دکتر نادر اصفهانی

«مخابرات دیجیتال»

منبع:

مرجع 1) K.S. Shanmugam "Digital and Analog Communication systems" wiley 1979

2) A.B. Carlson "Communication Systems" Mc Graw Hill 1975

محتوی درس:

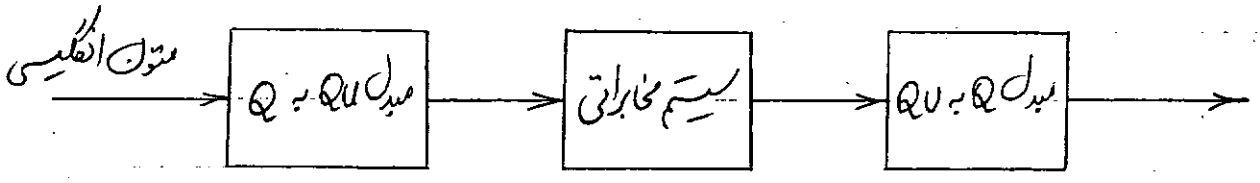
		صفحه
مبحث اوّل: مقدمه ای بر معرفی مخابرات دیجیتال	(فصل اوّل مرجع)	(1-6)
مبحث دوم: تئوری اطلاعات	(فصل چهارم مرجع)	(7-26)
مبحث سوم: انتقال دیجیتال در باند پایه	(فصل پنجم مرجع)	(27-53)
مبحث چهارم: مدولاسیون های دیجیتال	(فصل هشتم مرجع)	(54-85)
مبحث پنجم: انتقال دیجیتال سیگنالهای آنالوگ	(فصل دهم مرجع)	(86-116)

مبحث اوّل: مقدمه ای بر معرفی مخابرات دیجیتال

هدف سیستم مخابراتی:

هدف تولید کپیه قابل قبولی از پیغامی که در یک نقطه (مبدأ) قرار دارد در نقطه ای دیگر (مقصد) دراین کار معمولاً با تبدیل پیغام به یک سیگنال الکتریکی (ولتاژ یا جریان تابع زمان) وانتقال آن بوسیله سیم یا کابل کواکس یا موج رادیویی و ... می باشد. انتقال پیغام بهمان صورت اصلی لازم نیست بلکه اطلاعات موجود در پیغام می بایستی منتقل شود.

مثال: برای ارسال متون انگلیسی می‌توان بجای QU فقط Q را منتقل نمود و در گیرنده بعد از Q حرف U را اضافه نمود چون بعد از Q در زبان انگلیسی همیشه U می‌آید.



انواع پیغام:

۱- پیغام آنالوگ: پیغامی است که تغییرات آن بصورت پیوسته (continious) صورت میگیرد مثل فشار آکوستیکی و غیره

۲- پیغام دیجیتال: پیغامی است که تغییرات آن بصورت گسسته صورت میگیرد مثل خروجی کامپیوتر که یا صفر است و یا یک (باینری) و یا خروجی تله تایپ که یکی از علائم، حروف یا اعداد است.

روش‌های مخابره پیغام آنالوگ:

۱- تبدیل پیغام آنالوگ به سیگنال آنالوگ و مخابره در کانال آنالوگ (مخابرات I)

۲- تبدیل پیغام آنالوگ به سیگنال دیجیتال و مخابره آن در کانال دیجیتال (مبحث پنجم)

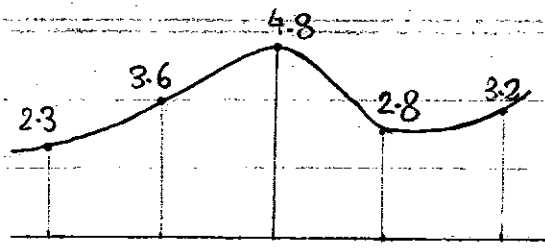
تبدیل پیغام آنالوگ به دیجیتال ۱) نمونه برداری ۲) کوانتیزه کردن ۳) کدبندی

۱) برای نمونه برداری تعداد $2W$ نمونه در ثانیه برای مشخص کردن دقیق سیگنالی که عرض باندش W است کافی است همانطوریکه $N+1$ نقطه از منحنی درجهٔ Nام منحنی را کاملاً مشخص می‌کنند

۲) کوانتیزه کردن (روندکردن مقدار نمونه‌ها) نظیر روندکردن در محاسبات عددی است.

۳) کدبندی: تبدیل نمونه‌های روندشده به ارقام باینری (معمولاً)

مثال:



۱) نمونه‌ها	2.3	3.6	4.8	2.8	3.2
۲) رندکردن	2	4	5	3	3
۳) کدبندی	010	100	101	011	011

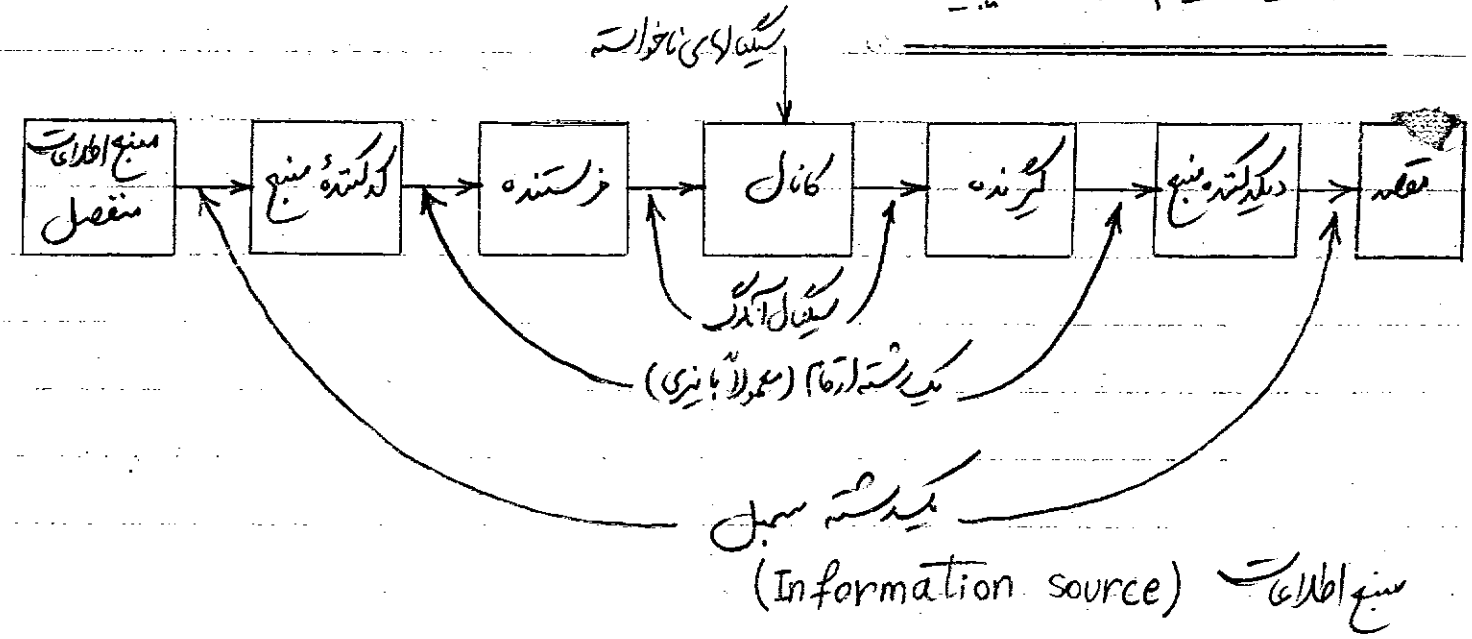
سیگنالهای دیجیتال در مقابل نویز مقاوم هستند

مهمترین مزیت ارسال دیجیتال سیگنالهای آنالوگ امکان حذف نویز می‌باشد.

کاربردهای مخابرات دیجیتال:

- قدیمی‌ترین کاربرد آن در مورس و تلگراف و تلکس است
- مخابرات کامپیوتری (مخابره کامپیوتر با کامپیوتر یا با انسان)
- مخابره دیجیتال سیگنالهای آنالوگ (بخصوص PCM)

اجزاء یک سیستم مخابرات دیجیتال



منبع اطلاعات (Information source)

خروجی منبع اطلاعات منفصل یک رشته سمبل است (حروف، اعداد، علائم و غیره)

پارامترهای مشخص کننده منبع :

1) الفبای منبع یا زبان منبع ≡ مجموعه‌ای که سمبلهای صادره از بین آن انتخاب میگردد

مثلاً
- 0 و 1 در مخابرات کامپیوتری
- خط و نقطه در مخابرات مورس
- حروف، ارقام و علائم در مخابرات تلگراف و تلکس

2) سرعت منبع ≡ تعداد سمبلی که در واحد زمان منبع صادر می‌کند .

3) مشخصات آماری منبع ≡
- احتمال صدور هر سمبل
- وابستگی صدور هر سمبل به سمبلهای قبلی

کدکننده و دیکد کننده منبع (Source Encoder And Decoder)

وظیفه این بلوک تبدیل سمبلهای متنوع منبع به ارقام معمولاً باینری است .

کدبندی
- کدبندی با طول ثابت ≡ تعداد ارقام اختصاص یافته به هر سمبل ساده است (ساده‌ترین و متداولترین روش)
- کدبندی با طول متغیر ≡ تعداد ارقام اختصاص یافته با فراوانی سمبل مربوطه نسبت عکس دارد
  از نقطه نظری اطلاعات این روش بازدهی بهتری دارد

مثال 1) کدبین المللی تلگراف و تلکس

سمبل		کد
A	≡	11000
⋮		
E	≡	10000
⋮		
Z	≡	10001

مثال ۲) کد مورس

A	≡	·—	(10) احتمال متوسط
⋮			
E	≡	·	(1) بیشترین احتمال
⋮			
Z	≡	——··	(0011) کمترین احتمال

کانال (Channel)

کانال : مسیر محدوده ای که ارتباط الکتریکی بین مبدأ و مقصد را فراهم می کند

مثال (- زوج سیم - کابل کواکسیال - موج بر - فیبر نوری - امواج رادیویی)

اثرات نامطلوب و محدودیتهای کانال :

1) تضعیف سیگنال ⟵ قابل جبران بوسیله تقویت کننده

2) اعوجاج
- غیرخطی ⟵ قابل اجتناب با روش Companding
- خطی ⟵ قابل جبران با مدارهای ترمیم کننده
  - اعوجاج دامنه
  - اعوجاج فاز

۳) تداخل : بدلیل مجاورت فیزیکی و یا مجاورت باند فرکانسی با کانالهای دیگر رخ میدهد و با زیاد کردن فاصله فیزیکی و الکتریکی قابل اجتناب است.

۴) نویز : از منابع طبیعی ناشی میشود و مهمترین آن نویز حرارتی است. این اثر غیر قابل اجتناب است ولی تقابله با آن با مدولاسیونهای مناسب و زیاد کردن قدرت فرستنده (S/N بیشتر) و با محدودی فیلتر کردن انجام می گیرد

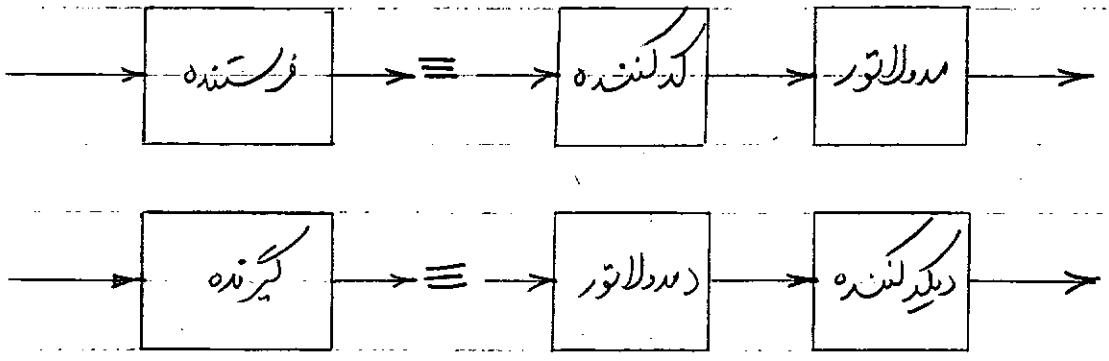
۵) عرض باند : هر کانال واقعی دارای باند فرکانسی مناسبی برای مخابره است ولذا طیف سیگنال باید در باند فوق قرار داده شود (مدولاسیون) وضمناً بدلیل استفاده مشترک از یک کانال برای چند سیگنال F.D.M. محدودیت عرض باند وجود دارد

فرستنده و گیرنده (Transmitter And Recievер)

با توجه به اثرات و محدودیتهای کانال فرستنده و گیرنده دارای اجزائی از قبیل تقویت کننده - ترمیم کننده - فیلتر - کدکننده و دیکدکننده کانال - مدولاتور و دمدولاتور (برای تنظیم طیف سیگنال در باند مناسب کانال) می باشد

برای مقابله با نویز

دو عمل اصلی فرستنده و گیرنده ← کدبندی و مدولاسیون است



کدکننده و دیکدکننده کانال:

کدبندی در سیستم مخابرات دیجیتال روش دیگری برای مقابله با نویز است (نویز ایجاد خطا می‌کند $0\to1$ $1\to0$)
با کدبندی مناسب میتوان خطا را قابل تشخیص و یا قابل تصحیح نمود.

کدبندی کانال { ۱- با تشخیص خطا
۲- با تصحیح خطا

مثال ۱) بازدوج کردن تعداد ارقام یک در کلمه و تشخیص خطا با شمردن تعداد یک‌ها

مثال ۲) تکرار هر رقم تعداد ۳ بار و تصحیح خطا با توجه به اکثریت

$A\equiv 11000 \Rightarrow 11000\ 0$

$E\equiv 10000 \Rightarrow 10000\ 1$

$Z\equiv 10001 \Rightarrow 10001\ 0$

$A\equiv 11000 \Rightarrow 111\ 111\ 000\ 000\ 000$

$E\equiv 10000 \Rightarrow 111\ 000\ 〃\ 〃\ 〃$

$Z\equiv 10001 \Rightarrow 111\ 〃\ 〃\ 〃\ 111$

مدولاتور و دمدولاتور: (Mod. And Dem.)

بدو منظور صورت میگیرد { ۱- جادادن سیگنال در باند مناسب کانال
۲- مقاوم‌تر کردن سیگنال در مقابل نویز (در ازاء عرض باند بیشتر)

مبحث دوم: تئوری اطلاعات «Information Theory»

عناوین:

1) اطلاعات یک پیغام (7-9)
2) آنتروپی و سرعت اطلاعات منبع (9-13)
3) کدبندی منبع (13-17)
4) ظرفیت کانال گسسته (17-22)
5) ظرفیت کانال پیوسته (22-27)

این مبحث شاخه ریاضی اصول مخابرات است که در آن سه سؤال اساسی زیر مطرح میشود.

(الف) اطلاعات یک پیغام چیست و چگونه محاسبه میشود؟

(ب) ظرفیت انتقال اطلاعات کانال چیست؟

(ج) سیستم مخابرات ایده آل دارای چه مشخصاتی است؟ (بدون در نظر گرفتن محدودیتهای تکنولوژیک و فقط محدودیتهای تئوریک و اصولی مثل عرض باند و سیگنال به نویز)

1) اطلاعات یک پیغام

تعریف اطلاعات:

- هوای قطب شمال امروز سرد بود. (تقریباً اطلاعاتی در بر ندارد چون خیلی محتمل است)
- هفته آینده هوای تهران ۲۰° گرم میشود. (نسبتاً اطلاعات زیادی دارد چون چندان محتمل نیست)
- تا دو هفته دیگر زمین به پایان میرسد. (اطلاعات خیلی زیادی دارد چون اصلاً انتظارش را نداریم و خیلی نامحتمل است)

هرچه احتمال وقوع پیغام کمتر باشد چون برای ما غیرقابل پیش بینی تر است اطلاعات بیشتری در بر دارد.

پس اطلاعات یک پیغام تابعی از احتمال وقوع آن است $I(A) = f(P_A)$ اطلاعات پیغام A

با چهار شرط منطقی و ملموس زیر میتوان تابعی برای اطلاعات پیغام تعریف کرد

۱) پیغام محتمل در بر ندارد $\Rightarrow f(1) = 0$

۲) با توجه به شهودی ذکر شده تابع نزولی است $P_A < P_B \Rightarrow f(P_A) > f(P_B)$

۳) هر پیغامی دارای اطلاعاتی است و لذا تابع همواره مثبت است $0 \leq P_A \leq 1 \Rightarrow f(P_A) \geq 0$

۴) هرگاه پیغامی شامل دو پیغام مستقل از هم باشد احتمال رخ دادن پیغام برابر حاصلضرب احتمال رخ دادنهای دو زیر پیغام است در صورتیکه اطلاعات مربوط به این پیغام برابر مجموع اطلاعات دو زیر پیغام است.

$$A, B \text{ مستقل} \quad \left.\begin{array}{l} P_{AB} = P_A \cdot P_B \\ I(AB) = I(A) + I(B) \end{array}\right\} \Rightarrow f(P_A P_B) = f(P_A) + f(P_B)$$

تنها تابع لگاریتمی است که میتواند هر سه شرط فوق را اقناع کند

$$\boxed{I(A) = -\log_{\alpha} P_A}$$

مبنای α اختیاری است و با توجه به رابطه تغییر مبنا انتخاب مبناء معادل انتخاب واحد است

$$\log_{\alpha}^{X} = \log_{\alpha}^{\beta} \log_{\beta}^{X}$$
ضریب

متداولترین مبنا 2 است و در این صورت واحد اطلاعات bit (binary Unit) است

تبصره: اگر احتمال اشتباه رقم باینری (binary digit) باشد واحد اطلاعات بود آنرا با binit نشان میدهیم

وقتی مشتق گیری و غیره مطرح باشد از مبنای طبیعی نپر استفاده می کنیم

$$I(A) = -\ln P_A$$

که در اینصورت واحد اطلاعات nat (natural unit) خواهد بود

$$I(A) = -\log_{10} P_A$$

اگر مبنای لگاریتم ۱۰ باشد واحد اطلاعات dit یا decit (decimal unit) خواهد بود

مثال 1) نوزادی بدنیا آمده و پیغام پسر بودن نوزاد است $P(\text{Boy}) = P(\text{Girl}) = \frac{1}{2}$

$$I(\text{Boy}) = -\log_2^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{bit}$$

بطور کلی یک بیت اطلاعات پیغامی است که احتمال وقوع و عدم وقوع مساوی دارد

مثال 2) اطلاعات موجود در یک کلمه.

فرض اول: کلمه از یک فرهنگ لغت صد هزار واژه ای انتخاب میگردد و احتمال انتخاب کلمات مختلف مساوی است

$$P(word) = 10^{-5} \Rightarrow I(word) = -\log_2 10^{-5} = 16.61 \quad bit/word$$

فرض دوم: یک کلمه متوسط ۵ حرف دارد و حروف کلمه از الفبای ۳۲ حرفی و با احتمالات مساوی و مستقل از هم انتخاب شده است.

$$\left.\begin{aligned} I(word) &= 5\, I(letter) \\ P(letter) &= \frac{1}{32} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I(word) = -5\log_2 \frac{1}{32} = 25 \quad bit/word$$

فرض دوم خیلی از واقعیت بدور است زیرا اولاً حروف در کلمات مساوی الاحتمال نیستند و ثانیاً حروف یک کلمه شدیداً بهم بستگی دارند (بسیاری از ترکیبات آنها بی معنی است)

مثال ۳) اطلاعات موجود در یک تصویر:

فرض می کنیم تصویر از 600×600 عنصر تشکیل شده باشد و هر عنصر از لحاظ میزان روشنایی به هشت تراز مختلف تقسیم شده باشد

ترازهای روشنایی هم احتمال هستند و روشنایی عناصر مختلف تصویر مستقل از هم است

$$\left.\begin{aligned} I(Picture) &= (600 \times 600)\, I(Element) \\ P(Element) &= \frac{1}{8} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I(Picture) = 3.6 \times 10^5 \log_2 8 = 1.08 \quad \frac{Mbit}{Pictur}$$

آنتروپی و سرعت اطلاعات منبع

منبع پیغامهای مختلفی تولید می کند و هر پیغام از اجزایی (حروف، ارقام و بطور کلی سمبل) تشکیل میگردد

فرض می کنیم الفبای منبع S_1 و S_2 و ... و S_n باشند (سمبل خروجی منبع در هر لحظه یکی از حروف فوق با احتمالی می باشد) و ضمناً منبع در هر ثانیه بطور متوسط r_s سمبل صادر کند

آنتروپی منبع: تعداد متوسط اطلاعاتی است که منبع به ازاء هر سمبل به خارج صادر می کند

$$H = \lim_{N \to \infty} \frac{I_{total}}{N}$$

(I_{total}: اطلاعات کل، N: تعداد سمبل)

سرعت اطلاعات : مقدار متوسط اطلاعاتی است که منبع در هر ثانیه به خارج صادر می کند

$$R\left[\frac{bit}{Sec}\right] = r_s\left[\frac{Symbol}{Sec}\right] \times H\left[\frac{bit}{Symbol}\right]$$

منابع از لحاظ آماری به دو دسته حافظه و بدون حافظه تقسیم می‌شوند .

آنتروپی منبع بدون حافظه

منبع بدون حافظه : سمبل‌ها مستقل از یکدیگر صادر می‌شوند و صدور هر سمبل جدید به سمبل‌های صادره قبلی بستگی ندارد

فرض کنیم منبع سمبل‌های $(S_1, S_2, \dots, S_\mu)$ را با احتمالات $(p_1, p_2, \dots, p_\mu)$ صادر می‌کند.
اگر پیام دارای $N \to \infty$ سمبل باشد تعداد Np_1 سمبل S_1 و تعداد Np_2 سمبل S_2 و ... خواهد داشت

$$I_{total} = Np_1 \log_2 \frac{1}{p_1} + Np_2 \log_2 \frac{1}{p_2} + \dots + Np_\mu \log_2 \frac{1}{p_\mu}$$

$$I_{total} = N \sum_{i=1}^{\mu} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$$

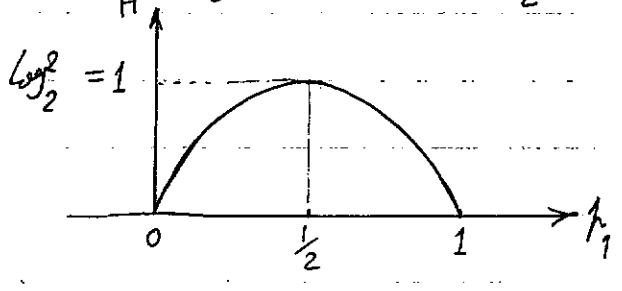
$$\boxed{H = \frac{I_{total}}{N} = \sum_{i=1}^{\mu} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} \quad \left[bit/Symbol\right]}$$

ماکزیمم اطلاعات وقتی حاصل می‌شود که احتمال صدور سمبل‌های مختلف مساوی باشد
دلیل حسی: در اینصورت خروجی منبع کاملاً غیرقابل پیش بینی می‌گردد
دلیل ریاضی : در ضمن تمرینات اثبات می‌شود

$$p_1 = p_2 = \dots = p_\mu = \frac{1}{\mu} \qquad \boxed{H_{max} = \log_2 \mu}$$

مثال باینری: $(\mu = 2)$

$$H = p_1 \log_2 \frac{1}{p_1} + (1-p_1) \log_2 \frac{1}{1-p_1} \quad \left[\frac{bit}{Symbol} \equiv \frac{bit}{binit}\right]$$



بعنوان مثال در سیستم بیت رسانی ماکزیمم اطلاعات وقتی حاصل می‌شود که سؤالات طوری تنظیم شوند که احتمال پاسخ آری یا خیر مساوی باشد در اینصورت بازاء هر سؤال یک بیت اطلاعات حاصل خواهد شد.

مثلاً کلمهٔ انتخابی از فرهنگ 10^5 کلمه‌ای را میتوان با $\frac{\log_2 10^5}{1\,bit} = 16.61 \approx 17$ سؤال پیدا کرد.

آنتروپی منبع با حافظه

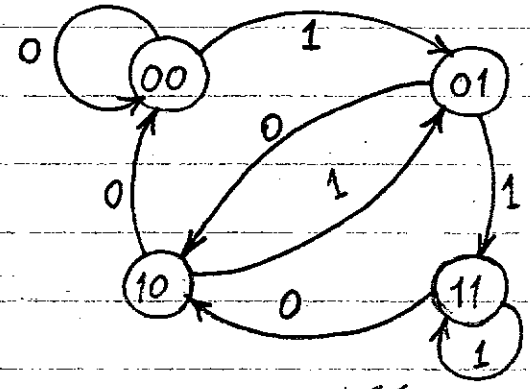
تعریف: اگر احتمال صدور هر سمبل جدید منبعی به m سمبل صادر شده قبلی آن بستگی داشته باشد منبع را با حافظهٔ m سمبل گویند (منبع مارکوف مرتبهٔ m ام)

توصیف آماری چنین منبعی بکمک دیاگرامی بنام دیاگرام حالت (براز معینی) ممکن می‌گردد

مدل آماری منبع مارکوف (دیاگرام حالت)

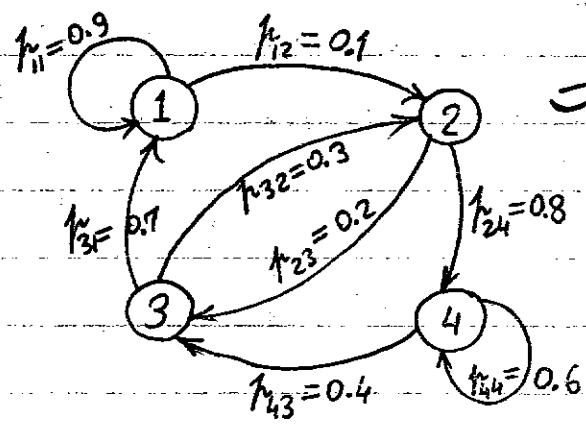
فرض می‌کنیم منبع مرتبهٔ m ام با تعداد M عدد الفبا داشته باشیم. چون صدور هر سمبل به m سمبل قبلی وابسته است منبع در یکی از $n=M^m$ حالت ممکن قرار دارد

مثلاً منبع باینری ($M=2$) مرتبهٔ دوم ($m=2$) در هر لحظه $n=2^2=4$ حالت مختلف میتواند داشته باشد



«دیاگرام حالت»

با صدور هر سمبل جدید منبع از یک حالت به یک حالت دیگر میرود و P_{ij} یعنی احتمال تغییر حالت از حالت i به j میرود. منبعی که P_{ij} آن روی دیاگرام حالت مشخص شده باشد از لحاظ آماری کاملاً توصیف شده است معمولاً حالات n گانه را با اعداد 1 تا n نشان میدهند



مثال: دیاگرام حالت یک منبع باینری مرتبهٔ دوم داده شده است

احتمال اینکه منبع در یکی از حالات چهارگانه باشد را حساب کنید. (P_i: احتمال اینکه منبع در حالت i باشد)

$$P_1=0.9P_1+0.7P_3 \Longrightarrow P_1=7P_3$$
$$P_2=0.1P_1+0.3P_3 \Longrightarrow P_2=P_3$$
$$P_3=0.2P_2+0.4P_4 \Longrightarrow P_4=2P_3$$
$$P_4=0.8P_2+0.6P_4 \Longrightarrow P_4=2P_2$$
$$P_1+P_2+P_3+P_4=1$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_1=\frac{7}{11}\ ,\ P_2=P_3=\frac{1}{11}\ ,\ P_4=\frac{2}{11}}$$

محاسبهٔ آنتروپی: اطلاعات هر سمبل جدید بستگی به سابقهٔ منبع (یعنی حالت منبع) دارد.

$$H_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \log \frac{1}{P_{ij}}$$

آنتروپی حالت i = اطلاعات متوسط سمبل که در حالت i صادر می‌شود

اگر $N \to \infty$ سمبل داشته باشیم NP_1 سمبل در حالت 1 صادر می‌شود و مجموعاً NP_1H_1 اطلاعات دارند

" " NP_2H_2 " " " 2 " " NP_2

$$H = \frac{I_{total}}{N} = \frac{NP_1H_1 + NP_2H_2 + \cdots}{N} \Longrightarrow \boxed{H = \sum_{i=1}^{n} P_i H_i}$$

آنتروپی منبع = مقدار متوسط آنتروپی حالات مختلف

$N \to \infty$

در مورد مثال فوق

$$H_1 = 0.1 \log 10 + 0.9 \log \frac{10}{9} = 0.0425$$

$$H_2 = 0.8 \log \frac{10}{8} + 0.2 \log 5 = 0.0654$$

$$H_3 = 0.3 \log \frac{10}{3} + 0.7 \log \frac{10}{7} = 0.0799$$

$$H_4 = 0.4 \log 2.5 + 0.6 \log \frac{10}{6} = 0.0880$$

$$H = H_1P_1 + H_2P_2 + H_3P_3 + H_4P_4 = 0.0425 \times \frac{7}{11} + 0.0654 \times \frac{1}{11} + 0.0799 \times \frac{1}{11} + 0.0880 \times \frac{2}{11} = 0.056$$

تبصره: وابستگی سمبل‌ها باعث تقلیل آنتروپی منبع می‌گردد زیرا سمبل‌های صادر شدهٔ قبلی اطلاعاتی در مورد سمبل بعدی به ما می‌دهند که آنرا قابل پیش بینی‌تر می‌کنند یعنی اطلاعات سمبل بعدی کمتر خواهد بود.

بازدهی منبع و اضافات منبع

"Source Efficiency & Source Redundancy"

تعریف بازدهی منبع: نسبت سمبل‌های لازم به سمبل‌های صادره $(e \leq 1)$

" اضافات منبع: نسبت سمبل‌های زائد به سمبل‌های صادره $(\rho < 1)$

$$e = \frac{\frac{I_{total}}{\log_2^{\mu}}}{\frac{I_{total}}{H}} = \frac{H}{\log_2^{\mu}} \leq 1 \qquad \rho = \frac{\frac{I_{total}}{H} - \frac{I_{total}}{\log_2^{\mu}}}{\frac{I_{total}}{H}} = 1 - e \leq 1$$

مثلاً زبان انگلیسی بازدهی بسیار کمی دارد زیرا اولاً: حروف با فراوانی نامساوی رخ می‌دهند.

ثانیاً: حروف وابستگی شدیدی نسبت به یکدیگر دارند.

وابستگی حروف به یکدیگر در این موارد نمود پیدا می کند:

- تمام ترکیبات حروف کلمهٔ معنی دار نمی سازند. اگر بعد از حرف q حرف دیگری بغیر از u نیاید بی معنی است
- تمام ترکیبات کلمات جملات با معنی نمی سازند (گرامر)
- تمام جملات نیز با معنی نیست (چون ممکن است نامفهوم باشد)

برآورد آنتروپی زبان انگلیسی

۱) فرض متساوی الاحتمال و مستقل بودن حروف ($M = 26 + 1$ تعداد حروف)

$$H = \log_2^{27} = 4.75 \quad bit/letter$$

۲) با در نظر گرفتن فراوانی و صرف نظر از وابستگی بین حروف (منبع بدون حافظه)

$$H = \sum_{i=1}^{27} P_i \log_2 \frac{1}{P_i} = 4.1 \quad bit/letter$$

۳) با فرض منبع مارکوف مرتبهٔ اول (27 حالت)

$$H = 3.3 \quad bit/letter$$

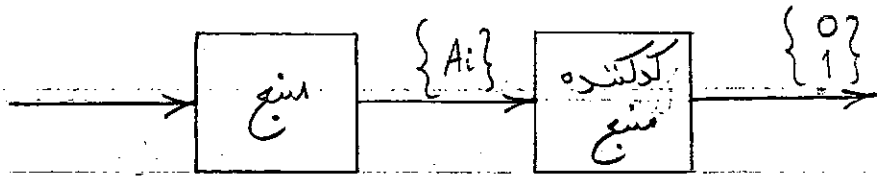
وابستگی بین حروف تا صد حرف ادامه دارد که استفاده از مدل مارکوف را غیر عملی می سازد.
راه حل دوم جالب است که محدود صد حرف متوالی از متون مختلف را به افراد مختلف نشان داده و از آنها پیش بینی حروف بعدی را بخواهیم. در مورد زبان انگلیسی حدود 50% افراد درست پیش بینی می کنند یعنی اطلاعات هر حرف با توجه به سابقهٔ متن فقط یک بیت است

$$H \approx 1 \quad bit/letter \qquad e = \frac{H}{H_{max}} = \frac{1}{4.75} = 0.21 \qquad \rho = 1 - e = 0.79$$

۳- کدبندی منبع

بدلایل روبرو خروجی منابع بصورت باینری کدبندی میشود

- تعداد سمبلهای یک منبع میتواند خیلی زیاد باشد (مثلاً ۱۰۰۰ تا)
- نوع و تعداد سمبلهای منابع مختلف متفاوت است
- مخابرهٔ دیجیتال بصورت باینری ساده تر و متداول تر است



پارامترهای منبع کدشده:
- الفبا: 0 و 1
- آنتروپی: $H'\left[\frac{bit}{binit}\right]$
- بازدهی و افزونگی: ρ' و e'

پارامترهای منبع:
- الفبا: s_1 و s_2 و ... و s_μ
- آنتروپی: $H\left[\frac{bit}{symbol}\right]$
- بازدهی و افزونگی: ρ و e

نحوهٔ کدبندی: هر سمبل s_i کدی بطول n_i یعنی بصورت ترکیبی از n_i رقم باینری اختصاص داده میشود. چون معمولاً سمبلها پشت سرهم و بدون فاصله صادر میشوند برای جلوگیری از تداخل کدها باید هیچ کدی پیشوند کد دیگر نباشد.

کدبندی با طول ثابت

$(n_1 = n_2 = \dots = n_\mu = n)$

برای اینکه به هر سمبل یک کد برسد باید $2^n \geq \mu$ باشد

$$H\left[\frac{bit}{symbol}\right] = n\left[\frac{binit}{symbol}\right] \times H'\left[\frac{bit}{binit}\right]$$

$H\left[\frac{bit}{symbol}\right]$: اطلاعات هر سمبل
$n\left[\frac{binit}{symbol}\right]$: تعداد ارقام باینری برای هر سمبل
$H'\left[\frac{bit}{binit}\right]$: اطلاعات هر رقم باینری

$$e' = \frac{H'}{H'_{max}} = H' = \frac{H}{n} \qquad \frac{e'}{e} = \frac{H/n}{H/\log_2^\mu} = \frac{\log_2^\mu}{n} < 1 \Rightarrow \rho' > \rho$$

اطلاعات منبع کدشده کمتر است زیرا علت آن عدم استفاده از تمام ترکیبات ممکن n رقم باینری است.

مثال

سمبل	s_1	s_2	s_3
کد	00	01	10

$\mu = 3 \Rightarrow n \geq \log_2^\mu \qquad n = 2$

چون در این مثال از ترکیب 11 استفاده نشده است صفر بعد از یک در 10 اضافی بوده لذا $\rho < \rho'$ میشود با این وجود کدبندی با طول ثابت بدلیل سادگی متداولترین نوع کدبندی است

کدبندی با طول متغیر

هدف از این نوع کدبندی تقلیل افزونگی منبع است

بطور تئوری اگر پیغامی دارای n بیت اطلاعات باشد چون هر رقم باینری میتواند دارای 1 bit اطلاعات باشد لذا برای پیغام فوق n بیت کافی است.

مثلاً برای زبان انگلیسی با اطلاعات متوسط یک بیت در هر حرف بطور متوسط می‌توان بطور متوسط برای هر حرف یک رقم باینری اختصاص داد (بجای مثلاً ۵ رقم در کد با طول ۵ بیت) و در نتیجه بازدهی را زیاد کرد.

فرض می‌کنیم که پیغام از سمبل‌های مستقل از هم λ_1 و λ_2 و ... تشکیل شده باشد و هر سمبل را با طولی مساوی مقدار اطلاعات آن کدبندی کنیم

$$H = \sum_{i=1}^{\mu} p_i \log \frac{1}{p_i}$$ آنتروپی منبع کدشده بفرض استقلال سمبل‌ها

$I_{\lambda_i} = \log \frac{1}{p_i} = n_i$: اطلاعات سمبل λ_i — طول کد سمبل λ_i

$H = \bar{n} \times H'$: اطلاعات متوسط هر رقم باینری — تعداد متوسط ارقام باینری برای هر سمبل

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{\mu} p_i n_i = \sum_{i=1}^{\mu} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = H \Longrightarrow H' = \frac{H}{\bar{n}} = 1 \left[\frac{bit}{binit}\right] \rightarrow \begin{cases} e' = 1 \\ \rho' = 0 \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که با این نوع کدبندی می‌توان اضافات منبع کدشده را به صفر تقلیل داد.

سمبل	p_i	$I_i = n_i$	کد
λ_1	$\frac{1}{2}$	1	0
λ_2	$\frac{1}{4}$	2	10
λ_3	$\frac{1}{8}$	3	110
λ_4	$\frac{1}{8}$	3	111

مثال

$$H = \sum_{i=1}^{4} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3 + \frac{1}{8}\times 3$$

$$H = 1.75 \left[\frac{bit}{Symbol}\right] \qquad e = \frac{H}{\log_2^{\mu}} = \frac{1.75}{\log_2^4} = 0.875$$

$$\rho = 1 - e = 0.125$$

پارامترهای منبع بعد از کدشدن

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{\mu} p_i n_i = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 1.75 \qquad H = \bar{n} H' \Longrightarrow H' = \frac{H}{\bar{n}} = \frac{1.75}{1.75} = 1 \left[\frac{bit}{binit}\right]$$

در این حالت اضافات منبع کاملاً حذف شده است $\qquad e' = H' = 1 \qquad \rho' = 1 - e' = 0$

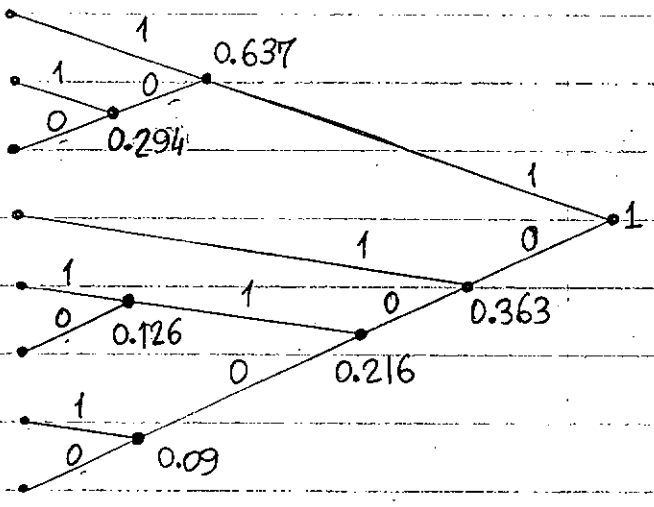
اگر از کدبندی با طول ثابت استفاده می‌کردیم چون از تمام ترکیبات دو رقم استفاده می‌کنیم $\qquad e' = e = 0.875$

مثال فوق مثال بسیار خاصی بود که در آن I_i ها عدد صحیح می‌شوند ولی در حالت کلی نیز بهتر است که طول کد محدود و مساوی اطلاعات آن باشد

سه روش معروف برای کدبندی:
- روش Shanon که در صنعت مرجع آورده است
- روش Shanon-Fano که در تمرینات آورده است (بهتر از روش Shanon)
- روش Hoffman (فرم اُپتیمم با اضافات مینیمم است)

روش هوفمن ضمن مثال

کد	λ_i (p_i)
11	λ_1 (0.343)
101	λ_2 (0.147)
100	λ_3 (0.147)
01	λ_4 (0.147)
0011	λ_5 (0.063)
0010	λ_6 (0.063)
0001	λ_7 (0.063)
0000	λ_8 (0.027)



مراحل عمل

1) مرتب کردن سمبل‌ها برحسب p_i (صعودی یا نزولی)

2) تشکیل دیاگرام درخت: ترکیب دو سمبل با کمترین احتمال و جانشین کردن آنها با سمبلی با احتمال مجموع آنها و همکار الی آخر

3) تخصیص 0 و 1 به دو شاخهٔ هر انشعاب و قرائت آدرس هر سمبل

آنتروپی منبع کدشده $H = \sum_{i=1}^{\mu} p_i \log \frac{1}{p_i} = 2.64 \ \left[\frac{bit}{symbol}\right]$

$$\begin{cases} e = \frac{H}{\log_2^{\mu}} = \frac{2.64}{\log_2^{8}} = 0.8813 \\ \rho = 1 - e \simeq 0.12 \equiv 12\% \end{cases}$$

طول متوسط کد $\bar{n} = \sum_{i=1}^{\mu} n_i p_i = 2.726 \ \left[\frac{binit}{symbol}\right]$

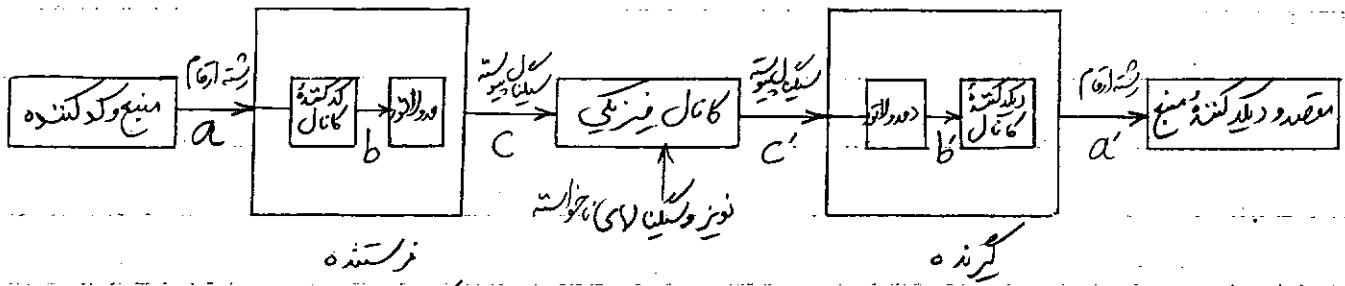
$$\Rightarrow \begin{cases} H' = e' = \frac{H}{\bar{n}} = 0.968 \\ \rho' = 1 - e' \simeq 0.03 \equiv 3\% \end{cases}$$

با این کدبندی اضافات منبع از 12% به 3% کاهش پیدا می‌کند

۴ـ ظرفیت کانال گسسته (Discrete)

تعریف:

ظرفیت کانال ماکزیمم اطلاعاتی است که بطور متوسط در هر ثانیه کانال می‌تواند منتقل نماید.



انواع کانال:

۱ـ کانال پیوسته: که وظیفهٔ آن انتقال یک سیگنال پیوسته است مثل کانال فیزیکی cc'.

۲ـ کانال گسسته: که وظیفهٔ آن انتقال یک رشته ارقام (سمبل) است. مانند:

aa' ≡ کانال متشکل از فرستنده ـ کانال فیزیکی و گیرنده

bb' ≡ کانال متشکل از مدولاتور ـ کانال فیزیکی و دمدولاتور

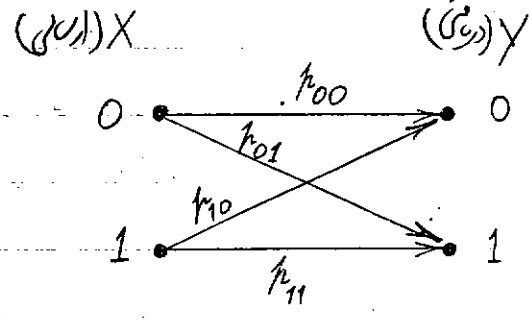
مدل آماری و پارامترهای کانال

۱ـ سرعت ارقام: تعداد ارقامی که کانال در واحد زمان منتقل می‌کند (r)

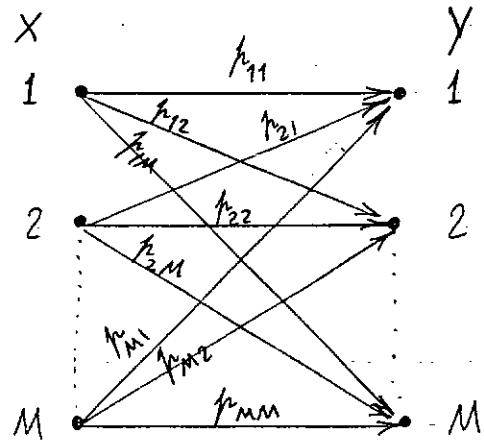
۲ـ انواع ارقام: که با مبنای اعداد انتقالی تعریف می‌شود

- $M=2$ کانال باینری
- $M=3$ کانال ترناری یا کانال سه‌تایی
- $M=4$ کانال کوارترناری یا چهارتایی
- $M=M$ کانال M'ary یا کانال M تایی

۳ـ احتمال خطا در انتقال ارقام (p_{ij} : احتمال انتقال i بصورت j)



«مدل آماری کانال باینری»



«مدل آماری کانال M تایی»

فرض: $P(x=i) = p_i^t$ ⟷ ورودی M تایی و مستقل از هم با احتمالات

$P(y=j \mid x=i) = p_{ij}$ ⟷ کانال M تایی و با احتمال خطای

$$P(y=j) = \sum_{i=1}^{M} p_{ij}\, p_i^t = p_j^r$$ احتمال غیر شرطی دریافت j

$$P(x=i, y=j) = P(x=i)\, P(y=j \mid x=i) = p_i^t\, p_{ij}$$

$$P(x=i \mid y=j) = \frac{P(x=i, y=j)}{P(y=j)} = \frac{p_i^t\, p_{ij}}{\sum_{i=1}^{M} p_{ij}\, p_i^t} = \frac{p_i^t\, p_{ij}}{p_j^r}$$ (احتمال شرطی ارسال i)

به کمک احتمالات فوق میتوان یک سری آنتروپی تعریف کرد.

1) آنتروپی ارسالی $H(x)$ یعنی اطلاعات متوسط ارسالی

$$H(x) = \sum_{i=1}^{M} p_i^t \log_2 \frac{1}{p_i^t}$$

2) آنتروپی دریافتی $H(y)$ یعنی اطلاعات متوسط دریافتی

$$H(y) = \sum_{j=1}^{M} p_j^r \log \frac{1}{p_j^r}$$

در حالت کانال بدون خطا داریم $p_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ ولذا $p_i^t = p_i^r \Rightarrow H(x) = H(y)$

3) آنتروپی توام ارسالی و دریافتی $H(x,y)$ یعنی اطلاعاتی که با دانستن ارسالی و دریافتی بطور متوسط خواهیم داشت

$$H(x,y) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} P(x=i, y=j) \log_2 \frac{1}{P(x=i, y=j)}$$

در حالت بدون خطا داریم $H(x) = H(y) = H(x,y)$

4) آنتروپی شرطی y $\{H(y|x)\}$ یعنی اطلاعات متوسطی که وقتی از ارسال خبر داریم خروجی به ما میدهد

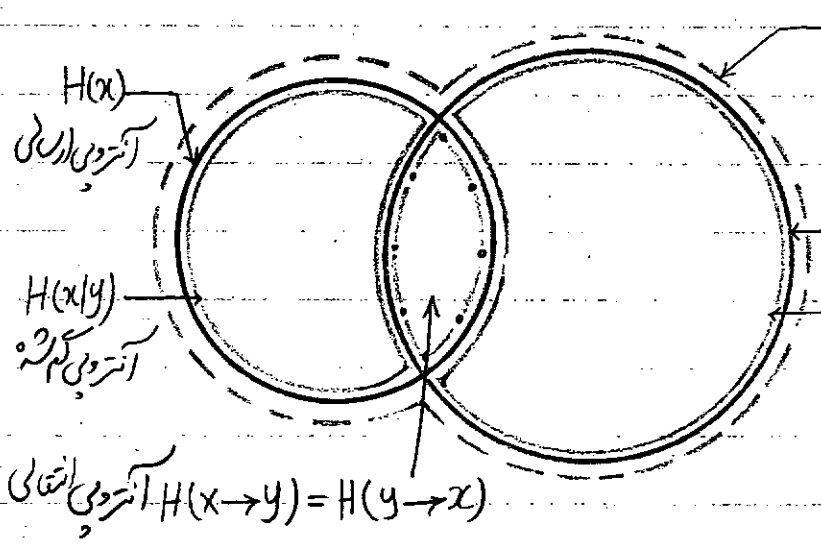
$$H(y|x) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} P(x=i, y=j) \log_2 \frac{1}{P(y=j \mid x=i)}$$

$$\begin{cases} H(y|x)=0 & \text{در حالت کانال بدون خطا} \\ H(y|x)= & \text{آنتروپی نویز یا مقدار اطلاعات متوسطی که از خطا بدست می‌آید} \end{cases}$$

5) آنتروپی شرطی x $\{H(x|y)\}$ متوسط اطلاعاتی است که علیرغم دانستن خروجی ورودی به‌ما می‌دهد

$$H(x|y)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} P(x=i,y=j)\log_2\frac{1}{P(x=i|y=j)} \qquad \text{در حالت کانال بدون خطا } H(x|y)=0$$

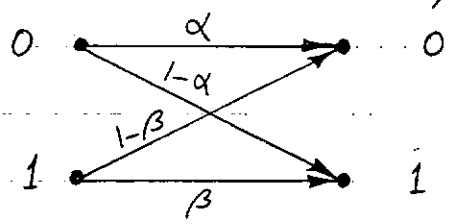
این آنتروپی متوسط اطلاعاتی را که در کانال از بین رفته است را به‌ما می‌دهد. و لذا به آن آنتروپی گم‌شده نیز می‌گویند



$$H(x,y)=H(x)+H(y|x)$$
$$H(x,y)=H(y)+H(x|y)$$
$$H(x,y)=H(x)+H(y)-H(x\to y)$$
$$H(x\to y)=H(x)-H(x|y)$$
$$H(x\to y)=H(y)-H(y|x)$$

این روابط را میتوان بوسیله روابط ریاضی نیز اثبات کرد

مثال باینری:



تعریف $\begin{cases}\bar{\alpha}=1-\alpha\\ \bar{\beta}=1-\beta\end{cases}$ $\begin{cases}h_0^t=h\\ h_1^t=\bar{h}\end{cases}$

$$\begin{cases} h_0^r=h\alpha+\bar{h}\beta \\ h_1^r=h\bar{\alpha}+\bar{h}\beta=1-h_0^r \end{cases}$$

تعریف $\boxed{H_x=x\log_2\frac{1}{x}+(1-x)\log_2\frac{1}{1-x}}$

$$H(y)= p_0^r \log_2 \frac{1}{p_0^r} + p_1^r \log_2 \frac{1}{p_1^r} = p_0^r \log_2 \frac{1}{p_0^r} + (1-p_0^r) \log_2 \frac{1}{1-p_0^r}$$

$$H(y) = H_{p_0^r} \qquad H(y|x)= p_0^t H_\alpha + p_1^t H_\beta$$

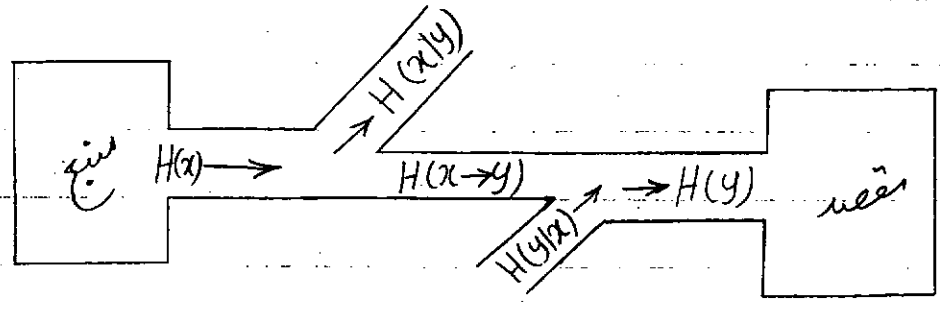
$$H(x \longrightarrow y) = H(y) - H(y|x) = H_{(p\alpha + \bar{p}\bar{\beta})} - p H_\alpha - \bar{p} H_\beta$$

(Binary Symmetrical Channel ≡ Bsc) در حالت خاص کانال باینری متقارن $\alpha=\beta$ و $p=\frac{1}{2}$ داریم

$$H(x \longrightarrow y) = \begin{cases} 1 \ \frac{bit}{binit} & \text{بدون خطا } \alpha=1 \\ 0 \quad // & \text{خطای 50٪ } \alpha=\frac{1}{2} \\ 1 \quad // & \text{خطای صددرصد } \alpha=0 \end{cases}$$

(میتوان صفر را یک و یک را صفر تلقی کرد)

اطلاعات ارسالی - دریافتی و انتقال یافته



$$H(x \to y) = H(x) - H(x|y)$$

$$= H(y) - H(y|x)$$

اطلاعات انتقالی در واحد زمان $D_t = r \cdot H(x \longrightarrow y)$

D_t بستگی به pdf منبع و pdf کانال دارد. ماکزیمم D_t نسبت به pdf منبع (مناسبترین منبع) را ظرفیت کانال گویند (C)

$$C = \underset{\text{pdf منبع}}{Max}\,[D_t] = r \underset{\text{pdf منبع}}{H_{max}}(x \longrightarrow y)$$

در مورد کانال بدون خطا $p_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} H(y|x)=0 \\ H(y)=H(x) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow C = r\, H_{max}(x)$$

ظرفیت کانال بدون نویز $\boxed{C = r \log_2^M}$

مثال: ظرفیت کانال باینری را در حالت کلی محاسبه کنید؟

آنتروپی انتقالی در حالت کلی $H(x \to y) = H(p\alpha + \bar{p}\beta) - p H_\alpha - \bar{p} H_\beta$

$$\frac{\partial H(x \to y)}{\partial p} = 0 \Longrightarrow p = \frac{1}{1-\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{H_\alpha - H_\beta}{1-\alpha-\beta}}} - 1\right)$$

احتمال ارسال صفر منبع (منبع ایده‌آل برای این کانال)

$$C = r_s \cdot H_{max}(x \to y)$$

ظرفیت کانال

$$\boxed{C = r_s \left[\log_2\left(1+2^{\frac{H_\alpha - H_\beta}{1-\alpha-\beta}}\right) - \frac{(1-\beta)H_\alpha - \alpha H_\beta}{1-\alpha-\beta}\right]}$$

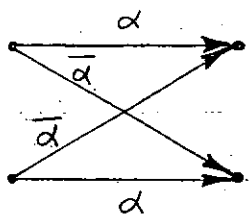
در حالت خاص کانال Bsc:

$$\alpha = \beta \Longrightarrow p = \frac{1}{1-2\alpha}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{2}$$

$$C = r_s \left[\log_2^2 - \frac{(1-2\alpha)H_\alpha}{1-2\alpha}\right] = r\,(1 - H_\alpha)$$

$$\boxed{C = r\left[1 + \alpha \log_2 \alpha + (1-\alpha)\log_2(1-\alpha)\right]}$$

این حالت را خود مستقیماً هم حساب کرد



با توجه به تقارن منبعی با احتمالات مساوی برخواستن ۰ و ۱ ($p = \frac{1}{2}$) مناسبترین منبع برای ظرفیت کانال است.

در اینصورت احتمال دریافت صفر و یک نیز مساوی خواهد بود $\left(p_0^r = p_1^r = \frac{1}{2}\right)$

$$H(y|x) = \frac{1}{2} \times \left(\alpha \log_2 \frac{1}{\alpha} + (1-\alpha)\log_2 \frac{1}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha \log_2 \frac{1}{\alpha} + (1-\alpha)\log_2 \frac{1}{1-\alpha}\right)$$

(احتمال صفر ارسال) (احتمال ۱ ارسال)

$$\left.\begin{aligned} H(y|x) &= \frac{1}{2}H_\alpha + \frac{1}{2}H_\alpha = H_\alpha \\ H(y) &= 1\ \left[\frac{bit}{binit}\right] \end{aligned}\right\} \Longrightarrow H(x \to y) = H(y) - H(y|x) = 1 - H_\alpha$$

چون احتمال دریافت صفر و یک مساوی است

$$C = r \times H_{max}(x \to y) = r(1-H\alpha) \quad \left[\frac{bit}{sec}\right]$$

در حالت بدون خطا $\alpha = 1$ داریم

$$C = r \quad \left[bit/sec\right]$$

با فرض $r = 1000 \ bit/sec$ برای احتمال خطاهای مختلف ظرفیت کانال باینری محاسبه شده است

احتمال خطا $\equiv \alpha$	ظرفیت $\equiv C$ $\left[\frac{bit}{sec}\right]$	
0	1000	$\frac{bit}{sec}$
10^{-4} مقدار عملی	999	//
10^{-2}	919	//
0.5	0	//

نکته: در حالت $\alpha = p_e = 1\%$ گرچه در هر هزار رقم باینری 990 رقم صحیح وجود دارد ولی اطلاعات متوسط آن 990 نیست بلکه 919 است زیرا محل خطا (10 خطا) در بین 1000 بیت مجهول است.

نکته: در کانالهای کم خطا که معمولاً در عمل بکار میروند میتوان در محاسبهٔ ظرفیت کانال از خطا صرفنظر کرد و از رابطهٔ $C = r \log_2 M$ استفاده برد.

۵- ظرفیت کانال پیوسته

آنتروپی و سرعت اطلاعات منبع پیوسته

پارامترهای منبع پیوسته:

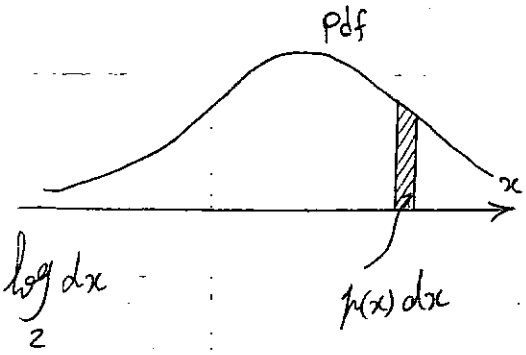
1) عرض باند (مترادف با سرعت منبع گسسته r_s) طبق تئوری نایکویست است با $2B$ نمونه در ثانیه سیگنال بعرض باند B کاملاً مشخص می‌گردد $(r_s = 2B)$

2) pdf (probability density function): منبع:

هرگاه نمونه‌ها را مستقل از یکدیگر فرض کنیم pdf منبع $(p(x))$ برابر pdf هریک از نمونه‌ها میشود.

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i$$

سرعت اطلاعات منبع $R = \underbrace{2B}_{\text{تعداد نمونه‌های مستقل در ثانیه}} \cdot \underbrace{H(x)}_{\text{اطلاعات متوسط هر نمونه}}$



$$H(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx \log_2 (p(x)\,dx)$$

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log_2 p(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx \log_2 dx$$

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x)\, dx \quad \underbrace{-\log_2 dx}_{-\infty} = \infty$$

این موضوع طبیعی است چون برای مشخص کردن دقیق هر کمیت آنالوگ بی‌نهایت رقم دیجیتال لازم است و یا بعبارتی احتمال وقوع دقیق هر مقدار آنالوگ صفر است. ولذا اطلاعات آن بی‌نهایت میشود. در مواردی که اختلاف آنتروپی‌ها مطرح است نظیر محاسبهٔ ظرفیت کانال میتوان از $\log_2 dx$ صرفنظر کرد $H(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x)\, dx$

ماکزیمم آنتروپی: ثابت میشود که pdf گوسی آنتروپی را ماکزیمم می‌کند:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}} \Longrightarrow H(x)_{max} = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_e\left(\frac{e^{-x^2/2\sigma_x^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\right) dx$$

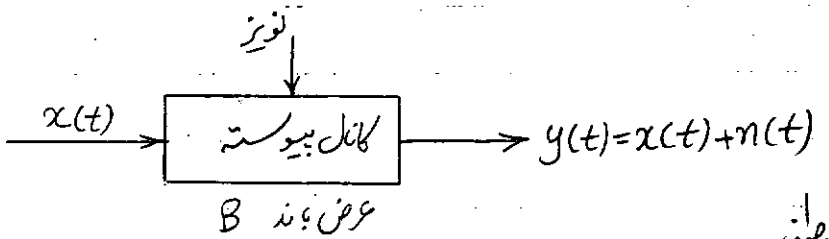
$$H(x)_{max} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times \frac{x^2}{2\sigma_x^2}\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\right) f(x)\, dx$$

$$H(x)_{max} = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{2\pi}\,\sigma_x = \ln\sqrt{2\pi e \sigma_x^2} \quad [nat/symbol]$$

$$\boxed{H(x)_{max} = \log_2 \sqrt{2\pi e \sigma_x^2} \quad bit/symbol}$$

ظرفیت کانال (رابطهٔ شنن-هارتلی Shanon-Hartley)

مدل و پارامترهای کانال:



پارامترهای کانال { ۱- عرض باند: B ۲- نویز: مشخصات آماری و طیفی

فرض: نویز گوسی و مستقل از سیگنال با طیف قدرت یکنواخت با دانسیتهٔ $\eta/2$

$$C = r\, H(x \to y)_{max} = r\,[\underbrace{H(y)}_{\text{خروجی}} - \underbrace{H(y|x)}_{\text{نویز}}]_{max}$$

$$H(y|x) = H(n) = \log_2 \sqrt{2\pi e \sigma_n^2} \qquad r = 2B$$

برای ماکزیمم شدن اطلاعات هر نمونه y ($H(y)$) باید pdf آن گوسی باشد و چون $y = x + n$ است و n را گوسی فرض کرده‌ایم پس باید pdf منبع گوسی باشد

$$C = 2B\left[\max H(y) - \log_2 \sqrt{2\pi e \sigma_n^2}\right]$$

$$\max H(y) = \log_2 \sqrt{2\pi e \sigma_y^2}$$

$$\sigma_n^2 = N = \eta B$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_n^2 + \sigma_x^2 = S + N$$

$$C = 2B \log_2 \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{\sigma_n^2}} = B \log_2 \frac{S+N}{N} \Rightarrow \boxed{C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \ \frac{bit}{Sec}}$$

رابطه‌ی شنون هارتلی

در حالت حدی $B \to \infty$ داریم : $C = B \log \left(1 + \frac{S}{\eta B}\right) = \frac{\log\left(1 + \frac{S}{\eta B}\right)}{\frac{1}{B}} = \frac{0}{0}$

با استفاده از قانون هوپیتال نسبت به $\frac{1}{B}$ از صورت و مخرج مشتق می‌گیریم

$$C = \lim_{B \to \infty} \frac{\frac{S/\eta}{1 + \frac{S}{\eta B}}}{1} = \frac{S}{\eta} \ nat/sec \qquad \boxed{C = \frac{S}{\eta} \ln 2 \ \ bit/sec}$$

مثال کانال تلفنی : $B = 3KHz$ و $\frac{S}{N} = 30dB = 1000$

$$C = 3000 \log_2 (1+1000) = 29900 \ bit/sec$$

ماکزیمم اطلاعاتی که بطور تئوری می‌توان با کانال تلفنی در واحد زمان منتقل کرد

$$D_t = 2\left[\frac{\text{کلمه}}{\text{ثانیه}}\right] \times 5\left[\frac{\text{حرف}}{\text{کلمه}}\right] \times 1\left[\frac{bit}{\text{حرف}}\right] = 10 \ bit/sec$$

در مکالمات تلفنی عملاً ده بیت در هر ثانیه اطلاعات منتقل می‌شود

علل کمبود بازدهی : کم بودن بازدهی در ترکیب کلمات که با بازدهی صددرصد و تعداد حرف $32 = 2^5$ عدد فوق ۵ برابر می‌گردد . در مکالمات اطلاعات جنبی تصادفی بسیاری طرف مکالمه و وضع روحی او و غیره تأثیر مخربی دارند

مثلاً شنیدن یک نفر از بین هزار نفر تنها ده بیت اطلاعات را در ثانیه میخواهد.

علت اصلی این است که نمونه‌های سیگنال صوتی در فاصله $\frac{1}{2B} = \frac{1}{6000}$ sec شدیداً بهم وابسته هستند با کد بندی منبع صوتی میتوان بازدهی اطلاعاتی آنرا زیاد کرد و دستگاه مربوطه Vocoder نام دارد که در برخی مصارف خاص نظامی و ماهواره‌ای استفاده میشود و عرض باند لازم را به حدود 300Hz میرساند (با تکنولوژی موجود) بطور تئوری باید بتوان عرض باند را به 1Hz رساند $C = 1 \log_2 1001 \approx 10$ bit/sec

در مخابرات کامپیوتری از کانالهای تلفنی به ظرفیتهای محدود 9600 bit/sec استفاده میشود.

مبادلهٔ S/N و عرض باند B و زمان T

فرض می‌کنیم اطلاعات I_t[bit] را در کانال ایده‌ال مخابره می‌کنیم

$$I_t = C \cdot T = BT \log_2 (1 + \frac{S}{N})$$

مبادلهٔ عرض باند با زمان:

$$B = \frac{I_t}{T} \times \frac{1}{\log_2 (1 + S/N)}$$

کاملاً عملی است و میتوان مثلاً سیگنال ویدئو را (با عرض باند حدود 5MHz) با سرعت خیلی کم از طریق کانال تلفنی ارسال نمود.

مبادلهٔ سیگنال به نویز با عرض باند: مبادله از نوع اکسپانسیل است $\frac{S}{N} = (2^{I_t/BT} - 1)$

فرض $\frac{I_t}{T} = 2900$ bit/sec

B [KHz]	3	6	12
S/N لازم	1000 = 30dB	30.6 = 14.9 dB	4.6 = 6.7 dB

برحسب dB مبادله تقریباً خطی است (مبادلهٔ هارتلی)

B [KHz]	1.5	1	0.75
S/N لازم	60dB	90dB	120 dB

در عمل در مخابرات آنالوگ FM و PM مبادلهٔ مجبوری بین $(\frac{S}{N})$ و B برقرار می‌گردد ولی فقط در یک جهت

در عمل در مخابرات دیجیتال مثلاً PCM مبادلهٔ اکسپانسیل بین S/N و B برقرار است و در هر دو جهت اگرچه در جهت

معکوس استفاده‌ی عملی ندارد.

ضمناً در عمل مبادله‌ی فوق همیشه با پدیده‌ی آستانه توام است که بر اساس آن حداقل S/N قابل پیش‌بینی نیست.

مبادله‌ی S/N و زمان T:

$$\frac{S}{N} = 2^{It/BT} - 1$$

این مبادله اکسپانسیل در عمل بصورت ضعیفتری صورت می‌گیرد. یک راه ساده‌ی آن درخواست تکرار پیغام بهنگام تشخیص اشتباه، حتی از پائین بودن S/N کاست (در مکالمات تلفنی یا مخابرات دیجیتال)

مبحث سوم : انتقال دیتا در باند پایه Baseband Data Transmission

1) تجزیه و تحلیل سیگنال PAM (28-33)
2) تجزیه و تحلیل سیستم PAM (33-42)
3) شکل دادن به طیف سیگنال PAM (42-50)
4) عناوین خاص (50-54)

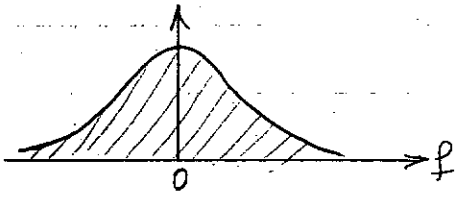
کلیات

بطور کلی برای مخابرهٔ یک سمبل (یک رقم) یک پالس ارسال می‌گردد یعنی یک رشته ارقام به سیگنالی متشکل از یک رشته پالس تبدیل میگردد. ارسال معمولاً با پالس‌های DC و یا RF انجام میگیرد

(الف) سیگنال متشکل از پالس‌های DC :

پالس DC پالسی است که طیف آن در حول $f=0$ متمرکز باشد و متداولترین آن است

لذا سیگنال متشکل از پالس‌های DC نیز طیفی متمرکز در حول مبدأ دارد.



چنین سیگنالی را سیگنال باند پایه گویند.

معمولاً ارقام مختلف با یکی از پارامترهای پالس مربعی مشخص میگردند.

a) اگر به ارقام مختلف پالس‌های با دامنه‌های مختلف نسبت داده شود آنرا PAM (Pulse Amplitude Mod.) نامند

b) " " " " با عرض‌های " " " PDM یا PWM نامند.

(Pulse Duration Mod. ≡ Pulse width Mod.)

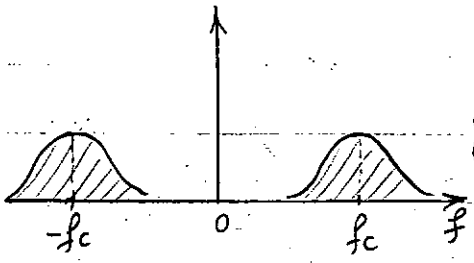
c) " " " " با محل‌های " " " PPM (pulse position Mod.) نامند.

سیگنال باند پایه برای ارسال در کانال‌های LP (Low Pass) مانند زوج سیم یا کابل هم‌محور مناسب است.

(ب) سیگنال متشکل از پالس‌های RF :

پالس RF به پالسی گفته میشود که طیف آن در حول فرکانس کاریر $f=f_c$ متمرکز باشد و متداولترین آن

پالس سینوسی با پوش چهارگوش است. سیگنال متشکل از پالس‌های RF نیز طیف BP (Band pass) خواهد داشت و نام سیگنال کاربرد موسوم است.

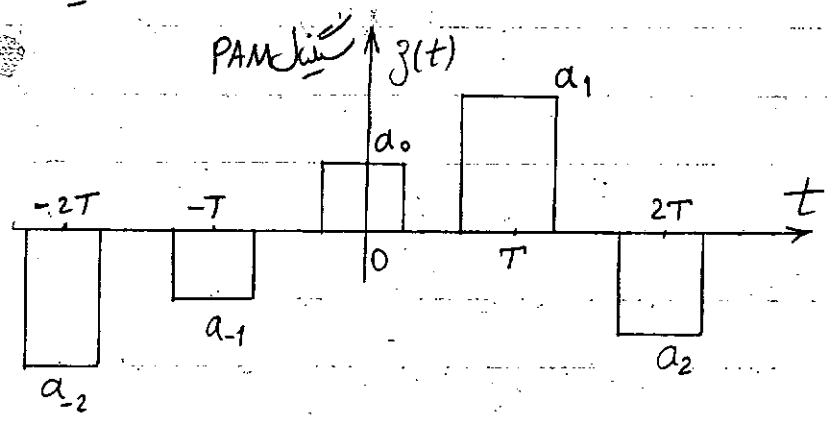


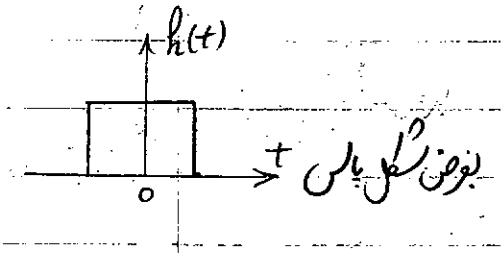
چنین سیگنالی برای انتقال در کانال BP (مانند موج بر، فیبر نوری و امواج رادیویی) و همچنین برای ادغام ترافیک چند سیگنال (FDM) مفید است.

اگر به ارقام مختلف پالس‌های RF با دامنه‌های مختلف اختصاص یا بدآنرا ASK (Amplitude shift keying) نامند.
" " " با فازهای " " PSK (Pulse Shift Keying) نامند.
" " " با فرکانس‌های " " FSK (Frequency shift Keying) نامند.

۱- تجزیه و تحلیل سیگنال PAM

سیگنال PAM

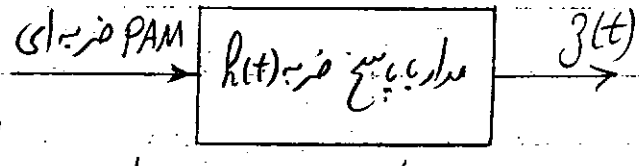




بعوض شکل پالس باشد.

$$z(t) = \cdots + a_{-1}\,h(t+T) + a_0\,h(t) + a_1\,h(t-T) + \cdots = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} a_k\,h(t-kT)$$

$$z(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\,\delta(t-kT)\right] * h(t)$$



a_k: اعداد رندام متناظر با پیغام هستند.

بنابراین بحث سیگنال PAM را میتوان مستقل از شکل پالس نمود.

در این بحث ما با حالت دیجیتال دامنه‌ها سروکار داریم.

سیگنال PAM باینری: $a_k = \begin{cases} +a \\ -a \end{cases}$

سیگنال PAM ترناری: $a_k = \begin{cases} +2a \\ 0 \\ -2a \end{cases}$

سیگنال PAM، M تایی: $a_k = \begin{cases} +(M-1)a \\ \vdots \\ -(M-1)a \end{cases}$

طیف قدرت PAM و قدرت متوسط آن

$$g(t)=\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\,\delta(t-kT)\right] * h(t)$$

$|H(f)|^2$: طیف انرژی پالس

$G(f)$: طیف قدرت PAM ضربه‌ای

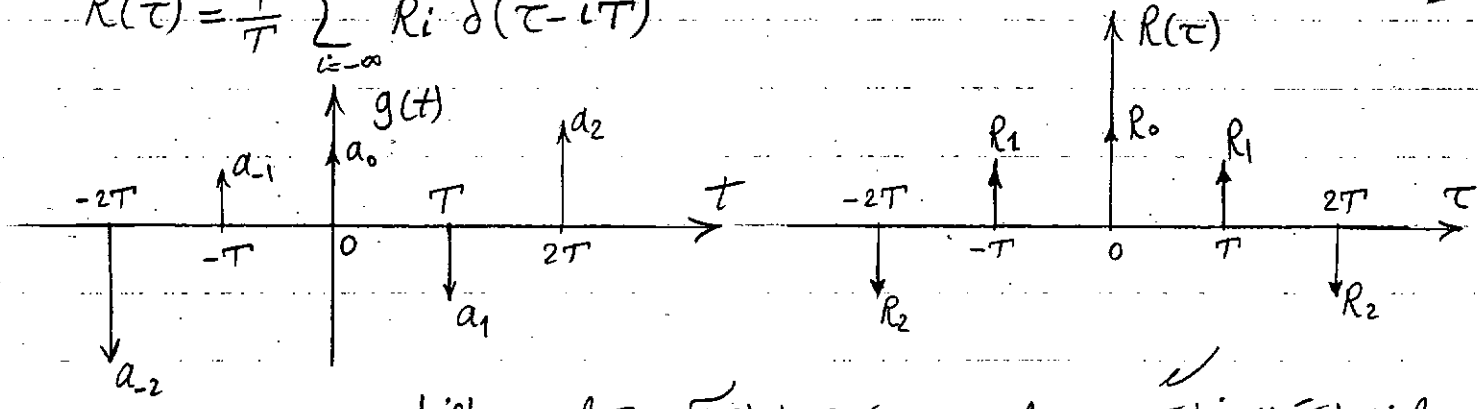
$$G_g(f)= G(f)\cdot|H(f)|^2$$

فرض می‌کنیم دامنه‌ها استیشنری باشند $\equiv$ $\overline{a_k}=\overline{a}$ بستگی به k ندارد.
$\overline{a_k a_{k+i}}=R_i$ بستگی به k ندارد.

$$R(\tau)=E\left[\langle g(t)\,g(t-\tau)\rangle\right]$$

میتوان نشان داد برای PAM ضربه‌ای (* یا درجی) تابع خودبستگی به شکل روبرو درمی‌آید.

$$R(\tau)=\frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_i\,\delta(\tau-iT)$$



صفر بودن تابع خودبستگی در $\tau\neq kT$ و نیز بودن آن $\tau=kT$ واضح است.

$$G(f)=\frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_i\,e^{-j2\pi iTf}=\frac{R_0}{T}+\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{\infty}2R_i\cos(2\pi iTf)$$

$$G_g(f)=G(f)\times|H(f)|^2$$

طیف قدرت PAM ضربه‌ای پریودیک است.

طیف قدرت سیگنال PAM از دو جزء تشکیل شده است که از تابع بستگی به R_i یعنی وابستگی بین دامنه‌های مختلف دارد و دومی طیف انرژی پالس است.

حالت خاص: دامنه‌های سیگنال PAM ضربه‌ای مستقل از یکدیگر بوده و در ضمن متقارن هستند یعنی احتمال دامنه‌های مثبت برابر احتمال دامنه‌های منفی هستند. شرط تقارن $\Longrightarrow \overline{a}=0$

$$\begin{cases} R_i=\overline{a_k\,a_{k+i}}=\overline{a_k}\times\overline{a_{k+i}}=0 & i\neq 0 \\ R_0=\overline{a_k^2}=\overline{a^2} \end{cases}$$

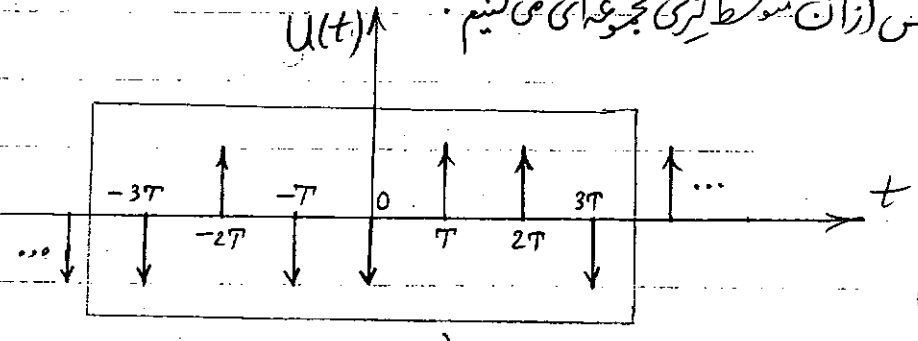
مثل نویز سفید $R(\tau) = \frac{\overline{a^2}}{T}\delta(\tau) \Rightarrow G(f) = \frac{\overline{a^2}}{T}$

طیف قدرت سیگنال PAM چون شکل طیف انرژی پالس را دارد $G_3(f) = \frac{\overline{a^2}}{T}|H(f)|^2$

بعد کلی قدرت متوسط سیگنال PAM $S = \int_{-\infty}^{+\infty} G_3(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\times|H(f)|^2\,df$

در حالت خاص بالا: $S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{a^2}}{T}|H(f)|^2\,df = \frac{\overline{a^2}}{T}E_h$

(یادآوری *) برای بدست آوردن طیف قدرت و تابع خودبستگی سیگنال کی رندام ابتدا در یک حالت خاص آنرا بدست می آوریم و سپس از آن متوسط گیری مجموعه ای می کنیم.



$T_0 = (2N+1)T$

$U_{T_0}(f) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{-j2\pi kfT}$

$|U_{T_0}(f)|^2 = U_{T_0}(f)\times U_{T_0}^*(f) = \sum_{n=-N}^{+N}\sum_{k=-N}^{+N} a_k a_n e^{-j2\pi fT(k-n)}$

طیف قدرت نمونه $= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T}\sum_{n=-N}^{+N}\sum_{k=-N}^{+N} a_k a_n e^{-j2\pi fT(k-n)}$

$G(f) = E(\text{طیف قدرت نمونه}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T}\sum_{n=-N}^{+N}\sum_{k=-N}^{+N} E(a_k a_n)\, e^{-j2\pi fT(k-n)}$

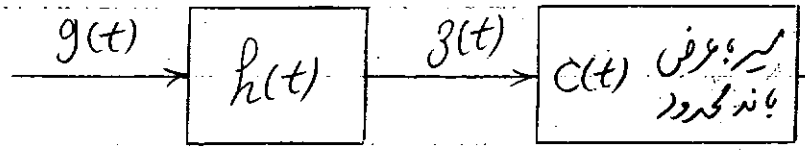
با تغییر متغیر $(k-n=i)$

$G(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T}\sum_{i=-N}^{+N}\sum_{n=-N}^{+N} \overbrace{E(a_n a_{n+i})}^{R_i} e^{-j2\pi ifT}$

$G(f) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_i\, e^{-j2\pi ifT}$

تداخل بین سمبل‌ها (ISI) و عرض باند لازم برای PAM

برای حفظ شکل پالس‌ها بطور تئوریک عرض باند بی‌نهایت لازم است (پالس محدود به T طیف نامحدود دارد) ولی در مخابرات دیجیتال حفظ شکل سیگنال مهم نیست بلکه حفظ اطلاعات موجود در آن مهم است.



$$y(t) = z(t) * c(t) = g(t) * [h(t) * c(t)] \qquad p(t) = h(t) * c(t)$$

در خروجی PAM با شکل پالس $p(t)$ داریم

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, p(t - kT)$$

چون عرض باند $h(t)$ محدود شده است سیگنال $p(t)$ بیشتر از $h(t)$ خواهد بود.
و بدلیل پهن شدن شکل پالس‌ها بین پالس‌های مختلف تداخل رخ میدهد و لذا دامنهٔ آنها را تغییر میکند که اینرا تداخل بین سمبل‌ها گویند (Inter Symbol Interferene)

تا کیفیت شرط حفظ اطلاعات را بدینصورت بیان کرد که هیچ پالسی در وسط پالس‌های دیگر تداخل ایجاد نکند در اینصورت با توجه به دامنهٔ پالس در وسط آن (با عمل نمونه‌گیری) میتوان دامنهٔ اولیهٔ اطلاعات را بدست آورد.

$$\begin{cases} p(kT) = 0 & k \neq 0 \\ p(kT) = k = 1 & k = 0 \end{cases}$$

مثلاً

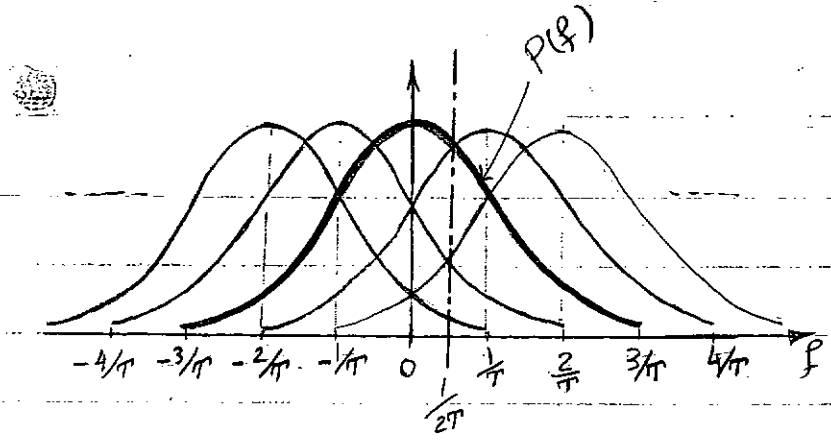
یا $\quad Comb_T[p(t)] = K\delta(t) = \delta(t)$ مثلاً

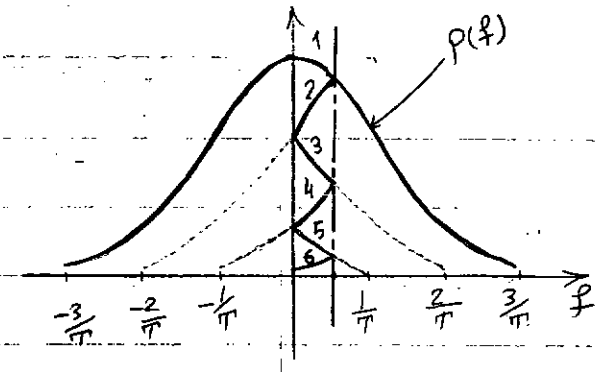
« شرط نایکویست در حوزهٔ زمان »

با تبدیل فوریه شرط نایکویست در حوزهٔ فرکانس بدست می‌آید

$$\frac{1}{T} rep_{\frac{1}{T}}[P(f)] = 1 \implies \boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\left(f - \frac{k}{T}\right) = T}$$

چون مجموع طیف‌های فرکانسی $p(t)$ با خیزهای متوالی T یک طیف پریودیک است لذا کافی است شرط مقدار ثابت بودن آنرا در یک پریود $\frac{1}{T}$ بررسی نمود.



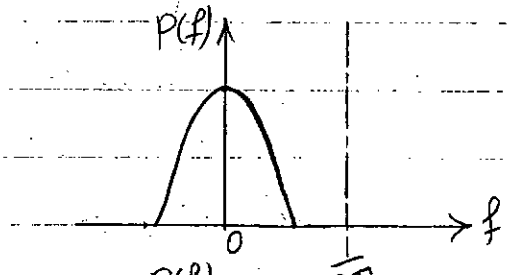


باتوجه به تقارن دوبینهٔ محور فرکانس کافی است شرط نایکویست در حوزهٔ فرکانس را فقط در نیم پریود 0 تا $\frac{1}{2T}$ در نظر بگیریم مجموع منحنی هایی که در فاصلهٔ 0 تا $\frac{1}{2T}$ قرار دارند باید در هر نقطه مقدار ثابت T را بدهند در حقیقت همان قطعات P(f) که از تاخوردگی در حول دو محور صفر و $\frac{1}{2T}$ بدست می آیند.

شرط نایکویست: مجموع قطعاتی که از تاخوردن P(f) در حول دو محور $\frac{1}{2T}$ و 0 (بتناوب) حاصل می گردند باید مقدار ثابتی باشد

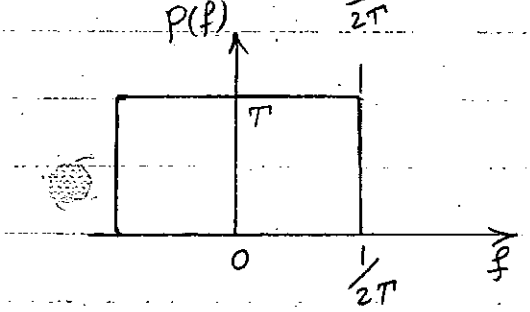
چند مثال

۱) P(f) با عرض باند $B<\frac{1}{2T}$



چون عرض باند کمتر از $\frac{1}{2T}$ است لذا جمع تکرارهای آن (با پریود $\frac{1}{T}$ در طول محور فرکانس) در فاصلهٔ 0 تا $\frac{1}{2T}$ همان P(f) است که نمی تواند در تمام طول باند مقدار ثابتی باشد پس با $B<\frac{1}{2T}$ نمیتوان شرط را اقناع کرد

۲) P(f) با عرض باند $B=\frac{1}{2T}$

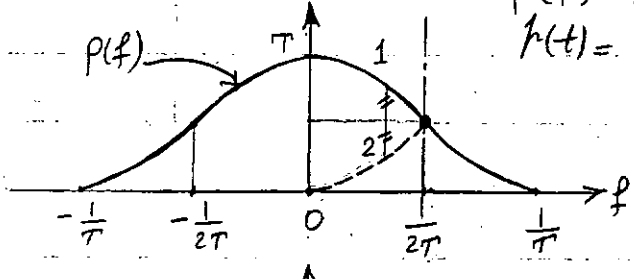


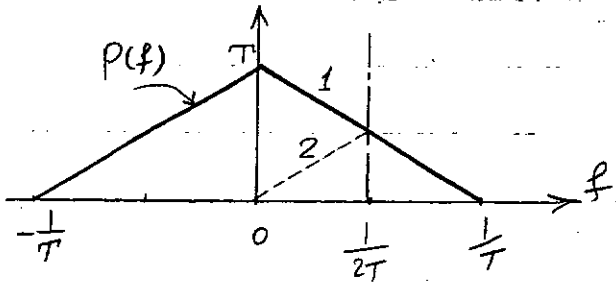
نظیر حالت قبل تکرار آن در فاصلهٔ $\frac{1}{2T}$ و 0 همان P(f) خواهد بود ولذا برای اقناع شرط نایکویست باید

$P(f)=T\,rect(fT)$

$h(t)=Sinc(t/T)$

۳) عرض باند $\frac{1}{2T}<B<\frac{1}{T}$





برای اقناع شرط نایکویست باید مجموع دو قطعهٔ 1 و 2 در هر نقطه در فاصلهٔ 0 تا $\frac{1}{2T}$ مقدار ثابت مثلاً T باشد بنابر مشخصهٔ فرکانسی حول فرکانس قطع $\frac{1}{2T}$ تقارن فرد داشته باشد.

موج مثلثی با عرض باند $\frac{1}{T}$ شرط نایکویست را اقناع می کند

$$P(f) = T\,\Lambda(fT) \longleftrightarrow h(t) = \mathrm{Sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right)$$

مثال دیگر مثال کسینوسی است که در صفحهٔ ۱۹۶ کتاب مرجع آمده است.

هرچه تعادل فوق تدریجی‌تر باشد در حوزهٔ زمان ریپل‌های زمانی کوچکتر میگردد. ولذا حتی اگر خطای زمانی هم در تشخیص داشته‌ایم (ضمن عمل نمونه‌گیری) داشته‌هایشیم مقدار (isi) کم خواهد بود.

۲- تجزیه و تحلیل سیستم PAM

① سیگنال PAM در حوزهٔ زمان — مرور

$$z(t) = \sum_k a_k\, h(t-kT) = \underbrace{\left[\sum_k a_k\, \delta(t-kT)\right]}_{\text{ضربه‌ای PAM}} * \underbrace{h(t)}_{\text{شکل پالس}}$$

② سیگنال PAM در حوزهٔ فرکانس

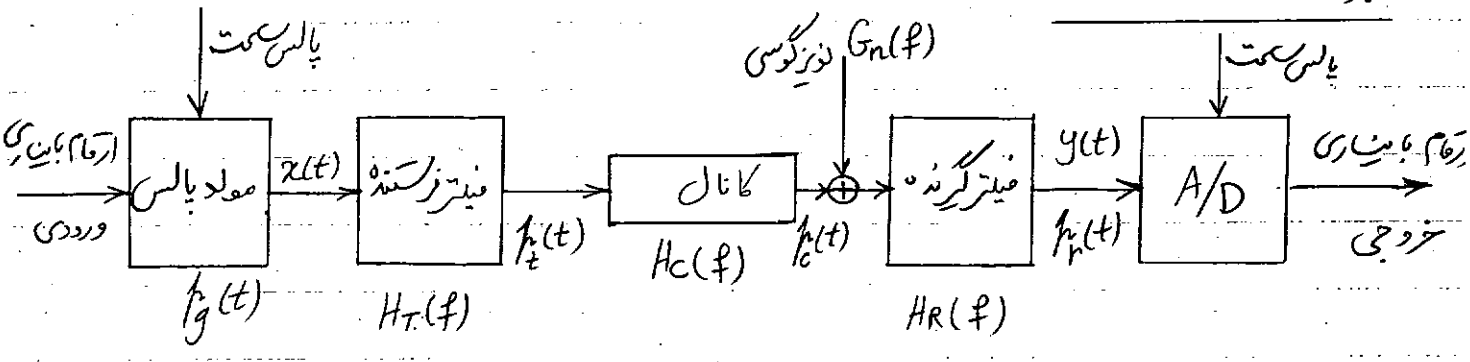
$$G_z(f) = \underbrace{\left[\frac{R_0}{T} + \frac{2}{T}\sum_{i=1}^{\infty} R_i \cos 2\pi i f T\right]}_{\text{طیف قدرت PAM ضربه‌ای}} \cdot \underbrace{|P(f)|^2}_{\text{طیف انرژی شکل پالس}}$$

③

تداخل بین سمبلی (isi): $\left(isi = 0 \equiv h(kT) = 0\right) \iff$ دنباله $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\left(f - \frac{k}{T}\right) =$ عدد صحیح $k \neq 0$

یا به عبارت دیگر مجموع قطعات تاخورده $P(f)$ حول دو محور 0 و $\frac{1}{2T}$ بطور متوالی مقدار ثابتی باشد.

اجزای سیستم PAM



① ورودی: باینری فرض میشود زیرا غیر باینری هم قبلاً باکدبندی منبع باینری شده است.

r_b : سرعت ارقام باینری (bit rate) و واحد آن $\frac{\text{bit}}{\text{sec}}$ است و در صورتیکه با مفهوم اطلاعات

اشتباه نشود $\frac{bit}{sec}$ هم می‌گوییم

② مولد پالس: با استفاده از شکل پالس $h_g(t)$ و دامنه‌های a_k ارقام ورودی را به سیگنال ورودی $x(t)$ تبدیل می‌کند

در سیستم PAM باینری به ازاء هر رقم ورودی یک پالس باینری از دو دامنهٔ $\pm a$ ارسال می‌گردد

رقم باینری	0	1
دامنه a_k	$-a$	$+a$

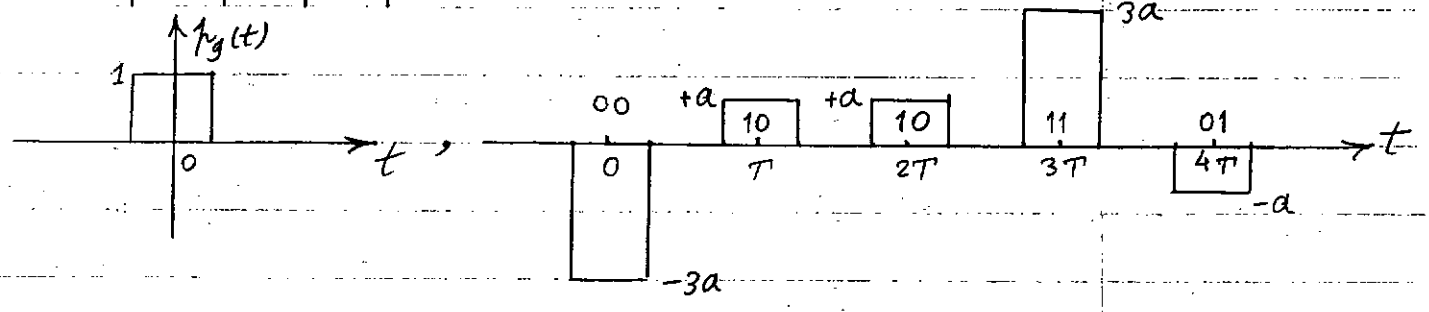
در سیستم PAM چهارتایی یا چهارتراز یا کوارترنری ($M=4$) به ازاء هر دو رقم

دو رقم	00	01	10	11
a_k	$-3a$	$-a$	$+a$	$+3a$

دو رقم ورودی یک پالس باینری از چهار دامنهٔ $\pm a$ و $\pm 3a$ ارسال میگردد.

مثلاً برای شکل پالس $h_g(t)$ و ارقام 00101011 01 داریم

00	10	10	11	01
$-3a$	$+a$	$+a$	$3a$	$-a$



در اینجا داریم: $r = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} r_b$ سرعت پالس

در سیستم PAM با M تراز یا "M تایی" هر $\log_2^M$ رقم باینری به یک پالس باینری از M دامنهٔ $\pm a$ و $\pm 3a$ و ... و $\pm (M-1)a$ تبدیل میگردد و داریم $r = \frac{1}{T} = \frac{1}{\log_2^M} r_b \left[\frac{Pulse}{sec} \equiv baud\right]$ سرعت پالس

③ فیلتر فرستنده: گاهی استفاده میشود و بدلایل

(الف) حذف مولفه‌های غیرضروری $x(t)$ که ممکن است مزاحم سایر سیگنالهایی که احتمالاً از همین کانال یا مدار استفاده می‌کنند باشند.

(ب) برای اُپتیمم کردن سیستم PAM (بعداً خواهیم دید)

- اگر تابع تبدیل فیلتر فرستنده $H_T(f)$ باشد (خروجی آن PAM با شکل پالس $h_T(t)$ خواهد بود)

$$\begin{cases} h_t(t) = h_g(t) * h_T(t) \\ P_T(f) = P_g(f) \cdot H_T(f) \end{cases}$$

④ نویز: در ورودی گیرنده و با pdf گوسی و طیف $G_n(f)$ فرض می‌شود.

σ^2: قدرت نویز در خروجی فیلتر گیرنده و ضمناً نویز در خروجی فیلتر گوسی خواهد بود

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(f) \, |H_R(f)|^2 \, df$$

⑤ فیلتر گیرنده: همیشه بکار می‌رود و بدلیل

(الف) حذف سیگنال‌های ناخواسته و تقلیل نویز

- (ب) اقناع شرط نایکویست ($isi=0$)

$$\begin{cases} h_r(t) = h_g(t) * h_T(t) * h_c(t) * h_R(t) \\ P_r(f) = P_g(f) \cdot H_T(f) \cdot H_c(f) \cdot H_R(f) \end{cases}$$

یعنی باید $P_r(f)$ از شرط نایکویست پیروی کند و مثلاً تقارن فرد در فرکانس قطع داده باشد.

$$y(t) = \sum_k a_k h_r(t - kT) + Noise$$

⑥ مدار A/D: وظیفهٔ این مدار تبدیل سیگنال خروجی $y(t)$ به ارقام خروجی است و شامل سه قسمت می‌باشد (نمونه برداری - روند کردن - کدبندی)

- اگر نویز نباشد با نمونه برداری در وسط پالس‌ها می‌توان دامنهٔ آن را تشخیص داد و بدون نیاز به روند کردن و دیکد کردن دامنهٔ ارقام صادره را تعیین کرد.

بدلیل نویز نمونه‌ها با مقادیر مفروض بمیزان کمی (نویز) اختلاف خواهند داشت که با روند کردن میتوان اثر نویز را حذف کرد البته اگر دامنهٔ نویز زیاد باشد ممکن است در این کار دچار خطا شویم.

خطای ناشی از حذف نویز

$$y(mT) = \sum_k a_k h_r[(m-k)T] + Noise$$

دامنهٔ سیگنال در وسط پالس m ام

چون $isi=0$ است یعنی $h_r[(m-k)T] = 0$ داریم $m \neq k$

$$y(mT) = a_m h_r(0) + Noise$$

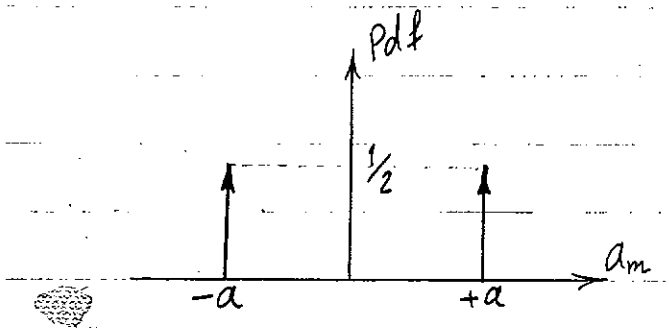
متناسب با دامنهٔ پالس m ام

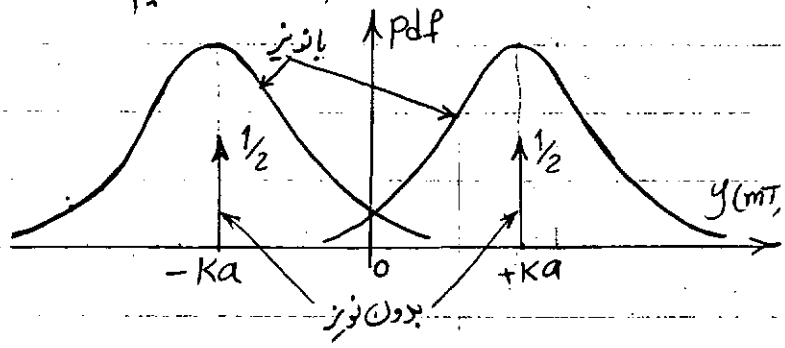
اگر نویز نبود این دامنه با یک ضریب ثابت همان دامنهٔ ارسال شده

$y(mT) = Ka_m + Noise$ در لحظهٔ mT می بود.

البته سیستم باینری $(M=2)$ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم دو دامنهٔ $\pm a$ با احتمالات مساوی صادر شوند

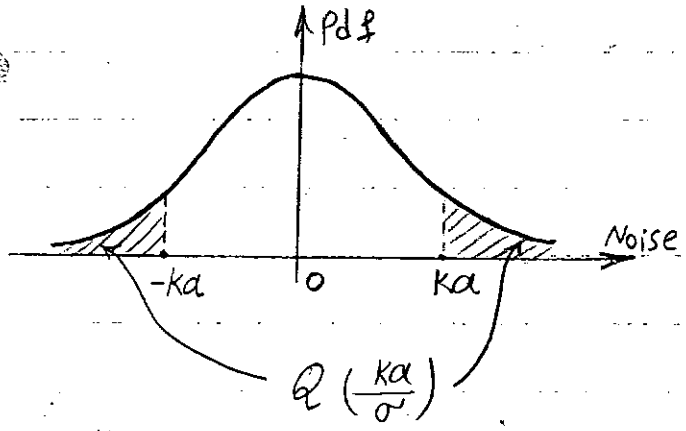
حال pdf نمونهٔ لحظهٔ m ام را در نظر میگیریم.





عمل رودکردن یعنی تبدیل نمونه به یکی از دو دامنهٔ مفروض (به هرکدام که نزدیکتر بود) به عبارت دیگر اگر نمونه منفی بود به $-Ka$ تبدیل بشود و اگر نمونه مثبت بود به $+Ka$ تبدیل بشود.

$$P_e = \underbrace{\frac{1}{2}}_{P(a_m=a)} P(Noise < -Ka) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{P(a_m=-a)} P(Noise > Ka)$$



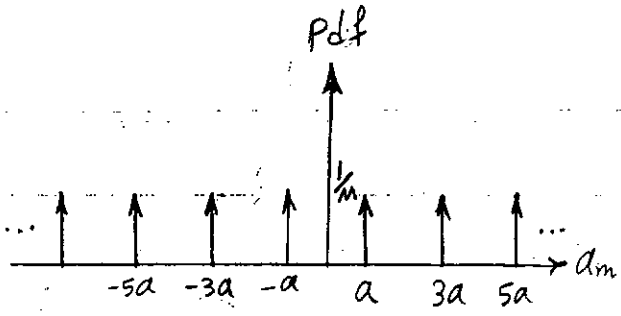
pdf نویز گوسی و با قدرت (واریانس) σ^2 است

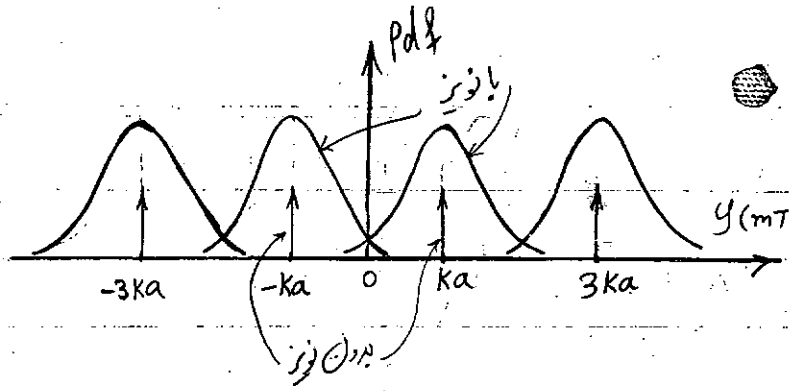
$$P_e = \frac{1}{2}Q\left(\frac{Ka}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{Ka}{\sigma}\right)$$

برای باینری $\quad P_e = Q\left(\frac{Ka}{\sigma}\right)$

تعمیم به PAM، Mتایی: فرض می کنیم M دامنهٔ مفروض $\pm a$ ، $\pm 3a$ ، ... و $\pm(M-1)a$ با احتمالات مساوی باشند.

عمل رودکردن: تبدیل نمونه به یکی از M دامنهٔ مفروض (به هرکدام که نزدیکتر بود)





اگر نویز از نصف فاصلهٔ دو دامنهٔ مفروض مجاور بیشتر باشد (Ka) دچار خطا خواهیم داشت

$$P_e = \frac{1}{M} Q\left(\frac{Ka}{\sigma}\right) + \frac{1}{M}(M-2)\,2\,Q\left(\frac{Ka}{\sigma}\right) + \frac{1}{M} Q\left(\frac{Ka}{\sigma}\right)$$

$$\boxed{P_e = 2\left(1-\frac{1}{M}\right) Q\left(\frac{Ka}{\sigma}\right)}$$

M: تعداد دامنه‌های مفروض

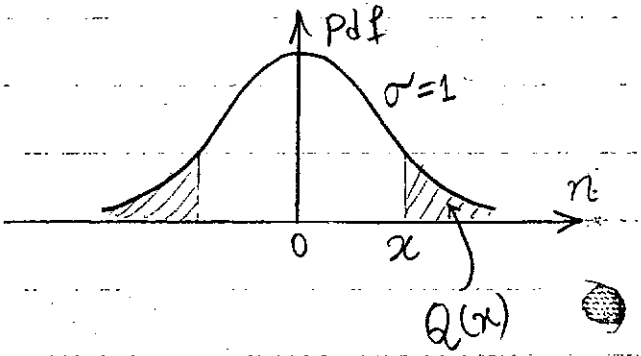
Ka: نصف فاصلهٔ دو دامنهٔ مفروض

σ: مقدار V_{rms} نویز در خروجی فیلتر گیرنده

Q: تابع سطح زیر منحنی pdf نرمال

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-n^2/2}\, dn$$

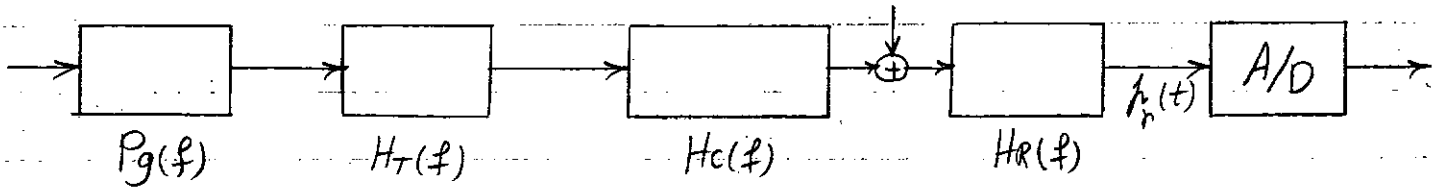
$$Q(x) \approx \begin{cases} 0.4\,\dfrac{e^{-x^2/2}}{x} & x > 3 \\ 0.2\left[\sqrt{x^2+4} - x\right] e^{-x^2/2} & x > 1/2 \end{cases}$$



$$x \approx \sqrt{-2\ln(8Q)} \qquad 10^{-99} < Q < 10^{-2}$$

سیستم PAM ایده‌ال (دیجیتال)

فرض { کانال بدون اعوجاج (یا ترمیم شده) باشد با $H_c(f) = \frac{1}{L}$ مستقل از فرکانس
نویز سیستم سفید باشد $G_n(f) = \eta/2$



$P_r(f) = P_g H_T H_c H_R$ یکی از مشخصه‌های تابلویت باشد

$$H_T H_R = \frac{L\, P_r(f)}{P_g(f)}$$ برای P_r و P_g مفروض تنها حاصلضرب $H_T H_R$ مشخص میگردد

میتوان با تقسیم مناسب وظیفهٔ شکل دادن پولسهای H_T و H_R احتمال خطا را در یک سیستم باراد یک مقدار قدرت ارسالی مفروض (S_T) مینیمم کرد.

برای مینیمم کردن P_e باید مقدار $\frac{Ka}{\sigma}$ ماکزیمم شود.

$$P_e = 2\left(1-\frac{1}{M}\right) Q\left(\frac{Ka}{\sigma}\right)$$

قدرت ورودی کانال $S_T = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{a^2}}{T} |P_g H_T|^2 df$

شکل پالس در خروجی فیلتر گیرنده ← ، ضریب PAM ↑

$$\overline{a^2} = \frac{1}{M}(-a)^2 + \frac{1}{M}(-a)^2 + \frac{1}{M}(-3a)^2 + \cdots + \frac{1}{M}(M-1)^2 a^2 = \frac{M^2-1}{3} a^2$$

(مثلاً برای دوتایی $M=2$ داریم)

$$\overline{a^2} = \frac{1}{2}(-a)^2 + \frac{1}{2}(a)^2 = a^2 = \frac{2^2-1}{3} a^2$$

$$\boxed{S_T = \frac{M^2-1}{3T} a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |P_g H_T|^2 df}$$

$$K = R_n(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_r(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(P_g H_T \frac{1}{L} H_R\right) df$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{2} |H_R|^2 df = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R|^2 df$$

$$\left(\frac{Ka}{\sigma}\right)^2 = \frac{6 S_T \cdot T}{(M^2-1)\eta L^2} \times \left\{ \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (P_g H_T H_R)\, df\right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |P_g H_T|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R|^2 df} \right\}$$

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (U \cdot V^*)\, df\right]^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |V|^2 df$$ (نامساوی شوارتز)

در نمای بی‌سوادتر تساوی در حالت $U = K_0 V^*$ برخ میدهد

$$\left(\frac{Kq}{\sigma}\right)^2 = \frac{6 S_T T}{(M^2-1)\eta L^2} = \frac{6 S_R T}{(M^2-1)\eta}$$

ولذا به ازای $P_g H_T = K_0 H_R^*$ داریم

وضمنا داشتیم $H_T H_R = \dfrac{L P_n(f)}{P_g}$

$$\boxed{|H_R|^2 = \frac{L}{K_0} P_n(f)}$$

$$\boxed{|H_T|^2 = L K_0 \frac{P_n(f)}{|P_g|^2}}$$

$$\boxed{P_e = 2\left(1-\frac{1}{M}\right) Q\sqrt{\frac{6}{M^2-1} \times \frac{S_R T}{\eta}}}$$

P_e بستگی به شکل پالس $P_n(f)$ ندارد.

خلاصه

۱) برای کانال بلکیواخت و نویز سفید و شکل پالس دلخواه

$$\begin{cases} |H_R|^2 = \dfrac{L}{K_0} |P_n(f)| & (H_c = \frac{1}{L}) \\ |H_T|^2 = L K_0 \dfrac{|P_n(f)|^*}{|P_g|^2} & (K_0 \text{ دلخواه}) \end{cases} \Longrightarrow P_e = 2\left(1-\frac{1}{M}\right) Q\sqrt{\frac{S_R T}{\eta} \times \frac{6}{M^2-1}}$$

۲) برای حالت کلی $H_c(f)$ و $G_n(f)$ و شکل پالس دلخواه

$$\begin{cases} |H_R|^2 = \dfrac{1}{K_0} \left|\dfrac{P_n(f)}{H_c(f)}\right| \times \dfrac{1}{\sqrt{G_n}} \\ |H_T|^2 = K_0 \left|\dfrac{P_n(f)}{H_c(f)}\right| \times \dfrac{\sqrt{G_n}}{|P_g|^2} \end{cases} \Longrightarrow P_e = 2\left(1-\frac{1}{M}\right) Q\sqrt{\frac{3 S_T T}{M^2-1} \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(f)\,df}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{P_n}{H_c}\right| \sqrt{G_n}\,df}\right]^2}$$

حالت کلی مورد استفاده ما نیست.

مبادله قدرت و عرض باند در PAM:

فرض می‌کنیم r_b رقم باینری در ثانیه از منبع صادر می‌شود و سیستم PAM $M = 2^\lambda$ تایی (M تراز) است.

لذا هر λ رقم باینری به یک پالس تبدیل می‌شود.

فاصله پالس‌ها $T = \lambda \dfrac{1}{r_b} = \dfrac{\log_2^M}{r_b}$

عرض باند لازم $B \geq \dfrac{1}{2T} = \dfrac{r_b}{2\log_2^M}$ ، $P_e = 2\left(1-\frac{1}{M}\right) Q\sqrt{\dfrac{6 S_R \log_2^M}{(M^2-1)\eta r_b}}$

با صرفنظر کردن از ضریب $2(1-\frac{1}{M})$ برای اینکه احتمال خطای M تراز و باینری مساوی باشند باید:

$$M=2 \text{ باینری} \begin{cases} B \geq \frac{r_b}{2} \\ P_e = Q\sqrt{\frac{2SR}{\eta r_b}} \end{cases}$$

$$\frac{\text{قدرت } M \text{ تراز}}{\text{قدرت باینری}} = \frac{M^2-1}{3\log_2^M} = \frac{2^{2\lambda}-1}{3\lambda}$$

M	2	4	8	16	32
نسبت قدرتها $\frac{M^2-1}{3\log_2^M}$	1	2.5	7	21.2	68.2
نسبت عرض باندها $\frac{1}{\log_2^M}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

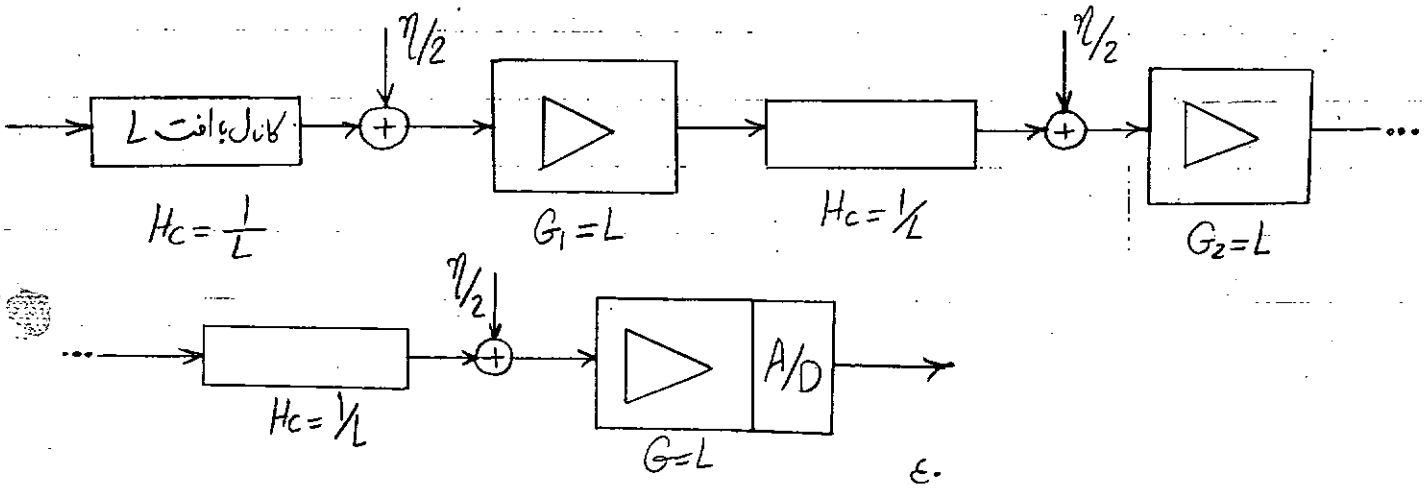
$$\frac{\text{عرض باند } M \text{ تراز}}{\text{عرض باند باینری}} = \frac{1}{\log_2^M} = \frac{1}{\lambda}$$

مبادلهٔ عرض باند و قدرت تقریباً بطور اکسپانسیل و در جهت کم کردن B است.
چنین مبادله‌ای در عمل چندان اقتصادی نیست و بعلاوه سیستم M تراز مضل‌تر از باینری است (مولد پالس و A/D مضل‌تر) معمولاً سیستم PAM باینری و یا تزناری ($M=3$) بدلیلی که خواهیم دید استفاده می‌شود.

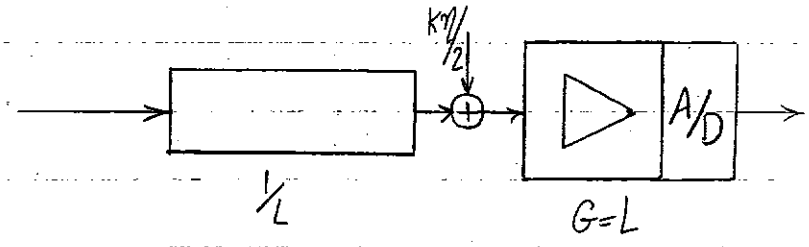
سیستم تکرار کننده (repeater)

افت کانال با زیاد شدن فاصله افزایش می‌یابد (بخصوص کانالهای کابلی و زوج سیم) ولذا از فاصله‌ای به بعد دیگر سیگنال در مقابل نویز غیرقابل تشخیص خواهد شد. راه افزایش قدرت ارسالی دارای محدودیت اقتصادی و تکنولوژیک است. راه متداول تقویت سیگنال در بین راه است قبل از اینکه در مقابل نویز غیرقابل تشخیص شود (سیستم تکرار کننده)

(الف) رپیتر خطی (بدون A/D):
وظیفهٔ اصلی این رپیترها تقویت سیگنال است و تنها در رپیتر آخر A/D داریم

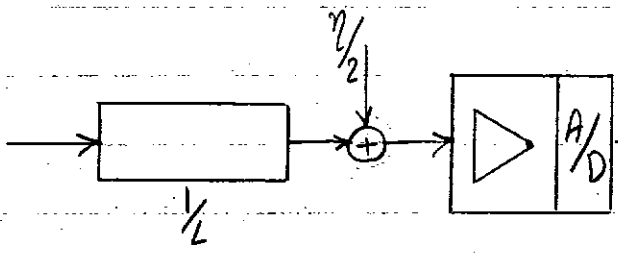


مدار معادل برای K رپیتر ← وقتی که گین ریپیتر افت کانال را دقیقاً خنثی می‌کند.



$$P_{eK} = 2\left(1-\frac{1}{M}\right)Q\sqrt{\frac{6S_RT}{(M^2-1)k\eta}}$$

(ب) ریپیتر بازساز (Regenerative) (با مدار A/D):



تمام ریپیترها علاوه بر تقویت عمل A/D را نیز انجام می‌دهند.

در ریپیتر بازساز نویز در قبال خطای $P_{e1} = 2\left(1-\frac{1}{M}\right)Q\sqrt{\frac{6S_RT}{(M^2-1)\eta}}$ حذف می‌گردد

برای K ریپیتر: علامت تقریب نخاطر این است که خطاها ممکن است یکدیگر را خنثی کنند.

$$1-P_{eK} \approx (1-P_{e1})^K$$

$$1-P_{eK} \approx 1-KP_{e1} \Rightarrow P_{eK} \approx KP_{e1}$$

در اینجا به جای نویز خطاها بر روی هم اثر می‌شوند که خیلی کم اهمیت تر است.

$$P_{eK} = K \times 2\left(1-\frac{1}{M}\right)Q\sqrt{\frac{6S_RT}{(M^2-1)\eta}}$$

مقایسه ریپیتر خطی با بازساز: (فرض $M=2$)

K	$P_{eK}=10^{-5}$ برای $\frac{S_RT}{\eta}$		$\frac{S_RT}{\eta}=10$ برای P_{eK}	
	بازساز	خطی	بازساز	خطی
1	9.6 (dB)	9.6 (dB)	4×10^{-6}	4×10^{-6}
2	9.9	12.6	8×10^{-6}	7.9×10^{-4}
3	10.1	14.4	1.2×10^{-5}	4.9×10^{-3}
4	10.2	15.6	1.6×10^{-5}	1.3×10^{-2}
5	10.3	16.6	2×10^{-5}	2.2×10^{-2}
10	10.5	19.6	4×10^{-5}	
100	11.3	29.6	4×10^{-4}	
1000	12.0	39.6	4×10^{-3}	
	۱۰۷ برابر	هزار برابر		

غیرقابل قبول

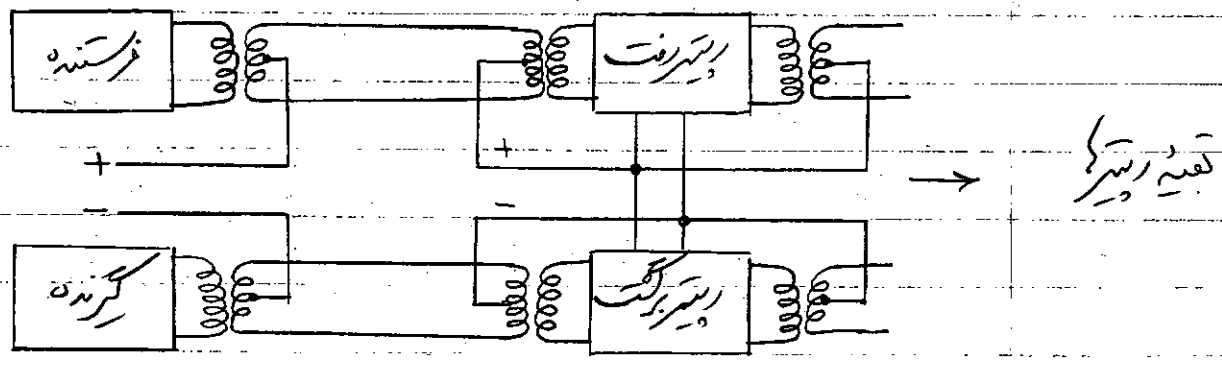
برای یک احتمال خطای 10^{-5} بیت در ریپیتر بازساز میتوان تا صد هزار برابر کرد و برای اینکار قدرت ۱۰۷ برابر لازم است ولی در ریپیتر خطی اینکار با قدرت 1000 برابر ممکن است.

برای یک قدرت ثابت $\left(\frac{SRT}{\eta}=10\right)$ هزار برابر کردن فاصله در رپیتر بازساز خطا را به مرز قابل قبول 4×10^{-3} میرساند ولی، رپیتر خطی فاصله را نمیتوان بیشتر از سه برابر کرد، احتمال خطای قابل قبول است.

تغذیهٔ الکتریکی رپیترها:

یک راه استاندارد از منبع تغذیهٔ مستقل برای رپیترهاست که معمولاً برای کانالهای کابلی استفاده نمیشود (احتیاج به نگهداری دارد، گران تمام میشود، ضریب اطمینان سیستم را پائین می‌آورد و غیره)

راه متداول ارسال مؤلفهٔ DC همراه با سیگنال اصلی بمنظور تغذیهٔ رپیترهاست.



۳ـ شکل دادن به طیف سیگنال PAM

طیف قدرت PAM $G_3(f)=G(f)\cdot|P(f)|^2$

$|P(f)|^2$ طیف انرژی شکل پالس است که با توجه به شرط نایکویست انتخاب میشود و بوسیلهٔ فیلترهای میرا بمنظور صفر کردن isi تنظیم میشود.

$$\begin{cases} G(f)=\frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_i\, e^{j\pi i f T} \\ R_i=\overline{a_k\, a_{k+i}} \end{cases}$$

$G(f)$ طیف قدرت PAM ضربه‌ای است وابستگی به خصوصیات آماری اطلاعات $(\{a_k\})$ دارد و بوسیلهٔ کدبندی قابل تنظیم است و بمنظور تطبیق طیف سیگنال با کانال (معمولاً حذف مؤلفهٔ DC) تنظیم میگردد.

کدبندی بمنظور تنظیم طیف

بدلیل تقویت ریپیترها و یا تطبیق امپدانس در سیر کانال معمولاً ترانسفورماتور وجود دارد که مولفهٔ DC را عبور نمی‌دهد ولذا لازم است کد طیف سیگنال کانال نیز مولفهٔ DC نباشد. بنابراین با عمل کدبندی و تنظیم $G(f)$ صورت میگیرد.
علاوه بر حذف مولفهٔ DC خصوصیت لازم دیگر کدهایی است که از ارسال صفرها و یکهای متوالی اجتناب کرد زیرا معمولاً پالس ساعت مدارهای A/D از خود سیگنال PAM تغییر وضعیت آن استخراج میشود.

(الف) کدبندی AMI یا Bipolar: «Alternative Mark Inversion»

مثال:

رقم	دامنهٔ پالس
0	0
1	بتناوب +1 و -1

ارقام: 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 $\xrightarrow{AMI}$ دامنهٔ پالس‌ها: 0 0 +1 0 -1 +1 -1 0 +1

برای سهٔ حالت فرض میکنیم احتمال صدور صفر و یک مساوی باشد و قبلاً رقم 1 به دامنهٔ 1- تبدیل شده باشد.

سه رقم متوالی	a_k	a_{k+1}	a_{k+2}	احتمال
0 0 0	0	0	0	1/8
0 0 1	0	0	+1	1/8
0 1 0	0	+1	0	〃
0 1 1	0	+1	-1	〃
1 0 0	+1	0	0	〃
1 0 1	+1	0	-1	〃
1 1 0	+1	-1	0	〃
1 1 1	+1	-1	+1	〃

$$R_0 = \overline{a_k^2} = 0^2 \times \frac{1}{8} \times 4 + 1^2 \times \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2}$$

$$R_1 = \overline{a_k a_{k+1}} = 0 \times \frac{1}{8} \times 6 + (-1)\frac{1}{8} \times 2 = -\frac{1}{4}$$

$$R_2 = \overline{a_k a_{k+2}} = 0$$

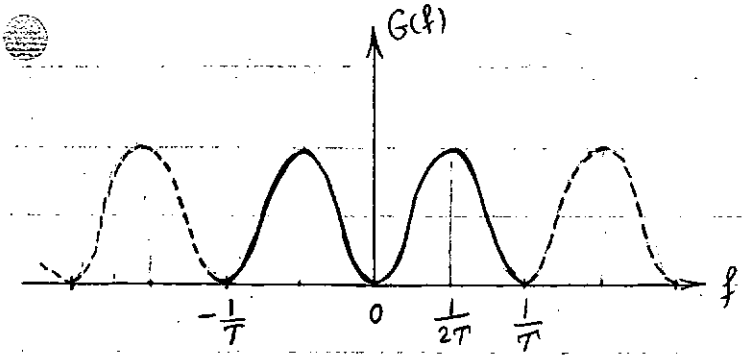
$$R_3 = R_4 = \dots = 0$$

برای سهٔ R_0 و R_1 میتوانستیم از جدول دو رقم متوالی هم استفاده کنیم ولی این اطلاعاتی در مورد R_2 و... بما نمی‌داد.

دو رقم متوالی	a_k	a_{k+1}	احتمال
0 0	0	0	1/4
0 1	0	+1	1/4
1 0	+1	0	1/4
1 1	+1	-1	1/4

$$R_0 = \overline{a_k^2} = 0^2 \times \frac{1}{4} \times 2 + 1^2 \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

$$R_1 = \overline{a_k a_{k+1}} = 0 \times \frac{1}{4} \times 3 + (-1) \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$



$$G(f) = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}e^{0} + \left(-\frac{1}{4}\right)e^{j2\pi fT} + \left(-\frac{1}{4}\right)e^{-j2\pi fT}\right]$$

$$G(f) = \frac{1}{2T}\left(1 - \cos 2\pi fT\right)$$

$$G(f) = \frac{\sin^2(\pi fT)}{T}$$

بطور یک ملاحظه میشود $G(0)=0$ است.

نکات:

1) اگر خطا باعث نقض خاصیت AMI گردد برای گیرنده قابل تشخیص است و گیرنده میتواند بوسیله مدار مناسبی کثرت خطا را اعلام کند.

2) اطلاعات باینری با این کدبندی به سیگنال سه تایی (M=3) تبدیل میشوند که نسبتاً مقاوم‌تر از باینری است و قدرت بیشتری میخواهد.

$$\text{باینری } P_e = Q\sqrt{\frac{2S_RT}{\eta}}$$

$$\text{سه تایی } P_e = \frac{4}{3}Q\sqrt{\frac{3S_RT}{4\eta}}$$

$\Rightarrow$ برای احتمال خطای مساوی با این کدبندی باید قدرت فرستنده تقریباً $8/3$ برابر شود.

3) امکان ارسال صفرهای متوالی باقی است (اشکال استخراج پالس ساعت)

(ب) کدبندی HDB3: (High Density Bipolar 3)

این کدها همان کد AMI است که در آن از ارسال ۴ صفر متوالی اجتناب میگردد.
همیشه چهار صفر بطور متوالی تبدیل به یکی از دو کد (000D و 1000) میشود

D همان بیت است که در کدبندی با قانون AMI مخالفت می‌کند تا برای گیرنده قابل تشخیص بوده و آن رقم و سه رقم قبلی به صفر تبدیل میگردند

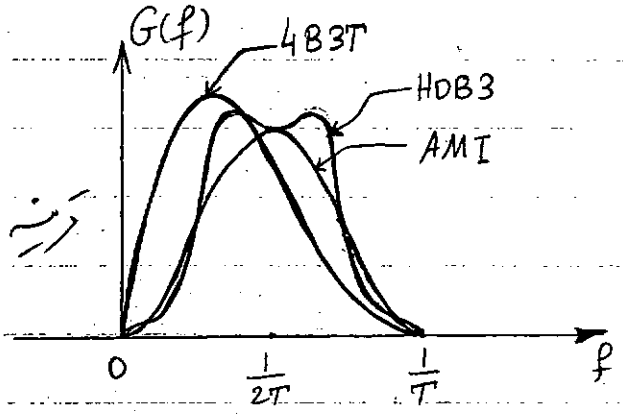
برای اینکه D کد از قانون AMI تبعیت نماید تولید مولفه DC نکنند بطور متوالی از دو کد (000D و 1000) استفاده میشود بقسمیکه D نسبت به یکدیگر تناوب ± 1 داشته باشند

مثال:

ارقام ورودی	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
ارقام کدشده	1	0	1	1	1	0	0	D	0	1	0	0	0	D	1	0	0	D	
دامنه	−	0	+	−	+	0	0	+	0	−	0	0	0	−	+	0	0	+	

نکات:

1) نظیر کدبندی AMI درواقع سیگنال ترنداری داریم.
2) دراینجا تشخیص خطا بسادگی AMI نیست.



(ج) کدبندی 4B3T: (4 Binary 3 Ternary)

دراین کدبندی چهار رقم باینداری به سه رقم ترناری تبدیل میشود.

با سه رقم ترناری 27 ترکیب مختلف داریم که ترکیب (000) استفاده نمیشود

$$\begin{cases} 4B \rightarrow 2^4 = 16 \\ 3T \rightarrow 3^3 = 27 \end{cases}$$

دراین کدبندی از 9 ترکیب بالاس $-0+ \; , \; +0- \; , \; +-0 \; , \; -+0 \; , \; 0+- \; , \; 0-+ \; , \; -0+ \; , \; +0- \; , \; 0-+$

و 10 زوج مکمل بتناوب استفاده میشود. $\begin{cases} 00+ \\ 00- \end{cases}$ و $\begin{cases} 0+0 \\ 0-0 \end{cases}$, $\begin{cases} +00 \\ -00 \end{cases}$, $\begin{cases} ++0 \\ --0 \end{cases}$, ...

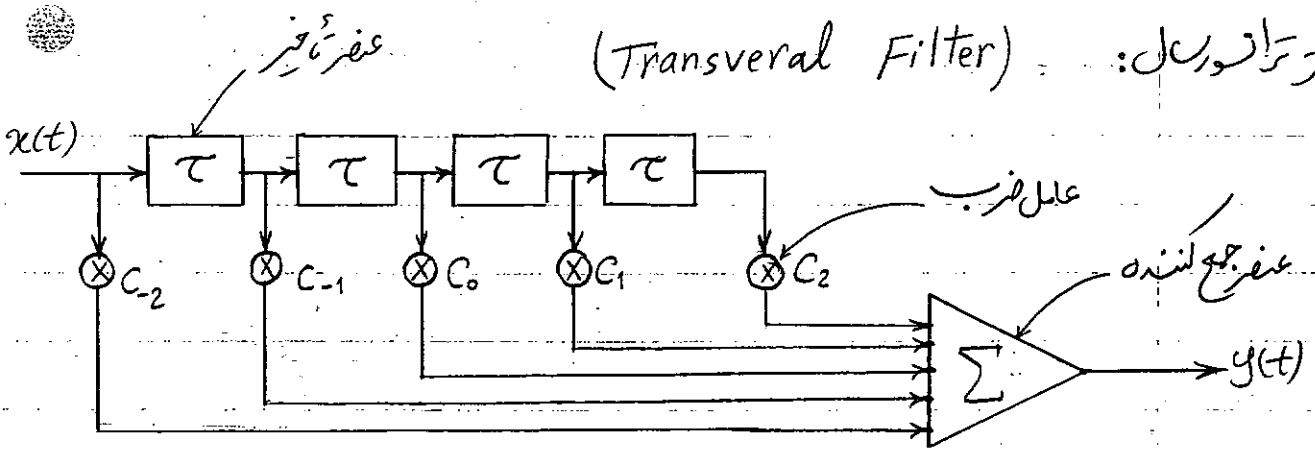
نکات:

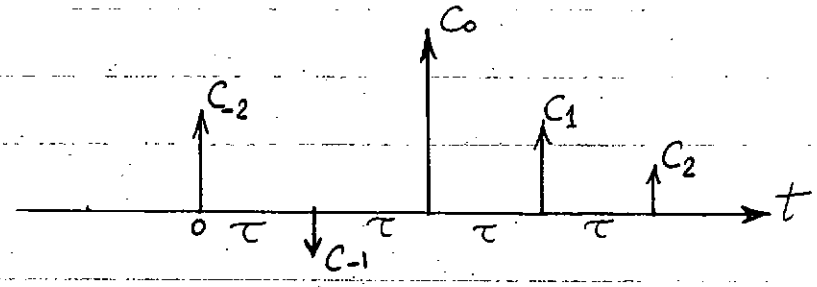
1) دراینجا نیز باینداری به ترناری تبدیل میشود ولذا مدار مفصلتر میشود و برای یک احتمال خطای مساوی باحالت باینداری قدرت بیشتری لازم است
2) کنترل خطا بسادگی AMI نیست.
3) سرعت ارقام به $\frac{3}{4}$ تقلیل پیدا میکند ولذا عرض باند کمتر لازم است و افت کانال کمتر میشود.
4) باتوجه مفصلتر بودن این کدبندی و باتوجه به نکته ۳ کاربرد این کدبندی برای فواصل دور و سرعتهای زیاد (شاهراههای مخابراتی Trunk Lines) است.
دوکدبندی قبلی برای فواصل کم بکار میروند

تنظیم شکل بالس

اینکار برای صفرکردن isi است و بوسیله فیلترهای سرانجام میگیرد و میتواند بصورت فیلترهای معمولی فشرده و یا فیلترهای ترانسورسال باشد.

(الف) فیلتر ترانسورسال: (Transveral Filter)





$f(t)$: پاسخ ضربهٔ فیلتر

- با صرفنظر کردن از تأخیرهای بالاتر از 2τ میتوان
- مبدأ را در وسط در نظر گرفت
- برای $2N$ عنصر تأخیر در حالت کلی داریم

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{+N} C_n \delta(t - n\tau)$$

معمولاً این فیلتر را در حوزهٔ زمان بررسی میکنند ولی میتوان در حوزهٔ فرکانس هم با تبدیل فوریه گرفتن از پاسخ ضربه فیلتر را بررسی کرد.

$$F(f) = \sum_{n=-N}^{+N} C_n e^{-j2\pi n f \tau} \qquad F(\lambda) = \sum_{n=-N}^{+N} C_n e^{-n\lambda\tau}$$

تحقق فیلتر علاوه بر دیجیتال بصورت نیمه آنالوگ و تمام آنالوگ هم ممکن است و بکار میرود.

عنصر	دیجیتال	آنالوگ
تأخیر	شیفت رجیستر	خطوط تأخیر فشرده - قطعه کابل کواکسیال - اخیراً CCD*
ضرب و جمع کننده	مدارهای لوجیک	تقویت کننده با چند ورودی

ویژگی
- مشخصهٔ زمانی را میتوان مستقیماً در حوزهٔ زمان تقریب کرد (بجای تقریب مشخصهٔ دامنه و فاز آن در حوزهٔ فرکانس)
- تنظیم فیلتر در حوزهٔ زمان بسادگی عملی است (با تغییر C_nها) و حتی میتوان آنرا تنظیم اتوماتیک کرد.

* Charge Coupled device

● این فیلترها معمولاً برای تولید شکل پالس دلخواه و یا تنظیم شکل پالس موجود بکار میروند.

(ب) تولید شکل پالس:

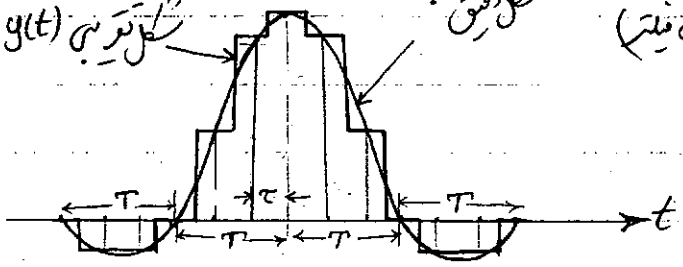
شکل پالس تولیدی در فرستنده معمولاً چهارگوش است و ضمن ارسال تغییر شکل میدهد (isi) و قبل از A/D در گیرنده باید آنرا به شکل پالس با یکویت (بدون isi) تبدیل کرد.

گاهی اوقات در فرستنده سیگنال PAM بصورت یک رشته پالسهای با یکویت (عرض باند محدود و isi=0) تولید میگردد که ضمن ارسال تغییر شکل نیافته و isi ایجاد نکند

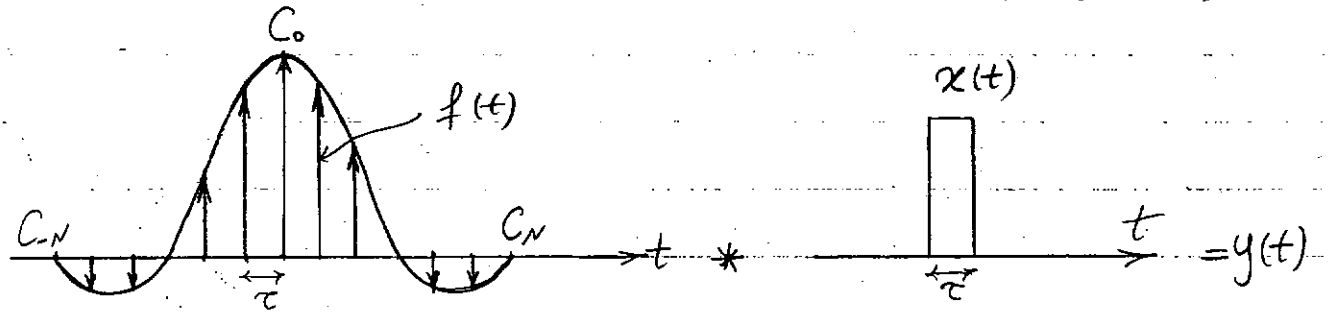
● تولید شکل پالس با یکویت { ۱- با استفاده از فیلترهای فشرده معمولی (درس فیلتر) ۲- با استفاده از فیلتر ترانسورسال

شکل دقیق :

شکل تقریبی y(t)



مسأله تقریب: تبدیل شکل پالس مفروض به فرم پله‌ای که عرض پله‌ها مساوی τ باشد.



● نکات:

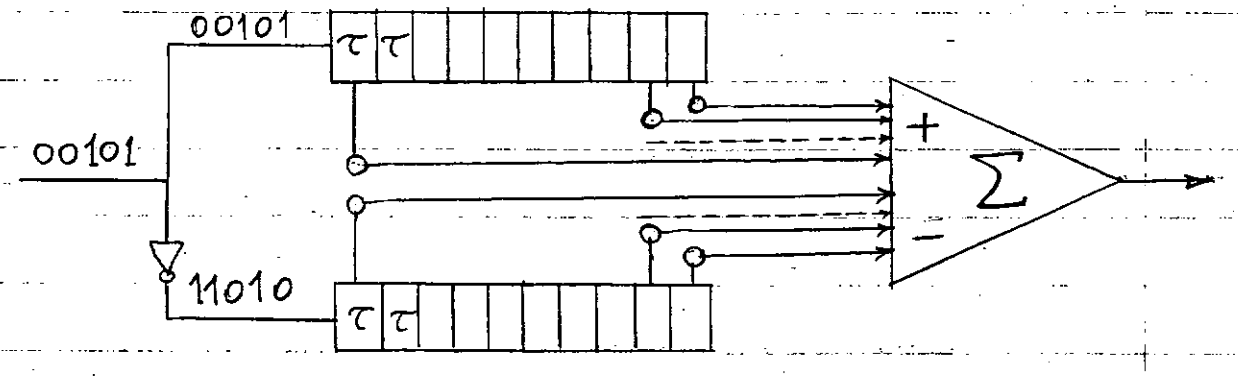
$$y(t) = f(t) * x(t)$$

1) برای دقت کافی باید $T \gg \tau$ باشد یعنی اولاً تعداد زیادی عناصر تأخیر لازم است و ضمناً سرعت پالس سمت فیلتر $(\frac{1}{\tau})$ باید چندین برابر سرعت پالس سمت سیستم PAM $(\frac{1}{T})$ باشد.

2) با توجه به اینکه ورودی x(t) چهارگوش است (باینری) و اینکه تعداد زیادی عنصر تأخیر لازم است معمولاً میتوان و بهتر است از شیفت رجیستر بعنوان عناصر تأخیر استفاده کرد. ولی ضرب و جمع کننده فیلتر معمولاً آنالوگ است.

● 3) با یک شیفت رجیستر و ضرب و جمع کننده فقط میتوان PAM باینری با ترازهای ۰ و a ایجاد کرد

برای PAM حتی برازه یا باینری با برازهای $\pm a$ بیش از یک شیفت رجیستر لازم است

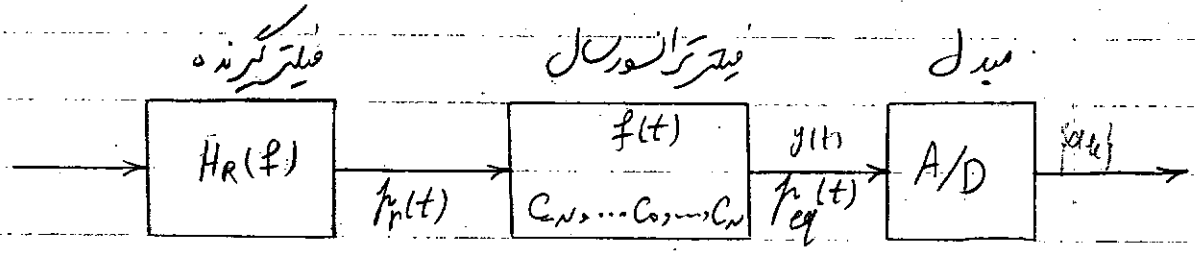


درحالت کلی برای هر برازه بجز برازه صفر یک شیفت رجیستر لازم است. برای غلبه بر تأخیر آنالوگ و یا اصولاً برای فیلتر فشرده مدار برای M برازه مفصلتر خواهد شد.

(ج) ترسیم شکل پالس:

اینکار برای از بین بردن ISI باقیمانده در سیستم است (باقیمانده بدلیل غیرایده‌آل بودن فیلترهای سیستم - عدم شناخت دقیق از مشخصه کانال - استفاده از کانال رندام)

روش ترسیم:
۱- استفاده از فیلترهای فشرده
۲- معمولاً از فیلتر ترانسورسال استفاده میشود. در این فیلترها مستقیماً مشخصه زمانی را کنترل می‌کنند و تنظیم آنها بسیار ساده است و میتواند بطور اتوماتیک انجام شود.



معمولاً تعداد عناصر تأخیر در این کاربرد خیلی کم است و تأخیر مناسب $\tau = T$ می‌باشد و اگر آ- فیلتر ترانسورسال آنالوگ است.

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} C_n \delta(t - n\tau) \quad , \quad h_{eq}(t) = h_R(t) * f(t)$$

$$\tau = T \Rightarrow h_{eq}(t) = \sum_{n=-N}^{N} C_n h_R(t - nT)$$

با $2N+1$ پارامتر C_n میتوان $2N+1$ نقطه از شکل پالس خروجی را تنظیم کرد.

$$f_{eq}(kT) = \sum_{-N}^{+N} C_n f_r[(k-n)T] = \begin{cases} 0 & k = \pm 1, \pm 2, \cdots \\ \text{مثبت} & k = 0 \end{cases}$$

معمولاً در عمل $N = 1$ یا 2 می باشد.

بدین ترتیب $(2N+1)$ معادله خطی برای $2N+1$ مجهول C_n بدست می آید.

راه حل:
- روش تحلیلی و محاسبه دقیق C_n (از نظر تئوریک مفید است)
- روش عددی تقریب و تکرار (از نظر عملی و بخصوص اتوماتیک کردن روش مفید است)

یک روش تقریب و تکرار:

فرض کنید که در مرحله‌ای هستیم که معادلات خطی فوق با خطاهای ε_k ارضاء شده باشند یعنی

$$\begin{cases} f_{eq}(0) = 1 + \varepsilon_0 & k = 0 \\ f_{eq}(kT) = \sum_{n=-N}^{+N} C_n f_r(k-n)T = \varepsilon_k & k = \pm 1, \cdots, \pm N \end{cases}$$

معمولاً $f_r(nT)$ بجز $f_r(0)$ اعداد کوچکی هستند و ضمناً C_0 بزرگ و بقیه C_n ها کوچک هستند ولذا

$$\begin{cases} C_0 f_r(kT) + C_k f_r(0) \approx \varepsilon_k & k = \pm 1, \cdots, \pm N \\ C_0 f_r(0) \approx 1 + \varepsilon_0 \end{cases}$$

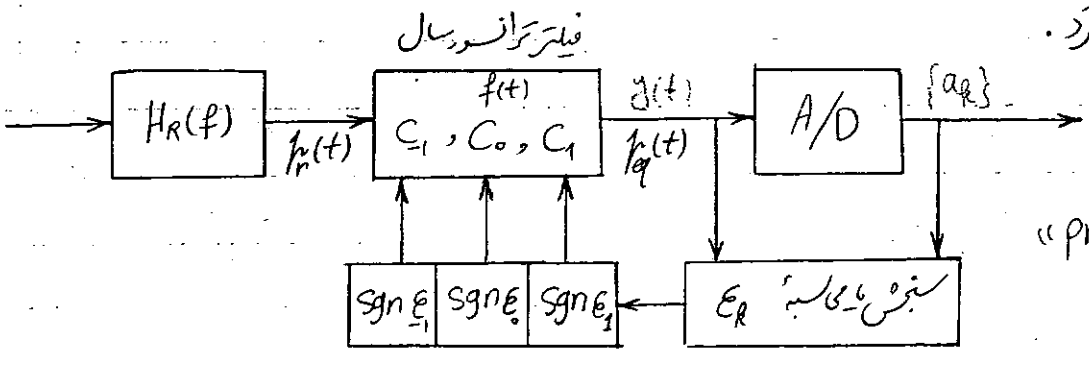
پس برای کم یا زیاد کردن ε_k ها میتوان C_k مربوطه را کم یا زیاد کرد.

$$C_k \text{ جدید} = C_k \text{ قدیم} + \begin{cases} -\Delta & \text{اگر } \varepsilon_k \text{ مثبت بود} \\ 0 & \text{" صفر " } \\ +\Delta & \text{" منفی " } \end{cases}$$

یا

$$\boxed{C_k \text{ جدید} = C_k \text{ قدیم} - \Delta(\operatorname{Sgn} \varepsilon_k)}$$

اینکار را میتوان اتوماتیک کرد.



«preset Equalizer»

دو روش برای تنظیم اتوماتیک کار میرود
۱- روش پیش تنظیم (Preset Equalizer)
۲- روش وفق پذیر (Adaptive Equalizer)

در روش پیش تنظیم در ابتدای مخابره تعدادی پالس با فواصل زیاد (چندین برابر T) ارسال میگردد لذا در ورودی A/D این پالسها با شکل $h_{eq}(t)$ و بدون تداخل با یکدیگر ظاهر میشوند که نمونه‌های آن e_k که را برای تنظیم C_kها میدهد پس از این تنظیم فیلتر ترانسورسال تا آخر مخابره تغییر نمی‌کند.

در روش وفق پذیر فیلتر در تمام لحظات مشغول تعیین شکل پالس است یعنی خود را با شرایط کانال وفق میدهد. در ابتدای ورودی A/D عبارت است از $y(t)=\sum_k a_k h_{eq}(t-kT)$ و خروجی A/D دامنه‌های پالس‌ها یعنی a_kها هستند. میتوان نشان داد که:

$$e_k=\frac{[y(mT)-a_m]\,a_{m-k}}{a^2}$$

یعنی e_k متناسب است با مقدار متوسط حاصلضرب خطا در دامنه یک پالس $[y(mT)-a_m]$ در دامنه پالس kام بعد از آن.
k پس از آن

۴- عناوین خاص

همزمانی پالس ساعت: (Clock Synchronization)

برای A/D کردن باید سیگنال PAM را در وسط پالس‌ها نمونه برداری کرد. پالس ساعت لازم برای اینکار باید همزمان با پالس ساعت فرستنده (مولد پالس) باشد.

روشهای همزمانی:

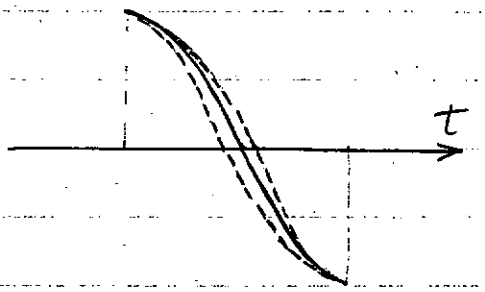
(الف) استفاده از اُسیلاتور محلی با ثبات:

این روش احتیاج به اُسیلاتور با ثبات زیاد در فرستنده و گیرنده دارد و باید آنها را گهگاه تنظیم کرد. کاربرد این روش در سرعت‌های بسیار کم یا بسیار زیاد است چون در سرعتهای خیلی کم فاصله تنظیم‌ها زیاد بوده و اینکار را میتوان بطور دستی انجام داد و در سرعتهای زیاد که مربوط به شبکه‌های وسیع می‌باشد معمولاً یک ساعت مادر در سیستم برای مصارف مختلف وجود دارد که تنظیم مکرر اُسیلاتورهای PAM نیز بوسیله آن انجام میشود

(ب) ارسال اطلاعات زمانی در یک کانال مجزا گانه:

● اطلاعات زمانی در یک باند فرکانس جداگانه و مستقلاً بصورت یک پایلوت ارسال میگردد و این احتیاج به قدرت و عرض باند جداگانه ای دارد.
کاربرد این روش برای سیستم هایی است که از نظر قدرت و عرض باند محدودیتی نداشته باشند.

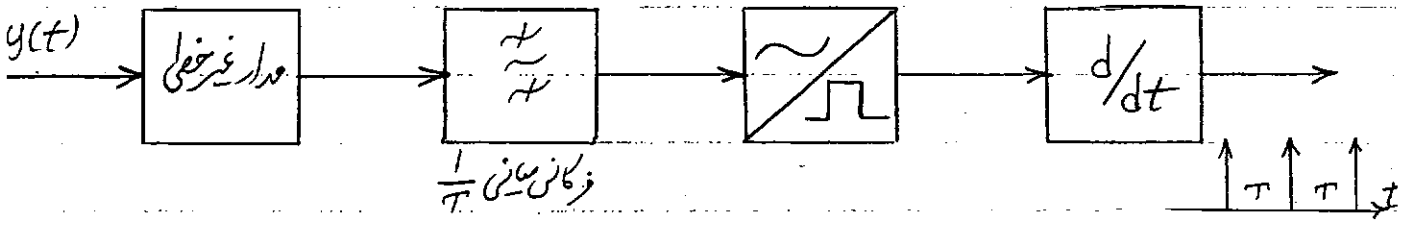
(ج) استخراج اطلاعات زمانی از خود سیگنال PAM :



«قسمتی از سیگنال PAM مربوط به تغییر وضعیت»

اطلاعات زمانی در محل صفرهای PAM وجود دارد. این صفرها در فاصله بین دو پالس مثبت و منفی رخ میدهد. بطور متوسط محل رخ دادن آن در وسط دو پالس است ولی در حوالی آن نقطه دارای تغییراتی است که به آن پراکندگی صفرها می گویند.

● برای اینکه بهتر بتوان اطلاعات زمانی را استخراج کرد لازم است که اولاً تغییر وضعیت زیادی وجود داشته باشد (استفاده از کدبندی برای اجتناب از صفرها یا یک های متوالی) ثانیاً پراکندگی محل صفرها کم باشد.



«ساده ترین روش استخراج اطلاعات زمانی»

●

در سیگنال PAM اطلاعات زمانی وجود دارد ولی مؤلفهٔ فرکانس $\frac{1}{T}$ معمولاً وجود ندارد.

$$y(t) = \sum_k a_k\, p(t-kT) \quad \overset{\text{طیف قدرت}}{\longleftrightarrow} \quad G_y(f) = G(f)\cdot |P(f)|^2$$

$$|P(f)|^2 = |P_g(f)|^2 \cdot |H_T\, H_c\, H_R|^2 \quad , \quad \text{معمولاً } p_g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow P_g(f) = T\,\text{Sinc}(fT)$$

$$G_y(f) = G(f)\cdot T^2\, \text{Sinc}^2(fT)\ |H_T H_c H_R|^2$$

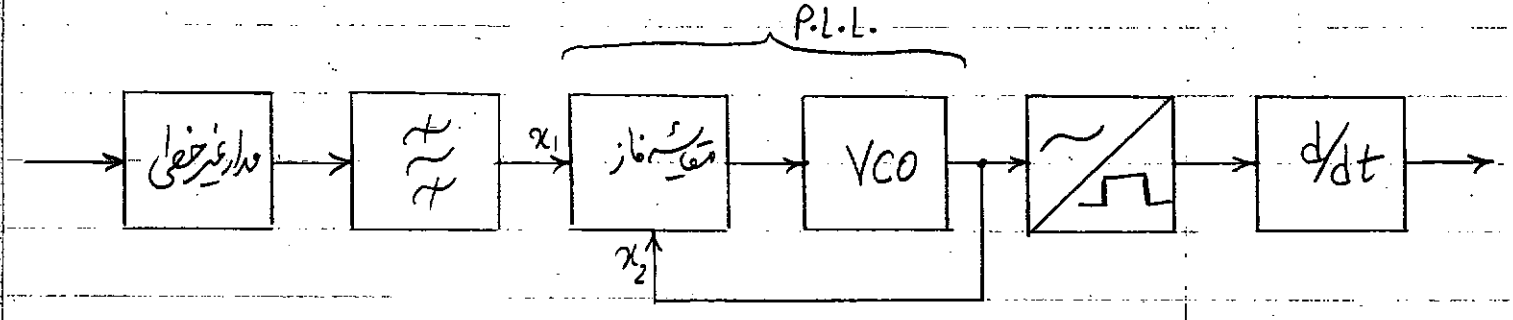
$$G_y\left(\tfrac{1}{T}\right) = G\left(\tfrac{1}{T}\right)\cdot T^2 \underbrace{\text{Sinc}^2(1)}_{0}\ \left|H_T H_c H_R\left(\tfrac{1}{T}\right)\right|^2 = 0$$

●

معمولاً حلف قدرت PAM ضربه‌ای $G(f)$ فاقد مؤلفهٔ $\frac{1}{T}$ است (اگر هم داشته باشد معمولاً بدلیل صفر شدن $|P|^2$ در این فرکانس حذف میگردد). لذا نمیتوان با مدار خطی مؤلفهٔ $\frac{1}{T}$ را ایجاد کرد ولی با مدار غیر خطی میتوان این کار را انجام داد و متداولترین آن یکسو کننده و مربع کننده و تولید پالس چهار گوش در محل صفرهای PAM است. فیلتر میان گذر معمولاً یک تانک LC با Q زیاد است و تبدیل سینوسی به مربعی یک تقویت زیاد و محدود کردن انجام میگیرد و با مشتق گرفتن بوسیلهٔ یک مدار مثلاً RC در محل جهش یک پالس با یک (clock) تولید میگردد

در بعضی کاربردها ممکن است ثبات پالس ساعت که بدین ترتیب تولید میگردد ناکافی باشد (بدلیل پراکندگی محل صفرها و هم چنین کم بودن تغییر وضعیتها) برای رفع این اشکال میتوان از یک سینتی‌ساتور محلی استفاده نمود و فرکانس آنرا با فرکانس مؤلفهٔ استخراجی کنترل کرد ولی ثبت زمانی مربوط به این کار را به اندازهٔ کافی بزرگ در نظر گرفت تا فرکانس سینتی‌ساتور با مقدار متوسط فرکانس مؤلفهٔ $\frac{1}{T}$ یکسان شود.

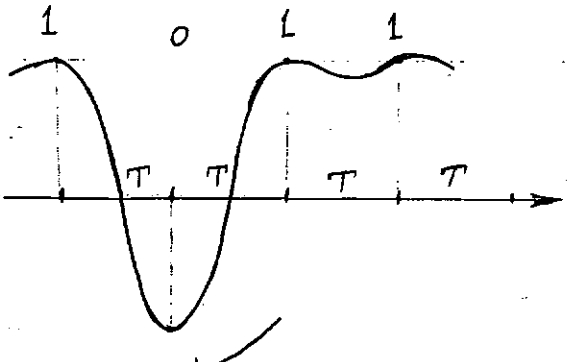
مدار مربوطه را P.L.L. گویند «phase locked loop»



VCO ≡ Voltage Control oscilator

P.L.L. فوق از نوع آنالوگ است که با موج سینوسی کار می‌کند میتوان از P.L.L. دیجیتال که بجای سینوسی با موج چهار گوش پریود یک کار می‌کند نیز استفاده کرد.

نمودار چشم (Eye Diagram)

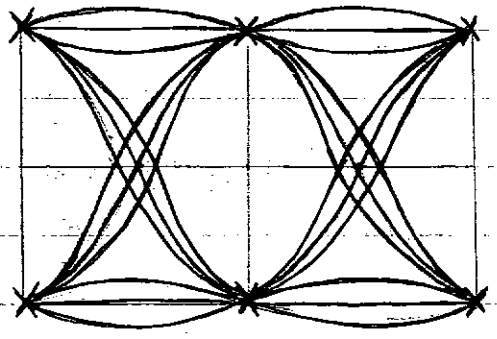


اسیلسکوپ در هر جاروب قسمتی از شکل موج را رسم می‌کند و در جاروب بعدی بقیهٔ شکل موج را دوباره از ابتدای صفحهٔ اسیلسکوپ ادامه میدهد برای سیگنال پریود یک میتوان آنرا طوری تنظیم کرد که قطعات مختلف شکل موج رسم شده روی هم بیافتند و یک منحنی در صفحهٔ

« قسمتی از PAM در ورودی A/D که دامنهٔ چهار رقم را نشان میدهد »

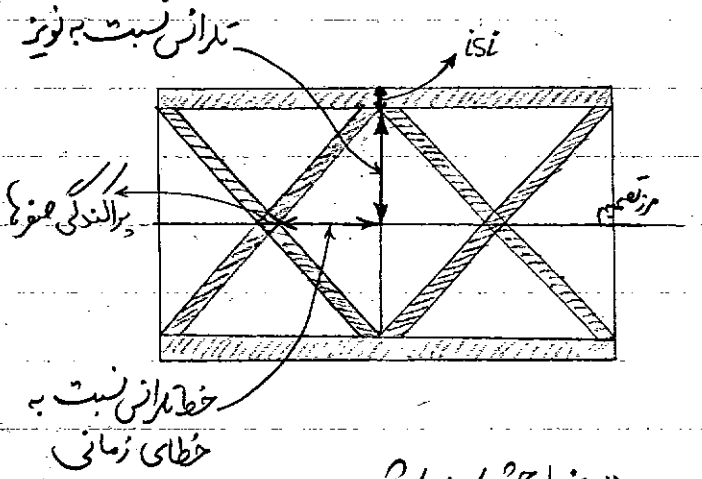
● اُسیلسکوپ ظاهر شود و در مورد سیگنال غیر پریودیک اُسیلسکوپ یک دسته منحنی رسم می‌کند که قطعات متوالی سیگنال می‌باشند.

فرض کنید زمان هر جارو بمقدار $2T$ (سرعت جارو $\frac{1}{2T} = \frac{f_s}{2}$) تنظیم شده باشد و سیگنال موجود در ورودی A/D را به اُسیلسکوپ وصل کنیم.



به این شکل که شبیه به چشم انسان دارد و برای ارزیابی کیفیت سیستم PAM استفاده میشود نمودار چشم گویند.

● اطلاعاتی که میتوان از نمودار چشم گرفت در محور دارد.



(الف) محور قائم محل ایده‌آل برای نمونه برداری را نشان میدهد

میزان بسته بودن چشم روی این محور مقدار isi را نشان میدهد و مقدار باز بودن چشم مقدار تداخل نسبت به نویز را نشان میدهد.

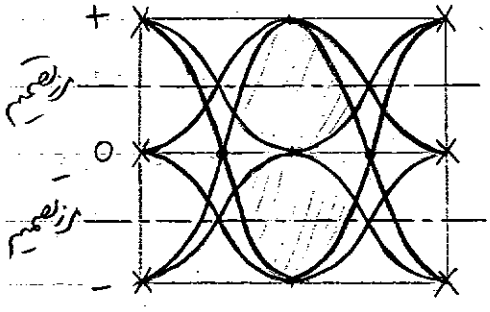
(ب) محور افقی که محور تقارن چشم است مرز تصمیم ایده‌آل را نشان میدهد

« نمودار چشم ساده شده »

● میزان بسته بودن چشم روی محور افقی پراکندگی صفرها را نشان میدهد و میزان باز بودن چشم روی این محور تداخل نسبت به خطای زمانی را نشان میدهد.

نکات:

1) در اینجا زمان حداکثر $2T$ فرض شده است برای زمان حداکثر NT تعداد $(N-1)$ چشم کامل و دو چشم نیمه در محور افقی تولید میگردد



2) برای سیگنال M تراز در جهت قائم $(M-1)$ چشم تشکیل میگردد.

●

مبحث چهارم : مدولاسیونهای کاریری دیجیتال

عناوین:

	صفحه
1) آشکارسازی پتیم پالس	(55-60)
2) سیستم های باینری	(60 - 68)
3) مدولاسیون های آنالوگ خطی	(68-70)
4) مدولاسیون های کاریر M تایی	(70 - 83)
5) مقایسه و کاربرد مدولاسیونهای مختلف	(83-85)

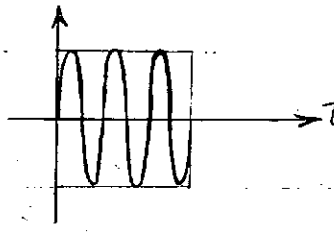
کلیات:

دو مورد مهم برای استفاده از سیگنال کاریری بجای سیگنال باند پایه عبارتند از:

۱) ارسال سیگنال در کانالهایی که برای فرکانس پائین مناسب نیستند مثل کانال رادیویی

۲) برای ارسال همزمان چند سیگنال (FDM) در کانالهای رادیویی، کابل کواکس و غیره

روشهای تولید سیگنال کاریری:
۱) استفاده از پالس های RF (یا کاریر) برای ارسال مختلف (ASK و PSK و FSK)
۲) تولید سیگنال باند پایه با عرض باند محدود و مدولاسیون آنالوگ آن

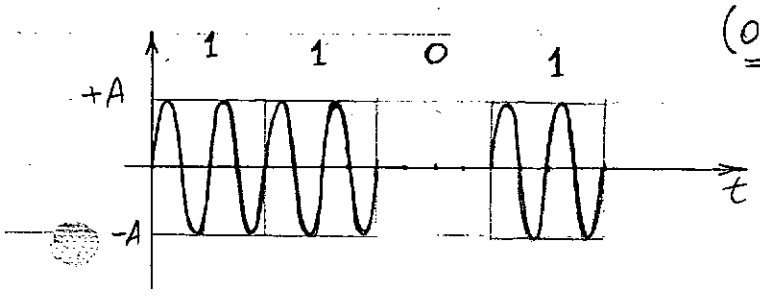


روش 1) در این روش معمولاً از پالس RF سینوسی استفاده میشود

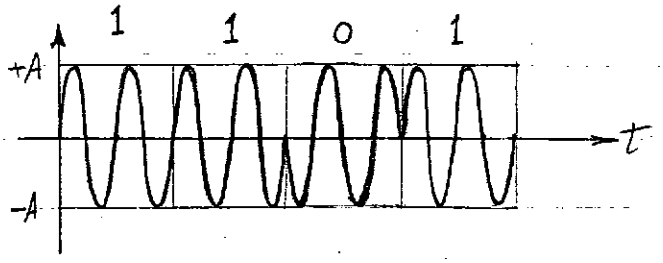
میتوان برای ارسال مختلف از دامنه ها، فازها و یا فرکانسهای مختلف استفاده نمود

(Freqency Shift Keying ، Phase Shift Keying ، Amplitude Shift Keying)

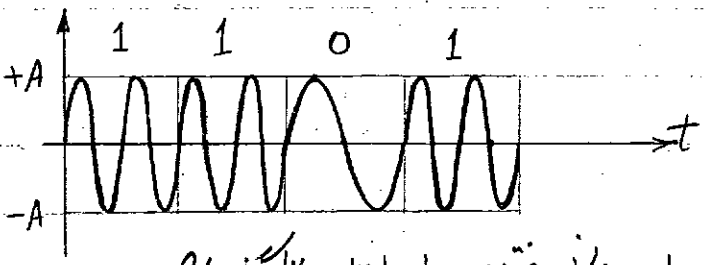
مثال 1) ASK باینری = OOK (on off keying)
با دامنه های A+ (برای رقم 1) و 0 (برای رقم صفر)



مثال 2) PSK باینری با فازهای ۰ و π



مثال 3) FSK باینری با فرکانسهای $f_c \pm f_d$



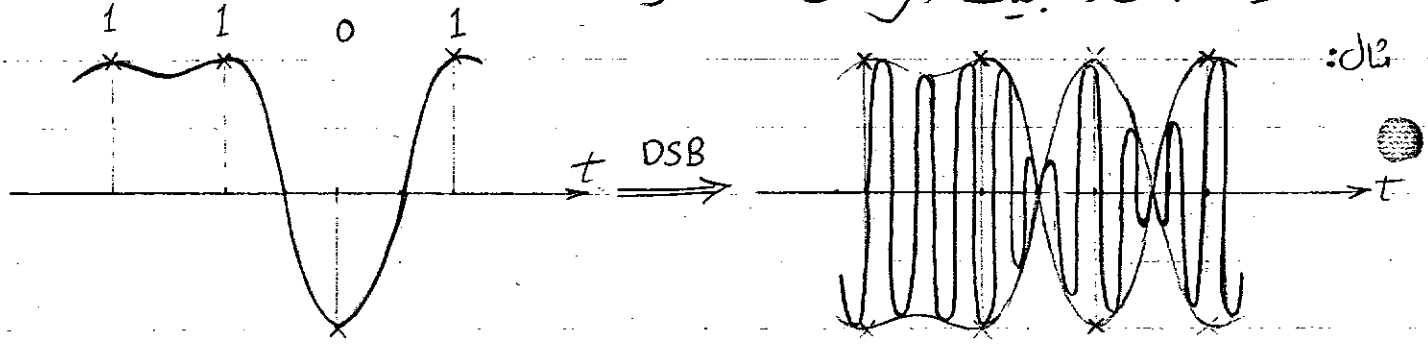
نکات:

1) در حالت M تایی نیز ممکن است M دامنه، M فاز و یا M فرکانس مختلف برای ارسال در نظر گرفته شود.

2) نحوهٔ تولید سادهای دارند ولی در عوض عرض باند نسبتاً زیادی نیاز دارند (با توجه به گسستگی در حوزهٔ زمان)

3) در مدولاسیون FSK و PSK پریود ثابتی دارند ولذا در مقابل اعوجاج غیرخطی مقاوم هستند در ASK پریود ثابت نیست ولی در عوض آشکارسازی سادهای دارد.

روش ۲) مفصلتر از روش اوّل است ولی در عوض میتواند عرض باند محدودی داشته باشد. معمولاً از مدولاسیونهای خطی استفاده میشود تا بتوان از راحتیت عرض باند آن استفاده کرد.



مثال:

از SSB بدلیل وجود مؤلفه‌های فرکانس پائین و DC نمیتوان استفاده کرد

اگر از VSB استفاده شود تقریباً همان عرض باند PAM لازم است که میتواند تا مقدار $\frac{1}{2T}$ باشد.

1) آشکارسازی دیتکتیم پالس

هرجا که ارسال پالس‌ها مطرح است (مثلاً مخابرات دیجیتال و یا در رادار) آشکارسازی پالس مطرح میگردد.

در اینجا هدف تولید دقیق شکل پالس نیست (برخلاف آشکارسازی سیگنالهای آنالوگ) بلکه هدف تشخیص وجود پالس و یا تمایز بین پالس های مختلف است.

دو روش زیر معادل یکدیگر عبارتند از ۱) فیلتر منطبق ۲) مدار همبستگی

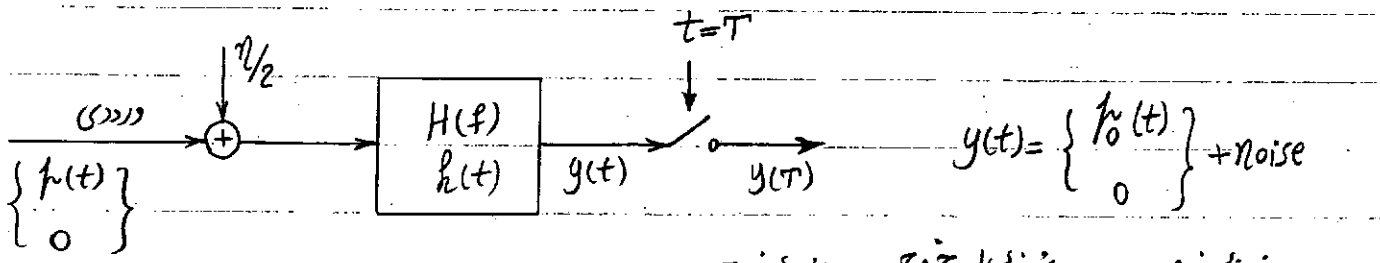
فیلتر منطبق (Matched Filter)

(الف) تشخیص وجود پالس:

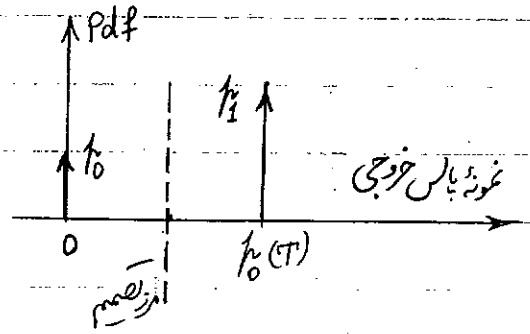
سیگنالی شامل نویز سفید $\eta/2$ دریافت شده است و تشخیص اینکه در آن پالس $h(t)$ وجود دارد یا خیر مطرح است.

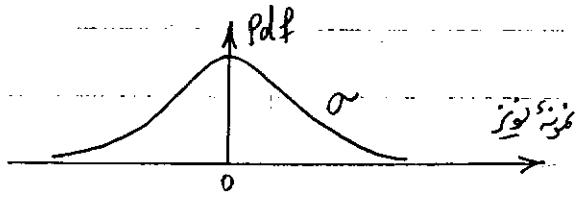
فرض کنید $h(t)$ محدود به 0 و T باشد و انرژی آن محدود و E باشد.

$$E=\int_0^T h^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|P(f)|^2\,df$$



نمونهٔ نویز + نمونهٔ پالس خروجی = نمونهٔ خروجی





بهترین فیلتر فیلتری است که این احتمال خطا را مینیمم کند یا به عبارت دیگر $\frac{h_0^2(T)}{4\sigma^2}$ را ماکزیمم کند

احتمال خطا $P_e=Q\left(\frac{h_0(T)}{2\sigma}\right)=Q\sqrt{\frac{h_0^2(T)}{4\sigma^2}}$

نسبت فوق در واقع سیگنال به نویز لحظه‌ای در $t=T$ می‌باشد

$$h_0(t)\longleftrightarrow P_0(f)=P(f)\cdot H(f)$$

$$h_0(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_0(f)e^{j2\pi ft}\,df \quad\Rightarrow\quad h_0(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_0(f)e^{j2\pi fT}\,df$$

$$\frac{h_0^2(T)}{\sigma^2} = \frac{2\left[\int_{-\infty}^{+\infty} P(f)H(f)e^{j2\pi fT}\,df\right]^2}{\eta\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2\,df} \quad , \quad \sigma^2 = \eta/2\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2\,df$$

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|P(f)|^2\,df = \int_{-\infty}^{+\infty}|P(f)\,e^{j2\pi fT}|^2\,df$$

$$\frac{h_0^2(T)}{\sigma^2} = \frac{2E}{\eta}\times\frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}P(f)e^{j2\pi fT}H(f)\,df\right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}|P(f)\,e^{j2\pi fT}|^2\,df\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2\,df}$$

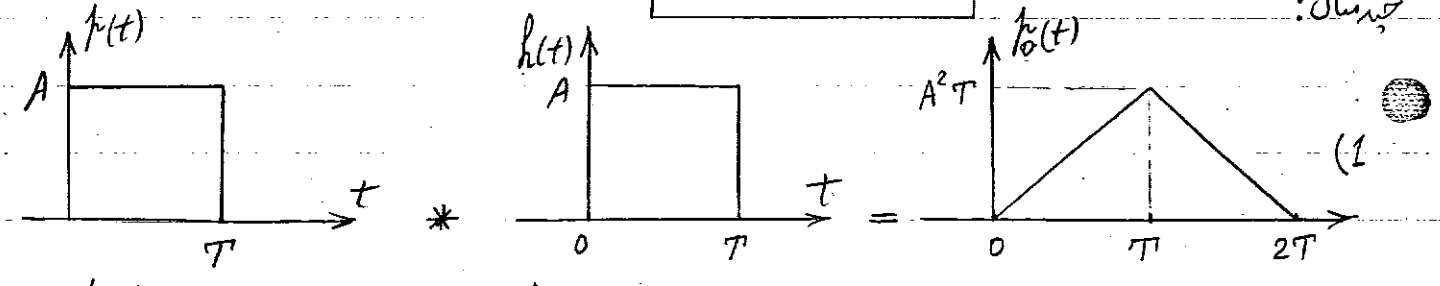
$$\frac{h_0^2(T)}{\sigma^2}=\frac{2E}{\eta}$$ طبق نامساوی شوارتز ماکزیمم نسبت فوق برابر $\frac{2E}{\eta}$ می‌شود

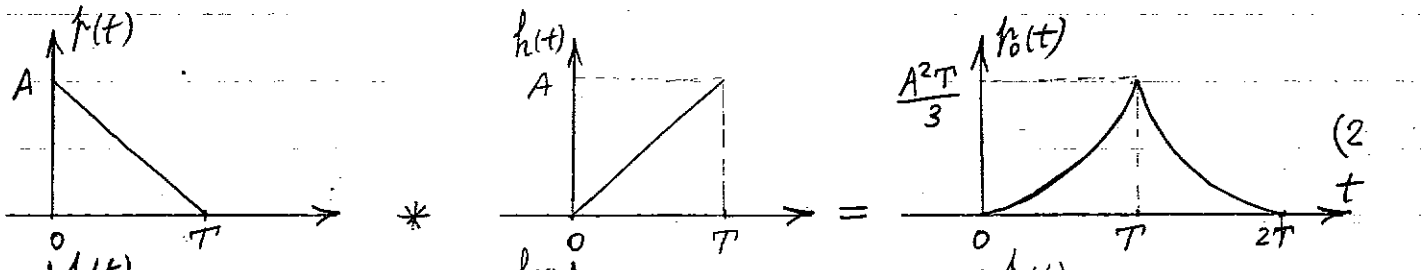
برازاد: $$H(f)=\left[P(f)\,e^{j2\pi fT}\right]^* = P^*(f)\,e^{-j2\pi fT}$$

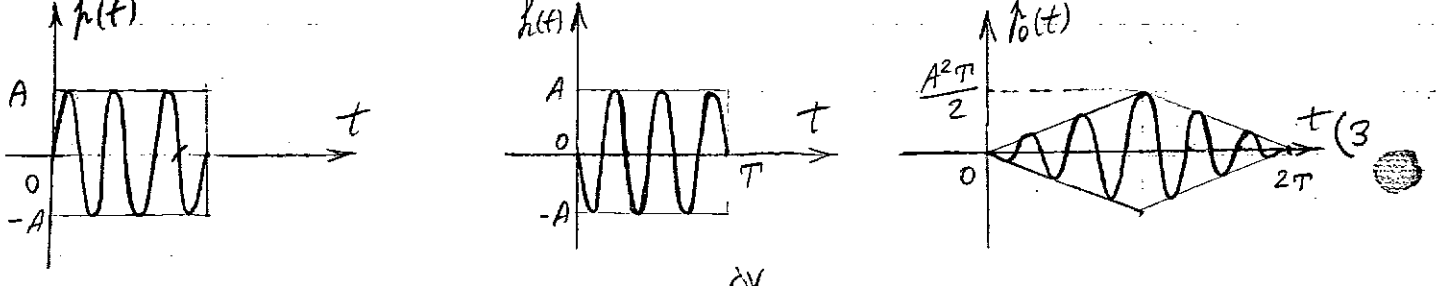
$H(f)$ از نظر دامنه همان دامنهٔ $P(f)$ را دارد ولی فاز آن قرینهٔ فاز پالس بعلاوهٔ یک فاز خطی می‌باشد.

قرینهٔ آینه‌ای و با تأخیر T $\quad h(t)=h(T-t)$ $\quad h(t)=h\left(\frac{t-T}{-1}\right)$

چند مثال:







$$h_0(t) = h(t) * h(t) = h(t) * h(T-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)\, h(T-u)\, du$$

$$h_0(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(T-u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t)\, dt = E$$

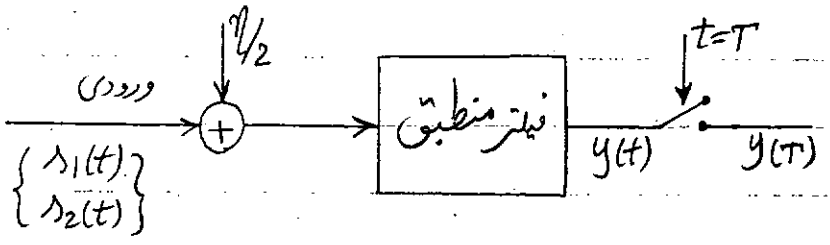
$$\sigma^2 = \eta/2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2\, df = \eta/2 \int_{-\infty}^{+\infty} |P^*(f)\, e^{j2\pi f T}|^2\, df = \eta/2 \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2\, df = \eta/2\, E$$

$$P_{e\min} = Q\sqrt{\frac{h_0^2(T)}{4\sigma^2}} = Q\sqrt{\frac{E^2}{4 \times \eta/2\, E}} = Q\sqrt{\frac{E}{2\eta}} \qquad \boxed{P_{e\min} = Q\sqrt{\frac{E}{2\eta}}}$$

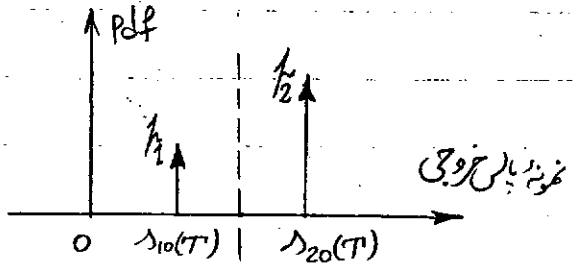
(ب) تمایز بین دو پالس:

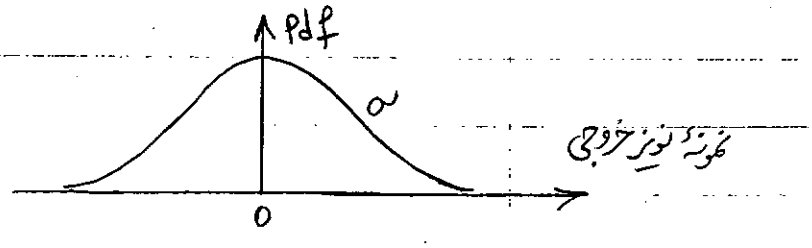
سیگنال حاصل نویز سفید $\eta/2$ با pdf گوسی دریافت شده است. مسأله این است که کدام یک از دو پالس مورد انتظار $s_1(t)$ و $s_2(t)$ همراه آن است.

فرض اینکه $s_1(t)$ و $s_2(t)$ هر دو محدود به فاصله زمانی 0 تا T با انرژی‌های E_1 و E_2 باشند.



$$y(t) = \begin{Bmatrix} s_{10}(t) \\ s_{20}(t) \end{Bmatrix} + \text{noise}$$





مرز تصمیم — نمونه $y(T) = \begin{Bmatrix} s_{10}(T) \\ s_{20}(T) \end{Bmatrix}$ + نمونه نویز

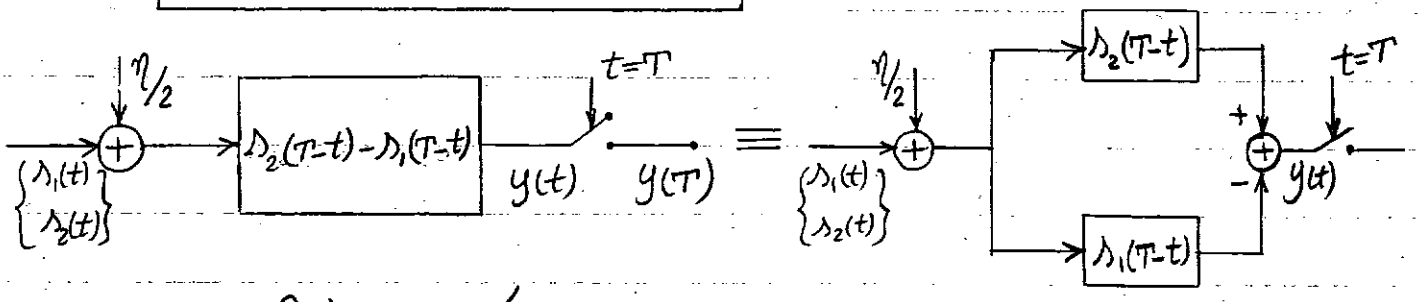
نمونه پالس خروجی

$$P_e = Q\left(\frac{s_{20}(T) - s_{10}(T)}{2\sigma}\right) \quad , \quad h(t) = s_2(t) - s_1(t) \Rightarrow P_e = Q\left(\frac{h_0(T)}{2\sigma}\right)$$

نظر مسأله قبل برای مینیمم شدن P_e باید فیلتر $h(t)$ منطبق باشد یعنی با اختلاف $s_2(t)$ و $s_1(t)$

$$h(t) = s_2(T-t) - s_1(T-t)$$

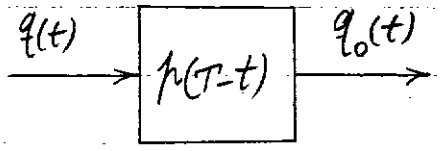
پاسخ ضربه فیلتر منطبق



نظیر حالت قبل $P_e = Q\sqrt{\frac{E}{2\eta}}$ ولی در اینجا انرژی اختلاف دو سیگنال باید منظور شود

$$E = \int_0^T [s_2(t) - s_1(t)]^2 dt$$

مدار همبستگی (Correlator)



در کاربردهای مورد نظر ما خروجی فیلتر در لحظه $t=T$ مورد نظر است

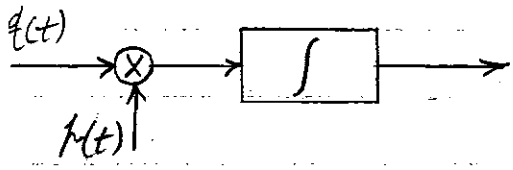
$$q_0(t) = q(t) * h(T-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t-u)\, h(T-u)\, du$$

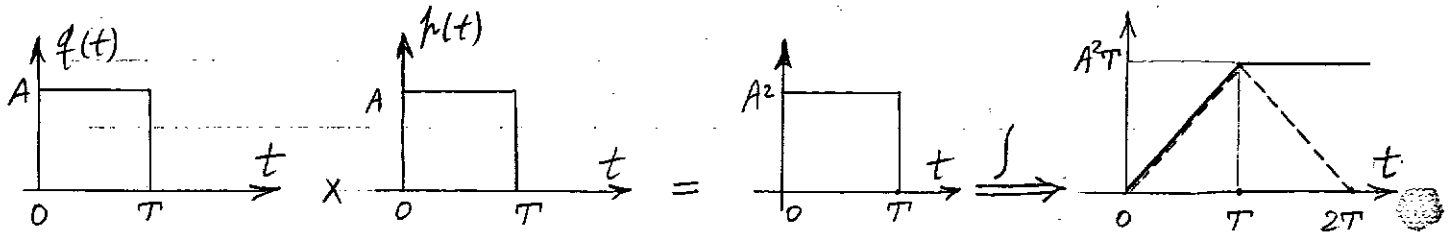
$$q_0(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(T-u)\, h(T-u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t)\, h(t)\, dt = \langle q(t)\, h(t) \rangle$$

ضرب داخلی دو پالس

$q_0(T) = R_{qh}(0)$ همبستگی بین q و h با تأخیر صفر

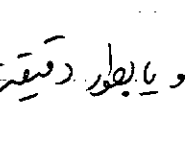
همین مقدار $q_0(T)$ را میتوان بطریق زیر نیز بدست آورد.

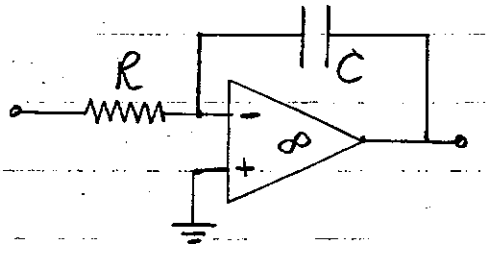




خروجی فیلتر منطبق در شکل صفحهٔ قبل با خط چین نمایش داده شده است.

نکات:

1) انتگرالتور میتواند با یک مدار سادهٔ RC () و یا بطور دقیقتر بکمک یک OP ساخته شود.



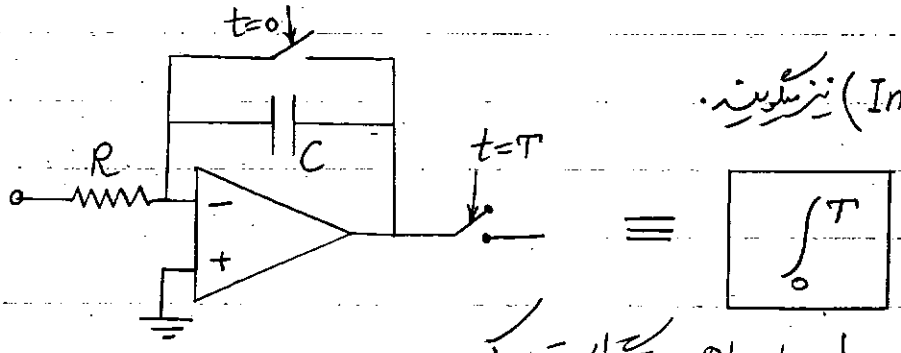
2) بطور تئوریک انتگرالتور میتواند بین $(+\infty$ تا $-\infty)$ باشد ولی

بدلیل محدود بودن $h(t)$ بین $t=0$ تا $t=T$ ضمناً میتواند $\int_0^T$ باشد

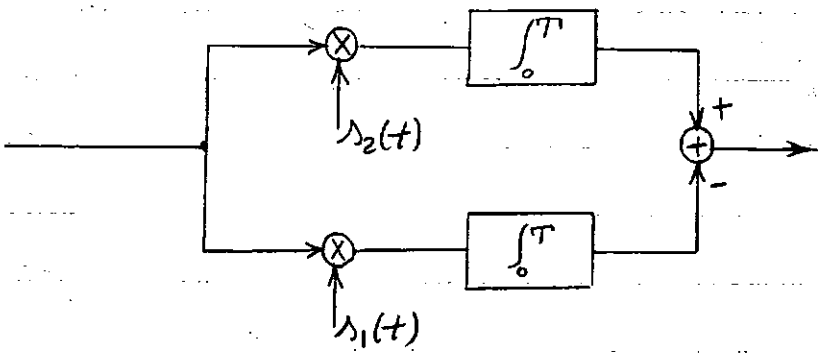
در عمل از حدود $\int_0^T$ استفاده میشود تا نویز و offset قبل از $t=0$ باعث تولید خروجی نشوند و ضمناً

قبل از آنکه خروجی انتگرالتور بدلیل دریافت خازن تغییر کند در لحظهٔ $t=T$ نمونه برداری میکنیم

این مدار را (Integrate and Dump) نیز مینامند.



3) در حالت نویز بین دو پالس نیز البته میتوان از مدار همبستگی استفاده کرد.



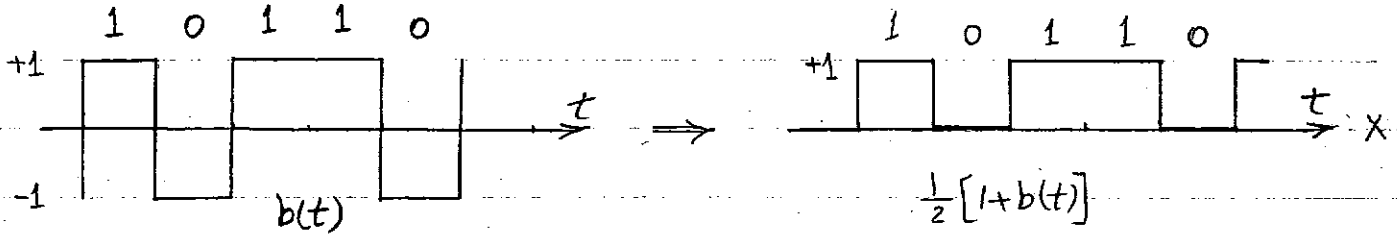
۲- سیستم های باینری

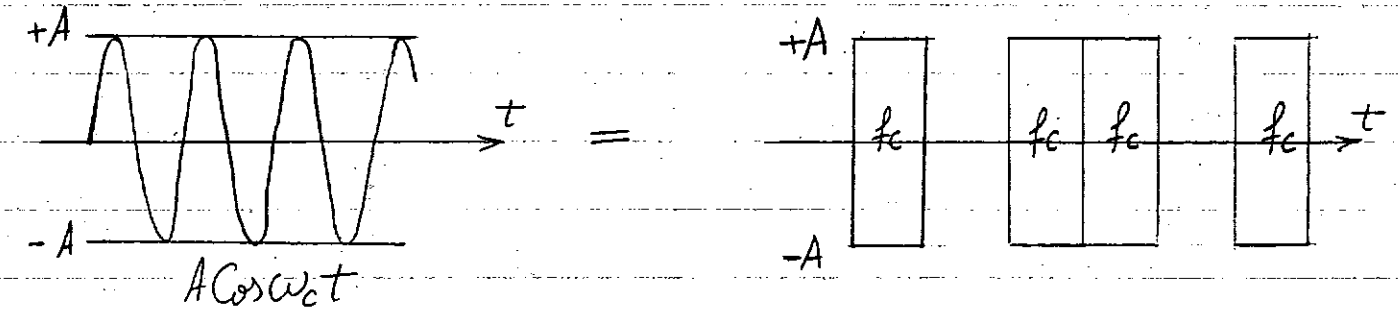
مدولاسیون ASK (یا OOK)

(الف) تجزیه و تحلیل سیگنال ASK:

در ASK داریم $0 \le t \le T$ { برای رقم صفر $s_1(t)=0$ ، برای رقم یک $s_2(t)=A\cos\omega_c t$

$$s(t)=\underbrace{\frac{1}{2}[1+b(t)]}_{\text{PAM با دامنه صفر و یک}} \times A\cos\omega_c t \quad , \quad b(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, rect\left(\frac{t-kT}{T}\right) \quad , \quad a_k=\pm 1$$





در واقع OOK در واقع سیگنال AM است که PAM آن $b(t)$ ی باشد

$$s(t)=\frac{A}{2}\cos\omega_c t+\frac{A}{2}b(t)\cos\omega_c t$$

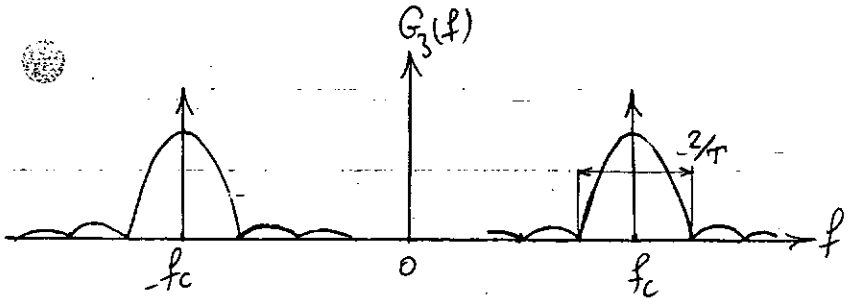
طیف قدرت $G_s(f)=\frac{A^2}{4}\left(\frac{\delta(f-f_c)}{4}+\frac{\delta(f+f_c)}{4}\right)+A^2/4\left[\frac{G_b(f-f_c)}{4}+\frac{G_b(f+f_c)}{4}\right]$

$G_b(f)=G(f)\cdot|P(f)|^2$ $G(f)$: طیف قدرت PAM ضربه‌ای با دامنه‌ی ± 1

اگر احتمال صفر و یک مساوی باشد و ارقام مستقل از هم صادر شوند $G(f)=\frac{\overline{a^2}}{T}=\frac{1^2\times\frac{1}{2}+(-1)^2\times\frac{1}{2}}{T}=\frac{1}{T}$

$$p(t)=rect\left(\frac{t}{T}\right) \Longleftrightarrow P(f)=T\,Sinc(fT)$$

$$G_s(f)=\frac{A^2}{16}\left\{\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)+T\,Sinc^2(f-f_c)T+T\,Sinc^2(f+f_c)T\right\}$$



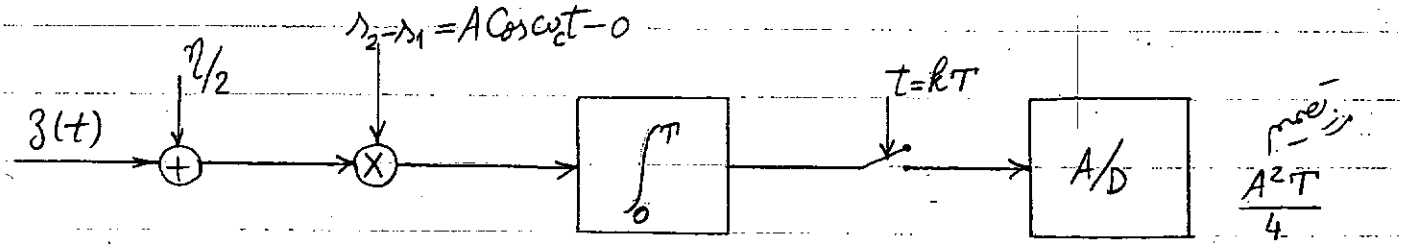
عرض باند تئوریک بی نهایت است ولی اگر عرض لوب اصلی بعنوان عرض باند تئوریک شود $B = \frac{2}{T}$

(ب) آشکارسازی و احتمال خطا:

1) آشکارسازی همزمان (Coherent Detection)

منظور آشکارسازی با استفاده از یک کاربر همزمان با کاربر فرستنده است. این کاربر درخود Ask وجود دارد و براحتی استخراج میگردد.

چون کاربر در دست است درواقع شکل پالس ارسالی را دقیقاً میدانیم ولذا میتوان از روش انتگرالگیر آشکارسازی پالس (مدار همبستگی) استفاده کرد.



تفاوت این مدار با مداری که قبلاً برای تمایز دو پالس داشتیم این است که

اولاً: بجای $s_1 = s_2$ محدود به زمان T سیگنال $A\cos\omega_c t$ بطور دائم در ورودی ضرب میگردد.

ثانیاً: می بایستی هر T ثانیه یکبار مدار را Reset کرد (بحالت اولیه برگرداند) یعنی مخزن انتگرالگیر را در لحظات kT^+ دشارژ کرد.

احتمال خطا: E: انرژی اختلاف دو پالس ،

$$P_e = Q\sqrt{\frac{E}{2\eta}}$$

$$E = \int_0^T (s_2(t) - s_1(t))^2 dt = \int_0^T A^2\cos^2\omega_c t\, dt = \frac{A^2}{2}\int_0^T (1+\cos 4\pi f_c t)\, dt$$

$$E = \frac{A^2}{2}\left(T + \frac{\sin 4\pi f_c T}{4\pi f_c}\right) = \frac{A^2T}{2}\left[1 + \underbrace{\text{Sinc}(4\pi f_c T)}_{\text{کمتر یا صفر}}\right] = \frac{A^2T}{2}$$

$$P_e = Q\sqrt{\frac{A^2T}{4\eta}}$$

قدرت دریافتی $S_R = \frac{1}{2}(A^2/2) + \frac{1}{2}(0) = \frac{A^2}{4}$

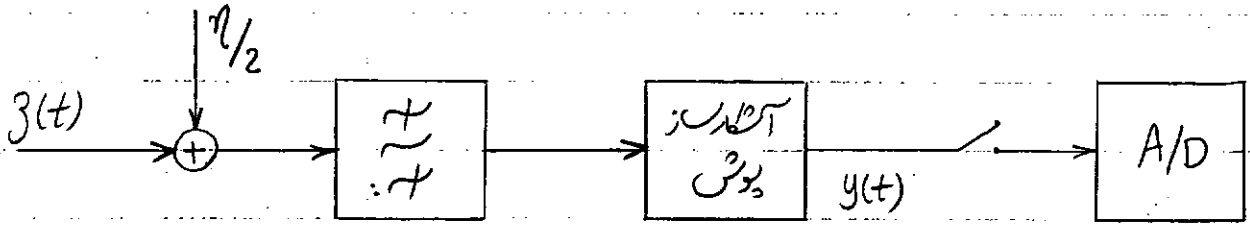
(احتمال صدور یک) (احتمال صدور صفر)

$$P_e = Q\sqrt{\frac{S_R T}{\eta}} \qquad P_e = 10^{-4} \Longrightarrow \frac{S_R T}{\eta} = 11.4\ \text{dB}$$

$$S_R = \frac{A^2}{4}$$

نسبت به PAM ایدال 3-dB قدرت بیشتر لازم دارد.

۲- آشکارسازی پوش (Envelope Detection)



برای حذف نویز خارج باند

مرز تصمیم $A/2$

$$y(t) = \{\text{چهارگوش (دامنه‌ی A و 0) PAM} + \text{noise}\}$$

محاسبه‌ی احتمال خطا نظیر سیستم‌های PAM می‌باشد ولی در اینجا بدلیل وجود مدار غیرخطی (آشکارساز پوش) pdf نویز خروجی اولاً به رقم ارسال شده (0 و 1) بستگی دارد و در زمانی گوسی باقی نمی‌ماند و محاسبه‌ی نسبتاً مفصلی دارد

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{S_R T}{4\eta}}$$

$$S_R = \frac{A^2}{4}$$

(در کتاب Shanmugam محاسبه شده است)

$$P_e = 10^{-4} \Longrightarrow \frac{S_R T}{\eta} = 15.3\ \text{dB}$$

نسبت به آشکارسازی همزمان حدود 4 دسیبل قدرت بیشتری می‌خواهد. (قدرت دو نیم برابر)

(ج) نکات:

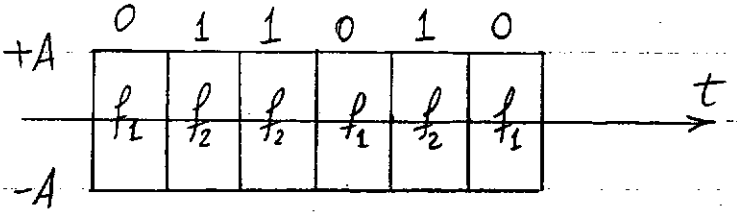
1) سادگی سیستم بدلیل آشکارسازی پوش

2) مرز تصمیم در این سیستم بستگی به A یعنی قدرت دریافتی دارد ولذا سیستم نسبت به تغییرات افت کانال (ناشی از فیدینگ) حساس است.

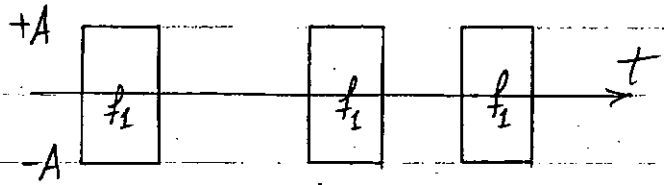
استفاده از AGC برای تنظیم اتوماتیک مرز تصمیم مزیت سادگی سیستم را کم می‌کند

مدولاسیون FSK باینری

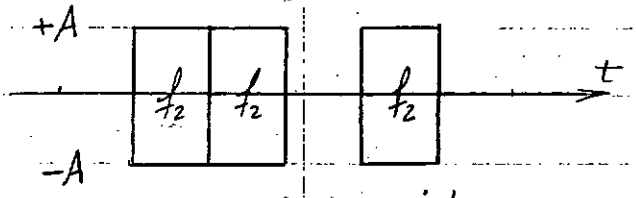
(الف) تجزیه و تحلیل سیگنال FSK



$$\begin{cases} 0 \Rightarrow s_1 = A\cos\omega_1 t \\ 1 \Rightarrow s_2 = A\cos\omega_2 t \end{cases}$$



OOK با فرکانس f_1 برای مکمل ارقام



OOK با فرکانس f_2 برای خود ارقام

$$s(t) = \frac{A}{2}[1+b(t)]\cos\omega_2 t + A/2\,[1-b(t)]\cos\omega_1 t$$

$$b(t) = \sum_k a_k \,\text{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right), \quad a_k = \pm 1$$

$$G_s(f) = A^2/16\left\{\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)+\delta(f-f_2)+\delta(f+f_2)+T\,\text{Sinc}^2 T(f-f_1)+\right.$$

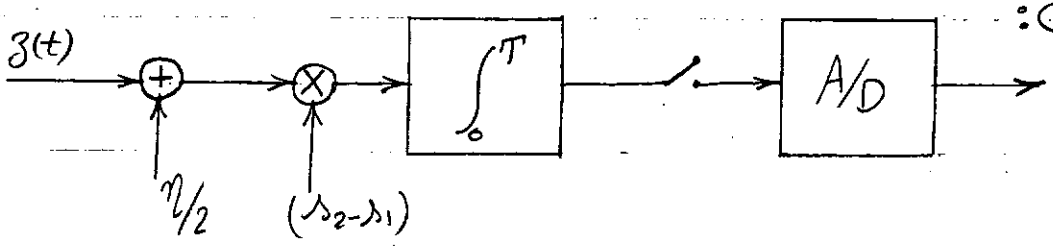
$$\left.+T\,\text{Sinc}^2 T(f+f_1)+T\,\text{Sinc}^2 T(f-f_2)+T\,\text{Sinc}^2 T(f+f_2)\right\}$$

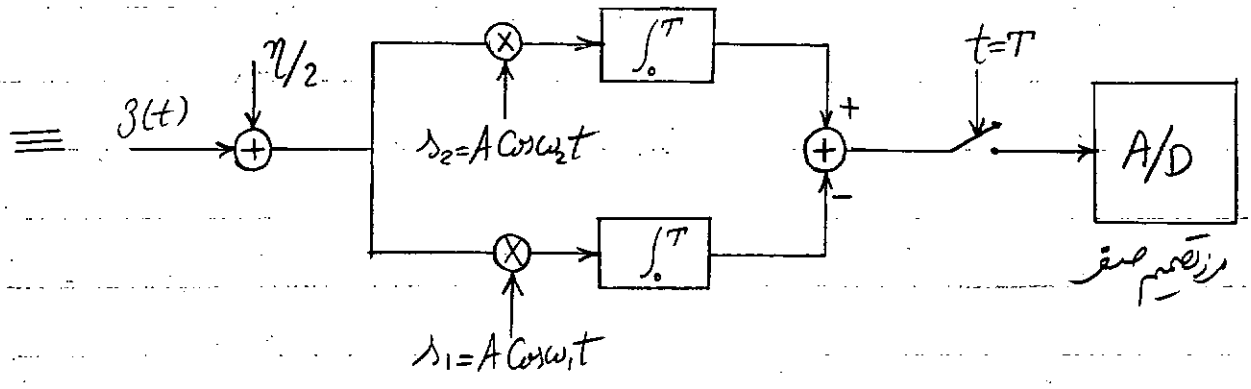
اگر f_1 و f_2 فاصله زیادی داشته باشند تداخل چندانی بین طیف دو OOK رخ نمیدهد و عرض باند $2\times\frac{2}{T}=\frac{4}{T}$ خواهد بود اگر f_1 و f_2 بهم نزدیک باشند عرض باند به یک OOK نزدیک میگردد $B \approx \frac{2}{T} \sim \frac{4}{T}$

(ب) آشکارسازی و احتمال خطا:

۱) آشکارسازی همزمان:

کاریرهای f_1 و f_2 را استخراج می کنیم.





محاسبهٔ مرز تصمیم :

$$s_{02}(kT) = \int_0^T s_2(t)\,[s_2(t)-s_1(t)]\,dt = \int_0^T s_2^2(t)\,dt - \int_0^T s_2(t)s_1(t)\,dt$$

$$s_{10}(kT) = \int_0^T s_1(t)\,[s_2(t)-s_1(t)]\,dt = -\int_0^T s_1^2(t)\,dt + \int_0^T s_2(t)s_1(t)\,dt$$

هرگاه انرژی دو پالس با هم مساوی باشند آنگاه $s_{02}(kT) = -s_{01}(kT)$ و مرز تصمیم است.

در حالت FSK با بیاری انرژی هر دو پالس مساوی $\frac{A^2T}{2}$ است

$$E = \int_0^T A^2\,(\cos\omega_2 t - \cos\omega_1 t)^2\,dt$$

$$= \frac{A^2}{2}\int_0^T [2 + \cos 2\omega_2 t + \cos 2\omega_1 t - 2\cos(\omega_2-\omega_1)t - 2\cos(\omega_2+\omega_1)t]$$

$$= \frac{A^2}{2}\left[2T + \frac{\sin 4\pi f_2 T}{4\pi f_2} + \frac{\sin 4\pi f_1 T}{4\pi f_1} - 2\,\frac{\sin 2\pi(f_2-f_1)T}{2\pi(f_2-f_1)} - 2\,\frac{\sin 2\pi(f_2+f_1)}{2\pi(f_2+f_1)}\right]$$

$$\simeq A^2T\,[1 - \mathrm{Sinc}\,2(f_2-f_1)T]$$

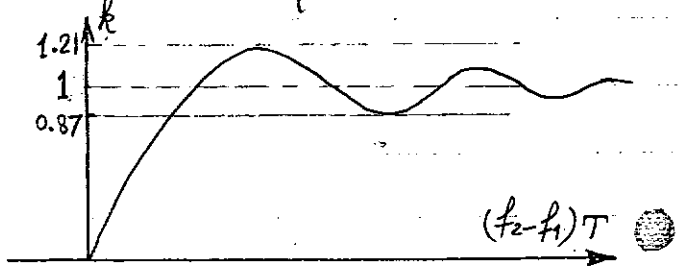
با توجه به اینکه f_1T و f_2T اعداد بزرگی هستند داریم:

$$S_R = \frac{1}{2}\left(\frac{A^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{A^2}{2}\right) = \frac{A^2}{2}$$

$$P_e = Q\sqrt{\frac{S_R T\,[1-\mathrm{Sinc}\,2(f_2-f_1)T]}{\eta}}$$

$$\boxed{P_e = Q\sqrt{\frac{S_R T}{\eta}k}}$$

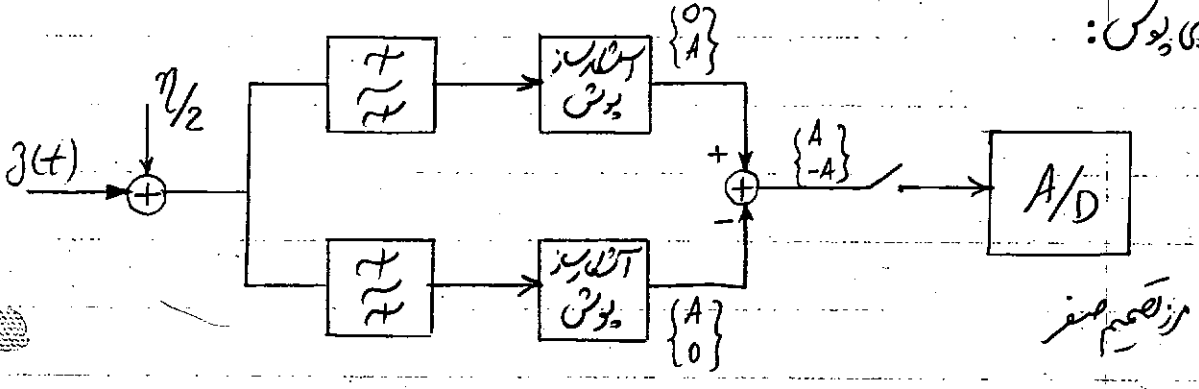
$$\boxed{S_R = \frac{A^2}{2}}$$



اگر اختلاف f_1 و f_2 زیاد باشد داریم $k \approx 1$

حدود آنفلیر ASK می باشد $P_e = 10^{-4} \Rightarrow 10.6\,dB < \frac{S_R T}{\eta} < 12\,dB$

۲) آشکارسازی پوش:



فرمول احتمال خطا بدون اثبات:

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-S_R T/4\eta}$$

$$S_R = A^2/2$$

$$P_e = 10^{-4} \Rightarrow \frac{S_R T}{\eta} = 15.3\,dB$$

(ج) نکات:

1) این مدولاسیون پوش ثابت دارد و ضمناً آشکارسازی ساده پوش هم ممکن است.

2) از نظر قدرت متوسط لازم برای یک احتمال خطای معادی نظیر ASK می باشد ولی قدرت پیک لازم برای آن نصف قدرت پیک ASK است ((3dB))

3) مرز تصمیم صفر بوده و مستقل از قدرت دریافتی است ولذا سیستم نسبت به تغییرات افت مسیر (فیدینگ) حساس نیست.

4) عرض باند بیشتری نسبت به ASK نیاز دارد.

مدولاسیون PSK باینری

(الف) تجزیه و تحلیل سیگنال PSK:

شکل پالس $\begin{cases} s_1 = A\cos(\omega_c t + \pi) = -A\cos\omega_c t \\ s_2 = A\cos\omega_c t \end{cases}$

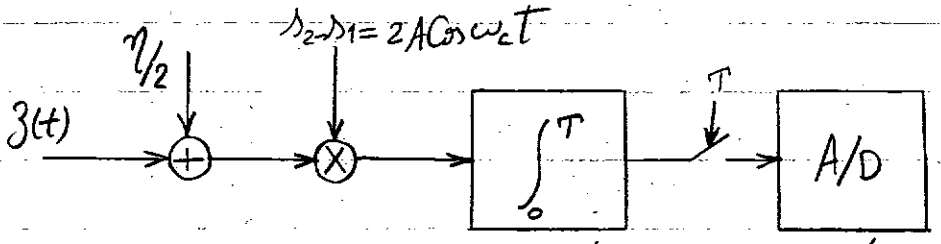
این مدولاسیون در واقع مدولاسیون DSB برای پیغام $b(t)$ می باشد.

$$\begin{cases} z(t) = A\,b(t)\cos\omega_c t \\ b(t) = \sum_k a_k\, rect\left(\frac{t-kT}{T}\right) \qquad a_k = \pm 1 \end{cases}$$

$$G_z(f) = \frac{A^2T}{4}\left[\text{Sinc}^2(f-f_c)T + \text{Sinc}^2(f+f_c)T\right] \Longrightarrow B = \frac{2}{T}$$ نظیر Ask

(ب) آشکارسازی و احتمال خطا:

۱) آشکارسازی همزمان:



(مرز تصمیم صفر)

فرقاش کار برامیتوان با مربع کردن و یا یکسو کردن $z(t)$ استخراج کرد.

$$E = \int_0^T (s_2-s_1)^2 dt = 4A^2\int_0^T\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\omega_c t}{2}\right)dt \approx 2A^2T$$

$$P_e = Q\sqrt{\frac{E}{2\eta}} = Q\sqrt{\frac{A^2T}{\eta}}$$

$$\boxed{P_e = Q\sqrt{\frac{2S_RT}{\eta}} \quad | \quad S_R = \frac{A^2}{2}}$$

این همان فرمول احتمال خطای PAM دوتیمی است.

$$P_e = 10^{-4} \Longrightarrow \frac{S_RT}{\eta} = 8.4\ dB$$

در مقایسه با Ask و FSK دوتیمی ($k=1$) حدود 3dB بهتر است.

۲) مدولاسیون و آشکارسازی تفاضلی DPSK: (Diffrencially PSK)

ارسال PSK تشخیص پلاریته ۱± می باشد یعنی اگر همزمانی برای مدتی از بین برود (مثلاً فیدینگ) ممکن است بعد از آن بدلیل اشتباه پلاریته صفرها به یک و یک‌ها به صفر تبدیل شوند.

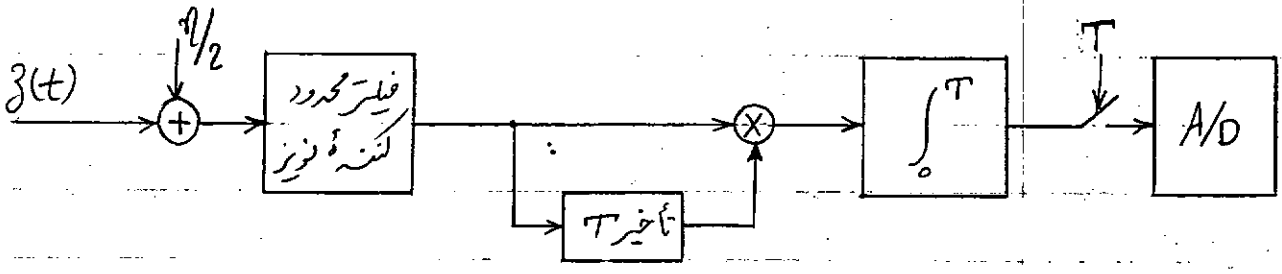
در DPSK اطلاعات بصورت اختلاف فاز هر پالس با پالس قبلی مدوله و پس آشکار میشوند.

اگر اغتشاشات کانال با سرعت کمی نسبت به سرعت ارسال تغییر کنند بطوریکه فاز پالس‌های $s(t)$ و $s(t-T)$ با هم تغییر کند در اینصورت اطلاعات که در تفاضل فاز این دو پالس است تغییر نمی‌کند.

مثال: بفرض اینکه رقم صفر باعث تغییر فاز π شود ۰ ۱ ۰۰ ۱۱ ۰ ۱ ۱ ۱ ۰ ارقام ارسالی
و رقم یک تغییر فاز ندهد.

فاز ارسالی ۰ ۰ π ۰ ۰ ۰ π π π π π ۰

اختلاف فاز دو پالس متوالی π ۰ π π ۰ ۰ π ۰ ۰ ۰ ۰ π



(دمدولاتور DPSK)

بدلیل نویزی بودن کانال در DPSK (کانال هر پالس پالس قبلی است) احتمال خطای آن کمی بیشتر از PSK است.

$$P_e \approx \frac{1}{2} e^{-S_R T/\eta} \qquad S_R = A^2/2$$

$P_e = 10^{-4} \Rightarrow \frac{S_R T}{\eta} = 9.3\,dB$

حدود 0.9dB بیشتر از PSK است.

(ج) نکات:

1) پوش ثابت است

2) تقریباً 3dB قدرت متوسط کمتر از ASK و FSK احتیاج دارد (6dB قدرت پیک کمتر از ASK)

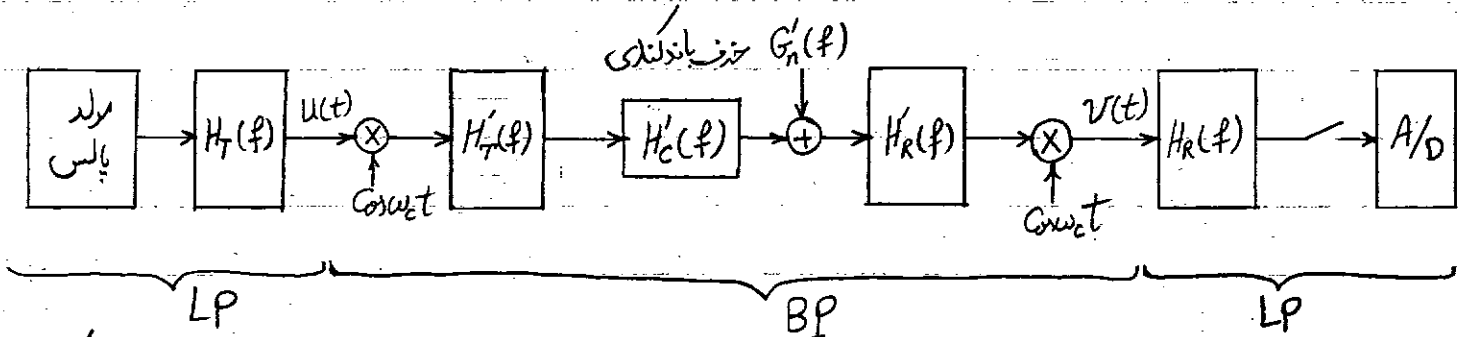
3) اشکال PSK تشخیص پلاریته‌ی پالس است که بخصوص در شرایط فیدینگ غیر عملی است.

4) اشکال DPSK این است که در آن مدار ثابتی وجود دارد که سرعت پالس را مشخص می‌کند ($\frac{1}{T}$) ولذا نمیتوان گیرنده‌ی DPSK را برای فرستنده با سرعتهای مختلف استفاده کرد.

مدولاسیونهای آنالوگ خطی (DSB و VSB)

این مدولاسیون‌ها برای محدود نگاهداشتن عرض باند بکار میروند

$$\begin{cases} B_{VSB} \approx B_{BB} \gg \frac{1}{2T} \\ B_{DSB} = 2B_{BB} \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$



نشان خواهیم داد که برای قسمت BP میتوان یک معادل LP در نظر گرفت و سیستم را به یک سیستم PAM معادل تبدیل کرد.

$$V(f) = \left\{ \left[U(f) * \left(\frac{1}{2}\delta(f-f_c) + \frac{1}{2}\delta(f+f_c) \right) \right] H'_T H'_C H'_R \right\} * \left[\frac{1}{2}\delta(f-f_c) + \frac{1}{2}\delta(f+f_c) \right]$$

$$V(f) = \frac{1}{4}\left\{ \left[U(f-f_c) + U(f+f_c) \right] \times H'_{TCR} \right\} * \left[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c) \right]$$

$$V(f) = \frac{1}{4}\left[U(f-2f_c) H'_{TCR}(f-f_c) + U_f H'_{TCR}(f+f_c) + U(f) H'_{TCR}(f-f_c) + \right.$$

$$\left. U(f+2f_c) H'_{TCR}(f+f_c) \right]$$

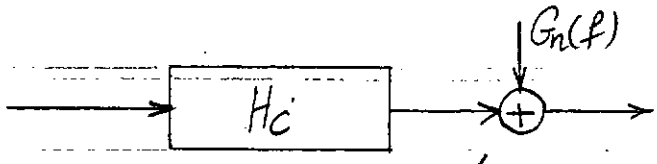
طیف $U(f)$ حول مبدأ است ولذا $U(f \pm 2f_c)$ حول $\pm 2f_c$ است که در $H_R(f)$ حذف خواهند شد.

$$V(f) = U(f)\underbrace{\left[\frac{1}{4} H'_{TCR}(f-f_c) + \frac{1}{4} H'_{TCR}(f+f_c) \right]}_{H_c}$$ در قسمت Lp

از نظر عبور سیگنال قسمت BP نظیر کانال H_c عمل می‌کند

$$G_n(f) = \left[G'_n(f) \left| H'_R(f) \right|^2 \right] * \left[\frac{1}{4}\delta(f-f_c) + \frac{1}{4}\delta(f+f_c) \right]$$ طیف نویز در خروجی قسمت BP

$$G_n(f) = \frac{1}{4} G'_n(f-f_c) \left| H'_R(f-f_c) \right|^2 + \frac{1}{4} G'_n(f+f_c) \left| H'_R(f+f_c) \right|^2$$



پس قسمت BP معادل روبرو است.

در نتیجه میتوان از نتایج PAM برای حالت مدولاسیونهای خطی نیز استفاده کرد.

مثلاً برای صفر بودن isi باید $P_r(f)$ در شرط نایکویست صدق کند $\quad P_g H_T H_c H_R = P_r(f)$

میتوان بوسیله H_c ((درواقع H'_R و H'_T میانگذر)) و یا H_T و H_R ((پایین گذر)) شرط نایکویست را اقناع کرد.
انتخاب معمولاً با فیلترهای LP انجام میگیرد.

همینطور میتوان از نتیجه احتمال خطای PAM استفاده کرد. $\quad P_e = 2\left(1-\frac{1}{M}\right) Q\sqrt{\frac{6S_R T}{(M^2-1)\eta}}$

۴- مدولاسیونهای کاربرد M تایی

در حالت کلی M شکل پالس $s_1(t)$ و $s_2(t)$ و ... و $s_m(t)$ محدود به زمانهای 0 و T در نظر گرفته میشود
و به هر ترکیب از $\lambda = \log_2^M$ رقم باینری شکل پالسی اختصاص یافته و ارسال می گردد.

اگر سرعت ارقام در ورودی r_b باشد $\left(\frac{binit}{sec} \equiv \frac{bit}{sec}\right)$

$$T = \frac{\lambda}{r_b} = \frac{\log_2^M}{r_b}$$

$$r = \frac{1}{T} = \frac{r_b}{\log_2^M} \qquad \left(pulse/sec \equiv baud\ rate\right)$$

هدف از M تایی مبادله قدرت و عرض باند است (خواهیم دید) و این در ازای مصلح شدن سیستم انجام میگیرد.
در این قسمت ارسال پالس ها را با احتمال مساوی و انرژی آنها را بترتیب E_1 تا E_M فرض می کنیم.

آشکارسازی اُپتیمم سیستم M تایی

فرض می کنیم $q(t)$ شکل یکی از شکل پالس ها و نویز دریافت شده باشد هدف از آشکارسازی تشخیص شکل پالس ارسالی است.

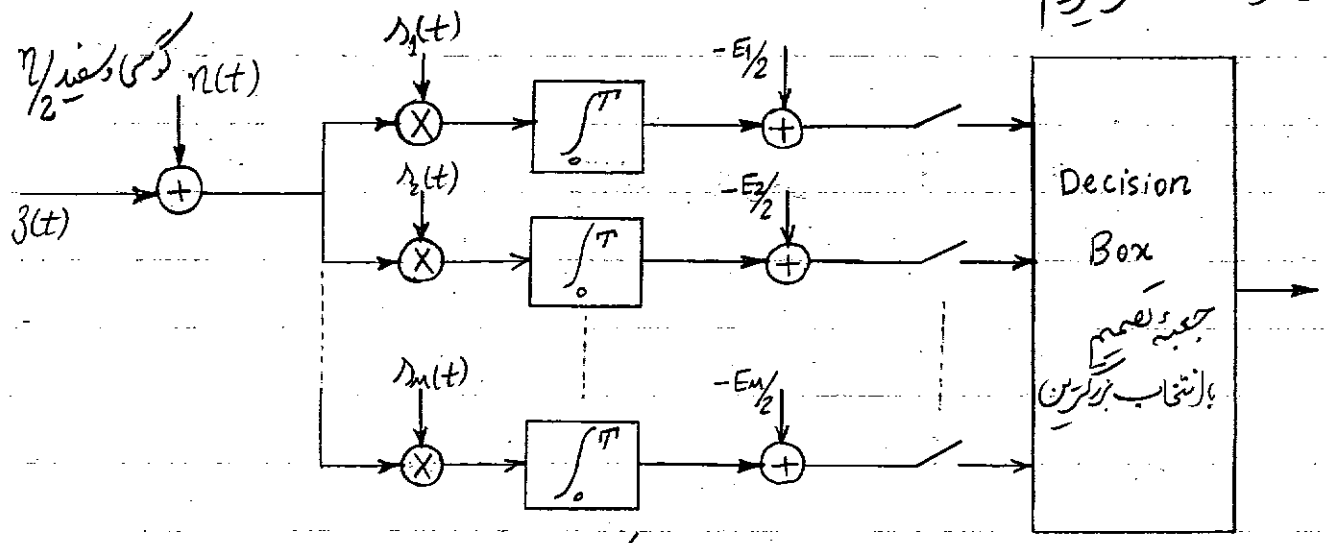
معیار اُپتیمم بودن: یک معیار مفید و معمول انتخاب پالسی است که کمترین مقدار متوسط مربع اختلاف را با $q(t)$ داشته باشد $\quad \int_0^T \left[q(t) - s_i(t)\right]^2 dt$

یک معیار دیگر انتخاب سگنال پالسی است که احتمال خطا را مینیمم کند.
میتوان نشان داد که برای نویز گوسی هر دو معیار به یک نتیجه میرسند و ما آنرا در حالت باینری نشان خواهیم داد.

$$\int_0^T [q(t) - s_i(t)]^2 dt = \int_0^T q^2(t)\,dt - 2\int_0^T q(t)\,s_i(t)\,dt + \int_0^T s_i^2(t)\,dt$$

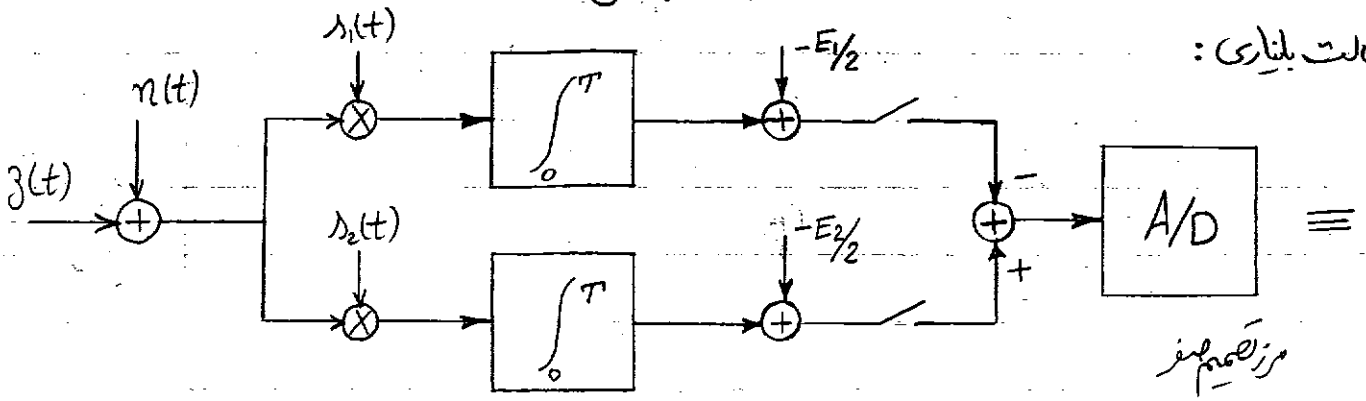
$$= \int_0^T q^2(t)\,dt - 2\left[\int_0^T q(t)\,s_i(t) - \frac{E_i}{2}\right]$$

باید پالسی انتخاب شود که مقدار فوق را مینیمم کند. چون جملهٔ اول ثابت است وبستگی به i ندارد لذا کافی است ماکزیمم عبارت کروشه را در نظر بگیریم.

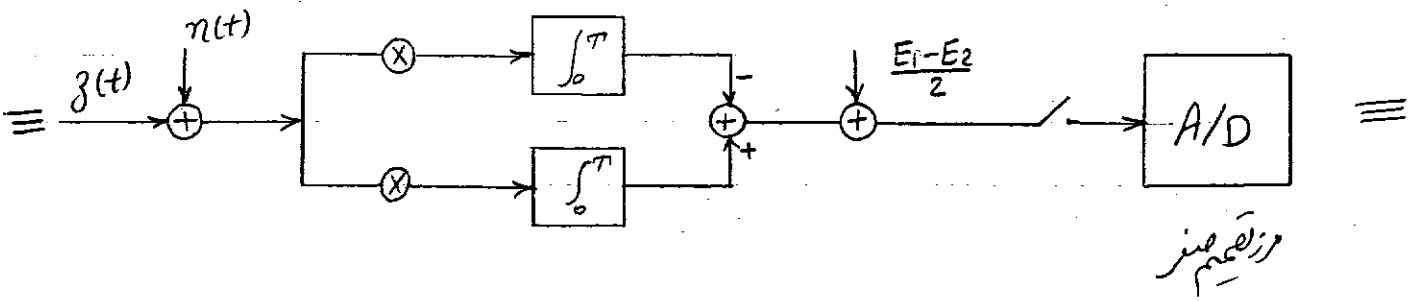


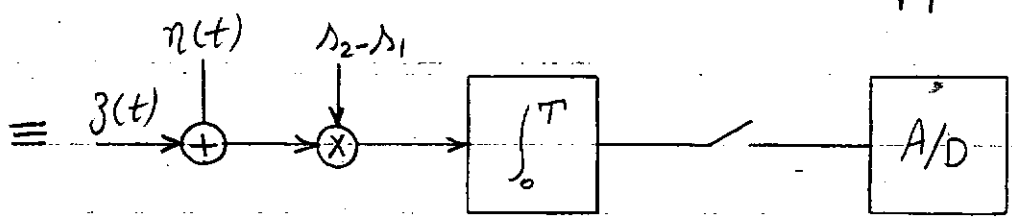
« آشکارسازی با M مدار همبستگی »

حالت باینری :



≡





این بلوک دیاگرامی است که مینیمم کردن احتمال خطا در حالت باینری بدست آمد.

نکات مهم:

1) میتوان بجای استفاده از مدارهای همبستگی (مثلاً با $s_i(t)$) از فیلتر منطبق $s_i(T-t)$ استفاده کرد و معادل یکدیگرند.

2) اگر انرژی پالس‌ها مساوی باشد $E_1=E_2=\dots=E_M$ نیازی به کم کردن نصف آن نیست چون تأثیری در مقایسه نمی‌گذارند.

3) غالباً پالس‌های مزبور را میتوان برحسب تعداد محدودی پالس‌های متعامد (مثلاً N پالس) تجزیه کرد. در اینصورت تنها به N مدار همبستگی مطابق شکل نیاز میدهیم. (φ_1 و φ_2 و ... φ_N پالس‌های متعامد)

$$s_i(t)=\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\varphi_j(t)$$

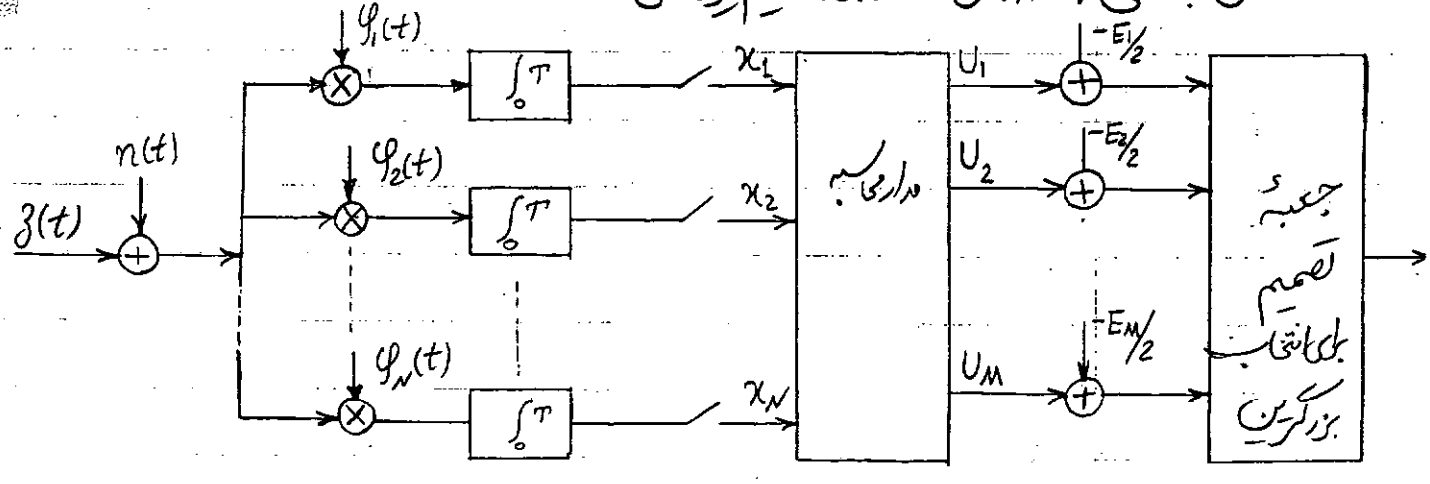
$$U_i=\int_0^T q(t)\,s_i(t)\,dt=\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\int_0^T q(t)\,\varphi_j(t)\,dt$$

U_i همبستگی با پالس نام

x_j: همبستگی $q(t)$ با پالس φ_j

$$\boxed{U_i=\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,x_j}$$

پس دانستن همبستگی با N پالس متعامد برای تصمیم‌گیری کافی است.



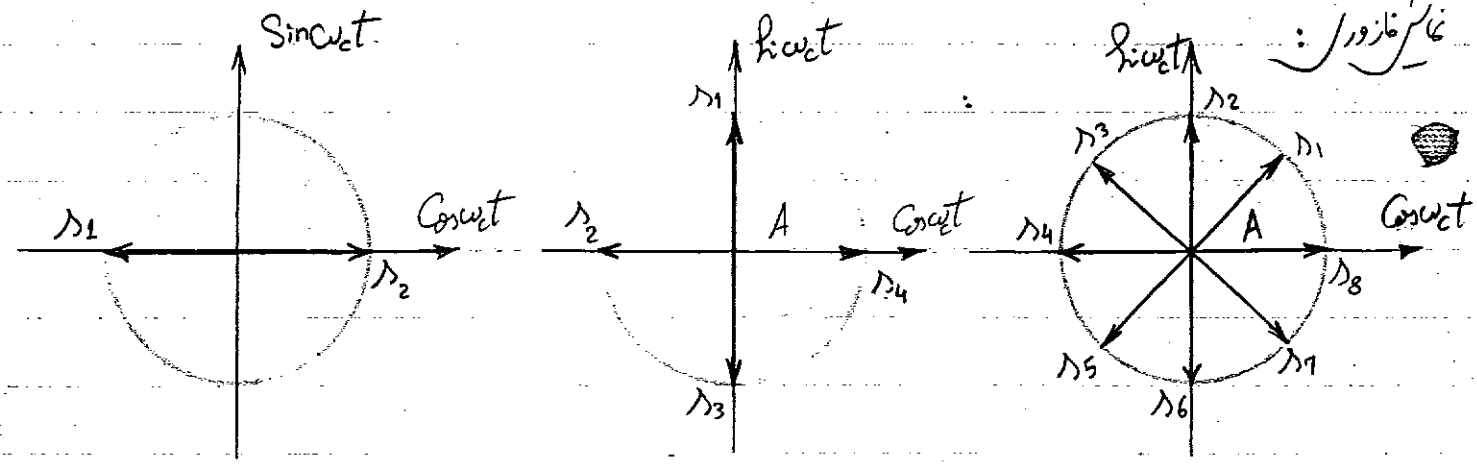
4) اعمال مدار محاسبه و کم کردن نصف انرژی را میتوان کلاً در همان بلوک جعبهٔ تصمیم در نظر گرفت.

مدولاسیون MPSK

در این نوع مدولاسیون از پالس‌های با دامنه و فرکانس مساوی و فاز مختلف استفاده می‌شود.

$$\begin{cases} s_1(t) = A\cos\left(\omega_c t - \frac{2\pi}{M}\right) = A\cos\frac{2\pi}{M}\cos\omega_c t + A\sin\frac{2\pi}{M}\sin\omega_c t \\ s_2(t) = A\cos\left(\omega_c t - 2\frac{2\pi}{M}\right) = A\cos 2\frac{2\pi}{M}\cos\omega_c t + A\sin 2\frac{2\pi}{M}\sin\omega_c t \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_M(t) = A\cos\left(\omega_c t - M\frac{2\pi}{M}\right) = A\cos M\frac{2\pi}{M}\cos\omega_c t + A\sin M\frac{2\pi}{M}\sin\omega_c t \end{cases} \quad 0<t<T$$

فاز فازورها:



$M=2$ باینری $M=4$ کوادرنری $M=8$

در عمل $M=2,4,8$ و گاهی اوقات M های دیگر متداول است. با توجه به اینکه پالس‌ها بر دو مؤلفهٔ سینوسی و کسینوسی تجزیه می‌گردند خود سیگنال PSK M تایی را نیز می‌توان بر دو مؤلفهٔ سینوسی و کسینوسی تجزیه کرد.

سیگنال PSK M تایی $z(t) = AB_1(t)\cos\omega_c t + AB_2(t)\sin\omega_c t$

$$B_1(t) = \sum_k a_k \, rect\left(\frac{t-kT}{T}\right) \qquad a_k = \cos\frac{2\pi}{M}, \cos\frac{4\pi}{M}, \ldots \cos M\frac{2\pi}{M}$$

$$B_2(t) = \sum_k b_k \, rect\left(\frac{t-kT}{T}\right) \qquad b_k = \sin\frac{2\pi}{M}, \sin\frac{4\pi}{M}, \ldots, \sin M\frac{2\pi}{M}$$

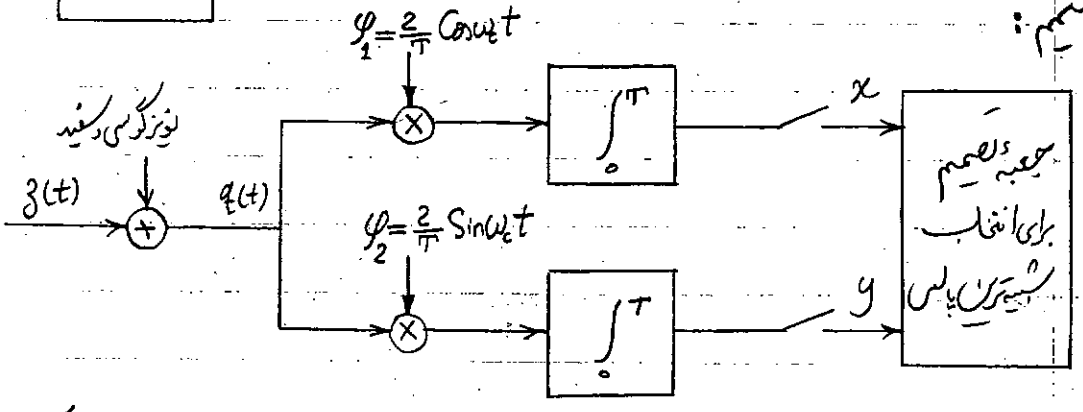
PSK درواقع مجموع دو مدولاسیون DSB است یکی با کاریر کسینوسی و پیغام $B_1(t)$ و دیگری با کاریر سینوسی و پیغام $B_2(t)$

طیف B_1 و B_2 از حاصلضرب طیف PAM ضربه‌ای آنها و طیف شکل پالس ($T^2 Sinc^2 fT$ در هر دو مورد) تشکیل میگردد ولذا لوب اصلی آن بین $\pm\frac{1}{T}$ است. (در اینجا هم طیف PAM ضربه‌ای یکنواخت است)

با مدولاسیون DSB لوبهای اصلی آنها به $f_c \pm \frac{1}{T}$ منتقل میگردد ولذا لوب اصلی سیگنال MPSK نیز بین $f_c \pm \frac{1}{T}$ می‌باشد

$$B = \frac{2}{T}$$ همان عرض باند PSK باینری

آشکارسازی آپتیمم:



گین ۲ ثابت $\frac{2}{T}$ و ارتباطی تأثیری در نتیجه نهایی نمی‌گذارد (نویز و سیگنال را به یک میزان تقویت می‌کند) ولی برای سادگی تجزیه و تحلیل بکار میرود.

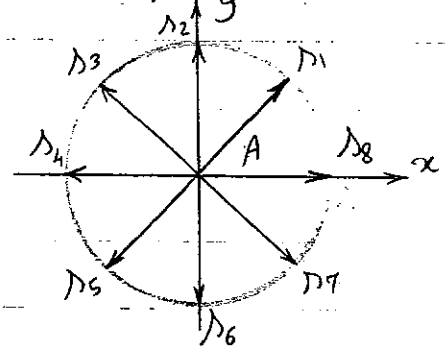
$$z(t) = s_i(t) = A\cos\left(\omega_c t - \frac{2\pi i}{M}\right) \Longrightarrow s_{io} = \begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases}$$ خروجی دمار

$$x = \frac{2}{T} A \int_0^T \cos\omega_c t \cos\left(\omega_c t - \frac{2\pi i}{M}\right) dt$$

$$x = \frac{2A}{T}\int_0^T \cos\frac{2\pi i}{M}\cos^2\omega_c t + \sin\frac{2\pi i}{M}\sin\omega_c t\cos\omega_c t \approx A\cos\frac{2\pi i}{M}$$

با فرض $\int_0^T \sin\omega_c t\,dt \approx 0$, $\int_0^T \cos 2\omega_c t\,dt \approx 0$ داریم:

$$y \approx A\sin\frac{2\pi i}{M}$$



پس پالسهای خروجی در محورهای x و y همان موقعیت پالسهای ورودی در روی محورهای $\cos\omega_c t$ و $\sin\omega_c t$ را دارند.

خروجی فیلتر را برای نویز ورودی $n(t)$ در نظر میگیریم.

$$n(t) \Rightarrow n_0(t) = \begin{cases} x = \frac{2}{T}\int_0^T n(t)\cos\omega_c t\, dt \\ y = \frac{2}{T}\int_0^T n(t)\sin\omega_c t\, dt \end{cases}$$

چون عمل خطی روی $n(t)$ انجام میگیرد x و y نیز گوسی خواهند بود

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} = \frac{4}{T^2}\overline{\left[\int_0^T n(t)\cos\omega_c t\, dt\right]^2}$$

$$= \frac{4}{T^2}\left[\int_0^T\int_0^T n(t_1)\cos\omega_c t_1\, n(t_2)\cos\omega_c t_2\, dt_1\, dt_2\right]$$

$$= \frac{4}{T^2}\left[\int_0^T\int_0^T \overline{n(t_1)\, n(t_2)}\cos\omega_c t_1\cos\omega_c t_2\, dt_1\, dt_2\right]$$

$$\left.\begin{aligned} G_n(f) &= \eta/2 \\ R_n(\tau) &= \eta/2\,\delta(\tau) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{n(t_1)\, n(t_2)} = R_n(t_1-t_2) = \eta/2\,\delta(t_1-t_2)$$

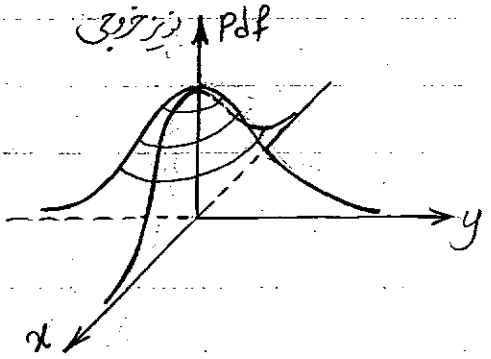
$$\sigma_x^2 = \frac{4}{T^2}\times\eta/2\int_0^T\int_0^T \cos\omega_c t_1\cos\omega_c t_2\,\delta(t_1-t_2)\,dt_1 dt_2 = \frac{2\eta}{T^2}\int_0^T \cos^2\omega_c t_1\, dt_1$$

$$\sigma_x^2 \approx \frac{2\eta}{T^2}\times\frac{T}{2} \approx \frac{\eta}{T}$$

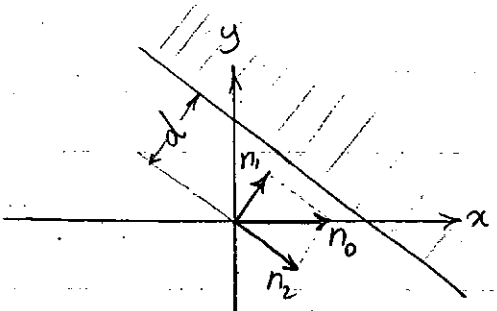
$$\boxed{\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \eta/T}$$

pdf مشترک $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-x^2/2\sigma_x^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-y^2/2\sigma_y^2}$ (ضرب چگالی مستقل بودن x و y)

pdf مشترک $= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$ (گوسی دو متغیره)



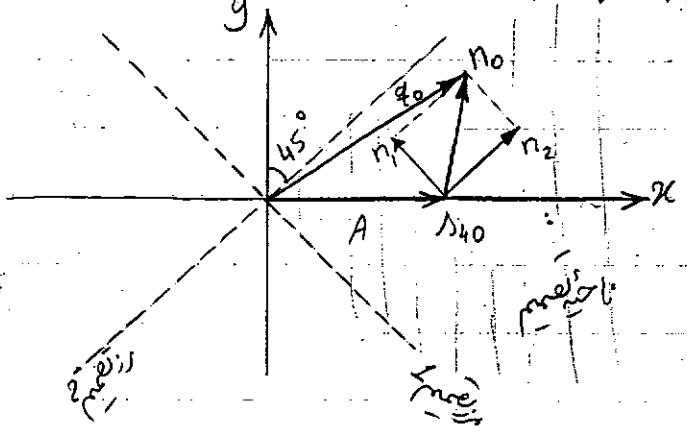
دارای تقارن مرکزی است در کلیه جهات بصورت گوسی و همان واریانس $\sigma^2 = \eta/T$ می باشد.



بدلیل تقارن مرکزی میتوان نویز n_0 را روی دو محور دلخواه عمود بر هم تجزیه نمود و pdf نویز در هر یک از دو جهت مزبور گوسی و با همان واریانس σ^2 خواهد بود. ضمناً دو مؤلفه مستقل از هم می باشند (معادل دو آن محورها)

$$P(///) = P(n_1 > d) = Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$$

محاسبهٔ احتمال خطا 4PSK:



بدلیل تقارن با دو مرز تصمیم (بنیا زها) میتوان چهار ناحیهٔ تصمیم برای چهار پالس ایجاد کرد.

باز بدلیل تقارن مسئله را فقط در یک حالت مثلاً حالت ارسال سگنال s_4 حل می کنیم.

$$\text{احتمال خطا } P_e = Q\left(\frac{A\sqrt{2}/2}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{A\sqrt{2}/2}{\sigma}\right) - Q^2\left(\frac{A\sqrt{2}/2}{\sigma}\right)$$

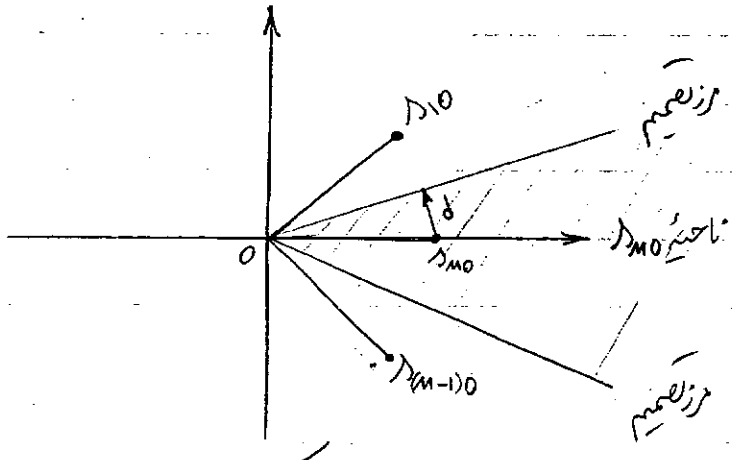
احتمال ورود به ناحیهٔ λ_2 — خروج از مرز 2 — خروج از مرز 1

$2Q-Q^2$	$2Q$
10^{-3}	$1{,}00025\times10^{-3}$
10^{-4}	$1{,}000025\times10^{-4}$

$$\Rightarrow P_e \approx 2Q\left(\frac{A\sqrt{2}}{2\sigma}\right)$$

این تقریب بخاطر صرفنظر کردن از دو بار محاسبه شدن ناحیهٔ مشترک است.

محاسبهٔ خطا MPSK:



بدلیل تقارن برای محاسبهٔ احتمال خطا فقط احتمال خطای یک حالت را بدست می آوریم

فرض می کنیم s_M صادر شده باشد.

$$P_e = Q\left(\frac{d}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{d}{\sigma}\right) - (\text{احتمال ورود به ناحیهٔ مشترک})$$

در اینجا نیز میتوان از خطای دوبار محاسبه شدن ناحیهٔ مشترک صرفنظر نمود چون اینبار بمراتب کمتر از حالت 4PSK است.

$$P_e = 2Q\left(\frac{d}{\sigma}\right),\quad d = A\sin\frac{\pi}{M} \Rightarrow P_e \approx 2Q\left(\frac{A\sin\frac{\pi}{M}}{\sigma}\right)$$

$$P_e \approx 2Q\sqrt{\frac{2S_R T \sin^2\frac{\pi}{M}}{\eta}}$$

$S_R = \frac{A^2}{2}$ | $\sigma^2 = \eta/T$

$$T = \frac{\log_2^M}{r_b} \Rightarrow P_e \approx 2Q\sqrt{\frac{2S_R \log_2^M}{\eta r_b}\sin^2\frac{\pi}{M}}$$

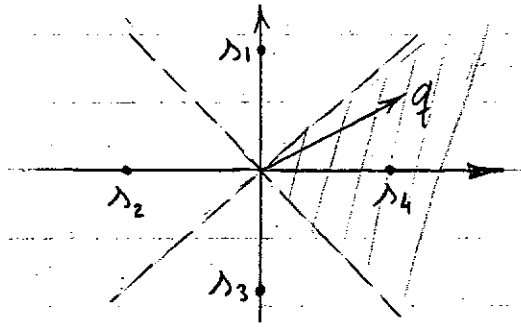
$$B = \frac{2}{T} = \frac{2r_b}{\log_2^M}$$

(مبادله عرض باند و قدرت)

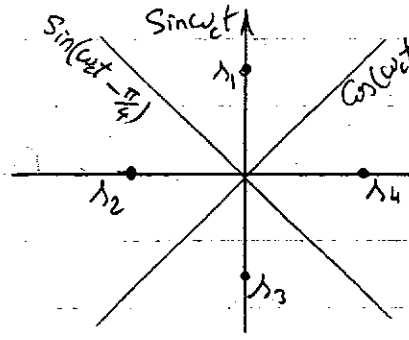
M	2	4	8	16	32
$\frac{S_R}{\eta r_b}$ [dB] برای خطای 10^{-4}	8.4	8.8	12.3	17.0	22.0
$\frac{B}{r_b}$	2	1	2/3	0.5	0.4

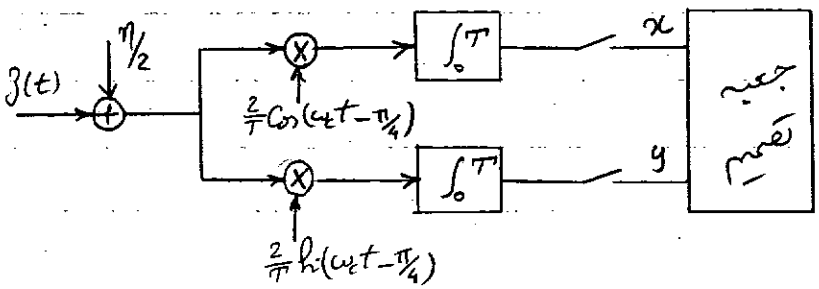
نکات:

1) انتخاب نیم زها بعنوان مرزهای تصمیم بدلایل واضح صورت گرفت و این معادل همان انتخاب پالسی که بیشترین همبستگی را دارد می باشد چون در اینجا همبستگی با هر پالس یعنی تصویر روی آن پالس. بعنوان مثال در شکل روبرو تصویر q روی پالس s_4 در ناحیه‌ٔ ۱ قرار خورده از تصویر آن روی بقیه‌ٔ پالس‌ها ی s_1 و s_2 و s_3 بیشتر است.



2) 4PSK متداولتر است چون مبادله‌ٔ عرض باند و قدرت بهتری دارد (نصف شدن عرض باند به ازاء 0.4 دسیبل افزایش قدرت) ضمناً مدار ساده‌تری دارد. در 4PSK برای سادگی عمل جعبه‌ٔ تصمیم همبستگی با $\cos(\omega_c t - \pi/4)$ و $\sin(\omega_c t - \pi/4)$ انجام می‌گیرد تا فقط تشخیص علامت x و y لازم باشد.

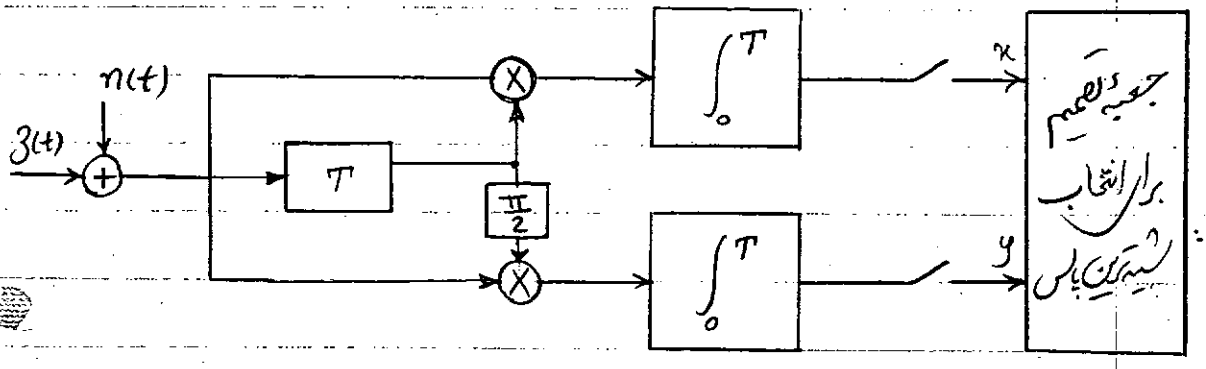




x	+	−	+	−
y	+	+	−	−
تصمیم	s_1	s_2	s_3	s_4

3) پوش MPsk ثابت است ولذا در برابر اعوجاج غیرخطی مقاوم است.

4) در حالت M تایی نیز میتوان اطلاعات را بصورت اختلاف فاز بین دو پالس مجاور مدوله کرد تا در گیرنده تنها تشخیص اختلاف فاز (بجای مطلق فاز) مطرح باشد. (MDPSK)



لذا به کاربرد کندکردن احتیاج نمی باشد. بدلیل استفاده از مدار تاخیر T سیستم برای سرعت ثابت $\frac{1}{T}$ خواهد بود ولی تقریباً بدلیل نوفری بودن کاربرد احتمال خطا بیشتر میشود.

$$P_e \approx 2Q\sqrt{\frac{4S_RT}{\eta}\sin^2\left(\frac{\pi}{2M}\right)} \quad \text{(ثابت میشود)}$$

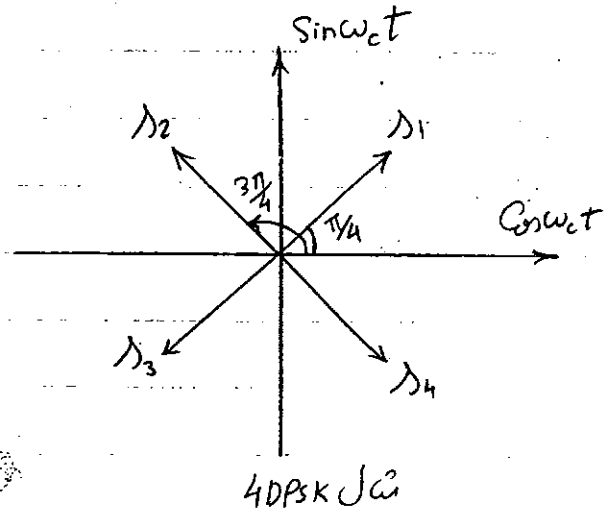
برای یک احتمال خطای مساوی

$$\frac{S_{RDPSK}}{S_{RPSK}} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2M}\right)} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2M}\right)$$

M	2	4	8	16	32
$\frac{S_{RDPSK}}{S_{RPSK}}$ [dB]	0.9	2.3	2.8	3.0	3.0

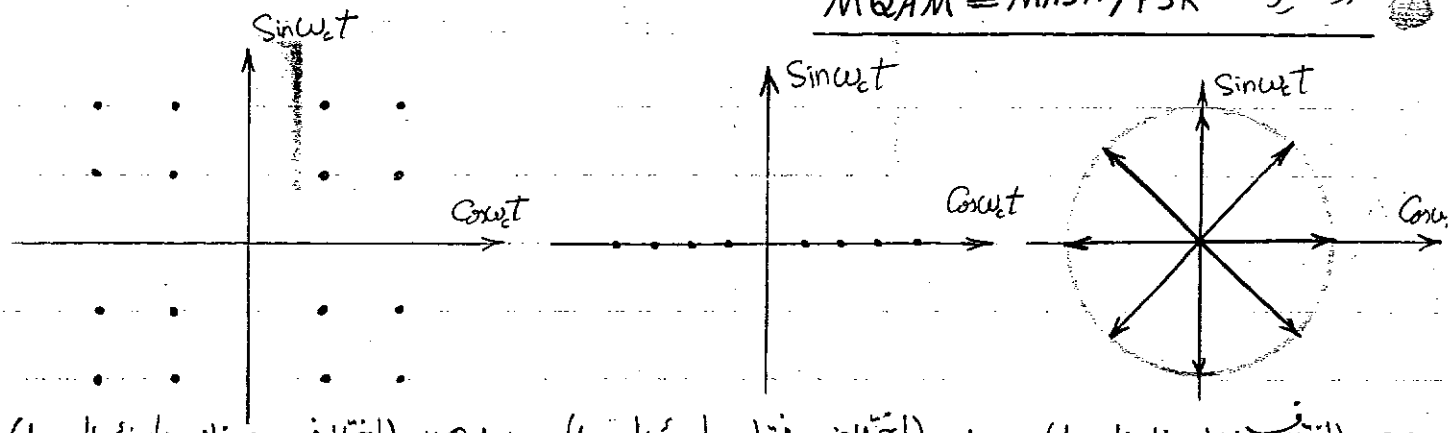
↑ از فرمول بالایی

5) در MDPSK معمولاً از مضارب فرد $\frac{\pi}{M}$ استفاده میشود تا همیشه اختلاف فاز داشته باشیم تا مثل اختلاف فاز صفر نباشد یعنی همیشه هر پالس با پالس قبلی اختلاف فاز داشته باشد (تغییر وضعیت).
لذا استخراج پالس ساعت بهتر صورت میگیرد



مثال 4DPSK

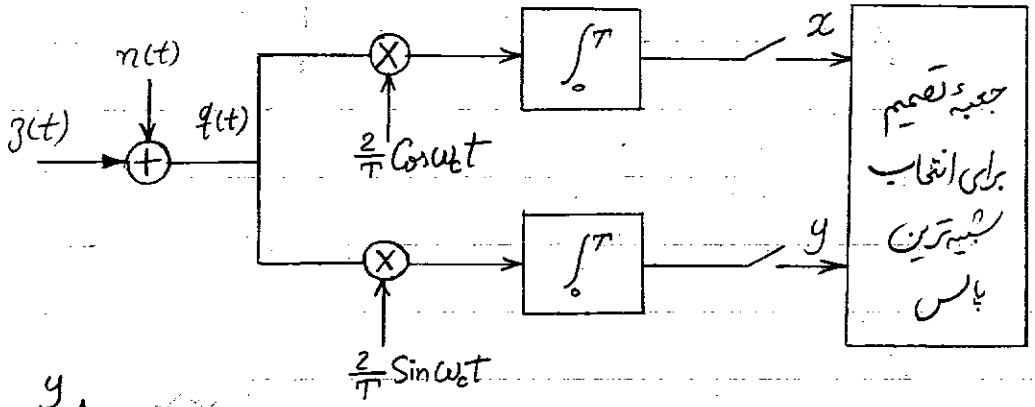
مدولاسیون MQAM = MASK/PSK



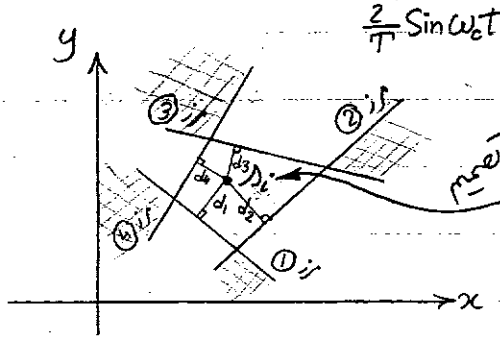
MPSK (اختلاف فقط در فاز پالس ها) MASK (اختلاف فقط در دامنهٔ پالس ها) MQAM (اختلاف در فاز و دامنهٔ پالس ها)

در MASK/PSK اختلاف پالس‌ها هم در دامنه و هم در فاز میتواند باشد. پالس ها ذلذا سیگنال متکل از آنها را میتوان بدو مولفهٔ سینوسی و کسینوسی تجزیه کرد یعنی در این حالت هم سیگنال نظیر در مدولاسیون DSB است یکی با $\cos\omega_0 t$ و دیگری با $\sin\omega_0 t$ و به این دلیل به آن M'ary Quadrature Ampl. Mod. گویند.

نظیر MPSK عرض باند $\frac{2}{T}$ لازم است و ضمناً برای آشکارسازی انتخیم کافی است همبستگی با در مولفهٔ سینوسی و کسینوسی محاسبه شود.



محاسبهٔ احتمال خطا:



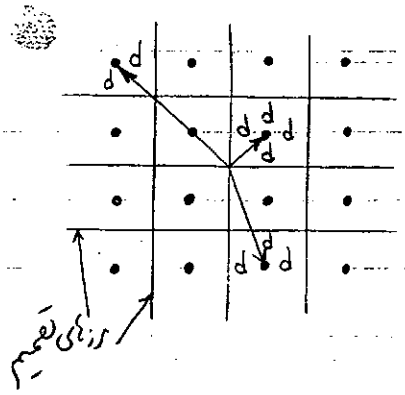
بطور کلی باید با مرزهای تصمیم نواحی تصمیم برای پالس های مختلف ایجاد کرد.

$$P_e \approx \sum \left(\text{احتمال خروج از مرزهای تصمیم} \right)$$

علامت تقریب بخاطر دوبار محاسبه شدن نواحی مشترک (همانور خورده) است.

$$\text{برای } P_e \approx Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{d_3}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{d_4}{\sigma}\right)$$

با توجه به تعداد مرزهای تصمیم در وسط پالس ها رسم میکردند.



احتمال خطا برای هریک از چهار پالس وسط $P_{e1} \approx 4Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$

گوشه " " " " $P_{e2} \approx 2Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$

احتمال خطا برای هریک از هشت پالس دیگر $P_{e3} \approx 3Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$

$$P_e \text{ متوسط} \approx \frac{4}{16}(4Q) + \frac{4}{16}(2Q) + \frac{8}{16}(3Q) = 3Q \qquad , \sigma^2 = \frac{\eta}{T}$$

$$S_R \text{ متوسط} = \frac{4}{16}\left(\frac{d^2+d^2}{2}\right) + \frac{4}{16}\left(\frac{9d^2+9d^2}{2}\right) + \frac{8}{16}\left(\frac{9d^2+d^2}{2}\right) = 5d^2 \Rightarrow d^2 = \frac{S_R}{5}$$

$$\boxed{P_e = 3Q\sqrt{\frac{S_R T}{5\eta}}} \qquad T = \frac{\log_2^M}{r_b} = \frac{\log_2^{16}}{r_b} = \frac{4}{r_b} \Rightarrow P_e = 3Q\sqrt{\frac{4S_R}{5\eta r_b}}$$

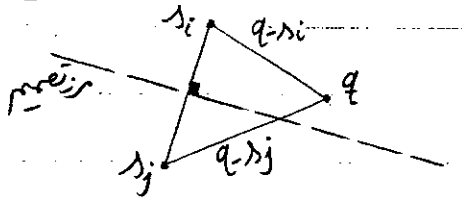
$$P_e = 10^{-4} \Longrightarrow \frac{S_R}{\eta r_b} = 13\,dB$$

در 16PSK داشتیم $\frac{S_R}{\eta r_b} = 17\,dB$ برای

16ASK میتوان زمان داد $\frac{S_R}{\eta r_b} = 22\,dB$ یعنی MQAM بقدرت کمتری از MASK و MPSK نیاز دارد.

نکات:

1) بدلایل واضح مرزهای تصمیم در محل عمود منصف فاصله پالس ها انتخاب شد که معادل انتخاب پالسی که کمترین مربع اختلاف را دارد می باشد $\left[\int_0^T (s_i - s_j)^2 dt\right]$.



در روی عمود منصف مربع فاصله تا دو پالس باهم برابر است ولذا عمود منصف مرز تصمیم اُپتیمم است.

2) MQAM نسبت به MASK و MPSK به قدرت کمتری نیاز دارد زیرا در MASK و MPSK نقاط روی خط انتخاب میکردند (روی محور $\cos\omega t$ یا روی یک دایره در صفحه $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$) ولذا طول خط متناسب با M خواهد بود و قدرت که متناسب با مجذور طول است با M^2 متناسب میگردد درحالیکه در MQAM نقاط در تمام

سطح انتخاب میشوند ولذا سطح او در نتیجه قدرت متناسب با M خواهد بود.

3) این مبادله بهتر در ازای از دست دادن پوش ثابت می باشد.

مدولاسیون MFSK

ارقام بصورت پالس های سینوسی و با فرکانس های مختلف و متعامد ارسال میشوند.

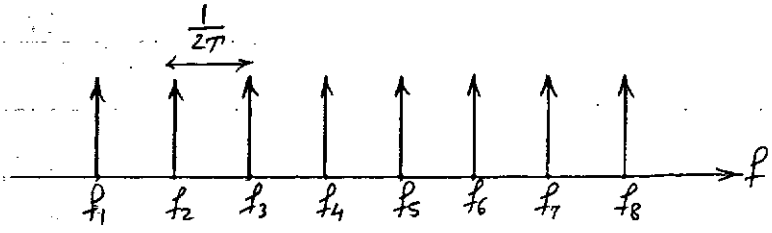
$$s_i(t) = A\cos\omega_i t \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\text{رابطهٔ متعامد بودن} \equiv \int_0^T s_i(t)s_j(t)dt = \begin{cases} A^2T/2 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

$$\int_0^T A^2\cos\omega_i t\cos\omega_j t\,dt = \frac{A^2}{2}\int_0^T\left[\cos(\omega_i+\omega_j)t+\cos(\omega_i-\omega_j)t\right]dt$$

$$= \frac{A^2}{2}\left[\underbrace{\frac{\sin(\omega_i+\omega_j)T}{(\omega_i+\omega_j)}}_{\text{تقریباً یا تحقیقاً مساوی صفر}} + \frac{\sin(\omega_i-\omega_j)T}{(\omega_i-\omega_j)}\right] \simeq \frac{A^2}{2}\cdot\frac{\sin(\omega_i-\omega_j)T}{(\omega_i-\omega_j)}$$

$$\begin{cases} i=j & \langle s_i, s_j\rangle = \frac{A^2}{2}T \\ i\neq j & = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin(\omega_i-\omega_j)T = 0 \Rightarrow f_i-f_j = n\frac{1}{2T}$$



برای عرض باند حداقل باید فاصلهٔ دو فرکانس مجاور $\frac{1}{2T}$ انتخاب گردد. (مثال $M=8$)

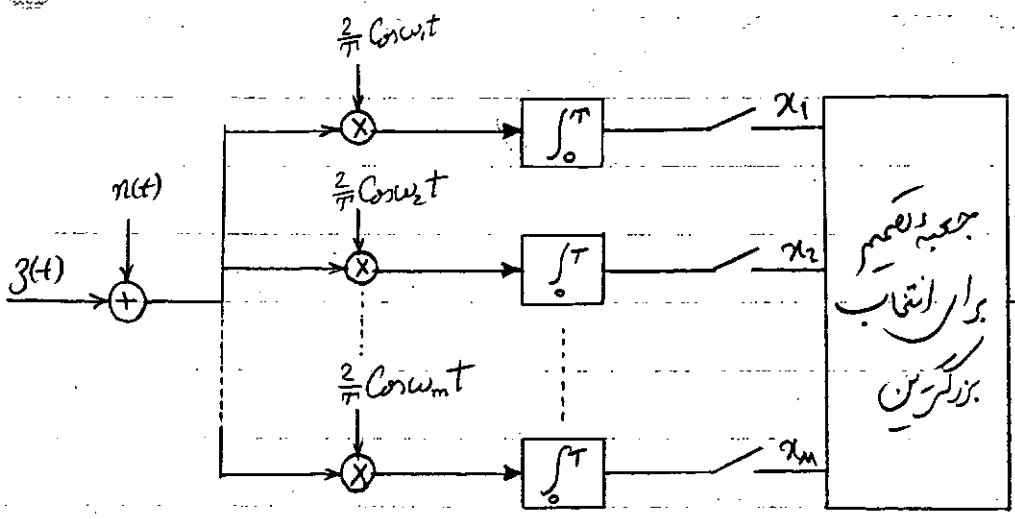
MFSK را میتوان M عدد OOK با فرکانس های کاریر f_1 تا f_M دانست (همانطورکه FSK با باینری مجموع دو OOK تلقی شد)

طیف هر OOK یک $\sin^2(fT)$ است که به حول فرکانس کاریر مربوطه منتقل شده است لذا عرض باند MFSK برابر:

$$B \approx \underbrace{\frac{1}{T}}_{\text{طیف سمت چپ } f_1} + \underbrace{(M-1)\frac{1}{2T}}_{\text{فاصلهٔ } f_1 \text{ تا } f_M} + \underbrace{\frac{1}{T}}_{\text{طیف سمت راست } f_M}$$

$$\boxed{B \approx \frac{M+3}{2T}}$$

آشکارسازی ایده‌آل با احتمال خطا:



چون انرژی پالس‌ها باهم مساوی‌اند $\frac{E_i}{2}$ ها کم نشدند.

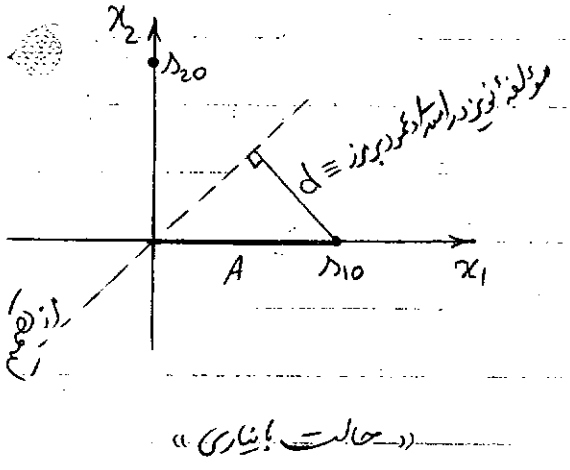
$$s_i \Longrightarrow s_{io} = \begin{cases} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_i = A \\ \vdots \\ x_M = 0 \end{cases} \qquad n(t) \Longrightarrow n_o(t) = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{cases}$$

همگی گوسی و مستقل از هم و با واریانس‌های مساوی هستند $\sigma^2 = \eta/T$

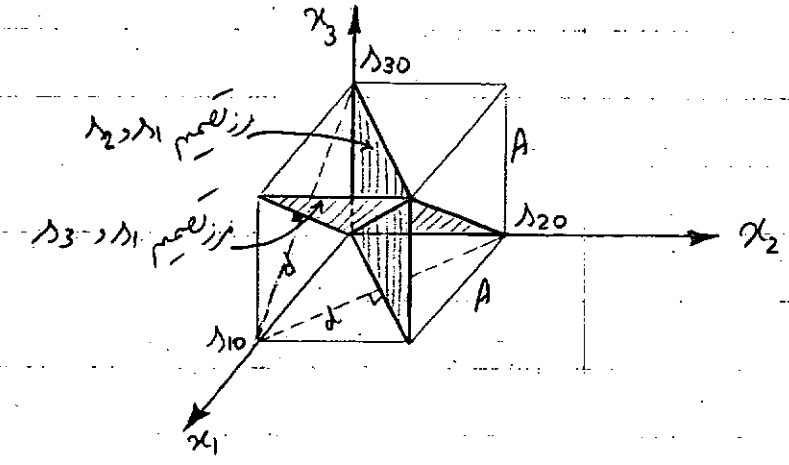
pdf مشترک نویز خروجی حاصلضرب M عدد pdf نرمال با واریانس مساوی و در استقلال‌های x_1 تا x_M بوده و یک pdf گوسی M بعدی با تقارن مرکزی است.

بدلیل تقارن مرکزی تصویر نویز روی هر امتداد دلخواهی گوسی و با واریانس η/T است.

فرض می‌کنیم s_1 ارسال شده باشد و احتمال خطا را بدست می‌آوریم.



« حالت باینری »



« حالت تریاری »

$$P_e \approx Q\left(\frac{d}{\sigma}\right), \quad d = \frac{A\sqrt{2}}{2}$$

$$P_e = Q\left(\frac{d}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{d}{\sigma}\right) - (\text{احتمال ورود به ناحیه‌ی ثبت دوضعفه})$$

$$P_e \approx 2Q\left(\frac{d}{\sigma}\right), \quad d = A\sqrt{2}/2$$

بطور ریاضی برای M تایی تصمیم میدهیم: $d = A\sqrt{2}/2$ ، $P_e \approx \underbrace{(M-1)}_{\text{تعداد مرز تصمیم های مجاور}} Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$

علامت تقریب بخاطر اینکه بار محاسبه ی P_e نواحی مشترک است.

$$S_R = \frac{A^2}{2} \quad , \quad \sigma^2 = \frac{\eta}{T} \qquad \boxed{P_e \approx (M-1)\, Q\sqrt{\frac{S_R T}{\eta}}} \qquad T = \frac{\log_2^M}{r_b}$$

M	2	4	8	16	32
$P_e=10^{-4}$ برای $\frac{S_R}{\eta r_b}$ [dB]	11.4	9.0	7.7	6.8	6.1
$\frac{B}{r_b} = \frac{M+3}{2\log_2^M}$	2.5	1.75	1.83	2.38	3.5

نکته: برخلاف M تایی های قبل در اینجا عرض باند لازم بیشتر و قدرت لازم کمتر میگردد مبادله در ابعاد اقتصادی است و بعد غیر اقتصادی میشود.

۵- تقایسه وکاربرد مدولاسیونهای مختلف

نکاتی در مقایسه وکاربرد مدولاسیونهای مختلف

۱) قدرت لازم وعرض باند مصرفی

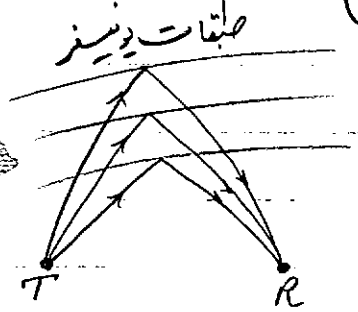
باینری	BB	پوش OOK	پوش FSK	DPSK	CPSK	VSB همزمان
$P_e=10^{-4}$ برای $\frac{S_R}{\eta r_b}$	8.4	15.3	15.3	9.3	8.4	8.4 [dB]
$\frac{B}{r_b}$	0.5	2	2~4	2	2	0.5

	PSK			FSK همزمان			VSB همزمان			
M	2	4	8	2	4	8	2	4	8	16 QAM
10^{-4} برای $\frac{S_R}{\eta r_b}$ [dB]	8.4	8.8	12.3	11.4	9.0	7.7	8.4	12.6	17.2	13.0
$\frac{B}{r_b}$	2	1	0.66	2.5	1.75	1.83	0.5	0.25	0.166	0.5

2) اگر کانال باند پایه موجود باشد سیستم PAM انتخاب واضح است (سادگی - قدرت سلکتر و عرض باند کمتر)

3) وقتی سادگی و ارزانی مطرح باشد (مثلاً سیستم بتعداد زیاد لازم باشد) مدولاسیونهای باینری (بخصوص OOK و FSK و پوش) ترجیح دارند.

4) در شرایط فیدینگ که سیگنال دریافتی مجموع چند فازور با دامنه و اختلاف فازهای مختلف می باشد (به دلیل چند مسیره بودن و متغیر بودن مسیرها) دامنهٔ سیگنال دریافتی رندام خواهد بود ولذا مدولاسیونی مناسب است که لزوماً احتیاج به کاربر همزمان نداشته باشد و ثانیاً عرض تصمیم مستقل از قدرت دریافتی باشد. (FSK و DPSK و پوش)
مثال مهم کانال یونسفر HF است.



5) برای کانالهای غیرخطی از مدولاسیونهای باید استفاده کرد که پوش ثابت دارند. مثال مهم کانالهای ماهواره‌ای هستند که بدلیل تقویت کنندهٔ غیرخطی (TWT) غیرخطی می‌باشند.

6) برای حالاتیکه عرض باند محدود است وضمناً اضافه کردن کانال بدلایل اقتصادی یا غیر اقتصادی مقدور نیست از مدولاسیونهای دیجیتال M تایی MPSK و MQAM و MVSB که در آنها عرض باند با قدرت مبادله میگردد استفاده میشود.
اگر محدودیت غیرخطی هم مطرح باشد MPSK مناسب است
اگر محدودیت قدرت ″ ″ MQAM و MVSB مناسب هستند

7) مبادلهٔ قدرت و عرض باند ابتدا اقتصادی است ولی برای Mهای بزرگ غیر اقتصادی میگردد بهترین مبادله برای 4PSK و 4FSK می باشد

8) DPSK برای سرعت ثابت مناسب است. اگر قرار باشد سیستم بین ترمینالهای با سرعتهای مختلف یا کم و بیش تفاوت کار کند DPSK مناسب نیست.

کاربردهای عملی مدولاسیونها

(الف) برای کانال BB: معمولاً بصورت کابل کواکس یا زوج سیم می باشد که بطور اختصاصی در اختیار سیستم قرار داده میشود و برای آن از مدولاسیون PAM استفاده میشود (معمولاً باینری تا ۸تایی)

(ب) کانال تلفنی برای مصارف دیجیتال: این کانال بصورت شبکه وسیعی در دسترس می باشد و BP است ($0.3-3.4^{KHz}$)
برای مصارف تلگراف و تلکس و کامپیوتری نیز بکار میرود.
در تلگراف و تلکس سرعت خیلی کم $50\ bit/sec$ داریم و برای ارسال از OOK یا FSK پرش استفاده میشود.
روش استاندارد ادغام 24 کانال تلگرافی در یک کانال تلفنی است و به آن (VFTG) می گویند.
Voice Freq. Tele Graphy (VFTG)
در کاربرد کامپیوتری بسته به سرعت از مدولاسیونهای مختلف استفاده میشود.
تا $V_b = 1200\ bit/sec$ از FSK استفاده میگردد.
برای سرعتهای متوسط $1200-2400-8400\ bit/sec$ از 2psk — 4psk — 8psk استفاده میشود.
برای سرعت خیلی زیاد $9600\ bit/sec$ از 16QAM یا 8VSB که اقتصادی ترین مبادله عرض باند و قدرت را دارند استفاده میگردد. سرعتهای بیش از حد بالا بدلیل نیاز به قدرت بیشتر و محدود بودن قدرت مجاز ارسالی عملی نیست.

(ج) کانال HF یا سفری: برای ارسال تلکس به فواصل دور از مدولاسیونهای FSK و 4FSK و گاهی 32FSK (سیستم piccolo) استفاده میگردد.
در سیستم piccolo به هر حرف یک فرکانس اختصاص میدهند ولذا احتیاجی به کدینگ نیست.

(د) کانال MW زمینی: بعلت محدودیت غیرخطی بودن (و محدودی عرض باند) از مدولاسیونهای PSK 2/4/8 بصورت کهیرنت یا دیفرانسیل استفاده میشود.

(هـ) کانالهای MW ماهواره ای: علاوه بر محدودیت کانال MW زمینی دارای محدودیت قدرت نیز می باشد (محدود بودن کل انرژی ماهواره)
معمولاً از 4PSK که بهترین مبادله قدرت و عرض باند را دارد استفاده میشود و از آشکارسازی کهیرنت که قدرت کمتری میخواهد از 2psk و 8psk نیز گاهی استفاده میشود بخصوص در نواحی که با آنتنهای spot beam روشن میگردند چون گین آنتن بیشتر و محدودیت قدرت کمتر است از 8psk استفاده میشود.

مبحث پنجم : انتقال دیجیتال سیگنالهای آنالوگ

عناوین :

	صفحه
1) نمونه برداری و انترپولاسیون	(86-96)
2) کوانتیزه کردن و کدبندی	(96-102)
3) سیستم PCM	(103-116)

سیگنالهای آنالوگ یا بهمان صورت دیوسته نظیر BB ، AM ، DSB ، SSB ، VSB ، FM و ... ارسال میشوند و یا بصورت نمونه‌های سیگنال در یک رشته پالس ارسال میگردند. در این روش دوم یا نمونه‌ها کوانتیزه میشوند (PCM و مشتقات آن) و یا بصورت غیر کوانتیزه ارسال میشوند (PAM و PDM و PPM و یا شیفت فرکانسی یافته آنها)

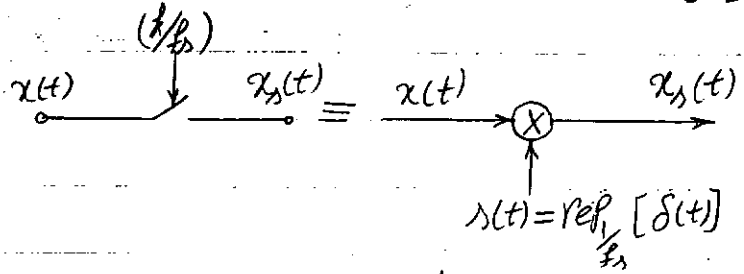
1) نمونه برداری و انترپولاسیون

تئوری نمونه برداری نایکوایست

تئوری: یک سیگنال بعرض باند W را میتوان بطور دقیق با $2W$ نمونه در ثانیه از روی مشخص نمود. همانطوریکه مشخص است در هر ثانیه N با $N+1$ نقطه از آن کاملاً مشخص میشود.

W میزان پیچیدگی سیگنال است و میتواند بعنوان معیاری از اطلاعات موجود در سیگنال باشد.

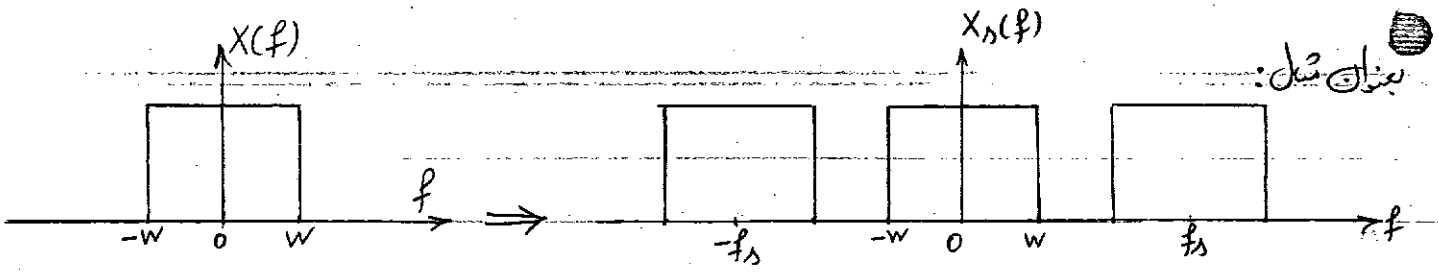
(الف) سیگنال پائین گذر $|f| < W$



« مدل ریاضی نمونه گیر »

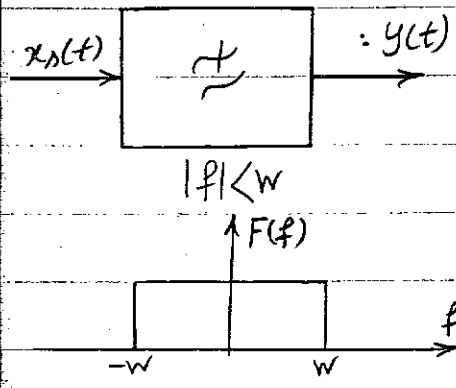
$$x_s(t) = x(t) \cdot s(t) = Comb_{1/f_s}[x(t)] \longleftrightarrow X_s(f) = f_s \, rep_{f_s}[X(f)]$$

به عنوان مثل:



واضح است که به ازای $f_s > 2W$ تداخلی بین تکرارها نداریم

لذا اگر $f_s > 2W$ باشد میتوان سیگنال پیوسته را با یک فیلتر بازسازی کرد.



فیلتر $F(f) = \text{rect}(f/2W)$

$$Y(f) = X_s(f) \cdot F(f) = f_s X(f)$$

$$\boxed{y(t) = f_s \cdot x(t)}$$

بررسی در حوزهٔ زمان:

$$x_s(t) = \text{Comb}_{1/f_s}[x(t)] = \sum_k x(k/f_s)\,\delta(t - k/f_s)$$

فیلتر $f(t) = 2W\,\text{Sinc}(2Wt)$ ، $y(t) = x_s(t) * f(t)$

$$y(t) = x_s(t) * f(t) = 2W \sum_k x(k/f_s)\,\text{Sinc}\,2W(t - k/f_s)$$

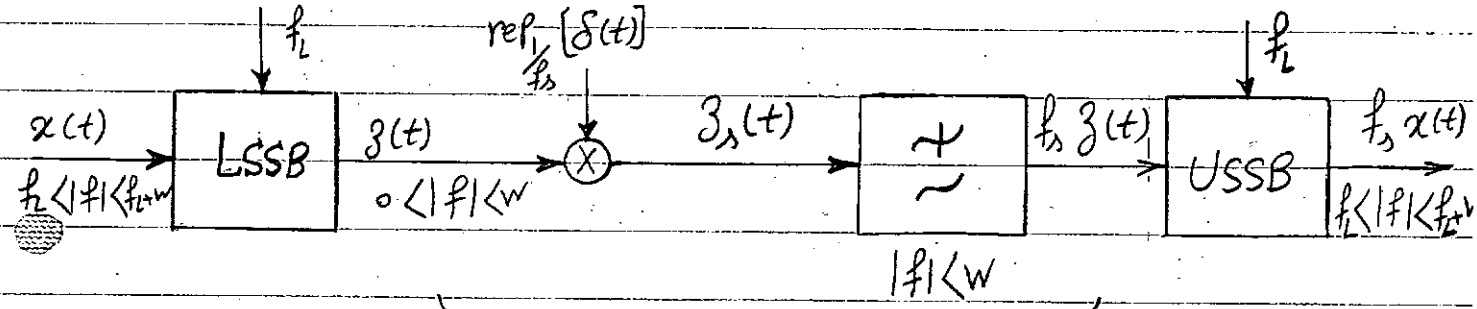
با توجه به نتیجه در حوزهٔ فرکانس $y(t) = f_s \cdot x(t)$

$$\boxed{x(t) = \frac{2W}{f_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k/f_s)\,\text{Sinc}\left[2W(t - k/f_s)\right]}$$

این رابطه نشان میدهد که با یک نمونه‌های سیگنال $x(k/f_s)$ دقیقاً میتوان سیگنال $x(t)$ را در تمام لحظات بدست آورد. این عمل و لذا فیلتر بازسازی را انترپولاسیون گویند (گذراندن یک منحنی پیوسته از محل نمونه‌های آن)

(ب) سیگنال میانگذر $f_L < |f| < f_L + W$:

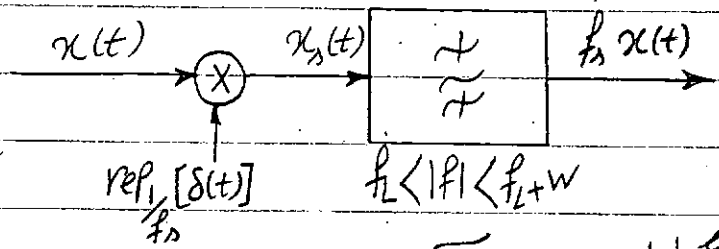
ابتدا سیگنال میانگذر بعرض باند W را به باند پایه منتقل کرده پس نمونه برداری و ارسال می کنیم و در گیرنده نیز پس از انتروپولاسیون طیف سیگنال را به باند حقیقی خود انتقال میدهیم.



تعداد $2W$ نمونه در ثانیه کافی است

پس سیگنال میانگذر بعرض باند W نیز از نظر اصولی همان پیچیدگی های سیگنال باند پایه بعرض باند W را دارد و لذا به تعداد $2W$ نمونه در ثانیه برای مشخص شدن نیاز دارد.

(ج) سیگنال میانگذر بدون شیفت فرکانسی

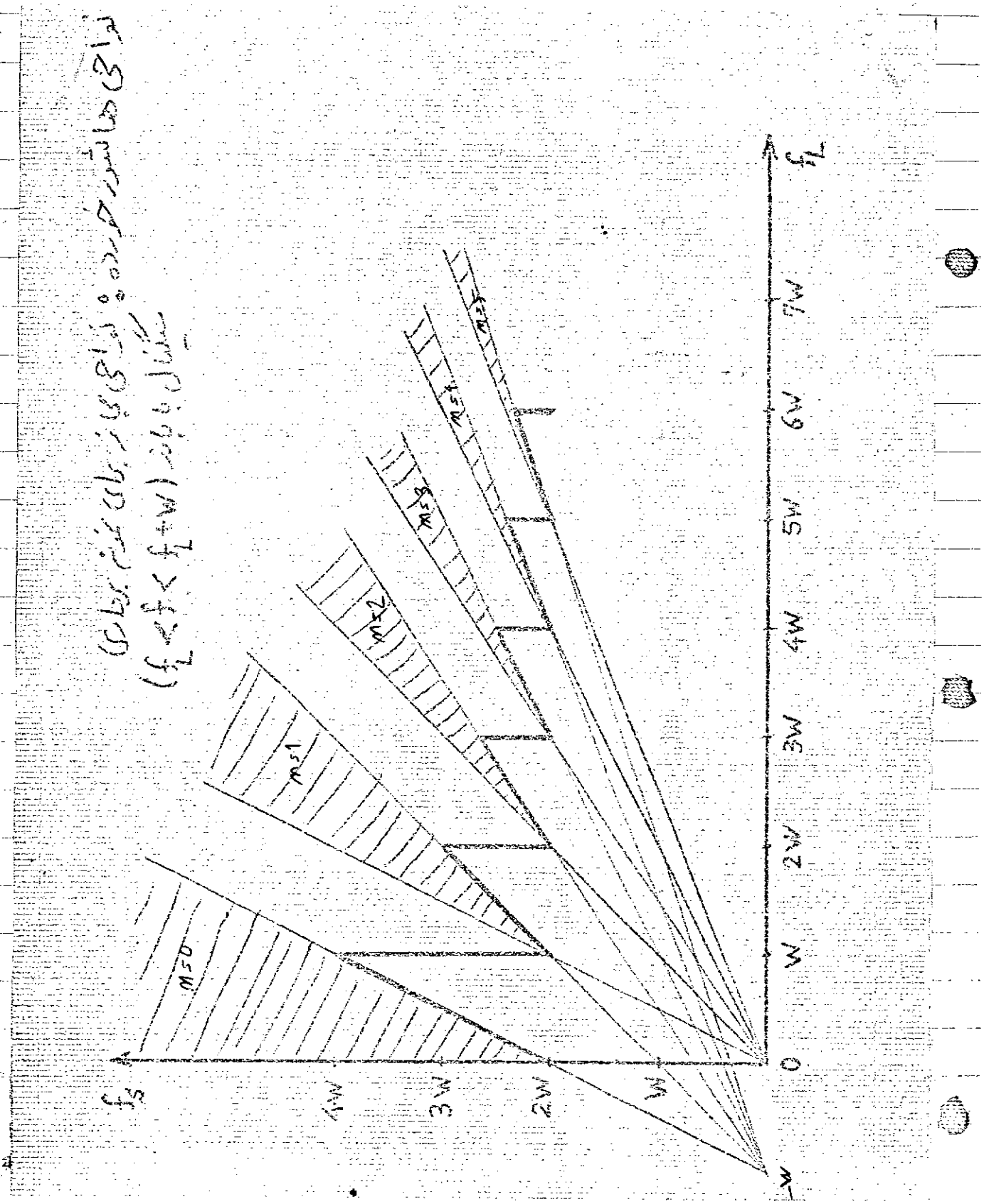


تابع rep را همیشه میتوان با روش تا کردن از سیگنال اصلی بدست آورد.

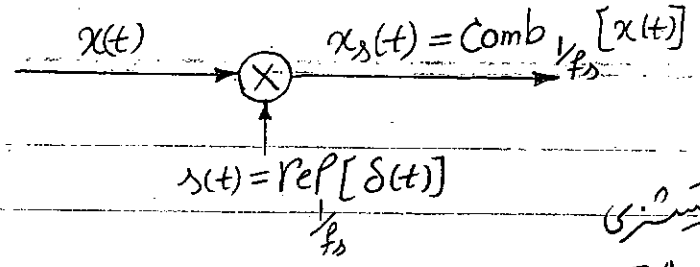
$$x_s(f) = f_s \, \text{rep}_{f_s}[X(f)]$$

جمع قطعات حاصل از تا زدن متوالی سیگنال اصلی حول دو محور ۰ و $f_s/2$ تناوب، مساوی تابع rep_{f_s} در نیم پریود است. برای اینکه تداخلی در بیدا کردن طیف سیگنال اصلی رخ ندهد باید تداخلی بین قطعات تاخورده طیف رخ ندهد یعنی طیف در یکی از ناحیه های (intervals) $nf_s/2$ تا $(n+1)f_s/2$ قرار داشته باشد.

یعنی $f_L > n f_{s/2}$ و $f_L + W < (n+1) f_{s/2}$ و از حل این دو نامعادله به ازای مقادیر مختلف n نواحی هارمونیک خورده در مخنی زیر بدست می آید. مخنی دندان اره ای پررنگ حداقل f_s را برای هر مقدار f_L مشخص می کند.



طیف قدرت و همبستگی نمونه‌ها



اگر دو سیگنال مستقل در هم ضرب شوند دیگی از آنها اسپیشری باشد طیف قدرت حاصلضرب کانولو دو طیف قدرت است.

سیگنال در حوزه زمان		طیف قدرت
$x(t)$	$\longleftrightarrow$	$G_x(f)$
$s(t)$	$\longleftrightarrow$	$G_s(f)$
$x_s(t)$	$\longleftrightarrow$	$G_x * G_s$

تبدیل فوریه

$$s(f) = f_s\, rep_{f_s}[\delta(f)] \Longrightarrow G_s(f) = f_s^2\, rep_{f_s}[\delta(f)]$$

طیف قدرت

$$G_{x_s}(f) = G_s * G_x = f_s^2\, rep_{f_s}[\delta(f)] * [G_x(f)]$$

$$\boxed{G_{x_s}(f) = f_s^2\, rep_{f_s}[G_x(f)]} \qquad \boxed{R_{x_s}(\tau) = f_s\, Comb_{1/f_s}[R_x(\tau)]}$$

نکته مهم: در حالت کلی $R_x\left(\frac{k}{f_s}\right) \neq 0$ است یعنی همبستگی دو نمونه از سیگنال به فاصله k/f_s در حالت کلی مخالف صفر است ولذا نمونه‌ها مستقل از یکدیگر نمی‌باشند. و یک منبع نمونه برداری شده نظیر حروف یک متن فارسی یا انگلیسی به دلیل وابستگی بین نمونه‌ها (یا حروف) دارای اضافات می‌باشد.

نویز و اعوجاج ناشی از نمونه برداری و انترپولاسیون

اعوجاج و نویز در سیستم‌هایی که بجای سیگنال پیوسته نمونه‌ها ارسال میگردند عبارتند از:

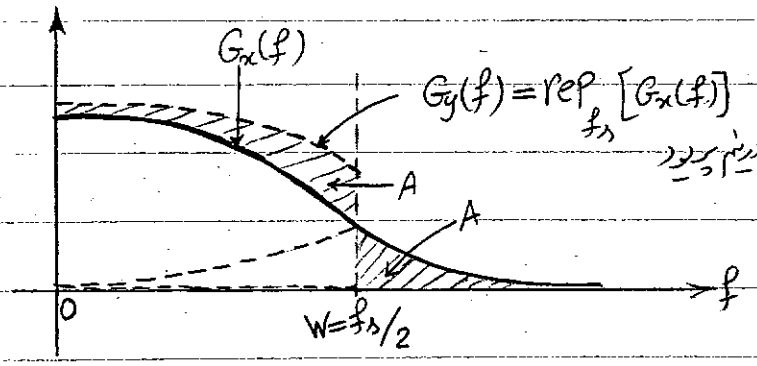
۱- اعوجاج و نویز ناشی از نمونه برداری

۲- اعوجاج و نویز که ضمن انتقال نمونه‌ها در سیگنال ایجاد میگردد

۳- اعوجاج و نویز ناشی از انترپولاسیون نمونه‌ها در گیرنده

(الف) ناشی از نمونه برداری:

اگر سیگنال در خارج باند W مؤلفه‌ای نداشته باشد در طیف نمونه‌هایی که به فاصله زمانی $\frac{1}{f_s} = \frac{1}{2W}$ از یکدیگر قرار دارند تداخلی بین قسمتهای تکرار شده رخ نمیدهد ولذا اعوجاجی نداریم.



اعوجاج و نویز ناشی از نمونه برداری بدلیل وجود مؤلفه‌هایی در خارج باند W است که با پدیدهٔ تاخوردگی به داخل باند منتقل شده‌اند و لذا به آن اعوجاج تاخوردگی میگوییم.

در گیرنده در خروجی فیلتر انترپولاسیون $y(t)$ دارای طیف قدرت $G_y(f)$ خواهد بود.

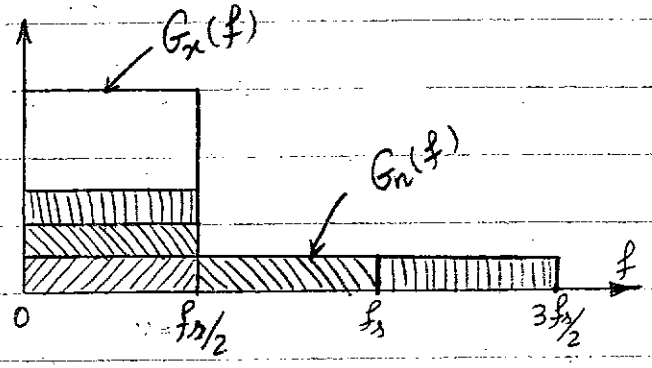
(Foldover Distortion = Aliasing Distortion)

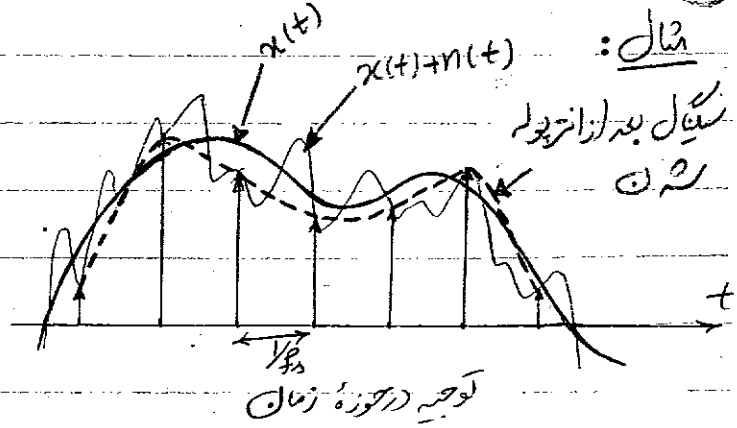
قدرت اعوجاج $D = 2\int_0^{f_s/2} [G_y(f) - G_x(f)]\,df = 2A = 2\int_0^{f_s/2} G_x(f)\,df$

قدرت سیگنال $S = 2\int_0^{f_s/2} G_x(f)\,df \simeq 2\int_0^{\infty} G_x(f)\,df$

بهمین دلیل نویز خارج باند نیز به داخل باند منتقل میگردد و به آن نویز تاخوردگی گوییم.

$$d = \frac{D}{S} = \frac{\int_{f_s/2}^{\infty} G_x(f)\,df}{\int_0^{\infty} G_x(f)\,df}$$ نسبت اعوجاج تاخوردگی





مثال: سیگنال بعد از انترپوله شده

توجه در حوزهٔ زمان

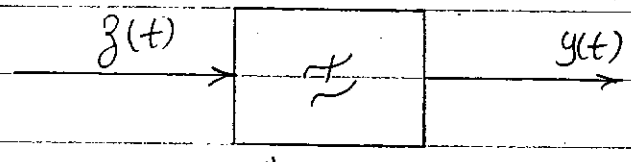
در این مثال سیگنال به نویز (S/N) بعد از نمونه برداری سه برابر مقدار اولیه است. بطوریکه ملاحظه میگردد اگر نویز فرکانس بالا را حذف نکنیم بالتمام قدرت روی نمونه‌ها تأثیر میگذارد که دیگر قابل تشخیص از نمونه‌های اصلی نمی‌باشند.

روش مقابله حذف مؤلفه‌های خارج باند (اعم از نویز یا سیگنال اصلی) قبل از نمونه برداری و بوسیله فیلتر مناسب است.
در عمل همیشه فیلتری قبل از نمونه برداری برای منظور فوق بکار میرود.

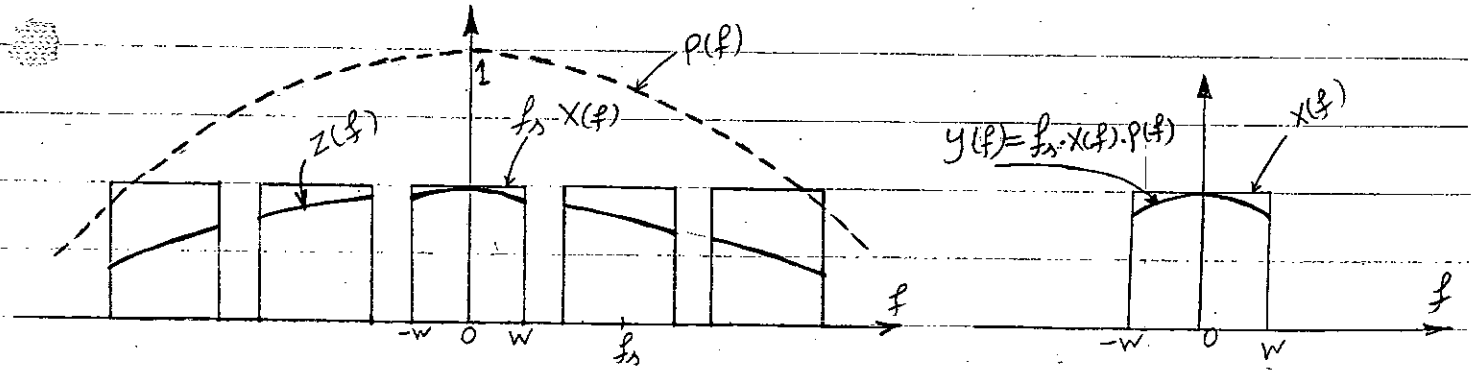
(ب) اعوجاج ناشی از انترپوله کردن:

اگر دریافت کننده نمونه‌ها بصورت PAM ضربه‌ای دریافت کند (یعنی $\text{Comb}_{1/f_s}[x(t)]$) و از فیلتر چهارگوش ایده‌آلی برای انترپولاسیون استفاده شود البته اعوجاجی نخواهیم داشت ولی در عمل از PAM غیرضربه‌ای استفاده میشود و ضمناً فیلتر نیز مشابه ایده‌آل ندارد که این باعث اعوجاج میگردد.

1- استفاده از PAM غیرضربه‌ای



شکل پالس
PAM غیرضربه‌ای: $z(t) = (\text{PAM ضربه‌ای}) * h(t)$
$= \text{Comb}_{1/f_s}[x(t)] * h(t) \Longrightarrow Z(f) = f_s \, \text{rep}_{f_s}[X(f)] \cdot P(f)$



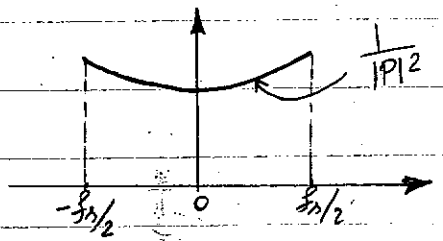
همانطوریکه اشکال نشان میدهند خروجی فیلتر ایده‌آل انترپولاسیون $Y(f)$ با $X(f)$ متفاوت است

این اعوجاج را اعوجاج روزنه‌ای گویند (Aperture Distortion). در عمل از PAM چهارگوش استفاده میشود.

$$h(t) = rect(t/\tau) \longleftrightarrow P(f) = \tau\, Sinc(f\tau)$$

$$\text{افت اضافی لبهٔ باند} = 10\log\left|\frac{1}{P(f)}\right|^2\Big|_{f=f_s/2=W} = 10\log\left[\frac{1}{Sinc^2(f_s\tau/2)}\right]$$

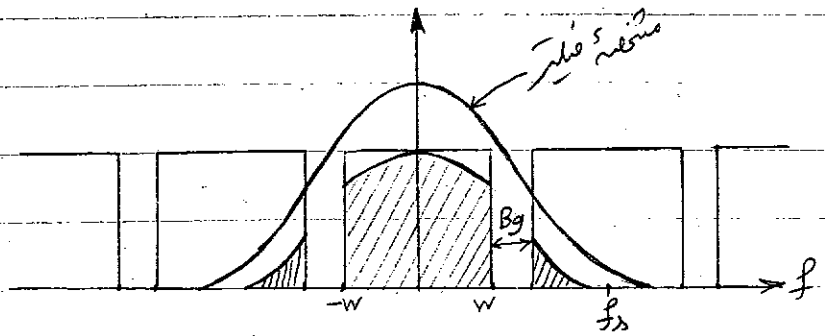
$$\text{افت اضافی لبهٔ باند برای شکل موج چهارگوش} = \begin{cases} 0.15\ dB & \tau = 0.2\ 1/f_s \\ 0.91\ dB & \tau = 0.5\ 1/f_s \\ 3.9\ dB & \tau = 1/f_s \end{cases}$$



برای مقابله میتوان از تریم دامنه استفاده کرد (فیلتری با عرض دامنهٔ $\frac{1}{|P(f)|^2}$)

و یا اینکه از فیلتر اینترپولاسیون با شیب رو برو استفاده کنیم. در عمل برای عرض باندهای محدود $\frac{0.5}{f_s}$ امتیاز فروش نیست.

۲- اعوجاج غیر ایدهآل بودن فیلتر اینترپولاسیون: (اعوجاج بازسازی Reconstruction Distortion)



اعوجاج هم در داخل باند فرکانسی $X(f)$ هم در خارج باند بوجود می آید

راه مقابله استفاده از سرعت نمونه برداری بیش از $2W$ است بطوریکه باند محافظ کافی (Bg ≡ Gard Band)

برای تراتریت فیلتر از باند عبور به باند حذف وجود داشته باشد.

$$Bg = f_s - 2W$$

بعنوان مثال برای نمونه برداری سیگنال صوتی با عرض باند $W = 3.4\ KHz$ بطور استاندارد از سرعت $f_s = 8\ KHz$ استفاده میگردد

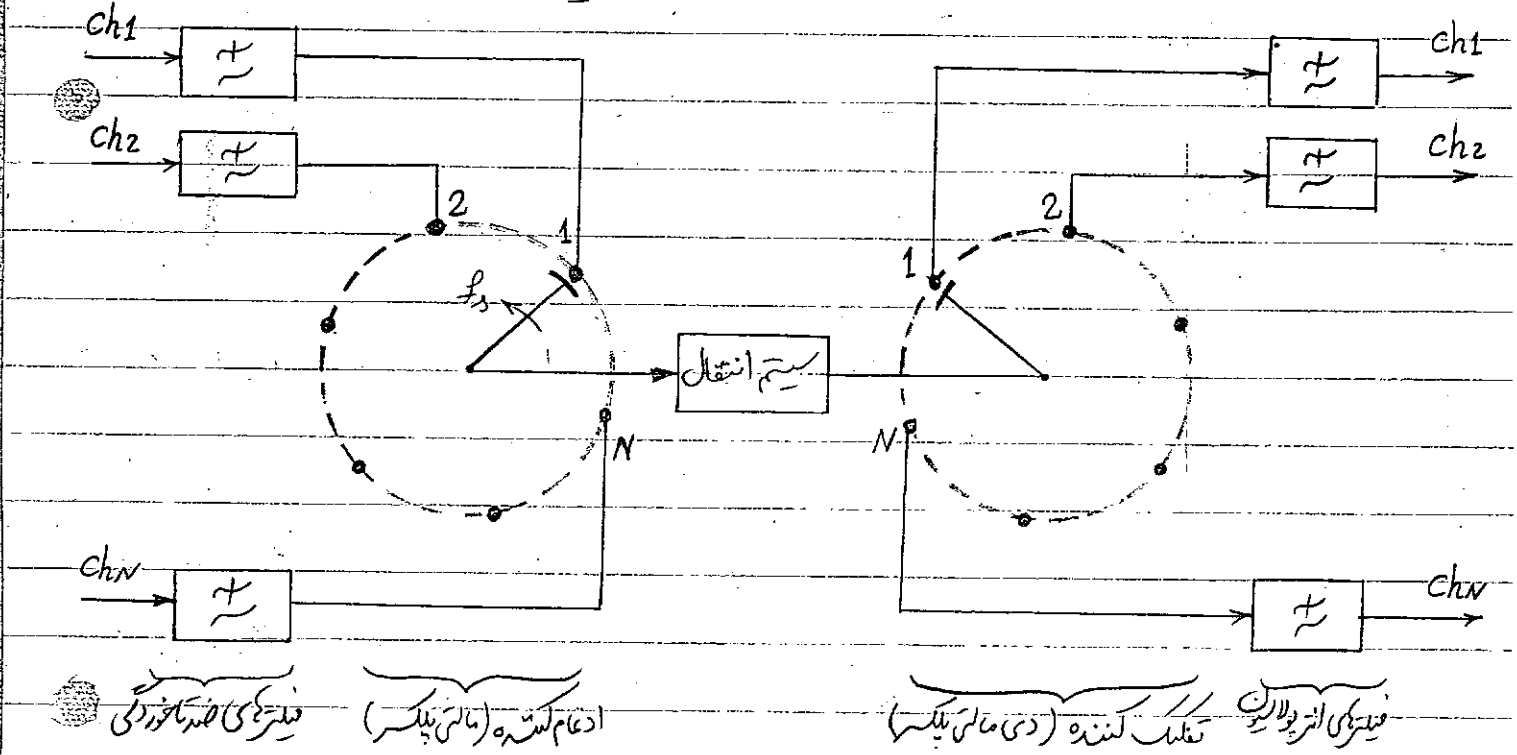
$$\frac{Bg}{W} = \frac{8 - 2\times 3.4}{3.4} = 0.35 \equiv 35\%$$

ادغام با تقسیم زمانی (TDM)

((Time Division Multiplexing))

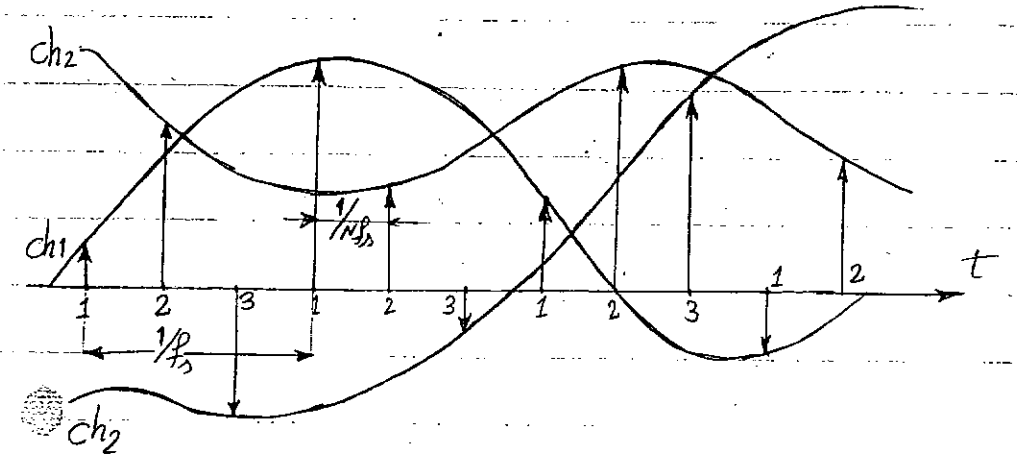
TDM روشی است برای ادغام که ارسال نمونه‌ها را بجای سیگنال پیوسته فراهم می‌کند و آن ارسال نمونه‌های چند کانال لابلای یکدیگر می‌باشد. اصولاً ادغام برای ارسال همزمان چند سیگنال از یک کانال فیزیکی واحدی باشد. نوع دیگر ادغام FDM می‌باشد

((Frequency Division Multiplexing))



«سیستم ادغام با تقسیم زمانی TDM»

مثال با سه کانال:



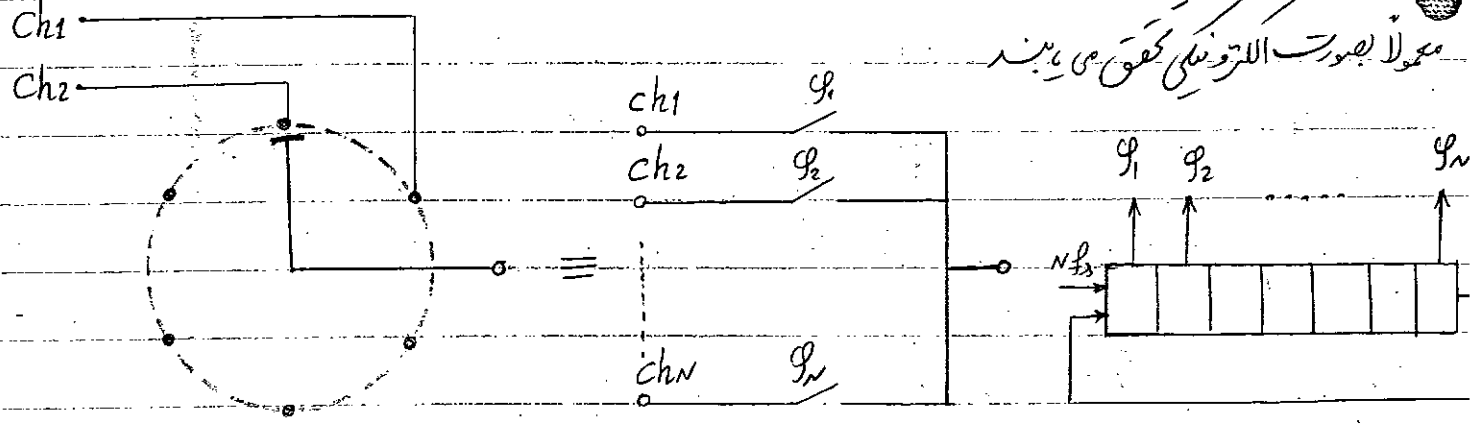
نکات:

1) تمام کانال‌ها با سرعت f_{s_i} نمونه برداری میشوند ولذا طبق تئوری نمونه برداری $f_{s_i} \geq 2W_i$ $i=1,2,\dots,N$

یعنی $f_{s_i} \geq 2W_{MAX}$ ضمناً سرعت نمونه‌ها Nf_{s_i} می باشد

2) باسیمی ادغام کننده و تفکیک کننده (MUX و DEMUX) همزمان باشند

3) در سرعتهای کم کلیدهای دوار بهمین صورت و الکترومکانیکی هستند (بخصوص در اندازه‌گیری از راه دور «تله‌متری») ولی معمولاً بصورت الکترونیکی تحقق می یابند



"Multiplexer" "Ring Counter"

پالس‌های g_1 تا g_N با سرعت f_{s_i} بوده و نسبت بهم تأخیر $\frac{1}{Nf_{s_i}}$ دارند و برای فرمان سوئیچ‌های الکترونیکی بکار میروند.

تقایسه FDM:

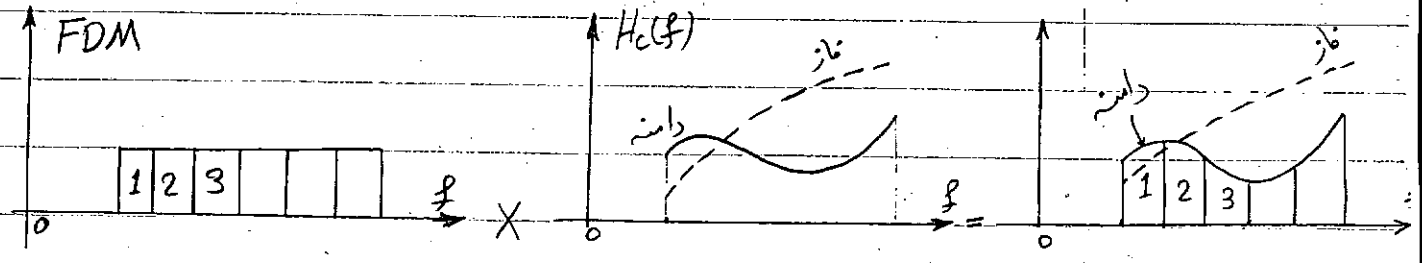
1) از نظر مدار TDM ساده‌تر از FDM است (بعلت وجود فیلترها و مدولاتورهای متعدد در FDM) بخصوص در سرعتهای کم

2) حداقل عرض باند لازم برای FDM با مدولاسیون SSB برابر $\sum_{i=1}^{N} W_i$ می باشد. در TDM سرعت نمونه‌ها حداقل $Nf_{s_i} = 2NW_{MAX}$ است و عرض باند لازم برای ارسال PAM آنها نصف سرعت نمونه‌ها یعنی NW_{MAX} می باشد. چون $NW_{MAX} \geq \sum_{i=1}^{N} W_i$ لذا TDM به عرض باند بیشتری احتیاج دارد.

3) تأثیر اعوجاج غیرخطی در کانال: در TDM نمونه‌ها به صورت پالس‌هایی که با هم تداخل زمانی ندارند یا تداخل کمی دارند ارسال میشود لذا یک TDM تقریباً هیچ یک یک کانال است ولی در FDM کانال‌ها در حوزه‌ی زمان تداخل دارند ولذا یک FDM ممکن است تا N برابر یک هریک از کانال‌ها باشد پس اصولاً امکان ورود به ناحیه‌ی غیرخطی برای FDM بیشتر است.

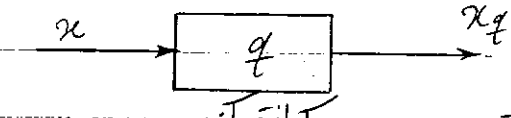
در ناحیه‌ی غیرخطی برای TDM تداخل بین کانال‌ها رخ نمیدهد ولی در FDM بین کانال‌ها تداخل رخ میدهد پس از نظر اعوجاج غیرخطی اصولاً TDM بهتر از FDM است

4) تأثیر اعوجاج خطی کانال (فاز و دامنه): اعوجاج دامنه یا فاز باعث تغییر شکل پالس سیستم میگردد. در TDM امکان تداخل بین پالس‌های مجاور ((کانال‌های مجاور)) وجود دارد. در FDM اعوجاج دامنه و فاز باعث اعوجاج فاز و دامنه‌ی هر یک از کانال‌ها میگردد ((بدون تداخل آنها)). برای کانال‌های صوتی بعلت عدم حساسیت گوش به خیز فاز اعوجاج فاز اهمیتی ندارد.



۲- کوانتیزه کردن و کدبندی

برای ارسال دیجیتال نمونه‌های آنالوگ باید آنها را به ارقام باینری تبدیل نمود مثلاً برای هر نمونه یک کد باینری اختصاص داد. چون برد نمونه‌های یک سیگنال آنالوگ پیوسته است برای اینکه تعداد کدهای لازم برای کدبندی محدود شود لازم است نمونه‌ها را کوانتیزه (رند) کنیم.



x: عددی است که برد پیوسته دارد ((مثلاً یک نمونه)) در حالت نرمالیزه محدود به ± 1 است و pdf آن $f_x(x)$ ی باشد.

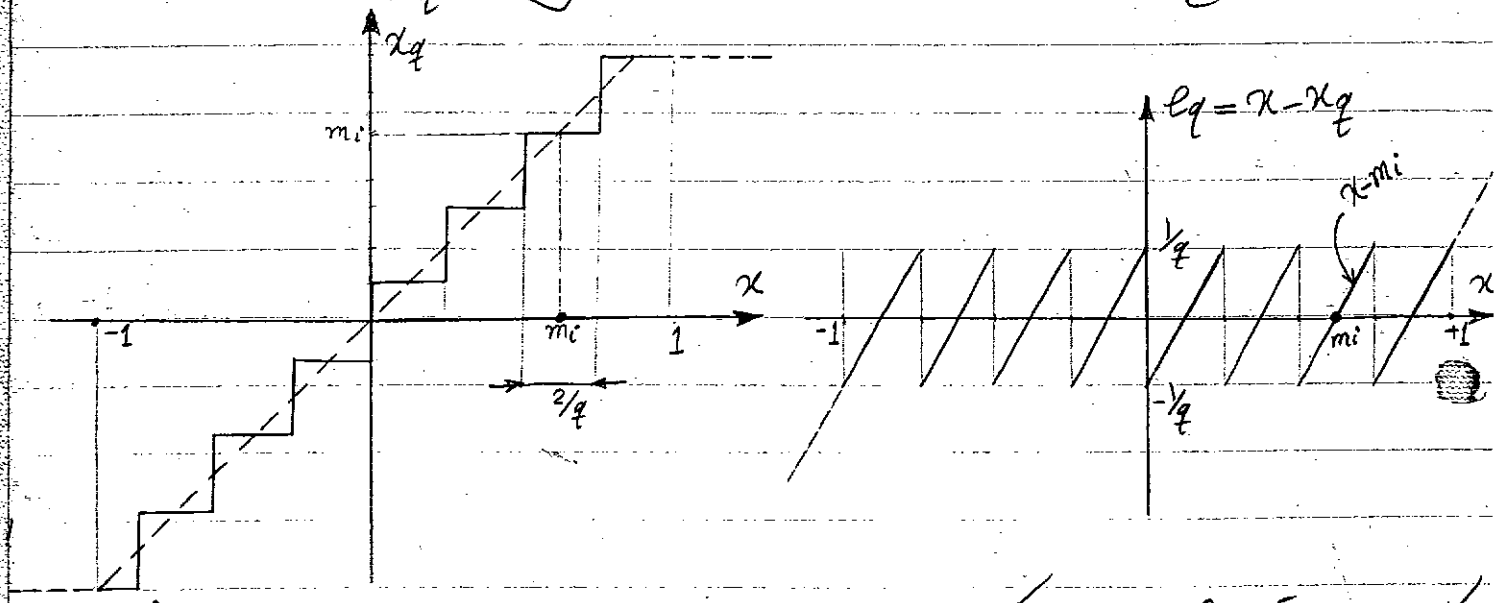
q: کوانتیزه کننده: برخی پیوسته تغییرات x در دو حد ± 1 را مثلاً به q قسمت تقسیم می‌کند بسته به اینکه ورودی x در کدام کوانتم واقع باشد (مثلاً نام) x را به عددی متناظر با کوانتم نام (مثلاً m_i) رونده می‌کند.

x_q: عدد کوانتیزه شده که فقط یکی از q مقدار $m_1, m_2, \dots, m_q$ را اختیار می‌کند

عرض کوانتم ممکن است مساوی باشد که در آنصورت سکوانتیزه کننده را یکنواخت گوئیم و ممکن است غیرمساوی باشد که آنرا کوانتیزه کننده غیر یکنواخت می‌نامیم.

کوانتیزه کننده یکنواخت

این کوانتیزه کننده برخ ± 1 را به q قسمت مساوی تقسیم می‌کند ولذا عرض هر کوانتم $2/q$ می‌باشد.



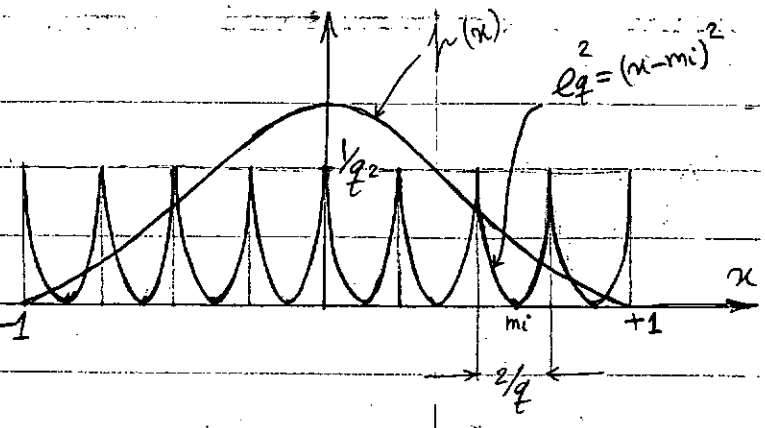
اگر x از حدود تعیین شده ± 1 تجاوز کند حالت over load یا برش رخ میدهد (منحنی‌های خط‌چین در دو شکل بالا)

معمولاً حدود برش ± 1 آنقدر بزرگ در نظر گرفته میشود که احتمال $|x|>1$ خیلی کم باشد و میتوان از خطاهای ناشی از برش صرفنظر کرد. بعنوان معیاری از خطای کوانتیزه کردن میتوان مقدار متوسط مربع خطا یعنی $\overline{e_q^2}$ را در نظر گرفت.

$$\overline{e_q^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e_q^2 \, p(x)\,dx$$

در کوانتم i ام $= \int_{m_i-1/q}^{m_i+1/q} (x-m_i)^2 p(x)\,dx$

$$\overline{e_q^2} = \sum_{i=1}^{q} \int_{m_i-1/q}^{m_i+1/q} (x-m_i)^2 p(x)\,dx$$



$\overline{e_q^2}$ = سطح زیر حاصلضرب دو منحنی فوق

معمولاً q بزرگ و لذا عرض کوانتم‌ها خیلی کم است و با تقریب خوبی می‌توان $p(x)$ را در هر کوانتم خطی فرض کرد.

بسط تیلور تا یک مرتبه در کوانتم i ام $p(x) \approx p(m_i) + p'(m_i)(x-m_i)$

$$\overline{e_q^2} = \sum_{i=1}^{q} \int_{m_i-1/q}^{m_i+1/q} (x-m_i)^2 \left[p(m_i) + p'(m_i)(x-m_i)\right] dx \qquad x-m_i = y$$

تغییر متغیر

$$\overline{e_q^2} = \sum_{i=1}^{q} \int_{-1/q}^{+1/q} \left[y^2 p(m_i)\,dy + y^3 p'(m_i)\,dy\right] = \frac{1}{3q^2} \sum_{i=1}^{q} \frac{2}{q} p(m_i) \quad (1)$$

سطح صفر دارد چون y^3 یک تابع فرد است

$$\int_{-1}^{+1} p(x)\,dx = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{q} \int_{m_i-1/q}^{m_i+1/q} \left[p(m_i) - (x-m_i)\,p'(m_i)\right] dx = 1$$

$$\sum_{i=1}^{q} \int_{-1/q}^{+1/q} \left[p(m_i) + y\,p'(m_i)\right] dy = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{q} \frac{2}{q} p(m_i) = 1 \quad (2)$$

سطح مساحت صفر دارد چون تابع فرد است

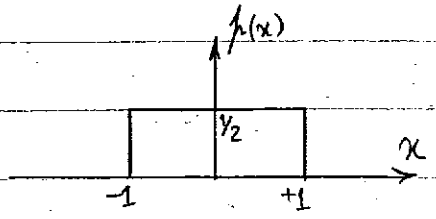
(۱) و (۲) $\Longrightarrow$

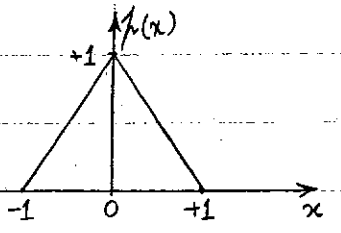
$$\boxed{\overline{e_q^2} = \frac{1}{3q^2}}$$

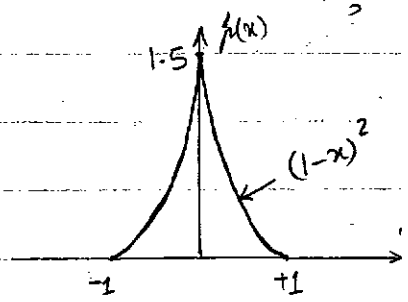
مقدار نرمالیزه شده متوسط مجذور خطا نسبت به متوسط مجذور دامنه ورودی پارامتر مهمی می باشد

$$\frac{\overline{x^2}}{\overline{e_q^2}} = \frac{S}{N}\Big|_q = 3q^2\overline{x^2}$$

چند مثال:







① $\begin{cases} \overline{x^2} = \frac{1}{3} \\ \frac{S}{N}\Big|_q = q^2 \end{cases}$

② $\begin{cases} \overline{x^2} = \frac{1}{6} \\ \frac{S}{N}\Big|_q = 0.5q^2 \end{cases}$

③ $\begin{cases} \overline{x^2} = 0.1 \\ \frac{S}{N}\Big|_q = 0.3q^2 \end{cases}$

④ $\begin{cases} \overline{x^2} = \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2}(1)^2 = \frac{1}{2} \\ \frac{S}{N}\Big|_q = 3/2\, q^2 \end{cases}$

یک نمونه دلخواه از یک موج سینوسی که مقدار پیک ± 1 دارد

q	$N = \log_2 q$	موج سینوسی $\overline{x^2} = 1/2$	سیگنال مکالمه با قدرت متوسط $\overline{x^2} = 0.04$	$\frac{S}{N}\Big|_q$ [dB]
8	3	20	9	← حد مفهوم بودن
16	4	26	15	
32	5	32	21	
64	6	38	27	
128	7	44	33	مناسب برای ارتباطات تلفنی
256	8	50	39	
512	9	56	45	
1024	10	62	51	
2048	11	68	57	مناسب برای موزیک و Hifi
4096	12	74	63	

کوانتیزه کننده‌ٔ غیر یکنواخت

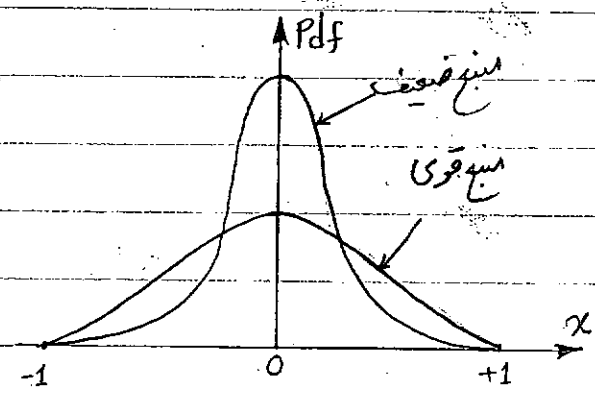
سه دلیل مهم برای ارجحیت کوانتیزه کننده‌ٔ غیر یکنواخت عبارتند از :

(الف) ماکزیمم کردن $S/N|_q$: میتوان با انتخاب عرض‌های مناسب برای کوانتم‌ها و m_iهای مناسب نویز کوانتیزه را مینیمم کرد. میتوان پیش بینی کرد که برای مینیمم شدن نویز باید عرض کوانتم‌ها را در جائیکه pdf بزرگ است کوچک گرفت یعنی هرجا که x محتمل‌تر است را دقیقتر کوانتیزه کنیم.

(ب) ماکزیمم انتروپی : x_q میتواند q مقدار مختلف اختیار کند. برای ماکزیمم شدن انتروپی باید احتمال صدور q مقدار m_1 تا m_q مساوی باشد یعنی سطح زیر pdf در کوانتم‌های مختلف مساوی باشد. میتوان پیش بینی کرد که هرجا pdf زیاد است باید عرض کوانتم را کم گرفت. نتیجه‌ٔ این شیوه الف بدست می‌آید ولی نه یکسان با آن.

(ج) مستقل کردن $S/N|_q$ از قدرت ورودی x :

این مهمترین علت کاربرد q غیر یکنواخت است. در q یکنواخت داشتیم $\frac{S}{N}|_q = 3q^2\overline{x^2}$ لذا $S/N|_q$



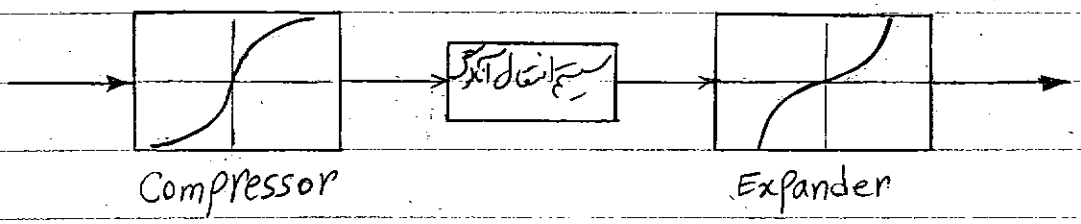
برای منابع مختلف متفاوت خواهد بود.

مثال عملی: در ارتباطات تلفنی قدرت منبع ورودی بسته به قدرت صوتی شخص استاده کننده ممکن است تا حدود 40dB فرق کند.

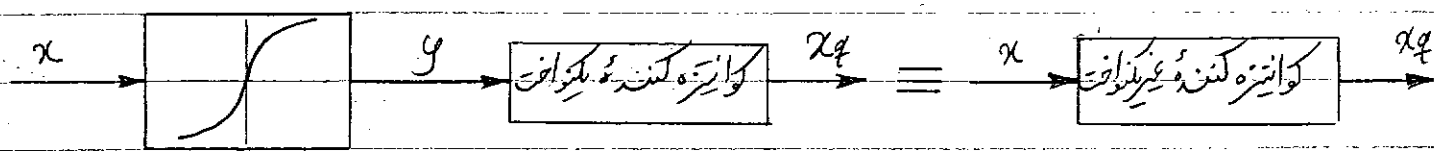
رنج کوانتیزه کردن باید با توجه به منبع قوی انتخاب شود تا نویز برش یا overload نداشته باشیم. لذا برای منبع ضعیف از تعداد کوانتم‌ها استفاده نمیشود. بعنوان مثال برای $q=256$ و اختلاف قدرت 40dB

((دامنهٔ $\frac{1}{100}$)) مبنی قوی با 256 دامنهٔ مختلف کوانتیزه میشود و ضعیفترین منبع با $\frac{256}{100} \approx 2$ دامنهٔ مختلف کوانتیزه میشود. راه حلی که پیش بینی میگردد اینست که دامنه‌های کوچکتر را دقیقتر از دامنه‌های بزرگتر کوانتیزه کنیم.

مسأله گفته شده در کانالهای تلفن منجر به کوانتیزه کننده‌ئیست و در کلیهٔ روشهای مخابرهٔ تلفنی ((آنالوگ یا دیجیتال)) باید در نظر گرفته شود. در مخابرهٔ تلفنی آنالوگ از روش کامپندینگ ((Compressor + Expander = Compander)) استفاده میشود

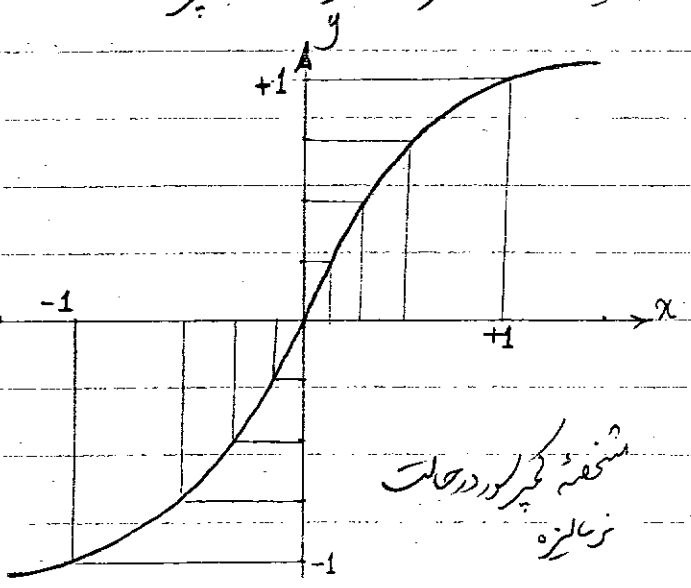


عمل کوانتیزه کنندهٔ غیریکنواخت هم معادل عمل کمپرسور است.



کمپرسور

هم میتوان مستقیماً کوانتیزه کنندهٔ غیریکنواخت را طراحی کرد و هم میتوان از کوانتیزه کنندهٔ یکنواخت و کمپرسور استفاده کرد



مشخصهٔ کمپرسور در حالت نرمالیزه

در عمل از هر دو روش استفاده میشود.

میتوان نشان داد که برای q غیریکنواخت داریم

$$\overline{e_q^2} = \frac{\int_{-1}^{+1} \frac{1}{[y']^2} p(x)\,dx}{3q^2}$$

برای q یکنواخت:

$$y=x \Rightarrow y'=1 \Rightarrow \overline{e_q^2} = \frac{1}{3q^2}$$

$$\frac{S}{N}\Big|_q = \frac{\overline{x^2}}{\overline{e_q^2}} = 3q^2 \frac{\int_{-1}^{+1} x^2 f(x)\,dx}{\int_{-1}^{+1} \frac{1}{[y']^2} f(x)\,dx}$$

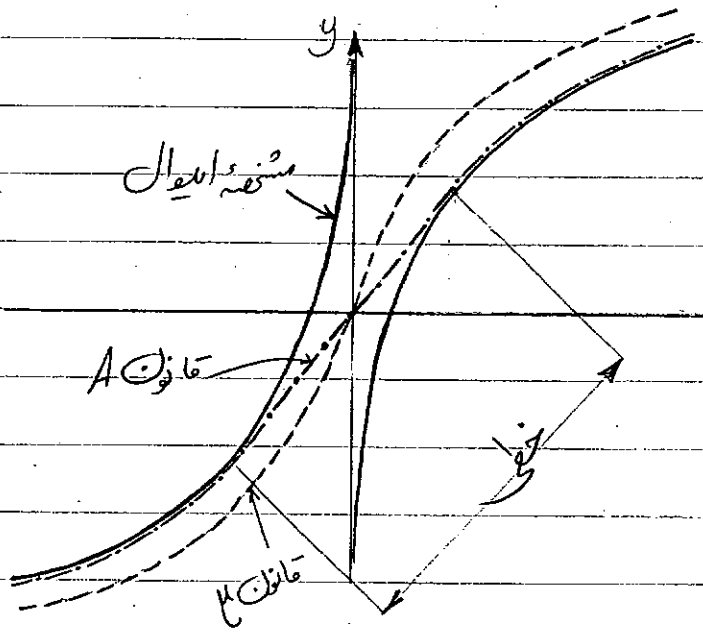
بطور ایده‌آل برای اینکه سیگنال بزرگ کوانتیزه مستقل از pdf ورودی باشد باید $\frac{S}{N}\Big|_q = 3q^2k^2$ باشد و لذا:

$$[y']^2 = \frac{k^2}{x^2}$$

$$[y'] = \pm\frac{k}{x} \Rightarrow y = k_1 \ln(k_2 x)$$

رابطه‌ی فوق بطور دقیق قابل تحقق نیست و لذا تقریب‌هایی استاندارد شده است.

1) قانون A:



$$y = \begin{cases} \dfrac{1+\ln Ax}{1+\ln A} & x \gg \dfrac{1}{A} \\ \dfrac{Ax}{1+\ln A} & x \ll \dfrac{1}{A} \end{cases}$$

این استاندارد در اروپا و ایران بکار می‌رود و

مقدار $A = 87.6$ است ((CCITT))

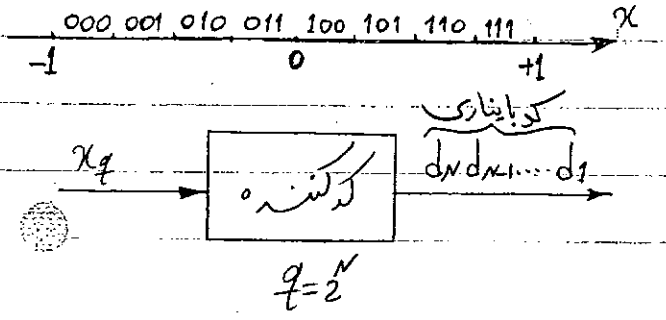
2) قانون μ:

$$y = \frac{\ln(1+\mu x)}{\ln(1+\mu)}$$

در عمل $\mu = 100$ استفاده می‌شود و این استاندارد در آمریکا و کانادا و ژاپن متداول است.

با $\mu = 100$ و یا $A = 87.6$ رنج دینامیکی تقریباً 40 dB بدست می‌آید که کافی برای ارتباطات تلفنی است.

کدبندی



کدبندی یعنی تبدیل نمونه‌های کوانتیزه شده به ارقام باینری.

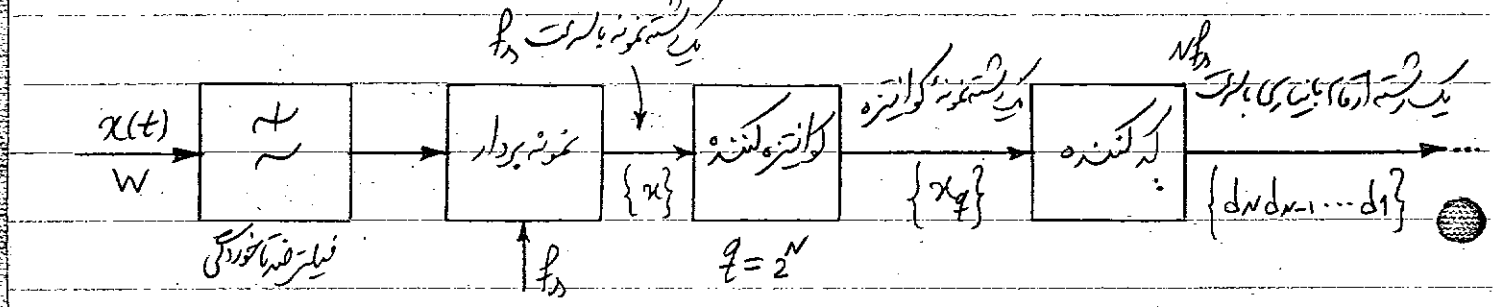
اگر $q = 2^N$ باشد برای کدبندی N بیت لازم است اگر سرعت نمونه‌های کوانتیزه x_q برابر f_s باشد سرعت ارقام باینری Nf_s است.

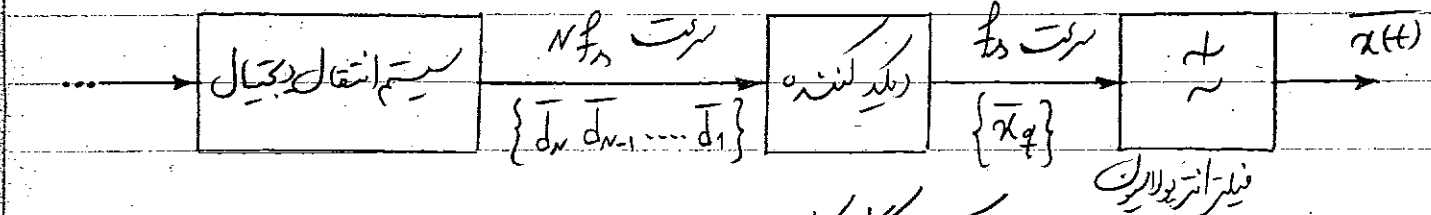
سیستم PCM

((Pulse Code Modulation))

انواع مدولاسیون‌های پالس برای تبدیل نمونه‌ها یا اعداد به سیگنالی متشکل از یک رشته پالس:

- PAM : یک رشته پالس که دامنه آن‌ها متناظر با نمونه‌هاست.
- PPM : 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 محل 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 .
- PDM≡PWM : 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 عرض 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 .
- PCM و مشتقات آن: یک رشته پالس باینری که کد بکار رفته متناظر با نمونه‌هاست.





« بلوک دیاگرام یک سیستم PCM »

ارقام باینری حاصل را میتوان نظیر ارقام باینری خروجی کامپیوتر و یا هر منبع دیجیتال دیگری ارسال نمود. در مبحث سوم ارسال در باند پایه بصورت PAM (معمولاً باینری تراز شده و گاهی کوانتیزه) و در مبحث چهارم ارسال بصورت کاریر (PSK و FSK و ASK و یا مدولاسیون‌های چند تراز کاریر) بحث شد.

سرعت ارقام باینری $Nf_s \geq 2NW$ است یعنی حداقل سرعت $2NW$ می‌باشد. مثلاً برای سیگنال صوتی با $W=4KHz$ و $q=256=2^8$ داریم: $2NW = 2\times 8 \times 4000 = 64000\ bit/Sec = 64\ Kbit/Sec$

عرض باند لازم برای PCM بستگی به مدولاسیون انتخاب شده دارد برای ارسال PAM باینری حداقل $B=\frac{Nf_s}{2}=NW$

عرض باند لازم است. و مثلاً برای سیگنال صوتی با مشخصات ذکر شده در بالا عرض باند 32K-Hz لازم است.

نویز ناشی از خطای کانال

$$x_q \xrightarrow{\text{کدبندی}} d_N d_{N-1} \cdots d_1 \xrightarrow{\text{خطای کانال}} \bar{d}_N \bar{d}_{N-1} \cdots \bar{d}_1 \xrightarrow{\text{دیکد کردن}} \bar{x}_q$$

فرض می‌کنیم که:
1) احتمال خطای کانال کم باشد بطوریکه بتوان از خطای بیش از یک رقم صرفنظر کرد.
2) نمونه‌ها بصورت یکنواخت کوانتیزه شده باشند.
3) نمونه‌های کوانتیزه بصورت دودویی کوانتیزه شده باشند.

$$\begin{cases} x_q = -1 \xrightarrow{\text{کدبندی}} 000\cdots0 \\ x_q = +1 \Longrightarrow 111\cdots1 \end{cases}$$

خطای ناشی از کانال برابر $e_c = \bar{x}_q - x_q$ می‌باشد

$e_c = \bar{x}_q - x_q$	محل خطا	احتمال خطا
$\pm(2/q)\,2^0$	d_1	p_e
$\pm(2/q)\,2^1$	d_2	p_e
$\pm(2/q)\,2^2$	d_3	p_e
⋮	⋮	⋮
$\pm(2/q)\,2^{N-1}$	d_N	p_e

که مقدار آن بستگی به محل رخ دادن خطای کانال دارد.

علامت ± برای اینست که ممکن است در اثر خطای کانال

0 به 1 یا 1 به 0 تبدیل شود.

$$\overline{e_c^2} = \frac{4}{q^2} p_e + \frac{4}{q^2} \times 4 p_e + \frac{4}{q^2} \times 4^2 p_e + \cdots + \frac{4}{q^2} \times 4^{N-1} p_e$$

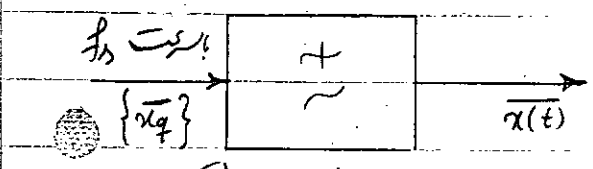
$$\overline{e_c^2} = \frac{4 p_e}{q^2}\left(1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{N-1}\right) = \frac{4 p_e}{q^2} \times \frac{4^N - 1}{4 - 1} = \frac{4 p_e}{3 q^2}\left(2^{2N} - 1\right)$$

$$\overline{e_c^2} = \frac{4(q^2-1)}{3q^2} p_e$$

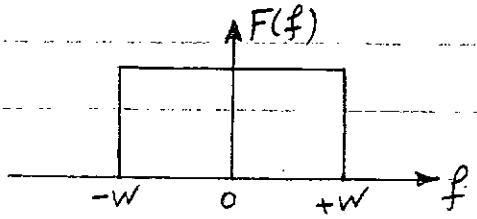
علی‌ای مقدار نسبت سیگنال به نویز

$$\frac{\overline{x^2}}{\overline{e_c^2}} = \frac{S}{N}\Big|_c = \frac{3q^2\,\overline{x^2}}{4(q^2-1)\,p_e}$$

سیگنال به نویز در سیستم PCM



$F(f)$: فیلتر انتربلاریتی ایده‌آل



x: سیگنال اصلی — سیگنال اصلی

$\overline{x(t)} = K x(t) + n(t)$ ، $\overline{x_q} = \underbrace{x + e_q}_{x_q} + e_c$

عمل انتر پولاسیون را همزمان با ورودی PAM ضربه‌ای و فیلتر انتر پولاسیون ایده‌آل در نظر گرفت.

اول نمونه‌های سیگنال اصلی را در نظر میگیریم: $x(k/f_s) \Rightarrow \sum_k x(k/f_s)\,\delta(t-k/f_s) = \underset{1/f_s}{Comb}[x(t)]$

$\underset{1/f_s}{Comb}[x(t)] \xleftrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} f_s\, rep_{f_s}[X(f)] \Longrightarrow K x(t) = f_s\, x(t)$

حال نمونه‌های نویز کوانتیزه را در نظر میگیریم: $e_q(k/f_s) \Rightarrow \sum_k e_q(k/f_s)\,\delta(t-k/f_s)$

اگر نویز کوانتیزه لحظات مختلف را مستقل از یکدیگر در نظر بگیریم

طیف قدرت $G_q(f) = \dfrac{\overline{e_q^2}}{1/f_s} = f_s\,\overline{e_q^2}$

در بحث سوم دیدیم که طیف قدرت PAM مربوط به نظیر نویز سفید خواهد بود.

بهمین ترتیب برای نویز ناشی از کانال: $\sum_k e_c(k/f_s)\,\delta(t-k/f_s) \xleftrightarrow[\text{نویز لحظات مختلف}]{\text{تبدیل فوریه، بفرض مستقل بودن}} G_c(f) = f_s\,\overline{e_c^2}$

اگر نویز ناشی از کانال و نویز ناشی از کوانتیزه کردن را مستقل از یکدیگر فرض کنیم طیف قدرت نویز در ورودی فیلتر

انتر پولاسیون مجموع دو طیف قدرت خواهد بود. $G_n(f) = (\overline{e_q^2} + \overline{e_c^2})\, f_s$

$$\left.\begin{aligned} S_o &= \overline{f_s^2\, x^2(t)} = f_s^2\,\overline{x^2(t)} \quad \text{قدرت سیگنال خروجی} \\ N_o &= \underbrace{(\overline{e_q^2} + \overline{e_c^2})\, f_s}_{\text{سفید}} \times \underbrace{2W}_{\text{عرض باند کل}} \quad \text{قدرت نویز خروجی} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{S_o}{N_o} = \frac{f_s}{2W} \times \frac{\overline{x^2}}{\overline{e_q^2} + \overline{e_c^2}}$$

البته $2W < f_s$ باعث بهبود سیگنال به نویز میگردد ولی در عمل $f_s \approx 2W$ است و برای محاسبات ضریب فوق مقدار یک را نمیگیرد

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\overline{x^2}}{\overline{e_q^2} + \overline{e_c^2}} \quad , \quad \overline{e_q^2} = \frac{1}{3q^2} \qquad \overline{e_c^2} = \frac{4(q^2-1)p_e}{3q^2}$$

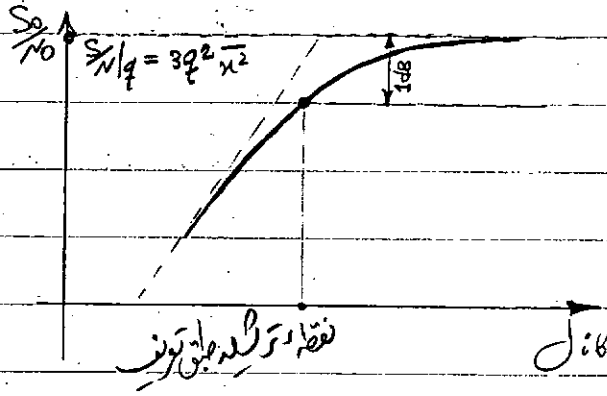
بهره‌ی ترشیله در PCM

$$\boxed{\frac{S_o}{N_o} = \frac{3q^2\,\overline{x^2}}{1+4(q^2-1)p_e}}$$

1) S/N کانال دیجیتال خیلی زیاد $\Rightarrow p_e \ll \frac{1}{4(q^2-1)} \Rightarrow \frac{S_o}{N_o} \approx 3q^2\overline{x^2} = \frac{S}{N}\Big|_q$ (مستقل از S/N کانال)

2) S/N کانال دیجیتال خیلی کم $\Rightarrow p_e \gg \frac{1}{4(q^2-1)} \Rightarrow \frac{S_o}{N_o} \approx \frac{3q^2\overline{x^2}}{4(q^2-1)p_e} = \frac{S}{N}\Big|_c \approx \frac{3\overline{x^2}}{4p_e}$

p_e تابع اکسپانسیل دامنه‌ی S/N کانال دیجیتال است ولذا در این حالت $\frac{S_o}{N_o}$ دامنه‌اش تابع سیگنال



نویز کانال دیجیتال و مستقل از q است. معمولاً سیستم

برای چنین سیستمی بالای نقطه‌ی ترشیله طراحی می‌شود.

نقطه‌ی ترشیله طبق تعریف نقطه‌ای است که $\frac{S_o}{N_o}$ به اندازه‌ی 1dB کمتر از مقدار ماکزیمم خود می‌گردد.

محاسبه‌ی نقطه‌ی ترشیله:

$$1dB = 1.25 \Rightarrow \frac{3q^2\overline{x^2}}{1+4(q^2-1)p_{eth}} = \frac{3q^2\overline{x^2}}{1.25}$$

$$\boxed{p_{eth} = \frac{1}{16(q^2-1)} \approx \frac{1}{16q^2}}$$

معمولاً قدرت ورودی سیستم S_R برای $p_{eth} \Rightarrow \frac{S_{Rth}T}{\eta} = ?$

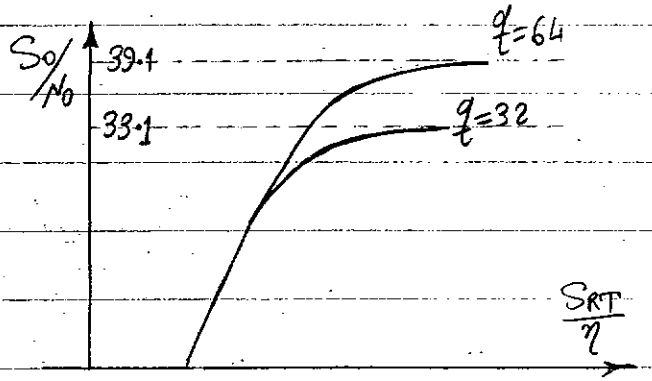
چنین سیگنال بالای قدرت S_{Rth} طراحی می‌شود.

مثال: کانال دیجیتال CPSK (PSK همراه با کد)

$$p_e = Q\sqrt{\frac{2S_RT}{\eta}}$$

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{3q^2\overline{x^2}}{1+4(q^2-1)\,Q\sqrt{\frac{2S_RT}{\eta}}}$$

$\frac{S_{RT}}{\eta}$ [dB]		6	7	8	9	10	11	12
$\frac{S_o}{N_o}$ [dB]	$q=64$, $\overline{x^2}=0.5$	17.1	21.8	27	31.2	32.8	33.1	33.1
	$q=128$, $\overline{x^2}=0.5$	17.2	21.0	27.8	34.1	38.2	39.1	39.1

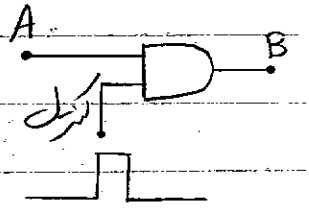


$$P_{eth} = \frac{1}{16q^2} \Rightarrow \frac{S_{R\,th}T}{\eta} = \begin{cases} 9.4\ dB & q=32 \\ 10\ dB & q=64 \end{cases}$$

آشنایی با مدارهای PCM

کتاب مرجع "Digital Integrated Electronic"
H. Taub & D. Schilling McGraw Hill 1977

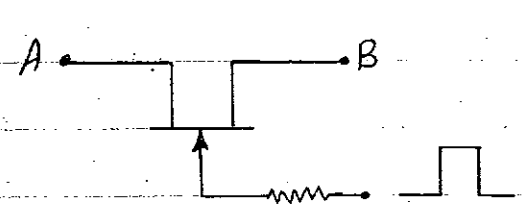
(الف) سوئیچ آنالوگ:



سوئیچ دیجیتال مدار AND است و بوسیله آن میتوان سیگنال باینری 1، 0 را سوئیچ نمود.

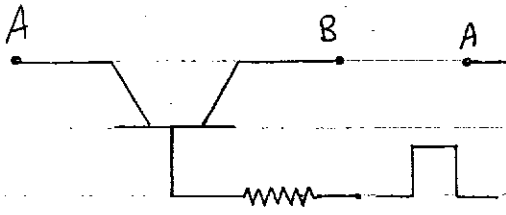
سوئیچ آنالوگ باید هر مقداری را در هر دو جهت سوئیچ نماید.

انواع سوئیچهای آنالوگ عبارتند از: FET، BJT، دیود بصورت IC (CMOS)، و رله الکترومکانیکی در سرعتهای کم



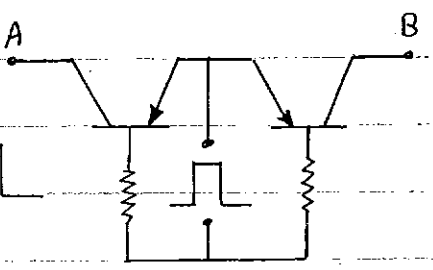
«FET»

(۱)



ترانزیستور متقارن «BJT»

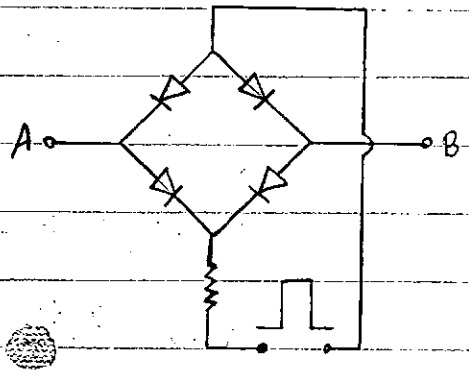
(۲)



(۳)

در ترانزیستور متعادل من کلکتور و امیتر فرقی نیست و این نوع ترانزیستور بصورتهای { OC 139-140-141 / ASY 73-74-75 } ساخته میشود

طبق شکل ۳ میتوان از دو ترانزیستور مشابه غیر متعادل کلا بعنوان ترانزیستور متعادل استفاده کرد.



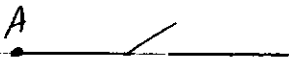
چهار دیود مشابه هم

سوئیچ دیودی بصورت IC های CD4066 و CD4016 کمپانی

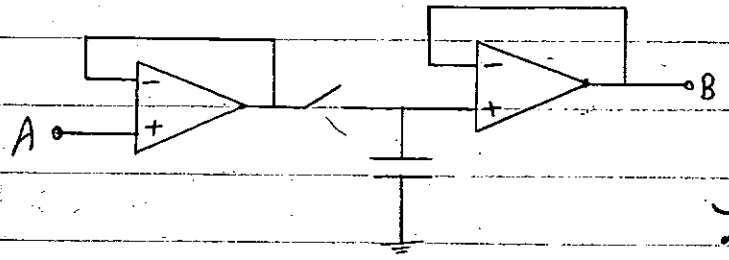
چهار عدد سوئیچ آنالوگ دارند ساخته میشود.

کاربرد سوئیچ آنالوگ در PCM { - نمونه گیری ساده / - نمونه گیری و نگهداری نمونه }

نمونه گیری ساده :

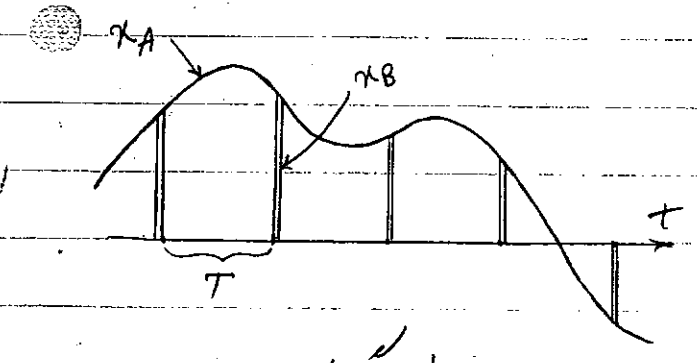


نمونه گیری و نگهداری نمونه : (Sample & Hold)

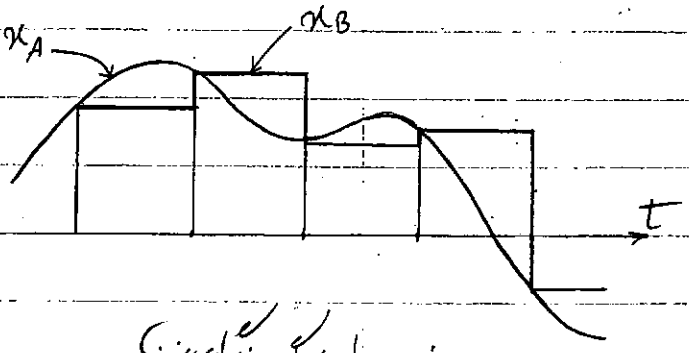


خروجی S & H طبق شکل زیر PAM چهارگوش کاملی از نمونه هاست

« مدار S & H »

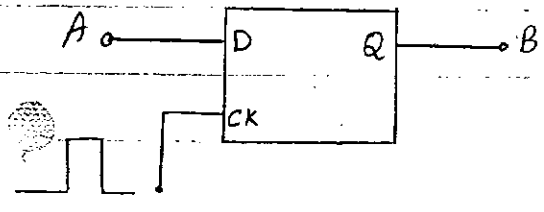


« ورودی و خروجی مدار نمونه گیری ساده »

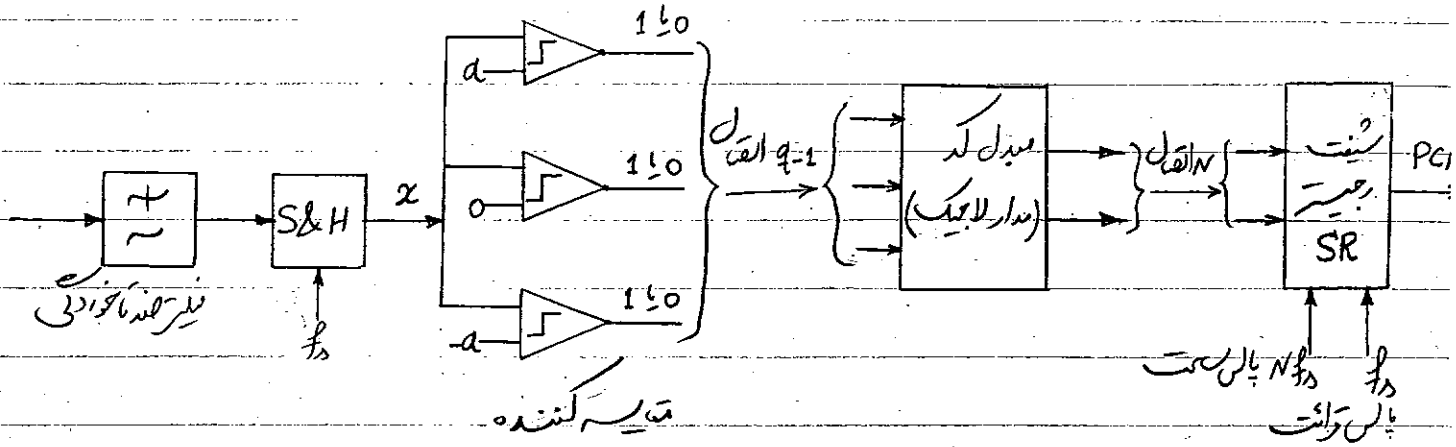


« ورودی و خروجی مدار نمونه گیری و نگهداری نمونه ها »

S & H دیجیتال در واقع مدار فلیپ فلاپ نوع D مطابق شکل روبرو است.

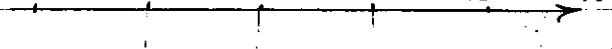


(ب) A/D به روش موازی (Analog to Digital Conversion = A/D)



« مدار A/D به روش موازی »

برای سادگی تجزیه و تحلیل فرض می کنیم چهار کوانتم بیشتر نباشد.



خروجی مقایسه کننده اولی	1	0	0	0
» » » دومی	1	1	0	0
» » » سومی	1	1	1	0

ورودی مبدل کد	111	011	001	000
خروجی » »	11	10	01	00

(q=4 است ولذا دو رقم برای کدبندی کافی است)

نکات:

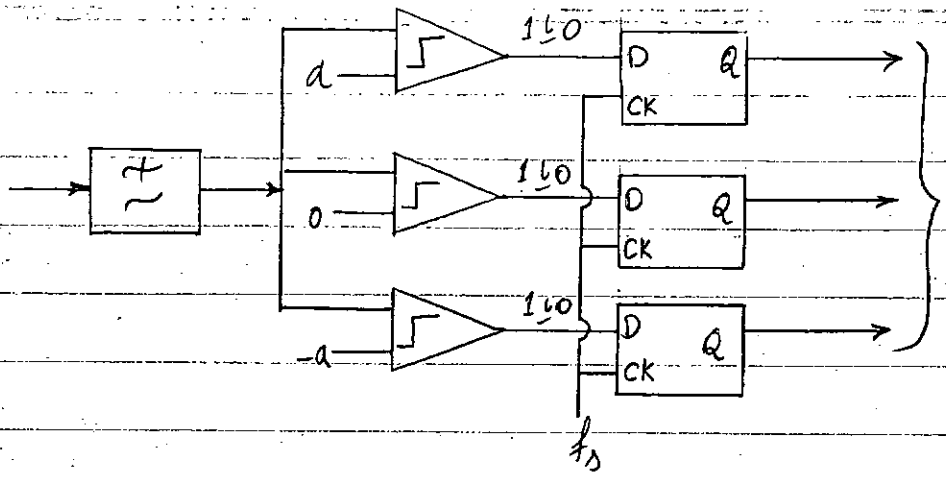
1) عمل S&H بجای عمل S لازم است زیرا عمل کدبندی طول می کشد

2) بسادگی q غیر خطی عملی است (با انتخاب سطوح مقایسه مناسب در مقایسه کننده ها)

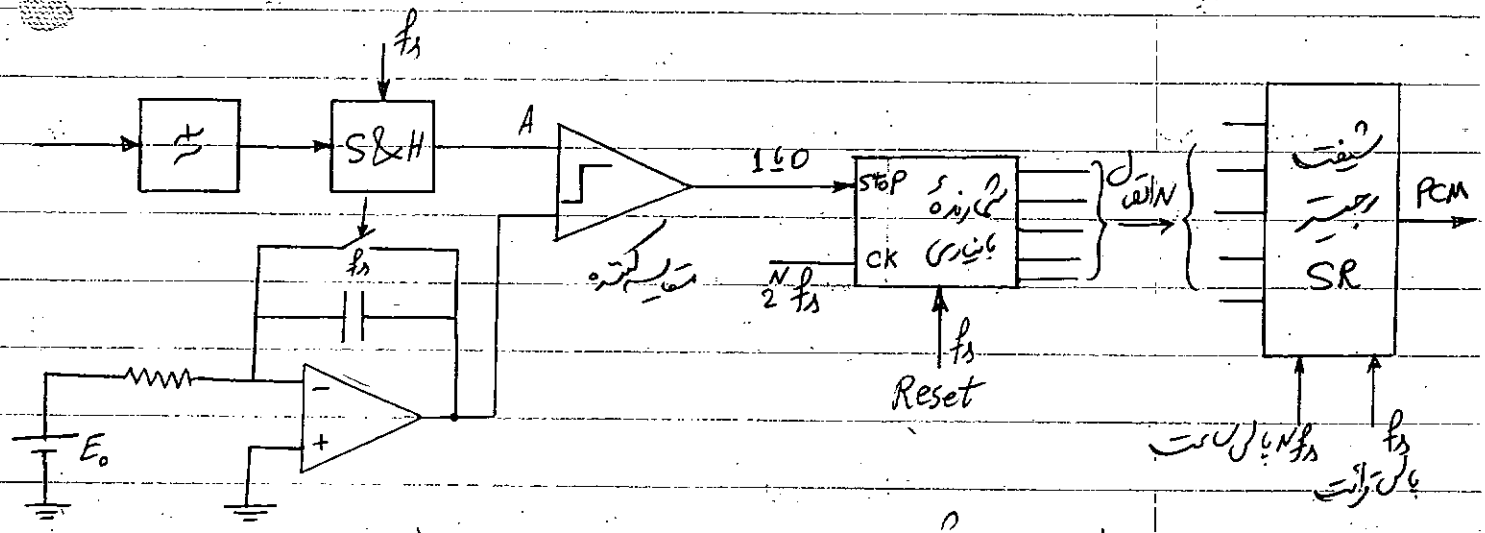
3) سرعت پالس ساعت مدار حداکثر سرعت ارقام باینری خروجی (Nfs) می باشد ولذا برای سرعتهای زیاد مناسب است

4) پیچیدگی مدار در این روش متناسب با q افزایش می یابد ولذا برای q های کم مناسب می باشد.

5) طبق مدار زیر ترتیب عمل کوانتیزه کردن و نمونه برداری را میتوان در این روش همیشه تعویض نمود.



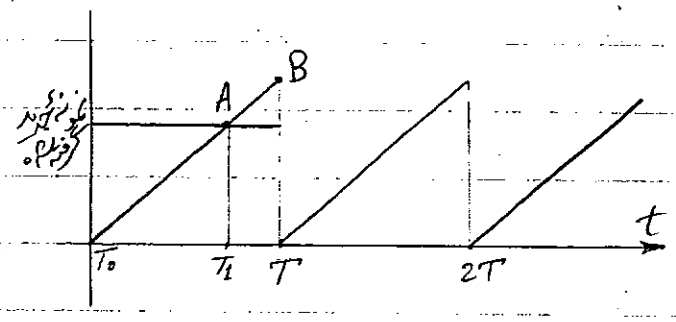
ج) A/D به روش سری



«مدار A/D به روش سری»

مولد Ramp

فرض کنید T_0 یک لحظه نمونه برداری باشد. در این لحظه که نمونه قبلی بطور موازی وارد شیفت رجیستر میشود، شمارنده Reset میشود.



نمونه جدید گرفته میشود و مولد Ramp نیز Reset میشود.

در لحظه T_1 خروجی مقایسه کننده یک شده و شمارش قطع میشود.

شمارش از زمان T_0 تا T_1 صورت گرفته است پس عدد شمرده شده

تناسب با زمان $T_1 - T_0$ است یعنی متناسب با A (دامنه نمونه جدید) می باشد.

نکات:

1) S&H بدلیل اینکه عمل کدینگ روی آن می‌شود لازم است.

2) چون سیگنال رمز شده باید بتواند در زمان $T=\frac{1}{f_s}$ تولید شود تا 2^N عدد را بشمارد پس پالس کلاک با سرعت $2^N f_s = q f_s$ لازم دارد

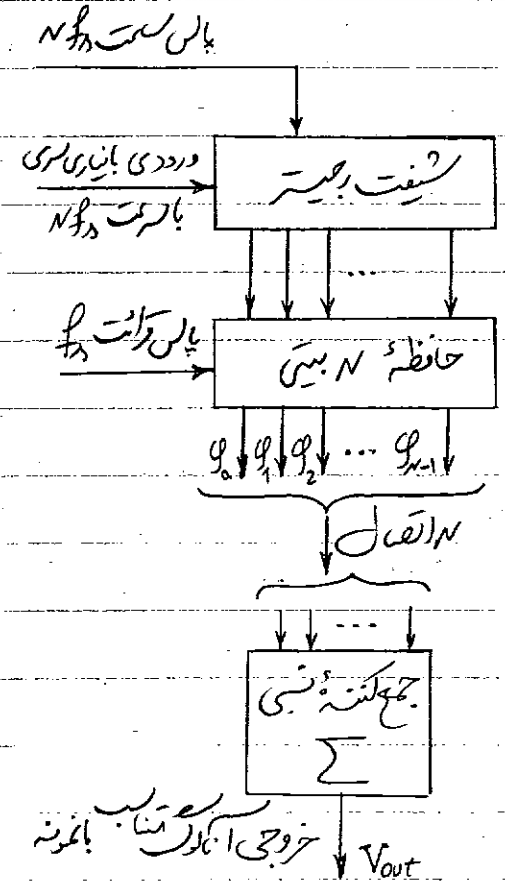
لذا این روش برای سرعت‌های کم مناسب می‌باشد

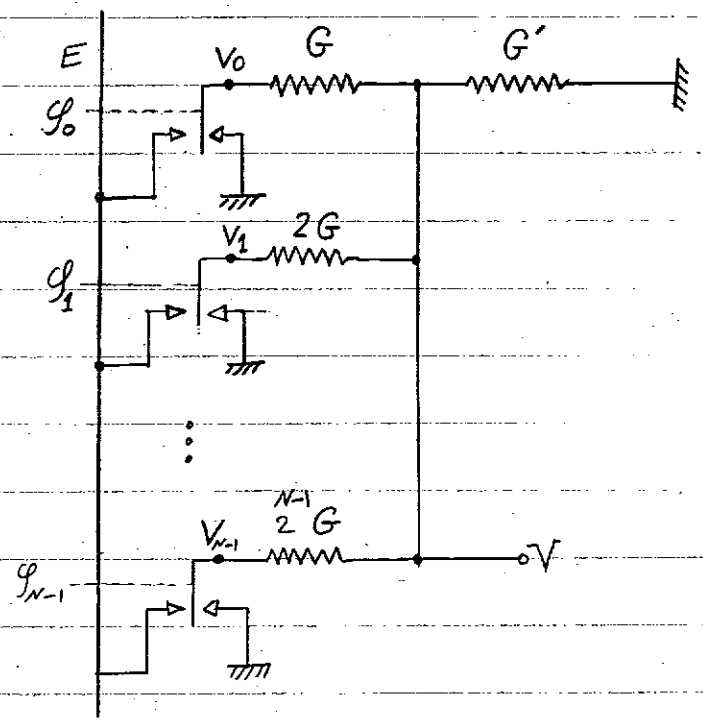
3) پیچیدگی مدار متناسب با $N = \log_2 q$ می‌باشد لذا این روش برای q زیاد مناسب می‌باشد

4) q غیر یکنواخت ساده‌گی عملی نیست.

(>) D/A یا دیکد کردن: (Digital to Analog Conversion ≡ D/A)

با عمل D/A کدها به نمونه‌های قبلی (گسسته شده) تبدیل می‌شوند.





$$V_{out} = (\varphi_0 + 2\varphi_1 + 2^2\varphi_2 + \cdots + 2^{N-1}\varphi_{N-1})E$$

«مدار D/A»

«یک نمونه از مدار جمع‌کننده وزنی»

مقایسه ولتاژ خروجی و ورودی جمع کننده وزنی:

$$(V_0-V)G + (V_1-V)2G + (V_2-V)2^2G + \cdots + (V_{n-1}-V)2^{N-1}G = VG'$$

$$\underbrace{\left(\frac{G'}{G} + 1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{N-1}\right)}_{K} \times V = \left(\varphi_0 + 2\varphi_1 + 2^2\varphi_2 + \cdots + 2^{N-1}\varphi_{N-1}\right)E$$

$$V = \frac{E}{K}\left(\varphi_0 + 2\varphi_1 + 2^2\varphi_2 + \cdots + 2^{N-1}\varphi_{N-1}\right)$$

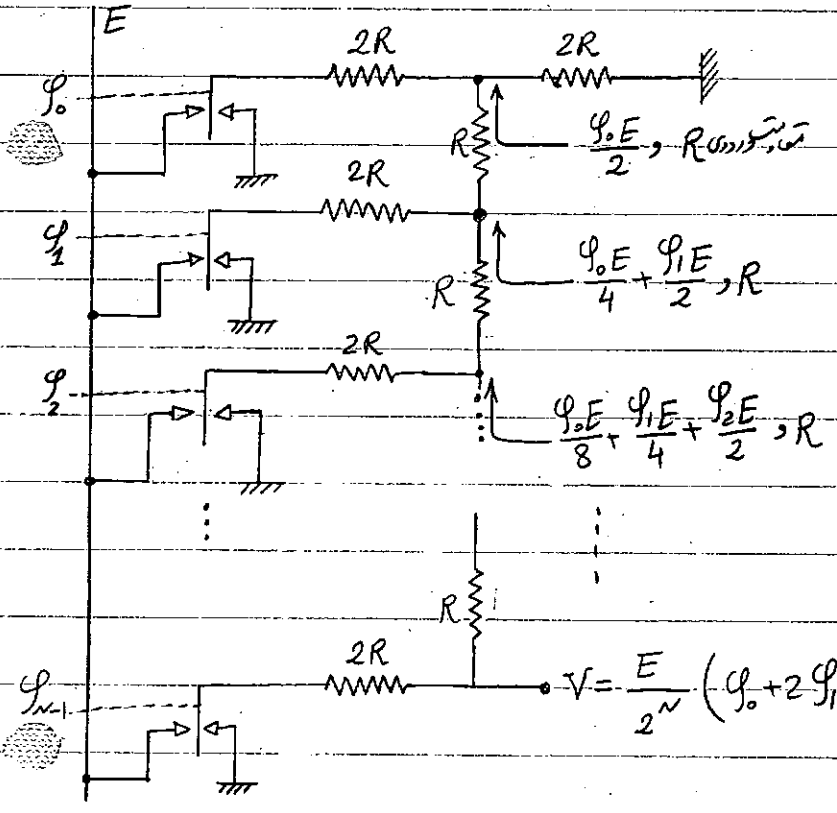
اشکال جمع کننده وزنی فوق پراکندگی مقاومتها

که باعث میشود اولاً نتوانیم از مقاومتهای استاندارد

استفاده کنیم ثانیاً تفاوت این مقاومتها باید خیلی کم

باشد تا دقت کافی داشته باشیم. برای رفع این

اشکال از روش زیر مطابق شکل روبرو استفاده میکنیم.



«مدار D/A با روش وزنی»

مقایسه PCM با مدولاسیونهای آنالوگ

1) عرض باند:

سیگنال با عرض باند W $\Longrightarrow f_s \geq 2W \Longrightarrow r_b = N f_s \geq 2NW$

برای ارسال در باند پایه $\Longrightarrow B \geq \frac{r_b}{2} = NW$

مثلاً برای سیگنال صوتی معمولی با ($W = 4kHz, N = 8$) داریم:

$B \geq 32\,kHz$

پس PCM به عرض باند بیش از W نیاز دارد.

2) مبادله S/N_0 و عرض باند :

در PCM بالای آستانه $\frac{S_0}{N_0} = 3q^2\overline{x^2} = 3(4)^N \frac{\overline{x^2}}{(B/W)}$

مبادله اکسپانسیل است $= 3\overline{x^2} \times 4$

در FM در بالای آستانه $\frac{S_0}{N_0} = \frac{3}{4}\overline{x^2}\left(\frac{S_R}{\eta W}\right)\left(\frac{B}{W}\right)^2$

مبادله مربعی است

3) چون در PCM سیگنال دیجیتال است از ویژگیهای سیگنالهای دیجیتال میتوان استفاده کرد

الف) رمز کردن ساده ((درهم کردن ارقام))

ب) کوئینگ ساده ((با مدارهای لاجیک))

ج) ضبط ساده ((بوسیله حافظه‌های دیجیتال))

4) در PCM غالب مدارها دیجیتال هستند ولذا از ویژگیهای مدارهای دیجیتال برخوردارند.

الف) قابلیت اطمینان زیاد (خرابی کم)

ب) نگهداری ساده (تست و تعمیر)

ج) قابلیت ایجاد تغییراتی در آن (بدلیل امکانات جدید و نیازهای جدید)

5) انباشته شدن خطا یا ی نویز :

بدلیل بازسازی نویز در سیستم رپیتر دیجیتال انباشته نمیشود و فقط احتمال خطا انباشته میشود که اثر خیلی کمتری دارد تقریباً با اضافه کردن تعداد رپیتر میتوان بعد مسافت را در مخابرات دیجیتال افزایش داد ((بدون نیاز به قدرت ارسالی بیشتر))

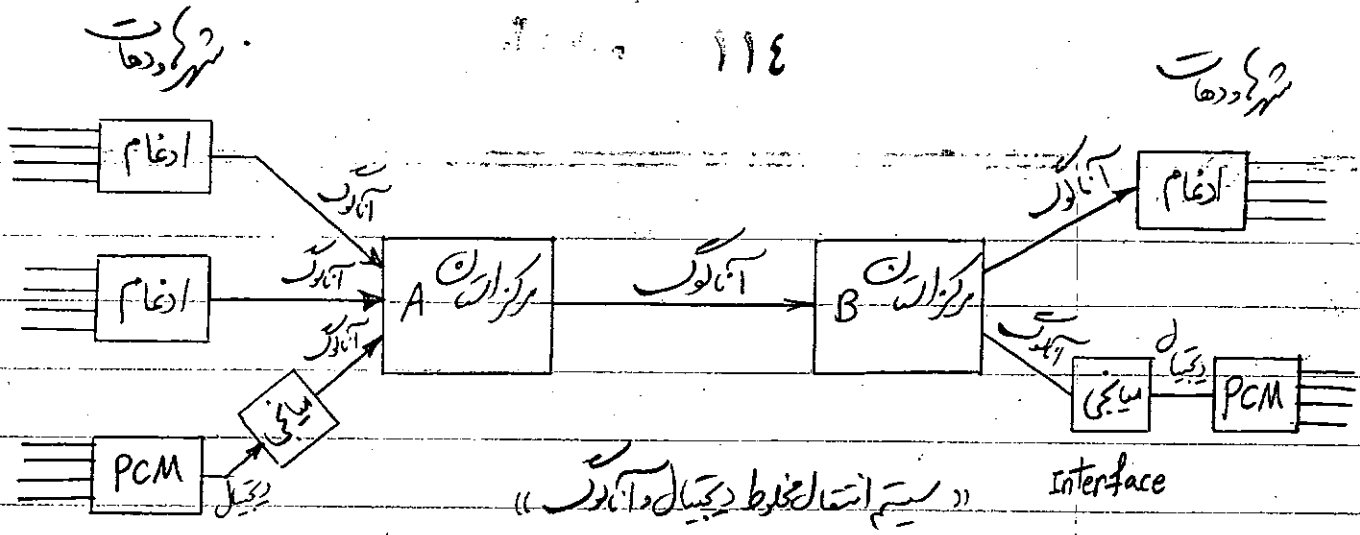
6) هماهنگی با سایر منابع :

با دیجیتال کردن منابع آنالوگ (PCM) تنها یک نوع کانال و سیستم برای مخابره اطلاعات در اصل آنالوگ و یا در اصل دیجیتال لازم میگردد.

7) هماهنگی با سیستم‌های مخابرات موجود :

در حال حاضر استخوان بندی شبکه مخابراتی آنالوگ است و جانشینی فوری آن با دیجیتال مقرون بصرفه نیست.

اضافه کردن تدریجی سیستم‌های PCM نیاز به Interface بین قسمت‌های دیجیتال و آنالوگ دارد.



«سیستم انتقال مخلوط دیجیتال و آنالوگ»

استاندارد PCM تلفنی و مراحل ادغام TDM

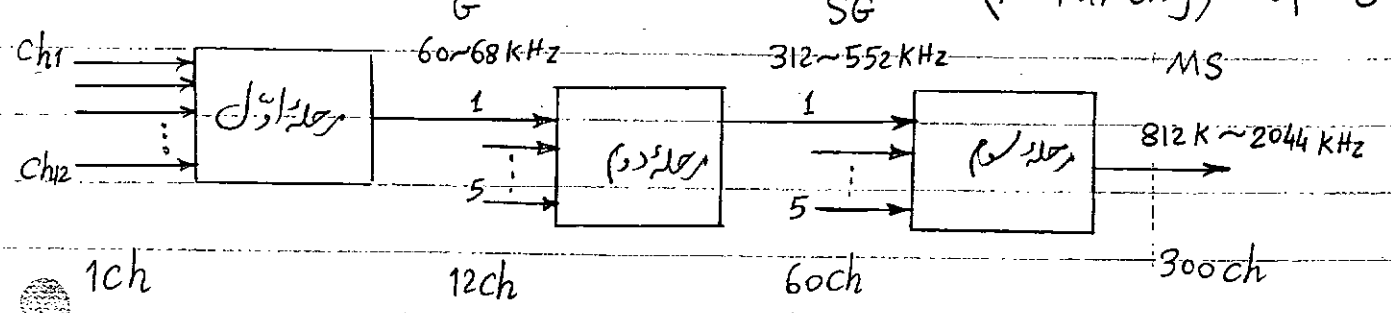
۳ استاندارد متداول:
1- اروپایی: در ایران هم استفاده میشود و بوسیله CCITT تدوین شده است.
۲- آمریکایی: در کتاب Shanmugam بحث شده است
۳- ژاپنی: خیلی شبیه به آمریکایی

در استاندارد اروپایی (CCITT)

- عرض باند کانال تلفنی: $300 - 3400\ Hz$
- سرعت نمونه برداری: $f_s = 8000\ Sample/sec$
- تعداد کوانتم ها q: $q = 256 = 2^8 \Rightarrow N = 8\ bit/sample$
- نوع کوانتیزه کننده: غیر یکنواخت لگاریتمی با قانون A با مقدار $A = 87.6$

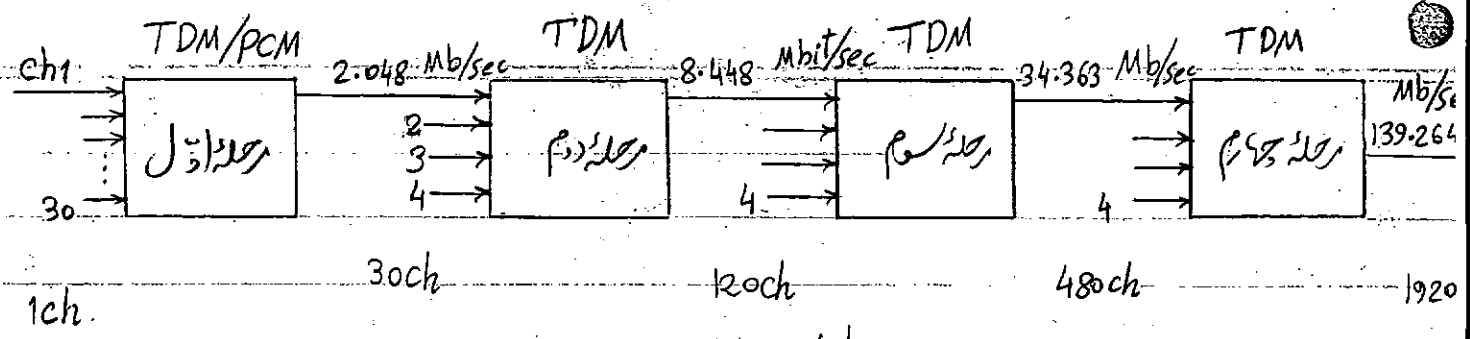
$$r_b = 8000\ \frac{Sample}{sec} \times 8\ \frac{bit}{Sample} = 64\ \frac{Kbit}{sec}$$

مراحل ادغام: (Hierarchy)



(مراحل ادغام FDM طبق استاندارد CCITT)

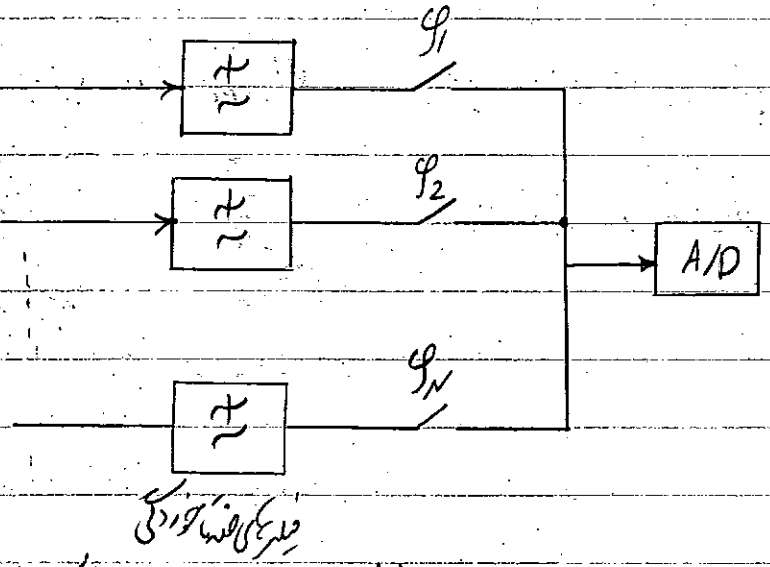
Group :G
Supper Group :SG
Master Group :MS



(مراحل ادغام TDM طبق استاندارد CCITT)

نکات:

1) البته میتوان در مرحلهٔ اول کانال را PCM و پس TDM نمود ولی از نظر اقتصادی معمولاً اول TDM و بعد PCM می‌کنند تا فقط یک عدد A/D لازم باشد مطابق شکل زیر:



« مرحلهٔ اول ادغام »

2) در مرحلهٔ دوم و بعد که ورودی‌ها بایتاری هستند فقط TDM لازم است و ضمناً به فیلترهای فشاخوردگی نیز نیاز نیست و سوئیچ نیز دیجیتال هستند (مدار ساده)

3) در تمام مراحل سرعت ارقام بایتاری خروجی بیش از مجموع سرعتهای ارقام بایتاری ورودی است زیرا بیتهای اضافی برای همزمانی‌های مختلف و همچنین علائم مختلف (شماره‌گیری و غیره) در هر مرحله اضافه میشود. مثلاً در مرحلهٔ اول

$$64\ \text{Kbit/sec} \times 30 + \underbrace{(2 \times 64\ \text{Kbit/sec})}_{\text{همزمانی و علامت دهی}} = 2.048\ \text{Mb/sec}$$

4) برای منابع دیگر نظیر برنامه رادیویی - اطلاعات کامپیوتری - تلگراف و تلکس - برنامه تلویزیونی - تلفن تصویردار و غیره

آنها را به یکی از سرعتهای استاندارد در حالت A نظیر 2.048 Mb/sec یا 8.448 Mb/sec و ... یا مضربی از آنها میرسانند و در ادغام شرکت میدهند.

مثلاً برای تلویزیون رنگی سرعت ارسال در PCM حدوداً $(2\times5)\ \text{Msample/sec} \times 9\ \text{bit/sample} = 90\ \text{Mb/sec}$ می‌باشد که میتوان آنرا بصورت سرورودی مرحله چهارم ادغام در ادغام شرکت داد.

5) پرکاربردترین و مهمترین سیستم PCM در ادغام مرحله اول است که در آن ۳۰ کانال تلفنی به ارقام باینری با سرعت حدوداً 2 Mb/sec تبدیل میشوند که میتوان آنرا بصورت PAM (باینری ترنری شده) روی زوج سیم ارسال نمود. فاصله رپیترها حدوداً باید ۲ کیلومتر باشد که در این فواصل در زوج سیمی استفاده شده، برای یک مخابره تلفنی آکوستیک بوسیله پودینه وجود دارد که با جانشین کردن رپیتر باز، بجای آن میتوان در همان زوج سیم برای ارسال ۳۰ کانال (بجای یک کانال) استفاده نمود.

بعنوان مثال در ایران بین کرج و تهران ۲۴ سیستم ۳۰ کانالی PCM استفاده شده است همچنین بین تهران و ساوه ۱۱ سیستم ۳۰ کانال PCM استفاده میشود