Subject: جلسه اول
Year. 92 Month. 6 Date. 24 ( )

یکشنبه ۳ آذر تا آخر فصل ۳

هر رابطه بین تابع متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به متغیر مستقل را یک معادله دیفرانسیل می نامیم.

مثال: $(y'')^3 + 3y\sin x = \cos x$ $\quad$ $e^y y'' + 2y'^2 = 1$

در یک معادله دیفرانسیل اگر تابع فقط یک متغیر مستقل داشته باشد معادله دیفرانسیل را معمولی

(O.D.E) و اگر بیش از یک متغیر داشته باشد معادله را با مشتقات جزئی می نامیم (P.D.E)

$y'' + e^x y' = \sin x$ معمولی

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sin(x+t)$ با مشتقات جزئی

مرتبه و درجه معادله دیفرانسیل بزرگترین مرتبه مشتق در معادله را مرتبه آن می نامیم و اگر یک

معادله دیفرانسیل را به توان نسبت به مشتقات موجود در معادله به صورت یک چند جمله ای نوشت

آن گاه توان بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله را درجه آن معادله می نامیم.

$e^x (y'')^2 + (y')^3 = x^2 y$ مرتبه ۲ درجه ندارد

$y''' + \sin(y') = \sin x$ مرتبه ۳ درجه ندارد

مثال:

$(y'')^3 + e^x (y')^2 + y\cos y' = 7\tan x$

مرتبه ۲ درجه ندارد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جواب معادله :

منظور از جواب معادله دیفرانسیل در فاصله I تابعی است که در فاصله I در معادله صدق می کند.

مثال :

تابع $y = \ln x$ در فاصله $(0 , +\infty)$ دارای پاسخ $y' = \frac{1}{x}$

این پاسخ در فاصله R صحیح نیست چون تابع log روی اعداد منفی تعریف نشده

جواب عمومی : Genral soution

جوابی از معادله است که شامل یک یا چند ثابت دلخواه باشد.

تابع $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

جواب عمومی $y'' + 4y = 0$

جواب خصوصی : particadar soution

اگر جواب عمومی را تحت شرایط اولیه قرار دهیم و مقادیر ثابت را تعیین کنیم جواب خصوصی معادله بدست می آید.

نکته :

اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه n باشد جواب عمومی شامل n ثابت است و آن را یک خانواده n پارامتری می نامند.

جواب منفرد (غیر عادی) : singular solution

جوابی از معادله دیفرانسیل است که تحت هیچ شرایطی از جواب عمومی بدست نمی آید به عبارت دیگر این جواب جوابی است که منحنی آن بر تمام منحنی های جواب عمومی مماس باشد

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۶ $y^2(1+y'^2)=4$ تابع $(x-c)^2+y^2=4$ جواب عمومی

معادلهٔ دیفرانسیل فوق دارای جواب عمومی است یعنی دوایری به مرکز c و صفر و شعاع ۲

لذا خطوط $y=\pm 2$ بر آنها مماس است و همچنین در معادله صدق می‌کند در اینصورت

$y=\pm 2$ جواب منفرد یا غیر عادی معادله است.

پوش منحنی : envelope

تابع $y=\varphi(x)$ را پوش خانواده تک پارامتری منحنی‌های $y=f(x,c)$

می‌گوییم هرگاه برای هر نقطه (x_0, y_0) که $y_0=\varphi(x_0)$ بر عضوی از

خانواده تک پارامتری مماس باشد.

نکته :

با توجه به تعریف پوش می‌توان نتیجه گرفت که جواب غیرعادی یک پوش برای جوابهای

عمومی معادله دیفرانسیل می‌باشد بنابراین برای بدست آوردن جواب غیرعادی

باید پوش تک دسته منحنی را محاسبه کرد.

نکته :

$y=\varphi(x)$ پوش خانواده منحنی‌های $y=f(x,c)$ است اگر و فقط اگر روابط زیر

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

برقرار باشد با حذف c پوش بدست آید.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial c}(x, c) = 0 \\ f(x, c) = y \end{cases}$$

مثال: پوش خانواده $y = 2cx - c^2$ را بیابید.

$$\begin{cases} \xleftarrow{\text{مشتق}} \frac{\partial f}{\partial c}(2cx - c^2) = 2x - 2c = 0 \\ 2cx - c^2 = y \end{cases}$$

$x = c$ از معادله اول — معادله دوم $2x^2 - x^2 = y \rightarrow y = x^2$

$\varphi(x) = x^2$ پوش خانواده منحنی

نکته:

می توان نشان داد $y = \varphi(x)$ پوش خانواده یک پارامتری منحنی های $f(x, y, c) = 0$ است اگر و تنها اگر

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial c} f(x, y, c) = 0 \\ f(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

مثال: پوش خانواده $(x-c)^2 + y^2 = 4$ را بیابید.

$$f(x, y, c) = (x-c)^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial c}(x, y, c) = 0 \longrightarrow 2(x - c) = 0$$

$x = c \xrightarrow{\text{در معادله اول}} y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$ پوش

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته ۴

یک راه بدست آوردن جواب غیرعادی $F(x, y, y') = 0$ مرتبه (۱) آن است

که فرض می کنیم $y' = C$ و C را در دستگاه زیر حذف کنیم.

چنانچه نتیجه در معادله دیفرانسیل صدق کند جواب
$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial C} = 0 \end{cases}$$

غیرعادی می باشد.

نکته:

یک معادله می تواند بدون جواب شامل تعداد متناهی جواب و یا شامل تعداد متناهی

و نامتناهی جواب عمومی و غیرعادی باشد.

مثال: وجود یا عدم وجود جواب معادلات زیر را بررسی کنید.

$(y')^2 + y^2 + 1 = 0$ $\quad \Delta < 0$ $\quad$ جواب ندارد

$(y')^2 + y^2 = 0$ $\quad$ فقط در $y = 0$ جواب دارد

$y' = 2x \quad \frac{dy}{dx} = 2x \quad \int dy = \int 2x\, dx \quad y' + 2x = 0$

$y = -x^2 + C$ $\quad$ جواب

$\sin(y') = 0 \quad y = k\pi + C \quad k \in Z$ $\quad$ شمار

مثال:

$y = (x - C)^2$

پوش خانوادهٔ منحنی های کدام است.

1) $y = 1$ $\quad$ 2) $y = x$ $\quad$ 3) $y = 0$ ✓ $\quad$ 4) $y = -x$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: تابع $y = \ln x$ روی کدامیک از فواصل زیر جواب معادله $xy'' + y' = 0$ است.

1) R 2) $[0, +\infty)$ ✓ 3) $(0, +\infty)$ 4) $[-\infty, 0)$

مثال: جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل $y^2(1+y'^2) = 4$ کدام است.

پوش معادله را بدست می‌آوریم می‌شود جواب غیرعادی $y = \pm 2$

مثال: پوش این دسته منحنی کدام است.

$(x-c)^2 + (y-c)^2 = 2c^2$

1) $x + y = 0$ 2) دایره‌ای به مرکز مبدأ

3) $(0, 0)$ ✓ 4) پوش ندارد

مثال: پوش دسته منحنی $(y-c)^2 = (x-c)^3$ کدام است.

$y = x - \frac{4}{27}$

تشکیل معادله دیفرانسیل دسیرهای متعامد:

معادله دیفرانسیل هرخانواده منحنی به صورت $g(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$

شامل n پارامتر مستقل $c_1, c_2, \dots c_n$ را می‌توان با مشتق‌گیری از y و حذف

n پارامتر بین y و مشتقات آن به صورت یک معادله مرتبه n ام

$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ٤: معادله دیفرانسیلی بیابید که $y = A\cos 2x + \sin 2x$ جواب عمومی آن باشد.

$$y' = -2A\sin 2x + 2\cos 2x$$

$$\frac{y' - 2\cos 2x}{y - \sin 2x} = \frac{-2A\sin 2x}{A\cos 2x} \Rightarrow \frac{y' - 2\cos 2x}{y - \sin 2x} = -2\tan 2x$$

$$y' - 2\cos 2x = -2\tan x\,(y - \sin 2x)$$

مسیرهای قائم یا متعامد:

دو منحنی را در نقطهٔ تقاطعشان برهم عمود می‌گوییم هرگاه خطوط مماس آنها در آن نقطه برهم عمود باشند.

هرگاه دو دسته منحنی طوری باشند که هر منحنی از یک دسته برکلیه منحنی های دستهٔ دیگر عمود باشد در اینصورت یکدسته را مسیرهای قائم دسته های دیگر می نامیم.

مانند دو دسته منحنی زیر $x^2 + y^2 = c$ $\quad y = mx$

هر منحنی از یکدسته برکلیه منحنی های دسته های دیگر عمود است.

نکته ٤:

برای بدست آوردن مسیرهای قائم یکدسته منحنی ابتدا معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را پیدا می کنیم سپس در این معادله به جای y' ، $-\frac{1}{y'}$ را قرار می دهیم تا معادله دیفرانسیل مسیر قائم بدست آید. از حل این معادله دسته منحنی مسیر قائم به دست می آید.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: مسیرهای قائم منحنی های که در آن b ثابت است را بدست آورید.

1) $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$

1) مشتق $2x + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \qquad b^2 = \frac{-yy'}{x}$

$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow b^2 = \frac{y^2}{1-x^2} \qquad \frac{y^2}{1-x^2} = \frac{-yy'}{x}$

$y' = \frac{xy}{x^2-1}$ معادله مسیر اصلی

2) $y' \rightarrow -\frac{1}{y'} \rightarrow -\frac{1}{y'} = \frac{xy}{x^2-1} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{xy}{x^2-1}$

$(x^2-1)dx = xy\,dy \rightarrow \frac{-(x^2-1)\,dx}{x} = y\,dy$

$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \ln x + \ln c$

مثال: کدام گزینه معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد $y = cx^2$ را می دهد.

$y' = \frac{-x}{2y}$

مثال: معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y = \frac{c_1}{x} + c_2$ کدام است.

$xy'' + 2y' = 0$

مثال: جواب $y = x e^y$ باشد

$y'(1-y) = e^y$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ٤ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم همه دوایری که از مبدأ می گذرند و مرکز آنها بر محور x واقع است کدام است. $(x-c)^2+y^2=c^2$

$$y' = \frac{2x}{2x^2 - y^2}$$

نکته ٤

در دستگاه مختصات قطبی برای تعیین مسیرهای قائم بعد از تعیین معادله دیفرانسیل مسیر اصلی به جای $\frac{r'}{r}$ را قرار می دهیم و معادله حاصل را حل می کنیم.

مثال ٤ معادله دسته منحنی های عمود بر دسته منحنی $r = 2c\cos\theta$ را بدست آورید.

$r = c\sin\theta$

مثال ٤ مسیرهای متعامد تابع $r = c(1+\sin\theta)$ که در آن r شعاع θ زاویه و c مقدار ثابت باشد کدام است. به جای c، k قرار داده $r = k(1-\sin\theta)$

P4PCO

Subject:
Year. ۹۲ Month. ۷ Date. ۷ ( )

شکل استاندارد معادلات به صورت زیر می باشد.

$$y' = f(x,y)$$

برای حل این معادلات از طریق جداسازی متغیرها عمل می کنیم

به عبارت دیگر $y' = f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \longrightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\, dx$$

با انتگرال گیری از رابطه بالا جواب عمومی معادله دیفرانسیل بدست می آید.

نکته مهم: dx یا dy هیچگاه در مخرج کسر قرار نمی گیرد.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$y' = e^{x-y} \qquad \frac{dy}{dx} = e^{x} \cdot e^{-y}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = e^{x} dx \xrightarrow{\int} \int e^{y} dy = \int e^{x} dx \rightarrow e^{y} = e^{x} + c$$

$$y = x + \ln C$$

نکته:

اگر معادله به صورت $A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0$ باشد یعنی کنار dx تنها تابعی از x و کنار $d(y)$ تنها تابعی از y باشد دراینصورت معادله جداشدنی است.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$y' = \frac{x+1}{y^{4}+1} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^{4}+1} \rightarrow (x+1)\,dx = (y^{4}+1)\,dy$$

PAPCO

$$\xrightarrow{\int} \frac{x^2}{2}+x=\frac{y^5}{5}+y+C \longrightarrow \frac{y^5}{5}+y-\frac{x^2}{2}+C=0$$

نکته:

معادلات به شکل $y'=f(ax+by+c)$ با تغییر متغیر $ax+by+c=t$ تبدیل

به یک معادله جدا شدنی می شوند.

(مهم) مثال: معادله زیر را حل کنید. $y'=(x+y)^2$

$$x+y=t \longrightarrow 1+y'=t' \longrightarrow y'=t'-1 \xrightarrow{y'=t^2} t'=t^2+1$$

$$\frac{dt}{dx}=t^2+1 \longrightarrow \frac{dt}{t^2+1}=dx \xrightarrow{\int} \tan^{-1} t = x+C$$

$$\tan^{-1}(x+y)=x+C$$

نکته: معادلات به شکل $\frac{y}{x}=t$ تبدیل به یک معادله جداشدنی می شود.

مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید. 1) $(x+y)\,dx-(x-y)\,dy=0$

2) $(y^2+y)\,dx-x\,dy=0$
$$\frac{1}{y^2+y}=\frac{1}{y(y+1)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y+1} \to \frac{1}{y(y+1)}=\frac{A(y+1)+B(y)}{y(y+1)} \qquad \begin{cases}A+B=0\\ A=1\end{cases} \Rightarrow B=-1$$

$$(y^2+y)\,dx=x\,dy \longrightarrow \frac{dy}{y^2+y}=\frac{dx}{x} \xrightarrow{\int} \int\frac{dy}{y^2+y}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\to \int\frac{dy}{y}-\int\frac{dy}{y+1}=\int\frac{dx}{x} \qquad \ln y-\ln(y+1)=\ln x+\ln C$$

$$\ln\frac{y}{y+1}=\ln Cx \longrightarrow \frac{y}{y+1}=Cx \longrightarrow \frac{y+1}{y}=\frac{1}{Cx} \qquad \boxed{1+\frac{1}{y}=\frac{1}{Cx}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

<u>شتق مخرج در صورت</u> $\longrightarrow \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

مثال ۶ جواب معادلهٔ زیر را با شرط اولیه $y(1)=2$ بدست آورید.

$x\,dy + 2y\,dx = 0$

$x\,dy = -2y\,dx \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} \xrightarrow{\int} \ln x + \ln c =$

$-\frac{1}{2}\ln y \longrightarrow \ln xc = \ln y^{-\frac{1}{2}} \quad xc = y^{-\frac{1}{2}}$

$\xrightarrow{y(1)=2} c = 2^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{با جایگذاری}} x^2 y = 2$

مثال ۶ اگر $y(x) = 3 + 2\int_0^x t\,y(t)\,dt$ آنگاه تابع $y(x) = ?$

۱) ✓ $3e^{x^2}$ ۲) e^{2x+1} ۳) e^{x^2} ۴) $2e^{x} - 1$

$y' = 2xy \quad \frac{dy}{dx} = 2xy \longrightarrow \frac{dy}{y} = 2x\,dx$

$\ln y = x^2 + c \longrightarrow y = ce^{x^2} \longrightarrow y(0) = 3 \longrightarrow c = 3$

$y = 3e^{x^2}$ $\quad y = e^{x^2+c} = e^{x^2}\cdot (e^c)^{c} = ce^{x^2}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(مهم) مثال ۶: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$x(\ln x)\,dy = y\,dx \qquad y(۳)=۴ \qquad \ln x = u \quad \frac{dx}{x}=du$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\underbrace{x(\ln x)}_{u}} \xrightarrow{\int} \ln y = \ln|u| + c \longrightarrow \ln(\ln x) + \ln c$

$\ln y = \ln(c\ln x) \longrightarrow y = c\ln x \xrightarrow{y(۳)=۴} ۴ = c\ln ۳$

$\longrightarrow c = \frac{۴}{\ln ۳} \longrightarrow y = \frac{۴}{\ln ۳}\ln|x|$

مثال ۶ جواب معادله $y(0)=\frac{\pi}{۴}$ و $y' = ۲x\cos^۲ y$ را وقتی $x \to \infty$

بدست آورید. ۱) $-\pi$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) ∞

$\frac{dy}{dx} = ۲x\cos^۲ y \longrightarrow \frac{dy}{\cos^۲ y} = ۲x\,dx \longrightarrow (1+\tan^۲ y)\,dy = ۲x\,dx$

$\xrightarrow{\int} \tan y = ۲\left(\frac{x^۲}{۲}\right) + c \longrightarrow \tan y = x^۲ + c \xrightarrow{y(0)=\pi/۴} c=1$

$\begin{cases} \tan y = x^۲ + 1 \\ x \to \infty \end{cases} \longrightarrow y = \frac{\pi}{۲}$

(مهم) مثال ۶

$y' - \frac{y}{x} + \csc\frac{y}{x} = 0$

$\frac{y}{x} = v \longrightarrow y = xv \longrightarrow y' = v + xv' \qquad v + xv' - v + \csc v = 0$

$\longrightarrow xv' = -\csc v \longrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-1}{\sin v} \longrightarrow x\sin v\,dv = -dx$

$-\sin v\,dv = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\int} \ln x - \cos v = c \longrightarrow \ln x - \cos\frac{y}{x} = c$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادلات مرتبه اول همگن :

تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n گوئیم هرگاه $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

مثال :

هر یک از توابع زیر همگن از درجه چند هستند؟

$1)\ f(x,y) = x^4 - x^3 y \qquad f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^4 - (\lambda x)^3 \cdot \lambda y$

$= \lambda^4 x^4 - \lambda^4 x^3 y = \lambda^4 \underbrace{(x^4 - x^3 y)}_{f(x,y)} = \lambda^4 f(x,y)$ همگن از مرتبه 4

$2)\ f(x,y) = e^{y/x} + \tan \frac{y}{x}$

$f(\lambda x, \lambda y) = (e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} + \tan \frac{\lambda y}{\lambda x}) = \lambda^0 (\underbrace{e^{y/x} + \tan \frac{y}{x}}_{f(x,y)})$

همگن از مرتبه صفر

نکته : شکل دیگر معادلات مرتبه اول را می‌توان به صورت زیر نوشت .

$y' = f(x,y) \quad , \quad \begin{cases} y' = \frac{dy}{dx} \\ f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \rightarrow M(x,y)\,dx = -N(x,y)\,dy$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ درحالت کلی صورتهای معادلهٔ مرتبهٔ اول عبارتند از

$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ F(x,y,y') = 0 \\ M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \end{cases}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ را همگن می نامیم هرگاه M, N همگن از درجه یکسان باشند.
برای حل این معادلات از تغییر متغیر استفاده می کنیم
به یک معادله جدا شدنی برحسب v می رسیم

مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید:
$$(x^2+y^2)\,dx - 3xy^2\,dy = 0$$
$$y = vx \longrightarrow dy = v\,dx + x\,dv$$
پس از جایگذاری و ساده کردن معادله

$$\frac{dx}{x} = \frac{3v^2\,dv}{1-2v^3} \xrightarrow{\int} \ln x = \frac{1}{2}\ln(1-2v^3) + \ln c \longrightarrow$$

$$\ln x = \ln(1-2v^3)^{1/2} + \ln c \longrightarrow x = c(1-2v^3)^{1/2} \xrightarrow{v = y/x}$$

$$x = c\left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^3\right)^{1/2}$$

نکته:
اگر معادلهٔ مرتبهٔ اول $y' = f(x,y)$ همگن باشد دراینصورت برای حل آن از روابط
$y = vx$ استفاده می کنیم.
$$y' = v + xv'$$

تمرین ٤: معادلهٔ $y' = \frac{2y^4 + x^4}{2xy^3}$ را حل کنید.
$$x = c(v^4+1)^{1/4}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته : معادلات به صورت $y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right)$ همگن هستند و با استفاده از روش گفته شده حل می شوند.

نکته : معادلات $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ همگن می باشند ولی با توجه به چارچوب زیر قابل حل هستند.

۱) اگر $a_1b_2 - b_2a_1 = 0$ باشد معادله با تغییر متغیر $u = a_1x + b_1y$ به یک معادله جدا شدنی تبدیل می شود.

۲) اگر $a_1b_2 - b_2a_1 \neq 0$ باشد آن گاه با درنظر گرفتن شرایط معادله قابل حل است.

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases}$$

که h و k ریشه های دستگاه زیر می باشند.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = h \\ y = k \end{cases}$$

تمرین : معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x-y-4}$$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته: بعضی از معادله دیفرانسیل را می توان با تغییر متغیر $y=t^n$ ، $dy=nt^{n-1}\,dt$

به یک معادله همگن تبدیل کرد.

تمرین: با کدام تغییر متغیر معادله دیفرانسیل زیر را می توان به یک معادله همگن تبدیل کرد.

$$4xy^2dx+(3x^2y-1)\,dy=0 \qquad \boxed{y=-t^{-2}}$$

معادلات مرتبه اول کامل:

معادله دیفرانسیل مرتبه اول $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$

را کامل گوئیم هرگاه تابعی مانند $u(x,y)$ موجود باشد به طوری که

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$$

نکته:

فرض کنید عبارات M ، N و $\frac{\partial M}{\partial y}$ و $\frac{\partial N}{\partial x}$ در ناحیه ای مانند R پیوسته باشند شرط

لازم و کافی برای آنکه معادله دیفرانسیل $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$

کامل باشد آن است که

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

مثال: نشان دهید معادله زیر کامل است. $(x^2-y)\,dx+(y^2-x)\,dy=0$

شرط $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$ برقرار است پس معادله کامل است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته ۶ روش حل معادله دیفرانسیل کامل :

برای حل معادله دیفرانسیل کامل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ به صورت زیر

عمل می‌کنیم فرض می‌کنیم $u(x,y) = c$ جواب معادله باشند به طوری که در روابط

زیر صدق می‌کند. $1- \frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$ $2- \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$

از رابطه (۱) نسبت به x انتگرال می‌گیریم ثابت انتگرال‌گیری را $f(y)$

$$u = \int M(x,y)\,dx + f(y)$$

با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به y و شرط (۲) خواهیم داشت.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

نهایتاً $f'(y)$ از روی آن $f(y)$ در نتیجه

پاسخ معادله دیفرانسیل کامل به دست می‌آید $u(x,y) = c$

تمرین : معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را حل کنید.

$$(2x^2+3y)\,dx + (3x+y-1)\,dy = 0$$

$$\frac{x^3}{2} + 3xy + \frac{y^2}{2} - y = c$$

PAPCO

تمرین ۲ ـ معادله دیفرانسیل کامل زیر را حل کنید.

$$(3x^2y^2+x+e^y)dx+(2x^3y+y+xe^y)dy=0$$

تمرین ۳ ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$(x+y)\frac{dy}{dx}+y=x$$

$$\overbrace{(x-y)}^{M}dx-\overbrace{(x+y)}^{N}dy=0$$

$$\boxed{u(x,y)=c} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)\longrightarrow u=\int(x-y)dx+f(y)$$

$$=\frac{x^2}{2}-xy+f(y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-x+f'(y)=-y-x$$

$$\longrightarrow f'(y)=-y \qquad f(y)=\frac{-y^2}{2}$$

مثال ۴ a چقدر باشد تا معادله دیفرانسیل کامل باشد.

$$(x^{-1}+y^{-1})dx+axy^{-2}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad -\frac{1}{y^2}=+\frac{a}{y^2}\longrightarrow a=-1$$

مثال ۵ برای کدام مقدار a و b معادله دیفرانسیل زیر کامل است.

$$(x+by)dx+(y+2ax)dy=0$$

هر مقدار a و b

هیچ مقدار b و $a=1$

✓ $b=2a$

$b=a$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جواب کلی معادله دیفرانسیل $y'(y^2-x)=y$ را بدست آورید.

$$\frac{y^3}{3}-xy=c$$

* فاکتورهای انتگرال (عامل انتگرال ساز)

اگر معادله $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ کامل نباشد در اینصورت می توان تابع مناسبی مانند $f(x,y)\neq 0$ پیدا کرد که با ضرب آن در معادله بالا به توان معادله را حل کرد به این عامل فاکتور انتگرال (عامل انتگرال ساز) می گوئیم.

نکته:

۱- یک معادله دیفرانسیل ممکن است بیش از یک عامل انتگرال ساز داشته باشد.

۲- در حالت کلی محاسبه عامل انتگرال ساز به راحتی امکان پذیر نیست ولی در حالت های خاص می توان این عامل را محاسبه کرد.

۱- اگر $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=f(x)$ تنها تابعی از x باشد در اینصورت عامل انتگرال ساز $I=f(x)=e^{\int f(x)\,dx}$ خواهد بود.

۲- اگر $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=g(y)$ تنها تابعی از y باشد در اینصورت عامل انتگرال ساز $I=f(y)=e^{\int g(y)\,dy}$ خواهد بود.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۱: معادله $(x^2+y^2+x)dx+xy\,dy=0$ را حل کنید.

با نکته ۱

$$\frac{x^4}{4}+\frac{y^4}{4}+\frac{1}{2}x^2y^2=c$$

مثال ۲: معادله $(x^2y^4e^y-x^2y^3-3x)dy+(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx=0$

را حل کنید.

با نکته ۲

نکته: اگر معادله (۱) همگن باشد دارای فاکتور انتگرال $F(x,y)=\dfrac{1}{xM+yN}$

خواهد بود.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. $(x^4+y^4)dx-xy^3dy=0$

$$y^4=4x^4\ln x+cx^4$$

نکته: گاهی اوقات عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل (۱) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

به صورت $F(x,y)=x^a\cdot y^b$ است که با ضرب طرفین معادله در F و بررسی شرط

کامل بودن a و b را بدست می‌آوریم.

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۶ معادله $(2x^2y+y^4)dx-(2x^3-xy^3)dy=0$ را حل کنید.

$f(x,y)=x^a \cdot b^y$ فاکتور انتگرال

جواب : $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{7}{2}$

نکته ۶

یکی از روش های حل معادلات دیفرانسیل روش دسته بندی است.

بدین صورت که با استفاده از روابط زیر معادله دیفرانسیل را به صورت دیفرانسیل توابعی که برای ما مشخص هستند می نویسیم با انتگرال گیری از آن جواب عمومی معادله مربوطه به دست می آید.

تعدادی از دیفرانسیل های متداول :

۱) $d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$

۲) $d(xy)=y\,dx+x\,dy$

۳) $d(x^2+y^2)=2(x\,dx+y\,dy)$

۴) $d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

۵) $d\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$

۶) $d\left(\ln\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{xy}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۱: معادله دیفرانسیل $(xy^2 - y)dx - xdy = 0$ را حل کنید.

$$-\frac{x}{y} + x = C$$

مثال ۲: معادله دیفرانسیل $xdx - (y\sqrt{x^2+y^2})dy = 0$ را حل کنید.

$$\sqrt{x^2+y^2} - y = C$$

معادلات خطی مرتبه اول:

هر معادله دیفرانسیل به شکل $y' + P(x)y = q(x)$ را یک معادله دیفرانسیل خطی می‌گوئیم که اگر در آن $q(x) = 0$ معادله خطی همگن و در غیر اینصورت ناهمگن است.

نکته:

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول دارای عامل انتگرال ساز $f(x) = e^{\int P(x)dx}$ است و جواب معادله از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$y = \frac{1}{f(x)}\left[\int q(x) f(x) dx + C\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy' - y = x^2\cos x$ را بدست آورید.

$$\underbrace{y'\left(-\frac{1}{x}\right)}_{p(x)} y = \underbrace{x\cos x}_{q(x)} \qquad f(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{f(x)}\left[\int q(x)\, f(x)\, dx + C\right]$$

$$y = x\int \cancel{x}\cos x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}dx + C = x(\sin x + C)$$

نکته : معادله دیفرانسیل مرتبه اول می تواند نسبت به x بعنوان تابعی از y خطی باشد

یعنی $\underbrace{x'}_{\frac{dx}{dy}} + p(y)\,x = q(y)$ دراینصورت برای حل آن داریم.

$$f(x) = e^{\int p(y)dy} \quad , \quad y = \frac{1}{f(y)}\left[\int q(y)\, f(y)\, dy + C\right]$$

مثال : معادله $y^2\frac{dx}{dy} + 2x = 5y$ را حل کنید.

تمرین :

۱ـ یک عامل انتگرال ساز معادله $y' - 2xy = x$ کدام است.

e^{x^2} e^{2x} e^{-2x} e^{-x^2} ✓

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲- معادله $dx + 2xy' dy = y e^{-y^2} dy$ مفروض است یک فاکتور انتگرال معادله کدام است.

e^{-y^2} $\quad$ e^{-x^2} $\quad$ e^{x^2} $\quad$ e^{y^2} ✓

۳- جواب مساله $y(1) = 2$ و $x^2 y' + xy = 1$ در $x = e$ کدام است.

۲ $\quad$ $2/e$ $\quad$ ۳ $\quad$ $3/e$ ✓

۴- در معادله $y\frac{dx}{dy} + 2x = 5y^2$ با شرط $x(1) = 0$ مقدار x در $y = 2$ کدام است.

$37/2$ $\quad$ $31/4$ ✓ $\quad$ $25/3$ $\quad$ $29/2$

۵- جواب عمومی معادله $\frac{dx}{dy} + 2yx = 4x$ وقتی $\infty \to x$ به کدامیک از اعداد زیر میل می‌کند.

۲ ✓ $\quad$ ۳- $\quad$ ∞ $\quad$ ۰

۶- کدامیک از معادلات زیر خطی مرتبه اول است.

$(x^2+1)y' + y = x$ $\quad$ $y'' = x$

$(y')^2 + y = x$ $\quad$ $y' + xy^2 = 1$

Subject: جلسه چهارم
Year. Month. ۷ Date. ۲۱

معادله برنولی :

صورت کلی این معادله به صورت $\frac{dy}{dx} + y\,f(x) = y^n g(x)$ و $n \in R - \{0, 1\}$

برای حل این معادله طرفین را بر y^n تقسیم کرده و تغییر متغیر $u = y^{1-n}$

را انجام می دهیم تا معادله تبدیل به معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول شود .

مثال ۲: کدامیک از تبدیلات زیر معادله $y' + p(x)y = Q(x)\,y^4$ تبدیل به یک

معادلهٔ خطی خواهد کرد . ۱) $z = y^3$ ۲) $z = y^2$ ۳) $z = y^{-3}$ ۴) معادله خطی نمی شود

$$z = y^{1-n} = y^{1-4} = y^{-3}$$

مثال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} + xy = x\,y^{-3}$ را بدست آورید .

$$z = y^{1+3} = y^4 \rightarrow \frac{dz}{dx} = 4y^3\frac{dy}{dx} \quad \xrightarrow{\text{طرفین را در } 4y^3 \text{ ضرب}}$$

مرتبهٔ اول خطی
$$4y^3\frac{dy}{dx} + 4xy^4 = 4x \rightarrow \frac{dz}{dx} + 4xz = 4x$$

$$\boxed{y = 1 + Ce^{-2x^2}}$$

مثال ۴: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + y = \frac{x}{y}$ را بدست آورید .

$$yy' + y^2 = x \rightarrow u = y^2 \rightarrow u' = 2yy' \rightarrow 2yy' + 2y^2 = 2x$$

$$u' + 2u = 2x \qquad u = e^{-\int 2dx}\left[\int 2x\,e^{\int 2dx}dx + C\right]$$

PAPCO

$$u = e^{-2x}\left[\int 2x\left(e^{2x}\right)dx + C\right] \underset{\text{انتگرال جزء به جزء}}{\longrightarrow} u = e^{-2x}\left[x e^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} + C\right]$$

$$u = x - \frac{1}{2} + C e^{-2x} \longrightarrow \boxed{y^2 = x - \frac{1}{2} + C e^{-2x}}$$

مثال ۴: جواب معادله $x\,dy - y\,dx = xy^2\,dx$ را بدست آورید.

$$x\,dy = (xy^2 + y)\,dx \longrightarrow x\frac{dy}{dx} = xy^2 + y$$

$$x\frac{dy}{dx} - y = xy^2 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } x} \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = y^2$$ برنولی

$$y' - \frac{1}{x}y = y^2 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } y^2} y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = 1$$

$$u = y^{-1} \longrightarrow \frac{du}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{x} \longrightarrow u' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)}u = \underbrace{-1}_{g(x)}$$ خطی مرتبه اول

$$u = e^{-\int f(x)dx}\left[\int g(x)\cdot e^{\int f(x)dx}\,dx + C\right]$$

$$u = e^{-\int 1/x\,dx}\left[(-1)\cdot e^{\int 1/x\,dx}\,dx + C\right]$$

$$u = \cancel{e^{-\ln x}}_{1/x}\left[-\int e^{\ln x}\,dx + C\right] \Rightarrow u = \frac{1}{x}\left[-\frac{x^2}{2} + C\right] \rightarrow$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x}\left[-\frac{x^2}{2} + C\right] \longrightarrow \frac{1}{y} = \frac{-x}{2} + \frac{C}{x} \rightarrow \boxed{C = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y}}$$

تمرین: پاسخ معادله دیفرانسیل $x\frac{dy}{dx} + y = xy^3$ را با کدام رابطه زیر می‌توان نشان داد.

$$y^2 = \frac{1}{x + Cx^2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۶: با کدام تغییر متغیر معادله $y' - y(y^5 \sin x + \cot x) = 0$ به یک معادله خطی تبدیل می شود.

۱) $z = y^{-3}$ ۳) $z = y^{-4}$ ۲) $z = y^{-5}$ ✓ ۴) $z = y^{-2}$

$$y' - y^6 \sin x + y \cot x = 0 \qquad y' - y\cot x = y^6 \sin x$$

$$z = y^{1-n} = y^{1-6} = y^{-5}$$

نکته ۶

گاهی یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول می تواند نسبت به x و به عنوان تابعی از y به صورت معادله برنولی درآید که در این حالت به صورت $\frac{dx}{dy} + x f(y) = x^n g(y)$ است. در این صورت طرفین معادله را بر x^n تقسیم کرده و با اعمال تغییر متغیر $u = x^{1-n}$ به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول تبدیل می شود.

مثال ۷: جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$ را بدست آورید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{x^3+y+1} \to \frac{dx}{dy} = \frac{x^3+y+1}{3x^2} \to \frac{dx}{dy} = \frac{x}{3} + \frac{y+1}{3x^2}$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{3} = \frac{y+1}{3x^2} \xrightarrow{\text{طرفین در } x^2 \text{ ضرب}} \frac{dx}{dy} - \frac{x^3}{3} = \frac{y+1}{3}$$

$$u = x^3 \to u' = 3x^2 \to 3x^2 \frac{dx}{d} - x^3 = y + 1$$

$$u' - u = y + 1 \to u = e^{\int dy} + \left[\int (y+1) e^{-\int dy} dy + c\right]$$

$$u = e^{y}\left[\underbrace{-y e^{-y} - 2e^{-y}}_{\text{جزء به جزء}} + c\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$u = -y + ce^{y} - 2 \longrightarrow \boxed{x^3 = -y + ce^{y} - 2}$$

نکته : هر معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت کلی $f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)P(x) = q(x)$

با تغییر متغیر $u = f(y)$ به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول تبدیل می شود.

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'\cos y + \sin y = x+1$ را بدست آورید.

$$u = \sin y \quad f'(y) = \cos y \longrightarrow u' = y'\cos y \longrightarrow u' + u = x+1$$

$$u = e^{-\int dx}\left[\int (x+1)e^{\int dx}\,dx + c\right]$$

$$u = e^{-x}\left[\int (x+1)e^{x}\,dx + c\right] \longrightarrow u = e^{-x}\left[xe^{x} + c\right]$$

$$u = x + ce^{-x} \xrightarrow{u=\sin y} \boxed{\sin y = x + ce^{-x}}$$

معادله ریکاتی : Riccati's Equation

هر معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $y^2 + y'P_1(x) + yP_2(x) + P_3(x) = 0$ (1)

و $P_1(x) \neq 0$ را معادله ریکاتی می نامند برای حل این معادله باید یک جواب خصوصی

این معادله را داشته باشیم در اینصورت جواب عمومی آن برابر $y = y_1 + \frac{1}{z}$ (2)

که y_1 جواب خصوصی معادله است با جایگذاری رابطه (2) در (1) معادله تبدیل به یک

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول به صورت زیر می‌شود . $z' - z(2y_1 P_1(x) + P_2(x)) = P_1(x)$

تمرین : جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$ در صورتی

که بدانیم $y_1(x) = x$ یک جواب خصوصی آن است کدام است .

1) $y = x + \frac{2x}{2cx^2 - 1}$

معادلهٔ کلرو : شکل معادله را حفظ باشیم

هر معادله دیفرانسیل به صورت $y = xy' + f(y')$ معادله کلرو نامیده می‌شود جواب

عمومی معادلهٔ کلرو به صورت زیر است . $y' = c \rightarrow y = cx + f(c)$

مثال : جواب غیرعادی معادله $y = xy' + \frac{1}{y'}$ را بدست آورید .

1) $y = 4x$ 2) $y = 4x^2$ ✓3) $y^2 = 4x$ 4) $y^2 = 4x^2$

حل پوش

$$y = cx + \frac{1}{c} \quad \text{حذف} \begin{cases} y = cx + \frac{1}{c} \\ 0 = x - \frac{1}{c^2} \end{cases} \Rightarrow y^2 = 4x$$

مثال : جواب غیرعادی یا ویژه $y = xy' - \frac{y'^2}{4}$ را بدست آورید .

$$y = cx - \frac{c^2}{4} \quad \begin{cases} y = cx - \frac{c^2}{4} \\ 0 = x - \frac{c}{2} \rightarrow c = 2x \end{cases} \rightarrow y = 2x^2 - \frac{4x^2}{4}$$

$$y = x^2$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادلهٔ لاگرانژ :

هر معادلهٔ دیفرانسیل به صورت کلی $y = xf(y') + g(y')$ را معادلهٔ لاگرانژ گوئیم و برای

حل آن فرض می کنیم $y' = p \leftarrow y = xf(p) + g(p)$ سپس از طرفین

این رابطه نسبت به x مشتق می گیریم پس از ساده کردن به یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی

مرتبهٔ اول به صورت $\frac{dx}{dp} - x\frac{f'(p)}{p-f(p)} = \frac{g'(p)}{p-f(p)}$ می رسیم از حل این معادله به

$x = \varphi(p)$ می رسیم با حذف p در دستگاه زیر جواب عمومی بدست می آید

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = xf(p) + g(p) \end{cases}$$

نکته :

ریشه های معادلهٔ $p - f(p) = 0$ جوابهای غیرعادی معادلهٔ لاگرانژ می باشد .

مثال : جواب غیرعادی معادلهٔ دیفرانسیل $y = xy'^2 + y'^3$ کدام است .

۱) خط $y = 0$ ۲) $y = x+1$ ✓۳) $y = x+1 , y = 0$ ۴) جواب غیرعادی ندارد

$y' = p \longrightarrow y = xp^2 + p^3 \qquad f(p) = p^2$

$p - f(p) = p - p^2 = 0 \qquad p(p-1) = 0 \begin{cases} p = 0 \\ p = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{در معادله}} \begin{cases} y = 0 \\ y = x+1 \end{cases}$

هر دو در معادله اصلی صدق می کنند .

P4PCO

Subject: جلسه پنجم
Year. Month. Date. ( )

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر:

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ n ام $f(x, y, y', y'', \dots, y^{n})$

معادلات خطی مرتبه دوم:

یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را خطی گوئیم هرگاه به صورت $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

اگر در رابطه فوق $r(x) = 0$ معادله را همگن و در غیر اینصورت معادله را غیر همگن نامیم.

مثال: در مورد معادله دیفرانسیل زیر کدام گزینه صحیح است.

$$2y''' + 4y' - 8y = \underbrace{x^3 + \cos x}_{\text{عامل ناهمگن}}$$

مرتبه

مرتبه ۲ و درجه ۱ خطی ناهمگن

مثال: برای اینکه معادله دیفرانسیل $x^n \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + f(x)\, y^m = 0$
خطی باشد باید:

الف) $m = 1$ ✓ ب) $n = 0 \;,\; m = 1$

ج) $f(x) = c + e$ د) $n = m = 0$

نکته: اگر توابع $r(x)$ و $q(x)$ و $p(x)$ روی فاصلهٔ باز $a_1 < x < a_2$

پیوسته باشند آنگاه فقط و فقط یک تابع مانند $y = G(x)$ وجود دارند بطوریکه در معادلهٔ

$y'' + p(x)y' + q(x) = r(x)$ و $y(x_0), y'(x_0) = y_0$ در یک نقطهٔ خاص مانند x_0 در این

فاصله صدق می‌کند.

مثال: اگر تابع y جوابی از معادله دیفرانسیل $y'' + yy' - x^3 = 0$ با شرایط اولیه

$y'(-1) = 2$ و $y(-1) = 1$ در یک نقطه خاص مانند x_0 در این فاصله صدق می‌کند

۱) -4 ۲) -2 ۳) 3 ۴) 2 ✓

گام اول: $y'' + yy' - x^3 = 0 \longrightarrow y'' = x^3 - yy'$

دوم: $y''' = 3x^2 - y'^2 - yy''$

سوم: $y''(-1) = (-1)^3 - (1)(2) = -1 - 2 = -3$

$y'''(-1) = 3(-1)^2 - (2)^2 - (1)(-3) = 3 - 4 + 3 = 2$

نکته: اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن $y'' + p(x)y' - q(x)y = r(x)$

آنگاه ترکیب خطی آن نیز یعنی $(c_1y_1 + c_2y_2)$ یک جواب معادله خواهد بود.

مثال: اگر $y(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل $e^{x}y'' + y'' + xy' + y = 2$ با شرایط اولیه

$y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ باشد آنگاه $y''(0) = ?$

۱) 1 ✓ ۲) 2 ۳) 5 ۴) اطلاعات ناکافی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادلات خطی مرتبه ۲ همگن با ضرایب ثابت:

هر معادله دیفرانسیل به صورت $y'' + ay' + by = 0$ را یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت می‌نامند. که $(a,b \in R)$

روش حل: برای حل این معادله ابتدا معادله مشخصه یا مفسر آن را تشکیل داده و ریشه‌های آن را بدست می‌آوریم. چون معادله مشخصه از درجه دوم است بنابراین ریشه‌های آن می‌توانند در سه حالت زیر قرار بگیرند. که معادله مشخصه $t^2+at+b=0$ است.

حالت اول:

اگر معادله مفسر دارای دو ریشه حقیقی و متمایز t_1 و t_2 باشند در این صورت جواب عمومی آن به صورت $y=c_1e^{t_1x}+c_2e^{t_2x}$ می‌باشد. چون مرتبه (۲) است.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-2y'-3y=0$ را بدست آورید.

$$t^2-2t-3 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-\frac{c}{a}=3 \end{cases}$$

$y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$ → جواب عمومی

در معادله درجه دوم

ax^2+bx+c

۱- مجموع ضرایب صفر: $x_1=1 \quad x_2=\frac{c}{a}$

۲- $a+c=b$: $x_1=-1 \quad x_2=-\frac{c}{a}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: به ازای چه مقدار α جواب مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 2y = 0 \\ y(0) = \alpha \ , \ y'(0) = 2 \end{cases}$$

وقتی $\infty \to t$ برابر صفر می‌شود.

۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 1

$$t^2 - t - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = -\frac{c}{a} = 2 \end{cases}$$

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

$$y(0) = \alpha \longrightarrow c_1 + c_2 = \alpha$$

$$y' = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} \longrightarrow y'(0) = 2 \longrightarrow 2c_1 - c_2 = 2$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \alpha \\ 2c_1 - c_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{\alpha+2}{3} \\ c_2 = \dfrac{2\alpha-2}{3} \end{cases}$$

$$y = \left(\frac{\alpha+2}{3}\right) e^{2t} + \left(\frac{2\alpha-2}{3}\right) e^{-t}$$

$$\lim_{t\to\infty} y = 0 \longrightarrow \frac{\alpha+2}{3} = 0 \Longrightarrow \alpha = -2$$

مثال ٤: مسئله با مقدار اولیه زیر را درنظر می‌گیریم به ازای چه مقدار β وقتی $t \to +\infty$ جواب مسئله به سمت صفر میل می‌کند.

$$\begin{cases} \dfrac{4\,d^2y}{dt^2} - y = 0 \\ y(0) = 2 \ , \ y'(0) = \beta \end{cases}$$

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$

۳) 0 ۴) 1

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ٤ ضریب y' و y در معادله دیفرانسیل مرتبه دومی که دو جواب خصوصی آن

e^{2x} و e^{-x} باشد به ترتیب کدام است.

۱) ۲- و ۱-   ۲) ۲ و ۱   ۳) ۱ و ۲-   ۴) ۱- و ۲-

مثال ٤ جواب مسئله $y''-2y'-15y=0$ با شرایط $y(0)=0$ و $y'(0)=-1$

وقتی که $x\to\infty$ برابر است با :

۱) ∞ ۲) ۰   ۳) $-\infty$ ۴) ۲

حالت دوم ٤

اگر معادله مفسر دارای ریشه مضاعف $t_1=t_2=t$ باشد جواب عمومی معادله

به صورت زیر خواهد بود

$$y=(c_1+c_2x)e^{tx}$$

یا $$y=c_1e^{tx}+c_2xe^{tx}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ؛ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' + y = 0$ را بدست آورید.

$t^2 - 2t + 1 = 0 \rightarrow t_1 = t_2 = t = 1$

$y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}$

مثال ؛ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 8y' + 16y = 0$ را بدست آورید.

$t^2 - 8t + 16 = 0 \qquad t_1 = t_2 = t = 4$

$y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$

* مثال ؛ به ازای کدام مقادیر ثابت a و b معادله دیفرانسیل $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$

دارای دو جواب خصوصی $y = e^{-3x}$ و $y = x e^{-3x}$ می باشد.

۱) $a = -6 \quad b = 9$ ۳) $a = 0 \quad b = -9$

۲) $a = 3 \quad b = 0$ ۴) $a = 6 \quad b = 9$

$(t+3)^2 = 0 \longrightarrow t^2 + 6t + 9 = 0 \qquad \begin{cases} a = 6 \\ b = 9 \end{cases}$

مثال ؛ جواب معادله دیفرانسیل همگن $f''(t) + 8f'(t) + 16f(t) = 0$

با شرایط اولیه $f(0) = 2$ $f'(0) = 1$ کدام است.

$t^2 + 8t + 16 = 0 \qquad \Delta = 0$

$t_2 = t_1 = t = 4$

$f(t) = (2 + 9t)e^{-4t}$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حالت سوم : اگر معادلهٔ مشخصه دارای دو ریشه متمایز $p + iq$ باشد جواب عمومی آن به صورت زیر می باشد.

$$y = e^{px} . (c_1 \sin qx + c_2 \sin qx)$$

مثال : جواب معادله دیفرانسیل $y'' - 10y' + (25 + \pi^2)y = 0$ با شرایط اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = \pi e$ کدام است.

$$t^2 - 10t + 25 + \pi^2 = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac \Rightarrow 25 - 25 - \pi^2 = -\pi^2 \Rightarrow t_1, t_2 = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{-\pi^2}}{1} \qquad t_1, t_2 = \frac{5 \pm \sqrt{\pi^2}, \sqrt{-1}}{1} \Rightarrow t_{1,2} = 5 \pm \pi i$$

$$y = e^{5x}(c_1 \cos \pi x + c_2 \sin \pi x)$$

$$y(0) = 0 \longrightarrow c_1 = 0$$

$$y = e^{5x}(c_2 \sin \pi x)$$

$$y'(0) = \pi e \longrightarrow c_2 = e \qquad y = e^{5x+1} \sin \pi x$$

مثال : کدامیک از توابع زیر در معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' + 5y = 0$ صدق می کند.

$$t^2 + 2t + 5 = 0 \longrightarrow \begin{cases} t_1 = -1 + 2i \\ t_2 = -1 - 2i \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = e^{-t} \cos 2t \\ y_2 = e^{-t} \sin 2t \end{cases} \qquad y = e^{-t}(\cos 2t + t \sin 2t)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۴ جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 4y = 0$ با شرایط اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ کدام است.

جواب : $y = \frac{1}{2}\sin 2x$

مثال ۴ جواب کلی معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 5y = 0$ را بدست آورید.

$t^2 - 4t + 5 = 0 \qquad t_{1,2} = 2 \pm i$

$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

$$\begin{cases} c_1 = A\sin\alpha \\ c_2 = A\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow y = e^{2x}(A\sin\alpha\cos x + A\cos\alpha\sin x)$$

$\Rightarrow y = A e^{2x}\sin(x+\alpha)$

مثال ۴ معادله دسته منحنی های گذرنده از مبدا مختصات با معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 5y = 0$ کدام است.

$y = e^{2x}(B\cos x + A\sin x) \qquad (x,y) = (0,0) \Rightarrow B = 0$

$y = Ae^{2x}\sin x$

مثال ۴ معادله $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ دارای جواب

۱) $y = e^{ix}$ ۲) $y = c\cos x$ ۳) $y = c\sin x$ ۴) گزینه ۲و۳

$t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = \pm i$

$y = c_1\cos x + c_2\sin x \qquad \begin{cases} c_1 = 0 & y = c\sin x \\ c_2 = 0 & y = c\cos x \end{cases}$

P4PCO