illegible]

$\boxed{x^+ = \text{super } x}$

Dimensional Analysis: $x^+ = x/L$, $y^+ = y/L$, $z^+ = z/L$, $T^+ = \frac{t v}{L}$, $\nabla^+ = L\nabla$,

$\nabla^{2+} = L^2 \nabla^2$, $C_A^+ = \frac{C_A}{C}$, $v^+ = \frac{v}{v_\infty}$, $P^+ = \frac{P}{\rho v^2 / 2g_c}$

(systen concentration) (systen velocity)

مثال

1) $v \cdot \nabla = 0 \longrightarrow \frac{1}{L} \nabla^+ \cdot v v^+ \longrightarrow \frac{v}{L} \nabla^+ v^+ \rightarrow \nabla^+ + v^+ = 0$

۲) Navie stock's Eq, Negleting gravity effect (gravity [illegible])

$$\frac{\rho}{g_c} \frac{Dv}{Dt} = -\nabla P + \frac{\mu}{g_c} \nabla^2 v \longrightarrow \frac{\rho v}{g_c \cdot L} \cdot \frac{D(v v^+)}{Dt^+} = -\frac{1}{g_c \cdot L} \nabla^+ \rho v^2 P^+ + \frac{\mu}{g_c \cdot L^2} \nabla^{2+} (v v^+)$$

$$\rightarrow \frac{Dv^+}{Dt^+} = -\nabla^+ P^+ + \left(\frac{\mu}{L v \rho}\right) \nabla^{2+} v^+$$

مکانیک سیالات در محیط متخلخل

مثال

energy Eq $\longrightarrow \dfrac{DT}{Dt} = \alpha^2\nabla^2 T = \dfrac{K}{\rho c_p}\nabla^2 T$

$\longrightarrow \dfrac{D(\theta T^+)}{D\left(\frac{LT^+}{V}\right)} = \dfrac{K}{\rho c_p L^2}\nabla^{2+}(\theta t^2) \xrightarrow[\rho \times \text{[illegible]}]{\text{[illegible]}} \dfrac{DT^+}{Dt^+} = \dfrac{K}{L V \rho c_p}\nabla^+ T^+$

$\longrightarrow \dfrac{DT^+}{Dt^+} = \underbrace{\left(\dfrac{\mu}{L V \rho}\right)}_{1/N_{Re}}\underbrace{\left(\dfrac{K}{\mu c_p}\right)}_{1/N_{Pr}}\nabla^{2+}T^+$

مثال

mass Eq. $\longrightarrow \dfrac{DC_A}{Dt} = D_{AB}\nabla^2 C_A \longrightarrow \dfrac{D(CC_A^+)}{D\left(\frac{Lt^+}{V}\right)} = \dfrac{D_{AB}}{L^2}\nabla^{2+}(CC_A^+)$

$\xrightarrow[\mu\rho\ \times]{\text{[illegible]}} \dfrac{DC_A^+}{Dt^+} = \dfrac{D_{AB}}{LV}\nabla^{2+}C_A^+ \longrightarrow \dfrac{DC_A^+}{Dt^+} = \underbrace{\left(\dfrac{\mu}{LV\rho}\right)}_{1/N_{Re}}\underbrace{\left(\dfrac{D_{AB}}{\mu}\right)}_{1/N_{Schmidt}}\nabla^{2+}C_A^+$

* تبدیل یک پدیده فیزیکی به معادله ریاضی؟ تغییرات سرعت تنها در z نداریم

معادله حرکت در راستای z : Eq of motion in cylindrical form

استوانه‌ای

$\cancel{\dfrac{\rho}{g_c}}\left(\cancel{\dfrac{\partial v_z}{\partial t}}\right) + v_r\dfrac{\partial v_z}{\partial r} + \cancel{\dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}} + \cancel{v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z}} = \underbrace{-\dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{\mu}{g_c}}$

جریان S.S است

جریان کاملاً توسعه یافته

تغییرات سرعت در جهت z است.

$\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \cancel{\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2}} + \cancel{\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}\right] + \underbrace{\rho\dfrac{g_z}{g_c}}$

$\left(\dfrac{dp^*}{dz}\right)$

$\Longrightarrow \dfrac{dp^*}{dz} = \dfrac{\mu}{g_c}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right]$

* معادله مومنتم در محیط متخلخل :

$V = -\dfrac{K}{\mu}\nabla\phi$ (Darcy Eq.)

$\phi = p + \rho g z$

a) mass Eq $\rightarrow \nabla\cdot\rho v = -\phi\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$,

b) momentum Eq $\rightarrow v_x = -\dfrac{K_x}{\mu}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$, c) Eq. of state

* در روش معادله flow ، a و b و c نیاز داریم و با این ۳ معادله می‌توان معادله جریان نوشت.

اگر معادله دارسی را در معادله پیوستگی قرار دهیم معادله انتشار بدست می‌آید:

$v_x = -\dfrac{K}{\mu}\nabla\phi$

سرعت در حالت کلی : $v_x = -\frac{1}{\mu}\left(K_{xx}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + K_{xy}\dfrac{\partial\phi}{\partial y} + K_{xz}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

$v_y = -\frac{1}{\mu}\left(K_{yx}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + K_{yy}\dfrac{\partial\phi}{\partial y} + K_{yz}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

$v_z = -\frac{1}{\mu}\left(K_{zx}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + K_{zy}\dfrac{\partial\phi}{\partial y} + K_{zz}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{\mu}\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix}$$

۱۰

Eq of flow Through Porous media «میانترم»

معادلات جریان در محیط متخلخل

۳ - General diffiusibility Eq. :

in centegain coordination : case (A) : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\cancel{\rho}\frac{\cancel{k_x}}{\cancel{\mu}}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\cancel{\rho}\frac{\cancel{k_y}}{\cancel{\mu}}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) +$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\cancel{\rho}\frac{\cancel{k_z}}{\cancel{\mu}}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = \phi \frac{\cancel{\partial \rho}}{\partial t}$$

Eq. diffusibility $\quad \rho = Const$

$K_x = K_y = K_z = K$

Homogenous - isotropic - media - incompressible fluid - steady state flow - $\mu = Const$ - (no gravity effect $\Rightarrow \phi = P$)

$$\xrightarrow{\text{با فرض شرایط}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = 0\right)$$

$\nabla^2_P = P$ لاپلاس $= 0$

$\nabla^2\phi = \phi$ لاپلاس $= 0$

case (B) : Homogenous - isotropic - slighty compressible fluid - (no gravity effect $\phi \xrightarrow{\text{تبدیل}} P$)

$K_x = K_y = K_z = K$

$\mu = Const$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{k_x}{\cancel{\mu}}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{k_y}{\cancel{\mu}}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{k_z}{\cancel{\mu}}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = \phi\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial z}\right) = \frac{\phi\mu}{K}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$$

مهم → معادله اساسی ول تست well Test Eq. → $\nabla^2 P = \frac{\phi\mu c}{K}\frac{\partial P}{\partial t}$ ۳

$c = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right) \rightarrow \rho c\, \partial P = \partial \rho$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) = \frac{\phi\mu}{K}\frac{\partial \rho}{\partial t} \xrightarrow[\times c]{\text{طرفین}} \frac{\phi\mu c}{K}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

case (C) : Homogenous - isotropic media - ideal gas - no gravity effect - unsteady state flow

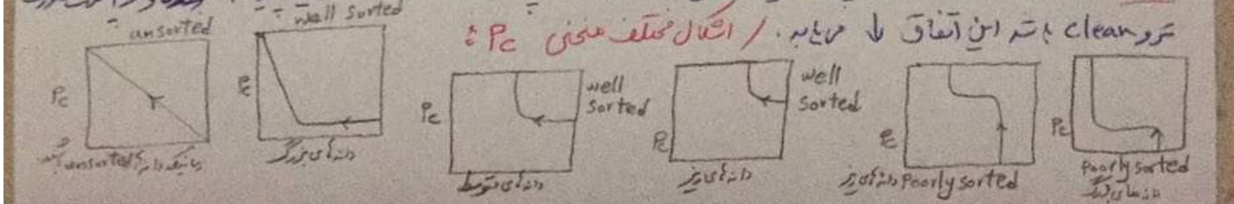
(1) $\rho = \frac{P \cdot M_w}{nRT}$ ($n_{ideal\ gas} = 1$) / (2) $M_w = \frac{PM}{nRT}$ $\left(\frac{mass}{number\ of\ mole}\right)$ / (3) $\rho = \varepsilon \cdot P$

(1) $\quad (Const = \varepsilon)$

(4) $\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} \longrightarrow \boxed{\nabla^2 P^2 = \frac{\phi\mu}{KP}\frac{\partial P^2}{\partial t}}$

سوال: Histresis درجه ریزدانه‌ای ↑ ریا ↓ می‌یابد؟ هرچه سنگ هتروژن‌تر باشد این پدیده ↑ و هرچه سنگ تمیزتر

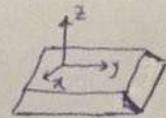
clean تر و باشد این اتفاق ↓ می‌یابد. / اشکال مختلف منحنی P_c :



Application of potential function (دارای پتانسیل سرعت است.)

$\nabla^2\phi = 0$

① linear – S.S flow – isotropic – homogenous media :



Boundry condition (B.C) $\begin{cases} \phi(0,y) = \phi_0 \\ \phi(x,y) = \phi_x \end{cases}$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}} = 0$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \xrightarrow{\text{۲ بار انتگرال}} \phi = c'x + c \xrightarrow[B.C]{\text{اعمال}} c = \phi_0,\ c' = \frac{\phi_x - \phi_0}{x} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{\phi_x - \phi_0}{x} X + \phi_0}$$

potential function معادله

$$\xrightarrow{\text{معادله دارسی}} v = \frac{k}{\mu}\nabla\phi \xrightarrow{\text{در جهت } x} v_x = -\frac{k_x}{\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x},\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\phi_x - \phi_0}{x} \rightarrow \boxed{v_x = \frac{-k_x}{\mu}\,\frac{\phi_x - \phi_0}{x}}$$

معادله سرعت

$$\xrightarrow{q \text{ دبی}} q = \int_0^A v_x\,dA = \int_0^y\int_0^z v_x\,dz\,dy = \underbrace{yz}_{A}.v_x$$

$$\boxed{q = \frac{-k.(A)(\phi_x - \phi_0)}{\mu.x}} \longrightarrow \text{Flow Rate}$$

دبی جریان $\xrightarrow[\text{نیروی گرانش}]{\text{صرف نظر از}}$ $q = \frac{-kA(P_e - P_w)}{\mu.L}$

② Radial – S.S Flow – isotropic – Homogenous media : $\nabla^2\phi = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \xrightarrow{B.C} \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0 \xrightarrow{\text{۲ بار انتگرال}} \phi = c\ln r + c'$$

$$\xrightarrow[B.C]{} \boxed{c = \frac{\phi_e - \phi_w}{\ln\frac{r_e}{r_w}}},\quad \phi = A\ln r + B \longrightarrow \boxed{v_r = -\frac{k}{\mu}\,\frac{\phi_e - \phi_w}{\ln r_e/r_w}}$$

معادله سرعت

$$\boxed{q = \frac{-2\pi kh(\phi_e - \phi_w)}{\mu\ln(r_e/r_w)}} \rightarrow \text{دبی جریان Flow Rate} \quad \left(q = \int_0^h\int_0^{2\pi} v_r r_w\,d\theta\,dh,\ \boxed{dA = r\,d\theta\,dh}\right)$$

صرف نظر از نیروی گرانش $\rightarrow q = \frac{2\pi k(P_e - P_w)}{\mu\ln(r_e/r_w)}$

③ Average Permeability :

جریان خطی $\rightarrow q = -\frac{kA\Delta P}{\mu L}$

a-3) layer in seris (لایه های سری) :

$$\begin{cases} A_1 = A_2 = A_3 = \cdots = A_n = A \\ q_1 = q_2 = q_3 = \cdots = q_n = q \end{cases}$$

$$\underset{\text{کل سیستم}}{\Delta P} = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 + \cdots + \Delta P_n \longrightarrow \Delta P_{tot} = \frac{\cancel{q_1}\cancel{\mu}.L_1}{k_1\cancel{A}} + \frac{\cancel{q_2}.\cancel{\mu}.L_2}{k_2\cancel{A_2}} + \frac{\cancel{q_3}\cancel{\mu}L_3}{k_3\cancel{A_3}} + \cdots \Rightarrow$$

$$\frac{L}{k} = \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \cdots + \frac{L_n}{k_n} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{k_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{k} \Rightarrow \boxed{\underset{\text{avg تراوایی}}{\bar{k}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{k_i}}}$$

b-3) layer in paraller (لایه های موازی) :

$$\begin{cases} q = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n \\ \Delta P = \Delta P_1 = \Delta P_2 = \Delta P_3 = \cdots = \Delta P_n \\ A = A_1 = A_2 = A_3 = \cdots = A_n \end{cases}$$

ادامه صفحه بعد

ص ۱۲ (b-3) ادامه اثبات — و تمام خط —

ناهمگنی در محیط متخلخل

$$\begin{cases} L_n = L_1 = L_2 = \dots = L \\ W_n = W_1 = W_2 = \dots = W \end{cases} \quad , \quad (A = h \cdot W)$$

متفاوت (A_1, A_2) — متفاوت (h_1, h_2)

$$q_{tot} = \frac{K A \Delta P}{\mu L} = \frac{K_1 A_1 \Delta P_1}{\mu L_1} + \frac{K_2 A_2 \Delta P_2}{\mu L_2} + \dots \Rightarrow Kh = K_1 h_1 + K_2 h_2 + \dots + K_n h_n$$

$$\Longrightarrow \boxed{\bar{K}_{avg} = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i h_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i}}$$

(flow capacity $= K \cdot h$) *

تخلخل متوسط

$$\boxed{\bar{\phi}_{avg} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \phi_i h_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i}}$$

* un S.S Radial Flow :

$$\nabla^2 P = \frac{\phi \mu c}{K} \frac{\partial P}{\partial t} \xrightarrow{\text{مختصات استوانه‌ای}} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial P}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2}}_{0} + \cancel{\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}}_{0} = \frac{\phi \mu c}{K}\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial P}{\partial r}\right) = \frac{\phi \mu c}{K}\frac{\partial P}{\partial t} \longrightarrow \text{P.D.E}$$

معادله دیفرانسیل جزئی

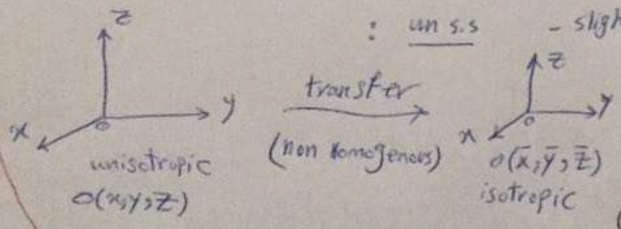
* نکته: در هر مسئله اگر صحبت از زمان (t) شد حالت un S.S و اگر نشد حالت S.S داریم

Diffusivity Eq. for unisotropic porous media :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial P}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial P}{\partial z}\right) = \phi \mu c \frac{\partial P}{\partial t}$$

* نکته: در سیستم isotropic تمام K ها باهم برابر (K=1) می‌باشند ولی در سیستم $K_x \neq K_y \neq K_z$: anistropic

رسم معادله بالا در حالت همگن slightly compressible - un S.S :



$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{x}{\sqrt{K_x}} , & \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{K_x}} \\ \bar{y} = \frac{y}{\sqrt{K_y}} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{K_y}} \\ \bar{z} = \frac{z}{\sqrt{K_z}} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{K_z}} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = 0\right)$$

using chain rule: $K_x \frac{\partial}{\cancel{\partial \bar{x}}}\left(\frac{\partial P}{\partial \bar{x}} \cancel{\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}}\right) \cancel{\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}} = K_x \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x}$

$$\left(\times \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right) \Longrightarrow \cancel{K_x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\partial P}{\partial \bar{x}} \cancel{\frac{1}{\sqrt{K_x}}}\right)\cancel{\frac{1}{\sqrt{K_x}}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\partial P}{\partial \bar{x}}\right) \xrightarrow[\text{هم داریم در نتیجه:}]{\text{به همین ترتیب برای } z \text{ و } y} \boxed{\frac{\partial^2 P}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{z}^2} = \phi \mu c \frac{\partial P}{\partial t}}$$

Immscible fluid flow though porous media :

عوامل و نیروهای موثر در Imm flow

① نیروی ویسکوزیته ② نیروی گرانش ③ نیروی interfacial ④ rock properties

$$\frac{-\partial f_w}{\partial x} = \frac{A \phi}{q \cdot T} \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (*)$$

$\frac{\partial S_w}{\partial t}$ ؟ S_w تابعی از مکان و زمان است پس یک مشتق جزئی است.

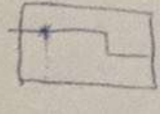
$S_w = S_w(x, t)$ ادامه در صفحه بعد

« بنام خدا »

مکانیک سیالات در محیط متخلخل

$$ds_w = \left(\frac{\partial s_w}{\partial x}\right)_t dx + \left(\frac{\partial s_w}{\partial t}\right)_x dt$$

طبق تئوری Buckley and leverett توزیع به شکل روبرو است:



یعنی در زمان و مکان مشخص یک اشباع داریم پس ds_w برابر صفر یا در زمان و مکان مشخص برابر صفر است زیرا فقط یک اشباع داریم.

در زمان و مکان مشخص: $ds_w = 0 \Longrightarrow$
$$\boxed{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{s_w} = -\frac{\left(\frac{\partial s_w}{\partial t}\right)_x}{\left(\frac{\partial s_w}{\partial x}\right)_t}}$$
→ نشان دهنده شیب هر S_w

Velocity of given saturation in porous media: $f_w = f_w(s_w) \rightarrow$ از آنجا f_w تابعی از s_w است

using chain role:
$$\left(\frac{\partial f_w}{\partial x}\right)_t = \underbrace{\left(\frac{\partial f_w}{\partial s_w}\right)_t}_{①} + \underbrace{\left(\frac{\partial s_w}{\partial x}\right)_t}_{②}$$

می‌توان به جای ① از معادله ⊛ در صفحه قبلی و به جای ② از معادله ▤ استفاده کرد.

نتیجه‌گیری
$$\Longrightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{s_w} = \frac{q_{ToT}}{\phi A}\left(\frac{\partial f_w}{\partial s_w}\right)_t \longrightarrow \text{Buckley and leverett Eq}$$

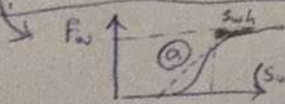
(Frontal Advanced Eq)

این معادله بیان می‌کند که سرعت هر اشباع از روی منحنی $\frac{f_w}{s_w}$ چگونه بدست می‌آید

مراحل قبلی معادله ⊛ پایین صفحه ۱۳:
$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} = A\phi \frac{\partial s_{oil}}{\partial t} \\ -\frac{\partial q_w}{\partial x} = A\phi \frac{\partial s_{water}}{\partial z} \end{cases}, \quad f_w = \frac{q_w}{\underbrace{q_o + q_w}_{q_{tot}}} \quad \begin{cases} q_w = f_w q_{tot} \\ q_o = (1-f_w) q_{tot} \end{cases} \rightarrow \boxed{f_w + f_o = 1}$$

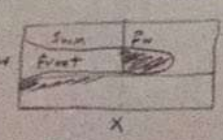
$$\longrightarrow \frac{-\partial(f_w q_t)}{\partial x} = A\phi \frac{\partial s_w}{\partial t} \longrightarrow \frac{-\partial(q_w + q_o)}{\partial x} = A\phi \frac{\partial}{\partial t}(\overset{=1}{s_o + s_w})$$

$$\frac{\partial q_{tot}}{\partial x} = 0, \quad q_{tot} = \text{Const} \longrightarrow -\frac{\partial f_w}{\partial x} = \frac{A\phi}{q_T}\frac{\partial s_w}{\partial t}$$ معادله ⊛



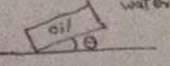
تمام saturation های پشت front در جهت front حرکت می‌کنند

ⓐ اولین مقدار شیب بدست آمده



Fractural Flow Eq.

فرض کنید media داریم که با زاویه افق θ ساخته و آب و نفت داخل آن قرار دارد (فرض: نفت با آب Display می‌کند)



با در نظر گرفتن نیروهای capillary و gravity و با توجه به قانون دارسی خواهیم داشت:

«بنام خدا»

مکانیک سیالات در محیط متخلخل

Darcy Eq.

$$\text{برای آب}: \quad q_w = -\frac{K_w A}{\mu_w}\left(\frac{\partial P_w}{\partial x} + \rho_w g \sin\theta\right) \quad (1)$$

$$\text{برای نفت}: \quad q_o = \frac{-K_o A}{\mu_o}\left(\frac{\partial P_o}{\partial x} + \rho_o g \sin\theta\right) \quad (2)$$

$$\xrightarrow[\text{Flow}]{\text{Fractral}} F_w = \frac{q_w}{q_o + q_w} = \frac{q_w}{q_{tot}} \quad (3) \quad \begin{cases} q_w = F_w \cdot q_{tot} \\ q_o = (1-F_w)\, q_{tot} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگزینی}} F_w q_T = \frac{-K_w A}{\mu_w}\left(\frac{\partial P_w}{\partial x} + \rho_w g \sin\theta\right) \quad (4)$$

$$(1-F_w)\, q_T = \frac{-K_o A}{\mu_o}\left(\frac{\partial P_o}{\partial x} + \rho_o g \sin\theta\right) \quad (5)$$

$$\xrightarrow{(4),(5)} -(1-F_w)\frac{q_T}{A}\frac{\mu_o}{K_o} + F_w \frac{q_T}{A}\frac{\mu_w}{K_w} = \frac{\partial P_o}{\partial x} - \frac{\partial P_w}{\partial x} + \rho_o g \sin\theta - \rho_w g \sin\theta$$

$$\rightarrow -\frac{q_T}{A}\frac{\mu_o}{A_o} + \frac{q_T}{A} F_w\left(\frac{\mu_o}{K_o} + \frac{\mu_w}{K_w}\right) = \frac{\partial P_c}{\partial x} + (\rho_o - \rho_w)\, g \sin\theta$$

$$F_w = \frac{\frac{\partial P_c}{\partial x} + (\rho_o - \rho_w) g \sin\theta + \frac{q_T}{A}\frac{\mu_o}{K_o}}{\frac{q_T}{A}\left(\mu_o/K_o + \mu_w/K_w\right)} = \frac{\frac{A}{q_T}\left[\frac{\partial P}{\partial x} + (\rho_o + \rho_w) g \sin\theta\right] + \frac{\mu_o}{K_o}}{\mu_o/K_o + \mu_w/K_w}$$

$$\Longrightarrow F_w = \frac{\mu_o/K_o}{\mu_o/K_o + \mu_w/K_w} + \frac{A/q_T\left[\frac{\partial P}{\partial x} + (\rho_o + \rho_w) g \sin\theta\right]}{\mu_o/K_o + \mu_w/K_w}$$

multipling numinator and denaminator by K_o/μ_o :

$$F_w = \frac{1}{1 + \left(\frac{K_o}{K_w}\right)\left(\frac{\mu_w}{\mu_o}\right)} + \frac{\frac{K_o A}{\mu_o q_T}\left[\frac{\partial P}{\partial x} + (\rho_o + \rho_w) g \sin\theta\right]}{1 + \left(\frac{K_o}{K_w}\right)\left(\frac{\mu_w}{\mu_o}\right)} \Longrightarrow \text{Fractural Flow Eq}$$

نیروی ویسکوزیتی و گرانشی

تهیه کننده

«پدرام فراهانی»

* با تشکر از جزوه کامل سرکار خانم سجادی که بدون جزوه ایشون خلاصه این درس با این تعداد صفحات ممکن نبود.