باسمه تعالی

عنوان درس

مروری بر محاسبات عددی

مدرس:
دکتر عبدالمجید خوشنود

مروری بر محاسبات عددی

ابزارهای رایانه ای عددی در فرایند مدلسازی دینامیک پرواز

- برای مدلسازی سیستم های پروازی در محیط نرم افزارها توجه به نیازهای محاسباتی عددی مهم است. لذا باید بررسی کرد که در این حوزه چه نیازمندی هایی وجود دارد؟

- در فرایند مدلسازی دینامیکی سیستم های پروازی عموما با موارد زیر روبرو خواهیم بود:
  - ✓ حل معادلات جبری
  - ✓ حل معادلات دیفرانسیل معمولی
  - ✓ میانیابی و برازش منحنی
  - ✓ در موارد معدود حل معادلات دیفرانسیل جزئی
  - ✓ تنظیم نرم افزارها در راستای حل های مورد نظر

2

مروری بر محاسبات عددی

معادلات جبری

معادلات جبری خطی (روش های معمول کرامر و غیره)
معادلات جبری غیر خطی (f(x)=0)

- **معادلات غیر خطی**
  - روش نقطه ثابت *
  - روش تقسیم دوتایی
  - روش نیوتن رافسون*
  - روش سکانت

* روش هایی که در نرم افزارها بیشتر کاربرد دارند.

3

مروری بر محاسبات عددی

روش نقطه ثابت

- **تئوری نقطه ثابت یا انقباض (Fixed point or Contraction)**

فرض کنید تابع g(x)=0 تعریف شده و مشتق اول آن وجود داشته و روی

$$I = [x^o - r, x^o + r]$$

پیوسته است و داریم $g(x^o) = x^o$
اگر شرط زیر برقرار باشد

$$|g'(x)| \leq \alpha < 1$$

آنگاه هر فرایند عددی که از هر نقطه در بازه فوق شروع شود به صورت زیر

$$x_{k+1} = g(x_k) \qquad \text{with } x_0 \in I$$

همگرا بوده و صرفا به نقطه x_0 همگرا خواهد شد.

4

مروری بر محاسبات عددی

روش نقطه ثابت

- **اثبات تئوری**

داریم

$$g(x_0) - g(x^o) = g'(x)(x_0 - x^o)$$

لذا مطابق شرط Lipschitz برای معادلات زیر

$$|x_1 - x^o| \leq \alpha |x_0 - x^o|$$

اگر آلفا کمتر از یک باشد معادله انقباض بوده و همگرا خواهد بود و چون همگرایی منحصر به فرد است طبق فرض خلف به همان ریشه معادله همگرا می شود.

5

مروری بر محاسبات عددی

روش نقطه ثابت

- **مثال:**

$$I = (1, 1.5) \qquad f_{41}(x) = x^2 - 2 = 0$$

انتخاب اول

چک کردن تابع مشتق

$$x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = 2/x = g_a(x)?$$

جواب منفی

$$|g_a{}'(x)| = 2/x^2 < 1 \, \forall x \in I$$

امتحان پاسخ ها

$$x_0 = 1; \; x_1 = \frac{2}{x_0} = 2; \; x_2 = \frac{2}{x_1} = 1; \; x_3 = \frac{2}{x_2} = 2; \; x_4 = \frac{2}{x_3} = 1; \cdots$$

تنها ۱ و ۲ تکرار می شوند.

6

مروری بر محاسبات عددی

روش نقطه ثابت

- انتخاب دوم

$$x^2 - 2 = 0 \rightarrow (x-1)^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\{(x-1)^2 - 3\} = g_b(x)?$$

- چک کردن تابع مشتق

$$|g_b{}'(x)| = |x-1| \leq 0.5 < 1 \qquad \forall\, x \in I$$

- جواب مثبت

لذا داریم

1.0000 1.5000 1.3750 1.4297 1.4077 ...

7

مروری بر محاسبات عددی

روش نقطه ثابت

- انتخاب سوم

$$x^2 = 2 \rightarrow x = \tfrac{2}{x} \rightarrow x + x = \tfrac{2}{x} + x \rightarrow x = \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{2}{x}\right) = g_c(x)$$

- چک کردن تابع مشتق

$$|g_c{}'(x)| = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{2}{x^2}\right| \leq 0.5 < 1 \qquad \forall x \in I$$

- جواب مثبت

لذا داریم

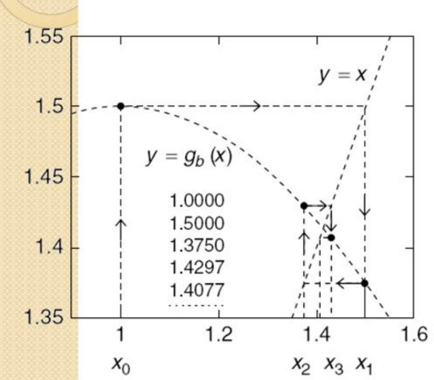
1.0000 1.5000 1.4167 1.4142 1.4142 ...

- تفاوت انتخاب دوم و سوم در سرعت همگرایی

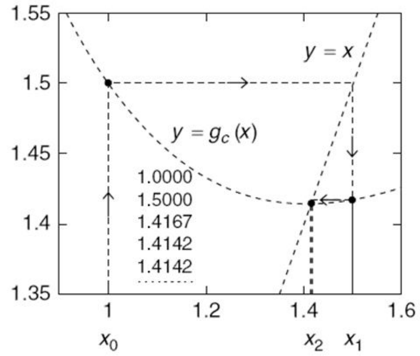
8

مروری بر محاسبات عددی

روش نقطه ثابت



(a) $x_{k+1} = g_b(x_k) = -\frac{1}{2}\{(x_k - 1)^2 - 3\}$



(b) $x_{k+1} = g_c(x_k) = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right)$

9

مروری بر محاسبات عددی

روش تقسیم دوتایی Bisection method

- روشی بسیار ساده و ابتدایی
- اگر شروط معمول وجود ریشه برقرار باشد کافیست فاصله [a,b] را که در آن تابع حتما یک ریشه دارد داشته باشیم تا بتوانیم گام های زیر را طی نماییم:

Step 0. Initialize the iteration number $k = 0$.
Step 1. Let $m = \frac{1}{2}(a + b)$. If $f(m) \approx 0$ or $\frac{1}{2}(b - a) \approx 0$, then stop the iteration.
Step 2. If $f(a)f(m) > 0$, then let $a \leftarrow m$; otherwise, let $b \leftarrow m$. Go back to step 1.

- مثال:

$$\tan(\pi - x) - x = 0$$

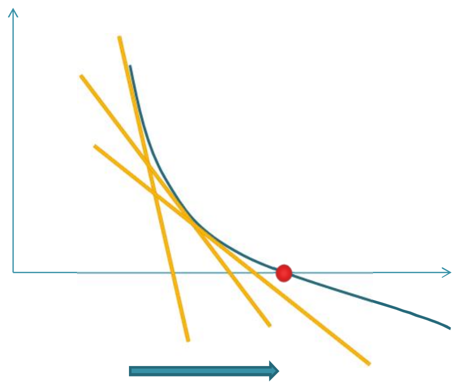
2.3000 1.9500 2.1250 2.0375 1.9937 2.0156 ...

10

مروری بر محاسبات عددی

روش نیوتن رافسون

- در این روش با استفاده از خطوط رسم شده بر منحنی می توان مطابق شکل زیر به ریشه معادله دست یافت:



- f(x)=0

11

مروری بر محاسبات عددی

روش نیوتن رافسون

- برای این منظور ضمن رعایت شروط وجود ریشه در مساله حل معادله و محدوده مورد بررسی معادله یک خط که شیب آن مماس بر منحنی بوده و از یک نقطه مشخص شروع می شود را طراحی می نماییم:

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$$

- به دنبال این هستیم که خط فوق محور افقی را قطع نماید و فرم تکرار داشته باشد، لذا:

$$0 - f(x_k) = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

- در نتیجه یک الگوریتم استخراج می گردد:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- اشکال روش محاسبه مشتق

12

مروری بر محاسبات عددی

روش نیوتن رافسون

- آنالیز خطای روش نیوتن رافسون با استفاده از بسط تیلور

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x - x_k)^2 \qquad x = x^o$$

$$0 = f(x^o) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x^o - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x^o - x_k)^2$$

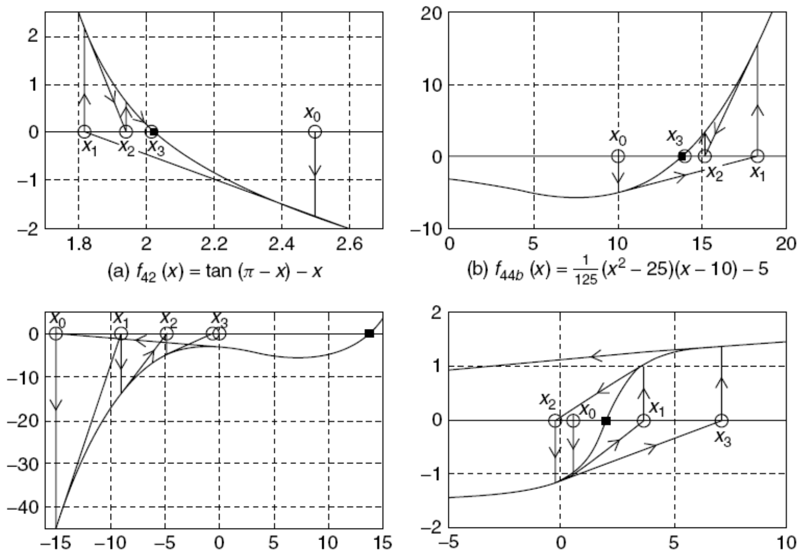
$$-f(x_k) \approx f'(x_k)(x^o - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x^o - x_k)^2 \qquad e_k = x_k - x^o$$

$$x_{k+1} \approx x_k + (x^o - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}(x^o - x_k)^2,$$

$$\Rightarrow \quad |e_{k+1}| \approx \left|\frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}\right| e_k^2 = A_k e_k^2 = |A_k e_k||e_k| \qquad |Ae_0| < 1$$

13

مروری بر محاسبات عددی، روش نیوتن رافسون، مثال



(a) $f_{42}(x) = \tan(\pi - x) - x$

(b) $f_{44b}(x) = \frac{1}{125}(x^2 - 25)(x - 10) - 5$

(c) $f_{44b}(x) = \frac{1}{125}(x^2 - 25)(x - 10) - 5$

(d) $f_{44d}(x) = \tan^{-1}(x - 2)$

14

مروری بر محاسبات عددی

روش سکانت Secant Method

- تنها تفاوت روش سکانت با روش نیوتن رافسون در محاسبه مشتق است که این روند با استفاده از فرم اختلاف به دست می آید:

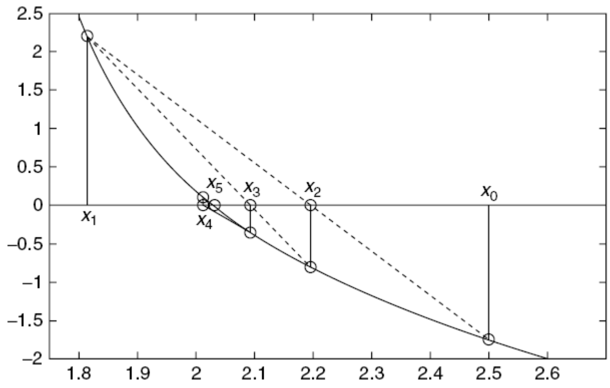
$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{dfdx_k} \qquad \text{with } dfdx_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

15

مروری بر محاسبات عددی

روش سکانت Secant Method



16

مروری بر محاسبات عددی

روش نیوتن رافسون برای دستگاه معادلات

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

- با استفاده از جمله مرتبه اول بسط حول (x_{1k}, x_{2k}) داریم:

$$f_1(x_1, x_2) \cong f_1(x_{1k}, x_{2k}) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(x_{1k}, x_{2k})} (x_1 - x_{1k}) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(x_{1k}, x_{2k})} (x_2 - x_{2k}) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2) \cong f_2(x_{1k}, x_{2k}) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(x_{1k}, x_{2k})} (x_1 - x_{1k}) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(x_{1k}, x_{2k})} (x_2 - x_{2k})$$

17

مروری بر محاسبات عددی

روش نیوتن رافسون برای دستگاه معادلات

- فرم ماتریس بردار

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} f_1(x_{1k}, x_{2k}) \\ f_2(x_{1k}, x_{2k}) \end{bmatrix} + \left.\begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 \end{bmatrix}\right|_{(x_{1k}, x_{2k})} \begin{bmatrix} x_1 - x_{1k} \\ x_2 - x_{2k} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- حال معادله بالا را برای x ها حل کرده و فرم تکرار ایجاد می کنیم:

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix} - \left.\begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 \end{bmatrix}\right|_{(x_{1k}, x_{2k})}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_{1k}, x_{2k}) \\ f_2(x_{1k}, x_{2k}) \end{bmatrix}$$

- فرم کلی (معرفی ژاکوبین)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J_k^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

$$J_k(m, n) = [\partial f_m/\partial x_n]|_{\mathbf{x}_k}$$

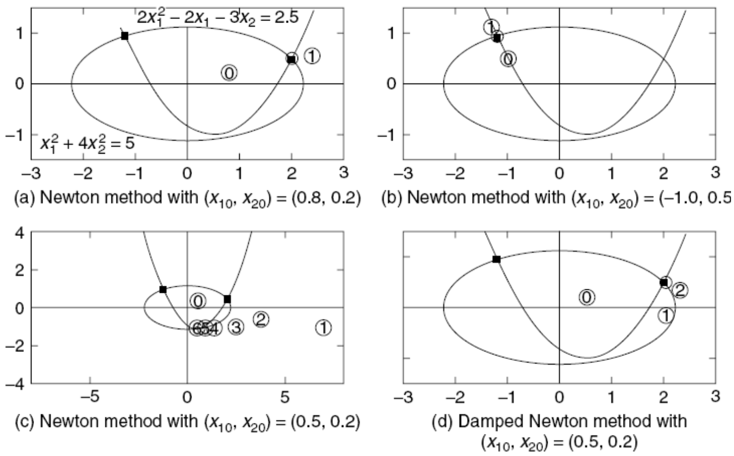
18

مروری بر محاسبات عددی

روش نیوتن رافسون برای دستگاه معادلات، مثال

$$x_1^2 + 4x_2^2 = 5 \qquad f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 5 = 0$$

$$2x_1^2 - 2x_1 - 3x_2 = 2.5 \qquad f_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1 - 3x_2 - 2.5 = 0$$



(a) Newton method with $(x_{10}, x_{20}) = (0.8, 0.2)$
(b) Newton method with $(x_{10}, x_{20}) = (-1.0, 0.5$
(c) Newton method with $(x_{10}, x_{20}) = (0.5, 0.2)$
(d) Damped Newton method with $(x_{10}, x_{20}) = (0.5, 0.2)$

19

مروری بر محاسبات عددی

معادلات دیفرانسیل معمولی ODE’s

- یکی از مهمترین ابزارهای عددی در نرم افزارها خصوصا در مدلسازی دینامیکی سیستمها معادلات دیفرانسیل معمولی هستند. معادلات دیفرانسیل به معادلاتی گفته می شود که خود تابع و مشتقات آن در آن حضور دارند.

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{dy^n}{dx^n}) = 0$$

- یک معادله دیفرانسیل مرتبه n را می توان به n معادله مرتبه یک تبدیل نمود.این موضوع همان مبنای تشکیل فضای حالت می باشد. مثال:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2) y = 0$$

$$z = \frac{dy}{dx}, \quad \begin{cases} x^2 \dfrac{dz}{dx} + xz + (x^2 - p^2) y = 0 \\ z - \dfrac{dy}{dx} = 0 \end{cases}$$

20

مروری بر محاسبات عددی

معادلات دیفرانسیل معمولی ODE's

- کلیه معادلات فوق را می توان به دو دسته کلی تقسیم نمود:
- الف) معادلاتی که دارای شرایط اولیه هستند Initial Condition Problems (ICP)
- کاربرد در معادلات حرکت
- ب) معادلاتی که دارای شرایط مرزی هستند Boundary Value Problems (BVP)
- کاربرد در بهینه سازی

- شریط اولیه $1. y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_{n-1})$
- شرایط مرزی $2. y(x_0), \acute{y}(x_0), \acute{\acute{y}}(x_0), \dots, y^{n-1}(x_0)$

21

مروری بر محاسبات عددی

روش اولر Euler method

- فرض کنید معادله زیر را داشته باشیم:

$$y'(t) + a\ y(t) = r \qquad \text{with}\ \ y(0) = y_0$$

- که دارای جواب دقیق زیر است:

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{r}{a}\right) e^{-at} + \frac{r}{a}$$

- حال با دانستن اینکه

$$y'(t) = dy/dt$$

- روند زیر را در نظر می گیریم:

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} + a\ y(t) = r$$

$$y(t+h) = (1 - ah)y(t) + hr \quad \text{with}\ \ y(0) = y_0$$

22

مروری بر محاسبات عددی

روش اولر Euler method

- تفکیک گام به گام

$$y(h) = (1-ah)y(0) + hr = (1-ah)y_0 + hr$$

$$y(2h) = (1-ah)y(h) + hr = (1-ah)^2 y_0 + (1-ah)hr + hr$$

$$y(3h) = (1-ah)y(2h) + hr = (1-ah)^3 y_0 + \sum_{m=0}^{2}(1-ah)^m hr$$

. . . .

$a = 1 \qquad r = 1 \qquad y(t) = 1 - e^{-at}$

- توضیح افزایش و کاهش گام حل مساله

با گام کوچک تر دقت بهتر می شود اما محاسبات نیز زیاد شده (1/h محدودیت های نرم افزاری)

- مقایسه

23

مروری بر محاسبات عددی

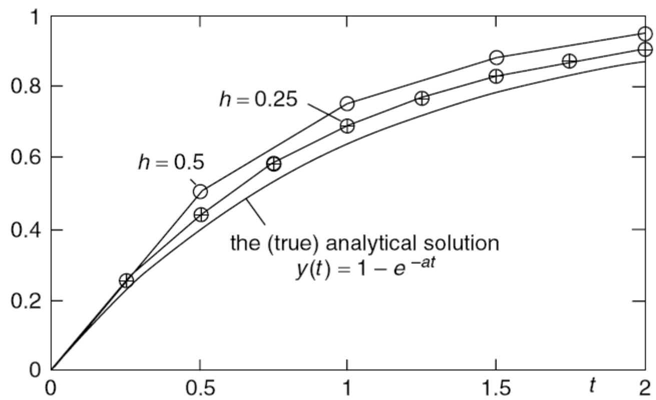
روش اولر Euler method

t	$h = 0.5$	$h = 0.25$
0.25		$y(0.25) = (1-ah)y_0 + hr = 1/4 = 0.25$
0.50	$y(0.50) = (1-ah)y_0 + hr = 1/2 = 0.5$	$y(0.50) = (3/4)y(0.25) + 1/4 = 0.4375$
0.75		$y(0.75) = (3/4)y(0.50) + 1/4 = 0.5781$
1.00	$y(1.00) = (1/2)y(0.5) + 1/2 = 3/4 = 0.75$	$y(1.00) = (3/4)y(0.75) + 1/4 = 0.6836$
1.25		$y(1.25) = (3/4)y(1.00) + 1/4 = 0.7627$
1.50	$y(1.50) = (1/2)y(1.0) + 1/2 = 7/8 = 0.875$	$y(1.50) = (3/4)y(1.25) + 1/4 = 0.8220$
...	. . . .	. . . .

24

مروری بر محاسبات عددی

روش اولر Euler method



25

مروری بر محاسبات عددی

روش اولر Euler method

- روش اولر برای معادلات دیفرانسیل برداری

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \qquad \text{with } \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k) \qquad \text{with } \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

- خطای روش اولر $O(h)$
- نمادهای لانداوو Landao

1. تعریف O، او بزرگ

فرض می کنیم $\{a_n\}$ و $\{\alpha_n\}$ دو دنباله باشند. هر گاه

$\exists k > 0,\ \exists N,\ \forall n (n \geq N \Rightarrow |a_n| \leq k|\alpha_n|).$

آنگاه می نویسیم

$a_n = O(\alpha_n),\ n \to \infty,\ or\ \ a_n = O(\alpha_n).$

26

مروری بر محاسبات عددی

روش رانگ-کوتا RUNGE–KUTTA

- تقریب اول رانگ کوتا

$$\begin{cases} \acute{y} = f(x,y) \\ y(x0) = y0 \end{cases}$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k) \qquad \text{with } \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

که در آن $f(x_k, y_k) = ak_1 + bk_2$ و:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = hf(x_k, y_k) \\ k_2 = hf(x_k + h, y_k + h) \end{cases}$$

- خطا در این روش با روش اولر تفاوت چندانی ندارد.

27

مروری بر محاسبات عددی

روش رانگ-کوتا RUNGE–KUTTA

- تقریب چهارم رانگ کوتا
- با فرض هسته معادله به شکل زیر

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{h}{6}(\mathbf{f}_{k1} + 2\mathbf{f}_{k2} + 2\mathbf{f}_{k3} + \mathbf{f}_{k4})$$

$$\mathbf{f}_{k1} = \mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k)$$

$$\mathbf{f}_{k2} = \mathbf{f}(t_k + h/2, \mathbf{y}_k + \mathbf{f}_{k1}h/2)$$

$$\mathbf{f}_{k3} = \mathbf{f}(t_k + h/2, \mathbf{y}_k + \mathbf{f}_{k2}h/2)$$

$$\mathbf{f}_{k4} = \mathbf{f}(t_k + h, \mathbf{y}_k + \mathbf{f}_{k3}h)$$

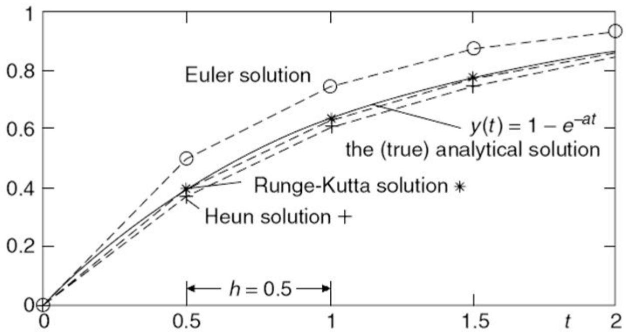
- این روش در بسیاری از محاسبات مهندسی و فیزیکی کاربرد دارد.

28

مروری بر محاسبات عددی

روش رانگ-کوتا RUNGE–KUTTA

- خطای روش $O(h^4)$
- در نرم افزار مطلب دستورات ()ode45 و ()ode23 از روش رانگ کوتا برای حل استفاده می کنند. البته ممکن است گام حل تطبیقی و یا قابل انتخاب باشد.
- مقایسه ورشها



مروری بر محاسبات عددی

مقایسه روش ها

- معیارهای اصلی مقایسه شامل دو محور است
  - دقت جوابها
  - میزان حجم محاسبات
- مقایسه ها برای یک معادله دیفرانسیل نمونه

$$y'(t) = -y(t) + 1 \qquad \text{with } y(0) = 0$$

	ode_RK4()	ode_ABM()	ode_Ham()	ode23()	ode45()	ode113()
Relative error	0.0925×10^{-4}	0.0203×10^{-4}	0.0179×10^{-4}	0.4770×10^{-4}	0.0422×10^{-4}	0.1249×10^{-4}
Computing time	0.05 sec	0.03 sec	0.03 sec	0.07 sec	0.05 sec	0.05 sec

- مسلما این نتایج باید برای هرمعادله به طور جداگانه بررسی مجدد شوند.

مروری بر محاسبات عددی

معادلات دیفرانسیل برداری

- یاد آوری فضای حالت

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \ldots) \qquad \text{with } x_1(t_0) = x_{10}$$
$$x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \ldots) \qquad \text{with } x_2(t_0) = x_{20}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \qquad \text{with } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

- باید دقت کرد که دستور ode45 معادلات دیفرانسیل برداری را نیز حل می نماید.

31

مروری بر محاسبات عددی

معادلات دیفرانسیل برداری

- مثال

$$x_1'(t) = x_2(t) \qquad \text{with } x_1(0) = 1$$
$$x_2'(t) = -x_2(t) + 1 \qquad \text{with } x_2(0) = -1$$

```
function dx = df(t,x)
dx = zeros(size(x));
dx(1) = x(2);
dx(2) = -x(2) + 1

[T,Y] = ode45(df,[t0 tf],x0);
```

32

مروری بر محاسبات عددی
معادلات دیفرانسیل

- **برخی نکات در تنظیمات نرم افزاری**

- در حل های عددی توجه به انتخاب زمان نمونه بردای مساله مهمی است.
- در نرم ا فزارهایی نظیر مطلب دو نوع حال گام متغیر و گام ثابت وجود دارد.
- درگام متغیر نرم افزار خود بر اساس منحنی های تولید شده گام را تغییر می دهد.
- در گام ثابت کاربر یک گام انتخاب می نماید.
- توضیح استفاده صحیح از گام های حل در نرم افزارها
- همه این تنظیمات در بخش Configuration parameters نرم افزار مطلب قابل دسترسی است.

MATLAB SIMULINK

33

34

www.salampnu.com