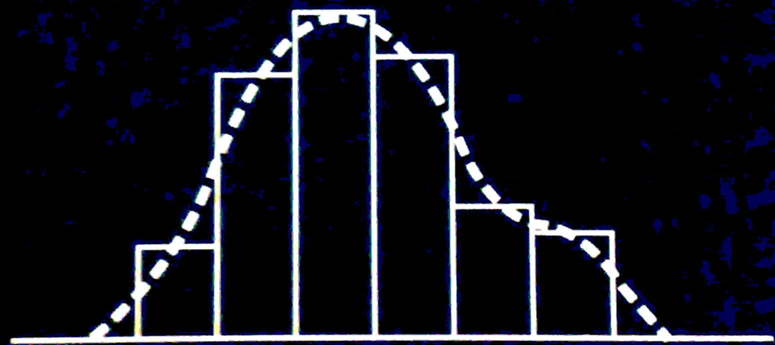
آمار و احتمال مُقدّماتی

چاپ سی و ششم



دکتر جواد بهبودیان

استاد دانشگاه شیراز

ویرایش ۳

در این ویرایش تنها غلطهای چاپی، محاسبات غلط و برخی تمرینها و مثالها اصلاح شده‌اند. ساختار این ویرایش با ویرایش ۲ تفاوتی چندان ندارد.

جواد بهبودیان

دانشگاه شیراز

پاییز ۸۴

آمار و احتمال مقدماتی

تألیف دکتر جواد بهبودیان

استاد دانشگاه شیراز

فهرست مطالب

پیشگفتار مؤلف ۱۵

فصل ۱ تهیه و تنظیم داده‌ها ۱۷

۱.۱ مقدمه ۱۷
۱.۱.۱ جمعیت ۱۷
۲.۱.۱ نمونه ۱۸
۲.۱ اندازه‌گیری و مقیاس‌سازی ۱۹
۱.۲.۱ مقیاسهای استیونز ۱۹
۲.۲.۱ متغیرها ۲۱
۳.۲.۱ داده‌ها ۲۲
۴.۲.۱ سرراست کردن داده پیوسته ۲۲
۵.۲.۱ تمرین بخش دو ۲۳
۳.۱ جدولهای آماری ۲۴
۱.۳.۱ فراوانی و فراوانی نسبی ۲۵
۲.۳.۱ فراوانی انباشته و فراوانی نسبی انباشته ۲۵
۳.۳.۱ جدول فراوانی ۲۵
۴.۳.۱ تمرین بخش سه ۲۸
۴.۱ نمودارهای آماری ۳۰
۱.۴.۱ هیستوگرام ۳۰
۲.۴.۱ چندبر فراوانی ۳۱
۳.۴.۱ چندبر فراوانی انباشته ۳۱
۴.۴.۱ منحنی‌های فراوانی و فراوانی انباشته ۳۱
۵.۴.۱ منحنی فراوانی نرمال ۳۲
۶.۴.۱ تمرین بخش چهار ۳۴
۵.۱ معیارهای تمرکز ۳۵
۱.۵.۱ میانگین حسابی ۳۶
۲.۵.۱ معدل وزنی ۳۶
۳.۵.۱ میانگین هندسی ۳۶
۴.۵.۱ میانگین توافقی ۳۶

۵.۵.۱ میانگین ریشه‌ای رتبه دو ۳۷
۶.۵.۱ میانه ۳۷
۷.۵.۱ محاسبه میانه برای داده‌های گسسته ۳۷
۸.۵.۱ محاسبه میانه برای داده‌های پیوسته ۳۹
۹.۵.۱ چندکها ۴۰
۱۰.۵.۱ محاسبه چندکها برای داده‌های گسسته ۴۱
۱۱.۵.۱ محاسبه چندکها برای داده‌های پیوسته ۴۲
۱۲.۵.۱ نما ۴۳
۱۳.۵.۱ محاسبه نما برای داده‌های گسسته ۴۳
۱۴.۵.۱ محاسبه نما برای داده‌های پیوسته ۴۳
۱۵.۵.۱ مقایسه میانگین، میانه و نما ۴۶
۱۶.۵.۱ میانگین اصلاح شده ۴۷
۱۷.۵.۱ تمرین بخش پنج ۴۸
۶.۱ معیارهای پراکندگی ۴۹
۱.۶.۱ برد ۵۰
۲.۶.۱ میانگین انحرافها ۵۰
۳.۶.۱ واریانس و انحراف استاندارد ۵۱
۴.۶.۱ روش تبدیل یا روش کوتاه برای محاسبه میانگین و واریانس ۵۲
۵.۶.۱ داده‌های تبدیل شده ۵۲
۶.۶.۱ داده‌های استاندارد ۵۴
۷.۶.۱ ضریب تغییر ۵۵
۸.۶.۱ نیم برد چارکها ۵۶
۹.۶.۱ تمرین بخش شش ۵۶
۷.۱ چولگی و برجستگی ۵۸
۱.۷.۱ گشتاور و گشتاور مرکزی داده‌ها ۵۸
۲.۷.۱ چولگی ۵۹
۳.۷.۱ برجستگی ۶۰
۴.۷.۱ تمرین بخش هفت ۶۰
۸.۱ چند نمودار جدید ۶۱
۱.۸.۱ نمودارهای ساقه‌ای ۶۱
۲.۸.۱ نمودار جعبه‌ای ۶۴
۳.۸.۱ تمرین بخش هشت ۶۵

فصل ۲ قوانین شانس یا احتمال

۱.۲ مقدمه ۶۸
۱.۱.۲ آزمایش تصادفی ۶۹
۲.۱.۲ پیشامد و فضای نمونه ۷۰
۳.۱.۲ رخ دادن یک پیشامد ۷۰
۴.۱.۲ زیر پیشامد ۷۱
۵.۱.۲ پیشامدهای برابر ۷۱
۶.۱.۲ اعمال مجموعه‌ای روی پیشامدها ۷۱
۷.۱.۲ فضای نمونه باپایان و بی‌پایان ۷۲
۸.۱.۲ تمرین بخش یک ۷۵
۲.۲ تعبیرهای مختلف احتمال ۷۶
۱.۲.۲ احتمال چیست؟ ۷۷
۲.۲.۲ تمرین بخش دو ۸۱
۳.۲ مدل احتمال با فضای نمونه باپایان ۸۲
۱.۳.۲ احتمال هر پیشامد ۸۲
۲.۳.۲ مدل احتمال یکنواخت ۸۲
۳.۳.۲ چند فرمول برای محاسبه احتمال ۸۳
۴.۳.۲ روش تعیین مدل احتمال ۸۴
۵.۳.۲ محاسبه احتمال در مدل یکنواخت ۸۶
۶.۳.۲ تمرین بخش سه ۸۶
۴.۲ قوانین شمارش ۸۸
۱.۴.۲ اصول شمارش ۸۸
۲.۴.۲ فرمولهای شمارش ۹۰
۳.۴.۲ تعبیر جایگشت و ترکیب به زبان مجموعه‌ها ۹۲
۴.۴.۲ فرمول استرلینگ ۹۳
۵.۴.۲ شمارش با مدلهای جعبه و مهره ۹۳
۶.۴.۲ تمرین بخش چهار ۱۰۰
۵.۲ مدل احتمال با فضای نمونه دلخواه ۱۰۳
۱.۵.۲ میدان سیگما ۱۰۵
۲.۵.۲ تابع و تابع مجموعه‌ای ۱۰۶
۳.۵.۲ فضای احتمال ۱۰۷
۴.۵.۲ تمرین بخش پنج ۱۱۱
۶.۲ مدل احتمال شرطی ۱۱۳

۱.۶.۲ قانون ضرب احتمال ۱۱۶
۲.۶.۲ تمرین بخش شش ۱۱۷
۷.۲ فرمول بیز و کاربرد آن ۱۱۸
۱.۷.۲ تفکیک فضای نمونه به چند پیشامد ۱۱۸
۲.۷.۲ تفکیک یک پیشامد به چند پیشامد ۱۱۹
۳.۷.۲ فرمول تفکیک احتمال ۱۲۰
۴.۷.۲ فرمول بیز ۱۲۰
۵.۷.۲ احتمال پیشین و احتمال پسین ۱۲۲
۶.۷.۲ تمرین بخش هفت ۱۲۳
۸.۲ پیشامدهای مستقل ۱۲۴
۱.۸.۲ دو پیشامد مستقل ۱۲۵
۲.۸.۲ دو پیشامد مستقل و دو پیشامد جدا ۱۲۶
۳.۸.۲ چند پیشامد مستقل ۱۲۷
۴.۸.۲ حاصلضرب دو مدل احتمال ۱۲۸
۵.۸.۲ تمرین بخش هشت ۱۳۰

فصل ۳ متغیر تصادفی - تابع توزیع - تابع چگالی ۱۳۲

۱.۳ مفهوم متغیر تصادفی ۱۳۲
۱.۱.۳ تعریف متغیر تصادفی ۱۳۴
۲.۱.۳ متغیر تصادفی گسسته و پیوسته ۱۳۵
۳.۱.۳ تمرین بخش یک ۱۳۵
۲.۳ تابع توزیع ۱۳۶
۱.۲.۳ تعریف تابع توزیع ۱۳۷
۲.۲.۳ ویژگیهای تابع توزیع ۱۴۱
۳.۲.۳ محاسبه احتمال از روی تابع توزیع ۱۴۳
۴.۲.۳ متغیر تصادفی ثابت ۱۴۵
۵.۲.۳ متغیرهای تصادفی همتوزیع ۱۴۶
۶.۲.۳ تمرین بخش دو ۱۴۷
۳.۳ تابع چگالی ۱۴۸
۱.۳.۳ تابع چگالی متغیر تصادفی گسسته ۱۴۸
۲.۳.۳ تعریف تابع چگالی متغیر تصادفی گسسته ۱۴۹
۳.۳.۳ تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته ۱۵۱
۴.۳.۳ تعریف تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته ۱۵۳

۵.۳.۳ تابع چگالی متغیر تصادفی آمیخته ۱۵۶
۶.۳.۳ تمرین بخش سه ۱۵۷
۴.۳ چگالی توام دو متغیر تصادفی گسسته ۱۵۸
۱.۴.۳ تعریف چگالی توام دو متغیر تصادفی گسسته ۱۵۹
۲.۴.۳ تعریف دو متغیر تصادفی مستقل گسسته ۱۶۰
۳.۴.۳ تعریف توزیع توام دو متغیر تصادفی ۱۶۱
۴.۴.۳ تمرین بخش چهار ۱۶۲

فصل ۴ امید ریاضی یک متغیر تصادفی و کاربرد آن ۱۶۳

۱.۴ مفهوم امید ریاضی و ویژگیهای آن ۱۶۳
۱.۱.۴ تعریف امید ریاضی ۱۶۴
۲.۱.۴ امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی ۱۶۶
۳.۱.۴ تعریف امید ریاضی $g(X)$ ۱۶۶
۴.۱.۴ امید ریاضی یک چند جمله‌ای ۱۶۷
۵.۱.۴ امید ریاضی تابعی از دو متغیر تصادفی ۱۶۸
۶.۱.۴ تعریف امید ریاضی $h(X,Y)$ در حالت گسسته ۱۶۹
۷.۱.۴ امید ریاضی یک ترکیب خطی ۱۷۰
۸.۱.۴ امیدریاضی دو متغیر تصادفی همتوزیع ۱۷۰
۹.۱.۴ تمرین بخش یک ۱۷۳
۲.۴ مفهوم واریانس و ویژگیهای آن ۱۷۴
۱.۲.۴ تعریف واریانس ۱۷۵
۲.۲.۴ ویژگیهای واریانس ۱۷۶
۳.۲.۴ تعریف انحراف استاندارد ۱۷۷
۴.۲.۴ متغیر تصادفی استاندارد ۱۷۷
۵.۲.۴ تمرین بخش دو ۱۷۸
۳.۴ مفهوم کواریانس و ویژگیهای آن ۱۸۰
۱.۳.۴ تعریف کواریانس ۱۸۰
۲.۳.۴ محاسبه کواریانس ۱۸۰
۳.۳.۴ ویژگیهای کواریانس ۱۸۲
۴.۳.۴ تمرین بخش سه ۱۸۴
۴.۴ مفهوم ضریب همبستگی و ویژگیهای آن ۱۸۵
۱.۴.۴ تعریف ضریب همبستگی ۱۸۵
۲.۴.۴ ویژگیهای ضریب همبستگی ۱۸۵
۳.۴.۴ تمرین بخش چهار ۱۸۹

فصل ۵ چند توزیع مهم و ارتباط آنها با هم ۱۹۲

۱.۵ توزیع دو جمله‌ای ۱۹۲
۱.۱.۵ تعریف آزمایش برنولی ۱۹۲
۲.۱.۵ تعریف متغیر تصادفی برنولی ۱۹۲
۳.۱.۵ تعریف توزیع دو جمله‌ای ۱۹۳
۴.۱.۵ چگالی دو جمله‌ای ۱۹۴
۵.۱.۵ میانگین و واریانس توزیع دو جمله‌ای ۱۹۴
۶.۱.۵ محاسبه احتمال از روی توزیع دو جمله‌ای ۱۹۵
۷.۱.۵ تمرین بخش یک ۱۹۶
۲.۵ توزیع پواسن ۱۹۷
۱.۲.۵ چگالی پواسن ۱۹۸
۲.۲.۵ میانگین و واریانس توزیع پواسن ۱۹۸
۳.۲.۵ تمرین بخش دو ۲۰۰
۳.۵ توزیع نرمال ۲۰۲
۱.۳.۵ چگالی توزیع نرمال ۲۰۲
۲.۳.۵ میانگین و واریانس توزیع نرمال ۲۰۲
۳.۳.۵ توزیع نرمال استاندارد ۲۰۳
۴.۳.۵ محاسبه احتمال برای متغیر نرمال غیر استاندارد ۲۰۴
۵.۳.۵ ترکیب خطی چند متغیر نرمال ۲۰۴
۶.۳.۵ تمرین بخش سه ۲۰۵
۴.۵ قضیه حد مرکزی و کاربرد آن ۲۰۶
۱.۴.۵ نمونه تصادفی ۲۰۷
۲.۴.۵ قضیه حد مرکزی ۲۰۸
۳.۴.۵ ارتباط میان توزیع دو جمله‌ای و نرمال ۲۰۹
۴.۴.۵ تصحیح پیوستگی ۲۰۹
۵.۴.۵ تمرین بخش چهار ۲۱۲

فصل ۶ نتیجه‌گیری آماری ۲۱۴

۱.۶ فرق احتمال و آمار ۲۱۴
۱.۱.۶ روش منطقی احتمال و آمار ۲۱۵
۲.۶ برآورد آماری یک پارامتر ۲۱۶
۱.۲.۶ نمونهٔ تصادفی ۲۱۶

۲.۲.۶ تعریف یک نمونه تصادفی ۲۱۶
۳.۲.۶ یافته‌های یک نمونه تصادفی ۲۱۶
۴.۲.۶ آماره ۲۱۷
۵.۲.۶ تعریف آماره ۲۱۷
۶.۲.۶ تعریف برآورد و برآوردیاب ۲۱۷
۷.۲.۶ تمرین بخش دو ۲۱۹
۳.۶ روشهای برآوردیابی ۲۱۹
۱.۳.۶ روش گشتاورها ۲۱۹
۲.۳.۶ قانون اعداد بزرگ ۲۲۰
۳.۳.۶ روش راستنمائی ماکزیمم ۲۲۳
۴.۳.۶ تابع راستنمائی ۲۲۴
۵.۳.۶ برآورد راستنمائی ماکزیمم ۲۲۴
۶.۳.۶ تمرین بخش سه ۲۲۷
۴.۶ فاصله اطمینان برای یک پارامتر ۲۲۸
۱.۴.۶ تعریف فاصلهٔ اطمینان ۲۲۹
۲.۴.۶ طرز پیدا کردن فاصلهٔ اطمینان ۲۲۹
۳.۴.۶ تمرین بخش چهار ۲۳۱
۵.۶ آزمون آماری یک پارامتر ۲۳۲
۱.۵.۶ ناحیه بحرانی ۲۳۳
۲.۵.۶ خطاها ۲۳۳
۳.۵.۶ توان آزمون ۲۳۴
۴.۵.۶ تمرین بخش پنج ۲۳۶
۶.۶ p- مقدار ۲۳۷
۱.۶.۶ تعریف p- مقدار ۲۳۹
۲.۶.۶ طرز محاسبهٔ p- مقدار ۲۴۱
۳.۶.۶ تمرین بخش شش ۲۴۳
۷.۶ متغیرهای χ^2 و T و F و کاربرد آن ۲۴۴
۱.۷.۶ متغیر تصادفی χ^2 ۲۴۴
۲.۷.۶ متغیر تصادفی T ۲۴۵
۳.۷.۶ متغیر تصادفی F ۲۴۶
۴.۷.۶ چند آماره مهم بر پایه توزیع نرمال ۲۴۶
۵.۷.۶ استقلال $\bar{X}$ و S^2 ۲۴۸
۶.۷.۶ توزیع $\frac{(\bar{X}-\mu)}{(\frac{S}{n^{1/2}})}$ ۲۴۸

۷.۷.۶ واریانس آمیخته ۲۴۹

۸.۷.۶ توزیع $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ ۲۵۰

۹.۷.۶ تمرین بخش هفت ۲۵۰

فصل ۷ نتیجه‌گیری آماری برای پارامترهای توزیع نرمال و پارامتر نسبت ۲۵۳

۱.۷ فاصله اطمینان و آزمون آماری برای پارامترهای توزیع نرمال ۲۵۳

۱.۱.۷ فاصله اطمینان برای μ ۲۵۳

۲.۱.۷ آزمون آماری برای μ ۲۵۵

۳.۱.۷ فاصله اطمینان برای σ^2 .... ۲۵۷

۴.۱.۷ آزمون آماری برای σ^2 .... ۲۵۹

۵.۱.۷ تمرین بخش یک ۲۶۰

۲.۷ فاصله اطمینان و آزمون آماری برای پارامترهای دو توزیع نرمال مستقل ۲۶۲

۱.۲.۷ فاصله اطمینان برای $\mu_2-\mu_1$ ۲۶۲

۲.۲.۷ آزمون آماری برای $\mu_2-\mu_1$ ۲۶۳

۳.۲.۷ فاصله اطمینان برای $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ ۲۶۴

۴.۲.۷ آزمون آماری برای $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ ۲۶۵

۵.۲.۷ تمرین بخش دو ۲۶۷

۳.۷ آزمونهای گوناگون برای پارامترهای نسبت ۲۶۸

۱.۳.۷ فاصله اطمینان برای p ۲۶۹

۲.۳.۷ آزمون آماری برای p ۲۷۰

۳.۳.۷ فاصله اطمینان برای p_2-p_1 .... ۲۷۱

۴.۳.۷ آزمون آماری برای $p_2=p_1$ ۲۷۲

۵.۳.۷ تمرین بخش سه ۲۷۳

فصل ۸ ضریب همبستگی و خط برگشت ۲۷۵

۱.۸ برآورد ضریب همبستگی ۲۷۵

۱.۱.۸ برآورد پارامتر ρ ۲۷۶

۲.۱.۸ ویژگیهای برآورد r ۲۷۷

۳.۱.۸ توزیع تقریبی R ۲۷۹

۴.۱.۸ توزیع نرمال توأم ۲۸۰

۵.۱.۸ چگالی R تحت فرض نرمال ۲۸۱

۶.۱.۸ تمرین بخش یک ۲۸۲

۲.۸ خط برگشت ۲۸۳

۱.۲.۸ مدل خطی ساده ۲۸۴

۲.۲.۸ یک نمونه از متغیر مستقل و متغیر وابسته با مدل خطی ساده ۲۸۴

۳.۲.۸ روش کمترین توانهای دوم برای برآورد a و b ۲۸۵

۴.۲.۸ پیش‌بینی متغیر وابسته به طور متوسط ۲۸۷

۵.۲.۸ برآورد خطای تصادفی ۲۸۷

۶.۲.۸ برآورد σ^2 .... ۲۸۷

۷.۲.۸ خط برگشت ۲۸۸

۸.۲.۸ توزیع برآوردیابها در حالت نرمال ۲۸۹

۹.۲.۸ تمرین بخش دو ۲۹۲

فصل ۹ آزمون مدلهای احتمال به کمک توزیع χ^2 ۲۹۵

۱.۹ آزمون χ^2 برای برازندگی ۲۹۵

۱.۱.۹ تمرین بخش یک ۲۹۹

۲.۹ آزمون χ^2 برای مستقل بودن ۳۰۱

۱.۲.۹ تمرین بخش دو ۳۰۳

۳.۹ آزمون همتوزیعی ۳۰۴

۱.۳.۹ تمرین بخش سه ۳۰۶

پاسخ تمرینهای انتخابی ۳۰۹

واژه نامه فارسی به انگلیسی ۳۲۴

واژه نامه انگلیسی به فارسی ۳۳۱

جدول توزیع دو جمله‌ای ۳۳۸

جدول توزیع پواسن ۳۳۹

جدول توزیع نرمال ۳۴۰

جدول توزیع χ^2 ۳۴۱

جدول توزیع T ۳۴۲

جدول توزیع F ۳۴۳

کتابنامه ۳۴۹

پیشگفتار مؤلف

در عصر ما بیش از هر عصری اعداد محرک و راهنمای انسانها می‌باشند. اغلب با شنیدن یا دیدن عددی که به نحوی با ما ارتباط دارد اندیشه می‌کنیم، احساساتی می‌شویم، تغییر عقیده می‌دهیم، چاره‌جوئی می‌کنیم و سرانجام به کار می‌پردازیم.

اعداد اگر نماینده تقریبی واقعیتها باشند و به خوبی تجزیه و تحلیل گردند به حق می‌توانند ما را راهنمائی کنند. اما اگر جعلی و مخدوش باشند یا به غلط تفسیر گردند، ممکن است ما را گمراه نمایند.

هرگاه بخواهیم درباره موضوعی به طریق علمی از اعداد یاری بگیریم باید گامهای زیر پیموده شوند:

الف- کسب اطلاعات لازم وابسته به موضوع از راه پرسشنامه یا طرح آزمایش.

ب- اندازه‌گیری اطلاعات جمع‌آوری شده بوسیله مقیاسهای مناسب و بیان آنها به صورت اعدادی به نام دادهها.

ج- تنظیم و تجزیه و تحلیل دادهها طبق اصول و ضوابطی مقبول.

دو گام اول با وجود اصول و روشهای عمومی، بستگی تام به رشته و هدف پژوهشگر دارند و ما کمتر درباره آنها صحبت خواهیم کرد. گام سوم موضوع اساسی کار ما در این نوشتهها می‌باشد.

دادهها، یعنی اطلاعاتی که به زبان اعداد ترجمه شده‌اند اغلب دستخوش عوامل شانس می‌باشند و در صورتی می‌توانند روشنگر واقعیتها گردند که:

۱. طبق قواعدی تهیه و تنظیم گردند.

۲. قوانین شانسی که بر آنها حاکم می‌باشند مشخص شوند.

۳. طبق اصولی با اطمینان کافی تجزیه و تحلیل شوند.

در واقع مراحل یاد شده موضوع آمار و احتمال می‌باشند که در این کتاب در چند فصل بیان می‌شوند.

این کتاب، برپایه تجربه و سلیقه شخصی، به عنوان کتاب درسی برای آمار و احتمال عمومی نوشته شده است. گفتارها با زبانی ساده و مثالها و تمرینهای زیاد و در ضمن با اسلوب ریاضی در حد دبیرستان ارائه شده‌اند. با خواندن و تمرین کردن این گفتارها خواننده با آمار و احتمال آشنا می‌شود و می‌تواند خود را برای گرفتن درسهای بالاتر در این رشته آماده نماید.

گفتارهای این کتاب تقریباً طبق برنامه درس آمار و احتمال مقدماتی و درس روشهای مقدماتی آمار مصوبه شورای عالی انقلاب فرهنگی تنظیم گردیده‌اند و باید در دو نیمسال، هفته‌ای ۴ ساعت تدریس و تمرین شوند. با افزودن یا کاستن چند مطلب و مثالهای مناسب می‌توان کتاب را برای درس آمار و احتمال در رشته‌های گوناگون به کار برد. به طور کلی تمام دانشجویانی که دارای دیپلم ریاضی - فیزیک یا علوم تجربی می‌باشند و می‌خواهند بر اساس ریاضی دبیرستان با مفاهیم آمار و احتمال مقدماتی آشنا شوند، می‌توانند از تمام این کتاب استفاده کنند. با این حال، در صورتی که استاد درس مصلحت بداند، می‌توان از خواندن بعضی از قسمتهای ریاضی خودداری کرد، بدون این که به فهم سایر قسمتها لطمه‌ای وارد شود.

داده‌هائی که در این کتاب آمده‌اند، پاره‌ای را دانشجویان جمع‌آوری کرده‌اند و پاره‌ای مصنوعی می‌باشند. اکیداً توصیه می‌شود که دانشجویان این کتاب، داده‌های مشابه را جمع‌آوری کنند تا مفاهیم آمار و احتمال بهتر روشن شوند.

سخنی درباره چاپ تازه

پس از تقریباً یک دهه که از نخستین چاپ این کتاب می‌گذرد، دگرگونیهائی در این چاپ تازه پدید آمده است که به شرح زیر می‌باشند:

۱. چند نمودار مانند نمودار ساقه‌ای و نمودار جعبه‌ای افزوده شده‌اند.

۲. موضوع p- مقدار $(p-value)$، که این روزها در نرم افزارهای آماری کاربرد فراوان دارد، در کتاب آمده است.

۳. یک فصل دربارهٔ آزمونهای χ^2 دیده می‌شود.

۴. اصلاحات لازم در متن و در مثالها و تمرینها انجام شده است.

۵. پاسخ تمرینهای انتخابی در پایان کتاب افزوده شده است.

آمار هم مانند هر علم دیگر در حرکت و نوگرائی می‌باشد. با پیشرفت و متداول شدن کامپیوتر در عصر ما، این دانش ثمربخش روندی نو پیدا کرده است. نویسنده امیدوار است که چاپ تازه با زمان همگام باشد و خواننده بتواند با بهره برداری از آن و انجام محاسبات کامپیوتری از مفاهیم ساده آمار و احتمال در زندگی روزانه استقبال نماید.

در پایان برخود می‌دانم از آنهائی که برای ویرایش دوم به نحوی یاری کرده‌اند صمیمانه قدردانی کنم. به ویژه از خانم حلیمه رضائی که کار ماشین‌نویسی کامپیوتری را سامان دادند و از دانشجویان آمار دانشگاه شیراز که در امر غلط‌گیری و تهیه پاسخ تمرینها همکاری کرده‌اند متشکرم. از انتشارات دانشگاه امام رضا (ع) که برای نشر این کتاب دقت و کوشش کرده‌اند بی‌اندازه سپاسگزارم.

هم‌چنین از کلیه عزیزانی که در ویرایش سوم کتاب همکاری داشته‌اند به ویژه مؤسسه تایپ و حروف‌چینی جم آقای علیرضا ضرابیان و سرکار خانم افسانه سلیمانی و کوشش انتشارات دانشگاه امام رضا (ع) مشهد سپاسگزارم.

جواد بهبودیان

دانشگاه شیراز، دانشکده علوم، بخش آمار

پاییز ۸۴

فصل ۱

تهیه و تنظیم داده‌ها

۱.۱ مقدمه

واژه Statistics که به فارسی آن را آمار ترجمه کرده‌اند در اغلب زبانها به دو معنی به کار می‌رود:

الف – به معنی ارقام و اعداد واقعی یا تقریبی درباره اموری از قبیل زاد و مرگ، طلاق، میزان محصولات کشاورزی و صنعتی، تصادفات رانندگی و غیره. در این رابطه معمولاً دو اثری مثلاً به نام دفترهای آمار در سازمانهای دولتی موجود است.

ب – به معنی روشهائی برای جمع‌آوری، تنظیم و تجزیه و تحلیل اطلاعات عددی درباره موضوعی.

با اینکه این دو مفهوم با هم ارتباط دارند، در این کتاب ما بیشتر با مفهوم دوم سر و کار داریم. تنها در فصل اول مطالبی را تحت عنوان تهیه و تنظیم داده‌ها، که اغلب آمار توصیفی نامیده می‌شوند، شرح می‌دهیم.

ما روزانه در خیابان و بازار، در مدرسه و دانشگاه، با دیدار دوستان و خویشان و از راه رسانه‌ها در معرض داده‌های آماری می‌باشیم. برداشت و قضاوت معقول بر اساس این داده‌ها، به کمک مفهوم دوم، که جنبه علمی دارد، انجام می‌گیرد.

در آمار مطالعه و قضاوت معقول درباره موضوعهای گوناگون، بر مبنای یک جمع انجام می‌شود و قضاوت بر مبنای یک فرد خاص، اصلاً مطرح نمی‌باشد. بنابراین نخست مفهوم کلمه جمعیت را از نظر آمار شرح می‌دهیم.

۱.۱.۱ جمعیت

مجموعهٔ افراد یا چیزهایی را که می‌خواهیم یک یا چند ویژگی دربارهٔ آنها مطالعه کنیم، یک جمعیت می‌نامیم. مثلاً جمعیت ماشینهای پیکان که در دو سال گذشته به بازار آمده‌اند از نظر قدرت ترمز، یا جمعیت نوزادانی که در سال گذشته به دنیا آمده‌اند از نظر مصرف شیر خشک.

مفهوم جمعیت از نظر آمار خیلی وسیع‌تر از مفهوم واژه‌ای آن، مانند جمعیت فلان شهر، و یا مفهوم سازمانی آن، مانند جمعیت هلال احمر، می‌باشد. برای انجام هر کار آماری روی یک جمعیت، باید آن جمعیت و ویژگی مورد مطالعه، بدون هرگونه ابهام قبلاً مشخص شوند. مثلاً جمعیت ماشینهای پیکان و قدرت ترمز.

جمعیت آماری ممکن است باپایان یا بی‌پایان باشد. مثلاً جمعیت افرادی که در دو سال گذشته به دنیا آمده‌اند با پایان، ولی جمعیت افرادی که از فروردین امسال به بعد به دنیا می‌آیند، بی‌پایان است. گاهی جمعیت مورد مطالعه به قدری انبوه است که عملاً می‌توان آن را بی‌پایان تلقی کرد، مثل جمعیت دانه‌های گندم که در یک مزرعه برداشت می‌شود. مطالعه یک یک افراد جمعیت، به علت هزینه زیاد و کمی وقت یا نداشتن امکانات کافی، اغلب مقدور نیست. بنابراین قسمتی از جمعیت را به جای تمام آن، به نام نمونه در نظر می‌گیرند.

۲.۱.۱ نمونه

قسمتی از جمعیت را که طبق ضوابطی مقبول انتخاب می‌شود و مطالعهٔ آن به جای مطالعهٔ تمام جمعیت مقدور است، نمونه‌ای از جمعیت می‌نامند. معمولاً به مصداق مشت نمونه خروار است نتیجهٔ حاصل از مطالعهٔ نمونه را به تمام جمعیت تعمیم می‌دهند. ولی این کار احتیاط دارد. زیرا هر مشتی نمی‌تواند نمونهٔ خروار باشد و قطعاً بی‌غرضی در انتخاب مشت و اندازهٔ مشت در این نمایندگی نقش مهمی دارد. مسئلهٔ انتخاب یک نمونه خوب به قدری مهم است که قسمت زیادی از تئوری احتمال و آمار به آن اختصاص دارد. برای حفظ بی‌طرفی و کسب حقیقت اغلب نمونه‌هائی را در نظر می‌گیرند که انتخاب آنها کاملاً شانسی باشد. اینگونه نمونه‌ها را نمونه‌های تصادفی می‌نامند و در عمل برای استخراج آنها از قرعه‌کشی یا جدولی به نام جدول اعداد تصادفی، و در عصر ما از کامپیوترها، کمک می‌گیرند.

برای مطالعهٔ ویژگیهای یک جمعیت یا نمونه‌ای از آن باید دانسته‌هایی را که از راه پرسشنامه یا طرح آزمایش در آزمایشگاه به دست می‌آیند، به زبان اعداد درآورده و سپس این اعداد را طبق اصولی تجزیه و تحلیل و تفسیر کرد. به دست آوردن چنین اعدادی تا آنجاکه مربوط به شمارش یا اندازه‌گیری امور کمی مانند طول، وزن، حجم، و غیره می‌باشد. امری است عادی و حتی وسائل دقیقی برای این کار ممکن است موجود باشد. ولی اندازه‌گیری امور کیفی نظیر هوش انسان یا شکنندگی چیزها، آسان نیست و مقیاسهای دقیق برای این کار موجود نمی‌باشند. با اینحال پیشرفت صنعت و علم بستگی به روشهای دقیق اندازه‌گیری امور مورد مطالعه دارد. مقیاس‌سازی و اندازه‌گیری موضوع درس جداگانه‌ای است. در اینجا تنها برای آشنائی، به مختصر اشاره‌ای دراین‌باره می‌پردازیم.

۲.۱ اندازه‌گیری و مقیاس‌سازی

فرض کنید a یکی از افراد جمعیت π و t یک ویژگی مورد مطالعه باشد. مثلاً سیبهای یک باغ را جمعیت π و a را یکی از سیبها بگیرید. ویژگی t برای a ممکن است وزن سیب باشد، که امری است کمی، یا تردی سیب باشد، که امری است کیفی. منظور از اندازه‌گیری ویژگی t در a، اطلاق یک عدد حقیقی x به a طبق ضابطه‌ای مشخص می‌باشد. به سخنی دیگر x تابعی از a به صورت $x=f(a)$ است. این تابع یا x را مقیاس و طرز تعیین عدد x را اندازه‌گیری یا مقیاس‌سازی می‌گویند. اگر t وزن سیب باشد می‌توان عدد x را با مقیاس وزن مثلاً برحسب گرم با تقریب لازم پیدا کرد. ولی اگر t تردی سیب باشد، مقیاسی شناخته شده برای اندازه‌گیری و پیدا کردن x در دست نیست.

با اینحال سیب شناسان می‌توانند منظور از تردی سیب را تعریف نمایند و مقیاسی برای تردی سیب معرفی کنند. باید توجه داشت که نوع عددی که نماینده وزن است با عددی که نماینده تردی است با هم تفاوت دارند. مثلاً می‌توان گفت که وزن یک سیب دو برابر وزن سیب دیگر است ولی این بیان در مورد تردی مفهومی ندارد.

استیونز S.S. Stevens، استاد روانشناسی دانشگاه هاروارد آمریکا، در مقاله بنیادی ۱۹۴۶ خود چهار نوع مقیاس معرفی کرده است. این مقیاسها در حدود نیم قرن است که در بعضی از کتابهای آمار بیان می‌شوند و با اینکه در عصر آمار و کامپیوتر بارها مورد انتقاد قرار گرفته‌اند، هنوز دارای اهمیت هستند. برای اطلاع بیشتر در این باره به کتابنامه رجوع کنید. اینک مقیاسهای استیونز را به کوتاهی شرح می‌دهیم.

۱.۲.۱ مقیاسهای استیونز

الف - مقیاس اسمی: هرگاه مقیاس x که معمولاً یک عدد طبیعی است، تنها برای شناسائی افراد یا چیزها یا مکانها به کار رود، آن را یک مقیاس اسمی می‌نامند. مثلاً اگر کارگران یک کارخانه از شهرهای تهران، اصفهان، شیراز و کرمان باشند و به ترتیب آنها را با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ مشخص کنیم، این اعداد صرفاً می‌گویند که هر کارگر از کدام شهر است. کارگری که برچسب ۳ دارد از شیراز و کارگری که برچسب ۴ دارد از کرمان است. توجه کنید که این اعداد را نمی‌توان برای مقایسه با چهار عمل اصلی حساب به کار برد.

مقیاس اسمی x را با هر تابع یک به یک می‌توان به مقیاس اسمی y تبدیل کرد بی‌آنکه شناسائی تغییر نماید. مثلاً تابع یک به یک $y=x+10$ برچسبهای ۱، ۲، ۳، ۴ را به ترتیب به برچسبهای ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴ تبدیل می‌کند.

ب - مقیاس ترتیبی: هرگاه مقیاس x که یک عدد حقیقی است، برتری را بیان کند، آن را یک مقیاس ترتیبی می‌نامند. به سخنی دیگر اگر a_2 از نظر ویژگی t بر a_1 برتری داشته باشد و ویژگی t را برای a_2 و a_1 با اعداد x_2 و x_1 نشان دهیم، باید داشته باشیم $x_2 > x_1$. مثلاً اگر مهندس یک کارخانه کارگران را از نظر مهارت با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ مشخص کند، کارگر شماره ۴ از کارگر شماره ۲ ماهرتر است. ولی نمی‌توان گفت که دو برابر او مهارت دارد؛ اینگونه اعداد را می‌توان تنها برای مقایسه به کار برد و نمی‌توان با آنها چهار عمل اصلی انجام داد.

مقیاس ترتیبی x را می‌توان با یک تابع صعودی به مقیاس ترتیبی y تبدیل کرد، بی‌آنکه برتری یا ترتیب مختل گردد. مثلاً تابع $y=x^3$ اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ را به ۱، ۸، ۲۷، ۶۴ تبدیل می‌کند و با اعداد اخیر هم کارگر چهارم از کارگر دوم ماهرتر است.

ج - مقیاس فاصله‌ای: هرگاه مقیاس x که یک عدد حقیقی است، نسبت دو تفاضل یا هر دو فاصله را حفظ کند، آن را یک مقیاس فاصله‌ای می‌نامند. به سخنی دیگر اگر با این مقیاس برای a_4، a_3، a_2، a_1 ویژگی t با اعداد x_1, x_2, x_3, x_4 اندازه‌گیری شود، باید نسبت $\frac{(x_4-x_3)}{(x_2-x_1)}$ ثابت بماند و به واحد اندازه‌گیری بستگی نداشته باشد. مثلاً فرض کنید ویژگی t گرمای چهار جسم باشد و با مقیاس سانتیگراد داشته باشیم:

$$x_1=10 \quad , \quad x_2=15 \quad , \quad x_3=20 \quad , \quad x_4=45$$

ملاحظه می‌شود که

$$\frac{x_4-x_3}{x_2-x_1}=5$$

اینک با مقیاس فارنهایت طبق فرمول $y=\frac{9x}{5}+32$ داریم:

$$y_1=50 \quad , \quad y_2=59 \quad , \quad y_3=68 \quad , \quad y_4=113$$

بازهم ملاحظه می‌شود که

$$\frac{y_4-y_3}{y_2-y_1}=5$$

در مثال بالا نکته‌های زیر قابل توجه می‌باشند:

(۱) اگر با مقیاس سانتیگراد جسم a دارای درجه حرارت صفر باشد، با مقیاس فارنهایت این جسم دارای درجه حرارت ۳۲ است. بنابراین با مقیاس فاصله‌ای صفر معنی هیچ نمی‌دهد و صرفاً جنبه قراردادی دارد.

(۲) با مقیاس اول گرمای a_4 سه برابر گرمای a_3 است، ولی با مقیاس دوم چنین نیست. بنابراین در اندازه‌گیری با مقیاس فاصله‌ای، نسبت محفوظ نمی‌ماند.

(۳) با هر دو مقیاس گرمای a_4 از a_3 پنج برابر تفاضل گرمای a_1 از a_2 است. بنابراین با مقیاس فاصله‌ای، نسبت فاصله‌ها با تغییر مقیاس فاصله‌ای تغییر نمی‌کند.

مقیاس فاصله‌ای x را می‌توان با تابع خطی $y = ax + b$، با فرض $a > 0$، به مقیاس فاصله‌ای y تبدیل کرد، بی‌آنکه نسبت دو تفاضل تغییر کند.

مقیاس فاصله‌ای معمولاً در روانشناسی، تعلیم و تربیت، جامعه‌شناسی و فیزیک، به ویژه در اموری مانند هوش، حافظه، ارزیابی آزمونها، حرارت و... به کار می‌رود. این نوع مقیاس‌سازی به مهارت و تجربه فراوان در رشته مورد بحث بستگی دارد و گاهی دستخوش مجادله می‌باشد.

د - مقیاس نسبتی: هرگاه مقیاس x، که یک عدد حقیقی است، نسبت را حفظ کند، آن را یک مقیاس نسبتی می‌نامند. به سخنی دیگر اگر با این مقیاس برای دو جسم a_1 و a_2 ویژگی t، مثلاً وزن، با x_1 و x_2 اندازه‌گیری شود، باید $\frac{x_1}{x_2}$ ثابت بماند و به واحد اندازه‌گیری بستگی نداشته باشد. اگر وزن a_1 و a_2 با مقیاس گرم ۶۰۰۰ و ۲۰۰۰ باشد، با مقیاس کیلوگرم ۶ و ۲ است. ملاحظه می‌شود که با هر دو مقیاس وزن a_1 سه برابر وزن a_2 است.

مقیاس نسبتی برای امور کمی مانند وزن، طول، سطح، مقدار حرارت به کار می‌رود و عالیترین نوع مقیاس است. با اعداد حاصل از این مقیاس می‌توان چهار عمل اصلی حساب را انجام داد.

مقیاس نسبتی x را می‌توان با یک تابع خطی $y = ax$، با فرض $a > 0$، به مقیاس نسبتی y تبدیل کرد، بی‌آنکه نسبت تغییر کند.

ما در این کتاب، ضمن بحث دربارهٔ مباحث آماری گوناگون، به مقیاسهای مورد نیاز اشاره خواهیم کرد.

۲.۲.۱ متغیرها

ویژگی t، مثلاً گروه‌خونی، مهارت، هوش، و وزن، درافراد مختلف جمعیت یکسان نیست و معمولاً از فردی به فرد دیگر تغییر کرده، کاهش یا افزایش می‌یابد. از این رو t را یک متغیر می‌نامیم. دو نوع متغیر داریم:

الف - متغیر گروهی: مانند گروه خونی و مهارت، که با مقیاس اسمی یا ترتیبی سنجیده می‌شوند و بر اساس آن جمعیت را گروه‌بندی می‌کنند.

ب - متغیر عددی: مانند شماره فرزندان یک خانواده که از راه شمارش به دست می‌آید، یا هوش یک پسر ۹ ساله و وزن یک جوان بیست ساله که از راه اندازه‌گیری با مقیاس فاصله‌ای و نسبتی به دست می‌آیند.

۳.۲.۱ داده‌ها

فرض کنید می‌خواهیم ویژگی t از یک جمعیت را، که معمولاً یک متغیر است، مطالعه کنیم. اگر این متغیر را در مورد یک یک افراد جمعیت یا نمونه‌ای از آن با مقیاسی مناسب اندازه‌گیری کنیم، یک مجموعه از اعداد به دست می‌آید که آن را داده‌ها می‌نامند. داده‌ها دو نوع‌اند:

الف - داده‌های گسسته: از راه اندازه‌گیری با مقیاسهای اسمی، ترتیبی، یا شمارشی بدست می‌آیند. داده‌های گسسته را داده‌های جدا از هم می‌نامند.

ب - داده‌های پیوسته: از راه اندازه‌گیری با مقیاسهای فاصله‌ای یا نسبتی بدست می‌آیند.

داده‌ها اغلب بصورت انبوهی از اعداد ارائه می‌شوند و به خودی خود خام هستند. برای اینکه بتوان آنها را پخته کرد و حقایق را جویا شد باید:

الف - آنها را در جدولهائی تنظیم کرد.

ب - از روی جدولها، نمودارهائی رسم نمود.

ج - آنها را در یک یا چند عدد مختصر کرد.

تنها بعد از طی این مراحل می‌توان، قوانین شانسی حاکم بر آنها را پیداکرده و به برداشتهای آماری و تهیه گزارش نهائی درباره ویژگی مورد مطالعه پرداخت.

۴.۲.۱ سر راست کردن داده‌های پیوسته

اندازه‌گیری با مقیاسهای اسمی و ترتیبی، چندان مفهوم و مصداقی ندارد، زیرا داده‌های حاصل معمولاً از راه نامگذاری یا ترتیب بدست می‌آیند. اندازه‌گیری را حقاً در مورد مقیاسهای فاصله‌ای و نسبتی باید بکار برد. داده‌های حاصل از این راه معمولاً پیوسته می‌باشند. داده پیوسته یک عدد حقیقی است که به صورت اعشاری با تعدادی ارقام اعشار بیان می‌شود.

منظور از سر راست کردن یا رند کردن عدد حقیقی x تا r رقم اعشار، به دست آوردن یک عدد اعشاری x' با حداکثر r رقم اعشار می‌باشد، به طوری که داشته باشیم

$$|x - x'| \leq 0/5 \times 10^{-r}$$

به مثالهای زیر توجه کنید:

اگر عدد ۷۳/۳۸۲۵۰۰۰ را تا یک رقم اعشار (یا نزدیکترین دهم واحد) سر راست کنیم، عدد ۷۳/۴ به دست می‌آید.

اگر عدد ۵۱/۲۹۴۳۰۰۰ را تا دو رقم اعشار (یا نزدیکترین صدم واحد) سر راست کنیم، عدد ۵۱/۲۹ به دست می‌آید.

اگر عدد ۳۵/۴۷۲۵۰۰۰ را تا سه رقم اعشار (یا نزدیکترین هزارم واحد) سر راست کنیم، عدد ۳۵/۴۷۲ به دست می‌آید.

اگر عدد ۷۸/۲۴۳۶۵۰۰۰۰ را تا چهار رقم اعشار (یا نزدیکترین ده هزارم واحد) سر راست کنیم، عدد ۷۸/۲۴۳۷ به دست می‌آید.

با تعریف بالا و با توجه به مثالها، قاعده کلی زیر را برای سر راست کردن یک عدد حقیقی تا r را اعشار داریم:

الف – اگر رقم اعشار $(r+1)$ ام بیشتر از ۵ (یا ۵ و رقم rام زوج) باشد، عدد یک را به رقم r ام اضافه کرده بعداً تمام ارقام اعشار بعد از رقم rام را حذف می‌کنیم.

ب – اگر رقم اعشار $(r+1)$ ام کمتر از ۵ (یا ۵ و رقم rام فرد) باشد، تمام ارقام اعشار بعد از رقم rام را حذف می‌کنیم.

به همین طریق می‌توان عددی را تا نزدیکترین واحد، تا نزدیکترین ده واحد، تا نزدیکترین صد واحد، و ... سر راست کرد. مثلاً اگر عدد ۴۲/۳ را تا نزدیکترین واحد سر راست کنیم، عدد ۴۲ به دست می‌آید.

اگر عدد ۷۶ را تا نزدیکترین ده واحد سر راست کنیم عدد ۸۰ به دست می‌آید.

اگر عدد ۸۵۲۰ را تا نزدیکترین صد واحد سر راست کنیم عدد ۸۵۰۰ به دست می‌آید.

۵.۲.۱ تمرین بخش دو

۱. این ویژگیها را با چه مقیاس‌هائی می‌توان اندازه‌گیری کرد؟ کدامیک از متغیرهای مربوط گسسته و کدام پیوسته می‌باشند؟

نژاد، زمان، درآمد و شغل.

۲. منظور از جمعیت، نمونه، متغیر و مقیاس مربوط را در موارد زیر مشخص کنید:

الف – دانش‌آموزان یک مدرسه و قدرت دید.

ب – صفحات یک کتاب و شماره غلطها را در یک صفحه.

ج – اتومبیلهای پیکان که پارسال تولید شده‌اند و مصرف بنزین برای صد کیلومتر.

د – دانش‌آموزان یک شهر و میزان یادگیری درس ریاضی.

۳. نشان دهید که مقیاس فاصله‌ای x را می‌توان با تابع $y=ax+b$، $a>0$، به مقیاس فاصله‌ای y تبدیل کرد.

۴. نشان دهید که مقیاس نسبتی x را می‌توان با تابع $y=ax$، $a>0$، به مقیاس نسبتی y تبدیل کرد.

۵. اعداد زیر را تا دو رقم اعشار یا تا سه رقم اعشار سر راست کنید.

۲/۵۱۴۰ ۲/۷۳۵۱ ۲/۹۴۵۳ ۲/۴۷۱۵

۶. اعداد ۱۹۷۲۶ و ۱۴۵۹۸ و ۱۱۷۲۳ را تا نزدیکترین ده واحد سر راست کنید؟

۷. با یکی از توابع زیر مقیاس x را به y تبدیل می‌کنیم. کدام نوع مقیاس تغییر نمی‌کند؟

$y=\log x$ $y=x^2+1$ $y=2x+3$ $y=10x$

۸. مقیاس ریشتر (به نام چارلز ریشتر زلزله‌شناس آمریکائی متولد ۱۹۰۰ میلادی) عبارتست از لگاریتم دهدهی ماکزیمم دامنه‌نوسان ثبت شده روی ماشین نوار زلزله سنج برحسب میکرون. مقیاس ریشتر چه نوع مقیاسی است؟

۳.۱ جدولهای آماری

نمایشی داده‌ها را، با نظمی خاص، در چند سطر و ستون یک جدول آماری می‌گویند. یک جدول آماری باید به نحوی تنظیم شود که بتوان به آسانی پاره‌ای از دانسته‌های نهفته در داده‌ها را از روی آن خواند. شماره جدول، نام جدول، عنوانهای سطر و ستون، زیر نویس، و بالاخره مأخذ جدول در صورت لزوم باید روشن و گویا باشند. جدولی که از روی تمام داده‌ها به دست می‌آید، جدول اصلی و جدولی که از روی جدول اصلی، برای بررسی دانسته‌هایی ویژه مشتق می‌شود، جدول فرعی نامیده می‌شود. در کارهای آماری برای این که داده‌ها را خلاصه کنند. آنها را در جدولی به نام جدول فراوانی تنظیم می‌کنند

۱.۳.۱ فراوانی و فراوانی نسبی

هرگاه n چیز از k نوع $T_1, T_2, \dots, T_k$ با فرض $2 \le k \le n$، به ترتیب با تعدادهای $f_1, f_2, \dots, f_k$ تشکیل شده باشند، این تعدادها را فراوانیها و $\frac{f_1}{n}, \frac{f_2}{n}, \dots, \frac{f_k}{n}$ را فراوانیهای نسبی این چیزها می‌گوئیم. فراوانیهای نسبی را به ترتیب با $r_1, r_2, \dots, r_k$ نشان می‌دهند. واضح است که برای $i = 1, 2, \dots, k$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = n \quad , \quad 1 \le f_i < n \quad , \quad \sum_{i=1}^{k} r_i = 1 \quad , \quad \frac{1}{n} \le r_i < 1,$$

۲.۳.۱ فراوانی انباشته و فراوانی نسبی انباشته

با توجه به فراوانی و فراوانی نسبی، برای $i = 1, 2, \dots, k$،

$$s_i = \sum_{j=1}^{i} r_j \quad , \quad g_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$$

را به ترتیب، فراوانی انباشته و فراوانی نسبی انباشته می‌گویند. واضح است که

$$s_k = 1 \quad , \quad g_k = n.$$

مثال ۱ اگر گروهی ۱۰ نفری از ۳ شیرازی، ۵ تهرانی، و ۲ کرمانی تشکیل شده باشد، فراوانی شیرازیها، تهرانیها و کرمانیها در این گروه به ترتیب ۳، ۵ و ۲ و فراوانی نسبی آنها ۰/۳، ۰/۵، و ۰/۲ می‌باشد. فراوانی انباشته و فراوانی نسبی انباشته شیرازیها و تهرانیها به ترتیب ۸ و ۰/۸ است.

۳.۳.۱ جدول فراوانی

هرگاه داده‌ها را به نحوی تقسیم کرده، آنها را برحسب فراوانیها در جدولی تنظیم کنیم، این جدول را جدول فراوانی یا جدول توزیع فراوانی می‌نامند. برای اینکه جدول فراوانی را با توجه به داده‌ها از لحاظ داده‌های گسسته و پیوسته، شرح دهیم به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۲ پزشکی ۲۰ بیمار قلبی دارد که گروه خونی آنها عبارتند از:

B A O AB O A A A O O A A B B AB O AB AB O O

جدول ۱. جدول فراوانی گروه خونی ۲۰ بیمار قلبی با متغیر اسمی X

گروه خونی	x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
A	۱	۶	۰/۳۰	۶	۰/۳۰
B	۲	۳	۰/۱۵	۹	۰/۴۵
AB	۳	۴	۰/۲۰	۱۳	۰/۶۵
O	۴	۷	۰/۳۵	۲۰	۱/۰۰
		۲۰	۱/۰۰		

می‌خواهیم از این داده‌ها یک جدول فراوانی بسازیم.

نخست چهار گروه خونی O, AB, B, A را به ترتیب با اعداد ۴، ۳، ۲، ۱ متناظر می‌کنیم تا داده‌های اسمی به دست آیند. این اعداد صرفاً برای گروه بندی و نامگذاری است و نمی‌توان روی آنها چهار عمل اصلی را انجام داد. بعد از شمارش لازم، جدول ۱، به نام جدول گروه خونی ۲۰ بیمار قلبی به دست می‌آید. داده‌های این مثال نمونه‌ای از داده‌های گروهی است که در واقع داده‌های گسسته می‌باشند.

مثال ۳ داده‌های زیر تعداد فرزندان ۲۰۰ خانواده در یکی از شهرهای ایران می‌باشند:

۱	۱	۰	۳	۴	۶	۱	۰	۲	۵	۲	۵	۳	۴	۰	۱	۲	۴	۵	۳
۴	۴	۲	۶	۵	۲	۳	۲	۱	۳	۲	۰	۲	۲	۳	۴	۶	۵	۱	۳
۲	۴	۳	۵	۲	۰	۱	۲	۱	۳	۴	۶	۵	۲	۰	۴	۲	۵	۲	۴
۴	۳	۵	۱	۴	۶	۲	۱	۰	۳	۴	۶	۵	۲	۱	۰	۲	۳	۰	۱
۲	۴	۰	۲	۳	۵	۱	۴	۲	۴	۰	۱	۲	۰	۳	۳	۱	۵	۲	۴
۱	۰	۳	۳	۲	۵	۱	۰	۲	۲	۳	۲	۳	۵	۰	۲	۶	۱	۵	۳
۴	۲	۳	۴	۵	۳	۲	۴	۰	۱	۶	۲	۳	۲	۱	۲	۳	۴	۲	۱
۲	۳	۴	۲	۶	۳	۴	۰	۱	۲	۴	۳	۲	۳	۴	۲	۵	۵	۲	۳
۲	۱	۳	۲	۰	۱	۲	۴	۳	۴	۵	۱	۳	۲	۴	۵	۶	۱	۴	۲
۳	۱	۰	۲	۱	۰	۳	۴	۴	۱	۳	۲	۳	۲	۳	۳	۱	۲	۳	۳

در این مثال ویژگی مورد مطالعه، تعداد فرزندان یک خانواده است، که با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، و ۶ مشخص شده است. این اعداد برای گروه‌بندی به کار می‌روند و جنبه ترتیبی دارند. داده‌های بالا

جدول ۲ جدول فراوانی تعداد فرزندان ۲۰۰ خانواده با متغیر ترتیبی x_i

x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
۰	۲۰	۰/۱۰	۲۰	۰/۱۰
۱	۳۰	۰/۱۵	۵۰	۰/۲۵
۲	۵۰	۰/۲۵	۱۰۰	۰/۵۰
۳	۴۰	۰/۲۰	۱۴۰	۰/۷۰
۴	۳۰	۰/۱۵	۱۷۰	۰/۸۵
۵	۲۰	۰/۱۰	۱۹۰	۰/۹۵
۶	۱۰	۰/۰۵	۲۰۰	۱/۰۰
	۲۰۰	۱/۰۰		

نمونه‌ای از داده‌های گسسته هستند که در جدول ۲، به نام جدول فراوانی تعداد فرزندان ۲۰۰ خانواده خلاصه شده‌اند.

مثال ۴ داده‌های زیر اندازه‌های قد ۱۰۰ جوان بیست ساله در یکی از شهرهای ایران می‌باشند، که بر حسب سانتیمتر تا نزدیکترین واحد سر راست شده‌اند.

۱۵۱	۱۷۷	۱۷۲	۱۷۸	۱۷۱	۱۶۴	۱۵۰	۱۷۰	۱۸۴	۱۷۲
۱۷۰	۱۵۳	۱۵۹	۱۶۹	۱۶۴	۱۶۶	۱۷۲	۱۶۹	۱۶۵	۱۵۸
۱۵۶	۱۷۲	۱۶۵	۱۵۱	۱۶۲	۱۷۴	۱۸۲	۱۵۹	۱۵۴	۱۶۲
۱۶۵	۱۵۰	۱۵۶	۱۶۴	۱۷۱	۱۷۵	۱۸۴	۱۷۷	۱۷۰	۱۶۳
۱۵۴	۱۶۶	۱۶۹	۱۷۴	۱۷۵	۱۷۶	۱۷۲	۱۶۲	۱۶۹	۱۷۲
۱۵۶	۱۷۱	۱۶۴	۱۶۱	۱۵۹	۱۵۲	۱۶۹	۱۸۰	۱۶۷	۱۶۲
۱۷۰	۱۷۱	۱۶۴	۱۵۰	۱۷۰	۱۸۴	۱۷۲	۱۶۵	۱۷۰	۱۶۳
۱۷۲	۱۶۹	۱۷۷	۱۷۳	۱۵۴	۱۶۲	۱۷۰	۱۵۳	۱۷۷	۱۸۴
۱۶۵	۱۶۵	۱۷۳	۱۷۹	۱۷۷	۱۷۹	۱۶۹	۱۷۴	۱۶۴	۱۶۶
۱۸۳	۱۶۰	۱۶۱	۱۵۹	۱۶۲	۱۵۱	۱۵۸	۱۵۳	۱۶۳	۱۵۷

۳	۸	۲	۳	۵	۴	۱۱	۳	۹	۷
۴	۷	۹	۸	۶	۱۱	۴	۱	۲	۳
۷	۲	۴	۳	۲	۵	۴	۹	۱۱	۵
۱۱	۹	۴	۳	۲	۲	۹	۴	۵	۳
۸	۹	۵	۴	۶	۲	۲	۳	۱۱	۸

چه نوع داده‌هائی داریم؟ یک جدول فراوانی کامل برای این داده‌ها پیدا کنید. چند درصد خانواده‌ها بیش از ۵ قرص در ماه مصرف می‌کنند؟

۲. در آزمونی یک پرسشنامه ۲۰ پرسشی، برای اندازه‌گیری استعداد ریاضی، به ۴۰ نفر از دانش‌آموزان کلاس پنجم ابتدائی یکی از دبستانها داده‌اند. نمره‌های این آزمون عبارتند از:

۱۳	۱۴	۱۱	۸	۷	۱۰	۱۳	۱۲	۱۲	۱۴
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۰	۱۰	۹	۱۳	۱۴
۱۴	۱۲	۱۳	۱۳	۱۲	۱۲	۹	۱۴	۱۷	۱۲
۹	۱۰	۱۲	۱۱	۱۱	۱۲	۱۵	۱۵	۷	۹

داده‌ها از چه مقیاسی به دست آمده‌اند؟ یک جدول فراوانی کامل برای داده‌ها پیدا کنید. چند درصد دانش‌آموزان نمره‌های کمتر از ۱۲ دارند؟

۳. وزنهای ۴۰ بسته پسته تا نزدیکترین کیلو عبارتند از:

۱۵۸	۱۴۶	۱۵۷	۱۴۹	۱۲۵	۱۴۴	۱۳۲	۱۵۰	۱۶۴	۱۳۸
۱۷۶	۱۳۸	۱۲۶	۱۶۸	۱۴۴	۱۵۲	۱۴۸	۱۳۶	۱۴۷	۱۴۰
۱۵۳	۱۳۵	۱۴۷	۱۴۲	۱۷۳	۱۴۶	۱۶۵	۱۵۴	۱۱۹	۱۶۳
۱۲۸	۱۴۵	۱۵۶	۱۵۰	۱۴۲	۱۴۵	۱۳۵	۱۶۱	۱۳۵	۱۴۰

چه نوع داده‌هائی داریم؟ یک جدول فراوانی کامل با ۸ رده به طولهای مساوی پیدا کنید.

۴. میزان هموگلوبین خون در ۵۰ بیمار سرطانی برحسب گرم در ۱۰۰ میلی‌لیتر عبارتند از:

۱۵۵ ۱۴۷/۵ ۱۶۰ [illegible]

۱۲/۷	۱۴/۲	۱۴/۶	۱۳/۸	۱۱/۹	۱۱/۵	۱۴/۲	۱۳/۷	۱۴/۸	۱۳/۶
۱۵/۰	۱۳/۵	۱۵/۲	۱۵/۳	۱۲/۴	۱۲/۷	۱۴/۸	۱۱/۹	۱۱/۵	۱۳/۴
۱۵/۰	۱۳/۵	۱۴/۰	۱۵/۵	۱۳/۲	۱۰/۰	۱۱/۷	۱۳/۸	۱۲/۰	۱۲/۴
۱۴/۸	۱۴/۰	۱۰/۹	۱۵/۷	۱۲/۷	۱۳/۵	۱۵/۱	۱۳/۷	۱۲/۹	۱۲/۷
۱۶/۲	۱۳/۲	۱۳/۷	۱۱/۱	۱۱/۴	۱۲/۰	۱۱/۹	۱۲/۷	۱۳/۸	۱۴/۰

با تشکیل ۷ رده به طول ۰/۹، جدول فراوانی کامل را تشکیل دهید.

۴.۱ نمودارهای آماری

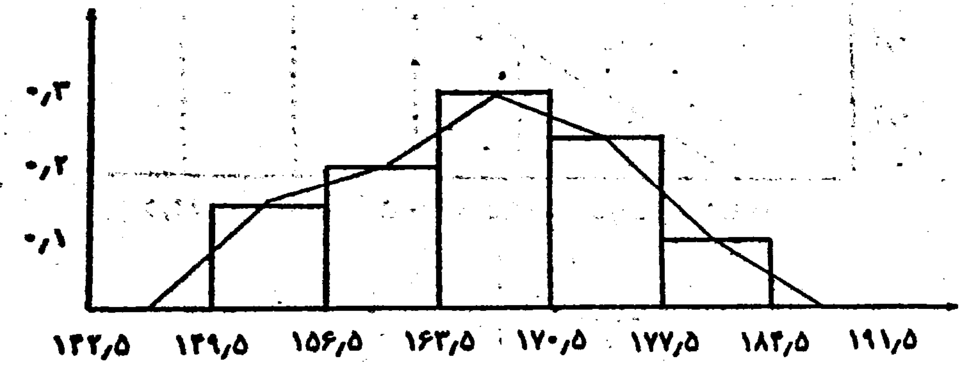
نمایش داده‌ها را، طبق قراردادهای خاص به صورت هندسی، یک نمودار آماری می‌گویند. یک نمودار آماری باید به نحوی ترسیم شود که بتوان به راحتی اطلاعات نهفته در داده‌ها را از روی آن تا حدودی با چشم بدون توضیح و تشریح اضافی دید. هر نمودار آماری، باید دارای شماره، عنوان، و در صورت لزوم زیرنویس و مأخذ باشد. مقیاسهای اندازه‌گیری روی محورهای افقی و عمودی باید مشخص باشند. نمودارهای آماری در امور اقتصادی، صنعتی، بهداشتی، و غیره به کار می‌روند و برحسب رشته مربوط آنها را به طرق مختلف ترسیم می‌کنند. در اینجا فقط چند نوع نمودار که در آمار و احتمال مورد نیاز می‌باشند شرح می‌دهیم. در پایان این گفتار هم چند نمودار جدید را معرفی می‌کنیم.

۱.۴.۱ هیستوگرام

نموداری است مرکب از چند مستطیل که از روی جدول فراوانی داده‌های پیوسته ساخته می‌شود. تعداد مستطیل‌ها برابر است با تعداد رده‌ها. قاعده هر مستطیل روی محور xها جا دارد و طولش برابر است با طول واقعی رده، که هر چه باشد آن را یک واحد تلقی می‌کنیم، و مرکز آن نماینده رده است. ارتفاع هر مستطیل برابر است با فراوانی نسبی رده مربوط. هیستوگرام را برای داده‌های جدا هم، که بتوان آنها را در یک جدول فراوانی با فواصل مساوی تنظیم کرد، نیز به کار می‌برند. مساحت تمام مستطیل‌های یک هیستوگرام برابر یک واحد مربع است. اگر رده‌ها در جدول فراوانی دارای طولهای مختلف باشند، قاعده‌های تمام مستطیلها برابر نخواهد بود. در این موارد باید ارتفاع مستطیلها را طوری انتخاب کرد که مساحت تمام آنها برابر یک واحد مربع شود (تمرین ۵). در نگاره ۱ هیستوگرام جدول فراوانی ۳ داده شده است. ملاحظه می‌شود که فراوانی‌های نظیر رده‌های ۱۴۲/۵ - ۱۴۹/۵ و ۱۸۴/۵ - ۱۹۱/۵ صفر می‌باشند، ولی برای ترسیم نمودارهای بعدی آنها را منظور می‌داریم.

۲.۴.۱ چندبر فراوانی

اگر نقطه‌های وسط قاعده‌های بالائی مستطیلهای هیستوگرام و نقطه‌های وسط رده‌هائی را که بلافاصله در دو انتهای هیستوگرام بوده، و دارای فراوانی صفر هستند، به هم بپیوندیم، یک خط شکسته به دست می‌آید که آن را چندبر فراوانی می‌نامند. در نگاره ۱ چندبر فراوانی مربوط به جدول ۳ داده شده است.



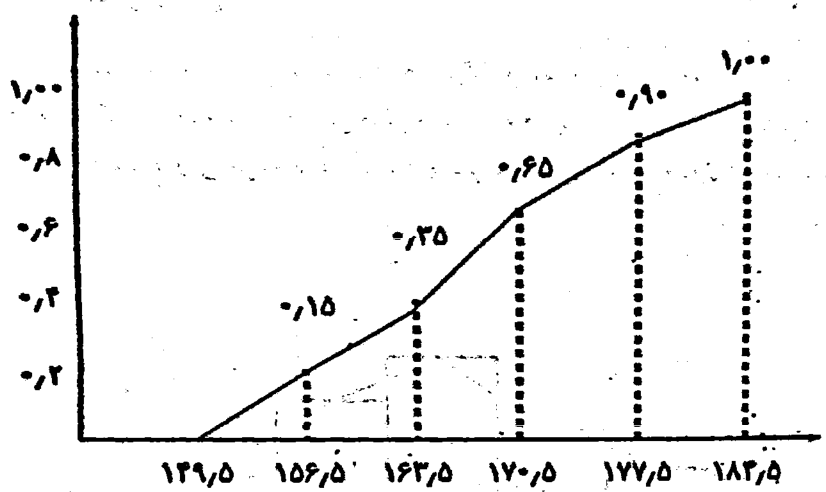
نگاره ۱ هیستوگرام و چندبر فراوانی مربوط به قدها

۳.۴.۱ چندبر فراوانی انباشته

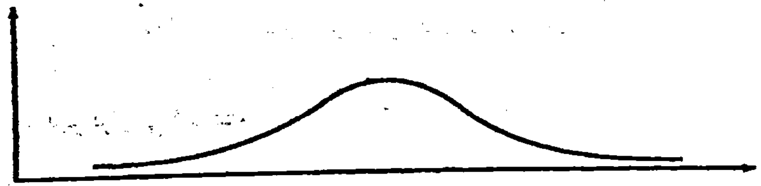
اگر نقاطی را که طول آنها مرز رده‌ها و عرض آنها فراوانی نسبی انباشته تا آن مرز باشد، به هم بپیوندیم یک خط شکسته به دست می‌آید که آن را چندبر فراوانی انباشته می‌نامند. نگاره ۲ چندبر فراوانی انباشته برای جدول ۳ است.

۴.۴.۱ منحنی‌های فراوانی و فراوانی انباشته

اگر تعداد داده‌ها زیاد و طول رده‌ها کوچک و در نتیجه رده‌ها زیاد باشد، چندبر فراوانی و چندبر فراوانی انباشته دارای اضلاع زیاد خواهند شد و می‌توان بر آنها منحنیهائی منطبق کرد که به ترتیب منحنی فراوانی و منحنی فراوانی انباشته نامیده می‌شوند. چون مساحت تمام مستطیلهای هیستوگرام یک واحد مربع می‌باشد، مساحت زیر منحنی فراوانی را هم یک واحد مربع فرض می‌کنند. منحنی فراوانی انباشته،



نگاره ۲ چندبر فراوانی انباشته مربوط به قدها



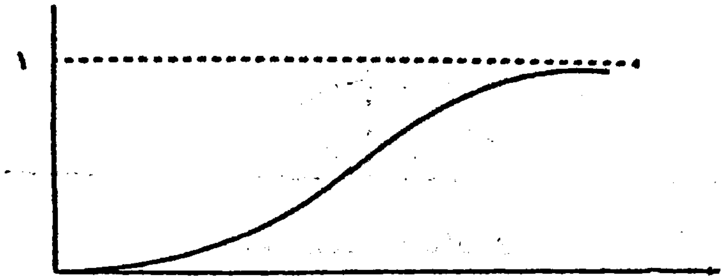
نگاره ۳ منحنی فراوانی

یک منحنی غیر نزولی است که عرضهای نقاط آن بین صفر و یک می‌باشند. نگاره ۳ و ۴ به‌ترتیب منحنی فراوانی و منحنی فراوانی انباشته را نشان می‌دهند.

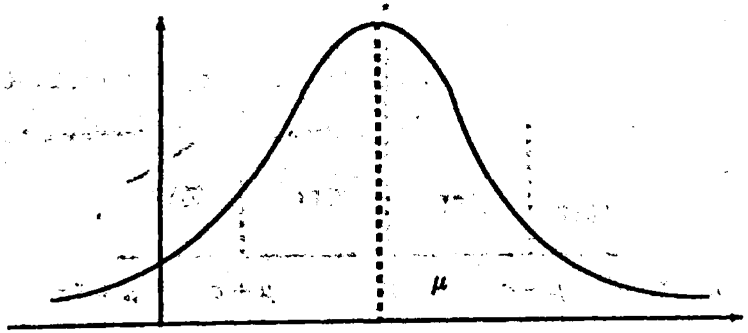
۵.۴.۱ منحنی فراوانی نرمال

اگر منحنی فراوانی دارای معادله مختصاتی

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$



نگاره ۴ منحنی فراوانی انباشته

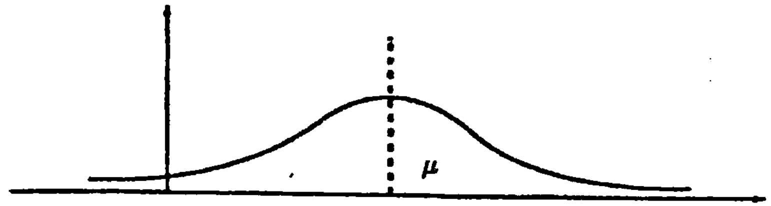


نگاره ۵ منحنی نرمال با σ^2 کوچک

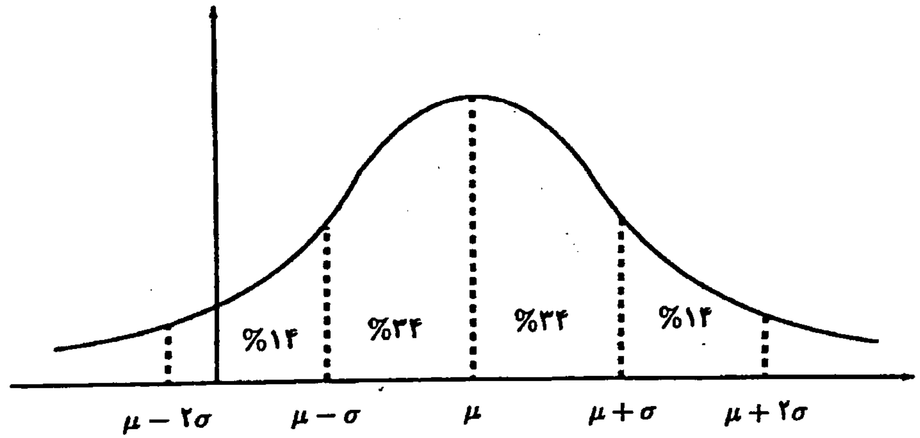
باشد، آن را منحنی فراوانی نرمال با پارامترهای μ و σ^2 و متغیر مربوط را متغیر نرمال می‌نامند. این منحنی نسبت به خط $x = \mu$ متقارن، دارای ماکزیمم در نقطه $(\mu, 1/\sqrt{2\pi\sigma^2})$، مجانب با محور xها، و زنگ-گونه می‌باشد. اگر $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ باشد، منحنی نرمال را منحنی نرمال استاندارد می‌نامند.

از عرض نقطه ماکزیمم روشن است که هر چه σ^2 کوچکتر باشد، منحنی کشیده‌تر بوده، قسمت اعظم مساحت زیر منحنی اطراف $x = \mu$ توزیع می‌شود. نگاره ۵ و ۶ و ۷ نمونه‌هائی از منحنی فراوانی نرمال هستند. نگاره ۷ منحنی نرمال استاندارد را نشان می‌دهد.

کلمه نرمال به معنی طبیعی و عادی است. معمولاً بعضی ویژگیهای طبیعی مانند قد و وزن، تقریباً دارای منحنی فراوانی نرمال هستند، یعنی تعداد افراد معمولی (اطراف μ) زیاد و تعداد افراد غیر طبیعی (دور از μ) کم می‌باشد. نگاره ۷ نحوه توزیع مساحت زیر منحنی نرمال را برحسب مقیاس σ نسبت به

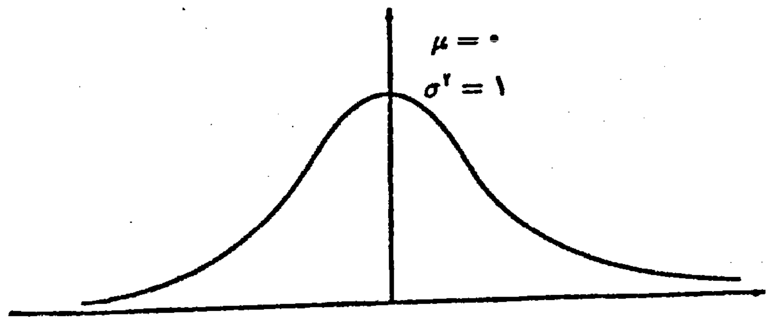


نگاره ۶ منحنی نرمال با σ^2 بزرگ



نگاره ۷ نحوه توزیع مساحت زیر منحنی نرمال

μ نشان می‌دهد.



نگاره ۸ منحنی نرمال استاندارد

۶.۴.۱ تمرین بخش چهار

۱. برای داده‌های نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ چند درصد از داده‌ها بیش از $\mu + ۲\sigma$ می‌باشد؟ چند درصد کمتر از $\mu - \sigma$ می‌باشد؟

۲. مختصات نقطه ماکزیمم یک منحنی نرمال را از روی معادله مختصاتی آن بدون استفاده از مشتق و با استفاده از آن بیابید؟

۳. برای داده‌های تمرین ۳ از بخش ۳، هیستوگرام و چندبر فراوانی انباشته را رسم کنید.

۴. برای داده‌های تمرین ۴ از بخش ۳، هیستوگرام چندبر فراوانی، و چندبر فراوانی انباشته را رسم کنید. یک منحنی فراوانی روی چندبر فراوانی رسم کنید؟

۵. فراوانی رده‌های ۱۳/۵ - ۱۰/۵، ۱۷/۵ - ۱۳/۵، ۱۹/۵ - ۱۷/۵، ۲۴/۵ - ۱۹/۵، که طول آنها نابرابرند، ۵، ۷، ۲ و ۶ می‌باشد. هیستوگرام را طوری رسم کنید تا مساحت مستطیلهای مربوط برابر یک واحد مربع شود. برای این منظور از رابطه زیر استفاده کنید:

طول رده × عرض مستطیل = فراوانی نسبی رده

۵.۱ معیارهای تمرکز

با استفاده از جدول فراوانی و نمودارهای آماری، می‌توان تا حدودی دانسته‌های نهفته در داده‌ها را مختصر و محسوس کرد. با این حال سعی می‌شود تا این دانسته‌ها را به صورت یک یا چند عدد معقول درآورد، تا هم بتوان ایده‌ای کلی دربارهٔ ویژگی مورد مطالعه به دست آورد و هم نتیجهٔ مطالعات را به سادگی گزارش داد. چنین اعدادی که معمولاً در حوالی مرکز منحنی فراوانی می‌باشند، معیارهای تمرکز نامیده می‌شوند. و در اینجا آنها را شرح می‌دهیم.

فرض می‌کنیم تعداد داده‌ها n و به صورت $x_1, x_2, \ldots, x_k$ با فراوانیهای $f_1, f_2, \ldots, f_k$ خلاصه شده باشند. در صورتی که داده‌ها پیوسته باشند، x_iها را نماینده و رده‌ها می‌گیریم.

مجموع داده‌ها، تقسیم بر تعداد آنها یعنی

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{n} \tag{۱}$$

را میانگین داده‌ها می‌گویند. هرگاه تمام فراوانیها برابر یک باشند داریم $k = n$، و در این حال $\bar{x}$ را در زبان معمولی معدل می‌نامند.

۲.۵.۱ معدل وزنی

اگر $0 < \omega_i < 1$ برای $i = 1, 2, \ldots, k$ و $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$، آنگاه

$$\bar{x}_\omega = \sum_{i=1}^{k} \omega_i x_i \tag{۲}$$

را معدل وزنی اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_k$ با وزنهای $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ می‌نامند. بنابراین میانگین (۱) هم یک نوع معدل وزنی می‌باشد که در آن $\omega_i = \frac{f_i}{n}$.

۳.۵.۱ میانگین هندسی

در صورتی که $x_1, x_2, \ldots, x_k$ همگی مثبت باشند، میانگین هندسی آنها می‌شود

$$G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots x_k^{f_k}} \tag{۳}$$

معمولاً هرگاه x_iها از درصدها یا نسبت‌ها تشکیل شده باشند، مثلاً در کارهای اقتصادی یا جمعیت‌شناسی میانگین هندسی به کار می‌برند. برای محاسبه این میانگین آسانتر است که قبلاً لگاریتم آن را حساب کرد. لگاریتم این میانگین برابر است با میانگین حسابی

$$\log x_1, \log x_2, \ldots, \log x_k$$

۴.۵.۱ میانگین توافقی

در صورتی که $x_1, x_2, \ldots, x_k$ همگی غیر صفر باشند. میانگین توافقی آنها که آن را با H نشان می‌دهند، فرمول

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{x_i} \tag{۴}$$

به دست می‌آید. این میانگین که در عینک سنجی و مطالعه شبکه‌های برق به کار می‌رود. در حقیقت برابر است با عکس میانگین حسابی $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_k}$.

۵.۵.۱ میانگین ریشه‌ای رتبه دو

$$M_2 = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i x_i^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{۵}$$

تعریف می‌شود، و در حقیقت برابر است با جذر میانگین حسابی

$$x_1^2, x_2^2, \ldots, x_k^2$$

می‌توان ثابت کرد که برای داده‌های مثبت میان این چهار نوع میانگین حسابی، هندسی، توافقی و ریشه‌ای رتبه دو، نامساوی زیر برقرار است:

$$H \le G \le \bar{x} \le M_2 \tag{۶}$$

برای اثبات این نامساوی باید نشان داد که میانگین ریشه‌ای رتبه r یعنی

$$M_r = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i x_i^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}$$

تابعی صعودی از r است. سپس با قرار دادن r برابر ۱- و ۰ و ۱ و ۲ در M_r، نامساوی (۶) به دست می‌آید.

۶.۵.۱ میانه

عدد m را میانه می‌نامند هرگاه تقریباً تعداد نصف داده‌ها از m کوچکتر باشند.

۷.۵.۱ محاسبه میانه برای داده‌های گسسته

فرض کنید n داده گسسته داشته باشیم که به طور غیر نزولی یعنی به صورت $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ تنظیم شده باشند. اگر n فرد باشد داده‌ای را که در وسط قرار دارد، میانه می‌گویند. اگر n زوج باشد.

جدول ۴ جدول کمکی برای محاسبه میانگینها

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^{۲}$	f_i / x_i	$f_i \log x_i$
۱	۳	۳	۳	۳	۰/۰۰۰
۲	۵	۱۰	۲۰	۲/۵۰۰	۱/۵۰۵
۳	۲	۶	۱۸	۰/۶۶۷	۰/۹۵۴
۵	۳	۱۵	۷۵	۰/۶۰۰	۲/۰۹۷
مجموع	۱۳	۳۴	۱۱۶	۶/۷۶۷	۴/۵۵۶

$\bar{x} = ۲/۶۱ \quad G = ۲/۲۴ \quad M_{۲} = ۲/۹۹ \quad H = ۱/۹۲$

نصف مجموع دو داده‌ای را که در وسط قرار دارند، میانه می‌گویند. میانه را با m نشان می‌دهیم. بنابراین داریم:

برای n فرد $\qquad m = x_{\frac{(n+۱)}{۲}}$

برای n زوج $\qquad m = (x_{\frac{n}{۲}} + x_{\frac{(n+۲)}{۲}}) \div ۲$

مثال ۵ برای پیدا کردن میانه داده‌های

۱۲ ۸ ۱۷ ۳۰ ۲۰ ۲۱ ۵ ۴ ۳۱

نخست آنها را به طور غیر نزولی یعنی به صورت زیر می‌نویسیم:

۳۱ ۳۰ ۲۱ ۲۰ ۱۷ ۱۲ ۸ ۵ ۴

چون تعداد داده‌ها، عدد فرد ۹ = n است، میانه می‌شود ۱۷ = m.

مثال ۶ برای پیدا کردن میانه داده‌های ۲ ۳ ۵ ۴ ۱ ۲ ۳ ۲ آنها را به طور غیر نزولی یعنی به صورت ۵ ۴ ۳ ۳ ۲ ۲ ۲ ۱ می‌نویسیم. چون تعداد داده‌ها عدد زوج ۸ = n است. میانه می‌شود $m = \frac{(۲+۳)}{۲} = ۲/۵$.

مثال ۷ میانه برای داده‌های ۷ ۵ ۴ ۱ به ترتیب با فراوانیهای ۲ ۴ ۲ ۳ می‌شود ۵ = m یعنی داده‌ها ششم به ترتیب غیر نزولی.

۸.۵.۱ محاسبه میانه برای داده‌های پیوسته

نخست طرز محاسبه را با یک مثال شرح می‌دهیم و سپس فرمول کلی را می‌نویسیم.

مثال ۸ برای داده‌های مربوط به قدهای ۱۰۰ جوان بیست‌ساله، که در جدول فراوانی ۳ در بخش ۳ خلاصه شده‌اند، میانه را طبق دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

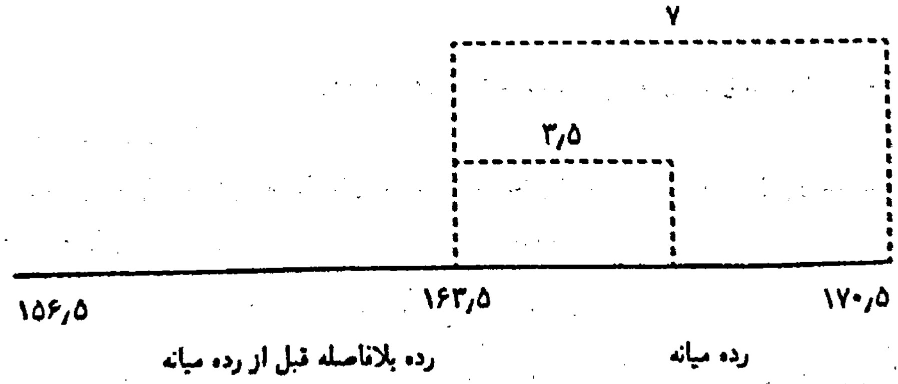
(۱) نخستین رده‌ای را در نظر می‌گیریم که فراوانی انباشتهٔ آن برابر نصف یا بیشتر از نصف داده‌ها باشد، یعنی برابر یا بیشتر از $۵۰ = \frac{۱۰۰}{۲}$. این رده را که میانه در آن جا دارد رده میانه می‌نامند و می‌شود ۱۶۳/۵-۱۷۰/۵.

(۲) فراوانی انباشته رده بلافاصله قبل از رده میانه یعنی ۳۵ را از نصف تعداد داده‌ها، یعنی از $۵۰ = \frac{۱۰۰}{۲}$ کم می‌کنیم. داریم ۱۵ = ۳۵ - ۵۰.

(۳) فرض می‌کنیم در رده میانه، یعنی در ۱۷۰/۵ - ۱۶۳/۵ که طولش ۷ سانتیمتر است و در آن ۳۰ داده داریم، تمام داده‌ها در فواصل مساوی توزیع شده باشند. با یک تناسب معلوم می‌شود که ۱۵ داده اول به اندازه $۳/۵ = \frac{(۱۵ \times ۷)}{۳۰}$ سانتیمتر از این رده را در بر می‌گیرند.

(۴) عدد ۳/۵ را با مرز پائین رده میانه، یعنی با ۱۶۳/۵ جمع می‌کنیم. میانه می‌شود سانتیمتر $m = ۱۶۳/۵ + ۳/۵ = ۱۶۷$.

نگاره زیر طرز محاسبه را نشان می‌دهد.



با استفاده از این مثال، فرمول زیر برای محاسبه میانه داده‌های پیوسته به دست می‌آید:

$$m = L_{۰/۵} + \left(\frac{۰/۵n - F_{۰/۵}}{f_{۰/۵}}\right) w \qquad (۷)$$

در این فرمول m میانه، $L_{0/5}$ مرز پائین رده میانه، n تعداد رده‌ها، $g_{0/5}$ فراوانی انباشته رده بلافاصله قبل از رده میانه، $f_{0/5}$ فراوانی رده میانه، و w طول رده می‌باشد.

۹.۵.۱ چندکها

عدد Q_p را که در آن $0 < p < 1$، چندک مرتبه p می‌نامند، هرگاه تقریباً $100p$ درصد داده‌ها کوچکتر از آن باشند. مثلاً $Q_{0/15}$ را چندک مرتبه ۰/۱۵ می‌گویند هرگاه تقریباً ۱۵ درصد داده‌ها کوچکتر از $Q_{0/15}$ باشد.

چندکها کلی‌تر از میانه می‌باشند و در حقیقت $Q_{0/5}$ همان میانه یعنی m است. به زبان هندسی با استفاده از منحنی فراوانی، اگر از نقطه Q_p خطی به موازات محور yها رسم کنیم. مساحت زیر منحنی فراوانی که در سمت چپ این خط قرار دارد، برابر p واحد مربع می‌باشد.

چندکهای معروف عبارتند از:

(۱) چارکها که به ازای $p = 0/25, 0/50, 0/75$ به دست می‌آیند و آنها را به ترتیب با Q_1, Q_2, Q_3 نشان می‌دهند؛ Q_1 و Q_3 را چارک اول و سوم و Q_2 را میانه می‌گویند. Q_1 را می‌توان میانه برای داده‌هائی پنداشت که کوچکتر یا مساوی m هستند. همچنین Q_3 را می‌توان میانه برای داده‌هائی پنداشت که بزرگتر یا مساوی m هستند.

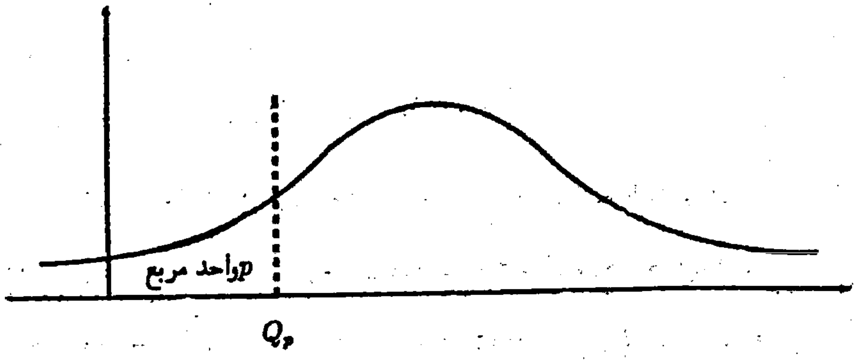
(۲) دهکها که به ازای $p = 0/1, 0/2, \ldots, 0/9$ به دست می‌آیند و آنها را با $D_1, D_2, \ldots, D_9$ نشان می‌دهند.

(۳) صدکها به ازای $p = 0/01, 0/02, \ldots, 0/99$ به دست می‌آیند و آنها را با $P_1, P_2, \ldots, P_{99}$ نشان می‌دهند.

به کمک این چارکها می‌توان میانگینهای گوناگون تعریف کرد. مثلاً میانگین وزنی زیر را میانگین سه چارکی می‌گویند.

$$t = \frac{Q_1 + 2Q_2 + Q_3}{4}$$

طرز محاسبه چندکها، مانند میانه، برای داده‌های جدا و پیوسته فرق دارند و هر یک را جداگانه شرح می‌دهیم.



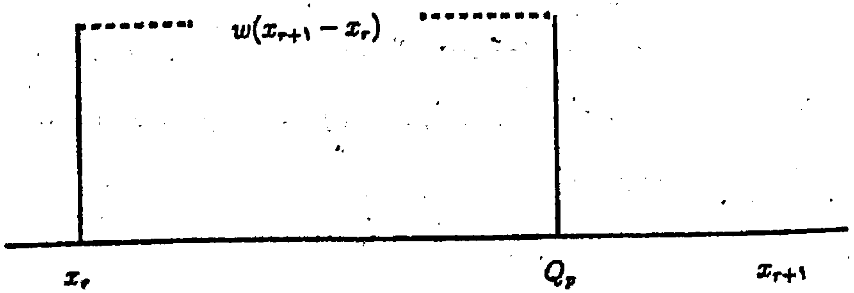
نگاره ۹ منحنی فراوانی و چندک مرتبه p

۱۰.۵.۱ محاسبه چندکها برای داده‌های گسسته

فرض کنید n داده گسسته داشته باشیم که به ترتیب غیر نزولی یعنی به صورت $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ تنظیم شده باشند. برای به دست آوردن Q_p با تقریبی خوب بدین طریق عمل می‌کنیم: اگر $p(n+1)$ مساوی عدد صحیح r باشد، فرض می‌کنیم $Q_p = x_r$. در غیر این صورت بزرگترین عدد صحیح در $p(n+1)$ را مساوی r و اختلاف آنرا با r برابر ω می‌گیریم. واضح است که $0 \le \omega < 1$، حال $\omega(x_{r+1} - x_r)$، یعنی کسری از طول فاصله (x_r, x_{r+1})، را به x_r اضافه می‌کنیم. در نتیجه Q_p به صورت زیر می‌شود (به نگاره زیر توجه کنید)

$$Q_p = (1-\omega)x_r + \omega x_r + 1 \qquad (8)$$

ملاحظه می‌شود که Q_p معدل وزنی x_r و x_{r+1} است. میانه را هم می‌توانیم از این فرمول پیدا کنیم.



مثال ۹ برای دادههای ۱۲ ۸ ۷ ۷ ۵ ۴ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰ که به ترتیب غیر نزولی مرتب شدهاند $Q_{0/6}$ را حساب کنید.

چون $n = 11$ ، $p = 0{,}6$ ، $(n+1)p = 7{,}2$ ، $r = 7$ ، $w = 0{,}2$

$$Q_{0/6} = D_6 = P_{60} = 0/8x_7 + 0/2x_8 = 0/8(5) + 0/2(7) = 5/4$$

مثال ۱۰ برای دادههای خلاصه شده در جدول ۲، از بخش ۳ چارک سوم را حساب کنید.

چون $n = 200$ ، $p = 0{,}75$ ، $(n+1)p = 150{,}75$ ، $r = 150$

و $w = 0{,}75$ داریم

$$Q_3 = 0/25x_{150} + 0/75x_{151} = 0/25(4) + 0/75(4) = 4$$

۱۱.۵.۱ محاسبه چندکها برای دادههای پیوسته

نخست دادهها را در یک جدول فراوانی تنظیم میکنیم، و سپس ردهای راکه Q_p در آن جا دارد و رده Q_p مینامیم، مشخص میسازیم. اینک فرمول زیر راکه ترکیب و نحوه پیداکردن آن عیناً مانند فرمول (۷)، که مربوط به میانه میباشد، به دست میآوریم.

$$Q_p = L_p + \left(\frac{pn - g_p}{f_p}\right)w \qquad (9)$$

در این فرمول n تعداد دادهها، L_p مرز پائین رده Q_p، یعنی نخستین ردهای که فراوانی انباشته آن برابر یا بیشتر از np است، g_p فراوانی انباشته رده بلافاصله قبل از رده Q_p ، f_p فراوانی رده Q_p، و w طول رده میباشد.

مثال ۱۱ برای دادههای خلاصه شده در جدول ۳ از بخش ۳ دهک هفتم را حساب کنید.

چون $n = 100$ ، $p = 0{,}7$ ، $pn = 70$. رده D_7 میشود ۱۷۷٫۵ - ۱۷۰٫۵ . حال با استفاده از فرمول (۹) داریم

$$D_7 = 170/5 + \left(\frac{70 - 65}{25}\right)7 = 171/9$$

۱۲.۵.۱ نما

دادهای که فراوانی آن نسبت به سایر دادهها بیشتر باشد، نما یا مد نامیده میشود و آنرا با M نشان میدهند. کلمه مد در زبان عادی هم همین مفهوم را دارد. مثلاً وقتی میگوئیم فلان لباس زنانه مد میباشد، منظور این است که اغلب خانمها آنرا میپوشند.

۱۳.۵.۱ محاسبه نما برای دادههای گسسته

نخست فراوانی دادهها را پیدا میکنیم. دادهای راکه فراوانی آن بیشتر باشد به عنوان نما اختیار میکنیم. اگر دو داده، دارای فراوانیهای مساوی، بیش از سایر فراوانیها، باشد هر دو را به عنوان نما اختیار میکنیم، و دادهها را دونمائی میگوئیم، مشروط به اینکه این دو داده پهلوی هم نباشند. اگر پهلوی هم باشند، نصف مجموع آنها را نما میخوانیم. اگر تمام دادهها دارای فراوانیهای مساوی باشند، میگوئیم دادهها بدون نما هستند.

مثال ۱۲ برای دادههای ۳ ۱ ۳ ۱ ۳ ۱ ۳ ۲ ۴ ۵ ۳ ۳ ۱ نما برابر است با $M = 3$، زیرا فراوانی داده ۳ بیش از سایر دادهها میباشد.

مثال ۱۳ برای دادههای ۵ ۳ ۳ ۴ ۱ ۲ ۳ ۱ ۱ دو داده ۱ و ۳ که پهلوی هم نیستند و فراوانی مشترک آنهابیش از سایر فراوانیها میباشد، هر دو، نما اختیار میشوند. این دادهها را دو نمائی میگوئیم.

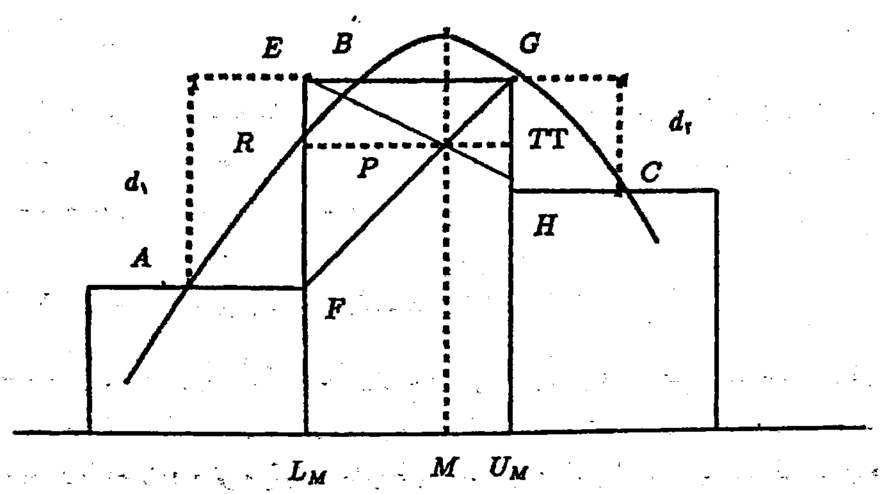
مثال ۱۴ برای دادههای ۱ ۲ ۵ ۴ ۲ ۲ ۳ ۱ ۲ ۱ ۱ ۳ نصف دو داده ۱ و ۲ راکه پهلوی هم هستند و دارای فراوانیهای ۴، یعنی بیش از سایر فراوانیها، میباشند به عنوان نما اختیار میکنیم. بنابراین $M = 1/5$.

مثال ۱۵ دادههای ۲ ۱ ۳ ۵ ۲ ۵ ۳ ۱ نما ندارند، زیرا فراوانی تمام دادهها مساوی هستند.

۱۴.۵.۱ محاسبه نما برای دادههای پیوسته

نخست دادهها را در یک جدول فراوانی خلاصه میکنیم، و بعد نماینده ردهای راکه دارای فراوانی بیشتر میباشد، و رده نمائی نامیده میشود، به عنوان نما اختیار میکنیم.

مثال ۱۶ برای دادههای خلاصه شده در جدول ۳ از بخش ۳ نما را پیدا کنید.



نگاره ۱۰ طرز محاسبه نما برای داده‌های پیوسته

از روی جدول ملاحظه می‌شود که فراوانی رده ۱۷۰/۵ - ۱۶۳/۵، بیش از سایر فراوانیها است. بنابراین $M = ۱۶۷$ یعنی نماینده این رده را به عنوان نما اختیار می‌کنیم.

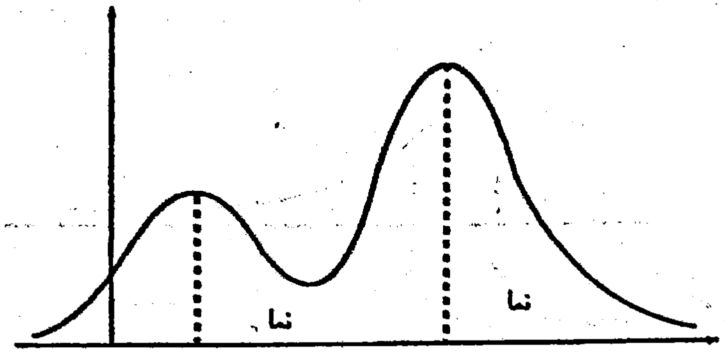
برای دقت بیشتر می‌توان نما را از فرمول

$$M = L_M + \frac{d_1}{d_1 + d_2} w \qquad (۱۰)$$

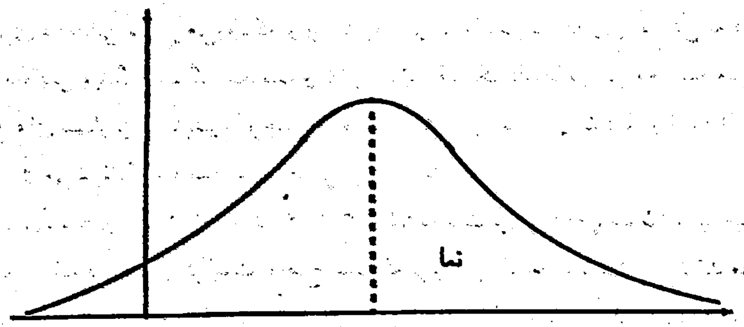
به دست آورد. در این فرمول M نما، L_M مرز پائین رده نمائی، d_1 اختلاف فراوانی‌های نسبی رده نمائی و رده بلافاصله قبل از آن، d_2 اختلاف فراوانی‌های نسبی رده نمائی و رده بلافاصله بعد از آن و w طول رده می‌باشد. نگارهٔ ۱۰ دلیل هندسی فرمول بالا را از روی هیستوگرام روشن می‌کند.

در این شکل نما را طول نقطه ماکزیمم یک سهمی فرض می‌کنیم که از وسط قاعده‌های بالائی سه مستطیل هیستوگرام می‌گذرد. می‌توان ثابت کرد که طول این نقطه ماکزیمم، با طول نقطه برخورد EH و FG یکی است. از دو مثلث متشابه EPF و GPH می‌توان اندازه RP و در نتیجه نما را به دست آورد.

مثال ۱۷ برای داده‌های خلاصه شده، در جدول ۳ از بخش ۳ نما را به کمک فرمول (۱۰) پیدا کنید. در این مثال رده ۱۷۰/۵ - ۱۶۳/۵ رده نمائی است. فراوانی نسبی این رده ۰/۳۰ و فراوانی‌های نسبی رده‌های بلافاصله قبل از آن و بعد از آن به ترتیب ۰/۲۰ و ۰/۲۵ می‌باشند. بنابراین،



نگاره ۱۱ منحنی فراوانی دونمائی

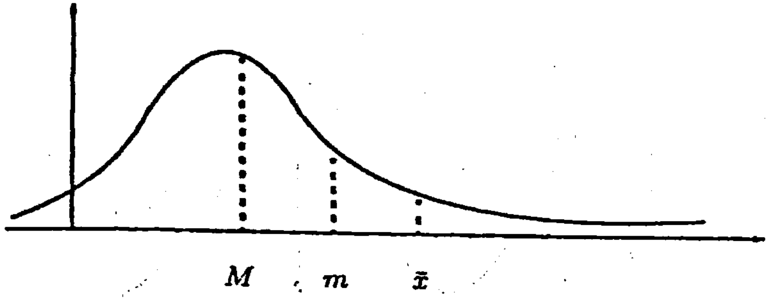


نگاره ۱۲ منحنی فراوانی یک نمائی

$L_M = ۱۶۳/۵$، $d_1 = ۰/۱۰$، $d_2 = ۰/۰۵$، و $w = ۷$. از فرمول (۱۰) داریم

$$M = ۱۶۳/۵ + \frac{۰/۱۰}{۰/۱۰ + ۰/۰۵} \times ۷$$
$$= ۱۶/۸۲$$

اگر دو رده که پهلوی هم نیستند دارای فراوانی‌های مساوی، بیش از سایر فراوانیها باشند، داده‌ها را دو نمائی می‌خوانیم. در نگاره‌های ۱۱ و ۱۲ منحنی فراوانی دو نمائی و یک نمائی را مشاهده می‌کنید.



نگاره ۱۳ منحنی فراوانی چوله به راست

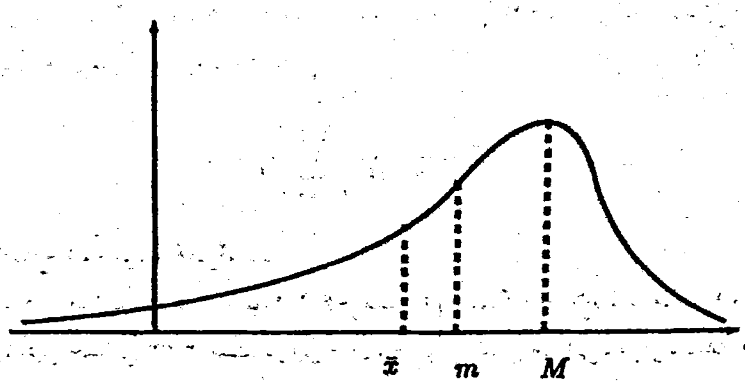
۱۵.۵.۱ مقایسه میانگین، میانه و نما

میانگین برای داده‌هائی به کار می‌رود که از راه اندازه‌گیری با مقیاس فاصله‌ای یا نسبتی به دست آمده باشند. از محاسن میانگین سادگی محاسبه و تاثیر اندازه یک یک داده‌ها در این محاسبه می‌باشد. با اینحال داده‌های بسیار بزرگ یا بسیارکوچک، به نام داده‌های دور افتاده یا پرت، بر میانگین اثر نامطلوب دارند و باعث می‌شوند که میانگین معیار خوبی برای تمرکز نباشد.

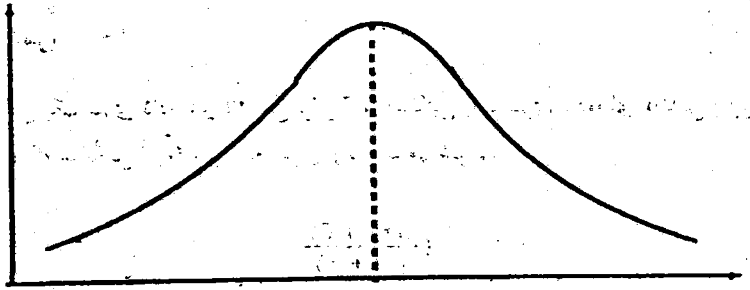
مثلاً برای داده‌های ۲ ۴ ۳ ۶ ۵ ۹ ۸ ۱۳ ۸۵ به علت بزرگی داده پرت ۸۵، میانگین می‌شود عدد ۱۵ که از بقیه داده‌ها بزرگتر است. واضح است که برای این داده‌ها عدد ۱۵ نمی‌تواند معیار تمرکز خوبی باشد، زیرا با اکثر داده‌ها تفاوت زیادی دارد. برای این داده‌ها، میانه عدد ۶ می‌باشد و معیار بهتری برای تمرکز است. ضمناً اگر داده‌ها را از راه اندازه‌گیری با مقیاسهای اسمی یا ترتیبی به دست آمده باشند، باید به جای میانگین، میانه و نما را به کار برد. اگر منحنی فراوانی چوله به راست باشد، میانگین و میانه و نما به ترتیب روی محور طول‌ها از راست به چپ، و اگر منحنی فراوانی چوله به چپ باشد، آنها از چپ به راست قرار می‌گیرند. برای منحنی فراوانی متقارن، این سه معیار بر هم منطبق می‌شوند. به نگاره‌های ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ توجه شود. هرگاه میزان چولگی خفیف باشد، بین میانگین و میانه و نما، رابطه تقریبی زیر برقرار می‌باشد:

$$\bar{x} - M \approx 3(\bar{x} - m) \qquad (11)$$

اگر از M و m و $\bar{x}$، سه خط موازی محور yها رسم کنیم، از نظر هندسی خطی که از M رسم می‌شود از نقطه ماکزیمم منحنی فراوانی می‌گذرد، خطی که از m رسم می‌شود مساحت زیر منحنی فراوانی را نصف می‌کند و خطی که از $\bar{x}$ رسم می‌شود محور تعادل منحنی فراوانی را مشخص می‌سازد.



نگاره ۱۴ منحنی فراوانی چوله به چپ



نگاره ۱۵ متقارن

۱۶.۵.۱ میانگین اصلاح شده

میانگین حسابی ساده‌ترین معیار تمرکز برای داده‌ها است. ولی همانطوری که گفتیم داده‌های پرت بر آن اثر نامطلوب دارند، یعنی آن را از مرکز داده‌ها دور می‌کنند. برای اصلاح این امر، داده‌های پرت را حذف می‌کنند و سپس میانگین بقیه داده‌ها را به عنوان معیار تمرکز به کار می‌برند. چنین میانگینی را میانگین اصلاح شده می‌نامند. میانگین اصلاح شده در واقع یک نوع میانگین وزنی است که بدین نحو تعریف می‌شود:

فرض کنید داده‌ها را به طریق غیر نزولی به صورت $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$ مرتب کرده باشیم. k تا از

کوچکترین و k تا از بزرگترین داده‌ها را حذف می‌کنیم. انتخاب $k < \frac{n}{2}$ بستگی به داده‌هائی دارد که پرت به نظر می‌آیند. حال میانگین بقیه داده‌ها یعنی

$$T_k = \frac{1}{n-2k}\sum_{i=k+1}^{n-k} x_i$$

را میانگین اصلاح شده مرتبه k می‌گویند.

برای داده‌های مرتب شده ۱۵ ۷ ۵ ۴ ۱ ۶- عدد ۴/۲۵ میانگین اصلاح شده مرتبه ۱ می‌باشد، در حالی که میانگین حسابی ۴/۳۳ است. در این مثال، ظاهراً میانگین حسابی، مرکز داده‌ها را بهتر نشان می‌دهد.

برای nهای زوج میانه در حقیقت برابر میانگین اصلاح شده مرتبه $\frac{n-2}{2}$ و برای nهای فرد میانه برابر میانگین اصلاح شده مرتبه $\frac{n-1}{2}$ است.

۱۷.۵.۱ تمرین بخش پنج

۱. اگر میانگین یک سری داده‌های mتائی برابر $\bar{x}$ و میانگین یک سری داده‌های nتایی برابر $\bar{y}$ باشد، ثابت کنید که میانگین آمیخته این دو سری از داده‌ها می‌شود.

$$\frac{(m\bar{x}+n\bar{y})}{(m+n)}$$

مثال عددی ـ میانگین مزد ۱۰ کارگر ۳۵۰۰ ریال و میانگین مزد ۱۵ کارگر دیگر ۴۵۰۰ ریال می‌باشد. میانگین مزد این ۲۵ کارگر را حساب کنید.

۲. نشان دهید که برای داده‌های

۵ ۷ ۷ ۱ ۳ ۷ ۸ ۳ ۱۲ ۱۱ ۱۵ ۱۱ ۱۶ ۱۹ ۱۵

میانگین حسابی، هندسی، توافقی، و ریشه‌ای رتبه دو، به ترتیب برابر ۹/۳، ۷/۵، ۵/۱ و ۱۰/۶ می‌باشد. برای این داده‌ها میانه، چارک اول، دهک سو، و نما را حساب کنید.

۳. برای داده‌هائی که در جدول فراوانی ۳ خلاصه شده است میانگین، میانه، و نما را حساب کنید، و بوسیله فرمول (۱۱) محاسبات را کنترل نمائید.

۴. برای داده‌هائی که در جدول فراوانی ۳ خلاصه شده‌اند، دهک چهارم را حساب کنید.

۵. از فرمول (۸) استفاده کرده و فرمولهائی برای میانه و چارک اول پیدا کنید.

۶. از رابطه میان میانگینها را (فرمول ۶) برای داده‌های مثبت x_1 و x_2 با فراوانیها ۱ و ۱ ثابت کنید.

۷. ثابت کنید M_r تابعی صعودی از r است و سپس نامساوی (۶) را به دست آورید.

۸. میانگین اصلاح شده مرتبه ۲ را برای داده‌های زیر پیدا کنید و آن را با میانگین حسابی مقایسه نمائید.

۱۹ ۱۵ ۵ ۳ ۱ -۸ -۹

۹. میانگین سه - چارکی و میانگین اصلاح شده مرتبه یک را برای داده‌های تمرین ۲ بیابید.

۶.۱ معیارهای پراکندگی

معمولاً افراد یک جمعیت از نظر ویژگی مورد مطالعه با هم تفاوت دارند، و این خود مهمترین انگیزه برای پژوهشگری و کاربرد فن آمار می‌باشد. مشاهده تفاوت و تنوع، انسان را به کنجکاوی درباره رموز طبیعت امور اجتماعی، تربیتی و صنعتی وادار می‌کند. مثلاً نوزادانی که امروز در یک بیمارستان به دنیا می‌آیند از لحاظ گروه خونی، وزن، درجه حرارت بدن، رنگ و غیره با هم تفاوت دارند. دانش‌آموزان یک کلاس از نظر ادب و استعداد با هم فرق دارند. لامپ‌های ۶۰ وات اسرام تحت شرائط مساوی، از نظر طول عمر یکسان نیستند. میزان این تفاوتها را چگونه می‌شود سنجید، و چطور می‌توان دربارهٔ آن قضاوت کرد؟

همان طوری که قبلاً دیدیم داده‌ها را معمولاً به صورت یک عدد به نام معیار تمرکز خلاصه می‌کنند، و قسمتی از اطلاعات موجود در آنها را در این عدد منعکس می‌سازند. ولی لازم است درباره تفاوت داده‌ها با یکدیگر و میزان پراکندگی و تجمع آنها به نحوی مطالعه کرد.

مثال ۱۸ فرض کنید اعداد زیر نمره‌های دو کلاس در یک آزمون ریاضی باشند.

کلاس یک: ۰ ۶ ۱۲ ۱۰ ۶۲ ۶۳ ۷۰ ۱۰۰ ۱۰۰

کلاس دو: ۴۰ ۴۸ ۴۹ ۴۴ ۵۰ ۵۱ ۶۲ ۴۳ ۴۰ ۴۱ ۴۹

با وجود اینکه میانگین برای هر دو کلاس ۴۷ می‌باشد، نحوه پراکندگی داده‌ها به دور ۴۷ و نحوه تغییرپذیری آنها نسبت به ۴۷ در این دو کلاس کاملاً متفاوت می‌باشد. در کلاس یک داده‌ها با ۴۷ تفاوت فاحش دارند، در حالی که در کلاس دو داده‌ها اطراف ۴۷ متمرکز شده‌اند. به عبارت دیگر در کلاس یک میزان تغییرپذیری داده‌ها شدید و در کلاس دو ضعیف می‌باشد.

اینک چند معیار مفید را برای سنجش پراکندگی شرح می‌دهیم. فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_k$ یک سری داده‌های n تائی با فراوانی‌های $f_1, f_2, \ldots, f_k$ و میانگین $\bar{x}$ باشد.

۱.۶.۱ برد

اگر $x_{(1)}$ کوچکترین و $x_{(n)}$ بزرگترین داده باشد،

$$R = x_{(n)} - x_{(1)} \tag{۱۲}$$

را برد داده‌ها می‌گویند.

مثال ۱۹ در مثال ۱۸ برد برای کلاسهای یک و دو به ترتیب عبارتند از:

R_2 = ۶۲ − ۴۰ = ۲۲ ، R_1 = ۱۰۰ − ۰ = ۱۰۰

با وجودی که این معیار وسعت پراکندگی را منعکس می‌کند و طرز محاسبه آن ساده می‌باشد، بیانگر خوبی برای تغییر پذیری داده‌ها نیست. زیرا این معیار فقط به بزرگترین و کوچکترین داده بستگی دارد و اگر بقیه داده‌ها تغییر کنند، تاثیری در برد ایجاد نخواهد شد. اگر تعداد داده‌ها زیاد شود، برد بزرگ شده و یا ثابت می‌ماند.

لازم است اشاره کنیم که معیار زیر را میان برد می‌نامند.

$$R' = \frac{x_{(1)} + x_{(n)}}{2} \tag{۱۳}$$

توجه کنید که میان برد یک نوع معیار تمرکز است. برای مثال ۱۸ میان برد نمره کلاسهای یک و دو به ترتیب ۵۰ و ۵۱ می‌باشند.

۲.۶.۱ میانگین انحرافها

قدر مطلق $x_i - \bar{x}$ را انحراف از میانگین برای داده x_i و

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \left| x_i - \bar{x} \right|}{n} \tag{۱۴}$$

را میانگین انحرافها می‌نامند. واضح است که هر قدر داده‌ها از $\bar{x}$ دورتر باشند، d بزرگتر خواهد بود. لازم است اضافه کنیم که $x_i - \bar{x}$ ممکن است مثبت یا منفی یا صفر باشد و با استفاده از تعریف $\bar{x}$ همواره

داریم:

$$\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x}) = 0 \tag{۱۵}$$

اگر میانه معیار بهتری برای تمرکز باشد، می‌توان آن را به جای میانگین در فرمول (۱۴) به کار برد.

مثال ۲۰ در مثال ۱۸ میانگین انحراف‌ها برای کلاسهای یک و دو به ترتیب عبارتند از:

d_2 = ۴/۹۱ ، d_1 = ۳۵/۵۶

اگر به جای میانگین، میانه را، که برای کلاسهای یک و دو به ترتیب ۶۲ = m_1 و ۴۸ = m_2 می‌باشند به کار بریم، داریم:

d'_2 = ۴/۰۹ ، d'_1 = ۳۳/۸۸

میانگین انحرافها، معیار خوبی برای میزان پراکندگی داده‌ها می‌باشد، ولی طرز محاسبه و کشف خواص ریاضی آن به علت وجود قدر مطلق، قدری پیچیده است. بنابراین به جای آن معیار دیگری به نام واریانس و یا جذر آن به نام انحراف استاندارد را به کار می‌برند.

۳.۶.۱ واریانس و انحراف استاندارد

واریانس را که در لغت به معنی تفاوت و تغییر است، از فرمول

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} \tag{۱۶}$$

که میانگین مجذور انحراف‌ها می‌باشد، به دست می‌آورند. اگر تمام داده‌ها به $\bar{x}$ نزدیک باشند، s^2 کوچک می‌شود. به ویژه اگر تمام x_iها با $\bar{x}$ برابر باشند s^2 صفر است. این حقایق نشان می‌دهند که s^2 معیار خوبی برای سنجش پراکندگی و تغییرپذیری داده‌ها نسبت به میانگین می‌باشد.

با استفاده از جبر مقدماتی، فرمول (۱۶) به صورت زیر که از نظر محاسبه ساده‌تر است، در می‌آید

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \bar{x}^2 \tag{۱۷}$$

اگر جمله اول فرمول بالا را که میانگین $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_k^2$ می‌باشد، با $\overline{x^2}$ نشان دهیم، داریم:

$$s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \tag{۱۸}$$

بنابراین واریانس برابر است با میانگین توان دوم داده‌ها منهای توان دوم میانگین داده‌ها.

چون واریانس یک معیار دو بعدی است (زیرا توان دوم به کار می‌بریم)، از اینرو جذر مثبت آن یعنی s را، که انحراف استاندارد نامیده می‌شود به کار می‌برند. گاهی واریانس را از فرمول

$$s_u^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^۲ \qquad (۱۹)$$

به دست می‌آورند، یعنی مجموع توان دوم انحراف را به جای n، بر $n-۱$ تقسیم می‌کنند. دلیل آماری این کار در آینده روشن خواهد شد. واضح است که میان $s^۲$ و $s_u^۲$ رابطه

$$s_u^۲ = \frac{n}{n-۱}s^۲ \qquad (۲۰)$$

برقرار است. این رابطه نشان می‌دهد که برای نمونه‌های بزرگ، مثلاً نمونه‌هائی با $n > ۱۰۰$ ، $s_u^۲$ و $s^۲$ تقریباً با هم برابرند.

مثال ۲۱ برای داده‌های ۹ ۳ ۰ ۷ ۱ واریانس و انحراف استاندارد را حساب کنید.

با استفاده از فرمولهای (۱۸) و (۲۰) داریم

$$s = \sqrt{۱۲} = ۳.۴۶ \qquad s^۲ = \overline{x^۲} = \bar{x}^۲ = ۲۸ - ۱۶ = ۱۲$$

$$s_u = \sqrt{۱۵} = ۳.۸۷ \qquad s_u^۲ = \frac{۵}{۴} \times ۱۲ = ۱۵$$

۴.۶.۱ روش تبدیل یا روش کوتاه برای محاسبه میانگین و واریانس

گاهی برای محاسبه میانگین و واریانس، می‌توان داده‌ها را به داده‌های دیگری تبدیل کرده و سپس محاسبات را انجام داد. مثلاً برای محاسبه میانگین داده‌های ۱۲۰ ۱۲۵ ۱۳۰ ۱۰۵ نخست از هر یک عدد ۱۰۰ راکم می‌کنیم و سپس نتایج را بر ۵ تقسیم می‌کنیم تا داده‌های جدید ۴ ۵ ۶ ۱ به دست آیند. میانگین داده‌های اخیر می‌شود ۴، حال ۴ را در ۵ ضرب کرده، نتیجه را با ۱۰۰ جمع می‌کنیم تا ۱۲۰ یعنی میانگین داده‌های بالا پیدا شود. این روش را روش تبدیل یا روش کوتاه می‌نامند.

۵.۶.۱ داده‌های تبدیل شده

فرض کنید $x_۱, x_۲, \ldots, x_k$ با فراوانیهای $f_۱, f_۲, \ldots, f_k$ یک سری داده n تائی، و a و $b > ۰$ دو عدد مناسب باشند. عدد a برای تغییر مبدأ اندازه‌گیری و عدد b را برای تغییر واحد اندازه‌گیری به کار

می‌برند. اینک

$$y_i = \frac{x_i - a}{b} \qquad i = ۱, ۲, \ldots, k \qquad (۲۱)$$

را داده تبدیل شده می‌نامند. بنابراین داده‌های تبدیل شده می‌شوند $y_۱, y_۲, \ldots, y_k$ با فراوانی‌های $f_۱, f_۲, \ldots, f_k$.

اگر $\bar{y}$ و $s_y^۲$ میانگین و واریانس داده‌های تبدیل شده باشند، به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\bar{x} = b\bar{y} + a \qquad s_x^۲ = b^۲ s_y^۲ \qquad s_x = b\, s_y \qquad (۲۲)$$

در عمل نخست میانگین و واریانس را برای داده‌های تبدیل شده و سپس به کمک روابط بالا برای داده‌های اصلی محاسبه می‌کنیم.

مثال ۲۲ برای داده‌هائی که در جدول ۳ خلاصه شده‌اند، میانگین و واریانس را با روش تبدیل محاسبه کنید.

نماینده‌های رده‌ها یعنی ۱۸۱ ۱۷۴ ۱۶۷ ۱۶۰ ۱۵۳ به ترتیب با فراوانی‌های ۱۰ ۲۵ ۳۰ ۲۰ ۱۵ در حکم x_iها می‌باشند. برای اینکه داده‌های تبدیل شده را به دست آوریم، فرض می‌کنیم $a = ۱۶۷$ و $b = ۷$ باشند. حال y_iها را به کمک

$$y_i = \frac{x_i - ۱۶۷}{۷}$$

پیدا می‌کنیم. با توجه به جدول ۵ و فرمولهای (۲۲) میانگین و انحراف استاندارد محاسبه می‌شوند.

$$\bar{y} = -\frac{۵}{۱۰۰} = -۰/۰۵$$

$$s_y^۲ = \overline{y^۲} - \bar{y}^۲ = \frac{۱۴۵}{۱۰۰} - ۰/۰۰۲۵ = ۱/۴۴۷۵$$

$$\bar{x} = ۷(-۰/۰۵) + ۱۶۷ = ۱۶۶/۶۵$$

$$s_x^۲ = ۷^۲(۱/۴۴۷۵) = ۷/۰۹۳$$

$$s_x = ۸/۴۲$$

جدول ۵ جدول محاسبه میانگین و انحراف استاندارد با روش کوتاه

x_i	f_i	y_i	y_i^2	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
۱۵۳	۱۵	۲-	۴	۳۰-	۶۰
۱۶۰	۲۰	۱-	۱	۲۰-	۲۰
۱۶۷	۳۰	۰	۰	۰	۰
۱۷۴	۲۵	۱	۱	۲۵	۲۵
۱۸۱	۱۰	۲	۴	۲۰	۴۰
	۱۰۰			۵-	۱۴۵

۶.۶.۱ داده‌های استاندارد

فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_k$ به ترتیب با فراوانیهای $f_1, f_2, \ldots, f_k$ یک سری داده n تائی با میانگین $\bar{x}$ و انحراف استاندارد S باشند. با تبدیل زیر

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} \qquad i = ۱, ۲, \ldots, k \qquad (۲۳)$$

داده‌های جدید $z_1, z_2, \ldots, z_k$ به ترتیب با فراوانیهای $f_1, f_2, \ldots, f_k$ به نام داده‌های استاندارد به دست می‌آیند. به ویژه اگر x_iها نمره‌های آزمون یک کلاس درس باشند، z_iها را نمره‌های استاندارد می‌نامند. به سادگی می‌توان نشان داد که برای این داده‌ها میانگین برابر صفر و واریانس برابر یک است. از این‌رو کلمه استاندارد را در مورد آنها به کار می‌برند. اگر متغیرها نرمال باشند، بعد از استاندارد شدن بهتر می‌توان آنها را با هم مقایسه و درصدهای لازم را محاسبه کرد. برای یک متغیر نرمال، $\bar{x}$ و s^2 به ترتیب تقریب‌های خوبی برای پارامترهای منحنی فراوانی یعنی μ و σ^2 می‌باشند.

برای اینکه کاربرد میانگین و انحراف استاندارد، و همچنین داده‌های استاندارد روشن شود به ذکر مثال زیر می‌پردازیم:

مثال ۲۳ نمره دانش‌آموزان یک کلاس در آزمون ریاضی، دارای میانگین ۷۲ و انحراف استاندارد ۱۵، و در آزمون فیزیک، دارای میانگین ۵۰ و انحراف استاندارد ۲۰ می‌باشند. اگر نمره علی در ریاضی ۶۰ و در درس فیزیک ۳۵ باشد، معلومات علی در کدام موضوع بیشتر است؟

چون این دو آزمون با مقیاس‌های مختلف به عمل آمده‌اند، مقایسه اعداد ۶۰ و ۳۵ مفهومی ندارد.

اگر نمره‌های دو آزمون تقریباً دارای منحنی فراوانی نرمال باشند، تنها بعد از استاندارد کردن می‌توان آنها را با هم مقایسه کرد.

نمره استاندارد ریاضی $$z' = \frac{۶۰ - ۷۲}{۱۵} = -۰/۸$$

نمره استاندارد فیزیک؛ $$z'' = \frac{۳۵ - ۵۰}{۲۰} = -۰/۷۵$$

بنابراین علی در فیزیک بهتر می‌باشد، زیرا داریم $z'' > z'$.

۷.۶.۱ ضریب تغییر

نسبت انحراف استاندارد به میانگین، یعنی

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \qquad (۲۴)$$

را که اغلب به صورت درصد بیان می‌شود، ضریب تغییر می‌نامند. این ضریب که به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد، در عمل برای مقایسه به کار می‌رود.

مثال ۲۴ کارخانه‌ای دو نوع لاستیک اتومبیل تولید می‌کند. برای نوع A میانگین عمر ۱۰۰۰۰ کیلومتر، با انحراف استاندارد ۲۰۰۰ کیلومتر، و برای نوع B میانگین عمر ۱۱۰۰۰ کیلومتر با انحراف استاندارد ۱۰۰۰ کیلومتر می‌باشد. کدام نوع لاستیک بهتر است؟

ضریب تغییر برای نوع A $$V_1 = \frac{۲۰۰۰}{۱۰۰۰۰} = ۰/۲۰ \quad V_1 = \%۲۰$$

ضریب تغییر برای نوع B $$V_2 = \frac{۱۰۰۰}{۱۱۰۰۰} = ۰/۰۹ \quad V_2 = \%۹$$

نوع B بهتر است، زیرا هم میانگین عمر آن بیشتر است و هم ضریب تغییر آن کوچکتر.

در این مثال اگر فرض کنیم که طول عمرها متغیرهای نرمال هستند، با محاسبه فاصله

$$(\bar{x} - ۲s \,,\, \bar{x} + ۲s)$$

برای هر دو نوع لاستیک، معلوم می‌شود که در حدود ۹۶% از لاستیک نوع A دارای طول عمری در فاصله (۱۴۰۰۰ و ۶۰۰۰)، و در حدود ۹۶% از لاستیک نوع B، دارای طول عمری در فاصله (۱۳۰۰۰ و ۹۰۰۰) می‌باشند. باز هم نتیجه می‌شود که لاستیک نوع B بهتر است.

۸.۶.۱ نیم‌برد چارکها

نصف برد چارکهای اول و سوم، یعنی

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \qquad (۲۵)$$

را نیم‌برد چارکها می‌نامند. در اینجا اضافه می‌کنیم که

$$Q' = \frac{Q_1 + Q_3}{2} \qquad (۲۶)$$

را میان چارکی می‌نامند. توجه کنید که میان چارکی یک نوع معیار تمرکز است. برای توزیعهای متقارن Q' درست برابر Q_2، یعنی میانه می‌باشد. معیار Q که در حقیقت برابر فاصله Q' از Q_1 یا Q_3 است، یک نوع معیار برای سنجش پراکندگی است. به ویژه Q را در مواردی که داده‌های نهائی نامعلوم یا پرت، یعنی بی‌اندازه کوچک یا بی‌اندازه بزرگ باشند، به کار می‌برند.

مثال ۲۵ تعداد فرزندان ۱۶ خانواده به ترتیب غیر نزولی عبارتند از:

۰ ۱ ۱ ۲ ۲ ۲ ۳ ۳ ۳ ۳ ۴ ۴ ۴ ۵ ۶ ۷

برای این داده‌ها $Q_1 = 2$، $Q_2 = 3$، $Q_3 = 4$ و می‌باشد. بنابراین میان چارکی و نیم برد چارکها عبارتند از $Q' = 3$ و $Q = 1$. صرفنظر از داده‌های نهائی ملاحظه می‌شود که Q' تقریباً مرکز توزیع، و Q معیار پراکندگی می‌باشد.

۹.۶.۱ تمرین بخش شش

۱. میزان حرارت ظهر در یکی از شهرهای ایران در دی ماه برحسب درجه سانتیگراد عبارت است از:

۸ ۱۱ ۱۲ ۱۶ ۷ ۹ ۴ ۶ ۶ ۴ ۴ ۵ ۷ ۶ ۸

۹ ۱۰ ۱ ۱۶ ۷ ۹ ۴ ۵ ۶ ۸ ۷ ۱۲ ۱۱ ۶

برد، میان برد، انحراف استاندارد، میان چارکی، و نیم برد چارکها را حساب کنید.

۲. با استفاده از فرمول (۱۶)، فرمول (۱۸) را به دست آورید.

۳. طول عمرهای ۱۰۰ لامپ اسرام ۶۰ وات، برحسب ساعت در جدول زیر داده شده‌اند.

فراوانی	طول عمر
۱۰	۳۰۰-۳۱۹
۲۰	۳۲۰-۳۳۹
۳۸	۳۴۰-۳۵۹
۲۵	۳۶۰-۳۷۹
۷	۳۸۰-۳۹۹
۱۰۰	

میانگین و واریانس را با روش تبدیل حساب کنید. هیستوگرام و چند ضلعی فراوانی را رسم کنید. میانگین و میانه و نما را با هم مقایسه نمائید. درصد فراوانی را در فاصله $(\bar{x}, \bar{x}+s)$ با فرض نرمال بودن منحنی فراوانی و از روی جدول فوق محاسبه کنید.

۴. فرمولهای (۲۲) را به دست آورید.

۵. برای داده‌هائی که در جدول ۲ خلاصه شده‌اند، میانگین و واریانس را با روش کوتاه حساب کنید.

۶. نشان دهید که برای داده‌های استاندارد میانگین صفر و واریانس یک می‌باشد.

۷. در یک کارخانه آجر فشاری میانگین مزد روزانه کارگران ۴۵۰ تومان و انحراف استاندارد ۴۵ تومان، و در یک کارخانه روغن نباتی میانگین مزد روزانه کارگران ۶۵۰ تومان و انحراف استاندارد ۶۰ تومان می‌باشد. مزد علی در کارخانه آجر فشاری ۵۰۰ تومان و مزد احمد در کارخانه روغن نباتی ۶۰۰ تومان می‌باشد. نسبت به کارگران کارخانه خود مزد علی بهتر است یا احمد؟ از روی ضریب تغییر درباره مزد این دو کارخانه قضاوت کنید. اگر مزدها متغیرهای نرمال باشند، مزد در کدام کارخانه بهتر است؟

۸. نشان دهید که ضریب تغییر به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد، یعنی اگر داده‌ها را در عدد مثبت b ضرب کنیم، ضریب تغییر ثابت می‌ماند.

۹. ده قوطی تاید دارای میانگین ۳۰۰ گرم و انحراف استاندارد ۱۰ گرم می‌باشند. این قوطیها از ۱۰ مغازه با قیمتهای متفاوت خریداری شده‌اند. میانگین قیمتها ۱۵۰ ریال و انحراف استاندارد قیمتها ۱۰ ریال است. آیا وزنها به هم نزدیکترند یا قیمتها؟

۱۰. اگر x_iها را دو به دو مقایسه کنیم و معدل مجموع n^2 پرانتز $(x_j - x_i)^2$ را در نظر بگیریم، معیاری به صورت

$$\delta^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_i)^2$$

برای پراکندگی به دست می‌آید. ثابت کنید که $\delta^2 = 2s^2$.

راهنمائی: داخل پرانتز $\bar{x}$ را اضافه و کم کنید.

۱۱. در شهری مزد کارگران کارخانه پارچه بافی دارای میانگین ۵۰۰ تومان و انحراف استاندارد ۲۰ تومان و مزد کارگران کارخانه سیمان دارای میانگین ۴۵۰ تومان و انحراف استاندارد ۲۵ تومان می‌باشد. مزد علی در کارخانه اول ۵۲۰ تومان و مزد حسن در کارخانه دوم ۴۷۰ تومان می‌باشد. اگر مزد معیار مهارت باشد، علی ماهرتر است یا حسن؟

۱۲. ثابت کنید $\frac{s}{\bar{x}}$ با تغییر مبدأ و واحد اندازه‌گیری تغییر نمی‌کند؟

۷.۱ چولگی و برجستگی

طبیعی‌ترین منحنی فراوانی، منحنی فراوانی نرمال استاندارد می‌باشد که معادله مختصاتی آن به‌صورت

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (۲۷)$$

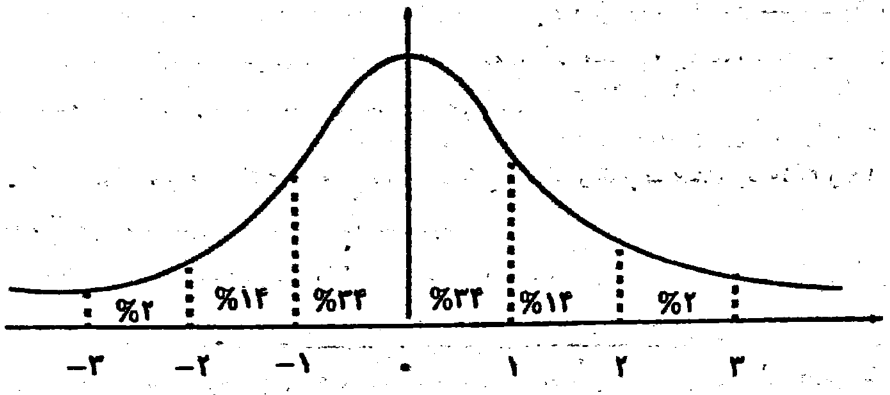
است. این منحنی زنگ ـ گونه و از نظر متقارن، کشیدگی، و پخی، تناسب و زیبائی خاصی دارد. مساحت زیر منحنی به نحوی طبیعی طبق نگاره ۱۶ توزیع شده است.

در عمل هیچ متغیری وجود ندارد که منحنی فراوانی آن کاملاً نرمال استاندارد باشد. اغلب منحنی فراوانی داده‌ها نامتقارن و کشیده یا پخ می‌باشند. و میزان نانرمالی را با دو معیار به نامهای چولگی و برجستگی می‌سنجند. این دو معیار به میانگینهای مخصوص، به نام گشتاورها بستگی دارند.

۱.۷.۱ گشتاور و گشتاور مرکزی داده‌ها

فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_k$ به ترتیب با فراوانیهای $f_1, f_2, \ldots, f_k$ یک سری داده n تائی باشند. میانگین توان rام x_iها و $x_i - \bar{x}$ها، یعنی

$$m'_r = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^r}{n} \qquad m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^r}{n} \qquad (۲۸)$$



نگاره ۱۶ منحنی نرمال استاندارد

را گشتاور rام، و گشتاور مرکزی rام داده‌ها می‌نامند. r معمولاً یک عدد طبیعی است. واضح است که m'_1 برابر $\bar{x}$ و m_1 برابر صفر و m_2 برابر s^2 می‌باشد. اگر داده‌ها نسبت به میانگین، متقارن باشند، گشتاورهای مرکزی فرد یعنی $m_3, m_5, \ldots$ برابر صفر هستند.

۲.۷.۱ چولگی

میزان عدم تقارن منحنی فراوانی را چولگی می‌نامند. فرض کنید $\bar{x}$ میانگین، m میانه، M نما، s انحراف استاندارد، و m_3 گشتاور مرکزی سوم باشند. هرکدام از فرمولهای زیر را می‌توان به عنوان معیار چولگی به کار برد:

$$b_1 = \frac{\bar{x} - M}{s} \qquad \text{ضریب چولگی اول پیرسن}$$

$$b_2 = \frac{3(\bar{x} - m)}{s} \qquad \text{ضریب چولگی دوم پیرسن} \qquad (۲۹)$$

$$g = \frac{m_3}{s^3} \qquad \text{ضریب گشتاوری چولگی}$$

در فرمولهای بالا s را بدین جهت به کار برده‌ایم، تا این ضرائب به واحد اندازه‌گیری بستگی نداشته باشند. در صورتیکه داده‌ها نسبت به میانگین متقارن باشند، ضرائب بالا برابر صفر هستند. ولی باید متوجه بود که عکس این موضوع کاملاً صحت ندارد. برحسب این که b_1، b_2 و g مثبت یا منفی باشند، منحنی فراوانی چوله به راست (نگاره ۱۳) یا چوله به چپ (نگاره ۱۴) می‌باشد.

چون نما کمتر از میانگین و میانه، تحت تاثیر چولگی قرار می‌گیرد، از اینرو ضریب b_1 را به صورت بالا تعریف کرده‌اند. ولی در عمل محاسبه نما با دقت کافی مشکل می‌باشد، بنابراین b_2 را که به کمک رابطه (۱۱) از روی b_1 به دست می‌آید به کار می‌برند.

مثال ۲۶ طول عمر ۱۰۰ باتری اتومبیل دارای میانگین و میانه و انحراف استاندارد ۳/۵۰ و ۳/۴۸ و ۱/۶۵ سال می‌باشد. ضریب چولگی را محاسبه کنید.

با اطلاعات داده شده، ضریب چولگی دوم پیرسن می‌شود

$$b_2 = \frac{۳(\bar{x}-m)}{s} = \frac{۳(۳/۵۰-۳/۴۸)}{۱/۶۵} = ۰/۰۳۶$$

بنابراین منحنی فراوانی طول عمر باتریها کمی چوله به راست می‌باشد.

۳.۷.۱ برجستگی

میزان کشیدگی یا پخی منحنی فراوانی را نسبت به منحنی نرمال استاندارد، برجستگی آن می‌نامند. فرض کنید m_4 گشتاور مرکزی چهارم و s انحراف استاندارد باشد. چون برای داده‌های نرمال $\frac{m_4}{s^4}$، به عدد ۳ نزدیک می‌باشد، معیار برجستگی را از فرمول

$$k = \frac{m_4}{s^4} - ۳ \qquad (۳۰)$$

به دست می‌آورند. برحسب آنکه k مثبت یا منفی باشد، منحنی فراوانی کشیده یا پخ می‌باشد. اگر k نزدیک صفر باشد، برجستگی منحنی فراوانی طبیعی است.

مثال ۲۷ در مثال ۲۶ گشتاور مرکزی چهارم برابر است با ۹/۲۳. برجستگی را محاسبه کنید.

$$k = \frac{۹/۲۳}{(۱/۶۵)^۴} - ۳ = ۱/۲۵ - ۳ = -۱/۷۵$$

بنابراین منحنی فراوانی طول عمر باتریها، نسبت به منحنی فراوانی نرمال استاندارد، پخ می‌باشد.

۴.۷.۱ تمرین بخش هفت

۱. ثابت کنید اگر به هر یک از داده‌ها مقدار ثابت a را اضافه کنیم، گشتاورهای مرکزی و در نتیجه معیارهای چولگی و برجستگی تغییر نمی‌کنند.

۲. نشان دهید که ضریب دوم چولگی پیرسن را می‌توان از روی ضریب اول از رابطه (۱۱) به دست آورد.

۳. گشتاور مرکزی سوم را برحسب گشتاورهای اول، دوم، و سوم به دست آورید.

۴. معیار چولگی را به کمک میانه و چارکهای اول و سوم به صورت

$$\frac{(Q_3-m)-(m-Q_1)}{Q_3-Q_1}$$

تعریف می‌کنند. این معیار را برای داده‌های جدول فراوانی ۳ محاسبه کنید. به کمک دهکها، چگونه می‌توان معیار چولگی را تعریف کرد؟

۵. برای جدول فراوانی ۳ چولگی و برجستگی را محاسبه کنید و درباره منحنی فراوانی قد تفسیر نمائید.

۸.۱ چند نمودار جدید

در سالهای اخیر چند نمودار مفید آماری ارائه گردیده‌اند که در مبحث آنالیز داده‌ها و آمار توصیفی به کار می‌روند. این نمودارها را می‌توان به کمک نرم‌افزارهای آماری یا با دست تهیه نمود. در این بخش بعضی از این نمودارها را شرح می‌دهیم.

۱.۸.۱ نمودارهای ساقه‌ای

با هیستوگرام داده‌ها نمی‌توان یک یک داده‌ها را نمایش داد. یکی از آماردانان به نام توکی، بیست سال پیش در کتاب خود نمودار دیگری به نام نمودار ساقه‌ای یا نمودار ساقه و برگ مطرح کرد که نقش هیستوگرام را دارد و افزون بر این، تمام داده‌ها را می‌توان در آن دید. سه نوع نمودار ساقه‌ای به کار می‌رود.

نمودار ساقه‌ای ساده

این نمودار معمولاً برای داده‌هائی که به صورت اعداد کوچک هستند به کار می‌رود. فرض کنید داده‌های زیر تعداد دانش‌آموزان کلاس اول ابتدائی در ۱۵ دبستان شهر A باشند. این داده‌ها به ترتیب غیر نزولی عبارتند از

۲۲ ۲۴ ۲۵ ۳۴ ۳۵ ۴۱ ۴۱ ۴۶ ۴۶ ۴۶ ۴۷ ۴۹ ۵۴ ۵۹ ۶۰

نمودار ساقه‌ای ساده را اینگونه می‌سازند.

ساقه	برگ
۲	۲ ۴ ۵
۳	۴ ۵
۴	۱ ۱ ۶ ۶ ۶ ۷ ۹
۵	۴ ۹
۶	۰

نگاره ۱۷ نمودار ساقه‌ای ساده برای تعداد دانش‌آموزان شهر A

الف - هر داده را دو قسمت می‌کنیم: رقم دهگان را ساقه و رقم یکان را برگ می‌نامیم. مثلاً در داده ۴۶، رقم ۴ ساقه و رقم ۶ برگ را می‌سازند.

ب - ساقه‌ها را به ترتیب صعودی از بالا به پائین طرف چپ یک خط عمودی می‌گذاریم.

ج - برگهای هر ساقه را به ترتیب غیر نزولی از چپ به راست طرف دیگر خط عمودی پهلوی آن ساقه می‌گذاریم. در نگارهٔ ۱۷ نمودار ساقه‌ای ساده برای داده‌های بالا دیده می‌شود. معمولاً این نمودار را نمودار ساقه‌ای یا اغلب نمودار ساقه و برگ می‌خوانند.

با نگاهی به نگاره ۱۷، نه تنها یک داده‌ها بلکه میانه و نما (که در این مثال هر دو عدد ۴۶ هستند) دیده می‌شوند. افزون بر این، این نمودار به هیستوگرام خوابیده شباهت دارد و نشان می‌دهد که توزیع داده‌ها متقارن نیست. اگر شماره برگهای یک ساقه زیاد باشد، آن را به دو ساقه تبدیل می‌کنند. مثلاً ساقه ۴ را به ساقه *۴ با برگهای ۰ تا ۴ و ساقه **۴ با برگهای ۵ تا ۹ تبدیل می‌کنند. اگر داده‌ها دارای ارقام اعشاری باشند، نخست آنها را به اعداد درست سر راست می‌کنند و سپس نمودار ساقه‌ای را می‌سازند. مثلاً ۵۳/۹۳ را به ۵۴ سر راست می‌کنند و آن را با ساقه ۵ و برگ ۴ نشان می‌دهند.

نمودار ساقه‌ای پشت به پشت

هنگامی که بخواهیم دو دسته داده را با هم مقایسه کنیم، دو نمودار ساقه‌ای با ساقه‌های مشترک می‌سازیم. برگهای یک نمودار را در سمت راست و دیگری را در سمت چپ می‌گذاریم. با این روش نموداری به دست می‌آید که آن را نمودار ساقه‌ای پشت به پشت می‌گویند.

به عنوان مثال فرض کنید داده‌های زیر تعداد دانش‌آموزان کلاس اول ابتدائی در ۱۴ دبستان شهر B

B		A
۹ ۸	۱	
۶ ۴ ۳	۲	۲ ۴ ۵
۴	۳	۴ ۵
۸ ۵ ۳	۴	۱ ۱ ۶ ۶ ۶ ۷ ۹
۳ ۲ ۲ ۰	۵	۴ ۹
۵	۶	۰

نگاره ۱۸ نمودار ساقه‌ای پشت به پشت برای تعداد دانش‌آموزان شهر A و شهر B

باشند:

۱۸ ۱۹ ۲۳ ۲۴ ۲۶ ۳۴ ۴۳ ۴۵ ۴۸ ۵۰ ۵۲ ۵۲ ۵۳ ۶۵

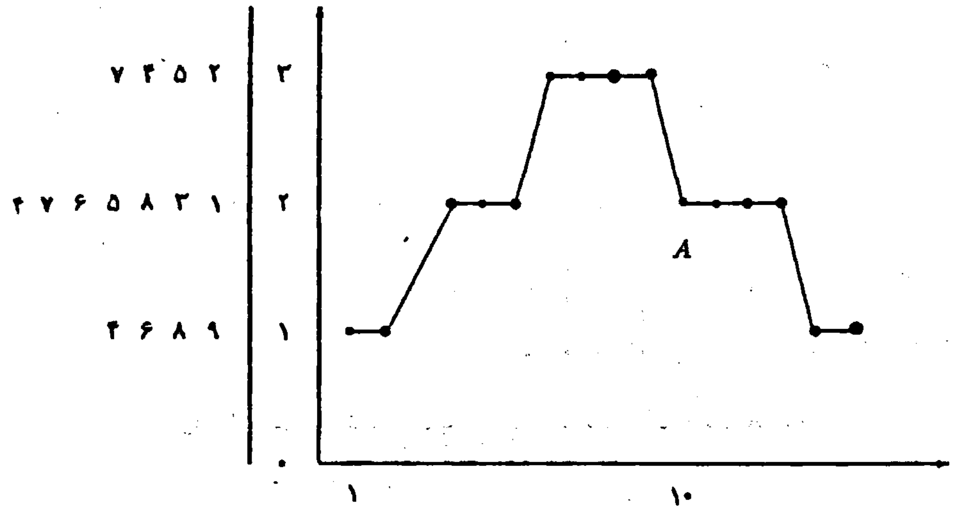
نگاره ۱۸، نمودار ساقه‌ای پشت به پشت برای مقایسه تعداد دانش‌آموزان در دو شهر A و B می‌باشد.

نمودار ساقه‌ای نقطه‌دار

همانطوری که گفتیم نمودار ساقه‌ای بر هیستوگرام برتری دارد، زیرا در نمودار ساقه‌ای یک یک داده‌ها را می‌توان دید ولی در هیستوگرام داده‌ها دیده نمی‌شوند. با اینحال اگر داده‌ها با ترتیبی ویژه مثلاً برحسب زمان ثبت شده باشند، نمودار ساقه‌ای نمی‌تواند این ترتیب را نشان دهد. ممکن است دو سری داده دارای یک نمودار ساقه‌ای باشند ولی زمان ثبت داده‌ها در این دو سری یکسان نباشد. آمارداتی به نام هانتر در ۱۹۸۸ با معرفی نمودار ساقه‌ای نقطه‌دار، این کمبود را برطرف نمود. این نمودار را با یک مثال عددی شرح می‌دهیم.

فرض کنید در شهری درجه حرارت هوای تابستان ۱۳۷۵ را هر روز اندازه گرفته، به ترتیب از چپ به راست اعداد زیر را برای اول تا پانزدهم مرداد ثبت کرده باشند:

۱۲ ۱۶ ۲۴ ۲۷ ۲۶ ۲۵ ۳۷ ۳۴ ۳۵ ۳۲ ۲۸ ۲۳ ۲۱ ۱۸ ۱۹



نگاره ۱۹ نمودار ساقه‌ای نقطه‌دار برای درجه حرارت تابستان

برای تعیین نمودار ساقه‌ای نقطه‌دار، نخست ساقه‌ها را میان دو خط عمودی و برگها را به ترتیب ثبت داده‌ها طرف چپ ساقه‌های مربوط می‌گذاریم. با استفاده از محور ساقه‌ها و محور زمان، هر داده را با یک نقطه نشان می‌دهیم. طول این نقطه زمان ثبت داده و عرضش ساقه داده است. نگاره ۱۹ نمودار ساقه‌ای نقطه‌دار داده‌های بالا را نشان می‌دهد. توجه کنید که در این نمودار برگها به ترتیب ثبت داده‌ها، نه به ترتیب صعودی، قرار می‌گیرند.

به عنوان مثال در این نگاره نقطه A می‌گوید که در دهم مرداد درجه حرارت ۲۵ است.

۲.۸.۱ نمودار جعبه‌ای

این نمودار برای نشان دادن نحوهٔ پراکندگی داده‌ها سودمند است. برای ساختن آن روش زیر را به کار می‌بریم.

نخست داده‌ها را به ترتیب غیر نزولی به صورت $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$ می‌نویسیم. اینک آنها را در پنج عدد زیر به نام چکیده پنج عددی فشرده می‌کنیم:

(۱) کوچکترین داده یعنی x_1

(۲) بزرگترین داده یعنی x_n

(۳) میانه داده‌ها یعنی m

(۴) چارک اول داده‌ها یعنی Q_1

(۵) چارک سوم داده‌ها یعنی Q_3.

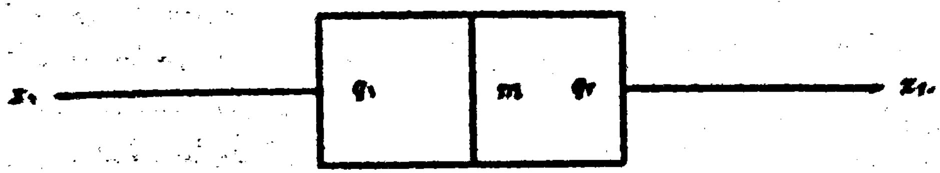
این ۵ عدد را با ۵ نقطه به طولهای x_1 و Q_1، m، Q_3، x_n روی محور طولها نشان می‌دهیم حال مستطیلی می‌سازیم که دو ضلع عمودی آن از Q_1 و Q_3 بگذرند، و از m، خطی به موازات دو ضلع عمودی رسم می‌کنیم. از Q_1 و Q_3 دو خط دیگر به نام دنباله‌ها به ترتیب تا x_1 و x_n امتداد می‌دهیم. بدین طریق نمودار جعبه‌ای یا نمودار جعبه‌ای دنباله‌دار به دست می‌آید. فاصله دو نقطه پایانی دنباله‌ها را با $R = x_n - x_1$ نشان می‌دهیم و آن را برد داده‌ها می‌نامیم. طول جعبه را با $Q = Q_3 - Q_1$ نشان می‌دهیم و آن را برد میان چارکی می‌نامیم. نمودار جعبه‌ای با یک نگاه نحوه پراکندگی داده‌ها را نشان می‌دهد. هر اندازه R و Q بزرگتر باشند پراکندگی بیشتر است. میزان تقارن یا عدم تقارن با این نمودار به خوبی دیده می‌شود. داده‌هائی که نسبت به سایر داده‌ها خیلی کوچکتر یا خیلی بزرگتر باشند، باعث می‌شوند که R بزرگ شود و در نتیجه دنباله چپ یا راست دراز گردند. معمولاً این نوع داده‌ها را که به داده‌های دور افتاده یا پرت شهرت دارند، کنار می‌گذارند و نمودار جعبه‌ای را با بقیه داده‌ها می‌سازند و داده‌های پرت را با نقاط جداگانه در پایان دنباله‌ها می‌گذارند. چنین نموداری را نمودار جعبه‌ای اصلاح شده می‌گویند. معمولاً اگر داده‌ای بیش از $1/5Q$ از Q_1 یا Q_3 دور باشد، آن را داده پرت محسوب می‌دارند.

مثال ۲۸ داده‌های زیر نمره‌های یک آزمون ۱۰۰ تستی در یک کلاس ۴۰ نفری هستند که به ترتیب غیر نزولی تهیه شده‌اند:

۱۰	۳۸	۳۸	۳۹	۳۹	۴۰	۴۰	۴۱	۴۲	۴۵
۴۷	۴۸	۴۹	۴۹	۵۰	۵۱	۵۱	۵۳	۵۳	۶۱
۶۱	۶۳	۶۳	۶۵	۶۵	۷۰	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵
۷۶	۷۶	۷۸	۷۸	۸۰	۸۰	۸۳	۸۵	۹۲	۹۸

می‌خواهیم نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم کنیم. چکیده پنج عددی عبارتند از

$$x_1 = 10 \qquad Q_1 = 47 \qquad m = 61 \qquad Q_3 = 75 \qquad x_{40} = 98$$



نگاره ۲۰ نمودار جعبه‌ای برای نمره‌های آزمون

نگاره ۲۰ نمودار جعبه‌ای داده‌ها را نشان می‌دهد.
یادآور می‌شویم که Q_1 را میانه تمام داده‌هائی گرفتیم که از m کوچکتر یا مساوی آن هستند. Q_3 را هم میانه تمام داده‌هائی گرفتیم که از m بزرگتر یا مساوی آن هستند. البته می‌توان این چارکها را با روشی دقیقتر حساب کرد، ولی اختلاف چندان قابل ملاحظه نیست.
چون $Q = Q_3 - Q_1 =$ ۲۸ و $1/5Q =$ ۴۲، پس داده‌ای پرت است که از Q_1 به اندازه ۴۲ کوچکتر یا از Q_3 به اندازه ۴۲ بزرگتر باشد. در این مثال چنین داده‌ای نداریم و نیازی به اصلاح نمودار جعبه‌ای بالا نیست.

۳.۸.۱ تمرین بخش هشت

۱. در آزمون ریاضی عمومی، یک کلاس ۵۰ نفری نمره‌های زیر را گرفته‌اند:

۷۲	۶۵	۹۷	۹۳	۸۲	۵۱	۶۷	۸۵	۹۵	۸۱
۸۰	۹۲	۸۵	۷۱	۵۴	۹۱	۹۰	۸۳	۶۲	۶۳
۸۸	۹۵	۹۸	۵۷	۵۱	۹۲	۷۳	۶۱	۶۹	۷۰
۵۲	۷۱	۹۳	۶۲	۵۵	۸۴	۸۱	۶۵	۷۲	۶۳
۴۱	۴۵	۸۶	۴۲	۵۱	۹۳	۸۲	۶۷	۶۴	۵۹

الف – نمودار ساقه‌ای را بسازید.
ب – نمودار ساقه‌ای نقطه‌دار را رسم کنید.
ج – نمودار جعبه‌ای را رسم کنید.

۲. تعداد تصادفات اتومبیل در شهری در ۱۵ روز اول تابستان و ۱۲ روز اول زمستان عبارتند از:

۱۹ ۳۱ ۲۵ ۱۸ ۳۲ ۴۳ ۴۱ ۳۴ ۱۶ ۲۷ ۱۴ ۲۳ ۱۵ ۱۰ ۱۲

۲۰ ۴۳ ۴۵ ۳۴ ۲۱ ۲۸ ۳۲ ۳۴ ۲۷ ۲۲ ۱۸ ۳۱

الف – نمودار ساقه‌ای پشت به پشت را بسازید.
ب – نمودار ساقه‌ای نقطه‌دار را برای تابستان و برای زمستان رسم کنید.
ج – نمودار جعبه‌ای را برای تابستان و برای زمستان رسم کنید.

فصل ۲

قوانین شانس یا احتمال

۱.۲ مقدمه

انسان به علت عدم توانائی در کشف تمام رموز عالم و عدم اطمینان در برابر حوادث روزگار مجبور است مفاهیمی از قبیل تصادف و شانس را به عنوان پاره‌ای از زندگی روزانه بپذیرد. با این حال دانشمندان همواره تلاش کرده‌اند تا از راه تجربه و مشاهده به کمک علم و تکنولوژی تا آنجاکه مقدور است علت پدیده‌ها راکشف نمایند و عدم اطمینان راکاهش دهند.

دربارهٔ تصادف و شانس، چه در سطح ابتدائی به صورت داستانها و چه در سطح عالی به صورت بحثهای فلسفی، هزاران کتاب و مقاله نوشته‌اند، که انگیزه‌های خوبی برای تفکر در این زمینه می‌باشند. متفکران ریاضی سعی کرده‌اند تا موضوع را لااقل در موارد ساده به کمک اعداد و قوانین ریاضی، تجزیه و تحلیل نمایند و نظام امور تصادفی را، با اینکه تصادف در ظاهر تابع هیچ نظامی نیست، پیدا کنند. می‌دانیم که قماربازان در حین تفنن و تشویش، به تصادف برد و باخت و خوش شانسی و بدشانسی توجه زیاد دارند. از قضا دانش تجزیه و تحلیل امور تصادفی از این راه غیر اخلاقی آغاز شده است، این دانش راکه بر پایه ریاضی علم آمار است، احتمال می‌نامند.

برای اولین بار یکی از اشراف زادگان و قمار بازان معروف فرانسه، برای توضیح علت برد و باخت با تاس تخته نرد به دو ریاضیدان مشهور فرانسوی، پاسکال (۱۶۶۲-۱۶۲۳) و فرما (۱۶۶۵-۱۶۰۱)، متوسل گردید. مسائلی راکه آنها حل کردند، مدتها به راههای مختلف توجیه و تفسیر شد. ناگفته نماند که قبل از آنها دو دانشمند ایتالیائی، کاردان (۱۵۷۶-۱۵۰۱) و گالیله (۱۶۴۲-۱۵۶۴)، در این زمینه محاسبات گوناگون انجام داده بودند، که مورد توجه قماربازان آن زمان در ایتالیا قرار گرفت.

بنابراین از نظر تاریخی تئوری احتمال از بازیهای قمار در اوائل قرن هفدهم شروع شد و رفته رفته رشد نمود و در رشته‌های مختلف نفوذ کرد. در سال ۱۹۳۳ کولموگروف ریاضیدان روسی (۱۹۸۷-۱۹۰۳)، رساله‌ای درباره اصول احتمال منتشر کرد، و به احتمال کاملاً جنبه ریاضی داد. امروز

احتمال در علوم، مهندسی، علوم اجتماعی، علوم قضائی، پزشکی، بازاریابی، و غیره وسیله مهمی برای تجزیه و تحلیل پدیده‌ها است.

در تئوری احتمال واژه‌هائی مانند آزمایش، پیشامد، و غیره راکه از زبان عادی گرفته شده‌اند، به کار می‌برند. باید نخست این واژه‌ها را دقیقاً بدون ابهام روشن نمود تا بتوان تئوری را با اسلوب ریاضی پایه‌گذاری کرد.

۱.۱.۲ آزمایش تصادفی

هر عملی راکه تصادف در آن دخالت داشته باشد، در اصطلاح تئوری احتمال، آزمایش تصادفی می‌گویند. دقیقاً آزمایشی تصادفی عبارت است از عملی که تحت شرائطی ثابت و برحسب موضوعی مورد علاقه، هر بارکه تکرار شود، منجر به یکی از اعضای مجموعهٔ ناتهی S گردد. مجموعه S متشکل از تمام نتیجه‌هائی که تحت شرائط آزمایش و برحسب موضوع مورد علاقه قابل تصور است.

مثال ۱ پنج کارت یکسان، دو عدد سفید، یک عدد قرمز و دو عدد سبز را به خوبی مخلوط می‌کنیم و چشم بسته یکی را بیرون می‌آوریم. تحت این شرائط، اگر رنگ کارت بیرون آمده موضوع مورد علاقه باشد، داریم: $S =$ {سفید، قرمز، سبز }. هر بارکه آزمایش را انجام دهیم کارتی به یکی از سه رنگ یاد شده بیرون می‌آید.

اگر شرائط آزمایش و موضوع مورد علاقه را تغییر دهیم، مثلاً کارتها دارای شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ باشند و موضوع مورد علاقه شماره کارت باشد آنگاه $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$.

مثال ۲ سکه‌ای را به تصادف می‌اندازیم و شرائط را به نحوی کنترل می‌کنیم که گم نشود و در خاک نرم روی پهلو قرار نگیرد، بلکه بعد از سکون نقش یکی از دو روی آن که شیر و خط نامیده می‌شوند و آنها را با H و T نشان می‌دهند، از بالا دیده شود. اگر موضوع مورد علاقه نقش روی سکه بعد از سکون باشد، داریم: $S = \{H, T\}$. این آزمایش راکه با آن آشنائی داریم بازی شیر و خط می‌نامیم. هرگاه موضوع مورد علاقه، چیز دیگری مانند محل سکون سکه یا نوع صدای برخورد آن با زمین باشد، طبیعاً S پیچیده‌تر خواهد شد.

از دو مثال بالا معلوم می‌شود که در هر آزمایش تصادفی، برای اینکه S بدون ابهام تعیین شود، باید شرائط آزمایش و موضوع مورد علاقه را قبلاً مشخص کرد.

۲.۱.۲ پیشامد و فضای نمونه

در یک آزمایش تصادفی، هر پیشامد E عبارت است از زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام نتیجه‌ها. اگر مجموعهٔ E یک عضوی به صورت $\{e\}$ باشد، آن را یک پیشامد ساده می‌نامند و معمولاً تنها با e نشان می‌دهند. اگر E تهی باشد آن را پیشامد محال می‌نامند و $\varnothing$ نشان می‌دهند و اگر E برابر با S باشد آن را پیشامد حتمی می‌نامند.

چون در آزمایشهای تصادفی، به ویژه کارهای آزمایشگاهی، نمونه‌برداری معمول است، از اینرو S را فضای نمونه می‌نامند. در حقیقت S را باید فضای پیشامدها نامید.

۳.۱.۲ رخ دادن یک پیشامد

می‌گوئیم در یک آزمایش تصادفی، پیشامد E رخ می‌دهد، هرگاه آزمایش تصادفی منجر به مشاهده یکی از اعضای E گردد.

مثال ۳ دو عدد کارت سفید به شماره‌های ۱، ۲، سه عدد کارت قرمز به شماره‌های ۳، ۴، ۵ و دو عدد کارت سبز به شماره‌های ۶، ۷ را به خوبی مخلوط کرده، چشم بسته یکی از این هفت کارت را بیرون می‌آوریم. فرض کنید شماره روی کارت موضوع مورد علاقه باشد. بنابراین فضای نمونه می‌شود $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$. پیشامد مشاهده کارت قرمز، یعنی پیشامد اینکه کارت بیرون آمده قرمز باشد، زیر مجموعه‌ای از S به صورت $\{۳, ۴, ۵\}$ است. این پیشامد هنگامی رخ می‌دهد که یکی از کارتهای شماره ۳ یا ۴ یا ۵ بیرون آید. پیشامد مشاهده کارت مضرب ۵، یک پیشامد ساده به صورت $\{۵\}$ است.

پیشامد مشاهده کارت بزرگتر از ۸، می‌شود پیشامد محال یعنی مجموعه تهی، زیرا بزرگترین شماره می‌تواند عدد ۷ باشد.

پیشامد مشاهده کارت کوچکتر از ۱۰، می‌شود پیشامد حتمی یعنی تمام S، زیرا تمام شماره‌ها از ۱۰ کمتر هستند.

مثال ۴ دربازی شیر و خط سکه‌ای را سه بار می‌اندازیم. در این آزمایش تصادفی فضای نمونه می‌شود

$$S = \{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH\}$$

به عنوان مثال، منظور از HHT این است که سکه بار اول و دوم شیر و بار سوم خط بیاید. این یک پیشامد ساده است که آن را به صورت $\{HHT\}$ و یا برای آسانی به صورت HHT نشان می‌دهیم.
پیشامد بار اول و آخر شیر، می‌شود: $\{HTH, HHH\}$.
پیشامد بیش از سه شیر می‌شود پیشامد محال یعنی مجموعه تهی، زیرا حداکثر می‌توان سه شیر مشاهده کرد.

پیشامد حداکثر سه خط می‌شود پیشامد حتمی یعنی تمام S، زیرا در این آزمایش تصادفی، مشاهده هیچ یا یک یا دو یا سه خط قطعی است.

۴.۱.۲ زیر پیشامد

اگر هر پیشامد ساده که در E است در F نیز باشد، می‌گویند E زیر پیشامد F است و می‌نویسند $E \subset F$. واضح است که رخ دادن E باعث رخ دادن F می‌شود ولی عکس این موضوع همواره درست نیست. در مثال ۳، پیشامد کارت سفید زیر پیشامد کارت کوچکتر از ۵ است، زیرا

$$\text{پیشامد مشاهدهٔ کارت کوچکتر از ۵} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

$$\text{پیشامد مشاهدهٔ کارت سفید} = \{۱, ۲\}$$

۵.۱.۲ پیشامدهای برابر

اگر E زیر پیشامد F و F زیر پیشامد E باشد، می‌گویند E و F برابرند و می‌نویسند: $E = F$. در مثال ۳ پیشامد کارت سفید و پیشامد کارت کوچکتر از سه برابرند، زیرا هر دو می‌شوند $\{۱, ۲\}$.

۶.۱.۲ اعمال مجموعه‌ای روی پیشامدها

اعمال مجموعه‌ای که روی پیشامدها می‌توان انجام داد، درست مانند اعمال روی مجموعه‌ها می‌باشند. اینک آنها را شرح می‌دهیم.

(۱) اجتماع دو پیشامد E و F

پیشامدی است که از تمام پیشامدهای ساده که در E یا F یا هر دو باشند تشکیل می‌شود و آنرا با $E \cup F$ نشان داده، پیشامد E یا F می‌نامند. این پیشامد موقعی رخ می‌دهد که لااقل یکی از دو پیشامد E و F رخ دهند.

(۲) اشتراک دو پیشامد E و F

پیشامدی که از تمام پیشامدهای ساده که هم در E و هم در F باشند، تشکیل می‌شود و آنرا با $E \cap F$ نشان داده، پیشامد E و F می‌نامند. این پیشامد موقعی رخ می‌دهد که E و F هر دو با هم رخ دهند.

اگر $E \cap F = \varnothing$، دو پیشامد E و F را جدا می‌نامند و در این حال رخ دادن هر دو با هم محال است و معمولاً می‌گویند E و F ناسازگارند.

(۳) تفاضل پیشامد E از پیشامد F

پیشامدی است که از تمام پیشامدهای ساده که در F بوده ولی در E نباشند تشکیل می‌شود، و آنرا با $F-E$ نشان داده، پیشامد F نه E می‌نامند.

اگر E زیر پیشامد F باشد، $F-E$ را یک تفاضل واقعی می‌نامند، زیرا F تمام E را در بردارد.

(۴) متمم پیشامد E

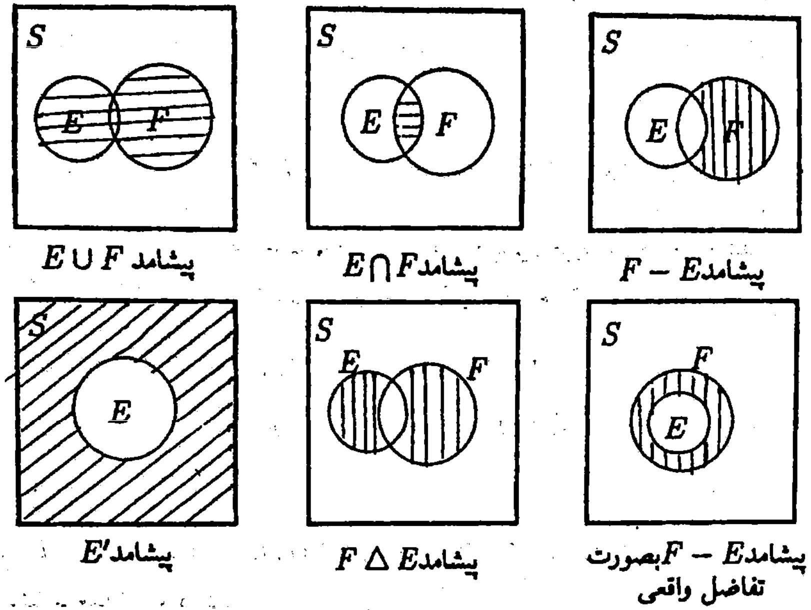
تفاضل پیشامد E از تمام فضای نمونه، یعنی $S-E$ را متمم E می‌گویند، و آنرا با E' نشان داده، پیشامد نه E می‌نامند. واضح است که

$$E \cup E' = S \quad , \quad E \cap E' = \varnothing$$

(۵) تفاضل متقارن دو پیشامد E و F

پیشامدی است که از تمام پیشامدهای ساده که یا در E یا در F ولی نه در هر دو باشند تشکیل می‌شود و آنرا با $E \Delta F$ نشان می‌دهند و پیشامد یا E یا F می‌نامند. واضح است که $E \Delta F$ و $F \Delta E$ با هم برابرند و از اینرو کلمه متقارن را به کار می‌بریم.

به کمک نگاره ۱، که نمودارهای ون نامیده می‌شوند، می‌توان اعمال مجموعه‌ای روی پیشامدها را نشان داد. در این شکل فضای نمونه را با یک مستطیل، پیشامدهای E و F را با دو دایره، و پیشامد موردنظر را به وسیله هاشور مشخص کرده‌ایم.



نگاره ۱ نمودارهای ون

مثال ۵ در مثال ۳ فرض می‌کنیم E پیشامد کارت بزرگتر از یک و F پیشامد کارت کوچکتر از پنج باشد، یعنی $E = \{۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ و $F = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$. اینک داریم:

اجتماع E و F می‌شود $E \cup F = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$

اشتراک E و F می‌شود $E \cap F = \{۲, ۳, ۴\}$

متمم E می‌شود $E' = \{۱\}$

تفاضل E از F می‌شود $F - E = \{۱\}$

تفاضل F از E می‌شود $E - F = \{۵, ۶, ۷\}$

تفاضل متقارن E و F می‌شود $E \Delta F = \{۱, ۵, ۶, ۷\}$

ملاحظه کنید که در این مثال، پیشامد کارت سفید یعنی $\{۱, ۲\}$ پیشامد کارت قرمز یعنی $\{۳, ۴, ۵\}$ جدا هستند. به عبارت دیگر کارتی را که بیرون می‌آوریم نمی‌تواند هم سفید و هم قرمز باشد. ولی پیشامد کارت فرد و پیشامد کارت مضرب سه، یعنی $\{۱, ۳, ۵, ۷\}$ و $\{۳, ۶\}$ جدا نیستند و با بیرون آمدن کارت شماره سه، هر دو پیشامد با هم رخ می‌دهند.

مثال ۶ یک زن و شوهر جوان آرزو دارند که در آیند صاحب سه فرزند شوند، آنها فرض می‌کنند صاحب فرزندان دوقلو یا چند قلو نشوند. اگر پسر و دختر را به ترتیب با B و G نشان دهیم فضای نمونه می‌شود

$$S=\{BBB,BBG,BGB,GBB,BGG,GBG,GGB,GGG\}$$

به عنوان مثال منظور از BBG این است که فرزند اول و دوم پسر و فرزند سوم دختر باشد.
فرض می‌کنیم E پیشامد داشتن فرزندان پسر و دختر و F پیشامد حداقل دو پسر باشد، یعنی

$$E=\{BGG,GBG,GGB,BBG,BGB,GBB\}$$

$$F=\{BBG,GBB,BGB,BBB\}$$

اینک داریم:

اجتماع E و F می‌شود $E\cup F=\{BBB,BBG,GBB,BGB,BGG,GBG,GGB\}$ یعنی پیشامد حداکثر دو دختر.

اشتراک E و F می‌شود $E\cap F=\{BBG,GBB,BGB\}$، یعنی پیشامد درست دو پسر.

متمم E می‌شود $E'=\{BBB,GGG\}$، یعنی پیشامد فرزندان همجنس.

تفاضل E از F می‌شود $F-E=\{BBB\}$، یعنی پیشامد سه پسر.

تفاضل متقارن E و F می‌شود $E\Delta F=\{BBB,BGG,GBG,GGB\}$ یعنی پیشامد نداشتن درست دو پسر.

۷.۱.۲ فضای نمونه با پایان و بی پایان

اگر تعداد اعضای فضای نمونه یک عدد مثبت باشد، آن را فضای نمونه با پایان و در غیر این صورت آن را فضای نمونه بی‌پایان می‌نامند. در تمام مثالهای بالا فضای نمونه با پایان است. مثلاً در مثال ۴ فضای نمونه دارای ۸ عضو است. برای اینکه منظور از فضای نمونه بی‌پایان روشن شود به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۷ در یک آزمایش تصادفی، بازی شیر و خط را آنقدر ادامه می‌دهیم تا برای نخستین بار شیر بیاید. مثلاً اگر چهار بار اول خط و بار پنجم شیر بیاید، نتیجه آزمایش می‌شود $TTTTH$. فرض کنید اینگونه دنباله‌ها موضوع مورد علاقه باشد. بنابراین فضای نمونه می‌شود

$$S=\{H,TH,TTH,\dots\}$$

که یک مجموعه بی‌پایان است. در اینجا مجموعهٔ S را که با مجموعهٔ اعداد طبیعی تناظر یک به یک دارد، از این پس مجموعه شمارش‌پذیر می‌نامیم.

در این مثال، پیشامد زوج بودن تعداد بازیها می‌شود $\{TH,TTTH,\dots\}$ و پیشامد حداکثر پنج بازی می‌شود $\{H,TH,TTH,TTTH,TTTTH\}$ ملاحظه می‌شود که پیشامد اول یک زیر مجموعه شمارش‌پذیر و پیشامد دوم یک زیر مجموعه باپایان از S می‌باشد.

۸.۱.۲ تمرین بخش یک

۱. کتابی دارای ۵۰ صفحه به رنگ سفید، ۳۰ صفحه به رنگ سبز و ۲۰ صفحه به رنگ قرمز است. یک صفحه از کتاب را چشم بسته انتخاب می‌کنیم. فضای نمونه را برحسب موضوع مورد علاقه تعیین کنید.

۲. یک سکه ۵ ریالی و یک سکه ۱۰ ریالی را با هم به تصادف در یک سینی می‌اندازیم. برحسب موضوع مورد علاقه، فضای نمونه را تعیین کنید. {HH, TT, HT, TH}

۳. دوستی قرار است به تصادف بین ساعت یک و دو بعدازظهر در پارک شهر شما را ملاقات نماید. فضای نمونه‌رابرحسب موضوع مورد علاقه تعیین کنید. آیا این فضا با پایان است یا بی‌پایان؟

۴. دو تاس را با هم به تصادف می‌ریزیم. فضای نمونه را برحسب موضوع مورد علاقه تعیین کنید.

۵. در اطاقی دو صندلی به شماره‌های سفید ۱ و ۲ و سه صندلی به شماره‌های سبز ۳ و ۴ و ۵، و پنج صندلی به شماره‌های قرمز ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ قرار دارند. تمام صندلیها یکسان و همرنگ می‌باشند. شخصی به تصادف روی یکی از این صندلیها می‌نشیند. فرض کنید E پیشامد سبز بودن، F پیشامد مضرب پنج بودن، و G پیشامد زوج بودن شماره صندلی این شخص باشد. پیشامدهای زیر را مشخص کنید:

$$E,F,E\cup F,E\cap F,F-E,E\Delta F,E\cap G$$
$$F\cup G,E'\cup F',E'\cap F',E'\Delta F',F'-E'$$

۶. فرض کنید E، F و G سه پیشامد در یک آزمایش باشند. پیشامد اینکه:

الف - فقط E رخ دهد

ب - حداقل دو تا از این سه پیشامد رخ دهند

ج - درست دو تا از این سه پیشامد رخ دهند

را برحسب این سه پیشامد یا متممهای آنها بنویسید.

۷. در آزمایشی بازی شیر و خط را چهار بار تکرار می‌کنیم. فرض کنید E پیشامد شیر در بار اول و آخر و F پیشامد شیر در بار دوم و سوم باشد. پیشامدهای زیر را مشخص کنید:

$$E\ ,\ F\ ,\ E\cup F\ ,\ F\cap F\ ,\ F-E\ ,\ E\Delta F$$

۸. ثابت کنید برای هر دو مجموعه E و F داریم:

$$(E\cap F)'=E'\cup F'\ ,\ \ (E\cup F)'=E'\cap F'$$

این قوانین را که به قوانین دمرگان معروف‌اند به صورت پیشامد توجیه کنید و آنها را به بیش از دو پیشامد تعمیم دهید.

۹. ثابت کنید:

$$(E\cup F)-F=E\cap F'\ ,\ E\Delta F=(E-F)\cup(F-E)$$

۱۰. کدامیک از روابط زیر درست است؟

الف) $(E\cap F)\cup G=(E\cup G)\cap(F\cup G)$

ب) $(F-E)\cup G=(F\cup G)-(E\cup G)$

ج) $(F-E)\cap G=(F\cap G)-(E\cap G)$

د) $(F\Delta E)\cap G=(F\cap G)\Delta(E\cap G)$

۲.۲ تعبیرهای مختلف احتمال

نوشته‌ها و زبان عادی پر از جمله‌های احتمال می‌رود، ممکن است، حدس می‌زنم، اگر شانس بزند، خیال می‌کنم، و مانند آنها هستند. تمام این جمله‌ها همراه با عدم یقین، بی‌اطلاعی، و تردید می‌باشند. همگی متضمن یک مفهوم پردردسر به نام احتمال هستند که اگر آن را به نحوی مطلوب تعبیر کنیم و اندازه‌گیری نمائیم، تصمیم‌گیری و حقیقت‌یابی آسانتر می‌شود.

۱.۲.۲ احتمال چیست؟

در پاسخ به این پرسش گفتگوهای فلسفی سالها است که ادامه دارد و برای همیشه ادامه خواهد داشت. تنها برای یک ریاضیدان که به مفهوم فلسفی احتمال کاری ندارد و می‌خواهد در چارچوبی محدود به اصول و قضایا تحقیق کند، مشکلی ایجاد نمی‌شود و گفتگوهای فلسفی چندان در کار او تاثیر ندارند. با این حال پایه‌های فلسفی هر موضوعی می‌توانند دیدها را تغییر دهند و موجب رشد تئوریهای جدید شوند. در مورد احتمال هم این مطلب صدق می‌کند.

با وجود اینکه فلاسفه و آماردانان درباره مفهوم فلسفی احتمال وحدت نظر دارند و اغلب یکدیگر را به باد انتقال می‌گیرند، تعبیرهای زیر در عمل مفید هستند و با اسلوب ریاضی برخوردی ندارند.

الف – تعبیر احتمال به هر طریق همشانسی

هرگاه فضای نمونه یک آزمایش از n پیشامد ساده تشکیل شده باشد که از نظر رخ دادن هیچکدام بر دیگر برتری نداشته باشد، می‌گوئیم این پیشامدها همشانس هستند. اگر کل احتمال را یک بگیریم، احتمال رخ دادن هر یک از این پیشامدهای ساده می‌شود $\frac{1}{n}$.

مثلاً در بازی شیر و خط اگر سکه کاملاً معمولی و سالم باشد، پیشامدهای H و T را می‌توان همشانس تصور کرد و احتمال رخ دادن هر کدام $\frac{1}{2}$ است. چنین سکه‌ای را از این پس سکه نااریب می‌گوئیم، و سکه‌ای را که فاقد خاصیت همشانسی باشد سکه اریب می‌نامیم.

از نظر تاریخی تعبیر احتمال به طریق همشانسی قدیمی‌ترین تعریف برای احتمال است و در بازیهای قمار به خصوص بازی با تاس تخته و با ورق، مدتها نظر بازیگران و مشاوران ریاضی آنها را در قرن هفدهم به خود جلب کرده بود. لاپلاس در اوائل قرن هیجده، رساله تاریخی خود را درباره تئوری احتمال، با این تعبیر که مفهوم کلاسیک احتمال نامیده می‌شود، پایه‌گذاری کرد.

به این تعبیر احتمال، دو انتقاد عمده وارد می‌باشد. نخست اینکه مفهوم همشانسی، به فرض اینکه شرائط آن برقرار باشد، با مفهوم احتمال که مورد تعبیر می‌باشد ارتباط دارد، مثلاً وقتی در بازی شیر و خط می‌گوئیم H و T همشانس هستند، در حقیقت می‌گوئیم احتمال‌های مساوی دارند. انتقاد دیگر این است که اگر پیشامدها همشانس نباشند، با این تعبیر نمی‌توانیم به آنها احتمال نسبت دهیم. مثلاً وقتی که می‌خواهیم بچه‌دار شدن یک زن و شوهر جوان را پیش‌بینی کنیم، پیش‌آمدهای همشانس بی‌مورد است و باید تعبیر دیگری برای احتمال در نظر گرفت.

جدول ۱ فراوانی و فراوانی نسبی در ۱۰۰ بازی شیر و خط

تعداد آزمایشها	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
فراوانی H	۶	۸	۱۳	۱۸	۲۴
فراوانی نسبی H	۰/۶۰	۰/۴۰	۰/۴۳	۰/۴۵	۰/۴۸
تعداد آزمایشها	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
فراوانی H	۲۷	۳۸	۴۳	۴۴	۵۲
فراوانی نسبی H	۰/۴۵	۰/۵۴	۰/۵۳	۰/۴۸	۰/۵۲

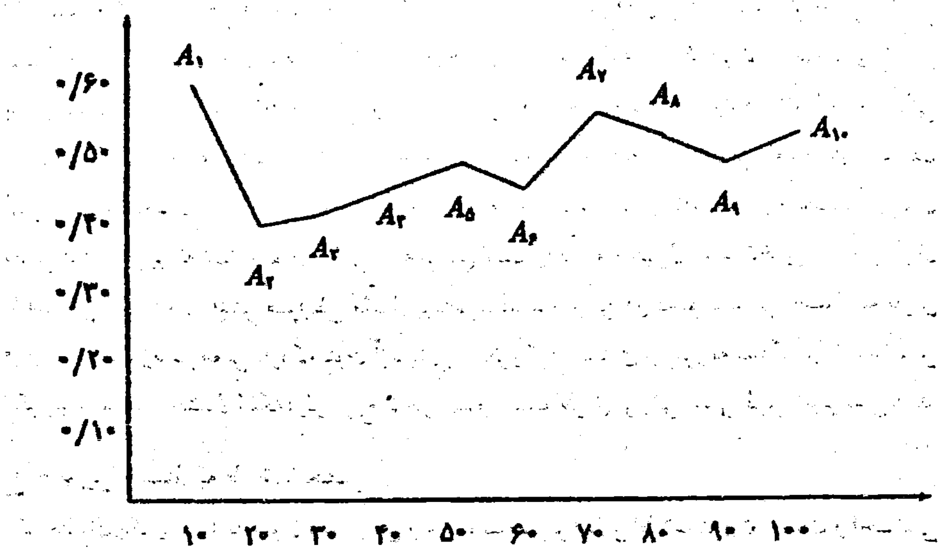
ب – تعبیر احتمال به طریق فراوانی نسبی

آزمایشی را تحت شرائط یکسان n بار تکرار می‌کنیم. فرض کنید r بار پیشامد E در این n آزمایش رخ دهد. می‌گوئیم r فراوانی و کسر $\frac{r}{n}$ فراوانی نسبی پیشامد E در این n آزمایش است. حال اگر n را بزرگ کنیم، r هم بزرگ شده یا ثابت می‌ماند و این باعث می‌گردد که $\frac{r}{n}$ دستخوش نوسان شود. با این حال تجربه نشان می‌دهد که کسر $\frac{r}{n}$، با وجود همهٔ نوسانها، سرانجام به سمت عدد ثابتی، که آن را احتمال پیشامد E به طریق فراوانی نسبی می‌نامند، گرایش پیدا می‌کند.

مثلاً اگر در بازی شیر و خط با یک سکه نااریب بخواهیم احتمال پیشامد H را به طریق فراوانی نسبی تعیین کنیم، این بازی را ۱۰ بار، ۲۰ بار،... و بالاخره ۱۰۰ بار انجام می‌دهیم. نتیجه مشاهدات را به کمک جدول ۱ روی صفحه محورهای مختصات با نقاط $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ نشان می‌دهیم. طول هر یک از این نقاط در نگاره ۲، نماینده تعداد آزمایشها و عرض آن نماینده فراوانی نسبی است.

البته در نگاره ۲ تعداد آزمایشها چندان زیاد نیست که بتوان وضع نهائی فراوانی نسبی را مشاهده نمود، ولی نحوه نوسان نقاط یاد شده اطراف خطی که عرضش ۰/۵ است نشان می‌دهد که فراوانی نسبی با زیاد شدن تعداد آزمایشها سرانجام به ۰/۵ که آن را احتمال پیشامد شیر می‌نامیم گرایش پیدا می‌کند.

تعبیر احتمال به طریق فراوانی نسبی، که از لحاظ قدمت به ارسطو نسبت داده می‌شود، عملاً از اواسط قرن نوزدهم متداول گردید. احتمال با این تعبیر طرفداران زیادی دارد، زیرا این مفهوم در زبان عادی مردم هم رایج است. مثلاً وقتی می‌گوئیم احتمال موفقیت در این مسابقه برای فارغ التحصیلان دبیرستانها ۰/۸۰ است، منظور این است که ۸۰ درصد موفق می‌شوند. این تعبیر به سبب خواص عددی فراوانی نسبی، با اسلوب ریاضی که بعداً مطالعه خواهیم کرد کاملاً سازگار است. از طرفی چون در علوم



نگاره ۲ توجیه هندسی فراوانی نسبی شیرها در ۱۰۰ بازی شیر و خط

تجربی و اجتماعی با آزمایشهای همانند و مکرر سروکار داریم، تعبیر احتمال به طریق فراوانی نسبی وسیله تفسیر و توجیه پدیده‌ها می‌باشد. به عنوان مثال اگر ۹۰ درصد نوزادان در اثر خوردن یک نوع ویتامین طبی دچار کم اشتهائی شوند، پزشکان اطفال ممکن است استعمال آن را منع نمایند. موضوع همشانسی را هم می‌توان به کمک فراوانی نسبی احساس کرد. مثلاً وقتی می‌گوئیم در بازی شیر و خط با یک سکه نااریب، پیشامد H و پیشامد T همشانس هستند منظور این است که اگر بازی را زیاد تکرار کنیم، فراوانی نسبی H و T انتظار می‌رود تقریباً با هم برابر شوند.

ازنظر تاریخی کریش، ریاضیدان انگلیسی، در زندان نازیها در جنگ دوم جهانی سکه‌ای را ۱۰۰۰۰ بار پرتاب کرد و ۵۰۶۷ مرتبه شیر دید. از این راه نشان داد که فراوانی نسبی عدد ۰/۵۰۶۷ و احتمال شیرآمدن تقریباً این عدد است.

چون آزمایشهای مکرر بر هم اثر ندارند و تحت شرائط یکسان انجام می‌گیرند، بنابراین آزمایش کننده نمی‌تواند در این آزمایشها، که تعیین کننده فراوانی نسبی می‌باشد، بر اساس اطلاعات شخصی اعمال نظر یا اظهار عقیده نماید. از اینرو تعبیر احتمال به طریق فراوانی نسبی را تعبیر عینی هم می‌نامند. تعبیر احتمال به طریق فراوانی نسبی، با همهٔ محاسنی که دارد، خالی از عیب نمی‌باشد.

نخست اینکه انجام آزمایشها تحت شرائط یکسان و تشخیص دقیق این شرائط، اگر ظاهراً مشکل نباشد، در عمل پر از ابهام و اشکال است. مثلاً هیچکس نمی‌تواند ادعا کند که می‌تواند صدبازی شیر و خط را تحت شرائط یکسان انجام دهد، زیرا هزاران عامل ناشناخته چون فشار هوا، قدرت بازو، خستگی و غیره در کار است. حتی اگر این کار را با آخرین دستگاه‌های پیشرفته الکترونیکی انجام دهیم، باز هم کنترل شرایط یکسان مقدور نخواهد بود. دوم اینکه تعداد آزمایشهایی را که، باید زیاد باشد، نمی‌توان قطعی کرد. بنابراین نه تنها احتمال واقعی را که عددی است ایده‌آل و مجهول، بلکه تخمین معقولی از آن را هم نمی‌توان بدون داشتن ضوابطی مقبول پیدا کرد. گذشته از این دو کمبود، تعبیر احتمال به طریق فراوانی نسبی، زمانی معنی دارد که بتوان آزمایشی را تکرار کرد. بسیاری از امور به سادگی و یا اصلاً قابل تکرارنیستند. مثلاًاحتمال اینکه‌درکره‌مریخ‌موجودزنده‌باشد،به طریق فراوانی نسبی قابل تعبیر نمی‌باشد.

ج – تعبیر احتمال به طریق شخصی

اگر احتمال یک پیشامد به عنوان میزان یقین و عقیده شخص بر اساس اطلاعات و تجربیات و احساسی که نسبت به وقوع آن دارد تلقی گردد، می‌گویند احتمال به طریق شخصی تعبیر شده است. از اینرو تعبیر احتمال به طریق شخصی را تعبیر ذهنی، در برابر تعبیر عینی که قبلاً شرح دادیم، می‌نامند. وقتی پزشک خانوادگی یک بیمار می‌گوید احتمال این که بیمارش زنده بماند زیاد است، چنین اظهاری صرفاً حاکی از اطلاعات و عقیده این پزشک می‌باشد. ممکن است نظر یک فرد غیر متخصص، یا حتی پزشک دیگر، در این باره چنین نباشد.

مشکلی که با این تعبیر پیش می‌آید این است که احتمال اغلب جنبه کیفی و احساسی دارد. مثلاً وقتی می‌گوئیم احتمال می‌رود فردا ابری باشد، با این جمله نمی‌توان میزان و مقدار احتمال را تعیین کرد. برای پایه‌ریزی تئوری احتمال لازم است این جنبه کیفی را به نحوی به جنبه کمی، که اندازه‌گیری در آن مطرح باشد، تبدیل کرد. بدین منظور عده‌ای احتمال شخصی را با شرطبندی پولی، که کاری است بر خلاف موازین اخلاقی، توجیه کرده‌اند. تنها با ذکر یک مثال به شرح این توجیه می‌پردازیم.

فرض کنید E پیشامد آفتابی بودن فردا و متمم آن، یعنی E'، پیشامد بارانی بودن فردا باشد. وقتی می‌گوئیم احتمال E برابر ۰/۶ است، این احتمال را به طریق شخصی بدین نحو توجیه می‌کنیم: میزان یقین، در مورد آفتابی بودن به قدری است که حاضریم ۶ به ۴، بر سر آفتابی بودن، با شما شرطبندی کنیم. به سخنی دیگر، اگر هوا بارانی باشد به شما ۶ تومان می‌بازیم و اگر هوا آفتابی باشد از شما ۴ تومان می‌بریم. برای حفظ تقارن، شما هم که طرف مقابل می‌باشید ۴ به ۶، بر سر بارانی بودن، این شرطبندی را می‌پذیرید. می‌گویند اینگونه شرطبندی منصفانه است زیرا سود متوسط هر طرف می‌شود

$$(0/6)(4)+(0/4)-(-6)=(0/6)(-4)+(0/4)(6)=0$$

به طور کلی هرگاه در یک شرطبندی منصفانه، بر سر پیشامد E، حاضر باشیم a تومان به b تومان با شما شرطبندی کنیم، $p=\frac{a}{(a+b)}$ را احتمال از نظر ما یا احتمال شخصی می‌نامند. اغلب می‌گویند امتیاز یا بخت پولی به نفع E، در این شرطبندی a می‌باشد. کسر $\frac{p}{(1-p)}=\frac{a}{b}$ را نسبت بخت پولی به نفع E می‌خوانند.

در این کتاب ما به تعریف ریاضی احتمال، که دور از گفتگو است، بسنده می‌کنیم. البته در ضمن مثالها، جسته و گریخته، به تعبیرهای بالا اشاره خواهیم کرد.

تعریف ریاضی احتمال را نخست در مورد فضای نمونه با پایان، با زبانی ساده شرح می‌دهیم تا این ایده‌ها به قدر کافی روشن شوند. بعد از اینکه خواننده آمادگی پیدا کرد، احتمال در یک فضای نمونه دلخواه را، با روش اصل سازی، که روشی متداول در ریاضی نوین است، از نظر می‌گذرانیم.

۲.۲.۲ تمرین بخش دو

۱. در ظرفی چهار مهره یکسان به رنگهای سفید، سبز، قرمز، و سیاه موجود است. یکی از مهره‌ها را به تصادف از این ظرف بیرون می‌آوریم. احتمال پیشامد سفید بودن این مهره $\frac{1}{4}$ است. منظور از این عدد را به راه‌های گوناگون شرح دهید.

۲. دوتاس را با هم می‌ریزیم. اگر موضوع مورد علاقه خالهای هر تاس باشد، به هر پیشامد ساده چقدر احتمال نسبت می‌دهید؟ اگر احتمال پیشامد «جفت شش» $\frac{1}{36}$ باشد منظور از این عدد را به راه‌های گوناگون شرح دهید.

۳. یک بسته کارت ۵۲ تائی، به شماره ۱ تا ۵۲، را به خوبی مخلوط می‌کنیم. سپس یک کارت به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه کارت بیرون آمده شماره ۱۰ داشته باشد چیست؟ اگر این کار را ۱۰۴۰ بار تکرار کنند انتظار دارید چندبار چنین کارتی بیرون آید؟

۴. یک آزمایش تصادفی را تحت شرائط یکسان n بار مستقلاً تکرار می‌کنیم. فرض کنید $R(E)$ فراوانی نسبی پیشامد دلخواه E در این آزمایش باشد. ثابت کنید که

الف – $0\leq R(E)\leq 1$

ب – $R(E')=1-R(E)$

ج - برای هر دو پیشامد جدای E و F $\qquad R(E\cup F)=R(E)+R(F)$

۵- در یک مسابقه اسب دوانی شخصی می‌گوید احتمال اینکه اسب او برنده شود $\frac{3}{4}$ می‌باشد و حاضر است با شما در یک شرط‌بندی منصفانه بر سر این پیشامد شرکت کند. منظور از این شرط‌بندی منصفانه و احتمال یاد شده را، که احتمال شخصی است، شرح دهید. اگر این شخص ۱۵۰۰ تومان به ۲۰۰۰ تومان، بر سر بردن اسبش، شرط‌بندی کند، احتمال برنده شدن اسب او را پیدا کنید.

۶- اگر احتمال "شخصی" پیشامد E برابر ۰/۸۷۵ باشد، شرط‌بندی بر سر E چگونه است؟

۳.۲ مدل احتمال با فضای نمونه با پایان

یک مدل احتمال با فضای نمونه باپایان عبارت است از:

الف - مجموعهٔ ناتهی $S=\{e_1,e_2,\dots,e_k\}$ به نام فضای نمونه یا فضای پیشامدهای ساده.

ب - عددهای مثبت $p_1,p_2,\dots,p_k$ با مجموع یک، به طوری که هر p_i با e_i متناظر باشد.

عدد مثبت p_i را احتمال پیشامد ساده e_i می‌نامیم و می‌نویسیم $P(e_i)=p_i$.

اگر تمام احتمال را به عنوان یک واحد جرم که میان اعضای مجموعهٔ S توزیع شده است تصور نمائیم، می‌توان p_i را به عنوان جرم e_i تعبیر کرد.

۱.۳.۲ احتمال هر پیشامد

اگر فضای نمونه باپایان باشد، هر پیشامد زیر مجموعه‌ای از S و هر زیر مجموعه S یک پیشامد می‌باشد. احتمال پیشامد E برابر است با مجموع احتمالهای پیشامدهای ساده‌ای که E را تشکیل می‌دهند. مثلاً اگر $E=\{e_1,e_4,e_5\}$، آنگاه $P(E)=p_1+p_4+p_5$، که می‌توان آن را به جرم E تعبیر کرد. واضح است که $P(\varnothing)=0$ و $P(S)=1$.

۲.۳.۲ مدل احتمال یکنواخت

اگر تمام پیشامدهای ساده دارای احتمالهای مساوی باشند، یعنی

$$p_1=p_2=\dots=p_k=\frac{1}{k}$$

می‌گوئیم مدل احتمال یکنواخت است. هرگاه در مدل یکنواخت پیشامد E از m پیشامد ساده و فضای نمونه از k پیشامد ساده تشکیل شده باشند، داریم

$$P(E)=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\dots+\frac{1}{k}=\frac{m}{k}=\frac{\text{تعداد پیشامدهای ساده در } E}{\text{تعداد پیشامدهای ساده در } S}$$

به سخنی دیگر، در یک مدل احتمال یکنواخت، احتمال E برابر است با نسبت تمام حالتهای مساعد برای رخ دادن E به تمام حالتهای ممکن.

۳.۳.۲ چند فرمول برای محاسبه احتمال

اگر در نمودارهای ون (نگاره ۱) مساحت هر مجموعه را به عنوان احتمال پیشامد نظیر آن تلقی کنیم، با محاسبه قسمتهای هاشوردار معلوم می‌شود که:

$$P(F-E)=P(F)-P(E\cap F)$$
$$P(E')=1-P(E)$$
$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$$

به ویژه اگر $E\subset F$، آنگاه

$$P(F-E)=P(F)-P(E)$$

و اگر $E\cap F=\varnothing$، آنگاه

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)$$

اثبات ریاضی فرمولهای بالا را در حالت کلی درآینده خواهیم دید.

مثال ۸ در ظرفی دو مهره سفید، سه مهره سبز، و دو مهره قرمز داریم. مهره‌ها را، که گذشته از رنگ کاملاً یکسان هستند، به خوبی مخلوط می‌کنیم و سپس یکی از آنها را چشم بسته بیرون می‌آوریم. فرض کنید در این آزمایش موضوع مورد علاقه رنگ مهره باشد. اگر مهره سفید و سبز و قرمز را به ترتیب با W و G و R نشان دهیم، فضای نمونه می‌شود $S=\{W,G,R\}$. با توجه به تعداد مهره‌ها و رنگ آنها در این آزمایش داریم:

$$P(R)=\frac{2}{7},\quad P(G)=\frac{3}{7},\quad P(W)=\frac{2}{7}$$

ملاحظه می‌شود که مدل احتمال یکنواخت نیست.

حال اگر هویت مهره‌های همرنگ را مشخص کنیم، یعنی، دو مهره سفید را با W_1، W_2، سه مهره سبز را با G_1, G_2, G_3، و دو مهره قرمز را با R_1، R_2 نشان دهیم، آنگاه فضای نمونه با توجه به رنگ و هویت مهره‌ها، به صورت:

$$S=\{W_1,W_2,G_1,G_2,G_3,R_1,R_2\}$$

در می‌آید. اینک نظر به همشانسی پیشامدهای ساده، می‌توان به هر پیشامد ساده $\frac{1}{7}$ احتمال نسبت داد و مدل احتمال را یکنواخت تصور کرد.

با این مدل یکنواخت می‌توان احتمال را در مدل قبلی توجیه کرد. مثلاً پیشامد مهره سبز در این مدل یکنواخت می‌شود $G=\{G_1,G_2,G_3\}$ با احتمال $P(G)=\frac{3}{7}$. توجه کنید که G یک پیشامد ساده در مدل اول، اما یک پیشامد مرکب در مدل دوم است.

مثال ۹ در بازی شیر و خط، سکه نااریبی را دوبار مستقلاً یعنی بدون اینکه بار اول در بار دوم تاثیر کند، می‌اندازیم. در این آزمایش فضای نمونه می‌شود

$$S=\{TT,HT,TH,HH\}$$

که در آن مثلاً منظور از پیشامد ساده HT این است که سکه بار اول شیر و بار دوم خط بیابد. با توجه به نااریب بودن سکه و مستقل بودن بازیها، پیشامدهای ساده همشانس بوده به هر کدام احتمال $\frac{1}{4}$ تعلق می‌گیرد، یعنی، مدل احتمال یکنواخت است.

مثال ۱۰ در یک آزمایش تصادفی سکه نااریبی را یک بار می‌اندازیم، اگر شیر بیاید آزمایش را پایان می‌دهیم، و گرنه سکه را یک بار دیگر انداخته آنگاه آزمایش را پایان می‌دهیم. در این آزمایش فضای نمونه می‌شود $S=\{H,TH,TT\}$، با احتمالهای $P(H)=\frac{1}{2}$، $P(TH)=\frac{1}{4}$ و $P(TT)=\frac{1}{4}$. ملاحظه می‌شود که مدل احتمال یکنواخت نیست.

۴.۳.۲ روش تعیین مدل احتمال

بر خلاف مثالهای بالا که همگی ساده و مصنوعی بودند، در عمل با پدیده‌هائی روبرو می‌شویم که مدل احتمال آنها را نمی‌توان به سادگی تعیین کرد. بنابراین پرسشهای زیر معقول و منطقی می‌باشند:
چگونه می‌توان مدل احتمال یک آزمایش را پیدا کرد؟ چگونه می‌توان قضاوت کرد که فلان مدل احتمال برای فلان آزمایش الگوئی برازنده است؟ آیا فایده مدل احتمال چیست؟

جدول ۲ فراوانی و فراوانی نسبی رنگ چشم در نمونه ۵۰۰۰ نفری

رنگ چشم	آبی	قهوه‌ای	سبز	سیاه	جمع کل
فراوانی	۹۹۹	۲۰۰۰	۵۰۱	۱۵۰۰	۵۰۰۰
فراوانی نسبی	۰/۱۹۹۸	۰/۴۰۰۰	۰/۱۰۰۲	۰/۳۰۰۰	۱/۰۰۰۰

پاسخ به تمام این پرسشها موضوع آمار و احتمال است. برای اینکه مطلب روشن شود، اینک به مثال زیر می‌پردازیم.

مثال ۱۱ مردم یک شهر بزرگ دارای چشمان آبی، قهوه‌ای، سبز و سیاه می‌باشند. یک نفر را به تصادف در نظر گرفته فرض می‌کنیم موضوع مورد علاقه، رنگ چشم باشد. در این آزمایش فضای نمونه می‌شود

S = { آبی، قهوه‌ای، سبز، سیاه }

برای اینکه احتمال پیشامدهای ساده را پیدا کنیم به آمارگیری می‌پردازیم. مثلاً یک نمونه تصادفی ۵۰۰۰ تائی از مردم شهر را در نظر می‌گیریم و رنگ چشمان آنها را صورت‌برداری می‌کنیم. فرض کنید جدول ۲ را به دست آید.

اینک با استفاده از تعبیر احتمال به طریق فراوانی نسبی، از جدول بالا تقریباً داریم:

P(سیاه) = ۰/۳ ، P(سبز) = ۰/۱ ، P(قهوه‌ای) = ۰/۴ ، P(آبی) = ۰/۲

پس مدل احتمال تقریبی رنگ چشم مردم شهر را به کمک نمونه‌برداری به دست آوردیم. طبیعی است که هر قدر نمونه بزرگتر باشد، این مدل احتمال تقریبی، بهتر خواهد بود. به خصوص اگر از رنگ چشم تمام مردم شهر جداول فراوانی بسازیم، مدل احتمال صددرصد دقیق خواهد بود، ولی عملاً این کار مقدور نیست.

اینک با داشتن این مدل تقریبی، به این پرسش پاسخ می‌دهیم: اگر جمعیت شهر در حدود ۴۰۰۳۰۰ نفر باشد، تقریباً چند نفر دارای چشمان آبی هستند؟

احتمال پیشامد چشم آبی ۰/۲ است. بنابراین اگر احمال را به طریق فراوانی نسبی تعبیر کنیم، پاسخ تقریبی می‌شود:

۸۰۰۶۰ = ۴۰۰۳۰۰ × ۰/۲

۵.۳.۲ محاسبه احتمال در مدل یکنواخت

همانطوری که قبلاً اشاره شد، هرگاه در مدل یکنواخت پیشامد E از m پیشامد ساده و فضای نمونه از k پیشامد ساده تشکیل شده باشند، $P(E)=\frac{m}{k}$. بنابراین محاسبه احتمال E بستگی به محاسبه m و k دارد. در بعضی موارد مستقیماً با نوشتن تمام اعضای مجموعه‌های E و S می‌توان شمارش را به سادگی انجام داد. ولی گاهی این کار مقدور نیست. برای اینکه مطلب روشن شود به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۲ در ظرفی دو مهره سفید W_1 و W_2 و سه مهره سیاه B_1، B_2 و B_3 داریم که همگی صرفنظر از رنگ و هویت یکسان هستند. مهره‌ها را به خوبی مخلوط کرده به تصادف دو مهره با هم از ظرف بیرون می‌آوریم. فضای نمونه با توجه به رنگ و هویت مهره‌ها می‌شود:

B_3W_1

$$S=\{W_1W_2,\ B_1B_2,\ B_1B_3,\ B_2B_3,\ B_1W_1,\ B_2W_1,\ B_1W_2,\ B_2W_2,\ B_3W_2\}$$

که دارای ده عضو است. مثلاً منظور از B_2W_1 که عین W_1B_2 می‌باشد، این است که مهره سیاه شماره دو و مهره سفید شماره یک با هم بیرون آیند.

فرض کنید که می‌خواهیم احتمال پیشامد مهره‌های همرنگ را حساب کنیم. اگر این پیشامد را E بنامیم، داریم:

$$E=\{W_1W_2, B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3\}$$

که دارای چهار عضو است. بنابراین $P(E)=\frac{4}{10}=0/4$.

حال اگر به جای دو مهره سفید و سه مهره سیاه، دویست مهره سفید و سیصد مهره سیاه در ظرف داشته باشیم، شمارش تعداد اعضای S و E، مستقیماً از راه نوشتن تمام اعضای این دو مجموعه عملاً محال است. بلکه باید چاره‌اندیشی کرد و بطور غیر مستقیم تعداد اعضای این دو مجموعه را تعیین نمود. خوشوقتانه قوانین شمارش، که در درسی بنام آنالیز ترکیبی مطرح می‌شوند، این مشکل را حل می‌کنند. نظر به اهمیت موضوع، بخش ۴ را به قوانین شمارش اختصاص داده‌ایم.

۶.۳.۲ تمرین بخش سه

۱. یک سکه نااریب را سه بار می‌اندازیم. مدل احتمال را تعیین کنید. احتمال این که شیر و خط متناوباً مشاهده شوند چقدر است؟ احتمال این که حداقل یک بار شیر مشاهده شود چقدر است؟

۲. یک تاس اریب داریم که اگر آن را به تصادف پرتاب کنیم، شانس مشاهده هر وجه آن متناسب با تعداد خالها، در آن وجه می‌باشد. مدل احتمال را برای این تاس پیدا کنید. احتمال پیشامد خال زوج چقدر است؟

۳. یک تاس را هزار بار انداخته یافته‌ها را در جدول زیر خلاصه کرده‌ایم:

خال	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فراوانی	۲۱۴	۱۵۲	۱۷۸	۱۸۸	۱۶۳	۱۰۵
فراوانی نسبی						

این جدول را تکمیل کرده مدل احتمال را برای این تاس به تقریب تعیین کنید. اگر این تاس را ۲۰۰۰ بار پرتاب کنیم، انتظار دارید چند بار خال مضرب سه دیده شود؟

۴. یک زن و شوهر جوان آرزو دارند در آینده سه فرزند داشته باشند. احتمال اینکه فرزند اول و آخر پسر باشند چقدر است؟

۵. در ظرفی دو مهره سفید و سه مهره سیاه داریم، که همگی گذشته از رنگ و هویت یکسان می‌باشند. مهره‌ها را به خوبی مخلوط می‌کنیم و به تصادف سه مهره با هم از ظرف بیرون می‌آوریم. مدل احتمال را با توجه به رنگ و هویت مهره‌ها تعیین کنید.

۶. در آزمایشی سکه نااریبی را دوبار می‌اندازیم. اگر هر دو بار شیر بیاید آزمایش را پایان می‌دهیم، و گرنه سکه را یک بار دیگر انداخته آنگاه آزمایش را پایان می‌دهیم. مدل احتمال را برای این آزمایش تعیین کنید.

۷. مستقیماً و به کمک نمودار ون $P(E\Delta F)$ را پیدا کنید.

۸. با فرض $P(E)=0/6$ ، $P(F)=0/7$ ، $S=E\cup F$ ، مطلوبست محاسبه $P(E'-F')$ ، $P(E\cap F)$ ، $P(F-E)$ ، $P(E\Delta F)$

۹. فرض کنید E و F جدا باشند و $P(E)=0/3$ و $P(F)=0/4$. مطلوبست محاسبه

$$P(E\cup F)\ ,\ P(E-F)\ ,\ P(E'-F')\ ,\ P(E\Delta F)$$

۱۰. با استفاده از فرمول $P(A\cup B)$ و قوانین شرکت‌پذیری و توزیعی یک فرمول برای $P(E\cup F\cup G)$ پیدا کنید. با نمودار ون درستی فرمول را نشان دهید.

۴.۲ قوانین شمارش

ساده‌ترین نوع محاسبه، شمارش تعداد اعضای یک مجموعه باپایان کوچک است که انسان به طور طبیعی از طریق انگشتان دست، برای اولین بار به آن توجه کرده است. با این حال اگر این مجموعهٔ باپایان خیلی پرعضو باشد، به طوری که نتوانیم یک یک اعضای آن را نشان دهیم، عمل شمارش نه تنها از عهدهٔ انسان بلکه از عهده کامپیوترهای بزرگ هم ساخته نیست. خوشوقتانه به کمک اندیشه ریاضی می‌توان فرمولهائی ابداع کرد که از دشواری کار شمارش می‌کاهند. فن پیدا کردن این فرمولها بر دو اصل بدیهی به نام اصول شمارش بنا شده است.

۱.۴.۲ اصول شمارش

فرض کنید کار A را به m طریق با نامهای $x_1, x_2, \ldots, x_m$ و کار B را به n طریق با نامهای $y_1, y_2, \ldots, y_n$ بتوان انجام داد. اصول شمارش عبارتند از:

الف - اصل جمع برای شمارش

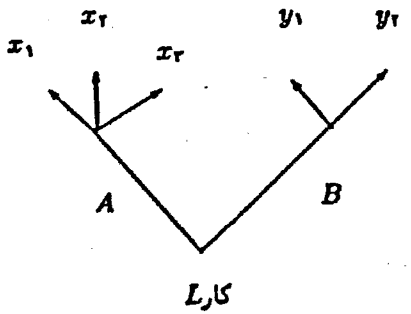
اگر انجام کار L منوط به انجام کار A یا B باشد، آنگاه کار L را می‌توان به $m+n$ طریق به نامهای $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ، $y_1, y_2, \ldots, y_n$ انجام داد.

این اصل را اصل جمع می‌گویند و در آن تکیه بر روی یا است. به زبان مجموعه‌ها اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد، آنگاه مجموعهٔ $A \cup B$، که اجتماع دو مجموعه جدای A و B است، دارای $m+n$ عضو است.

درستی این اصل را می‌توان به کمک جدول یا نمودار زیر برای $m = ۳$ و $n = ۲$ تجسم کرد.

کار L

کار A			کار B	
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2



به عنوان مثال فرض کنید رفتن از دانشکده به منزل (کار L)، با تاکسی (کار A) از سه راه یا با اتوبوس (کار B) از دو راه امکان داشته باشد. بنابراین به پنج طریق با تاکسی یا با اتوبوس می‌توان از دانشکده به منزل رفت.

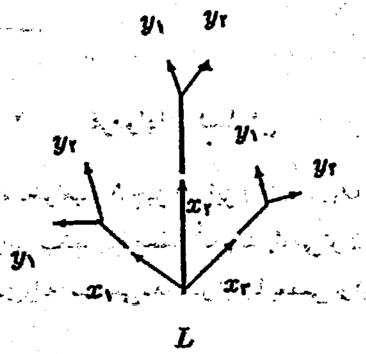
ب - اصل ضرب برای شمارش

اگر انجام کار L منوط به انجام پیاپی کار A و B باشد، آنگاه کار L را می‌توان به mn طریق به نامهای (x_1, y_1) $(x_1, y_2), \ldots, (x_m, y_n)$ انجام داد.

این اصل را اصل ضرب می‌گویند و در آن تکیه بر روی و می‌باشد. به زبان مجموعه‌ها اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد، آنگاه مجموعه $A \times B$، که حاصلضرب دکارتی دو مجموعه A و B می‌باشد، دارای mn عضو است.

درستی این اصل را می‌توان به کمک جدول یا نمودار زیر مثلاً برای $m = ۳$ و $n = ۲$ تجسم کرد.

$B \backslash A$	x_1	x_2	x_3
y_1	(x_1, y_1)	(x_2, y_1)	(x_3, y_1)
y_2	(x_1, y_2)	(x_2, y_2)	(x_3, y_2)



به عنوان مثال فرض کنید رفتن از دانشکده به منزل (کار L)، با تاکسی از دانشکده تا پارک شهر (کار A) از سه راه و با اتوبوس از پارک شهر تا منزل (کار B) از دو راه امکان داشته باشد. بنابراین به شش طریق با تاکسی و با اتوبوس می‌توان از دانشکده به منزل رفت.

این دو اصل را به جای دو کار A و B می‌توان به k کار $A_1, A_2, \ldots, A_k$ تعمیم داد.

مثال ۱۳ می‌خواهیم از پنج بازرگان، شش دبیر و چهار قاضی یک جلسه دو نفری تشکیل دهیم به طوری که اعضای جلسه دارای مشاغل مختلف باشند. جلسه را به چند طریق می‌توان تشکیل داد؟

طبق اصل دوم، این جلسه از بازرگان و دبیر به $۳۰ = ۶ \times ۵$ طریق یا از بازرگان و قاضی به $۲۰ = ۴ \times ۵$ طریق یا از دبیر و قاضی به $۲۴ = ۴ \times ۶$ طریق تشکیل می‌شود. بنابراین طبق تعمیم اصل اول، جلسه را می‌توان به $۷۴ = ۲۴ + ۲۰ + ۳۰$ طریق تشکیل داد.

مثال ۱۴ بازی شیر و خط را ده بار مستقلاً با سکه‌ای ناریب انجام می‌دهیم. فضای نمونه از چند پیشامد ساده تشکیل می‌شود؟ احتمال پیشامد یک در میان شیر و خط چقدر است؟

این ده بازی شیر و خط متناظر با ده کار $A_۱, ..., A_{۱۰}$ می‌باشند. که هر یک به دو طریق H و T انجام می‌پذیرد. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد پیشامدهای ساده در فضای پیشامدها برابر است با $۲^{۱۰}$. این پیشامدهای ساده همشانس می‌باشند و احتمال هر یک برابر است با $۲^{-۱۰}$.

پیشامد یک در میان شیر و خط، از دو پیشامد ساده که یکی با H و دیگری با T آغاز می‌شود، تشکیل می‌گردد. بنابراین احتمال آن برابر است با $۲\times۲^{-۱۰} = ۲^{-۹} = ۰/۰۰۱۹$.

مثال ۱۵ از اعضای مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ چند سه‌تائی مرتب (x,y,z) می‌توان ساخت؟

x، y و z را هرکدام به پنج طریق می‌توان برگزید. بنابراین تعداد سه‌تائی‌های مرتب می‌شود $۵\times۵\times۵ = ۱۲۵$. هر سه‌تائی مرتب را می‌توان به منزلهٔ مختصات قائم یک نقطه در فضای سه بعدی پنداشت.

۲.۴.۲ فرمولهای شمارش

هرگاه بخواهیم N چیز متمایز $O_۱, O_۲, ..., O_N$ را طبق قاعده‌ای مشخص میان چند نفر تقسیم کنیم یا آنها را مرتب نمائیم، معمولاً به چند راه می‌توان این کار را انجام داد. شمارش این راه‌های گوناگون فرمولهای مفیدی را به دست می‌دهد. در اینجا بعضی از این فرمولها را، که اغلب به آنها نیاز داریم، پیدا می‌کنیم.

الف - جایگشت N چیز

ترتیبی را که می‌توان N چیز متمایز را از چپ به راست پهلوی هم گذاشت، یک جایگشت از این N چیز می‌گویند. مثلاً $O_۱O_۳O_۲$ یک جایگشت از سه چیز $O_۱O_۲O_۳$ است.

تعداد جایگشتهای N چیز متمایز را بدین طریق پیدا می‌کنیم:

برای ساختن یک جایگشت از N چیز متمایز باید آنها را یک به یک انتخاب کرده از چپ به راست پهلوی هم قرار دهیم. چیز اول را به N طریق (کار $A_۱$)، چیز دوم را به $N-۱$ طریق (کار $A_۲$)، ... و چیز Nام را به یک طریق (کار A_N) می‌توان انتخاب کرد. طبق اصل ضرب، ساختن یک جایگشت معادل است با انجام پیاپی کارهای $A_۱, A_۲, ..., A_N$ که به $N(N-۱) ... ۱$ طریق انجام می‌گیرد. این حاصلضرب را با $N!$ نشان می‌دهند و آن را N فاکتوریال می‌خوانند. بنابراین تعداد جایگشتهای N چیز

متمایز می‌شود.

$$۱\times۲\times...(N-۱)\geq N=N! \quad (۱)$$

ب - جایگشت R تائی از N چیز

هرگاه از N چیز متمایز R تا را برگزیده، $۱\leq R\leq N$، به ترتیب از چپ به راست پهلوی هم قرار دهیم، آن را یک جایگشت R تائی از این N چیز می‌گویند. مثلاً $O_۳O_۱$ یک جایگشت دوتائی از سه چیز $O_۱, O_۲, O_۳$ می‌باشد. بنابراین $O_۳O_۱$ و $O_۱O_۳$ به خاطر ترتیب با هم فرق دارند.

تعداد جایگشتهای R تائی N چیز متمایز را بدین طریق پیدا می‌کنیم: برای ساختن یک جایگشت R تائی از N چیز متمایز باید R تا از این N چیز را یک به یک انتخاب کرده از چپ به راست پهلوی هم قرار دهیم. طبق اصل ضرب این کار معادل است با انجام پیاپی R کار $A_۱, A_۲, ..., A_{R-۱}, A_R$ که به $N(N-۱) ... (N-R+۲)(N-R+۱)$ طریق انجام می‌گیرد. بنابراین تعداد جایگشتهای R تائی از N چیز متمایز می‌شود.

$$N\times(N-۱)\times...\times(N-R+۲)\times(N-R+۱)$$

این حاصلضرب را با $(N)_R$ یا $P_{N,R}$ نشان می‌دهند. از گسترش $N!$ و $(N-R)!$ به صورت حاصلضرب نتیجه می‌شود که:

$$R_{N,R}=N\times(N-۱)\times...\times(N-R+۲)\times(N-R+۱)=\frac{N!}{(N-R)!} \quad (۲)$$

اگر R را در این فرمول برابر N و $N-۱$ بگیریم تساویهای زیر به دست می‌آیند:

$$P_{N,N}=N!=\frac{N!}{۰!}$$

$$P_{N,N-۱}=N!=\frac{N!}{۱!}$$

برای اینکه تساویهای بالا معنی داشته باشند، قرارداد می‌کنیم که:

$$۰!=۱!=۱$$

ج – ترکیب R تائی از N چیز

هرگاه از N چیز متمایز، یک گروه Rتائی را با هم یا یک به یک بدون توجه به ترتیب برگزینیم، آن را یک ترکیب R تائی از این N چیز می‌گویند. مثلاً O_3O_1، یک ترکیب دوتائی از سه چیز O_1, O_2, O_3 می‌باشد. بنابراین O_3O_1 و O_1O_3، به خاطر عدم توجه به ترتیب، با هم فرق ندارند.

تعداد ترکیبهای R تائی N چیز متمایز را بدین طریق پیدا می‌کنیم: چون در برابر تمام $R!$ جایگشتهای R تائی N چیز، تنها یک ترکیب R تائی داریم، بنابراین تعداد ترکیبهای R تایی N چیز متمایز که معمولاً آن را با $C_{N,R}$ یا $\binom{N}{R}$ نشان می‌دهند می‌شود:

$$C_{N,R}=\binom{N}{R}=\frac{P_{N,R}}{R!}=\frac{N!}{R!\,(N-R)!} \qquad (3)$$

۳.۴.۲ تعبیر جایگشت و ترکیب به زبان مجموعه‌ها

به زبان مجموعه‌ها، اگر N چیز متمایز را با مجموعهٔ $\{O_1, O_2, \ldots, O_N\}$ نشان دهیم، آنگاه:

الف – هر جایگشت از این N چیز، یک Nتائی مرتب از اعضای این مجموعه است.

ب – هر جایگشت Rتائی از این N چیز، یک Rتائی مرتب از اعضای این مجموعه است.

ج – هر ترکیب R تائی از این N چیز، یک زیر مجموعه R عضوی از اعضای این مجموعه است.

مثلاً سه چیز متمایز O_1, O_2, O_3 را با مجموعهٔ $\{O_1, O_2, O_3\}$ نشان می‌دهیم. سه‌تائی مرتب (O_1, O_2, O_3) یک جایگشت، دوتائی مرتب (O_3, O_1) یک جایگشت دوتائی، و زیر مجموعهٔ دو عضوی $\{O_3, O_1\}$ یک ترکیب دوتائی از این مجموعه می‌باشند.

مثال ۱۶ یک خانواده پنج نفری می‌توانند:

الف – به $5! = 120$ طریق صف‌های پنج نفری تشکیل دهند. (تعداد جایگشتها)

ب – به $P_{5,3} = 60$ طریق صف‌های سه نفری تشکیل دهند. (تعداد جایگشتهای سه‌تائی)

ج – به $C_{5,3} = 10$ طریق گروههای سه نفری تشکیل دهند. (تعداد ترکیب‌های سه‌تائی)

توجه!

فرمول ترکیب در مورد این مثال هم مفید است: N مهره هم شکل داریم که R تا از آنها سفید (غیر متمایز از هم) و بقیه سیاه (غیر متمایز از هم) هستند. از این مهره‌ها می‌توان $C_{N,R}$ جایگشت تشکیل داد. (چرا؟)

۴.۴.۲ فرمول استرلینگ

محاسبه واقعی $N!$ که اغلب در عمل به آن نیاز داریم، برای Nهای بزرگ خسته کننده است. مقدار تقریبی $N!$ از فرمول زیر، به نام فرمول استرلینگ و با استفاده از لگاریتم‌گیری به آسانی به دست می‌آید:

$$N! \approx A(N)=\left(\frac{N}{e}\right)^N\sqrt{2\pi N} \qquad (4)$$

خطای نسبی این تقریب برابر است با

$$E=\frac{|N!-A(N)|}{N!}$$

این خطای نسبی حداکثر برابر است با

$$\frac{1}{(12N-1)}$$

این فرمولها در درسهای پیشرفته احتمال یا ریاضی اثبات می‌شوند.

مثال ۱۷ مقدار واقعی $10!$ می‌شود ۳۶۲۸۸۰۰ و مقدار تقریبی آن به کمک فرمول استرلینگ اینگونه به دست می‌آید:

$$Ln\,A(10)=10\,(Ln\,10-1)+0/5\,(Ln\,2\pi+Ln\,10)=15/096082$$

بنابراین داریم

$$10! \approx A(10)=359896.$$

خطای نسبی در حدود ۰/۰۰۸ است.

۵.۴.۲ شمارش با مدلهای جعبه و مهره

فرض کنید تعداد N جعبه متمایز را بخواهیم با تعداد R مهره پر کنیم. برحسب اینکه مهره‌ها متمایز یا غیر متمایز باشند و در هر جعبه گذاشتن مهره مکرر مجاز یا غیر مجاز باشد چهار مدل داریم.

مرتب و باجایگذاری

الف - مهره‌ها متمایز و مهره مکرر مجاز است

در این مدل تعداد روشهای پر کردن جعبه‌ها را با $C(N,R)$ نشان می‌دهیم و آن را بدین طریق پیدا می‌کنیم: چون R مهره متمایز داریم که مجازیم هرکدام را در هر یک از N جعبه بگذاریم، بنابراین پر کردن جعبه‌ها معادل با انجام پیاپی R کار است که هر یک را به N طریق می‌توان انجام داد. پس طبق اصل ضرب داریم:

$$C(N,R)=N^R$$

مثلاً دو مهرهٔ a و b را می‌توان به نه طریق در سه جعبه سبز و سفید و قرمز گذاشت.

مرتب بدون جایگذاری

ب - مهره‌ها متمایز و مهره مکرر غیر مجاز است

در این حالت باید داشته باشیم $R\le N$، تعداد روشهای پر کردن جعبه‌ها را با $C(\bar{N},R)$ نشان داده و آن را بدین طریق پیدا می‌کنیم: برای پر کردن جعبه‌ها نخست R جعبه را از بین N جعبه انتخاب کرده (کار A_1) و سپس R جعبه انتخاب شده را با R مهره متمایز یک به یک پر می‌کنیم (کار A_2). چون کار A_1 را به $\binom{N}{R}$ طریق و کار A_2 را به $R!$ طریق می‌توان انجام داد، پس طبق اصل ضرب داریم:

$$C(\bar{N},R)=\binom{N}{R}R!=\frac{N!}{(N-R)!}$$

این درست برابر تعداد جایگشتهای R تائی N چیز متمایز است.

مثلاً دو مهره a و b را می‌توان به شش طریق در سه جعبه سبز و سفید و قرمز قرار داد، به طوری که در هر جعبه حداکثر یک مهره گذاشته شود.

نامرتب بدون جایگذاری

ج - مهره‌ها غیر متمایز و مهره مکرر غیر مجاز است

در این مدل، که باید داشته باشیم $R\le N$، تعداد روشهای پر کردن جعبه‌های را با $C(\bar{N},\bar{R})$ نشان داده آن را بدین طریق پیدا می‌کنیم: برای پر کردن جعبه‌ها نخست R جعبه را از بین N جعبه انتخاب می‌کنیم (کار A_1) و سپس R جعبه انتخاب شده را با R مهره غیر متمایز یک به یک پر می‌کنیم (کار A_2). چون کار A_1 را به $\binom{N}{R}$ طریق و کار A_2 را تنها به یک طریق می‌توان انجام داد، پس طبق اصل ضرب داریم:

$$C(\bar{N},\bar{R})=\binom{N}{R}\times 1=\frac{N!}{R!(N-R)!}$$

این درست برابر تعداد ترکیب‌های R تائی N چیز متمایز است.

مثلاً دو مهره a و a را می‌توان به سه طریق در سه جعبه سبز و سفید و قرمز قرار داد، به طوری که در هر جعبه حداکثر یک مهره گذاشته شود.

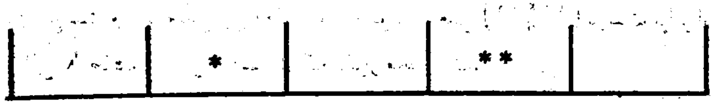
تعداد جایگشتهائی که از R چیز غیر متمایز از نوع a و $N-R$ چیز غیر متمایز از نوع b می‌توان تشکیل داد طبق این مدل می‌شود $\binom{N}{R}$ زیرا برای ساختن هر جایگشت می‌توان R جعبه از بین N جعبه متمایز را با aها و بقیه جعبه‌ها را با bها پر کرد.

مثلاً از a و a و b و b و b می‌توان تعداد $10=\binom{5}{2}$ جایگشت تشکیل داد.

نامرتب باجایگذاری

د - مهره‌ها غیر متمایز و مهره مکرر مجاز است

در این مدل تعداد روشهای پر کردن جعبه‌ها را با $C(N,\bar{R})$ نشان داده، آن را بدین طریق پیدا می‌کنیم: برای روشن شدن مطلب فرض کنید بخواهیم پنج جعبه را با سه مهره غیر متمایز پر کنیم. با توجه به شکل زیر اگر پنج جعبه را با شش خط عمودی مجسم کرده و خط اول و آخر را ثابت تصور کنیم، پر کردن این پنج جعبه با این سه مهره معادل است با ساختن یک جایگشت از چهار خط عمودی و سه ستاره، که به $35=\binom{7}{3}$ روش امکان دارد. (به ترکیب R تائی از N رجوع کنید).



بطور کلی اگر N جعبه را با $N+1$ خط عمودی نشان دهیم و خط اول و آخر را ثابت تصور کنیم، پر کردن این N جعبه به وسیله R مهره معادل است با ساختن یک جایگشت از $N-1$ خط عمودی و R ستاره که به $\binom{N+R-1}{R}$ روش امکان دارد. بنابراین

$$C(N,\bar{R})=\binom{N+R-1}{R} \quad \binom{N}{R_1 R_2 R_3}$$

مثلاً دو مهره a و a را می‌توان به شش روش در سه جعبه سبز و سفید و قرمز گذاشت.

مثال ۱۸ تعداد جوابهای درست و غیر منفی معادلهٔ دو مجهولی $X_1+X_2=4$ را، که به صورت بردار (X_1,X_2) نشان داده می‌شوند، پیدا کنید.

پیدا کردن هر جواب معادل است با گذاشتن چهار مهره غیر متمایز در دو جعبه متمایز X_1 و X_2، که طبق مدل د جعبه و مهره به $5=\binom{2+4-1}{4}$ طریق امکان دارد، و این جوابها عبارتند از

$$(0,4)\ ,\ (4,0)\ ,\ (3,1)\ ,\ (1,3)\ ,\ (2,2)$$

بطور کلی معادله N مجهولی $X_1+X_2+\dots+X_N=R$ دارای $\binom{N+R-1}{R}$ جواب درست غیر منفی است.

مثال ۱۹ از N حرف $O_1, O_2, \dots, O_N$ چند جایگشت R تائی در صورتی که حرف مکرر مجاز باشد، می‌توان تشکیل داد؟

چون حرف مکرر مجاز می‌باشد، بنابراین هرکدام از اعضای جایگشت R تائی را می‌توان به N طریق انتخاب کرد. پس پاسخ این مساله، مانند مدل الف جعبه و مهره می‌شود N^R. مثلاً از a، b و c می‌توان نه جایگشت دوتائی، در صورتی که تکرار مجاز باشد، تشکیل داد. که عبارتند از aa، bb، cc، ab، ba، ac، ca، bc و cb.

مثال ۲۰ از N حرف متمایز $O_1, O_2, \dots, O_N$ چند ترکیب R تائی، در صورتی که حرف مکرر مجاز باشد، می‌توان تشکیل داد؟

فرض کنید در یک ترکیب R تائی، که در آن تکرار مجاز است، X_i تعداد دفعاتی باشد که O_i تکرار شده است. بنابراین داریم:

$$X_1+X_2+\dots+X_N=R$$

تعداد جوابهای درست و غیر منفی این معادله N مجهولی، یعنی $\binom{N+R-1}{R}$ درست برابر است با تعداد ترکیبهای R تائی N حرف متمایز در صورتی که تکرار مجاز باشد.

مثلاً از a، b و c می‌توان شش ترکیب دوتائی، در صورتی که تکرار مجاز باشد، تشکیل داد که عبارتند از aa، bb، cc، ab، ac و bc.

مثال ۲۱ فرض کنید N چیز داشته باشیم که همگی از هم متمایز نباشند و بتوان آنها را به k گروه تقسیم کرد، به طوری که N_1 تا از نوع O_1، N_2 تا از نوع O_2، ...، K_k تا از نوع O_k باشند. فرض می‌کنیم چیزهای هر گروه غیر متمایز باشند. بنابراین $N_1+N_2+\dots+N_k=N$ می‌خواهیم تعداد جایگشتهائی را که از این N چیز می‌توان تشکیل داد پیدا کنیم.

برای اینکه یک جایگشت از این N چیز بسازیم، بدین طریق عمل می‌کنیم: N جعبه متمایز را در یک صف می‌چینیم. حال N_1 تا از این جعبه‌ها را انتخاب کرده آنها را با N_1 چیز از نوع O_1 که غیر متمایز می‌باشند یک به یک پر می‌کنیم. این کار را می‌توان به $\binom{N}{N_1}$ طریق انجام داد. سپس N_2 تا از بقیه جعبه‌ها را انتخاب کرده آنها را با N_2 چیز از نوع O_2 غیر متمایز می‌باشند یک به یک پر می‌کنیم،

این کار را می‌توان به $\binom{N-N_1}{N_2}$ طریق انجام داد. به همین طریق بقیه جعبه‌ها را پر می‌کنیم. پس طبق اصل ضرب جعبه‌ها را می‌توان به

$$\binom{N}{N_1}\binom{N-N_1}{N_2}\cdots\binom{N_k}{N_k}=\frac{N!}{N_1!N_2!\dots N_k!}$$

طریق که درست برابر تعداد جایگشتها می‌باشد پر کرد. اگر N چیز از هم متمایز بودند، تعداد جایگشتها می‌شد $N!$. ولی به علت تقسیم آنها به گروههای غیر متمایز، این تعداد مطابق فرمول بالا تقلیل پیدا کرده است. اغلب این تعداد را با $\binom{N}{N_1, N_2, \dots, N_k}$ نشان می‌دهند.

مثلاً از b، a، a، c، b و a می‌توان تعداد $60=\frac{6!}{(3!2!1!)}$ جایگشت تشکیل داد.

مثال ۲۲ پنج نفر شیرازی، دو نفر اصفهانی و سه نفر تهرانی روی ده صندلی که در یک ردیف قرار دارند به تصادف می‌نشینند. احتمال اینکه تمام هم شهریها پهلوی هم باشند چقدر است؟

اگر فرض کنید هم شهریها غیر متمایز هستند، این ده نفر به $\frac{10!}{(3!2!5!)}=2520$ طریق همشانس می‌توانند پهلوی هم بنشینند. هم شهری‌ها، یعنی شیرازیها و اصفهانیها و تهرانیها به $3!=6$ طریق می‌توانند صندلیها را اشغال کنند. بنابراین احتمال موردنظر می‌شود

$$\frac{6}{2520}=\frac{1}{420}$$

مثال ۲۳ دو جمله‌ای $(x+y)^n$ را بسط دهید.

اگر $(x+y)$ را n بار در خودش ضرب کنیم، جمله‌هائی به فرم $x^k y^{n-k}$ به دست می‌آیند که در آنها k می‌تواند یکی از اعداد $0, 1, \dots, n$ را اختیار کند. برای هر k، تعداد جمله $x^k y^{n-k}$ برابر است با $\binom{n}{k}$، زیرا xهای این جمله از k پرانتز $(x+y)$ می‌آیند که می‌توان آنها را به $\binom{n}{k}$ طریق انتخاب کرد و yها از بقیه پرانتزها هستند. بنابراین داریم:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

برای اینکه استدلال بالا روشن شود $(x+y)^3$ را مستقیماً بسط دهید.

مثال ۲۴ سه جمله‌ای $(x+y+z)^n$ را بسط دهید.

اگر $x+y+z$ را n بار در خودش ضرب کنیم، جمله‌هائی به فرم $x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3}$ به دست می‌آیند که در آنها n_1, n_2, n_3 اعداد درست و غیر منفی هستند و داریم: $n_1+n_2+n_3=n$. برای هر n_1 و n_2 تعداد جمله $x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3}$ برابر است با

$$\binom{n}{n_1}\binom{n_2+n_3}{n_2}=\binom{n}{n_1, n_2, n_3}$$

زیرا xهای این جمله از n_1 پرانتز $(x+y+z)$ به $\binom{n}{n_1}$ طریق و yها از n_2 پرانتز دیگر به $\binom{n_2+n_3}{n_2}$ طریق می‌آیند و zها از بقیه پرانتزها هستند. بنابراین داریم:

$$(x+y+z)^n=\sum\binom{n}{n_1, n_2, n_3}x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3}$$

که در آن جمع‌بندی روی تمام جوابهای درست و غیر منفی معادله $n_1+n_2+n_3=n$ که به صورت (n_1, n_2, n_3) هستند، انجام می‌گیرد.

مثلاً بسط $(x+y+z)^4$ بعد از خلاصه شدن تعداد $15=\binom{3+4-1}{2}$ جمله دارد که در آن ضریب جمله x^2yz برابر است با $12=\frac{4!}{2!1!1!}$.

به خاطر بسطهای بالا، معمولاً $\binom{n}{n_1, n_2, n_3}$ را یک ضریب سه جمله‌ای و $\binom{n}{k}$ را که در حقیقت معادل با $\binom{n}{k, n-k}$ می‌باشد، یک ضریب دو جمله‌ای می‌نامند.

مثال ۲۵ احتمال اینکه روزهای تولد اعضای یک خانواده ده نفری در سال، تمام روزهای هفته را شامل شوند چقدر است؟ این مسئله ظاهراً هم مدل با مسئله زیر است:

ده مهر غیر متمایز را به تصادف در هفت جعبه متمایز می‌گذاریم. احتمال اینکه در هر جعبه حداقل یک مهره داشته باشیم چقدر است؟

طبق مدل د جعبه و مهره، ده مهره غیر متمایز در هفت جعبه متمایز به $\binom{16}{10}$ طریق می‌توانند قرار گیرند. از طرفی برای این که در هر جعبه لااقل یک مهره داشته باشیم، نخست یک مهره در هر یک از هفت جعبه می‌گذاریم و سپس سه مهره باقیمانده را به

$$\binom{7+3-1}{3}=\binom{9}{3}$$

طریق در هفت جعبه قرار می‌دهیم. چون مدل احتمال یکنواخت است، احتمال مطلوب می‌شود:

$$\frac{\binom{9}{3}}{\binom{16}{10}}=\frac{3}{286}$$

احتمال برای نمونه مرتب بی‌جایگذاری می‌شود $\frac{1}{(5\times4\times3)}=\frac{1}{60}$

احتمال برای نمونه نامرتب بی‌جایگذاری می‌شود $\frac{3!}{(5\times4\times3)}=\frac{1}{10}$

احتمال برای نمونه با هم می‌شود $\frac{1}{\binom{3}{5}}=\frac{1}{10}$

لازم است اضافه کنیم که تعداد نمونه‌های سه تائی نامرتب با جایگذاری، درست برابر است با تعداد ترکیبهای سه تائی با تکرار مجاز، یعنی $35=\binom{5+3-1}{3}$ (به مثال ۲۰ رجوع شود). ولی این نمونه‌ها همشانس نیستند، زیرا اگر ترتیب را رعایت کنیم نمونه ۳، ۲، ۱ به شش طریق و نمونه ۳، ۲، ۲ به سه طریق مرتب می‌شوند. بنابراین نمی‌توانیم بگوئیم احتمال برای نمونه نامرتب با جایگذاری می‌شود $\frac{1}{35}$.

ملاحظه می‌شود که در دو حالت آخر احتمالها با هم مساوی می‌باشند، زیرا تعداد راه‌های بیرون آوردن ۳ کارت از ۵ کارت یک به یک بی‌جایگذاری و بدون توجه به ترتیب آنها درست برابر است با تعداد راه‌های بیرون آوردن هر ۳ کارت با هم. برای اطمینان، این شمارش را به هر دو روش مستقیماً انجام دهید.

۶.۴.۲ تمرین بخش چهار

۱. در آزمایشی نخست یک سکه و سپس یک تاس را می‌اندازیم. تعداد پیشامدهای ساده را به کمک یک نمودار درختی و همچنین یک جدول پیدا کنید.

۲. یک تاس نااریب را پنج بار مستقلاً می‌اندازیم. تعداد پیشامدهای ساده را به دست آورید. احتمال اینکه خال مضرب سه مشاهده نشود چقدر است؟

۳. دو دختر و سه پسر به تصادف در یک صف می‌ایستند. احتمال اینکه دخترها در دو سر صف بایستند چقدر است؟ احتمال اینکه دخترها پهلوی هم بایستند چقدر است؟ احتمال اینکه پسر و دختر یک در میان بایستند چقدر است؟

۴. در شهری برای اتوموبیلها شماره‌های پنج رقمی بی‌صفر به کار می‌برند. چند شماره که رقم اول و آخر آنها مثل هم باشند می‌توان تهیه دید؟

۵. از ده پست در اداره‌ای می‌خواهند سه پست را به علت کمی مراجعه تعطیل کنند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ احتمال این که پست مخصوصی تعطیل شود چقدر است؟

۶. در اداره‌ای ده پست خالی موجود است و تنها سه نفر صلاحیت دار برای اشغال این پستها پیدا می‌شوند. به چند طریق می‌توان این سه نفر را در این پستها مشغول داشت؟

۷. سه نفر شیرازی، دو نفر تهرانی و چهار نفر اصفهانی به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند، به فرض آن که همشهریها از هم متمایز نباشند. احتمال این که دو تهرانی در دو سر صف قرار

گیرند چقدر است؟

۸. به کمک فرمول استرلینگ $15!$ را به تقریب محاسبه کنید و خطای نسبی این تقریب را به دست آورید.

۹. به چند طریق پنج نفر می‌توانند اطراف یک میز گرد بنشینند؟ احتمال این که جوانترین و پیرترین آنها پهلوی هم قرار گیرند چقدر است؟ (فرض کنید که این افرد هم سن نباشند.)

۱۰. در پرسشنامه‌ای ده پرسش بلی – نه داده شده است. احتمال این که شخصی به تصادف آنها را با چهار بلی و شش نه پر کند چقدر است؟

۱۱. ثابت کنید که با فرض $N \ge R$ داریم:

$$\binom{N}{R}=\binom{N-1}{R}+\binom{N-1}{R-1} \quad , \quad \binom{N}{R}=\binom{N}{N-R}$$

به کمک جعبه و مهره صحت این دو فرمول را توجیه کنید.

۱۲. ضریب x^3y^4z را در بسط $(2x-3y+4z)^8$ پیدا کنید.

۱۳. از بسط $(1+1)^N$ استفاده کرده ثابت کنید:

$$\binom{N}{0}+\binom{N}{1}+\cdots+\binom{N}{N}=2^N$$

حال تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه N عضوی را پیدا کنید.

۱۴. ثابت کنید به $\binom{R-1}{R-N}$ طریق می‌توان R مهره غیر متمایز را در N جعبه گذاشت بطوریکه هیچیک خالی نماند $(R \ge N)$. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد، به طوری که در هر جعبه لااقل دو مهره قرار گیرد، با فرض $R \ge 2N$؟

۱۵. تعداد جوابهای درست مثبت معادله $x_1+x_2+\cdots+x_N=R$ را پیدا کنید.

مثال: $x_1+x_2+x_3=5$

۱۶. در ظرفی N کارت به شماره‌های ۱ تا N داریم. از این کارتها یک نمونه R تائی بیرون می‌آوریم. با استفاده از مثال ۲۷، تعداد انواع نمونه‌ها را پیدا کنید.

۱۷. سه مهره a, b, c را به چند طریق می‌توانید در پنج جعبه متمایز قرار دهید در صورتی که حداکثر یک مهره در هر جعبه مجاز باشد؟ اگر بیش از یک مهره مجاز باشد، به چند طریق؟

۱۸. ده مهره غیر متمایز را به چند طریق می‌توانید در چهار جعبه متمایز قرار دهید در صورتی که بخواهیم در هر جعبه لااقل یک مهره قرار گیرد؟

$\binom{9}{3}$

۱۹. در ظرفی سه مهره سفید، چهار مهره قرمز، و پنج مهره سبز داریم. از این ظرف شش مهره با هم بیرون می‌آوریم. مطلوبست احتمال این که در این نمونه شش‌تائی، مهره‌های همرنگ مساوی باشند. احتمال این که مهره‌ها از سه رنگ باشند و اکثریت با مهره‌های سبز باشد چقدر است؟

۲۰. سه نفر زن و نه نفر مرد را می‌خواهیم به گروه‌های سه نفری، چهار نفری، و پنج نفری تقسیم کنیم به طوری که در هر گروه یک زن باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۲۱. یک خانواده ۳ نفری پنجشنبه یا جمعه متولد شده‌اند. احتمال اینکه هم پنجشنبه و هم جمعه جشن تولد داشته باشند چقدر است؟ یک بار سه نفر را غیر متمایز و یک بار متمایز بگیرید. از مدل مهره و جعبه استفاده کنید و تمام حالات را در نظر بگیرید. جواب درست کدام است؟

۲۲. ریاضیدانان ایتالیائی گاهی روی پیشامد مجموع خالهای سه تاس شرطبندی می‌کردند. آنها می‌پنداشتند که احتمال مجموع ۹ و احتمال مجموع ۱۰ برابرند، ولی عملاً مجموع ۹ را بیشتر می‌دیدند. مسئله را نزد گالیله بردند. ریاضیدانان چه اشتباهی می‌کردند؟ پاسخ درست گالیله چه بوده است؟

۲۳. ده کارگر را میان سه مهندس ایرانی، ایتالیائی و آلمانی به چند طریق می‌توان به تصادف تقسیم کرد به طوری که به ترتیب ۳ و ۴ و ۳ کارگر داشته باشند؟ اگر ۳ نفر از این کارگرها افغانی باشند، احتمال اینکه با مهندس ایرانی کار کنند چقدر است؟

۲۴. ضرائب جمله‌های بسط $(x+y)^n$ را در یک سطر بنویسید. مثلاً ضرائب $(x+y)^2$ می‌شوند ۱ ۲ ۱. اگر n، را ۰، ۱، ...، N بگیریم، با یک مثلث عددی فرمولهای تمرین ۱۱ را بیان دارید و از این راه طرز ساختن مثلث خیام - پاسکال را پیدا کنید.

۲۵. ثابت کنید که

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

۲۶. جعبه‌ای محتوی ۲۴ لامپ است. ۴ عدد از این لامپها معیوب هستند. ۱۰ عدد از این لامپها را به تصادف بر می‌گزینیم. احتمال اینکه تمام آنها سالم باشند چقدر است؟

۵.۲ مدل احتمال با فضای نمونه دلخواه

این بخش برای دانشجویان ریاضی، آمار، فیزیک و مهندسی مفید است.

تا به حال در تمام مثالها، جز مثال ۷، فضای نمونه یک مجموعهٔ باپایان بود. اینک مثال ۷ را که در آن فضای نمونه یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر بی‌پایان است، یعنی اعضایش را می‌توان با اعداد طبیعی متناظر کرد، بار دیگر بررسی می‌نمائیم. افزون بر این، مثال دیگری را مطالعه می‌کنیم که در آن فضای نمونه شمارش‌ناپذیر است.

مثال ۲۸ در یک آزمایش، بازی شیر و خط را با یک سکه ناآریب مستقلاً آنقدر ادامه می‌دهیم تا برای اولین بار شیر بیاید. چون اولین شیر ممکن است در نخستین بازی یا دومین بازی یا... بیاید، بنابراین فضای نمونه یک مجموعه شمارش‌پذیر به صورت $S=\{e_1, e_2, \dots\}$ است. مثلاً منظور از پیشامد e_3 این است که در سومین بازی برای اولین بار شیر بیاید، به عبارت دیگر نتیجهٔ سه‌بازی به صورت TTH باشد.

در این مثال هم مانند فضای نمونه باپایان می‌توان برای ساختن مدل احتمال به هر پیشامد ساده e_i احتمال p_i را، به طوری که $0 < p_i < 1$ و $p_1+p_2+\dots=1$ صادق باشند، نسبت داد. ضمناً هر پیشامد زیر مجموعه‌ای است از S و هر زیر مجموعه باپایان یا بی‌پایان از S را می‌توان یک پیشامد فرض کرد، که احتمال آن برابر است با مجموع احتمالهای پیشامدهای ساده‌ای که آنرا تشکیل می‌دهند.

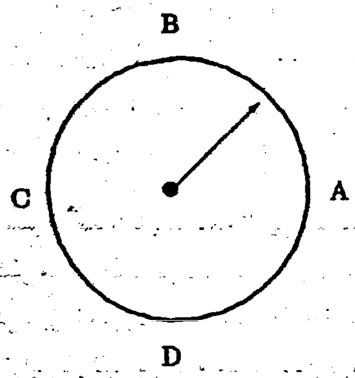
به عنوان مثال احتمال نظیر پیشامد ساده e_4 را تعیین می‌کنیم. چون سکه ناآریب و آزمایشها مستقلاً انجام می‌گیرند، در چهار بازی شیر و خط 2^4 پیشامد ساده، هرکدام با احتمال $(\frac{1}{2})^4$ داریم که یکی از آنها یعنی، $TTTH$ منجر به e_4 می‌شود بنابراین $p_4=(\frac{1}{2})^4$. به طور کلی برای $n=1, 2, \dots$ احتمال نظیر پیشامد ساده e_n می‌شود، $p_n=(\frac{1}{2})^n$. مجموع این احتمالها، که تشکیل یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ می‌دهند، برابر است با یک.

به عنوان مثال دیگر، پیشامد این که تعداد بازیها برای دیدن نخستین شیر مضرب سه باشد زیر مجموعه‌ای است از S به صورت $E=\{e_3, e_6, \dots\}$ با احتمال

$$P(E)=(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^6+\dots=\frac{(\frac{1}{2})^3}{1-(\frac{1}{2})^3}=\frac{1}{7}$$

در اینجا هم، مانند احتمال با فضای نمونه باپایان، اگر تمام احتمال را به عنوان یک واحد جرم که میان اعضای مجموعه شمارش‌پذیر $S=\{e_1, e_2, \dots\}$ توزیع شده است بپنداریم، می‌توان p_i را به عنوان جرم e_i تعبیر کرد.

مثال ۲۹ عقربه‌ای در مرکز یک قاب گرد، که روی میز جا دارد، نصب شده است. این عقربه با مختصر اشاره‌ای آزادانه حرکت می‌کند و بعد از چند دوران نوک آن به تصادف در نقطه‌ای از محیط قاب قرار می‌گیرد. فرض کنید در این آزمایش موضوع مورد علاقه محل توقف نوک عقربه باشد.



بنابراین هر پیشامد ساده نقطه‌ای است از دایره‌ای که محیط قاب را تشکیل می‌دهد، و فضای نمونه مجموعه‌ای است شمارش‌ناپذیر متشکل از نقاط محیط این دایره. چون نوک عقربه به تصادف در نقطه‌ای از محیط قاب قرار می‌گیرد و هیچ نقطه‌ای را به نقطه دیگر ترجیح نمی‌دهد، پس باید به تمام پیشامدهای ساده احتمالهای مساوی نسبت داد. اما امکان ندارد که تمام این احتمالها مثبت و کل احتمال برابر یک باشد، زیرا فضای نمونه شمارش‌ناپذیر است.

با این حال می‌توان این پرسش را که پاسخی معقول دارد، مطرح کرد: احتمال این که نوک عقربه روی کمان AB که یک چهارم محیط است قرار گیرد چقدر است؟ واضح است که، با توجه به مکانیسم دستگاه، تمام چهار ربع محیط دایره از این لحاظ همشانس می‌باشند، به عبارت دیگر می‌توان تمام فضای نمونه را به یک فضای نمونه با پایان با چهار عضو همشانس توجیه کرد. بنابراین پاسخ $\frac{1}{4}$ است. به ویژه اگر کل احتمال را به عنوان یک واحد جرم که بطور اتصالی و یکنواخت روی محیط دایره توزیع شده است، بپنداریم، می‌توان این احتمال را به عنوان جرم کمان AB تعبیر کرد. چنین احتمالی را که متناسب با طول کمان است، می‌توان با همین توجیه برای تمام کمانها و حتی مجموع چند کمان بکار برد. ضمناً ملاحظه می‌شود که احتمال هر پیشامد ساده، یا بطور کلی هر پیشامد شمارش‌پذیر، برابر صفراست. ولی اگر F یک پیشامد شمارش‌ناپذیر دلخواه باشد، احتمال آن را نمی‌توان به سادگی پیدا کرد.

این مثال نشان می‌دهد، در حالتی که فضای نمونه شمارش‌ناپذیر باشد، ممکن است به هر پیشامد ساده، احتمال مثبت تعلق نگیرد، ولی در عوض بعضی از زیر مجموعه‌های S احتمال مثبت دارند. در حقیقت انگیزه ساختن مدل احتمال به نحوی کلی‌تر، که فضای نمونه شمارش‌پذیر و شمارش‌ناپذیر را

در برگیرد، و بدون اشکال باشد، با اینگونه مثالها شروع شد.

کلموگرف ریاضیدان و احتمالدان روسی، در سال ۱۹۳۰ میلادی برای اولین بار، با اسلوب ریاضی، احتمال را پی‌ریزی کرد و راه را برای پیشرفت سریع این دانش گشود.

روشی را که این دانشمند به کار برده است روش اصل سازی می‌باشد که در هندسه با آن آشنائی کامل داریم. در هر تئوری ریاضی این روش مبتنی بر چند مفهوم ابتدائی و تعریف نشده مانند خط و نقطه در هندسه، است که خواص آنها با چند گزاره بدون اثبات به نام اصل، مانند اصل اقلیدس در مورد خطوط موازی، بیان می‌شوند. با استفاده از این مقدمات و روش قیاسی منطق، خواص دیگر تحت عنوان قضیه بیان می‌گردند، و در طی بسط تئوری، مفاهیم تازه، که در کشف قضایای بیشتر نقش دارند تحت عنوان تعریف افزوده می‌شوند. لازم است اضافه کنیم که در هر تئوری، باید اصلها مستقل، تعداد آنها به اندازه کافی و سازگار باشند (یعنی یکدیگر را نقض نکنند و منجر به قضایای متناقض نشوند). ضمناً باید بر پایه مشاهدات و تجربیات انسان بنا شوند و در خارج مصداق داشته باشند تا بتوانند برای کشف حقایق و تفسیر وقایع مفید واقع گردند. اینک با زبانی ساده و سبک ریاضی، این روش را در مورد احتمال شرح می‌دهیم.

۱.۵.۲ میدان سیگما

مجموعهٔ دلخواه S را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم B یک دسته ناتهی از زیر مجموعه‌های S باشد. می‌گوئیم B یک میدان سیگما است هرگاه، دو شرط زیر برقرار گردند:

۱. اگر زیر مجموعه E به B تعلق داشته باشد، آنگاه E' یعنی متمم E هم به B تعلق داشته باشد.

۲. اگر جمله‌های دنباله $E_1, E_2, \ldots$ به B تعلق داشته باشند، آنگاه $\cup_{i=1}^{\infty} E_i$، یعنی اجتماع آنها هم به B تعلق داشته باشد.

به سخنی دیگر، B را یک میدان سیگما می‌نامند، هرگاه روی اعضای آن اعمال متمم‌گیری و اجتماع شمارش‌پذیر انجام گیرد، اعضائی متعلق به آن به‌دست آیند. نام این میدان به خاطر شرط دوم می‌باشد.

با این شرایط فوراً نتیجه می‌شود که مجموعهٔ تهی و خود S هم به B تعلق دارند. ضمناً با استفاده از قانونهای دومرگان، که در نظریه مجموعه‌ها دیده‌اید، می‌توان نشان داد که هرگاه جمله‌های دنباله $E_1, E_2, \ldots$ به B تعلق داشته باشند، $\cap_{i=1}^{\infty} E_i$ یعنی اشتراک آنها هم به B تعلق دارد.

به طور کلی در هر مجموعه S، تمام زیر مجموعه‌ها پر عضوترین میدان سیگما و مجموعه $\{S, \varnothing\}$ کم عضوترین میدان سیگما را می‌سازد. اینک به مثالهای دیگر توجه می‌کنیم.

مثال ۳۰ در مجموعهٔ $S = \{a,b,c\}$ تمام هشت زیر مجموعه تشکیل یک میدان سیگما می‌دهند ولی یک میدان سیگمای کوچکتر را می‌توان از چهار زیر مجموعهٔ S، $\{a\}$، $\{b,c\}$، و $\varnothing$ تشکیل داد. زیر مجموعه‌های S، $\{a\}$، و $\varnothing$ تشکیل میدان سیگما نمی‌دهند زیرا متمم a در میان آنها نیست.

مثال ۳۱ فرض می‌کنیم S مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. تمام زیر مجموعه‌های S تشکیل یک میدان سیگما می‌دهند. ولی می‌توانیم یک میدان سیگمای کم عضوتر، که در آنالیز ریاضی مورد استفاده است و آنرا میدان برل به نام ریاضیدان فرانسوی برل (۱۹۵۶-۱۸۸۸) می‌نامند، معرفی کرد. میدان برل را می‌توان با روش زیر ساخت.

تمام زیر مجموعه‌های S را که به صورت فاصله‌های نیم باز $(-\infty, a]$، با اعداد حقیقی دلخواه a می‌باشند، در نظر می‌گیریم. روی این مجموعه‌ها اعمال متمم‌گیری و اجتماع و اشتراک شمارش‌پذیر را انجام می‌دهیم. بعداً روی مجموعه‌های حاصل و مجموعه‌های داده شده، این اعمال را مرتباً بدون وقفه تکرار می‌کنیم. سرانجام یک دسته از زیر مجموعه‌های S به دست می‌آید که یک میدان برل نامیده می‌شود. با مثالی پیچیده می‌توان زیر مجموعه‌ای از S پیدا کرد که در این میدان نباشد. این میدان کوچکترین میدان سیگما است که انواع فواصل و زیر مجموعه‌های باپایان و شمارش‌پذیر S را در بر می‌گیرد.

۲.۵.۲ تابع و تابع مجموعه‌ای

به طور کلی هرگاه بتوانیم بر پایهٔ یک رابطه به هر عضو از مجموعه‌ای فقط یک عضو از مجموعه‌ای دیگر را نسبت دهیم، این رابطه را یک تابع می‌گویند. مجموعهٔ نخست را دامنه و مجموعهٔ دوم را برد این تابع می‌نامند. به سخنی دیگر، هر تابع رابطه‌ای یک به یک یا چند به یک (ولی نه یک به چند) از مجموعه‌ای به مجموعه‌ای دیگر است.

مثلاً $f(x) = x^2 + 1$ تابعی دو به یک از مجموعهٔ اعداد حقیقی به مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت است. ضابطه این تابع، هم ۳ و هم ۳- را به ۱۰ می‌فرستد. ولی $h(x) = x^3 - 1$ تابعی یک به یک است. هر یک از این دو تابع را تابع نقطه‌ای می‌نامند.

به عنوان مثالی دیگر، رابطه ازدواج تابعی چند به یک است. دامنهٔ این تابع زنان متاهل و برد آن مردان متاهل است. ضابطه این تابع را نمی‌توان مانند دو تابع نقطه‌ای یاد شده، با یک فرمول ریاضی بیان کرد.

اگر هر عضو از دامنهٔ تابعی خود یک مجموعه باشد، چنین تابعی را تابع مجموعه‌ای می‌خوانند. مثلاً

فرض کنید g تعداد اعداد درستی باشد که در یک فاصله با پایان موجود است، مانند

$$g([۲,۷])=۶$$

دامنهٔ g تمام فاصله‌های باپایان و برد آن اعداد درست غیر منفی است. به عنوان مثالی دیگر، مساحت یک مثلث یک تابع مجموعه‌ای است. دامنهٔ این تابع تمام مثلثهای واقع در صفحه و برد آن اعداد حقیقی است. این دو تابع مجموعه‌ای، هر دو چند به یک هستند.

۳.۵.۲ فضای احتمال

فرض کنید S یک مجموعه دلخواه و B یک میدان سیگما از زیر مجموعه‌های S باشد. یک تابع مجموعه‌ای P به نام تابع احتمال را، که دامنه آن B و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است، در نظر می‌گیریم. اگر اصلهای زیر در مورد P صادق باشند، آنگاه سه‌تائی (S,B,P) را یک فضای احتمال می‌نامند:

اصل یک - $P(S)=۱$

اصل دو - $P(E)\geqq ۰$، برای هر E که به B تعلق داشته باشد.

اصل سه - $P(\cup_{i=۱}^{\infty}E_i)=\sum_{i=۱}^{\infty}P(E_i)$

در اصل سه جمله‌های دنبالهٔ $E_۱,E_۲,\ldots$ به B تعلق دارند و دو به دو جدا می‌باشند یعنی

$$E_i\cap E_j=\varnothing \qquad i\neq j \qquad i,j=۱,۲,\ldots$$

این اصل را، اصل جمع‌پذیری احتمال می‌گویند.

از این‌پس هرزیر مجموعه E از S را، که در میدان سیگمای B باشد یک پیشامد و $P(E)$ را احتمال آن می‌گوئیم. بنابراین هر زیر مجموعه از S را که به B تعلق نداشته باشد نمی‌توان یک پیشامد خواندوطبعاًاحتمال‌ناپذیراست. خود S را فضای نمونه یا پیشامد حتمی و $\varnothing$ را پیشامد محال می‌نامیم.

اصول بالا، در حقیقت، فشرده‌ای از مشاهدات و تجربیات ما دربارهٔ آزمایش تصادفی، پیشامد و مفهوم و خواص احتمال هستند، که به نحوی کلی و انتزاعی ارائه شده‌اند. با داشتن این اصول می‌توانیم تئوری احتمال را، بدون این که به مثالهای گوناگون و حالات مختلف متوسل شویم، در چهارچوب قوانین ریاضی گسترش دهیم.

در تمام مطالب و قضایائی که دنبال می‌کنیم یک فضای احتمال ثابت (S,B,P) را در نظر داریم، و در صورتی که لزوم نداشته باشد، از تکرار این موضوع خودداری خواهیم کرد.

قضیه ۱ پیشامد $\varnothing$ که آن را پیشامد محال می‌نامیم، دارای احتمال صفر است.

برهان دنباله پیشامدهای $E_۱,E_۲,\ldots$ را با فرض $E_۱=S$ و $E_i=\varnothing$ برای $i>۱$ در نظر می‌گیریم. چون پیشامدها در این دنباله دو به دو جدا هستند و $S=\cup_{i=۱}^{\infty}E_i$ پس بنابر اصل سه داریم

$$P(S)=P(\cup_{i=۱}^{\infty}E_i)=\sum_{i=۱}^{\infty}P(E_i)=P(S)+P(\varnothing)$$

از طرفی طبق اصل یک $P(S)=۱$، بنابراین بعد از حذف $P(S)$ از دو طرف داریم $P(\varnothing)=۰$.

قضیه ۲ برای پیشامدهای دو به دو جدای $E_۱,E_۲,\ldots,E_n$ داریم:

$$P(\cup_{i=۱}^{\infty}E_i)=\sum_{i=۱}^{\infty}P(E_i) \qquad (۵)$$

برهان دنباله پیشامدهای $E_۱,E_۲,\ldots$ را با فرض $E_i=\varnothing$ برای $i>n$ در نظر می‌گیریم. چون پیشامدها در این دنباله دو بدو جدا هستند و $\cup_{i=۱}^{n}E_i=\cup_{i=۱}^{\infty}E_i$، پس بنابر اصل سه و قضیه یک داریم:

$$P(\cup_{i=۱}^{n}E_i)=P(\cup_{i=۱}^{\infty}E_i)=\sum_{i=۱}^{\infty}P(E_i)=\sum_{i=۱}^{n}P(E_i)+\sum_{i=n+۱}^{\infty}P(E_i)$$

$$=\sum_{i=۱}^{n}P(E_i)+P(\cup_{i=n+۱}^{\infty}E_i)=\sum_{i=۱}^{n}P(E_i)+P(\varnothing)=\sum_{i=۱}^{n}P(E_i)$$

بنابراین جمع‌پذیری بی‌پایان و باپایان، هر دو، در مورد تابع احتمال درست است.

قضیه ۳ اگر پیشامد E' متمم پیشامد E باشد، آنگاه

$$P(E')=۱-P(E) \qquad (۶)$$

برهان چون E و E' از هم جدا هستند و $S=E\cup E'$ پس بنابر اصل یک و قضیه ۲ داریم:

$$۱=P(S)=P(E\cup E')=P(E)+P(E')$$

$$P(E')=۱-P(E)$$

قضیه ۴ برای هر دو پیشامد E و F داریم:

$$P(F-E)=P(F)-P(E\cap F) \qquad (۷)$$

برهان به سادگی می‌توان نشان داد که برای هر دو مجموعهٔ E و F داریم:

$$F=(F-E)\cup(E\cap F)$$

که در آن $E\cap F$ و $F-E$ از هم جدا هستند. پس بنابر قضیه (۲) داریم:

$$P(F)=P(F-E)+P(E\cap F)$$

$$P(F-E)=P(F)-P(E\cap F)$$

نتیجه ۱ اگر $E\subset F$، آنگاه $E\cap F=E$ و $P(F-E)=P(F)-P(E)$، یعنی، در این مورد تابع احتمال دارای ویژگی تفریق‌پذیری است.

نتیجه ۲ اگر $E\subset F$، آنگاه با استفاده از نتیجه (۱) و اصل دو داریم $P(E)\leq P(F)$. به عبارت دیگر اگر بتوان پیشامدها را به وسیله رابطه $\subset$ مرتب کرد، آنگاه تابع P حافظ ترتیب است. به ویژه برای هر پیشامد E، از $E\subset S$ و اصل یک و دو داریم:

$$۰\leq P(E)\leq ۱$$

قضیه ۵ برای هر دو پیشامد E و F داریم:

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F) \qquad (۸)$$

برهان به سادگی می‌توان نشان داد که برای دو مجموعه E و F داریم:

$$E\cup F=E\cup(F-E)$$

که در آن E و $F-E$ از هم جدا هستند. پس بنابر قضایای (۲) و (۴) داریم

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F-E)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$$

مثال ۳۲ فرض می‌کنیم $S=\{a,b,c\}$ و میدان سیگمای B از زیر مجموعه‌های S، $\{b,c\}$، $\{a\}$، و $\varnothing$ تشکیل شده باشد. با فرض $۰<p<۱$ و

$$P(S)=۱\ ,\ \ P(\{b,c\})=۱-p\ ,\ \ P(\{a\})=p$$

سه‌تائی (S,B,P) یک فضای احتمال است. در اینجا به $\{a,c\}$ نمی‌توان احتمال نسبت داد زیرا به میدان سیگمای B تعلق ندارد. پس این زیر مجموعه از S احتمال‌ناپذیر است.

مثال ۳۳ فرض می‌کنیم $S=\{e_۱,e_۲,\ldots,e_n\}$ و میدان سیگمای B از تمام زیر مجموعه‌های S تشکیل شده باشد. اعداد مثبت $p_۱,p_۲,\ldots,p_n$ را که مجموع آنها برابر یک می‌باشد در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم برای هر زیر مجموعه E داشته باشیم.

$$P(E)=\sum_{e_i\in E}p_i$$

مثلاً برای $E=\{e_۲,e_۵,e_۷\}$ داریم $P(E)=p_۲+p_۵+p_۷$.

واضح است که (S,B,P) یک فضای احتمال است. از تعریف P معلوم می‌شود که

$$P(\{e_i\})=P(e_i)=p_i\ ,\quad i=۱,۲,\ldots,n$$

در حقیقت این همان مدل احتمال با فضای نمونه باپایان است که قبلاً آن را مطالعه کرده‌ایم.

بدیهی است که در این مثال می‌توان به جای مجموعهٔ باپایان S یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر $\{e_۱,e_۲,\ldots\}$ را در نظر گرفت.

مثال ۳۴ فرض کنید S فاصله بستهٔ $[۰,۲]$ و میدان سیگما از تمام زیر مجموعه‌های آن تشکیل شده باشد. در اینجا میدان سیگما به اندازه‌ای پر عضو است که نمی‌توان هیچ تابع مجموعه‌ای را مقید به اصول احتمال کرد و یک فضای احتمال ساخت. ولی می‌توان یک میدان سیگمای کم عضوتر مانند مثال (۳۱) (میدان برل)، به وسیله تکرار بی‌وقفه اعمال متمم‌گیری و اجتماع و اشتراک روی زیر فاصله‌های $[a,b]$ با فرض $۰\leq a\leq b\leq ۲$ به دست آورد. آنگاه می‌توان یک فضای احتمال ساخت. به ویژه اگر تمام احتمال، یا به تعبیر بهتر یک واحد جرم، به طور یکنواخت و اتصالی در فاصله $[۰,۲]$ توزیع شده باشد، آنگاه مقدار تابع P برای هر زیر فاصله $[a,b]$ متناسب است با طول آن یعنی $\frac{b-a}{۲}$.

این مثال در حقیقت مدل احتمال آزمایشی است که در آن می‌خواهیم یک عدد حقیقی به تصادف در فاصله $[۰,۲]$ انتخاب کنیم. چون بعضی از اعداد حقیقی، مثلاً $\sqrt{۳}$ را، باید با تقریب اعشاری بیان

کرد، عملاً انجام دقیق چنین آزمایشی مقدور نیست. با این حال می‌توان احتمال بسیاری از پیشامدها را محاسبه کرد. مثلاً احتمال این که عدد انتخابی در فاصله $[0/50\,,0/75]$ قرار گیرد می‌شود $0/125=\frac{0/75-0/50}{2}$، زیرا احتمال متناسب با طول فاصله می‌باشد. به عنوان مثالی دیگر، احتمال این که عدد انتخابی برابر ۱/۵ شود، صفر است. برای اثبات این موضوع عدد بسیار کوچک a را در نظر می‌گیریم. احتمال این که عدد انتخابی در فاصله $[1/5-a\,,1/5+a]$ قرار گیرد متناسب است با طول این فاصله یعنی، $2a$. چون a دلخواه است و می‌توانیم آن را هر اندازه که بخواهیم کوچک اختیار کنیم، بنابراین احتمال این که عدد انتخابی در نزدیکهای ۱/۵ باشد، می‌تواند خیلی کوچک شود و احتمال این که درست عدد ۱/۵ باشد صفر است.

مثال ۳۵ نقطه‌ای به تصادف در دایره‌ای به شعاع R و مرکز O انتخاب می‌کنیم. احتمال پیشامد این که نقطه یاد شده به مرکز دایره نزدیک باشد تا به محیط دایره چقدر است؟

فضای نمونه که مجموعه‌ای است شمارش‌ناپذیر، از نقاط داخل دایره (O,R) و پیشامد منظور، از نقاط داخل دایره $(O,\frac{R}{2})$ تشکیل می‌شود. اگر تمام احتمال را به یک واحد جرم که به طور یکنواخت و اتصالی در سطح داخل دایره اول توزیع شده است تعبیر کنیم، احتمال این پیشامد برابر است با نسبت مساحت دایره دوم به مساحت دایره اول، یعنی

$$\frac{\pi R^2}{4}:(\pi R^2)=\frac{1}{4}$$

مسائلی مانند مثالهای (۳۴) و (۳۵) را مسائل هندسی احتمال می‌نامند. حل آنها، با تعبیر کل احتمال به صورت یک واحد جرم و با فرض اینکه جرم به طور یکنواخت توزیع شده باشد، عملاً منجر به محاسبه طول یا مساحت می‌شود.

۴.۵.۲ تمرین بخش پنج

۱. نشان دهید اگر $S=\{e_1,e_2,\dots\}$ و $P(e_n)=(\frac{1}{2})^n$ برای $n=1,2,\dots$، آنگاه یک فضای احتمال داریم. هرگاه $A=\{e_1,e_2,\dots,e_{10}\}$ و $B=\{e_2,e_4,\dots,e_{20}\}$، احتمالهای زیر را در این فضای احتمال حساب کنید:

$$P(A-B)\quad P(A\cap B)\quad P(A\cup B)$$

۲. در آزمایشی، تاس ناریبی را آنقدر می‌ریزیم تا برای اولین بار خال شش بیاید. اگر تعداد ریزشهای لازم موضوع موردنظر باشد، فضای احتمال را پیدا کنید. احتمال آن که تعداد ریزشهای لازم،

۱- مضرب سه
۲- حداکثر سه
۳- حداقل سه

باشد چقدر است؟

راهنمائی: پیشامد آمدن خال شش را با E و نیامدن آن را با E' نشان دهید.

۳. از شخصی درخواست می‌کنیم تا به تصادف عددی در فاصله $[2,7]$ در نظر گیرد. فضای احتمال را مشخص کنید. احتمال این که عدد یاد شده کوچکتر از سه باشد چقدر است؟ نشان دهید احتمال این که عدد درست در نظر گرفته شود، برابر صفر است.

۴. نقطه M را به تصادف در داخل مربع $ABCD$ که طول هر ضلع آن ۴ واحد است، انتخاب می‌کنیم. احتمال پیشامد اینکه فاصله M از قطر AC کمتر از $\sqrt{2}$ باشد، چیست؟

۵. برای مجموعهٔ $S=\{a,b,c,d\}$، کوچکترین میدان سیگما را که شامل $\{a\}$ و $\{c,d\}$ به ترتیب با احتمالهای $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{4}$ است پیدا کنید. احتمال برای سایر اعضای این میدان سیگما را به دست آورید. یک مجموعه احتمال‌ناپذیر پیدا کنید.

۶. با استفاده از تمرین (۳) پیشامدهای A، B و C را چنان بسازید که داشته باشیم:

$$P(A)=0\quad,\quad A\neq\varnothing$$

$$P(B)=P(C)\quad,\quad B\neq C$$

از این تمرین معلوم می‌شود که هر پیشامدی با احتمال صفر لزوماً تهی نیست. افزون بر این، تابع P همواره یک به یک نمی‌باشد.

۷. ثابت کنید که

(نامساوی بول) $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$

(نامساوی بونفرونی) $P(A\cap B)\ge P(A)+P(B)-1$

۸. ثابت کنید که

$$P(A'\cup B')=1-P(A)-P(B)+P(A\cup B)$$

۹. ثابت کنید نامساوی بول و بونفرونی معادل‌اند، یعنی یکی را از روی دیگری می‌توان بدست آورد؟

۱۰. به کمک استقرای ریاضی و تمرین ۷ ثابت کنید که

$$P(\cup_{i=1}^{n} E_i) \le \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \qquad \text{(نامساوی بول با } n \text{ پیشامد)}$$

$$P(\cap_{i=1}^{n} E_i) \ge \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - n + 1 \qquad \text{(نامساوی بونفرونی با } n \text{ پیشامد)}$$

۱۱. پیشامدهای $A_1, A_2, \ldots, A_n$ را در نظر گرفته فرض می‌کنیم که

$$B_1 = A_1, B_2 = A_1' \cap A_2, \ldots, B_n = A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A'_{n-1} \cap A_n$$

ثابت کنید که

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$$

حال نامساوی بول را برای n پیشامد و بینهایت پیشامد $E_1, E_2, \ldots$ نتیجه بگیرید.

۱۲. آیا قضیه زیر درست است؟

$$P(A-B) = P(B-A) \text{ اگر و تنها اگر } A = B$$

۱۳. فرض کنید

$$P(A) = P(B) = 0/95$$

با استفاده ازنامساوی بونفرونی، حداقل مقدار $P(A \cap B)$ را بیابید.

۱۴. یک فرمول برای محاسبه $P(A \Delta B)$ بیابید.

۱۵. یک فرمول برای محاسبه $P(A \Delta B \Delta C)$ بیابید.

۶.۲ مدل احتمال شرطی

اغلب در یک آزمایش، علم به این که پیشامدی رخ داده است، ممکن است در احتمال رخ دادن پیشامدی دیگر تاثیر کند. مثلاً اگر بدانیم در هفته اول دیماه شهری بارانی بوده است، وقوع این پیشامد می‌تواند احتمال بارانی بودن هفته دوم دیماه را تقلیل دهد.

به طور کلی در یک آزمایش، مدل احتمال به علت پیشامدی که رخ داده است، دستخوش دگرگونی شده مدل جدیدی به نام مدل احتمال شرطی به دست می‌آید. احتمال شرطی دارای اهمیتی خاص می‌باشد و به کمک آن می‌توان تئوری احتمال را گسترش داد و بعضی مسائل پیچیده را حل کرد. برای اینکه منظور از احتمال شرطی روشن شود، پیش از تعریف ریاضی آن به ذکر یک مثال ساده می‌پردازیم.

مثال ۳۶ در آزمایشی یک تاس تااریب را مستقلاً دوبار ریخته‌اند. اگر بدانیم که مجموع خالها کمتر از شش است، احتمال این که خالها مساوی باشند چقدر است؟

در این آزمایش فضای نمونه متشکل است از ۳۶ پیشامد ساده هر یک با احتمال $\frac{1}{36}$. اگر فرض کنیم A پیشامد مساوی بودن خالها و B پیشامد کمتر از شش بودن مجموع خالها باشد داریم:

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

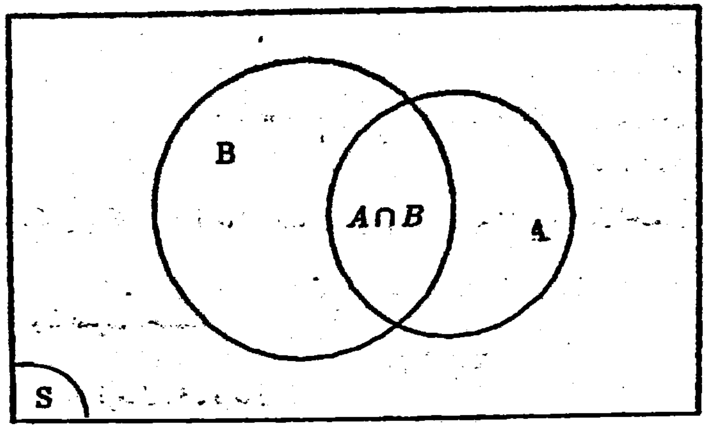
$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$$

$$P(A) = \frac{1}{6} \qquad P(B) = \frac{5}{18}$$

چون می‌دانیم که B با ۱۰ پیشامد ساده رخ داده است، بر پایه علم به این موضوع یقین داریم که ۲۶ پیشامد ساده دیگر رخ نخواهند داد. پس فضای نمونه جدید منحصر به خود B می‌شود و احتمال پیشامد A را باید در چارچوب آن پیدا کرد.

نظر به این که آزمایش دارای مدل احتمال یکنواخت است، طبیعی است که مدل احتمال شرطی را هم یکنواخت فرض کنیم. بنابراین مدل احتمال شرطی از فضای نمونه B با ۱۰ پیشامد ساده هر یک با احتمال $\frac{1}{10}$ تشکیل می‌شود. حال، احتمال شرطی A که آن را با $P(A|B)$ نشان می‌دهند، و احتمال A به شرط B می‌خوانند، برابر است با $\frac{1}{5}$، زیرا این پیشامد موقعی رخ می‌دهد که پیشامد ساده‌ای متعلق به $A \cap B = \{(1,1), (2,2)\}$ رخ دهد و احتمال هر یک از این پیشامدهای ساده در فضای نمونه شرطی $\frac{1}{10}$ است.

اگر مدل احتمال غیر شرطی یکنواخت نباشد، باید احتمال هر پیشامد ساده متعلق به B را متناسباً به نحوی افزایش داد که احتمال شرطی برای B، یعنی فضای نمونه شرطی، برابر یک شود. به طور کلی، با توجه به نگاره (۳)، معقول به نظر می‌رسد که $P(A|B)$ را متناسب با $P(A \cap B)$ بگیریم، یعنی $P(A|B) = KP(A \cap B)$. ضریب K را باید به نحوی اختیار کرد که احتمال شرطی برای B برابر



نگاره ۳ S فضای نمونه و B فضای نمونه شرطی

یک شود. بنابراین

$$1 = P(B|B) = KP(B\cap B) = KP(B)$$

پس با فرض $P(B)\neq 0$ داریم $K=\frac{1}{P(B)}$
اینک که منظور از احتمال شرطی روشن شد دقیقاً آن را تعریف می‌کنیم.

تعریف – فرض کنید A و B دو پیشامد دلخواه در فضای احتمال (S,B,P) باشند به طوری که $P(B)\neq 0$. احتمال A به شرط B، یعنی احتمال پیش آمد A با علم به اینکه پیشامد B رخ داده است، برابر است با

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad (9)$$

اگر $P(B)=0$، آنگاه $P(A|B)$ قابل تعریف نیست.

حال فرض کنید B با $P(B)>0$ یک پیشامد ثابت باشد و برای هر پیشامد دلخواه A، احتمال شرطی $P(A|B)$ را با $P_B(A)$ نشان دهید. به سادگی می‌توان ثابت کرد که (S,B,P_B) یک فضای احتمال است. یعنی تابع مجموعه‌ای P_B از اصول احتمال پیروی می‌کند. این فضای احتمال را فضای احتمال شرطی می‌خوانیم.

مثال ۳۷ مثال (۳۶) را به کمک فرمول (۹) حل کنید.

چون $P(B)=\frac{5}{18}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{18}$، بنابراین

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{18}}=\frac{1}{5}$$

ملاحظه می‌شود که با به کار بردن فرمول احتمال شرطی نیازی به تشریح مدل احتمال شرطی نیست.

۱.۶.۲ قانون ضرب احتمال

با فرض $P(B)>0$ از فرمول (۹)، فرمول

$$P(A\cap B)=P(B)P(A|B) \qquad (10)$$

که به قانون ضرب احتمال معروف است به دست می‌آید.

مثال ۳۸ جعبه‌ای محتوی ۱۷ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب است. از این جعبه دو لامپ را یک به یک به تصادف انتخاب کرده امتحان می‌کنیم. احتمال این که هر دو معیوب باشند چقدر است؟

فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای معیوب بودن لامپ اول و دوم باشند. می‌خواهیم احتمال پیشامد $A\cap B$ را پیدا کنیم.

چون $P(A)=\frac{4}{21}$ و $P(B|A)=\frac{3}{20}$، بنابراین طبق قانون ضرب احتمال داریم

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{21}\times\frac{3}{20}=\frac{1}{35}$$

قانون ضرب احتمال را می‌توان به k پیشامد $A_1, A_2, \ldots, A_k$ با فرض

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1})>0$$

تعمیم داد.

به عنوان مثال برای سه پیشامد A، B و C، با فرض $P(A\cap B)>0$ فرمول زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} P(A\cap B\cap C)&=P[(A\cap B)\cap C]=P(A\cap B)P(C|A\cap B)\\ &=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B) \qquad (11)\end{aligned}$$

فرمول (۱۱) را می‌توان با استفاده از فرمول (۱۰) ثابت کرد.

مثال ۴۹ هفت کارت سفید، شش کارت سبز، و یک کارت قرمز را به خوبی مخلوط می‌کنیم. از میان آنها به تصادف سه کارت را یک به یک بدون جایگذاری انتخاب می‌نمایم. احتمال اینکه این سه کارت به ترتیب سفید و سبز و قرمز باشند چقدر است؟

فرض کنید A، B و C به ترتیب پیشامدهای این باشند که کارتها سفید، سبز و قرمز باشند. از فرمول بالا داریم

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)$$
$$=\frac{۷}{۱۴}\times\frac{۶}{۱۳}\times\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۵۲}$$

مستقیماً هم از راه شمارش می‌توانیم مساله را بدین طریق حل کنیم: جمعاً تعداد ۱۲×۱۳×۱۴ پیشامد ساده همشانس داریم که تعداد ۱×۶×۷ از آنها منجر به پیشامد مطلوب می‌شوند. بنابراین با تقسیم تعداد حالتهای مساعد به حالتهای ممکن، عدد $\frac{۱}{۵۲}$ نتیجه می‌شود.

۲.۶.۲ تمرین بخش شش

۱. آزمایشی را n مرتبه مستقلاً تکرار می‌کنیم. فرض کنید پیشامدهای A، B و $A\cap B$ به ترتیب n_1، n_2 و n_3 مرتبه رخ دهند. صحت فرمول احتمال شرطی را با تعبیر احتمال به طریق فراوانی نسبی نشان دهید.

۲. خانواده‌ای سه فرزند دارد. اگر فرزند اول و آخر همجنس باشند، احتمال همجنس بودن تمام فرزندان چقدر است؟ مسأله را با تشریح مدل احتمال شرطی و همچنین به کمک فرمول احتمال شرطی حل کنید.

۳. یک بسته کارت ۵۲ تائی، به شماره‌های ۱ تا ۵۲، را به خوبی مخلوط می‌کنیم سپس سه کارت یک به یک بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. احتمال این که شماره‌های آنها از ۱۴ کمتر باشد چیست؟ مساله را به کمک شرطی و از راه شمارش حل کنید.

۴. دو تاس را با هم می‌ریزیم. در صورتی که بدانیم مجموع آنها عدد هفت است، احتمال اینکه مینیمم خالها ۳ باشد چقدر است؟

۵. فرمول (۱۱) را با استفاده از فرمول احتمال شرطی (۱۰) و استقرای ریاضی به k پیشامد دهید.

۶. فرض کنید در یک آزمایش، B با $P(B)>0$ یک پیشامد ثابت باشد. برای هر پیشامد دلخواه A احتمال شرطی $P(A|B)$ را با $P_B(A)$ نشان دهید. ثابت کنید تابع مجموعه‌ای P_B از اصول احتمال پیروی می‌کند. اینک فرمولهائی برای $P'(A'|B)$، $P(A_1-A_2|B)$، $P(A_1\cup A_2|B)$ و $P(A_1\Delta A_2|B)$ بیابید.

۷. در ظرفی سه مهره سفید و پنج مهره سیاه داریم. از این ظرف دو مهره بدون جایگذاری یک به یک بیرون می‌آوریم. نشان دهید احتمال این که مهرهٔ اول سفید باشد برابر است با احتمال اینکه مهرهٔ دوم سفید باشد. (هنگام بیرون آوردن مهره دوم از رنگ مهره اول اطلاع نداریم).

۸. دو تاس را با هم می‌ریزیم. فرض کنید B هفت بودن مجموع خالها، A مضرب ۵ بودن، A_1 مضرب ۴ بودن و A_2 مضرب ۳ بودن آنها باشد. احتمالهای یاد شده در تمرین ۶ را مستقیماً و به کمک فرمولهائی که یافته‌اید حل کنید.

۷.۲ فرمول بیز و کاربرد آن

یکی از فرمولهای معروف احتمال که در آن احتمال شرطی به نحوی بارز به کار می‌رود فرمول بیز می‌باشد. این فرمول را یک کشیش انگلیسی به نام توماس بیز در سال ۱۷۶۳ میلادی پیدا کرد. مقاله اصلی بیز مدتها به طور جدی مورد توجه نبود. ولی این مقاله چندی پیش برای بار دوم در یکی از مجلات علمی آمار منتشر شد. فرمول بیز در حقیقت نقطه شروع رشته‌ای از آمار به نام آمار بیز می‌باشد. آمار بیز، که از لحاظ فلسفی و تعبیر احتمال به طریق شخصی دارای اهمیت است، در چند دههٔ گذشته توسط آماردانان طی کتب و مقالات متعدد مورد بحث و تحقیق قرار گرفته است.

این روزها دربارهٔ آمار بیز زیاد می‌توان صحبت کرد. ما تنها بعد از مقدمات لازم، فرمول بیز و کاربرد آن را با چند مثال شرح می‌دهیم.

۱.۷.۲ تفکیک فضای نمونه به چند پیشامد

فرض کنید پیشامدهای $A_1,A_2,\dots,A_k$ که دارای احتمال مثبت هستند، دو به دو جدا از هم و اجتماع آنها برابر فضای نمونه، S باشد. یعنی

$$A_i\cap A_j=\varnothing,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,\dots,k$$

$$\cup_{i=1}^{k}A_i=S$$

اصطلاحاً می‌گوئیم S به این پیشامدها تفکیک شده است، یا این پیشامدها یک افراز برای S هستند. گاهی این پیشامدها را دو به دو از هم جدا و فراگیر می‌نامند.

مثال ۴۰ در آزمایشی سکه‌ای را سه بار می‌اندازیم. فضای نمونه را می‌توان به پیشامدهای صفر شیر، یک شیر، دو شیر و سه شیر یعنی:

$$\{TTT\}, \{HTT, THT, TTH\}, \{HHT, HTH, THH\}, \{HHH\}$$

تفکیک کرد.

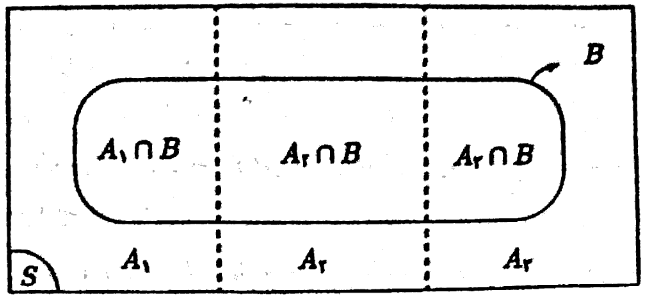
۲.۷.۲ تفکیک یک پیشامد به چند پیشامد

فرض کنید فضای نمونه S به پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_k$ تفکیک شده باشد. برای هر پیشامد دیگر B که دارای احتمال مثبت باشد داریم:

$$B = B\cap S = B\cap(\cup_{i=1}^{k} A_i) = \cup_{i=1}^{k} (A_i\cap B) \qquad (۱۲)$$

اصطلاحاً می‌گوئیم پیشامد B به پیشامدهای $A_1\cap B, A_2\cap B, \dots, A_k\cap B$ تفکیک شده است. اگر پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_k$ را به صورت علت و B را به صورت معلول تلقی کنیم، آنگاه می‌توان گفت که B معلول یکی از این علل می‌باشد. فرمول (۱۲) پیشامد B را با توجه به علل گوناگون تفکیک می‌کند.
برای توجیه هندسی به نگاره (۴) که در آن S به سه پیشامد A_1, A_2, A_3 تفکیک شده است توجه کنید.

مثال ۴۱ پانزده کارت یکسان به شماره‌های یک تا پانزده داریم. یکی از کارتها را به تصادف انتخاب می‌کنیم. فرض کنید فضای نمونه به کارتهای فرد و زوج تفکیک شده باشد. پیشامد کارت مضرب سه به پیشامدهای {۳، ۹، ۱۵}، {۶، ۱۲} تفکیک می‌شود.
اینک از فرمول (۱۲) استفاده کرده دو فرمول مهم به نام فرمول تفکیک احتمال و فرمول بیز را به دست می‌آوریم.



نگاره ۴ تفکیک پیشامد B به سه پیشامد

۳.۷.۲ فرمول تفکیک احتمال

از فرمول (۱۲) با استفاده از قانونهای جمع و ضرب احتمال داریم:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{k} P(A_i\cap B)$$

یا

$$P(B)=\sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i) \qquad (۱۳)$$

این فرمول را فرمول تفکیک احتمال یا فرمول احتمال مرکب می‌نامند و برای حل بعضی مسائل احتمال مفید است.

۴.۷.۲ فرمول بیز

از فرمول احتمال شرطی داریم

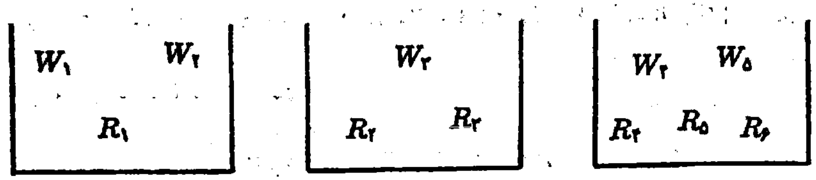
$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j\cap B)}{P(B)} \qquad j=1,2,\dots,k$$

حال با استفاده از فرمول تفکیک احتمال و قانون ضرب احتمال، فرمول معروف بیز به صورت

$$P(A_j|B)=\frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i)} \qquad j=1,2,\dots,k \qquad (۱۴)$$

به دست می‌آید. بنابراین فرمول بیز، در واقع، وسیله‌ای برای محاسبه احتمال شرطی است، هنگامی که فضای نمونه به چند پیشامد تفکیک شده باشد.

مثال ۴۲ سه ظرف داریم. ظرف یک محتوی دو مهره سفید و یک مهره قرمز، ظرف دو محتوی یک مهره سفید و دو مهره قرمز، و ظرف سه محتوی دو مهره سفید و سه مهره قرمز است.



ظرف یک   ظرف دو   ظرف سه

فرض کنید ظرفها و مهره‌ها گذشته از هویت و رنگ کاملاً یکسان باشند. یکی از این سه ظرف را به تصادف انتخاب می‌کنیم و از آن به تصادف یک مهره بیرون می‌آوریم.

الف – احتمال این که مهره سفید باشد چقدر است؟ (احتمال معلول)

ب – اگر مهره سفید باشد، احتمال این که از ظرف سه بیرون آمده باشد چقدر است؟ (احتمال علت)

فرض کنید B پیشامد سفید بودن مهره و A_1، A_2 و A_3 به ترتیب پیشامدهای انتخاب ظروف یک، دو و سه باشند. واضح است که

$$P(A_1)=\frac{1}{3} \quad P(A_2)=\frac{1}{3} \quad P(A_3)=\frac{1}{3}$$

$$P(B|A_1)=\frac{2}{3} \quad P(B|A_2)=\frac{1}{3} \quad P(B|A_3)=\frac{2}{5}$$

الف – از فرمول تفکیک احتمال داریم:

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{15}$$

ب – از فرمول بیز داریم:

$$P(A_3|B)=\frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)}=\frac{2}{7}$$

در این مثال فضای نمونه عبارتست از

$$S=\{W_1,W_2,R_1,W_3,R_2,R_3,W_4,W_5,R_4,R_5,R_6\}$$

که در آن تمام پیشامدهای ساده همشانس نیستند، زیرا ترکیب مهره‌ها در این سه ظرف با هم فرق دارند. فضای پیشامدهای ساده، به پیشامدهای

$$A_1=\{W_1,W_2,R_1\} \quad A_2=\{W_3,R_2,R_3\} \quad A_3=\{W_4,W_5,R_4,R_5,R_6\}$$

تفکیک می‌شود. پیشامد B عبارت است از

$$B=\{W_1,W_2,W_3,W_4,W_5\}$$

۵.۷.۲ احتمال پیشین و احتمال پسین

هرگاه دربارهٔ رخ دادن پیشامد A عقیده خود را به صورت احتمال بیان کنیم، چنین احتمالی را که طبیعتاً باید به طریق شخصی تعبیر شود احتمال پیشین می‌نامند.

حال اگر با کسب اطلاعات جدید، از راه رخ دادن پیشامد B، درباره رخ دادن A تغییر عقیده دهیم، احتمال جدید A را احتمال پسین می‌نامیم. برای این که مفهوم این دو احتمال روشن شود به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴۳ شخصی سکه‌ای در دست دارد که عقیده داریم با احتمال ۰/۱ دو شیری است. یعنی هر دو طرف آن شیر هستند. این احتمال را که جنبه شخصی دارد، احتمال پیشین می‌گوئیم.

برای بررسی عقیده خود در مورد دو شیری بودن سکه، از این شخص می‌خواهیم که سکه را به تصادف بیندازد. مطلوبست احتمال دو شیری بودن سکه به شرط اینکه شیر بیاید (این احتمال را احتمال پسین می‌گوئیم). اگر سکه یک شیری باشد آن را نااریب فرض می‌کنیم.

پیشامد دو شیری بودن سکه را با A_1 و یک شیری بودن آن را با A_2 نشان می‌دهیم. فرض کنید B پیشامد شیر آمدن سکه باشد. واضح است که

$$P(A_1)=0/1 \;, \quad P(A_2)=0/9 \;, \quad P(B|A_1)=1 \;, \quad P(B|A_2)=\frac{1}{2}$$

از فرمول بیز داریم

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)}$$

$$=\frac{0/1}{0/1+0/45}=0/182$$

ملاحظه می‌شود که احتمال پیشین ۰/۱ و احتمال پسین ۰/۱۸۲ است. در حقیقت چون سکه شیر آمده است، عقیده ما بر دو شیری بودن سکه افزایش یافته است. چنانچه اگر خط آمده بود یقین پیدا می‌کردیم که سکه یک شیری است.

مثال ۴۴ نتیجه یک آزمایش پزشکی با احتمال ۰/۸ برای بیماری سرطانی مثبت، و با احتمال ۰/۹ برای دیگران منفی است. فرض کنید ۰/۰۰۰۲ از مردم شهری سرطان داشته باشند. مطلوبست احتمال این که نتیجه مثبت حاکی از سرطان باشد.

فرض کنید A پیشامد سرطان داشتن و B پیشامد مثبت بودن نتیجه آزمایش پزشکی باشد. بنابراین

$$P(B|A)=۰/۸ \quad , \quad P(B'|A')=۰/۹ \quad , \quad P(A)=۰/۰۰۲$$

می‌خواهیم $P(A|B)$ را محاسبه کنیم. طبق فرمول بیز داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A')P(A')}$$
$$=\frac{(۰/۸)(۰/۰۰۰۲)}{(۰/۸)(۰/۰۰۰۲)+(۰/۱)(۰/۹۹۹۸)}=۰/۰۰۱۶$$

ملاحظه می‌شود احتمال این که شخصی در این شهر سرطان داشته باشد ۰/۰۰۰۲ است (احتمال پیشین)، ولی اگر نتیجه آزمایش سرطان در مورد این شخص مثبت باشد، این احتمال افزایش پیدا می‌کند و به ۰/۰۰۱۶ می‌رسد (احتمال پسین).

۶.۷.۲ تمرین بخش هفت

۱. یک شرکت لامپ سازی دارای سه کارخانه است که ۱۵٪، ۳۵٪، ۵۰٪ از لامپها را تولید می‌کنند. فرض کنید احتمال کم عمر بودن لامپی که توسط این کارخانه‌ها تولید می‌شود به ترتیب ۰/۰۲، ۰/۰۵ و ۰/۰۱ باشد. اگر لامپی محصول این شرکت باشد، احتمال کم عمر بودن آن چقدر است؟

۲. در ظرفی دو مهره سفید و سه مهره سیاه داریم. از این ظرف یک مهره به تصادف بیرون آورده مهره‌ای با رنگ مخالف در آن می‌گذاریم. سپس یک مهره دیگر از ظرف بیرون می‌آوریم. احتمال این که مهره دوم سفید باشد چقدر است؟ اگر مهره دوم سفید باشد، احتمال سیاه بودن مهره اول چقدر است؟

۳. دو ظرف داریم. ظرف اول محتوی دو مهره سفید و سه مهره سیاه، و ظرف دوم محتوی سه مهره سفید و دو مهره سیاه است. چشم بسته یک مهره از ظرف اول بیرون آمده و در ظرف دوم

می‌گذاریم. سپس از ظرف دوم دو مهره بیرون می‌آوریم. احتمال این که این دو مهره سفید باشند چقدر است؟ اگر این دو مهره سفید باشند، احتمال سفید بودن مهره اول چقدر است؟

۴. در مثال (۴۳) اگر سکه را مستقلاً دوبار بیندازیم و هر دو بار شیر بیاید، احتمال پسین چقدر است؟ مسئله را به جای دوبار، برای n بار حل کنید و نتیجه محاسبه را تفسیر نمائید.

۵. دادگاهی با احتمال ۰/۹ متهم گناهکار را محکوم و با احتمال ۰/۹۵ متهم بیگناه را تبرئه می‌کند. هرگاه ۰/۰۰۵ از متهمان گناهکار باشند، احتمال این که محکوم شدن ناشی از گناهکاری باشد چقدر است؟

۶. شرکتی ۴۰٪ لاستیک را از کارخانه A و بقیه را از کارخانه B می‌خرد. معمولاً ۱۰٪ لاستیک کارخانه A و ۵٪ لاستیک کارخانه B معیوب است. از این شرکت یک حلقه لاستیک خریده‌اند اگر این حلقه معیوب باشد، احتمال اینکه از کارخانه A باشد چقدر است؟

۸.۲ پیشامدهای مستقل

فرض کنید A و B دو پیشامد با احتمال مثبت در یک فضای احتمال باشند. ممکن است علم به این که B رخ داده است بهیچوجه در احتمال رخ دادن A تاثیر نکند، یعنی رابطه عددی

$$P(A|B)=P(A) \qquad (*)$$

صحت داشته باشد. در اینصورت می‌گوئیم A مستقل از B است. به سادگی می‌توان نشان داد که اگر A مستقل از B باشد، B هم مستقل از A است، یعنی از $(*)$ داریم:

$$P(B|A)=P(B) \qquad (**)$$

برای اثبات این موضوع، با استفاده از تعریف احتمال شرطی، قانون ضرب، و رابطه $(*)$ داریم:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

ضمناً رابطه زیر هم که نسبت به A و B متقارن است، به دست می‌آید:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) \qquad (***)$$

این سه رابطه با هم معادل هستند و می‌توان هر یک را به عنوان تعریف دو پیشامد مستقل به کار برد. با این حال برای این که نشان دهیم مستقل بودن دو پیشامد امری است متقارن و پیشامدها را به داشتن احتمال مثبت مقید نسازیم، رابطه سوم را به عنوان تعریف به کار می‌بریم.

۱.۸.۲ دو پیشامد مستقل

در یک فضای احتمال دو پیشامد A و B را مستقل می‌نامیم هرگاه داشته باشیم

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) \qquad (۱۵)$$

باید بیفزائیم که ویژگی مستقل بودن دو پیشامد یک رابطه عددی است نه مجموعه‌ای. برقراری این رابطه برای دو پیشامد، به تابع احتمال P بستگی دارد. مفهوم مستقل بودن دو پیشامد، نقش عمله‌ای در پیشبرد احتمال و آمار داشته است. این مفهوم نظریه احتمال را از نظریه آنالیز ریاضی جدا ساخته و هویت هر یک را مشخص می‌کند.

مثال ۴۵ در ظرفی دو مهره سفید و یک مهره قرمز داریم. از این ظرف دو مهره یک به یک و با جایگذاری به تصادف بیرون می‌آوریم. فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهره اول و B پیشامد قرمز بودن مهره دوم باشد. آیا A و B مستقل هستند؟

عقل سلیم به ما حکم می‌کند که A و B مستقل هستند، زیرا با جایگذاری مهره اول در ظرف شرائط ظرف تغییر نمی‌کند و سفید بودن مهره اول در شانس قرمز بودن مهره دوم تاثیری ندارد. با این حال موضوع را طبق تعریف بررسی می‌نمائیم.

برای این که مطلب روشن شود، فضای نمونه را در جدول زیر تشریح می‌کنیم. به عنوان مثال در این جدول منظور از (R,W_1) این است که مهره اول قرمز و مهره دوم سفید باشد.

II \ I	W_1	W_2	R
W_1	(W_1,W_1)	(W_1,W_2)	(W_1,R)
W_2	(W_2,W_1)	(W_2,W_2)	(W_2,R)
R	(R,W_1)	(R,W_2)	(R,R)

A

B

ملاحظه می‌شود که $P(A)=\frac{۶}{۹}$، $P(B)=\frac{۳}{۹}$ و $P(A\cap B)=\frac{۲}{۹}$. بنابراین

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{۲}{۹}$$

اگر آزمایش را بدون جایگذاری انجام دهیم، قطعاً A و B مستقل نخواهد بود، زیرا رنگ مهره اول در رنگ مهره دوم تاثیر دارد. در این حال فضای نمونه تنها از شش پیشامد ساده تشکیل می‌شود. یعنی پیشامدهای ساده (W_1,W_1)، (W_2,W_2) و (R,R) را باید از جدول بالا حذف کرد. محاسبه نشان می‌دهد که در آزمایش بدون جایگذاری داریم:

$$P(A\cap B)=\frac{۲}{۶} \quad , \quad P(B)=\frac{۲}{۶} \quad , \quad P(A)=\frac{۴}{۶}$$

بنابراین

$$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

مثال ۴۶ یک بسته کارت ۵۲ تائی، به شماره‌های ۱ تا ۵۲تائی، را به خوبی مخلوط می‌کنیم. سپس یک کارت به تصادف بیرون می‌آوریم. فرض کنید E پیشامد «شماره کارت کمتر از ۱۴» و F پیشامد «شماره کارت بیش از ۴» و مضرب ۴ باشد. آیا E و F مستقل‌اند؟

$$P(E\cap F)=\frac{۳}{۵۲} \quad , \quad P(F)=\frac{۱۲}{۵۲} \quad , \quad P(E)=\frac{۱۳}{۵۲}$$

ملاحظه می‌شود که

$$P(E\cap F)=P(E)P(F)=\frac{۳}{۵۲}$$

یعنی E و F دو پیشامد مستقل هستند.

۲.۸.۲ دو پیشامد مستقل و دو پیشامد جدا

اغلب دو پیشامد جدا را به غلط به عنوان دو پیشامد مستقل می‌پندارند. اگر A و B بخواهند هم مستقل و هم جدا باشند، لازم است داشته باشیم:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) \quad , \quad A\cap B=\varnothing$$

بنابراین لااقل یکی از این دو پیشامد باید دارای احتمال صفر باشد. یعنی دو پیشامد مستقل با احتمالهای مثبت هرگز نمی‌توانند جدا باشند، مگر اینکه یکی از آنها دارای احتمال صفر باشد.

مثال ۴۷ تاس نااریبی را می‌اندازیم. دو پیشامد خال فرد و خال زوج جدا هستند ولی مستقل نیستند. دو پیشامد خال زوج و خال مضرب سه مستقل هستند ولی جدا نیستند.

با نوشتن پیشامدها و محاسبه احتمال آنها، درستی این مطالب را می‌توان نشان داد.

۳.۸.۲ چند پیشامد مستقل

پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ مستقل هستند هرگاه برای هر k تای آنها داشته باشیم

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{ik}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{ik}) \quad , \quad 2 \le k \le n$$

از این تعریف معلوم می‌شود که اگر n پیشامد مستقل باشند، هر تعدادی از آنها هم مستقل خواهند بود.

مثال ۴۸ برای مستقل بودن سه پیشامد A_1, A_2, A_3 باید چهار رابطه زیر همگی برقرار باشند

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_4)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

سه رابطه اول نشان می‌دهند که این سه پیشامد دو به دو مستقل هستند، ولی رابطه چهارم از آنها به دست نمی‌آید. به عنوان مثال، یک مدل احتمال یکنواخت با فضای نمونه

$$S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

و سه پیشامد

$$A_1 = \{e_1, e_2\} \quad , \quad A_2 = \{e_1, e_3\} \quad , \quad A_3 = \{e_1, e_4\}$$

را در نظر می‌گیریم. در اینجا این سه پیشامد دو به دو مستقل هستند، ولی همگی مستقل نیستند زیرا از

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(e_1) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1)P(A_2)P(A_3) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$$

معلوم می‌شود که رابطه چهارم برقرار نیست.

ضمناً از رابطه چهارم نمی‌توان بقیه روابط را به دست آورد، یعنی این رابطه به تنهائی برای مستقل بودن این سه پیشامد کافی نیست. به عنوان مثال یک مدل احتمال یکنواخت با فضای نمونه

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_8\}$$

و سه پیشامد

$$A_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_8\} \quad , \quad A_2 = \{e_4, e_5, e_6, e_8\} \quad , \quad A_3 = \{e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

در نظر می‌گیریم. این سه پیشامد دو به دو مستقل نیستند، ولی رابطه چهارم صحت دارد زیرا

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(e_8) = \frac{1}{8}$$

$$P(A_1)P(A_2)P(A_3) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$$

۴.۸.۲ حاصلضرب دو مدل احتمال

دو مدل احتمال زیر را در نظر می‌گیریم.

مدل اول با فضای نمونه $S_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ و احتمالهای $p_1, p_2, \dots, p_m$. مدل دوم با فضای نمونه $S_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ و احتمالهای $q_1, q_2, \dots, q_n$. فرض کنید

$$S = S_1 \times S_2 = \{(a_i, b_j) : i = 1, 2, \dots, m \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n\}$$

حاصلضرب دکارتی S_1 و S_2 باشد. چون

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

پس داریم:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j = 1$$

حال اگر به هر عضو S یعنی به (a_i, b_j) احتمال $p_i q_j$ را نسبت دهیم، یک مدل احتمال جدید یا فضای نمونه S، که آن را مدل حاصلضرب می‌نامند، بدست می‌آید.

می‌توان نشان داد که اگر E پیشامدی متعلق به مدل اول و F پیشامدی متعلق به مدل دوم باشد حاصلضرب دکارتی $E\times F$ پیشامدی متعلق به مدل حاصلضرب است و داریم

$$P(E\times F)=P(E)P(F) \qquad (16)$$

معمولاً مدل احتمال دو آزمایش که پیاپی یا با هم انجام می‌گیرند و روی یکدیگر تاثیر نمی‌کنند مانند دوبار انداختن یک سکه، یا انداختن یک تاس و یک سکه با هم، یا یک به یک بیرون آوردن دو مهره از ظرفی با جایگذاری، به صورت مدل حاصلضرب می‌باشد.

مثال ۴۹ یک سکه و یک تاس نااریب را پیاپی یا با هم می‌اندازیم. مدل احتمال برای سکه از $S_1=\{H,T\}$ با احتمال $\frac{1}{2}$ برای هر پیشامد ساده و برای تاس از $S_2=\{1,2,\ldots,6\}$ با احتمال $\frac{1}{6}$ برای هر پیشامد ساده تشکیل می‌شود. مدل حاصلضرب از

$$S=\{(H,1),(H,2),\ldots,(H,6),(T,1),(T,2),\ldots,(T,6)\}$$

با احتمال $\frac{1}{12}$ برای هر پیشامد ساده تشکیل می‌شود.

فرض بر این است که در مدل حاصلضرب آزمایشهای مربوط روی هم اثر ندارند. بنابراین اگر E پیشامدی متعلق به مدل اول و F پیشامدی متعلق به مدل دوم باشد، در مدل حاصلضرب دو پیشامد $A=E\times S_2$ و $B=S_1\times F$ مستقل هستند.

برای اثبات این موضوع از فرمول (۱۶) داریم:

$$P(B)=P(S_1)P(F)=P(F)\ ,\quad P(A)=P(E)P(S_2)=P(E) \qquad (17)$$

افزون بر این می‌توان نشان داد که:

$$A\cap B=(E\times S_2)\cap(S_1\times F)=E\times F \qquad (18)$$

حال با استفاده از (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

مثال ۵۰ در مثال ۴۹ پیشامد شیر برای سکه و پیشامد خال زوج برای تاس مستقل هستند این موضوع بدون متوسل شدن به محاسبه، محسوس است. زیرا وقتی یک سکه و تاس را با هم می‌اندازیم نقش سکه و خال تاس روی هم تاثیری ندارند. ضمناً پیشامد شیر مربوط به مدل احتمال سکه و پیشامد خال زوج مربوط به مدل احتمال تاس است.

با این حال مساله را از راه محاسبه حل می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد شیر و B پیشامد خال زوج باشد. بدیهی است که

$$A=\{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6)\}=\{H\}\times S_2$$

$$B=\{(H,2),(H,4),(H,6),(T,2),(T,4),(T,6)\}=S_1\times\{2,4,6\}$$

$$A\cap B=\{(H,2),(H,4),(H,6)\}=\{H\}\times\{2,4,6\}$$

و

$$P(A)=\frac{1}{2}\ ,\quad P(B)=\frac{1}{2}\ ,\quad P(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

بنابراین A و B مستقل هستند.

مدل حاصلضرب را می‌توان به جای دو مدل به چند مدل که دارای فضای نمونه با پایان یا بی‌پایان می‌باشند تعمیم داد. مثلاً اگر در آزمایشی سکه‌ای را ده بار بیندازیم، مدل احتمال از حاصلضرب ده مدل احتمال آن سکه تشکیل می‌شود.

به عنوان مثالی دیگر، در آزمایشی نقطه‌ای به تصادف در داخل مربعی که طول هر ضلع آن یک واحد است، انتخاب می‌کنیم. مدل احتمال این آزمایش از حاصلضرب دو مدل احتمال یکنواخت در فاصله $[0,1]$ تشکیل می‌شود.

۵.۸.۲ تمرین بخش هشت

۱. یک سکه نااریب را سه بار می‌اندازیم. فرض کنید A پیشامد مشاهده شیر و خط با هم و B پیشامد مشاهده حداکثر یک شیر باشد. نشان دهید A و B مستقل هستند. اگر سکه را دوبار بیندازیم، نشان دهید A و B مستقل نیستند.

۲. بسته کارت ۵ تائی، به شماره‌های ۱ تا ۵۲تائی، را به خوبی مخلوط می‌کنیم. سپس دو کارت یک به یک با جایگذاری بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه هر دو کارت شماره فرد داشته باشند چقدر است؟

۳. ثابت کنید اگر A و B مستقل باشند، A' و B مستقل هستند. درباره A' و B' چه فکر می‌کنید؟

۴. اگر $P(A) = ۰$ یا $P(A) = ۱$، می‌گوئیم A یک پیشامد غیر واقعی است. ثابت کنید پیشامد غیر واقعی A از هر پیشامد دیگر B مستقل است.

۵. فرض کنید A، B، و C سه پیشامد مستقل باشند. ثابت کنید

$C, A\cup B$

$C, A\cap B$

$C, A-B$

$C, A\Delta B$

C, B, A'

مستقل هستند.

۶. ثابت کنید برای یک تاس ناارب، پیشامدهای خال زوج و خال مضرب سه مستقل هستند. آیا این موضوع برای یک تاس اریب درست است؟ با دو مثال عددی موضوع را بررسی کنید.

۷. فرمول (۱۶) را ثابت کنید.

۸. یک تاس ناارب و یک تاس اریب، که برای آن احتمال هر خال فرد $\frac{۱}{۹}$ و هر خال زوج $\frac{۲}{۹}$ است، در دست داریم. این دو تاس را با هم می‌اندازیم. مدل احتمال را به صورت حاصلضرب نشان دهید. ثابت کنید پیشامد خال زوج برای تاس ناارب و خال مضرب سه برای تاس اریب مستقل می‌باشند. مساله را مانند مثال (۵۰) تشریح کنید.

۹. سکه‌ای را سه بار می‌اندازیم. مدل احتمال را به صورت حاصلضرب تشریح کنید.

۱۰. نقطه‌ای به تصادف در مربعی که طول هر ضلع آن یک واحد است در نظر می‌گیریم. مدل احتمال را به صورت حاصلضرب تشریح کنید. احتمال اینکه طول این نقطه در فاصله $(۰, \frac{۱}{۲})$ و عرضش در فاصله $(۰/۵, ۱)$ باشد چیست؟

۱۱. یک مدل احتمال یکنواخت با فضای نمونه

$$S = \{۱, ۲, ..., N\}$$

در نظر می‌گیریم. ثابت کنید در این مدل دو پیشامد مستقل واقعی یافت می‌شوند، اگر و تنها اگر N عدد اول نباشد.

فصل ۳

متغیر تصادفی - تابع توزیع - تابع چگالی

۱.۳ مفهوم متغیر تصادفی

برای اینکه مفهوم متغیر تصادفی روشن شود، نخست به ذکر یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۱ سکه نااریبی را دوبار به تصادف می‌اندازیم، شماره شیرها را در این آزمایش تصادفی با X نشان می‌دهیم. واضح است که از پیشامدی به پیشامد دیگر، مقدار X تغییر می‌کند. مثلاً اگر پیشامد HH رخ دهد X برابر ۲ و اگر پیشامد HT رخ دهد X برابر ۱ می‌شود. افزون بر این تغییر، عامل شانس حاکم می‌باشد. مثلاً احتمال اینکه X برابر ۲ شود، $\frac{۱}{۴}$ و احتمال اینکه برابر ۱ شود $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. از اینرو X را یک متغیر تصادفی می‌نامند.

در حقیقت X تابعی است که دامنه آن فضای نمونه یعنی، $S = \{TT, TH, HT, HH\}$ و برد آن زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی R به صورت $S_X = \{۰, ۱, ۲\}$ است. این زیر مجموعه اغلب تکیه‌گاه متغیر تصادفی X نامیده می‌شود. نگاره (۱) را ببینید.

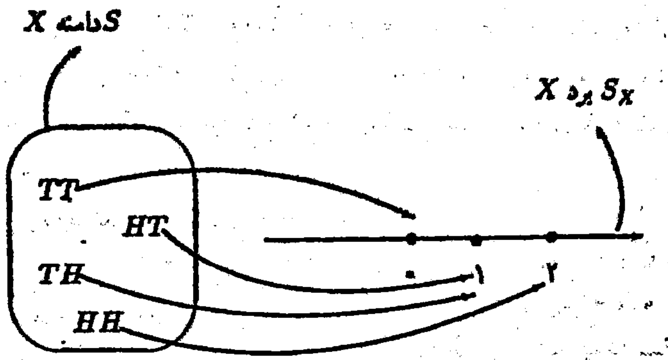
ملاحظه می‌شود که

$$X(TT) = ۰ \;, \quad X(TH) = X(HT) = ۱ \;, \quad X(HH) = ۲$$

این متغیر تصادفی را، با دامنه و برد آن، به صورت زیر هم نشان می‌دهند:

$$X : \{TT, TH, HT, HH\} \to \{۰, ۱, ۲\} \subset R$$

چون قانون شانس بر تغییرات تابع X حاکم است حتماً باید آن را تابع تصادفی بنامیم ولی با اصطلاحی نارسا، همه جا به متغیر تصادفی شهرت یافته است. ضمناً کاربرد X به جای تابع $X(e)$،



نگاره ۱ متغیر تصادفی X به عنوان یک تابع

درست مانند کاربرد f به جای تابع $f(x)$ است. در متغیر تصادفی $X(e)$ پیشامد ساده e نقش متغیر x را در تابع $f(x)$ دارد.

پیشامدها را معمولاً با استفاده از X می‌توانیم نشان دهیم. مثلاً پیشامد کوچکتر بودن شماره شیرها از ۲ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$(X<2)=\{TT,TH,HT\}$$

احتمال این پیشامد را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$P(X<2)=P(\{TT,HT,TH\})=\frac{3}{4}$$

به طور کلی پیشامد تعلق داشتن X به مجموعه عددی A به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(X\in A)=\{e|e\in S,X(e)\in A\}$$

در مثال ۱ داریم:

$$(X\in[1,\tfrac{5}{4}])=\{TH,HT\}$$

$$(X\in(0,6))=(HT,TH,HH)$$

به ویژه پیشامد $(X<2)$ را با $(X\in(-\infty,2))$ نشان می‌دهیم.

متغیر تصادفی را با حروف بزرگ لاتین، مثلاً X، و عددی را که نتیجه انجام یک آزمایش تصادفی است، با حروف کوچک لاتین، مثلاً x، نشان می‌دهیم. عدد x را یافته (یعنی مقدار مشاهده شده) متغیر تصادفی X می‌گوئیم. بنابراین S_X، یعنی برد تابع X، در حقیقت فضای یافته‌های X یا فضای نمونه این متغیر تصادفی است.

اینک متغیر تصادفی را دقیقاً تعریف می‌کنیم.

۱.۱.۳ تعریف متغیر تصادفی

یک مدل احتمال، با فضای نمونه S، را در نظر میگیریم. تابع حقیقی X را که دامنه آن S و بردش زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است، یک متغیر تصادفی روی این مدل احتمال می‌نامند. برد X را با S_X نشان می‌دهیم و آن را تکیه‌گاه X می‌نامیم. در حقیقت تابع X مجموعهٔ S را که ممکن است عددی نباشد به یک مجموعهٔ عددی S_X تبدیل می‌کند.

برای هر زیر مجموعهٔ عددی A منظور از $(X\in A)$، پیشامد این است که یافته X در A قرار گیرد. احتمال این پیشامد را با $P(X\in A)$ نشان می‌دهیم.

حال به دو مثال دیگر که در یکی X شمارش‌پذیر بی‌پایان و در دیگری شمارش‌ناپذیر است توجه می‌کنیم.

مثال ۲ بازی شیر و خط را با سکه‌ای نااریب، آنقدر ادامه می‌دهیم تا برای اولین بار شیر بیاید. در این آزمایش دنباله‌ای از T را که به H انتهای می‌شود، مانند $TTTH$، پیشامدی ساده می‌پنداریم. فضای نمونه عبارت است از:

$$S=\{H,TH,TTH,\dots\}$$

اینک فرض کنید متغیر تصادفی X شماره بازیهای لازم برای آمدن اولین شیر باشد. مثلاً اگر با سه بازی، شیر بیاید، داریم: $X(TTH)=3$. در این مثال تکیه‌گاه X می‌شود مجموعهٔ اعداد طبیعی، یعنی:

$$S_X=\{1,2,\dots\}$$

احتمال پیشامد زوج بودن شماره بازیهای لازم برای مشاهده اولین شیر برابر است با:

$$P(X\in\{2,4,\dots\})=P(\{TH,TTTH,\dots\})$$
$$=(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^4+\dots=\tfrac{1}{3}$$

احتمال پیشامد بزرگتر بودن شمارهٔ بازیهای لازم از ۴، برای مشاهده اولین شیر برابر است با:

$$P(X>۴)=P(X\in\{۵,۶,\dots\})$$
$$=(\frac{۱}{۲})^۵+(\frac{۱}{۲})^۶+\dots=\frac{۱}{۱۶}$$

ملاحظه می‌شود که در مثال ۱ و ۲ مجموعهٔ S_X شمارش‌پذیر می‌باشد. با این تفاوت که در مثال اول S_X باپایان و در مثال دوم بی‌پایان است. در این دو مثال متغیر تصادفی، احتمال را از فضای نمونه به مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌برد و در نقاط جداگانه جا می‌دهد. بدین جهت دراین دو مثال X را متغیر تصادفی گسسته می‌نامند. حال به مثال زیر که در آن S_X یک فاصله است توجه کنید.

مثال ۳ نقطه M را به تصادف در داخل دایره‌ای به شعاع ۲ واحد و مرکز صفر انتخاب می‌کنیم (دایره C). فضای نمونه S از تمام داخل این دایره تشکیل می‌شود. فرض کنید متغیر تصادفی X برای هر نقطه M، اندازه پاره خط OM باشد، که آن را با x_M نشان می‌دهیم پس داریم: $X(M)=x_M$. تکیه‌گاه X می‌شود: $S_X=[۰,۲)$. ملاحظه می‌شود که X احتمال را که بطور یکنواخت و پیوسته در داخل دایره توزیع شده است، بطور پیوسته، ولی نه یکنواخت به فاصله نیم باز $[۰,۲)$ می‌برد.

اینک به عنوان مثال احتمال پیشامد اینکه نقطه‌ای انتخاب شود که فاصله آن از مرکز دایره کمتر از ۱ باشد را حساب می‌کنیم. این پیشامد می‌شود: $(X<۱)$ و از نقاط داخل دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز صفر تشکیل می‌شود (دایره C'). احتمال آن برابر است با مساحت دایره C' به مساحت دایره C یعنی:

$$P(X<۱)=\frac{\text{مساحت دایره } C'}{\text{مساحت دایره } C}=\frac{۱}{۴}$$

در این مثال تکیه‌گاه X یک فاصله عددی می‌باشد. از اینرو X را یک متغیر تصادفی پیوسته می‌نامند.

۲.۱.۳ متغیر تصادفی گسسته و پیوسته

متغیر تصادفی X را گسسته می‌گویند هرگاه برد آن یعنی S_X یک مجموعهٔ عددی شمارش‌پذیر باشد و آن را پیوسته می‌گویند هرگاه S_X یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله عددی باشد.

۳.۱.۳ تمرین بخش یک

۱. یک سکه نااریب را سه بار به طور تصادفی می‌اندازیم. فرض کنید X شماره شیرها باشد.

الف - برای تمام پیشامدهای ساده، مقدار X را در یک جدول بنویسید.

ب - احتمال پیشامدهای $(X\le ۲)$، $(X>۳)$، $(۱\le X<۲)$ را پیدا کنید.

ج - S_X را پیدا کنید. چرا X گسسته است؟

د - اگر Y شماره خطها باشد، آیا $X=Y$؟ آیا $S_Y=S_X$؟ چرا؟

۲. یک تاس نااریب را آنقدر می‌ریزیم تا برای اولین بار خال شش بیاید.

الف - اگر A پیشامد خال شش و B پیشامد خال غیر شش، در هر ریزش باشد، فضای نمونه و احتمال هر پیشامد ساده را پیدا کنید.

ب - فرض کنید X شماره ریزشهای لازم برای مشاهدهٔ اولین شش باشد. S_X را پیدا کنید. آیا X گسسته است؟ چرا؟

ج - احتمال اینکه X مضرب سه باشد چقدر است؟

۳. نقطه M را به تصادف در داخل مربع $ABCD$ که طول هر ضلع آن یک واحد است انتخاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X فاصله M از قطر AC می‌باشد.

الف - S_X را پیدا کنید. آیا X پیوسته است؟ چرا؟

ب - پیشامد $(X<\frac{۱}{۲})$ را پیدا کنید و احتمال آن را بدست آورید.

۴. دو تاس نااریب را به تصادف با هم می‌ریزیم. فرض کنید X مجموع خالها باشد.

الف - S_X را پیدا کنید.

ب - $P(X>۱۰)$ و $P(۱<X\le ۴)$ را حساب کنید.

۵. در بسته‌ای ۵ عدد لامپ داریم که دو عدد آنها معیوب می‌باشد. یک نمونه سه تایی به تصادف از این بسته بیرون می‌آوریم. فرض کنید X شماره لامپهای معیوب در این نمونه باشد.

الف - فضای نمونه را بنویسید. پیشامدهای $(X<۲)$ و $(-۳<X<۱)$ را بنویسید.

ب - تکیه‌گاه X را پیدا کنید.

۲.۳ تابع توزیع

در بخش پیش دیدیم که چگونه می‌توان به کمک متغیر تصادفی احتمال را از S، یعنی فضای نمونه که ممکن است یک مجموعهٔ غیر عددی باشد، به R، یعنی مجموعه اعداد حقیقی منتقل کرد اینک با

معرفی تابع توزیع نشان می‌دهیم که چگونه روی R می‌توان احتمال را به کمک یک تابع نقطه‌ای، به جای یک تابع مجموعه‌ای، محاسبه کرد.

برای هر عدد حقیقی x فاصلهٔ نیم‌بازی به صورت $A_x=(-\infty,x]$ و متغیر تصادفی X را در نظر می‌گیریم. احتمال اینکه X در این فاصله نیم باز باشد برابر است با:

$$P(X\in A_x)=P(X\le x)$$

این احتمال یک تابع نقطه‌ای از x است که آن را با $F_X(x)$ نشان می‌دهند و تابع توزیع X می‌نامند.

۱.۲.۳ تعریف تابع توزیع

فرض کنید X یک متغیر تصادفی روی یک مدل احتمالی باشد. تابع حقیقی

$$F_X(x)=P(X\le x)$$

را، که در آن x یک عدد حقیقی است، تابع توزیع X می‌نامیم.

هرگاه تنها با یک متغیر تصادفی X سروکار داشته باشیم، این تابع را با $F(x)$ نشان می‌دهیم. ولی اگر مثلاً دو متغیر تصادفی X و Y را داشته باشیم، تابع توزیع یکی را با $F_X(x)$ و دیگری را با $F_Y(y)$ نشان می‌دهیم.

اگر تمام احتمال را به یک واحد جرم که روی R، یا محور طولها، به طور پیوسته یا گسسته توزیع شده است تعبیر کنیم، می‌توان $F(x)$ را بدین طریق توجیه نمود: مقدار $F(x)$ در نقطه ثابت x برابر است با تمام جرم احتمالی که روی محور طولها در سمت چپ نقطه x و در خود x داریم. به عبارت دیگر $F(x)$ برابر است با احتمال انباشته شده روی محور طولها از $-\infty$ تا خود x. از اینرو تابع را تابع انباشتگی احتمال هم می‌گویند.

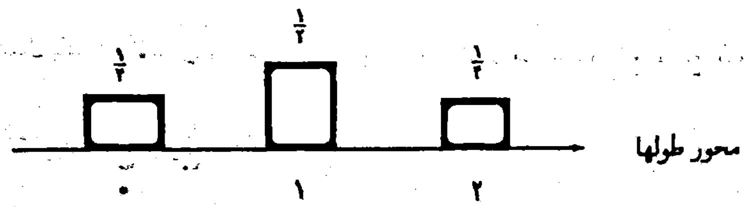
مثال ۴ (حالت گسسته) سکه‌ای ناریب را به تصادف دوبار می‌اندازیم. فرض کنید متغیر تصادفی X شماره شیرها باشد. می‌خواهیم تابع توزیع X را پیدا کنیم.

همانطوری که در مثال ۱ دیدیم X یکی از اعداد ۲، ۱، ۰ را با احتمال مثبت طبق جدول زیر، که آن را جدول توزیع احتمال X می‌نامند، می‌پذیرد.

می‌توان گفت که یک واحد جرم احتمال طبق نگاره ۲ روی محور xها در نقاط ۰ و ۱ و ۲ توزیع شده است.

جدول ۱ جدول توزیع احتمال شماره شیرها

$X=x$	۰	۱	۲	جمع احتمال
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	۱



نگاره ۲ نمایش توزیع جرم احتمال روی محور xها

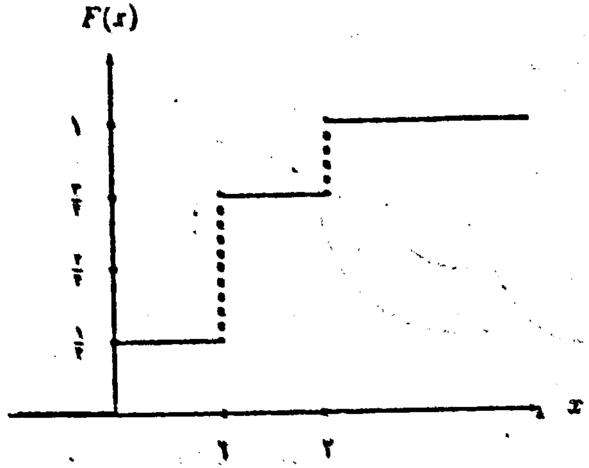
با توجیهی که برای $F(x)$ کردیم، به عنوان مثال مقدار تابع توزیع X در نقطه $x=\frac{3}{2}$ برابر است با تمام احتمالی که در سمت چپ این نقطه و در خود این نقطه (در صورتیکه در این نقطه احتمال داشته باشیم) موجود است. چون احتمال تنها میان ۰ و ۱ و ۲ توزیع شده است پس:

$$F\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$$

بطور کلی، طبق توجیه بالا، فرمول جبری $F(x)$ برای تمام مقادیر x به صورت زیر است:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4} & 0\le x<1 \\ \frac{3}{4} & 1\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$$

مثلاً $F\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}$ زیرا $-\infty$ تا نقطه‌ای به طول $\frac{1}{3}$ به اندازه $\frac{1}{4}$ احتمال (یعنی تنها احتمال در نقطه صفر) انباشته شده است. در این مثال $F(x)$ یک تابع پله‌ای است که نمودار آن در نگاره (۳) داده شده است.



نگاره ۳ نمودار $F(x)$ در حالت گسسته

مثال ۵ (حالت پیوسته) نقطه M را به تصادف در داخل دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز O انتخاب می‌کنیم (دایره C). فرض کنید متغیر تصادفی X اندازه پاره خط OM باشد می‌خواهیم تابع توزیع X را پیدا کنیم.

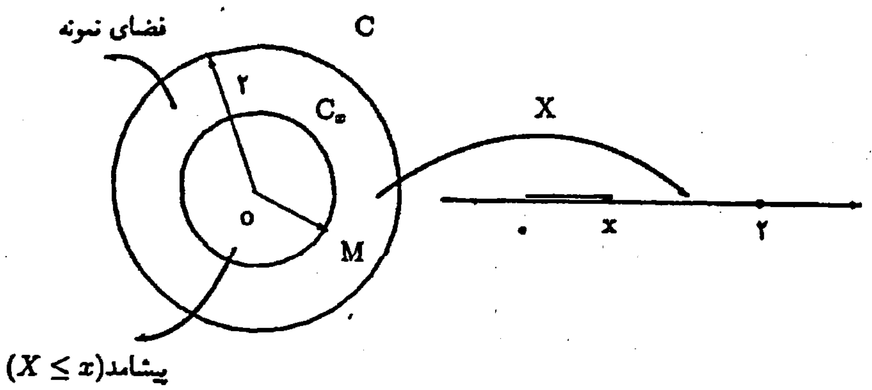
همانطوری که در مثال ۳ دیدیم X می‌تواند یکی از اعداد فاصله نیم باز $[0,2)$ را بپذیرد بنابراین می‌توان گفت که یک واحد جرم احتمال به طور پیوسته روی محور طولها در این فاصله توزیع شده است. برای پیدا کردن $F(x)$ پیشامد $(X\leq x)$ را که از نقاط داخل و محیط دایره‌ای به مرکز O و شعاع x تشکیل می‌شود در نظر می‌گیریم (دایره C_x). نگاره (۴) را ببینید. طبق تعریف داریم:

$$F(x)=P(X\leq x)=\frac{\text{مساحت دایره } C_x}{\text{مساحت دایره } C}=\frac{x^2}{4}$$

با توجه به اینکه احتمال تنها در فاصله $[0,2)$ توزیع شده است فرمول جبری $F(x)$ برای تمام مقادیر x به صورت زیر است:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x^2}{4} & 0\leq x<2 \\ 1 & x\geq 2 \end{cases}$$

در این مثال $F(x)$ یک تابع پیوسته است که نمودار آن در نگاره (۵) داده شده است.



نگاره ۴ طرز تعیین توزیع $F(x)$

به کمک دو مثال بالا می‌توان خواص تابع توزیع را به آسانی تشریح کرد. پیش از این کار نکات زیر را درباره یک تابع حقیقی $g(x)$ یادآور می‌شویم:

۱. مقدار $g(x)$ را در $x=a$ با $g(a)$ نشان می‌دهیم.

۲. حد $g(x)$ را وقتی x از راست (یا چپ) به a نزدیک می‌شود، در صورتی که وجود داشته باشد، با $g(a^+)$ (یا $g(a^-)$) نشان می‌دهیم و آن را حد راست (یا چپ) $g(x)$ در $x=a$ می‌نامیم.

۳. اگر $g(a^+)=g(a)$ (یا $g(a^-)=g(a)$)، آنگاه $g(x)$ در $x=a$ از طرف راست (یا چپ) پیوسته است.

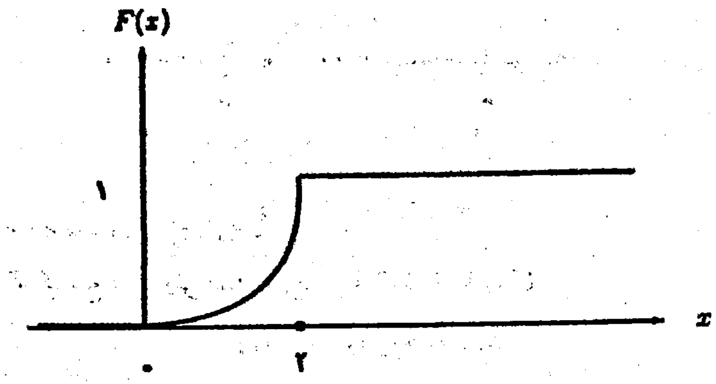
۴. اگر $g(a^-)=g(a^+)=g(a)$، آنگاه $g(x)$ را در $x=a$ پیوسته می‌نامیم.

۵. حد $g(x)$ را وقتی $x\to+\infty$ (یا $x\to-\infty$)، در صورتی که وجود داشته باشد، با $g(+\infty)$ (یا $g(-\infty)$) نشان می‌دهیم.

حال به نمودار $F(x)$ در مثال ۴، که در نگاره (۳) داده شده است توجه می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که مثلاً برای $x=1$ داریم:

$$F(1)=\frac{3}{4}\ ,\quad F(1^+)=\frac{3}{4}\ ,\quad F(1^-)=\frac{1}{4}$$

بنابراین $F(x)$ در $x=1$ از طرف راست پیوسته است، ولی از طرف چپ ناپیوسته می‌باشد.



نگاره ۵ نمودار $F(x)$ در حالت پیوسته

$F(1)-F(1^{-})=\frac{1}{2}$ را جهش $F(x)$ در $x=1$ می‌نامند. ملاحظه می‌شود که این جهش درست برابر با اندازه احتمال در $x=1$ می‌باشد.

در همین مثال برای $x=\frac{3}{2}$ داریم:

$$F(\tfrac{3}{2})=(\tfrac{3^{+}}{2})=F(\tfrac{3^{-}}{2})=\tfrac{3}{4}$$

بنابراین $F(x)$ در $x=\frac{3}{2}$ پیوسته است.

ضمناً ملاحظه می‌شود که $F(-\infty)=0$ و $F(+\infty)=1$.

اینک به نمودار $F(x)$ در مثال ۵، که در نگاره (۵) داده شده است، توجیه می‌کنیم ملاحظه می‌شود که مثلاً برای $x=2$ داریم:

$$F(2)=F(2^{+})=F(-2)=1$$

بنابراین $F(x)$ در $x=2$ پیوسته است، ولی در این نقطه مشتق ندارد در سایر نقاط این تابع پیوسته و دارای مشتق است.

۲.۲.۳ ویژگیهای تابع توزیع

فرض کنید $F(x)$ تابع توزیع متغیر تصادفی دلخواه (گسسته یا پیوسته) X باشد. یادآور می‌شویم که $F(x)$ یعنی احتمال انباشته شده روی محور طولها از $-\infty$ تا خود x. با این توجه ویژگیهای زیر را برای $F(x)$ می‌توان بیان کرد:

نگاره ۶ احتمال روی محور xها

الف - $-\infty < x < \infty$ ، $0 \le F(x) \le 1$

ب - $F(x)$ یک تابع غیر نزولی است یعنی:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$$

ج - $F(\infty)=1$ ، $F(-\infty)=0$

د - برای هر عدد حقیقی $x=a$ تابع $F(x)$ لااقل از طرف راست پیوسته است یعنی:

$$F(a^{+})=F(a)$$

ما از اثبات ویژگیهای بالا، که نیاز به آنالیز ریاضی دارند، خودداری می‌کنیم و از خواننده می‌خواهیم که با توجه به نمودارهای بالا درستی این ویژگیها را بررسی نماید.

برعکس می‌توان ثابت کرد که هر تابع حقیقی $F(x)$ با ویژگیهای بالا، تابع توزیع یک متغیر تصادفی X است.

۳.۲.۳ محاسبه احتمال از روی تابع توزیع

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع $F(x)$ باشد. فاصله عددی دلخواه I را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم $P(X\in I)$ را برحسب $F(x)$ حساب کنیم.

به عنوان مثال نخست فاصله $I=(a,b]$ را در نظر می‌گیریم. تمام احتمال را به عنوان یک واحد جرم که روی محور طولها به طور گسسته یا پیوسته توزیع شده است تعبیر می‌کنیم. $P(X\in I)$ به منزله جرمی است که در فاصله $(a,b]$ داریم. با توجه به نگاره (۶) ملاحظه می‌شود که:

$$P(a<X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)$$

با استفاده از تعریف $F(x)$ داریم:

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

البته رابطه بالا را می‌توان دقیقاً ثابت کرد. ولی احساس درستی این رابطه با توجیه بالا کافی است و عملاً بسیار مفید است. به همین طریق می‌توان تساویهای زیر را به آسانی پیدا کرد:

$$P(a<X<b)=F(b^-)-F(a)$$

$$P(a\le X\le b)=F(b)-F(a^-)$$

$$P(a\le X<b)=F(b^-)-F(a^-)$$

$$P(X<b)=F(b^-)$$

$$P(X>a)=1-F(a)$$

به ویژه هرگاه فاصله I از یک نقطه x_0 تشکیل شده باشد داریم:

$$P(X=x_0)=P(x_0\le X\le x_0)=F(x_0)-F(x^-)$$

اگر $F(x)$ در x_0 پیوسته باشد این احتمال برابر صفر است. در غیر این صورت برابر با جهش $F(x)$ در x_0 است.

بنابراین هرگاه X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد احتمال اینکه درست برابر با یک عدد دلخواه شود همواره صفر است، ولی برای یک متغیر تصادفی گسسته ممکن است این احتمال مثبت باشد.

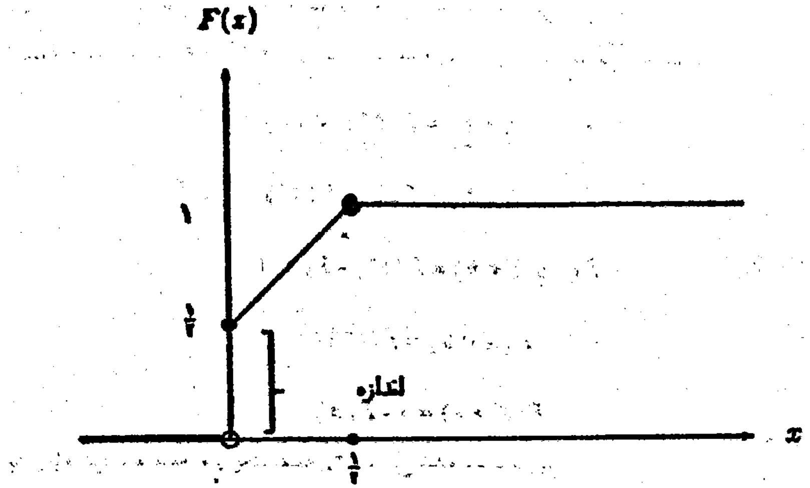
مثال ۶ تابع زیر را که نمودار آن در نگاره ۷ داده شده است در نظر می‌گیریم.

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x+\frac{1}{2} & 0\le x<\frac{1}{2}\\ 1 & x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

این تابع دارای تمام ویژگیهای یک تابع توزیع است. بنابراین $F(x)$ تابع توزیع یک متغیر تصادفی X می‌باشد.

ملاحظه می‌شود که در $x=0$ داریم:

$$F(0^-)=0\ ,\ F(0^+)=\frac{1}{2}\ ,\ F(0)=\frac{1}{2}$$



نگاره ۷ نمودار $F(x)$

بنابراین $F(x)$ در $x=0$ ناپیوسته است. با این حال پیوسته از طرف راست است، زیرا $F(0)=F(0^+)=\frac{1}{2}$. احتمال در $x=0$ می‌شود

$$P(X=0)=F(0)-F(0^-)=\frac{1}{2}$$

مشاهده می‌شود که نمودار در $x=0$ به اندازه $\frac{1}{2}$ جهش دارد در سایر نقاط $F(x)$ پیوسته است. در واقع $\frac{1}{2}$ کل احتمال در $x=0$ متمرکز شده است و بقیه احتمال به طور پیوسته در فاصله $[0,\frac{1}{2})$ توزیع شده است. به عبارت دیگر متغیر تصادفی X آمیخته‌ای از نوع گسسته و پیوسته می‌باشد بدین جهت آن را یک متغیر تصادفی آمیخته می‌نامند.

حال احتمال پیشامد $0<X<\frac{1}{2}$ را حساب می‌کنیم

$$P(0<X<\frac{1}{2})=F(\frac{1}{2}^-)-F(0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

بطور فشرده از مثالهای بالا معلوم می‌شود که سه نوع تابع توزیع داریم، برحسب اینکه یک واحد جرم احتمال چگونه توزیع شده باشد:

۱. هرگاه احتمال در نقاط جداگانه توزیع شده باشد، X از نوع گسسته و نمودار $F(x)$ پله‌ای است. $F(x)$ در این نقاط ناپیوسته و دارای جهش است.

X ازنوع گسسته 

۲. هرگاه احتمال در یک یا چند فاصله به طور پیوسته توزیع شده باشد، X از نوع پیوسته و نمودار $F(x)$ پیوسته است.

X از نوع پیوسته 

۳. هرگاه احتمال در یک یا چند فاصله به طور پیوسته و در یک یا چند نقطه به طور جداگانه توزیع شده باشد، X از نوع آمیخته است و نمودار $F(x)$ پیوسته با یک یا چند نقطه ناپیوستگی است که در آنها جهش دارد.

X از نوع آمیخته 

پیش از پایان این بخش دو مطالب مهم دیگر را شرح می‌دهیم: یکی متغیر تصادفی ثابت و دیگری متغیرهای تصادفی همتوزیع.

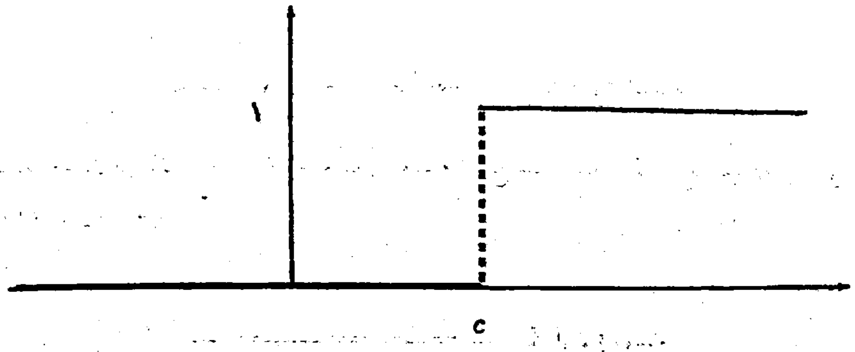
۴.۲.۳ متغیر تصادفی ثابت

هرگاه تمام احتمال در نقطه $x=c$ متمرکز شده باشد، یعنی داشته باشیم $P(X=c)=1$، می‌گوئیم X یک متغیر تصادفی ثابت است. توزیع X، که آن را یک توزیع تباهیده می‌نامند، به صورت زیر است:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<c\\ 1 & x\ge c\end{cases}$$

نگاره (۸) منحنی این تابع توزیع را نشان می‌دهد.
ملاحظه می‌شود که $F(x)$ در $x=c$ به اندازه یک واحد جهش دارد.

چون تمام احتمال تنها در $x=c$ قرار دارد و توزیع نشده است، یقیناً X دارای مقدار ثابت c است. شاید اصطلاح توزیع تباهیده یا متغیر تصادفی تباه شده هم به همین دلیل باشد. با به کار بردن این اصطلاح می‌توانیم به هر مقدار ثابت هم به چشم یک متغیر تصادفی نگاه کنیم.



نگاره ۸ نمودار توزیع تباهیده

۵.۲.۳ متغیرهای تصادفی همتوزیع

دو متغیر تصادفی X و Y را همتوزیع می‌نامند هرگاه برای هر عدد حقیقی z داشته باشیم:

$$P(X\le z)=P(Y\le z)$$

تساوی بالا، طبق تعریف تابع توزیع، معادل است با

$$F_X(z)=F_Y(z)\quad \text{برای هر عدد حقیقی } z$$

بنابراین دو متغیر تصادفی X و Y همتوزیع هستند، هرگاه توابع توزیع آنها برابر باشند. این نوع برابری را اغلب با $X\overset{D}{=}Y$ نشان می‌دهند. باید توجه داشت که این برابری مستلزم برابر بودن X و Y نیست، یعنی

$$X\overset{D}{=}Y\not\Rightarrow X=Y$$

مثال ۷ سکه نااریبی را دوبار به تصادف می‌اندازیم. فرض کنید X شماره شیرها و Y شماره خطها باشد.

در مثال ۴ توزیع X را پیدا کردیم. توزیع Y هم عیناً مثل توزیع X است. بنابراین، $X\overset{D}{=}Y$ ولی $X\neq Y$ زیرا مثلاً برای پیشامد ساده HH داریم.

$$X(HH)=2\qquad Y(HH)=0$$

یعنی X و Y نمی‌توانند دو متغیر تصادفی برابر، روی فضای نمونه $S=\{TT,HT,TH,TT\}$ باشند، در حالی که توزیع احتمال برای هر دو یکسان است.

۶.۲.۳ تمرین بخش دو

۱. سکه ناآریبی را سه بار به تصادف می‌اندازیم. فرض کنید X شماره شیرها و Y شماره خطها باشد.

الف - جدول توزیع احتمال X را پیدا کنید. تابع توزیع X را بدست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

ب - $P(2\le X<3)$، $P(X\ge 1)$ و $P(X=2)$ را از روی تابع توزیع و مستقیماً حساب کنید.

ج - نشان دهید که X و Y همتوزیع ولی نابرابر هستند.

د - فرض کنید $Z=X+Y$. تابع توزیع Z را پیدا کنید و نمودار آن را رسم نمائید.

۲. نقطه M را به تصادف در مربع $ABCD$ به ضلع یک واحد انتخاب می‌کنیم. فرض کنید متغیر تصادفی X فاصله این نقطه از قطر AC باشد.

الف - تابع توزیع X را پیدا کرده نمودار آن را رسم نمائید.

ب - $P(\frac{1}{5}<X<\frac{1}{2})$ را از روی تابع توزیع مستقیماً پیدا کنید.

ج - احتمال اینکه M روی قطر AC باشد چقدر است؟

د - اگر Y فاصله M از قطر BD باشد، نشان دهید X و Y همتوزیع ولی نابرابر می‌باشند.

۳. کدامیک از توابع زیر تابع توزیع می‌باشد؟ نمودار هر تابع را رسم کرده نقاط ناپیوستگی را پیدا کنید.

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{3} & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}\qquad G(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-x} & x\ge 0\end{cases}$$

$$H(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{x^2}{4} & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}\qquad T(x)=\begin{cases}0 & x<2\\ x-1 & 2\le x<3\\ 2 & x\ge 3\end{cases}$$

۴. نشان دهید که

$$F(x)=\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}$$

یک تابع توزیع است. نمودار این تابع را رسم کنید. m را طوری تعیین کنید تا $F(m)=\frac{1}{2}$ (m را میانه توزیع می‌گویند).

۵. اگر X و Y همتوزیع باشند، ثابت کنید:

$$P(X>z)=P(Y>z)$$

۶. اگر X دارای توزیع داده شده در تمرین ۴ باشد، تابع توزیع $Y=e^X$ را بدست آورید راهنمائی:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)$$

۷. در تمرین ۵ (بخش یک) تابع توزیع X را پیدا کرده نمودار آن را رسم نمائید.

۸. نشان دهید که

$$F(x)=1-\cos x \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

تابع توزیع یک متغیر تصادفی X است و آن را برای تمام اعداد حقیقی تعریف کنید. $P(X\le\frac{\pi}{4})$ و میانه توزیع را بیابید.

۳.۳ تابع چگالی

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع $F(x)$ باشد. یادآور می‌شویم که برای هر x ثابت، $F(x)$ برابر است با احتمال انباشته شده روی محور طولها از $-\infty$ تا خود x.

اینک می‌خواهیم تابعی تعریف کنیم که احتمال را در هر نقطه، برای متغیر تصادفی گسسته، و میزان فشردگی احتمال را در هر نقطه، برای متغیر تصادفی پیوسته تعیین کند: چنین تابعی را تابع چگالی احتمال یا تابع چگالی X می‌نامند و معمولاً آن را با $f_X(x)$، یا اگر تنها متغیر تصادفی X را داشته باشیم، با $f(x)$ نشان می‌دهند.

۱.۳.۳ تابع چگالی متغیر تصادفی گسسته

می‌دانیم که X را گسسته می‌گوئیم هرگاه احتمال را از فضای نمونه به محور طولها ببرد و در نقاط جداگانه جا دهد. مجموعهٔ این نقاط را که باپایان یا شمارش‌پذیر می‌باشد تکیه گاه X می‌نامیم و با $S_X=\{x_1,x_2,\dots\}$ نشان می‌دهیم حال چگالی متغیر تصادفی X را به طریق زیر تعریف می‌کنیم:

۲.۳.۳ تعریف تابع چگالی متغیر تصادفی گسسته:

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته باشد. برای این متغیر، احتمال در هر نقطه روی محور طولها تشکیل یک تابع حقیقی با ویژگیهای زیر را می‌دهد که این تابع را چگالی X می‌نامند.

$$(i) \qquad f(x_i) > ۰ \qquad x_i \in S_X$$

$$(ii) \qquad f(x_i) = ۰ \qquad x_i \notin S_X$$

$$(iii) \qquad \Sigma_i f(x_i) = ۱$$

برعکس هر تابع با ویژگیهای بالا، چگالی یک متغیر تصادفی گسسته است، تاکید می‌کنیم که برای یک متغیر تصادفی گسسته همواره داریم:

$$f(x_i) = P(X = x_i) \qquad x_i \in S_X$$

از اینرو در بعضی از کتابها این تابع را تابع احتمال هم می‌نامند و با $P(x_i)$ نشان می‌دهند.

تابع توزیع برحسب تابع چگالی برای هر x ثابت، می‌شود:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$

و تابع چگالی در هر x_i بر حسب تابع توزیع می‌شود:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i^-)$$

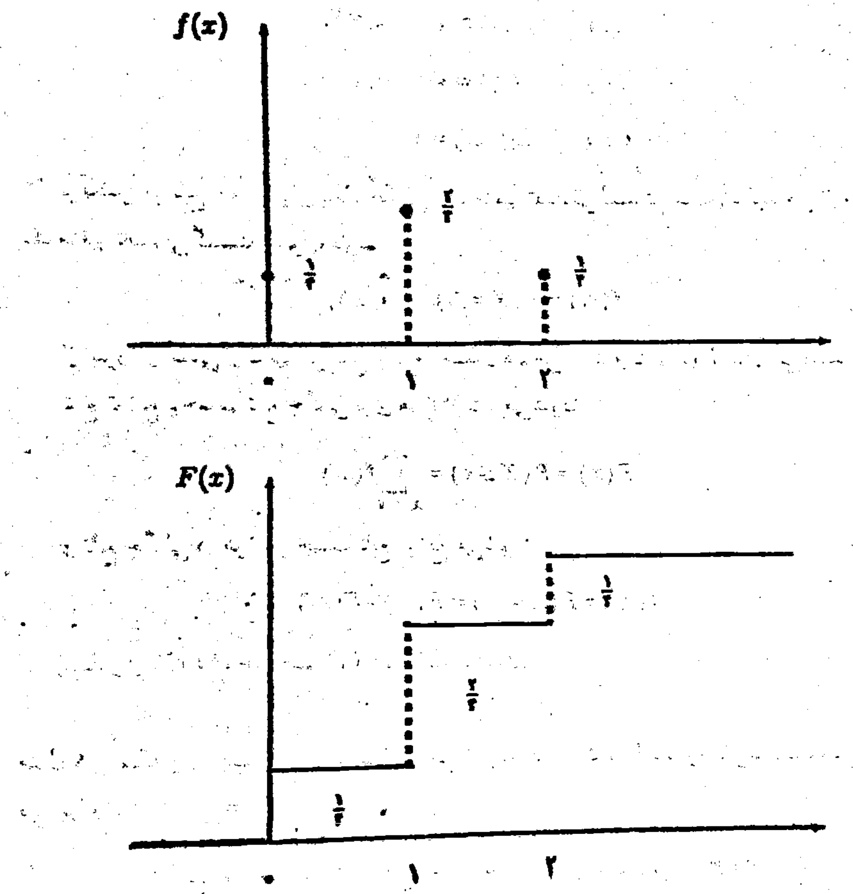
منظور از $F(x_i^-)$، حد چپ $F(x)$ در نقطه x_i است.

مثال ۸ سکه‌ای ناآریب را دوبار به تصادف می‌اندازیم. فرض کنید X شماره شیرها باشد، در مثال ۱ دیدیم که $S_X = \{۰, ۱, ۲\}$

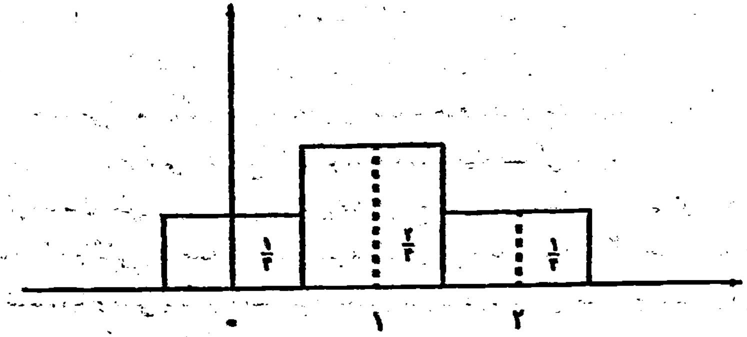
$$P(X = ۰) = \frac{۱}{۴} \ , \quad P(X = ۱) = \frac{۱}{۲} \ , \quad P(X = ۲) = \frac{۱}{۴}$$

تابع چگالی X می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۴} & x = ۰ \\ \frac{۲}{۴} & x = ۱ \\ \frac{۱}{۴} & x = ۲ \\ ۰ & \text{جای دیگر} \end{cases}$$



نگاره ۹ تابع توزیع و تابع چگالی شماره شیرها برای دو پرتاب سکه



نگاره ۱۰ هیستوگرام تابع احتمال شماره شیرها در دو پرتاب سکه

نگاره (۹) ارتباط میان تابع توزیع و تابع چگالی را برای X نشان می‌دهد.
به آسانی، به عنوان مثال، داریم

$$F(1)=\sum_{x\le 1} f(x)=f(0)+f(1)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$$

$$f(1)=F(1)-F(1^{-})=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$$

اغلب برای X با مقادیر درست، نگاره (۱۰) را که هیستوگرام تابع احتمال نامیده می‌شود رسم می‌کنند. در این نگاره احتمال در هر نقطه به وسیلهٔ مساحت مستطیلی که قاعدهٔ آن یک واحد و ارتفاع آن به اندازهٔ احتمال در آن نقطه است مشخص می‌شود. هیستوگرام تابع احتمال، با هیستوگرام داده‌ها که در گفتار نخست داشتیم شباهت دارد.

۳.۳.۳ تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته

می‌دانیم که X را پیوسته می‌گوئیم هرگاه احتمال را از فضای نمونه به محور طولها ببرد و در یک یا اجتماع چند فاصله به طور پیوسته جا دهد. مجموعهٔ S_X یعنی تکیه‌گاه X، یک یا اجتماع چند فاصلهٔ جدا است. بنابراین S_X یک مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر است. چون $F(x)$، یعنی تابع توزیع، پیوسته می‌باشد در نتیجه احتمال در هر نقطه برابر صفر است. برای تعریف تابع چگالی نخست یک مورد ساده

را تشریح می‌کنیم:
فرض کنید تمام یک واحد جرم احتمال در فاصله $S_X=[a,b]$ بطور پیوسته و یکنواخت توزیع شده باشد. به عبارت دیگر، با یک تعبیر فیزیکی، میله‌ای مستقیم و همگن که طول آن $b-a$ و جرم آن یک واحد باشد تجسم می‌کنیم. چگالی این میله برابر است با جرم یک واحد طول یعنی $\frac{1}{b-a}$. ملاحظه می‌شود که در این مثال چگالی یک تابع ثابت بوده به x نقاط میله بستگی ندارد.

حال اگر احتمال بطور پیوسته ولی نایکنواخت توزیع شده باشد، چگالی را نمی‌توان به طریق بالا پیداکرد. کمااینکه چگالی یک میله مستقیم و غیر همگن (یعنی میله‌ای که فشردگی جرم در تمام طول آن یکنواخت نباشد) با چگالی یک میله مستقیم و همگن تفاوت دارد. در این حالت چگالی در هر نقطه x تابعی از x می‌باشد و آن را به طریق زیر پیدا می‌کنیم:

در داخل $S_X=[a,b]$ فاصله‌ای بسیار کوچک به طول $2h$ و به مرکز ثابت x_0 اختیار می‌کنیم. اگر h به قدر کافی کوچک باشد می‌توان توزیع احتمال را در فاصله بسیار کوچک $[x_0-h \;,\; x_0+h]$ تقریباً یکنواخت تصور کرد. چون جرم احتمال در این فاصله برابر است با

$$P(x_0-h\le X\le x_0+h)=P(x_0-h<X\le x_0+h)$$
$$=F(x_0+h)-F(x_0-h)$$

پس چگالی برای این فاصله کوچک، طبق تعبیر بالا، تقریباً برابر است با

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h}$$

حد کسر بالا را وقتی که $h\to 0$، در صورتی که وجود داشته باشد، با $f(x_0)$ نشان می‌دهند، و $f(x)$ را تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته X در نقطه‌ای دلخواه به طول x می‌نامند. اگر $F(x)$ در نقطه x_0 دارای مشتق باشد می‌توان ثابت کرد که

$$f(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=F'(x_0)$$

چون احتمال به طور پیوسته در فاصله $[a,b]$ توزیع شده است، رابطه بالا برای تمام نقاط این فاصله، شاید بجز نقاط پایانی، درست می‌باشد. برای اینکه $f(x)$ یکتا باشد معمولاً در نقاطی که $F(x)$ مشتق ندارد $f(x)$ را برابر صفر می‌گیرند. این نتایج برای مواردی که S_X از اجتماع چند فاصله جدا تشکیل شده است نیز برقرار می‌باشند.

با این حساب $f(x)$ در تمام نقاط S_X بجز نقاط پایانی برابر است با مشتق $F(x)$. ضمناً در نقاط داخلی S_X، تابع $f(x)$ مثبت و در سایر نقاط صفر می‌باشد.

با توجه به ارتباط مشتق و انتگرال برای هر x در S_X روابط زیر را میان تابع چگالی و تابع توزیع داریم

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$f(x)=F'(x)$$

اینک تابع چگالی را برای یک متغیر تصادفی پیوسته به طریق زیر تعریف می‌کنیم.

۴.۳.۳ تعریف تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد میزان فشردگی احتمال در هر نقطه روی محور طولها تشکیل یک تابع حقیقی با خواص زیر می‌دهد که آن را تابع چگالی X می‌نامند:

$(i)\quad f(x)\ge 0$ برای تمام xها

$$(ii)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{S_X} f(x)\,dx=1$$

بر عکس هر تابعی با خواص بالا تابع چگالی یک متغیر تصادفی پیوسته می‌باشد.

تاکید می‌کنیم که برای یک متغیر تصادفی پیوسته، برخلاف یک متغیر تصادفی گسسته، مقدار $f(x_0)$ برابر احتمال در x_0 نمی‌باشد و حتی ممکن است داشته باشیم $f(x_0)>1$. چون $F(x)$ یک تابع پیوسته می‌باشد احتمال در هر نقطه برابر صفر است.

برای اینکه مفهوم تابع چگالی یک متغیر تصادفی پیوسته در نقطه ثابت x_0 روشن شود به توضیح زیر می‌پردازیم: فرض کنید در نقطه ثابت x_0 داشته باشیم: $f(x_0)=F'(x_0)$

با استفاده از تعریف مشتق می‌نویسیم:

$$f(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$$

پس برای مقادیر بسیار کوچک h رابطه تقریبی زیر به دست می‌آید:

$$P(x_0<X\le x_0+h)=F(x_0+h)-F(x_0)=hf(x_0)$$

بنابراین احتمال در یک فاصله بسیار کوچک را می‌توان به کمک تابع چگالی از روی رابطه تقریبی بالا پیداکرد. اگر $h\to 0$، آنگاه $P(X=x_0)=0$.

نگاره (۱۱) ارتباط میان تابع توزیع و تابع چگالی را برای یک متغیر تصادفی پیوسته نشان می‌دهد. توجه کنید که $P(a<X<b)$ برابر است با مساحت محصور بوسیله منحنی، تابع چگالی، محور طولها و خطوط $x=a$ و $x=b$ و مساحت محصور میان منحنی چگالی و محور طولها برابر یک می‌باشد.

مثال ۹ نقطه‌ای به تصادف در داخل دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز صفر انتخاب می‌کنیم فاصله این نقطه را تا مرکز دایره با متغیر تصادفی X نشان می‌دهیم. قبلاً دیده‌ایم که X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع زیر می‌باشد:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{4} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

از این تابع نسبت به x مشتق می‌گیریم تا تابع چگالی X به دست آید.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{0}^{2}\frac{x}{2}\,dx=\frac{x^2}{4}\Big]_0^2=1$$

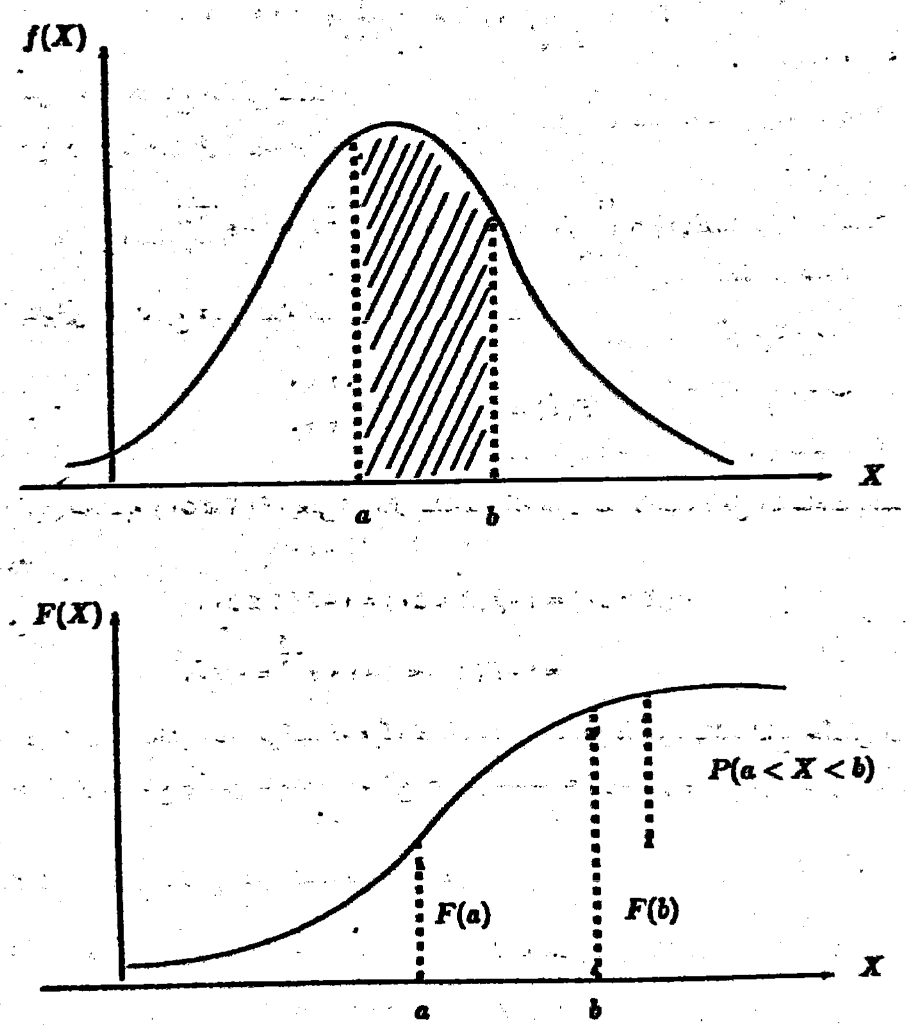
$$P\left(\frac{1}{3}<X<\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{2}\,dx=\frac{x^2}{4}\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{16}-\frac{1}{36}=\frac{5}{144}$$

مثال ۱۰ فرض کنید متغیر تصادفی X طول عمر یک لامپ برحسب ساعت باشد. نشان دهید که تابع زیر

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{100}\exp\left(\frac{-x}{100}\right) & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

می‌تواند یک تابع چگالی باشد. تابع توزیع X را پیدا کنید و $P(X>50)$ را محاسبه نمائید.



نگاره ۱۱ تابع توزیع و تابع چگالی یک متغیر تصادفی

حل - تابع $f(x)$ دارای ویژگیهای یک تابع چگالی می‌باشد، زیرا

$$(i) \quad f(x) \geq ۰$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{۱۰۰} e^{-\frac{x}{۱۰۰}}\,dx = ۱$$

پس $f(x)$ یک تابع چگالی است.

تابع توزیع را بدین طریق پیدا می‌کنیم:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{۰}^{x} \frac{۱}{۱۰۰} e^{-\frac{t}{۱۰۰}}\,dt = ۱ - e^{-\frac{x}{۱۰۰}}$$

بنابراین تابع توزیع x برای تمام اعداد حقیقی چنین است:

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ - \exp\{\frac{-x}{۱۰۰}\} & x \geq ۰ \end{cases}$$

برای محاسبه $P(X \geq ۵۰)$، یعنی احتمال پیشامد اینکهٔ طول عمر لامپ، لااقل ۵۰ ساعت باشد داریم:

$$P(X \geq ۵۰) = ۱ - p(X < ۵۰) = ۱ - P(X \leq ۵۰)$$

$$= ۱ - F(۵۰) = ۱ - ۱ + e^{-\frac{۱}{۲}} = ۰/۶۰۷$$

در پایان این بخش اشاره می‌کنیم که هرگاه X یک متغیر تصادفی دلخواه باشد تابع چگالی آن آمیخته‌ای از یک تابع چگالی پیوسته و یک تابع چگالی گسسته بصورت زیر می‌باشد:

۵.۳.۱ تابع چگالی متغیر تصادفی آمیخته

متغیر تصادفی X دارای چگالی آمیخته است اگر چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = pf_d(x) + (۱-p)f_c(x)$$

دراین‌رابطه $۰ \leq p \leq ۱$ و $f_d(x)$ و $f_c(x)$ به ترتیب دو چگالی گسسته و پیوسته می‌باشند. اگر $p = ۱$، X از نوع گسسته و اگر $p = ۰$، X از نوع پیوسته است. چون با متغیر تصادفی آمیخته از این نوع کمتر مواجه می‌شویم و تابع توزیع برای تشریح هر نوع متغیر تصادفی کافی است، از بحث در این باره خودداری می‌کنیم.

۶.۳.۴ تمرین بخش سه

۱. سکه نااریبی را سه باره به تصادف می‌اندازیم. فرض کنید X شماره شیرها باشد تابع چگالی و تابع توزیع X را پیدا کنید. این دو تابع را رسم و با هم مقایسه نمائید. $F(۲)$ و $f(۲)$ را محاسبه کنید و منظور از آنها را بیان دارید.

۲. اگر در تمرین ۱ متغیر تصادفی Y شمارهٔ خطها باشد، آیا چگالی X و Y برابرند؟ چگالی $Z = X + Y$ را پیدا کنید.

۳. نقطه M را به تصادف در مربع $ABCD$ به ضلع واحد انتخاب می‌کنیم. فرض کنید متغیر تصادفی X فاصله این نقطه از قطر AC باشد.

الف - تابع چگالی X را پیدا کرده و نمودار آن را رسم کنید.

ب - $P(\frac{۱}{۵} < X < \frac{۱}{۴})$ را از روی تابع چگالی محاسبه کنید.

۴. کدامیک از توابع زیر تابع چگالی می‌باشد؟

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} ۲e^{-۲x} & x > ۰ \\ ۰ & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

۵. m را طوری تعیین کنید تا

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m}{\sqrt{x}} & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

یک تابع چگالی شود.

۶. اگر $f_۱(x)$ و $f_۲(x)$ دو تابع چگالی باشند، ثابت کنید که با فرض $۰ < p < ۱$، تابع زیر هم یک تابع چگالی است:

$$f(x) = pf_۱(x) + (۱-p)f_۲(x)$$

این چگالی را یک چگالی آمیخته از $f_۱(x)$ و $f_۲(x)$ می‌گویند. هر یک از دو چگالی $f_۱(x)$ و $f_۲(x)$ ممکن است گسسته یا پیوسته باشند.

۷. برای تابع توزیع مثال ۶، تابع چگالی را به صورت یک چگالی آمیخته بنویسید.

۸. در تمرین ۴ برای هر چگالی، تابع توزیع را بیابید و رسم کنید.

جدول ۲ فضای نمونه و مقادیر (X,Y)

فضای‌نمونه	HHH	THH	HTH	HHT	TTH	THT	HTT	TTT
(X,Y)	(۳،۲)	(۲،۱)	(۲،۱)	(۲،۲)	(۱،۰)	(۱،۱)	(۱،۱)	(۰،۰)

۴.۳ چگالی توام دو متغیر تصادفی گسسته

در یک آزمایش تصادفی ممکن است روی فضای نمونه دو متغیر تصادفی X و Y تعریف کنیم و بخواهیم آنها را به صورت یک متغیر تصادفی دو بعدی (X,Y) بررسی نمائیم. در اینجا می‌توانیم قبل از هر چیز بعضی مفاهیمی راکه برای یک متغیر تصادفی شرح دادیم، مانند تابع توزیع و تابع چگالی، برای (X,Y) هم تعمیم دهیم، و سپس به ارتباط این دو متغیر بپردازیم. برای این منظور در حالت پیوسته آشنائی با انتگرال دوگانه ضرورت دارد. از اینرو تنها حالتی را بررسی می‌کنیم که X و Y هر دو گسسته باشند، بیشتر نتایج حاصل در حالت پیوسته هم درست هستند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۱ سکه‌ای نااریب را سه بار به تصادف می‌اندازیم. فرض کنید X شماره شیرها در این سه ریزش و Y شماره شیرها در دو ریزش اول باشد.

فضای نمونه از ۸ پیشامد ساده تشکیل شده است. در این مثال برای پیشامد ساده THH متغیر X برابر با ۲ و Y برابر با ۱ است. پس (X,Y) می‌شود $(۲،۱)$. جدول ۲ در بالا فضای نمونه و مقادیری راکه جفت (X,Y) می‌پذیرد نشان می‌دهد.

جدول (۳) را جدول توزیع احتمال توام (X,Y) می‌نامند. این جدول در عمل برای انجام محاسبات مفید است و از روی آن معلوم می‌شود که درکدام نقاط احتمال داریم.

ملاحظه می‌شود که سطر آخر جدول، توزیع احتمال X و ستون آخر جدول، توزیع احتمال Y را به ما می‌دهند.

با استفاده از جدول ۳ به تعریف زیر می‌پردازیم:

جدول ۳ جدول توزیع احتمال توام (X,Y)

$Y \backslash X$	۰	۱	۲	۳	$f_Y(y)$
۰	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	۰	۰	$\frac{۲}{۸}$
۱	۰	$\frac{۲}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$	۰	$\frac{۴}{۸}$
۲	۰	۰	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$
$f_X(x)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	۱

۱.۴.۳ تعریف چگالی توام دو متغیر تصادفی گسسته

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند. تابع دو متغیری زیر را تابع چگالی توام X و Y می‌نامند:

$$f(x,y)=P(X=x \ , \ Y=y)$$

در هر نقطه (x,y) که احتمال داشته باشیم این تابع مثبت و در سایر نقاط صفر است. طبق جدول بالا به عنوان مثال داریم:

$$f(۲,۱)=\frac{۲}{۸}$$

$$f(۱,۲)=۰$$

چگالی متغیر X را به تنهائی با $f_X(x)$ و چگالی متغیر Y را به تنهائی با $f_Y(y)$ نشان می‌دهیم و آنها را چگالیهای کناری می‌نامیم (زیرا در کنار پائین و کنار راست جدول بالا خودنمائی می‌کنند). ضمناً

روابط زیر به آسانی نتیجه می‌شوند:

$$f(x,y) \geq ۰$$

$$\sum_x \sum_y f(x,y)=۱$$

$$f_X(x)=\sum_Y f(x,y)$$

$$f_Y(y)=\sum_x f(x,y)$$

در حالت پیوسته به جای علامت جمع ساده و دوگانه یعنی Σ و $\Sigma\Sigma$ به ترتیب علامت انتگرال ساده و دوگانه یعنی $\int$ و $\int\int$ را به کار می‌بریم.

در مثال بالا X یکی از اعداد ۳، ۲، ۱، ۰ و Y یکی از اعداد ۲، ۱، ۰ را می‌پذیرد. البته این دو متغیر به نحوی با هم ارتباط دارند. مثلاً اگر X برابر ۳ شود Y الزاماً ۲ خواهد بود و نمی‌تواند آزادانه عدد دیگری را با احتمال مثبت بپذیرد. اصطلاحاً می‌گوئیم X و Y نامستقل هستند. اینک به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۲ از یک دسته کارت چهارتائی به شماره‌های ۴، ۳، ۲، ۱ دو کارت پیاپی به تصادف با جایگذاری بیرون می‌آوریم. فرض کنید X شماره کارت اول و Y شماره کارت دوم باشد. جدول توزیع احتمال توام (X,Y) به صورت جدول (۴) است.

ملاحظه می‌شود که در این مثال X و Y هر کدام می‌توانند آزادانه یکی از اعداد ۴، ۳، ۲، ۱ را بپذیرند. بدین جهت می‌گوئیم X و Y مستقل هستند. البته اگر دو کارت را بی‌جایگذاری بیرون آوریم، آنگاه X و Y نمی‌توانند مستقل باشند. مثلاً اگر X عدد ۳ باشد؛ یعنی اول کارت شماره ۳ بیرون آید، دیگر Y نمی‌تواند ۳ شود. اینک دو متغیر تصادفی مستقل را در حالت گسسته تعریف می‌کنیم.

۲.۴.۳ تعریف دو متغیر تصادفی مستقل گسسته

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند، این دو متغیر را مستقل گوئیم هرگاه برای هر دوتائی (x,y) داشته باشیم:

$$P(X=x \ , \ Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$$

جدول ۴ جدول توزیع احتمال توام X و Y

Y \ X	۱	۲	۳	۴	$f_Y(y)$
۱	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
۲	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
۳	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
۴	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	۱

ملاحظه می‌شودکه این تعریف شبیه تعریف دو پیشامد مستقل است. برحسب چگالی می‌گوئیم X و Y مستقل هستند هرگاه برای دوتائی (x,y) داشته باشیم:

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

این تعریف مستقل بودن برحسب چگالی، در حالت پیوسته هم به کار می‌رود.

۳.۴.۳ تعریف توزیع توام دو متغیر تصادفی

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی دلخواه باشند (گسسته یا پیوسته). تابع دو متغیری زیر را تابع توزیع توام X و Y می‌نامند:

$$F(x,y)=P(X\leq x \quad , \quad Y\leq y)$$

x و y هر دو عدد حقیقی هستند و منظور از پیشامد $(Y\leq y)$ و $(X\leq x)$ اشتراک دو پیشامد $(X\leq x)$ و $(Y\leq y)$ است.

چگالی توام و توزیع توام بیش از دو متغیر تصادفی را هم می‌توان به طریق بالا تعریف کرد.

۴.۴.۳ تمرین بخش چهار

۱. در ظرفی ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه، و ۱ مهره قرمز داریم. از این ظرف به تصادف ۵ مهره با هم بیرون می‌آوریم. فرض کنید X شماره مهره‌های سفید و Y شماره مهره‌های سیاه در این ۵ مهره باشد. جدول پیشامدهای ساده و مقادیر (X,Y) را برای هر پیشامد پیدا کنید. جدول توزیع احتمال (X,y) را بدست آورید. آیا X و Y مستقل می‌باشند؟

۲. یک تاس نااریب را دوبار می‌اندازیم. فرض کنید X و Y به ترتیب شماره خالها در بار اول و دوم باشند. جدول توزیع احتمال (X,Y) را پیدا کنید. آیا X و Y مستقل هستند؟

۳. سکه‌ای نااریب را سه بار می‌اندازیم. فرض کنید X شماره بیشترین شیرهای پیاپی و Y شماره بیشترین خطهای پیاپی باشد. جدول پیشامدهای ساده و مقادیر (X,Y) را پیدا کنید. جدول توزیع احتمال (X,Y) را بدست آورید. آیا X و Y مستقل‌اند؟

۴. از یک دسته کارت چهارتائی به شماره‌های ۴، ۳، ۲، ۱ دوکارت پیاپی بی‌جایگذاری بیرون می‌آوریم. فرض کنید X شماره کارت اول و Y شماره کارت دوم باشد. جدول توزیع احتمال X و Y را پیدا کنید؟ آیا X و Y همتوزیع هستند؟

۵. دو سکه و یک تاس نااریب را با هم می‌ریزیم. فرض کنید X شماره شیرها و Y شماره خالها باشد. جدول توزیع احتمال (X,Y) را بیابید. آیا X و Y مستقل‌اند؟

فصل ۴

امید ریاضی یک متغیر تصادفی و کاربرد آن

۱.۴ مفهوم امید ریاضی و ویژگیهای آن

در بخشهای پیش مفاهیمی از قبیل پیشامد، احتمال، و متغیر تصادفی را دقیقاً شرح دادیم. زندگی روزانه علاوه بر این مفاهیم با مفهوم دیگری به نام امید یا انتظار همراه است. در حالی که انسان همواره با امید و انتظار زندگی می‌کند، ولی نمی‌تواند بیش از حد به بعضی از رویدادها چشم امید داشته باشد. امید و انتظار هم مانند تصادف و شانس، در عین بی‌نظامی، تابع نظام و قوانینی می‌باشد که در این فصل می‌خواهیم آنها را مطالعه کنیم. از نظر تاریخی امید و انتظار مانند تصادف و احتمال از راه بازیهای قمار جنبه ریاضی پیدا کرده است. برای اینکه مطلب روشن شود به بازی شیر و خط زیر توجه نمائید:

فرض کنید با خریدن یک بلیط بتوانید در یک بازی تفریحی شرکت کنید. در این بازی یک ماشین سکه‌انداز با فشار تکمه‌ای به تصادف سه سکه با رنگهای مختلف را با هم می‌ریزد و با فشار تکمه‌ای دیگر به اندازه شماره شیرها، سکه ده ریالی به شما می‌پردازد.

صاحب ماشین مدعی است که اصلاً قصد قمار و سودجوئی ندارد و صرفاً می‌خواهد مردم را سرگرم کند، ولی قیمت هر بلیط باید طوری باشد که بعد از چند بازی رویهم ضرر نکند. آیا منصفانه بهای هر بلیط چقدر باید باشد؟

چون سکه‌ها کاملاً به تصادف می‌ریزند، احتمال اینکه شماره شیرها ۳، ۲، ۱، ۰ شوند به ترتیب $\frac{1}{8}$، $\frac{3}{8}$، $\frac{3}{8}$، $\frac{1}{8}$ می‌باشد. حال اگر تعدادی زیاد بلیط، مثلاً ۴۰۰ بلیط، فروش رود انتظار می‌رود (بنابر تعبیر احتمال با فراوانی نسبی) ۵۰ مرتبه هیچ شیر، ۱۵۰ مرتبه یک شیر، ۱۵۰ مرتبه دو شیر، و ۵۰ مرتبه سه شیر مشاهده شود. بنابراین انتظار می‌رود که ماشین برای این ۴۰۰ بلیط مبلغ زیر را بپردازد:

$$(400\times\frac{1}{8}\times 0)+(400\times\frac{3}{8}\times 1)+(400\times\frac{3}{8}\times 2)+(400\times\frac{1}{8}\times 3)=600 \text{ تومان}$$

برای اینکه صاحب ماشین نه سود نماید نه زیان، بهای هر بلیط به طور متوسط یا منصفانه باید

$1/5=\frac{600}{400}$ تومان باشد. بنابراین اگر ۴۰۰ بلیط به مبلغ ۶۰۰ تومان فروخته شود انتظار می‌رود که ماشین هم همین مبلغ را بپردازد.

در این مثال یک متغیر تصادفی X (یعنی شماره شیرها در ریزش سه سکه) داریم که جدول توزیع احتمال آن به صورت زیر است:

$X=x$	۰	۱	۲	۳
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

عدد زیر را که حقیقت معدل وزنی شماره شیرها می‌باشد، امید ریاضی یا امید X می‌نامند و با $E(X)$ نشان می‌دهند (E حرف اول کلمه Expectation به معنای انتظار است)

$$E(X)=\frac{1}{8}\times 0+\frac{3}{8}\times 1+\frac{3}{8}\times 2+\frac{1}{8}\times 3=1/5$$

تعبیر فراوانی $E(X)=1/5$ چنین است: اگر ماشین این سه سکه را بارها مثلاً ۱۰۰۰ بار بریزد، انتظار داریم معدل شیرها در هر بار بشود عدد ۱/۵ .

اینک مفهوم بالا را تعمیم داده آن را برای هر متغیر تصادفی گسسته یا پیوسته به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱.۱.۴ تعریف امید ریاضی

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با چگالی $f(x)$ باشد. امید ریاضی X عددی به صورت زیر است:

$$E(X)=\begin{cases}\sum_x xf(x) & \text{حالت گسسته}\\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx & \text{حالت پیوسته}\end{cases}$$

امید ریاضی را با μ نشان می‌دهند و آن را میانگین X یا میانگین چگالی $f(x)$ هم می‌نامند.

می‌دانیم که هرگاه x در تکیه‌گاه X یعنی S_X باشد، چگالی $f(x)$ مثبت و در جای دیگر صفر است. بنابراین باید مجموع یا انتگرال بالا را روی تکیه‌گاه X محاسبه کرد. اگر S_X بی‌پایان باشد یا برای بعضی عناصر آن $f(x)$ بی‌پایان شود، ممکن است عدد $E(X)$ وجود نداشته باشد. چون با این موارد کمتر مواجه می‌شویم، از این پس فرض می‌کنیم $E(X)$ وجود دارد. به طور کلی $E(X)$ در صورتی وجود دارد که مجموع یا انتگرال بالا به طور مطلق همگرا باشد.

مثال ۱ (حالت گسسته) متغیر تصادفی X اعداد ۶، ۳، ۲، ۱ را به ترتیب با احتمالهای زیر

$$\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۸}$$

می‌پذیرد. $E(X)$ را بیابید.

حل – در این مثال $S_X=\{۱, ۲, ۳, ۶\}$. بنابراین داریم:

$$E(X)=\sum_x xf(x)=(۱\times\frac{۱}{۴})+(x\times\frac{۱}{۸})+(۳\times\frac{۱}{۲})+(۶\times\frac{۱}{۸})=۲/۷۵$$

این مثال را می‌توانیم به طریق زیر تعبیر کنیم:

یک دسته کارت در نظر می‌گیریم؛ دو کارت با شماره ۱، یک کارت با شماره ۲، چهار کارت با شماره ۳ و یک کارت با شماره ۶، کارتها را مخلوط کرده یکی را به تصادف بیرون می‌آوریم. شماره روی کارت بیرون آمده یک متغیر تصادفی X با امید ریاضی ۲/۷۵ است. حال اگر به تعدادی زیاد، مثلاً ۱۰۰ بار آزمایش را انجام دهیم و صد عددی را که مشاهده می‌کنیم جمع کرده معدل بگیریم، انتظار می‌رود این معدل بشود ۲/۷۵.

مثال ۲ (حالت پیوسته) نقطه‌ای به تصادف در داخل دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز صفر انتخاب می‌کنیم. فاصلهٔ این نقطه تا مرکز را با متغیر تصادفی X نشان می‌دهیم. امید ریاضی X را پیدا کنید.

حل – همانطوری که در مثال ۹، فصل سوم، دیدیم X دارای تابع چگالی زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{۲} & ۰<x<۲\\ ۰ & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

فاصله $S_X=(۰, ۲)$ تکیه گاه X است. بنابراین داریم

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=\int_۰^۲ x\cdot\frac{x}{۲}\,dx=\frac{x^۳}{۶}\Big]_۰^۲=\frac{۴}{۳}$$

اگر به تعدادی زیاد، مثلاً ۶۰ بار آزمایش را انجام دهیم و ۶۰ فاصله را جمع کرده معدل بگیریم، انتظار می‌رود این معدل بشود عدد $\frac{۴}{۳}$.

۲.۱.۴ امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی

در عمل بعضی اوقات باید امید ریاضی تابعی از متغیر تصادفی X را حساب کرد. مثلاً در ماشین سکه‌انداز، ممکن است صاحب ماشین بخواهد به اندازه $\frac{۱}{۵}$ پولی را که ماشین می‌ریزد مزد دریافت کند. انتظار دارید هر بلیط را چقدر بفروشد؟ اگر پولی را که ماشین می‌ریزد با X نشان دهیم، مزد صاحب ماشین در برابر فروش هر بلیط مقدار تصادفی $\frac{X}{۵}$ می‌شود. بنابراین امید ریاضی متغیر تصادفی

$$Y=X+\frac{X}{۵}=\frac{۶X}{۵}$$

را که تابعی از X است حساب کرد. بطور کلی فرض کنید X یک متغیر تصادفی با چگالی $f(x)$ و $y=g(x)$ یک تابع حقیقی باشد. امید ریاضی متغیر تصادفی $Y=g(X)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۳.۱.۴ تعریف امید ریاضی $g(X)$

امید ریاضی $g(X)$ عددی به صورت زیر است:

$$E[g(X)]=\begin{cases}\sum_x g(x)f(x) & \text{حالت گسسته}\\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx & \text{حالت پیوسته}\end{cases}$$

مثال ۳ سکه‌ای را سه بار می‌ریزیم. فرض کنید X شماره شیرها باشد. امید ریاضی تابع $Y=X^۲$ را پیدا کنید.

حل – متغیر تصادفی X یکی از اعداد ۳، ۲، ۱، ۰ را به ترتیب با احتمالهای $\frac{۱}{۸}$، $\frac{۳}{۸}$، $\frac{۳}{۸}$، $\frac{۱}{۸}$ می‌پذیرد. امید ریاضی Y می‌شود:

$$E(Y)=E(X^۲)=\sum_x x^۲f(x)$$

$$=(۰\times\frac{۱}{۸})+(۱^۲\times\frac{۳}{۸})+(۲^۲\times\frac{۳}{۸})+(۳^۲\times\frac{۱}{۸})$$

$$=\frac{۳}{۸}+\frac{۱۲}{۸}+\frac{۹}{۸}=۳$$

مثال ۴ هرگاه X دارای چگالی زیر باشد، امید ریاضی $Y=\sqrt{X}$ را پیدا کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{۲} & ۰<x<۲\\ ۰ & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

حل - چون X یک متغیر تصادفی پیوسته است، امید ریاضی X می‌شود:

$$E(Y)=E(\sqrt{X})=\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x}f(x)\,dx=\int_{۰}^{۲}\sqrt{x}\cdot\frac{x}{۲}\,dx$$

$$=\int_{۰}^{۲}\frac{۱}{۲}x^{\frac{۳}{۲}}\,dx=\frac{۴}{۵}\sqrt{۲}$$

۴.۱.۴ امید ریاضی یک چند جمله‌ای

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با چگالی $f(x)$ و $Q(x)$ یک چند جمله‌ای درجه n بصورت $Q(x)=c_۰+c_۱x+\cdots+x_nx^n$ باشد با استفاده از تعریف امید ریاضی و خواص Σ یا $\int$ داریم

$$E[Q(X)]=E(c_۰+c_۱X+\cdots+c_nX^n)=c_۰+c_۱E(X)+\cdots+c_nE(X^n)$$

برای اثبات، مثلاً در حالت پیوسته برای یک چند جمله‌ای درجه دو، داریم:

$$E(c_۰+c_۱X+c_۲X^۲)=\int_{-\infty}^{\infty}(c_۰+c_۱x+c_۲x^۲)f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}c_۰f(x)\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}c_۱xf(x)\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}c_۲x^۲f(x)\,dx$$

$$=c_۰\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx+c_۱\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx+c_۲\int_{-\infty}^{\infty}x^۲f(x)\,dx$$

$$=c_۰+c_۱E(X)+c_۲E(X^۲)$$

به ویژه برای تابع خطی $Y=bX+c$ داریم:

$$E(Y)=E(bX+c)=bE(X)+c$$

با فرض $b=۰$ نتیجه می‌گیریم که $E(c)=c$ یعنی امید ریاضی یک مقدار ثابت c، می‌شود خود c.

مثال ۵ هرگاه $E(X)=۱$ و $E(X^۲)=۲$، امید ریاضی $(X+۱)(X-۲)$ را پیدا کنید.

حل - چون $(X+۱)(X-۲)=X^۴-X-۲$، بنابراین داریم:

$$E[(X+۱)(X-۲)]=E(X^۲-X-۲)=E(X^۲)-E(X)-۲$$

$$=۲-۱-۲=-۱$$

۵.۱.۴ امید ریاضی تابعی از دو متغیر تصادفی

دو متغیر تصادفی X و Y را با چگالی توام $f(x,y)$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $h(x,y)$ یک تابع دو متغیری باشد، مانند $h(x,y)=x+y$ یا $h(x,y)=xy$. می‌خواهیم امید ریاضی متغیر تصادفی $Z=h(X,Y)$ را تعریف کنیم. برای این منظور از چگالی توام استفاده می‌کنیم. در اینجا تنها حالت گسسته را شرح می‌دهیم.

۶.۱.۴ تعریف امید ریاضی $h(X,Y)$ در حالت گسسته

امید ریاضی $h(X,Y)$ در حالتی که X و Y هر دو گسسته باشند، عددی به صورت زیر است:

$$E[h(X,Y)]=\sum_x\sum_y h(x,y)f(x,y)$$

از تعریف بالا با فرض $h(x,y)=x$ و $h(x,y)=y$ می‌توانیم $E(X)$ و $E(Y)$ را از روی چگالی توام پیدا کنیم زیرا:

$$\sum_x\sum_y xf(x,y)=\sum_x x\sum_y f(x,y)=\sum_x xf_X(x)=E(X)$$

$$\sum_x\sum_y yf(x,y)=\sum_y y\sum_x f(x,y)=\sum_y yf_Y(y)=E(Y)$$

در حالتی که X و Y هر دو پیوسته باشند، جمع دوگانه $\Sigma\,\Sigma$ به انتگرال دوگانه تبدیل می‌شود. این حالت را در پیوسته یک شرح داده‌ایم.

مثال ۶ برای جدول توزیع احتمال توام مثال ۱۱، فصل سوم، مقدار $E(XY)$ را پیدا کنید.

حل - احتمال نظیر هر (x,y) را در xy ضرب و سپس آنها را جمع می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$E(XY)=(۰\times\frac{۱}{۸})+(۰\times\frac{۱}{۸})+(۱\times\frac{۲}{۸})+(۲\times\frac{۲}{۸})+(۴\times\frac{۱}{۸})+(۶\times\frac{۱}{۸})=۲$$

مثال ۷ دو متغیر تصادفی X و Y دارای چگالی توام $f(x,y)$ هستند. ثابت کنید که

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

حل - تابع $h(x,y)=x+y$ را در نظر می‌گیریم. بنابر تعریف داریم:

$$E(X+Y)=\sum_x \sum_y (x+y)f(x,y)=\sum_x \sum_y xf(x,y)+\sum_x \sum_y yf(x,y)$$
$$=E(X)+E(Y)$$

این نتیجه در حالت پیوسته هم درست است.

مثال ۸ دو متغیر تصادفی X و Y مستقل و به ترتیب دارای چگالیهای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ می‌باشند. ثابت کنید که

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

حل - تابع $h(x,y)=xy$ را درنظر می‌گیریم. چون X و Y مستقل هستند، چگالی توام X و Y می‌شود:

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

اینک بنابر تعریف داریم:

$$E(XY)=\sum_x \sum_y xyf(x,y)=\sum_x \sum_y xyf_X(x)f_Y(y)$$
$$=\sum_x xf_X(x)\sum_y yf_Y(y)=E(X)E(Y)$$

این نتیجه در حالت پیوسته هم درست است. توجه کنید که اگر X و Y مستقل نباشند، ممکن است تساوی بالا درست نباشد. مثلاً در مثال ۱۱، فصل سوم، داریم:

$$E(X)=\frac{۳}{۲}\quad E(Y)=۲\quad E(XY)=۲$$

بنابراین معلوم می‌شود که $E(XY)\neq E(X)E(Y)$

۷.۱.۴ امید ریاضی یک ترکیب خطی

متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ و مقادیر ثابت $a_1, a_2, \dots, a_n$ را در نظر می‌گیریم. متغیر تصادفی

$$X=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$$

را یک ترکیب خطی از X_iها می‌نامیم.

اگر چگالی توام را برای چند متغیر تصادفی و امید ریاضی را برای تابعی از آنها تعمیم دهیم به آسانی ثابت می‌شود که

$$E(X)=a_1E(X_1)+a_2E(X_2)+\cdots+a_nE(X_n)$$

مثال ۹ اگر $E(X_1)=۲$ و $E(X_2)=۳$ و $E(X_3)=-۴$، امید ریاضی

$$X=۳+۵X_1-۲X_2+۲X_3$$

را پیدا کنید.

حل - اگر عدد ۳ را به عنوان یک متغیر تصادفی ثابت تلقی کنیم، بنابر فرمول بالا داریم

$$E(X)=۳+۵E(X_1)-۲E(X_2)+۲E(X_3)$$
$$=۳+۱۰+(-۶)+(-۸)=-۱$$

۸.۱.۴ امید ریاضی دو متغیر تصادفی همتوزیع

فرض کنید $X\overset{D}{=}Y$، یعنی X و Y همتوزیع باشند. بدیهی است که این دو متغیر تصادفی دارای چگالی مشترک و تکیه‌گاه مشترک هستند، به سخنی دیگر داریم:

$$f_X(z)=f_Y(z) \quad \text{برای هر عدد حقیقی } z$$

$$S_X=S_Y \quad \text{برای تکیه‌گاه‌ها داریم:}$$

بنابراین X و Y دارای امید ریاضی مشترک هستند، زیرا در حالت گسسته

$$E(X)=\sum_x xf_X(x) \qquad x\in S_X$$

$$E(Y)=\sum_{y} y f_Y(y) \qquad y\in S_Y$$

بدیهی است که دو مجموع بالا با هم برابرند.

در حالت پیوسته Σ به $\int$ تبدیل می‌شود و همان نتیجه به دست می‌آید. پس به طور فشرده برای دو متغیر تصادفی همتوزیع داریم:

$$X\overset{D}{=}Y\Rightarrow E(X)=E(Y)$$

افزون براین، برای هر تابع دلخواه $h(t)$، می‌توان به آسانی نشان داد که

$$X\overset{D}{=}Y\Rightarrow E[h(X)]=E[h(Y)]$$

البته با فرض اینکه امید ریاضی وجود داشته باشد.

مثال ۱۰ سکه‌ای نااریب را دوبار پرتاب می‌کنیم. فرض کنید X و Y به ترتیب شمارهٔ شیرها و شمارهٔ خطها باشد. نشان دهید که

$$E(X^۳)=E(Y^۳) \quad , \quad E(X)=E(Y)$$

حل – همانطوری که درگفتار سوم داشتیم، X و Y همتوزیع هستند و جدول احتمال مشترک آنها چنین است:

X یا Y	۰	۱	۲
احتمال	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

بنابراین داریم:

$$E(X)=E(Y)=(۰\times\frac{۱}{۴})+(۱\times\frac{۱}{۲})+(۲\times\frac{۱}{۴})=۱$$

$$E(X^۳)=E(Y^۳)=(۰^۳\times\frac{۱}{۴})+(۱^۳\times\frac{۱}{۲})+(۲^۳\times\frac{۱}{۴})=۲.۵$$

در تساوی دوم تابع $h(t)=t^۳$ را به کار برده‌ایم.

۹.۱.۴ تمرین بخش یک

۱. در یک بازی با پرتاب تصادفی تاس، به اندازهٔ شمارهٔ خالها به شما سکه ۱۰۰ ریالی می‌دهند. بلیط هر بازی چند ریال باید باشد تا شخص بلیط فروش به اندازهٔ $\frac{۱}{۴}$ سکه‌ها سود ببرد؟

۲. سکهٔ نااریبی را سه بار پرتاب می‌کنند. فرض کنید X شمارهٔ شیرها و Y شمارهٔ خطها باشد. نشان دهید که

$$E(X)=E(Y)$$
$$E(X^۲)=E(Y^۲)$$

برای سکه‌ای اریب با $P(H)=\frac{۱}{۴}$، آیا X و Y همتوزیع هستند؟ آیا تساویهای بالا درست است؟

۳. نشان دهید که برای هر تابع $h(t)$ داریم:

$$X\overset{D}{=}Y\Rightarrow E[h(X)]=E[h(Y)]$$

۴. فرض کنید X و Y مستقل باشند و داشته باشیم $E(X)=۲$ و $E(Y)=۳$. امید ریاضی $(X-۱)(Y-۲)$ را بیابید.

۵. فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ دارای امید ریاضی مشترک μ باشند. امید ریاضی $\overline{X}$ را بیابید.

۶. نشان دهید که تابع زیر، چگالی یک متغیر تصادفی گسسته X است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x(x+۱)} & x=۱,۲,\dots\\ ۰ & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

آیا $E(X)$ وجود دارد؟

۷. نشان دهید که تابع زیر، چگالی یک متغیر تصادفی پیوسته X است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x^۲} & x>۱\\ ۰ & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

آیا $E(X)$ وجود دارد؟

۸. فرض کنید A نقطه‌ای به طول ۲ روی محور طولها و C نقطه‌ای به عرض ۲ روی محور عرضها باشد. نقطه‌ای به تصادف داخل مربع $OABC$ اختیار می‌کنیم. طول و عرض این نقطه را با X و Y

نشان می‌دهیم. نشان دهید X و Y هم‌توزیع هستند. $E(X)$ و $E(Y)$ و $E(X+Y)$ و $E(X-Y)$ و $E[(X+Y)(X-Y)]$ را بیابید.

۹. میانگین چگالیهای $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را با μ_1 و μ_2 نشان می‌دهیم. میانگین چگالی آمیخته $f(x)=pf_1(x)+qf_2(x)$ را بیابید، $0<p<1$ و $q=1-p$.

۱۰. ثابت کنید هرگاه متغیر تصادفی X غیر منفی باشد، داریم $E(X)\geq 0$.

۱۱. چگالی توام X و Y به صورت زیر است:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{8} & (1,1),(1,2),(2,1),(1,3)\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

$E(X)$ و $E(Y)$ و $E(XY)$ و $E(X+Y)$ را بیابید.

راهنمائی: برای محاسبه $E(XY)$ باید مجموع دوگانه به کار برد.

۱۲. چگالی توام X و Y به صورت زیر است:

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

نشان دهید X و Y همتوزیع هستند. $E(X)$ و $E(Y)$ و $E(XY)$ را بیابید.

راهنمائی: برای محاسبه $E(XY)$ باید انتگرال دوگانه به کار برد.

۱۳. یک تاس نااریب را دوبار می‌ریزیم. فرض کنید X_1 و X_2 به ترتیب شمارهٔ خالهای بار اول و دوم باشند و $X=X_1+X_2$ و $Y=X_1-X_2$. نشان دهید که $E(XY)=E(X)E(Y)$.

۱۴. در تمرین ۱۳، نشان دهید X و Y مستقل نیستند. بنابراین $E(XY)=E(X)E(Y)$ شرط لازم ولی نه کافی برای مستقل بودن X و Y است.

۱۵. فرض کنید X دارای چگالی زیر باشد:

$$f_X(x)=\begin{cases}\sin x & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

۲.۴ مفهوم واریانس و ویژگیهای آن

امید ریاضی یک متغیر تصادفی، با توجه به تعریف آن، به منزله معدل وزنی می‌باشد.

از اینرو $E(X)$ را، همانطوری که در پیش گفتیم، میانگین X یا میانگین $f_X(x)$ می‌نامند و آن را با μ و یا با μ_X نشان می‌دهند.

μ به عنوان مرکز توزیع X تلقی می‌شود و به آن پارامتر مکان می‌گویند از نظر فیزیکی μ را بدین طریق تعبیر می‌کنیم: فرض کنید محور xها در حکم میله‌ای همگن باشد که یک واحد جرم احتمال به طور گسسته یا پیوسته روی آن توزیع شده باشد. حال μ درست گرانیگاه این میله است.

دو متغیر تصادفی متفاوت ممکن است دارای میانگینهای مساوی باشند. مثلاً فرض کنید X_1 اعداد ۱، ۰، ۱- را به ترتیب با احتمالهای $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ و X_2 اعداد ۵، ۰، ۵- را به ترتیب با احتمالهای $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ بپذیرد. ملاحظه می‌شود که

$$E(X_1)=E(X_2)=0$$

اینک می‌خواهیم معیاری بسازیم که به کمک آن بتوان درباره پراکندگی جرم احتمال اطراف میانگین قضاوت نمود.

ظاهراً باید به امید ریاضی $X-\mu$ توجه کنیم. ولی چون همواره داریم:

$$E(X-\mu)=E(X)-\mu=0$$

از این راه معیاری به دست نمی‌آید. امید ریاضی $|X-\mu|$ به عنوان معیار پراکندگی معقول به نظر می‌آید، ولی به خاطر نماد قدر مطلق محاسبه آن همواره ساده نمی‌باشد. از اینرو بهتر است امید ریاضی $(X-\mu)^2$ را در نظر بگیریم.

۱.۲.۴ تعریف واریانس

میانگین $(X-\mu)^2$ را واریانس X می‌نامند و با $Var(X)$ یا σ^2 یا σ_X^2 نشان می‌دهند. بنابراین

$$Var(X)=\sigma_X^2=\sigma^2=E((X-\mu)^2)\geq 0$$

در عمل برای محاسبه واریانس از فرمول مهم دیگری استفاده می‌شود که آن را به طریق زیر از فرمول بالا به دست می‌آوریم:

$$Var(X)=E((X-\mu)^2)=E(X^2+\mu^2-2\mu X)$$
$$=E(X^2)+\mu^2-2\mu E(X)$$

چون $E(X)=\mu$، پس فرمول محاسبه واریانس می‌شود:

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

از فرمول آخر نتیجه می‌گیریم که واریانس X برابر است با امید ریاضی X^2 منهای توان دوم امید ریاضی X.

مثال ۱۱ یک سکه نااریب را سه بار می‌اندازیم فرض کنید X تعداد شیرها باشد. واریانس X را پیدا کنید.

حل - قبلاً دیدیم که $E(X)=\frac{3}{2}$. حال $E(X^2)$ را حساب می‌کنیم:

$$E(X^2)=(0\times\frac{1}{8})+(1^2\times\frac{3}{8})+(2^2\times\frac{3}{8})+(3^2\times\frac{1}{8})=3$$

پس داریم:

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=3-(\frac{3}{2})^2=\frac{3}{4}$$

مثال ۱۲ متغیر تصادفی X دارای چگالی زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

واریانس X را پیدا کنید.

حل -

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{1}2x^2dx=\frac{2}{3}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_{0}^{1}2x^3dx=\frac{1}{2}$$

بنابراین داریم

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{2}-(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{18}$$

۲.۲.۴ ویژگیهای واریانس

با استفاده از فرمول واریانس، ویژگیهای آن به دست می‌آیند.

الف - اگر b و c دو مقدار ثابت باشند، واریانس تابع خطی $Y=bX+c$ می‌شود

$$Var(Y)=Var(bX+c)=b^2Var(X)$$

برای اثبات این ویژگی، از $\mu_Y=b\mu_X+c$ و تعریف $Var(Y)$ استفاده می‌کنیم.

با فرض $b=1$ داریم:

$$Var(X+c)=Var(X)$$

به سخنی دیگر، هرگاه به X مقدار ثابت c اضافه شود، یعنی X به راست یا چپ انتقال یابد، واریانس تغییر نمی‌کند، یعنی نحوه پراکندگی اطراف میانگین جدید تغییر نمی‌کند.

با فرض $b=0$ داریم:

$$Var(c)=0$$

یعنی واریانس مقدار ثابت صفر است زیرا مقدار ثابت نمی‌تواند پراکندگی داشته باشد. برعکس می‌توان نشان داد که اگر متغیر تصادفی X دارای واریانس صفر باشد یعنی $Var(X)=0$، آنگاه $P(X=\mu_X)=1$، یعنی X با احتمال یک برابر میانگین می‌شود به سخنی دیگر دارای توزیع تباهیده

۳.۲.۴ تعریف انحراف استاندارد

انحراف استاندارد X عبارت است از

$$\sigma_X=\sigma=\sqrt{Var(X)}$$

ملاحظه می‌شود که

$$\sigma^2_{bX}=Var(bX)=b^2Var(X)$$

$$\sigma_{bX}=|b|\sigma_X$$

در ضمن می‌دانیم که

$$\mu_{bX}=b\mu_X$$

بنابراین واریانس مانند سطح دارای بعد ۲ ولی انحراف استاندارد و میانگین مانند طول دارای بعد یک هستند. مثلاً اگر واحد اندازه‌گیری را از متر به دسیمتر تغییر دهیم واریانس صد برابر ولی میانگین و انحراف استاندارد ده برابر می‌شود.

۴.۲.۴ متغیر تصادفی استاندارد

اگر X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، متغیر تصادفی زیر

$$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

دارای میانگین صفر و واریانس یک است. X^* را متغیر تصادفی استاندارد می‌گوئیم.

مثال ۱۳ وزن نوزادی متغیر تصادفی X با میانگین ۳/۴۱ کیلوگرم و واریانس ۰/۶۴ کیلوگرم به توان ۲ است. میانگین و انحراف استاندارد را برحسب پوند پیدا کنید.

حل - می‌دانیم که هر کیلوگرم تقریباً ۲/۲ پوند است. پس وزن نوزاد برحسب پوند می‌شود متغیر تصادفی $Y=۲/۲X$ حال داریم:

$$\mu_Y=۲/۲\mu_X=(۲/۲)(۳/۴۱)=۷/۵۰۲ \quad \text{پوند}$$

$$\sigma^2_Y=(۲/۲)^2\sigma^2_X=(۲/۲)^2(۰/۶۴)=۳/۰۹۷۶ \quad \text{پوند به توان ۲}$$

$$\sigma_Y=\sqrt{۳/۰۹۷۶}=۱/۷۶ \quad \text{پوند}$$

۵.۲.۴ تمرین بخش دو

۱. تاس ناریبی را به تصادف می‌ریزند. اگر خال زوج بیاید ده ریال دریافت می‌کنید و اگر خال فرد بیاید سه ریال می‌پردازید. فرض کنید X درآمد شما در این بازی باشد. میانگین و واریانس X را پیدا کنید.

۲. متغیر تصادفی X دارای چگالی زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<1\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

میانگین و واریانس و انحراف استاندارد X و X^2 و $|X|$ و $3-2X$ و $(2X+3)(1+X)$ را پیدا کنید.

۳. اندازه قامت یک جوان بیست ساله متغیر تصادفی X با میانگین ۱۵۰ و انحراف استاندارد ۲۵ سانتیمتر است. میانگین و واریانس انحراف استاندارد X را برحسب اینچ حساب کنید.

۴. متغیرهای X و Y مستقل با میانگینهای ۲ و ۳ و واریانسهای ۴ و ۵ می‌باشند. امید ریاضی XY و $(X+Y)(X-Y)$ را حساب کنید.

۵. ثابت کنید که اگر $E(X)=0$ و $Var(X)=0$ آنگاه $P(X=0)=1$.

۶. ثابت کنید که $Var(Y)=0$ اگر و تنها اگر $P(Y=\mu_Y)=1$.

راهنمائی: فرض کنید $X=Y-\mu_Y$ و از تمرین ۵ استفاده کنید.

۷. با استفاده از تعریف واریانس ثابت کنید که

$$Var(bX+c)=b^2Var(X)$$

۸. ثابت کنید که متغیر تصادفی استاندارد $X^*=\frac{(X-\mu)}{\sigma}$ دارای میانگین صفر و واریانس یک است.

۹. در ظرفی N بلیط به شماره‌های $1, 2, \ldots, N$ داریم. یکی از آنها را به تصادف بیرون می‌آوریم و شمارهٔ آن را X می‌نامیم. میانگین و واریانس X را برحسب N پیدا کنید.

۱۰. با فرض $Y>0$ ثابت کنید که

$$E(\sqrt{Y})\le\sqrt{E(Y)}$$

$$E\left(\frac{1}{Y}\right) \geq \frac{1}{E(Y)}$$

چه موقع تساوی برقرار می‌شود؟

راهنمائی: برای اثبات نامساوی اول در فرمول محاسبه واریانس به جای X^2 بگذارید Y. برای اثبات نامساوی دوم از دو طرف نامساوی زیر امید ریاضی بگیرید.

$$(Y-\mu_Y)\left(\frac{1}{Y}-\frac{1}{\mu_Y}\right)=\frac{-(Y-\mu_Y)^2}{\mu_Y Y} \leq 0$$

۱۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته غیر منفی باشد، یعنی $P(X \geq 0)=1$. با استفاده از تساوی زیر

$$E(X)=\int_0^\infty xf(x)\,dx=\int_0^a xf(x)\,dx+\int_a^\infty xf(x)\,dx$$

ثابت کنید که برای هر عدد $a>0$ داریم

$$P(X>a) \leq \frac{E(X)}{a} \qquad \text{(نامساوی مارکف)}$$

اگر X گسسته باشد، چه می‌کنید؟

۱۲. فرض کنید متغیر تصادفی Y دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. با استفاده از $X=(Y-\mu)^2$ و نامساوی تمرین ۱۱ ثابت کنید که برای $k>0$ داریم

$$P(|Y-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \qquad \text{(نامساوی چبیچف)}$$

اگر Y متغیر نرمال استاندارد باشد، طرف چپ نامساوی را برای $k=1,2,3$ بیابید و با طرف راست مقایسه کنید.

۱۳. فرض کنید X دارای چگالی زیر باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<1\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

کران بالایی $P(|X|>\frac{3}{4})$ را به کمک تمرین ۱۲ پیدا کنید.

۱۴. متغیر تصادفی Y اعداد ۱- و ۱ را با احتمالهای $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ می‌پذیرد. نشان دهید نامساوی چبیچف به تساوی تبدیل می‌شود. بنابراین این نامساوی را نمی‌توان در حالت کلی تیزتر کرد، زیرا ممکن است تساوی هم برقرار شود.

۱۵. در تمرین ۱۳، $Var(X^2)$ را بیابید.

۳.۴ مفهوم کوواریانس و ویژگیهای آن

برای اینکه کوواریانس را تعریف کنیم نخست با استفاده از تعریف واریانس به محاسبه واریانس مجموع دو متغیر تصادفی X و Y با میانگین‌های μ_X و μ_Y می‌پردازیم. چون امید $X+Y$ برابر است با $\mu_X+\mu_Y$ پس داریم

$$\begin{aligned}Var(X+Y)&=E([(X+Y)-(\mu_X+\mu_Y)]^2)\\&=E[(X-\mu_X)^2+(Y-\mu_Y)^2+2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]\\&=Var(X)+Var(Y)+2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]\end{aligned}$$

آخرین امید ریاضی را با $Cov(X,Y)$ نشان می‌دهیم و آن را کوواریانس X و Y می‌نامیم. بنابراین برای $Var(X+Y)$ فرمول زیر به نام فرمول واریانس مجموع به دست می‌آید:

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$$

۱.۳.۴ تعریف کوواریانس

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با میانگینهای μ_X و μ_Y باشند کوواریانس این دو متغیر را با $Cov(X,Y)$ یا σ_{XY} نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Cov(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

حاصلضرب $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ ممکن است، مثبت یا منفی باشد. پس امید ریاضی آن، یعنی عدد $Cov(X,Y)$ بر حسب اینکه مثبت یا منفی باشد، بیان می‌دارد که X و Y بطور متوسط در یک جهت یا در دو جهت مخالف تغییر می‌کنند.

۲.۳.۴ محاسبه کوواریانس

کوواریانس را می‌توان با استفاده از تعریف بالا و داشتن جدول توزیع احتمال توام X و Y محاسبه کرد. در عمل از فرمول دیگری استفاده می‌شود که آن را به طریق زیر از روی تعریف کوواریانس پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]\\&=E(XY-X\mu_Y-Y\mu_X+\mu_X\mu_Y)\\&=E(XY)-\mu_X\mu_Y-\mu_X\mu_Y+\mu_X\mu_Y\end{aligned}$$

پس فرمول محاسبه کوواریانس می‌شود:

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

مثال ۱۴ فرض کنید جدول توزیع احتمال X و Y به صورت زیر باشد:

$Y \backslash X$	۱	۲	۳	$f_Y(y)$
۱	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$
۲	$\frac{2}{8}$	0	0	$\frac{2}{8}$
$f_X(x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	۱

$Cov(X,Y)$ و $Var(X+Y)$ را حساب کنید.

حل - از جدول بالا داریم:

$$E(X)=2\ ,\ E(X^2)=\frac{19}{4}\ ,\ E(Y)=\frac{5}{4}$$

$$E(Y^2)=\frac{7}{4}\ ,\ Var(X)=\frac{3}{4}\ ,\ Var(Y)=\frac{3}{16}$$

$$E(XY)=\frac{9}{4}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{4}$$

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)=\frac{7}{16}$$

با استفاده از فرمول محاسبه کوواریانس می‌توان به آسانی ویژگیهای زیر را ثابت کرد:

الف - $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$. این ویژگی نشان می‌دهد که جابجائی X و Y مقدار کوواریانس را تغییر نمی‌دهد یعنی کوواریانس نسبت به X و Y متقارن است.

ب - برای مقدار ثابت k داریم: $Cov(X,k)=0$. این ویژگی نشان می‌دهد که هرگاه یکی از دو متغیر ثابت بماند کوواریانس صفر می‌شود.

ج - برای هر دو مقدار ثابت b و d داریم:

$$Cov(X+b,Y+d)=Cov(X,Y)$$

این ویژگی نشان می‌دهد که هرگاه مبدأ اندازه‌گیری X و Y را تغییر دهیم کوواریانس تغییر نمی‌کند.

د - برای دو متغیر تصادفی مستقل X و Y داریم: $Cov(X,Y)=0$. این ویژگی به آسانی از $E(XY)=E(X)E(Y)$ و از فرمول محاسبه کوواریانس نتیجه می‌شود و بیان می‌دارد که کوواریانس دو متغیر تصادفی مستقل صفر است. زیرا تغییرات آنها مستقل از هم می‌باشد. ولی باید توجه کرد که صفر بودن کوواریانس، مستلزم مستقل بودن X و Y نمی‌باشد (به مثال ۱۵ در زیر توجه کنید.)

ه - برای هر دو مقدار ثابت a و c داریم:

$$Cov(aX,cY)=ac\ \ Cov(X,Y)$$

این ویژگی نشان می‌دهد که هرگاه واحد اندازه‌گیری را تغییر دهیم کوواریانس تغییر می‌کند. مثلاً اگر واحد اندازه‌گیری X و Y را ده بار کوچک کنیم کوواریانس صد برابر می‌شود. از ویژگیهای بالا معلوم می‌شود که با تغییر مبدأ و واحد اندازه‌گیری X و Y داریم:

$$Cov(aX+b,cX+d)=ac\ Cov(X,Y)$$

و - $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2+Y)$. این ویژگی نشان می‌دهد که کوواریانس نسبت به X و Y جمع‌پذیر است.

ز - $Cov(X,X)=Var(X)$. این ویژگی نشان می‌دهد که واریانس را می‌توان برحسب کوواریانس بیان داشت.

مثال ۱۵ فرض کنید X اعداد ۱، ۰، ۱- را با احتمالهای $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$ بپذیرد. متغیر تصادفی $Y=X^2$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید که $Cov(X,Y)=0$، ولی X و Y مستقل نیستند.

حل - ملاحظه می‌شود که $E(X)=0$، $E(Y)=\frac{1}{2}$ و $E(XY)=0$، پس داریم: $Cov(X,Y)=0$. حال نشان می‌دهیم که X و Y مستقل نیستند. اگر X و Y بخواهند مستقل باشند باید داشته باشیم (بطور مثال):

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)$$

ولی داریم:

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)=\frac{1}{4}$$

$$P(X=1)P(Y=1)=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

مثال ۱۶ متغیرهای تصادفی X و Y دارای میانگینهای ۱ و ۲ و واریانسهای ۳ و ۴ و کواریانس ۱- می‌باشند. میانگینها و واریانسها و کواریانس $V=X+2Y, U=2X-Y$ را پیدا کنید.

حل - به آسانی داریم:

$$E(U)=2E(X)-E(Y)=0$$

$$E(V)=E(X)+2E(Y)=5$$

$$Var(U)=Var(2X-Y)=4Var(X)+Var(Y)-4Cov(X,Y)=20$$

$$Var(V)=Var(X+2Y)=Var(X)+4Var(Y)+4Cov(X,Y)=15$$

$$Cov(U,V)=-5 \quad \text{(چرا؟)}$$

۴.۳.۴ تمرین بخش سه

۱. جدول توزیع احتمال X و Y به صورت زیر است:

Y \ X	۱	۲	۳
۱	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
۲	$\frac{1}{6}$	۰	$\frac{1}{6}$
۳	۰	$\frac{1}{3}$	۰

$E(X)$ و $E(Y)$ و $E(XY)$ و $Cov(X,Y)$

۲. چگالی توام X و Y به صورت زیر است:

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy & 0\le x\le y\le 1 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

$E(X)$ و $E(Y)$ و $E(XY)$ و $Cov(X,Y)$ را بیابید.

۳. ویژگیهای کواریانس را با استفاده از فرمول محاسبه کواریانس ثابت کنید.

۴. برای $Cov(a_1X_1+a_2X_2, b_1Y_1+b_2Y_2)$ یک فرمول پیداکنید و آن را تعمیم دهید.

۵. فرض کنید X و Y مستقل و همتوزیع با واریانس مشترک ۴ باشند. نشان دهید.

$$Cov(X+Y,X-Y)$$

آیا فرض مستقل و همتوزیع بودن X و Y ضرورت دارد؟

۶. در تمرین ۵،

$$Cov(X+2Y+3, X-2Y+3)$$

را بیابید.

۷. برای $Var(a_1X_1+a_2X_2)$ یک فرمول پیدا کنید و آن را تعمیم دهید.

۸. در تمرین ۵، $Var(2X-3Y+1)$ را بیابید.

۴.۴ مفهوم ضریب همبستگی و ویژگیهای آن

ویژگیها الف تا د برای $Cov(X,Y)$، به عنوان معیاری برای سنجش تغییرات X و Y نسبت به هم، ویژگیهای خوبی هستند اما ویژگی‌ها مطلوب نیست زیرا مقدار کواریانس را به واحد اندازه‌گیری متکی می‌کند. اگر X و Y را به ترتیب با σ_X و σ_Y بسنجیم یعنی به جای آنها $\frac{X}{\sigma_X}$ و $\frac{Y}{\sigma_Y}$ را به کار بریم ملاحظه می‌شود که دیگر این دو متغیر جدید و در نتیجه $Cov(\frac{X}{\sigma_X},\frac{Y}{\sigma_Y})$ به واحد اندازه‌گیری متکی نخواهد شد. این انگیزه‌ای برای تعریف ضریب همبستگی است.

۱.۴.۴ تعریف ضریب همبستگی

دو متغیر تصادفی X و Y با واریانسهای σ_X^2 و σ_Y^2 را در نظر می‌گیریم ضریب همبستگی این دو متغیر را با $\rho(X,Y)$ یا ρ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

۲.۴.۴ ویژگیهای ضریب همبستگی

الف - برای مقادیر ثابت a,b,c,d با فرض $a>0$ و $c>0$ داریم:

$$\rho(aX+b\ ,\ cY+d)=\rho(X,Y)$$

این تساوی به آسانی با استفاده از ویژگیهای واریانس و کواریانس ثابت می‌شود. معنی این تساوی این است که ضریب همبستگی X و Y به مبدأ و واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد.

ب - $-1\le\rho\le1$

ج - $\rho=\pm1 \Leftrightarrow \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}=\pm\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$

برای اثبات دو ویژگی ب و ج به طریق زیر عمل می‌کنیم:

دو متغیر تصادفی استاندارد $\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$ و $\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$ را که دارای میانگین صفر و واریانس یک هستند در نظر

می‌گیریم. برای حالت $\rho=1$ متغیر تصادفی Z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}-\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$$

بنابر فرمول واریانس مجموع و تعریف ضریب همبستگی داریم:

$$Var(Z)=1+1-2Cov(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X},\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y})=2-2\rho\ge0$$

بنابراین $\rho\le1$ و $\rho=1$ اگر و تنها اگر $Var(Z)=0$. چون $E(Z)=0$ پس $\rho=1$ اگر و تنها اگر با احتمال یک داشته باشیم:

$$Z=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}-\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}=0$$

به عبارت دیگر $\rho=1$ اگر و تنها اگر میان یافته‌های X و Y رابطه خطی بالا که دارای ضریب زاویه مثبت است برقرار باشد،

به همین طریق U را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}+\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$$

و نشان می‌دهیم که $\rho\ge-1$.

به طور فشرده داریم:

(۱) ρ عددیست در فاصله بسته $[-1,1]$

(۲) $\rho=1$ اگر و تنا اگر یافته‌های (X,Y) روی خط زیر باشند:

$$\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}-\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}=0$$

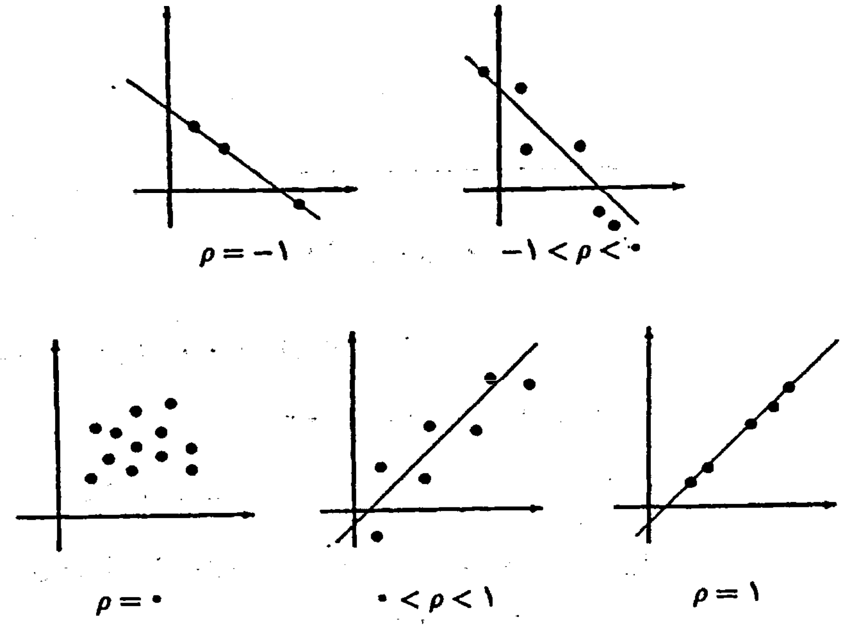
(۳) $\rho=-1$ اگر و تنها اگر یافته‌های (X,Y) روی خط زیر باشند:

$$\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}+\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}=0$$

(۴) اگر ρ به $+1$ یا -1 نزدیک باشد، یافته‌های (X,Y) اطراف یک خط راست می‌باشند. به عبارت دیگر گرایش خطی میان X و Y زیاد است.

(۵) اگر $\rho=0$، X و Y ناهمبسته هستند. به عبارت دیگر گرایش خطی میان X و Y ناچیز است. بنابراین ناهمبستگی مستلزم مستقل بودن X و Y نمی‌باشد.

نگاره ۱، ویژگیهای بالا را نشان می‌دهد.



نگاره ۱ ضریب همبستگی و ارتباط خطی میان X و Y .

مثال ۱۷ در مثال ۱۴ ضریب همبستگی X و Y را پیدا کنید.

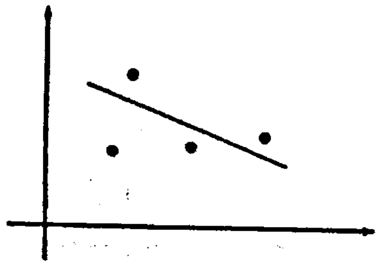
حل – در مثال ۱۴ دیدیم که

$$\sigma_X^2 = \frac{3}{4} \qquad \sigma_Y^2 = \frac{3}{16} \qquad \sigma_{XY} = -\frac{1}{4}$$

پس ضریب همبستگی برابر است با

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{3}{16}}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = -\frac{2}{3}$$

یافته‌های متغیر تصادفی دو بعدی (X, Y) عبارتند از $(1,1)$ و $(2,1)$ و $(3,1)$ و $(1,2)$. نمایش هندسی این یافته‌ها چهار نقطه در صفحهٔ محورهای مختصات است. این نقاط اطراف خطی با ضریب زاویه منفی در نگاره ۲ دیده می‌شوند.



نگاره ۲ پراکندگی نقاط اطرافِ یک خط

مثال ۱۸ فرض کنید میان X و Y رابطه زیر برقرار باشد:

$$(2X-1)(Y+1) = 2XY+3$$

ضریب همبستگی را پیدا کنید.

حل – رابطه بالا بعد از ساده کردن به صورت رابطه خطی زیر درمی‌آید:

$$2X - Y - 4 = 0$$

این خط دارای ضریب زاویه مثبت است. پس $\rho = 1$.

مثال ۱۹ فرض کنید که X دارای چگالی زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

با فرض $Y = X^2$، $\rho(X, Y)$ را پیدا کنید.

حل – به آسانی داریم

$$E(X) = 0$$

$$E(Y) = E(X^2) = \frac{1}{3}$$

$$E(XY) = E(X^3) = 0$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

بنابراین $\rho(X,Y)=0$. چون یافته‌های (X,Y) روی سهمی $y=x^2$ جا دارند، صفربودن ضریب همبستگی دور از انتظار نمی‌باشد در ضمن می‌توان به عنوان تمرین نشان داد که X و Y مستقل نیستند.

مثال ۲۰ فرض کنید $X+Y=1$ و $U=2X-Y$ و $V=X+2Y$. ضریب همبستگی U و V را پیدا کنید.

حل – از حل دستگاه دو مجهولی

$$\begin{cases}2X-Y=U\\ X+2Y=V\end{cases}$$

با استفاده از $X+Y=1$، داریم

$$U+3V=5$$

بنابراین $\rho(U,V)=-1$.

۴.۴.۴ تمرین بخش چهار

۱. متغیرهای X و Y دارای جدول توزیع احتمال زیر می‌باشند:

$Y \backslash X$	۱	۲	۳
۱-	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$
۰	۰	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$Cov(X,Y)$ و $\rho(X,Y)$ و $\rho(X-Y,Y)$ را پیدا کنید.

۲. متغیر تصادفی X دارای چگالی زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

فرض کنید $Y=X^2$. $\rho(X,Y)$ و $\rho(X+1,2Y-1)$ را حساب کنید.

۳. متغیرهای X و Y دارای جدول توزیع احتمال زیر می‌باشند:

$Y \backslash X$	۱-	۰	۱
۰	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$
۱	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$

نشان دهید $\rho(X,Y)=0$ ولی X و Y نامستقل‌اند.

۴. متغیر تصادفی X اعداد ۲، ۰، ۲- را با احتمالات $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$ می‌پذیرد. فرض کنید $Y=X^2+1$ نشان دهید که X و Y نامستقل‌اند ولی

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$$

۵. در ظرفی ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و یک مهره قرمز داریم. از این ظرف چشم بسته چهار مهره با هم بیرون می‌آوریم. فرض کنید X تعداد مهره‌های سفید و Y تعداد مهره‌های سیاه در این نمونه چهارتائی باشد. جدول توزیع احتمال توام X و Y را پیدا کنید. $\rho(X,Y)$ را پیدا کنید.

۶. دو متغیر تصادفی X و Y دارای واریانس مساوی می‌باشند. ثابت کنید که مجموع و تفاضل آنها ناهمبسته هستند.

۷. فرض کنید $X_1,X_2,\dots,X_n$ همتوزیع و مستقل با میانگین مشترک μ و واریانس مشترک σ^2 باشند. میانگین و واریانس $\bar{X}$ را پیدا کنید.

۸. در تمرین ۷ کواریانس $\bar{X}$ و $X_1 - \bar{X}$ را پیدا کنید.

۹. در ظرفی ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه داریم. از این ظرف ۵ مهره با هم بیرون می‌آوریم. فرض کنید X تعداد مهره‌های سفید و Y تعداد مهره‌های سیاه در این نمونه ۵تائی باشد. ضریب همبستگی X و Y را پیدا کنید.

۱۰. X و Y دارای میانگینهای ۱ و ۲ و واریانسهای ۳ و ۴ و کواریانس -1 می‌باشند. میانگین و واریانس $Z = 2X - Y + 1$ را پیدا کنید. m را طوری تعیین کنید تا $U = mX + Y$ و $V = X - mY$ ناهمبسته باشند.

۱۱. با استفاده از ویژگیهای کواریانس ثابت کنید که

$$Var(bX + c) = b^2 Var(X)$$

۱۲. ثابت کنید که: $\rho(aX + b, cY + d) = \pm\rho(X, Y)$

۱۳. در مثال ۱۹ نشان دهید که X و Y مستقل نیستند.

۱۴. ثابت کنید $\rho \geq -1$. چه موقع داریم $\rho = -1$؟

۱۵. فرض کنید میان X و Y رابطه خطی $X + 2Y - 1 = 0$ برقرار باشد و داشته باشیم $Var(X) = 4$. $Cov(X, Y)$ و $\rho(X, Y)$ را بیابید.

فصل ۵

چند توزیع مهم و ارتباط آنها با هم

در این گفتار نخست توزیعهای دو جمله‌ای، پواسن و نرمال را که در سرتاسر آمار و احتمال و در عمل دارای اهمیت هستند مطالعه می‌کنیم. سپس به کمک قضیه‌ای معروف و تاریخی به نام قضیه حد مرکزی دربارهٔ ارتباط این سه توزیع سخن می‌گوئیم.

۱.۵ توزیع دو جمله‌ای

پیش از اینکه منظور از توزیع دو جمله‌ای را بیان داریم، به تعریف آزمایش برنولی و متغیر تصادفی برنولی می‌پردازیم.

۱.۱.۵ تعریف آزمایش برنولی

آزمایش برنولی یک آزمایش تصادفی است که فضای نمونه آن تنها از دو پیشامد F و S، به نام شکست و پیروزی، تشکیل شده باشد.

مثلاً بازی شیر و خط، آزمایشهای طبی که نتیجه مثبت یا منفی دارند، و پرسشهائی که پاسخ آنها بله یا نه می‌باشند، همگی از نوع آزمایشهای برنولی هستند. این آزمایشها به نام یکی از برادران برنولی است. آنها از ریاضیدانان معروف سوئیس در قرن هیجدهم بودند.

۲.۱.۵ تعریف متغیر تصادفی برنولی

Y را روی فضای نمونه آزمایش برنولی، بدین طریق تعریف می‌کنیم:

$$Y(F) = 0 \qquad Y(S) = 1$$

مثلاً در آزمایش با سکه اگر خط مشاهده کنیم Y را صفر و اگر شیر مشاهده کنیم Y را یک می‌گیریم فرض کنید:

$$P(Y=0)=q;P(Y=1)=p \qquad 0<p<1\ ,\ p+q=1$$

متغیر تصادفی Y را یک متغیر تصادفی برنولی و توزیع آن را توزیع برنولی می‌نامند. این توزیع گسسته دارای چگالی زیر است:

$$f(y;p)=\begin{cases} p^y(1-p)^{1-y} & y=0,1\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

چون با تغییر p چگالی بالا تغییر می‌کند، از اینرو p را یک پارامتر برای چگالی بالا می‌نامیم. پارامتر p احتمال پیروزی است. به آسانی داریم

$$E(Y)=p \qquad Var(Y)=pq$$

۳.۱.۵ تعریف توزیع دو جمله‌ای

یک آزمایش برنولی با پارامتر p را n بار مستقلاً انجام می‌دهیم. مثلاً یک سکه، با $P(H)=p$، را n بار مستقلاً می‌اندازیم. فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد پیروزیها، مثلاً تعداد شیرها، باشد، می‌گوئیم X دارای توزیع دو جمله‌ای است. چون هر آزمایش برنولی از دو پیشامد ساده F و S تشکیل می‌شود، پس تعداد پیشامدهای ساده در این n آزمایش برنولی برابر است با 2^n که هر یک به صورت رشته‌ای n تائی از F و S می‌باشد. مثلاً برای $n=3$ هشت پیشامد زیر را داریم:

$$FFF, SFF, FSF, FFS, SSF, FSS, SFS, SSS$$

پیشامد $(X=2)$، یعنی پیشامد اینکه تعداد پیروزیها دو باشد، عبارتست از

$$\{SSF, FSS, SFS\}$$

بطور کلی برای n آزمایش برنولی پیشامد $(X=x)$ از $\binom{n}{x}$ پیشامد ساده تشکیل می‌شود که هر یک به صورت رشته‌ای مرکب از x تا S و $n-x$ تا F است. چون آزمایشهای برنولی مستقل هستند، احتمال هر یک از این رشته‌ها می‌شود p^xq^{n-x} و احتمال پیشامد $(X=x)$ می‌شود:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^xq^{n-x} \qquad x=0,1,2,\dots,n$$

بنابر دو جمله‌ای نیوتن داریم:

$$\sum_{x=0}^{n} P(X=x)=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^xq^{n-x}=(p+q)^n=1$$

به سخنی دیگر، احتمالی که به $(X=x)$ نسبت می‌دهیم درست برابر است با یکی از جمله‌های بسط دو جمله‌ای $(p+q)^n$. از اینجاست که چگالی زیر به نام چگالی دو جمله‌ای به دست می‌آید:

۴.۱.۵ چگالی دو جمله‌ای

چگالی زیر را چگالی دو جمله‌ای با پارامترهای n و p می‌گوئیم:

$$f(x;n,p)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^xq^{n-x} & x=0,1,\dots,n\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

هرگاه متغیر تصادفی X دارای این چگالی باشد، می‌گوئیم X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و p است و می‌نویسیم $X\sim B(n,p)$. ملاحظه می‌شود که X یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه $S_X=\{0,1,2,\dots,n\}$ می‌باشد.

تابع توزیع X را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$B(x;n,p)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

توجه کنید که متغیر تصادفی برنولی Y هم حالتی ویژه از متغیر دو جمله‌ای با پارامترهای ۱ و p است، یعنی $Y\sim B(1,p)$.

۵.۱.۵ میانگین و واریانس توزیع دو جمله‌ای

با استفاده از چگالی X می‌توان میانگین و واریانس آن را محاسبه کرد، ولی روش زیر آسانتر است.

n آزمایش برنولی مستقل انجام می‌دهیم تا متغیر دو جمله‌ای X را بسازیم. فرض کنید Y_i متغیر تصادفی برنولی نظیر آزمایش iام باشد. در نتیجه می‌نویسیم

$$X=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$$

از طرفی می‌دانیم که برای متغیر تصادفی برنولی Y_i داریم:

$$E(Y_i)=p \qquad Var(Y_i)=pq \qquad i=1,2,\dots,n$$

با استفاده از ویژگیهای امیدریاضی و واریانس داریم:

$$E(X)=E(Y_1)+E(Y_2)+\cdots+E(Y_n)=np$$

$$Var(X)=Var(Y_1)+Var(Y_2)+\cdots+Var(Y_n)=npq$$

مثلاً برای $X\sim B(32,\frac{1}{4})$ داریم $E(X)=8$ و $Var(X)=6$.

۶.۱.۵ محاسبه احتمال از روی توزیع دو جمله‌ای

محاسبه احتمال برای $1\le n\le 5$، از روی چگالی آسان است، ولی برای $6\le n\le 25$ بهتر است از جدولهائی که برای این منظور تهیه شده است استفاده کرد.

جدول شماره I نمونه‌ای از جدول توزیع دو جمله‌ای می‌باشد که ما در این کتاب به کار می‌بریم. برای $n>25$ معمولاً یک نوع روشی تقریبی به کار می‌رود که به زودی درباره آن صحبت خواهیم کرد. اینک به ذکر چند مثال می‌پردازیم:

مثال ۱ یک سکه ناارب را پنج بار مستقلاً می‌اندازیم. احتمال اینکه دو شیر و سه خط مشاهده شود چقدر است؟

حل – فرض کنید X تعداد شیرها باشد. واضح است که $X\sim B(5,\frac{1}{2})$. می‌خواهیم $P(X=2)$ را پیدا کنیم. با استفاده از چگالی X داریم:

$$P(X=2)=f(2;5,\frac{1}{2})=\binom{5}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^{5-2}$$
$$=(10)(\frac{1}{2})^5=\frac{5}{16}$$

مثال ۲ در یک چهارراه چراغ سبز ۱۵ ثانیه و چراغ زرد ۵ ثانیه و چراغ قرمز ۳۰ ثانیه دوام دارد. راننده‌ای ده بار در روز بین ساعت ۸ تا ۹ از این چهارراه عبور می‌کند. احتمال اینکه درست سه بار در روز به چراغ قرمز برخورد کند چقدر است؟

حل – هر بار که این راننده از چهارراه عبور می‌کند، برخورد با چراغ قرمز معادل با پیروزی در یک آزمایش برنولی با پارامتر

$$p=\frac{30}{15+5+30}=0.6$$

می‌باشد. بارهائی که در روز با چراغ قرمز برخورد می‌کند متغیر تصادفی دو جمله‌ای $X\sim B(10,0.6)$ است. با استفاده از جدول I داریم:

$$P(X=3)=P(X\le 3)-P(X\le 2)=0.0425$$

مثال ۳ یک آزمون ریاضی، ساخته از ۱۵ تست چهار پرسشی است که در هر تست تنها یک پرسش درست است. شخصی بدون آمادگی لازم در این امتحان شرکت می‌کند و تستها را شانسی پاسخ می‌دهد. احتمال اینکه دست‌کم ۵ تست را درست پاسخ دهد چقدر است؟

حل – پاسخ دادن درست به هر تست، معادل با یک آزمایش برنولی با پارامتر $p=\frac{1}{4}$ است. بنابراین پاسخهای درست متغیر تصادفی $X\sim B(15,0.25)$ می‌باشد. می‌خواهیم $P(X\ge 5)$ را حساب کنیم. با استفاده از جدول I داریم:

$$P(X\ge 5)=1-P(X\le 4)=0.3135$$

۷.۱.۵ تمرین بخش یک

۱. در ظرفی سه مهرهٔ سفید و دو مهرهٔ سیاه داریم که همگی گُذشته از رنگ یکسان هستند. از این ظرف چهار مهره یک به یک با جایگذاری بیرون می‌آوریم. فرض کنید X تعداد مهره‌های سفید در این نمونهٔ چهارتائی باشد. $E(X)$ و $Var(X)$ و $P(X=2)$ را محاسبه کنید. احتمال اینکه این چهار مهره یک در میان دارای رنگهای گوناگون باشند چیست؟

۲. یک آزمون زبان انگلیسی ساخته از ۲۰ تست پنج پرسشی است که در هر تست تنها یک پرسش درست می‌باشد. شخصی که اصلاً انگلیسی نمی‌داند در این آزمون شرکت می‌کند و تستها را به تصادف پاسخ می‌دهد. انتظار دارید چند تست را درست پاسخ دهد؟ احتمال اینکه ده تست را درست پاسخ دهد چیست؟

۳. با استفاده از چگالی دو جمله‌ای و تعریف امید ریاضی، $E(X)$ و $E(X(X-1))$ و سپس $E(X^2)$ و $Var(X)$ را برای متغیر تصادفی دو جمله‌ای X پیدا کنید.

۴. با فرض $X\sim B(n,p)$ و $U=n-X$، توزیع U را پیدا کنید.

۵. چهل درصد لامپهائی که در یک کارخانه تولید می‌شود معیوب هستند. احتمال اینکه در یک دوجین اصلاً لامپ معیوب نباشد چیست؟

۶. دو تاس ناریب را پنج بار با هم می‌ریزیم. احتمال اینکه دوبار جفت شش مشاهده شود چیست؟

۷. فرض کنید $X_1 \sim B(n_1,p)$ و $X_2 \sim B(n_2,p)$. اگر این دو متغیر مستقل باشند و $X=X_1+X_2$، ثابت کنید که $X\sim B(n_1+n_2,p)$.

۸. سکه‌ای را، با احتمال p برای شیر، آنقدر می‌ریزیم تا برای اولین بار شیر مشاهده شود. فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد آزمایشهای لازم باشد چگالی X را پیدا کنید.

۹. سکهٔ ناریب را، آنقدر می‌ریزیم تا دوبار شیر مشاهده شود. فرض کنید X تعداد آزمایشهای لازم باشد. $P(X=5)$ را حساب کنید.

۱۰. تمرین یک را بدون جایگذاری حل کنید.

۱۱. یک آزمایش برنولی، با احتمال p برای پیروزی، را n بار مستقلاً انجام می‌دهیم. فرض کنید X و Y به ترتیب تعداد پیروزیها و شکستها باشند. ثابت کنید احتمال حداقل m پیروزی برابر با احتمال حداکثر $n-m$ شکست است.

۱۲. سه سکه را که شانس شیر آمدن برای آنها $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ می‌باشد با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که هر سه شیر بیایند چیست؟ امید ریاضی و واریانس تعداد شیرها را پیدا کنید.

۱۳. در کارخانه‌ای ۵ درصد از لامپهای تولید شده معیوب هستند. برای کنترل، هر روز ۱۰ لامپ را به تصادف انتخاب کرده آزمایش می‌کنند. انتظار می‌رود چند روز از سال بیش از ۳ لامپ معیوب مشاهده شوند؟

۱۴. فرض کنید $X\sim B(3,\frac{1}{4})$ و $Y=(X+1)^2$، $P(Y=4)$ و $E(Y)$ را حساب کنید.

۱۵. در n آزمایش برنولی مستقل، فرض کنید X شمارهٔ پیروزیها و Y شمارهٔ شکستها باشد. $Cov(X,Y)$ و $\rho(X,Y)$ را بیابید.

۲.۵ توزیع پواسن

یک توزیع گسسته که با توزیع دو جمله‌ای ارتباط نزدیک دارد، توزیع پواسن می‌باشد. برای اینکه توزیع پواسن را معرفی کنیم و این ارتباط را نشان دهیم، توزیعی دو جمله‌ای $B(n,p_n)$ را که در آن p_n (یعنی شانس پیروزی در یک آزمایش برنولی) به n (یعنی تعداد آزمایشهای برنولی مستقل) بستگی دارد در نظر می‌گیریم. فرض کنید با بزرگشدن n احتمال p_n کوچک شود به طوری که np_n به سمت عدد $\lambda > 0$

میل نماید. می‌توان ثابت کرد که

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}p_n^x q_n^{n-x}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

حال با استفاده از سری زیر

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}=e^{\lambda}$$

نشان می‌دهیم که یک چگالی روی $\{0,1,2,\dots\}$ می‌توان ساخت. ملاحظه می‌شود که

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$$

۱.۲.۵ چگالی پواسن

چگالی زیر را چگالی پواسن با پارامتر $\lambda > 0$ می‌گوئیم:

$$f(x;\lambda)=\begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} & x=0,1,2,\dots\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

هرگاه متغیر تصادفی X دارای این چگالی باشد، می‌گوئیم X دارای توزیع پواسن با پارامتر λ می‌باشد و می‌نویسیم $X\sim P(\lambda)$ مشاهده می‌شود که X یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه $S_X=\{0,1,2,\dots\}$ است.

تابع توزیع X را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$P(x;\lambda)=\sum_{k=0}^{x} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

این توزیع به نام پواسن (۱۸۴۰-۱۷۸۱) ریاضیدان فرانسوی است.

۲.۲.۵ میانگین و واریانس توزیع پواسن

میانگین را به طریق زیر پیدا می‌کنیم:

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

برای محاسبه واریانس نخست به طریق بالا ثابت می‌کنیم که

$$E(X(X-1))=\lambda^2$$

حال با استفاده از این رابطه و $E(X)=\lambda$ داریم $E(X^2)=\lambda^2+\lambda$ و در نتیجه

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\lambda$$

تاکید می‌کنیم که میانگین و واریانس هر دو برابر با پارامتر λ می‌باشند.

رابطه حدی بالا به خوبی ارتباط میان توزیع دو جمله‌ای و توزیع پواسن را نشان می‌دهد. عملاً هرگاه n آزمایش برنولی مستقل داشته باشیم به طوری که n به قدر کافی بزرگ و p کوچک و np دارای مقداری معقول باشد، می‌توانیم توزیع دو جمله‌ای را با توزیع پواسن تقریب کنیم.

مثال ۴ یک صدم ساعتهائی که در یک کارخانه تولید می‌شوند معیوب هستند. احتمال اینکه در یک بسته ۲۰۰تائی که به تصادف پر شده است، اصلاً ساعت معیوب نباشد چقدر است؟

حل - هر ساعت که درکارخانه تولید می‌شود به منزلهٔ رخ دادن یک آزمایش برنولی با $p=0/01$ (شانس معیوب بودن ساعت) می‌باشد. $n=200$ آزمایش برنولی مستقل داریم. فرض کنید X تعداد ساعتهای معیوب در این بسته یا تعداد پیروزیها در این آزمایشها باشد. می‌دانیم که $X\sim B(200, 0/01)$ پس داریم:

$$P(X=0)=\binom{200}{0}(0/1)^0(0/99)^{200-0}=0/1340$$

از طرفی چون $n=200$ بزرگ و $p=0/01$ کوچک می‌باشد و $np=2$، پس X تقریباً دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda=2$ می‌باشد و داریم

$$P(X=0)\approx e^{-2}\frac{2^0}{0!}=0/1353$$

ملاحظه می‌شود که جواب تقریبی تا دو رقم اعشار با جواب واقعی برابر است.

مثال ۵ به یک مرکز تلفن بطور متوسط ۴۰ تلفن در فاصله ۱۰-۹ صبح می‌شود. احتمال اینکه در ۹ دقیقه حداقل ۵ تلفن به این مرکز بشود چیست؟

حل - فرض کنید X تعداد تلفنها در عرض ۹ دقیقه باشد. با یک تناسب می‌توان دید که X به طور متوسط برابر است با

$$\frac{40\times 9}{60}=6$$

این عدد برابر با میانگین X یعنی λ است، بنابراین امید ریاضی X می‌شود

$$\lambda=E(X)=6$$

فرض کنید این فاصله ۹ دقیقه‌ای را به فواصل زمانی بسیار کوچک T طوری بتوان تقسیم کرد تا شرایط زیر برقرار باشند:

الف - احتمال داشتن تلفن در هر T تقریباً متناسب با T باشد (شرط ایستائی)

ب - در هر T حداکثر یک تلفن بشود (شرط کمیابی)

ج - پیشامد تلفن داشتن در دو فاصله T مستقل باشند (شرط استقلال)

حال تصور کنید که تلفن شدن در فاصلهٔ زمانی T، به منزلهٔ یک آزمایش برنولی با پیروزی باشد. طبق شرائط بالا تعداد زیاد آزمایش برنولی مستقل با p کوچک و میانگین $\lambda=6$ انجام می‌گیرد. پس می‌توان گفت که X دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda=6$ است. با استفاده از جدول شماره II داریم:

$$P(X\geq 5)=1-P(X\leq 4)=1-\sum_{x=0}^{4}\frac{e^{-6}6^x}{x!}=1-0/285$$
$$=0/715$$

۳.۲.۵ تمرین بخش دو

۱. متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسن با واریانس ۴ می‌باشد، $p(X>2)$ را حساب کنید.

۲. متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسن می‌باشد و داریم:

$$3P(x=2)=P(x=2)$$

$P(X^2-4X=0)$ را پیدا کنید.

۳. فرض کنید $X\sim P(\lambda)$. ثابت کنید که $E(X(X-1))=\lambda^2$.

۴. در یک متر پارچه بطور متوسط ۲ زدگی می‌باشد. احتمال اینکه در یک قواره ۳ متری اصلاً زدگی نباشد چیست؟

۵. در یک کتاب ۴۰۰ صفحه‌ای ۴۰ غلط چاپی یافت می‌شود. احتمال اینکه در ده صفحه اول بیش از دو غلط باشد چیست؟

۶. در ظرفی ۹۹ مهره سفید و یک مهره سیاه داریم. از این ظرف ۲۰۰ بار با جایگذاری مهره‌ای بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه ۷ بار مهره سیاه دیده شود چیست؟

۷. تعداد تصادفات اتومبیل در یک چهارراه، ماهانه بطور متوسط ۴ می‌باشد. احتمال اینکه در عرض یک هفته تصادف رخ ندهد چیست؟

۸. احتمال هدف‌گیری در یک تیراندازی ۰/۰۰۰۲ می‌باشد. احتمال اینکه در ۴۰۰۰ تیراندازی، بیش از دو هدف‌گیری شود چیست؟

۹. اگر $f(x)$ چگالی توزیع پواسن باشد، ثابت کنید

$$f(x+1)=\frac{\lambda}{x+1}f(x)$$

با استفاده از این برابری ساده، با فرض $\lambda = 1, 2, 3$، برای $f(x)$ از $x=0$ تا $x=10$ یک جدول بسازید.

۱۰. اگر $X \sim B(n,p)$ و $f(x)$ چگالی X باشد، ثابت کنید که

$$f(x+1)=\frac{p(n-x)}{q(x+1)}f(x)$$

با استفاده از این برابری ساده، با فرض $n=10$ و $p=0/25 ، 0/5 ، 0/75$ برای $f(x)$ یک جدول بسازید.

۱۱. فرض کنید $X_1 \sim B(100, 0/01)$ و $X_2 \sim B(200, 0/01)$ مستقل باشند. توزیع X_1+X_2 را پیدا کنید.

توزیع تقریبی X_1 و X_2 و X_1+X_2 را پیدا کنید.

۱۲. اگر Y_1 و Y_2 مستقل و دارای توزیع پواسن با پارامترهای ۱ و ۲ باشند، توزیع Y_1+Y_2 را حدس بزنید.

راهنمایی: از تمرین ۱۱ استفاده کنید.

۳.۵ توزیع نرمال

یکی از توزیعهای معروف توزیع نرمال است که در فصل اول قدری با آن آشنا شدیم. این توزیع را، که در تمام رشته‌های آمار و احتمال نقشی ارزنده دارد، ابراهام دوموآور (۱۷۵۴-۱۶۶۷) ریاضیدان فرانسوی معرفی کرده است. در این بخش ویژگیهای این توزیع را با تفصیل بیشتر مطالعه می‌کنیم.

۱.۳.۵ چگالی توزیع نرمال

چگالی زیر را چگالی نرمال با پارامترهای μ و σ^2 می‌نامند:

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad -\infty<x<\infty$$

هرگاه متغیر تصادفی X دارای این چگالی باشد، می‌گوئیم X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 می‌باشد و می‌نویسیم $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. مشاهده می‌شود که X یک متغیر تصادفی پیوسته روی R می‌باشد.

تابع توزیع X به صورت انتگرال زیر است.

$$N(x;\mu,\sigma^2)=\int_{-\infty}^{x} f(t;\mu,\sigma^2)\,dt$$

این انتگرال را تنها می‌توان به تقریب محاسبه کرد.

۲.۳.۵ میانگین و واریانس توزیع نرمال

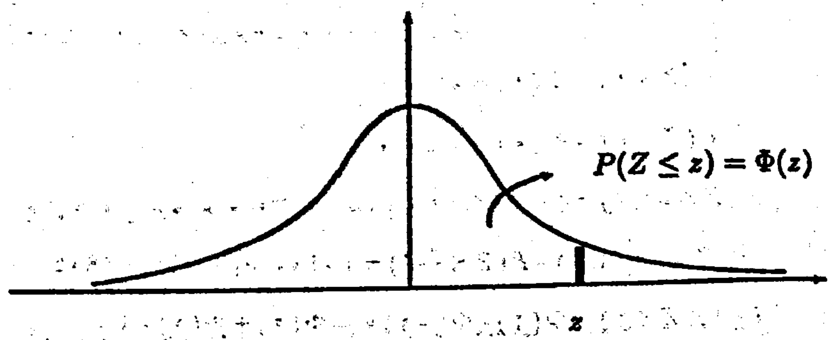
با انتگرال‌گیری می‌توان نشان داد که

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x;\mu,\sigma^2)\,dx=\mu$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x;\mu,\sigma^2)\,dx=\mu^2+\sigma^2$$

$$Var(x)=E(X^2)-E^2(X)=\mu^2+\sigma^2-\mu^2=\sigma^2$$

بنابراین در توزیع نرمال پارامتر μ میانگین X و پارامتر σ^2 واریانس X می‌باشد.



نگاره ۱ـ چگالی نرمال استاندارد

۳.۳.۵ توزیع نرمال استاندارد

توزیع نرمال را با $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$، توزیع نرمال استاندارد می‌نامند. معمولاً یک متغیر با این توزیع را با Z نشان می‌دهند. چگالی Z بصورت زیر است:

چگالی توزیع نرمال استاندارد را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty<z<\infty$$

منحنی متقارن این چگالی را در نگارهٔ ۱ می‌بینید.

توزیع نظیر این چگالی را با $\Phi(z)$ نشان می‌دهند. پس داریم:

$$\Phi(z)=P(Z\le z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

این انتگرال را نمی‌توان به صورت تابعی صریح از z محاسبه کرد، ولی می‌توان آن را با بسط تابع $\phi(t)$ به صورت یک سری به تقریب محاسبه نمود. در عمل با استفاده از جدول ۳ مقدار تقریبی $\Phi(z)$ را برای بعضی از مقادیر z محاسبه می‌کنند. چون منحنی $\phi(z)$ نسبت به محور عرضها متقارن است داریم

$$\Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad , \qquad \Phi(0)=\frac{1}{2}$$

با استفاده از جدول III برای متغیر نرمال استاندارد Z داریم:

$$P(Z\le 2)=\Phi(2)=0.9772$$
$$P(Z\le 0)=\Phi(0)=0.5000$$
$$P(Z\le -3.2)=1-\Phi(3.2)=1-0.9993=0.0007$$
$$P(Z>-\tfrac{1}{2})=1-P(Z\le \tfrac{-1}{2})=1-[1-\Phi(\tfrac{1}{2})]=0.6915$$
$$P(-1\le Z\le 2)=\Phi(2)-\Phi(-1)==\Phi(2)+\Phi(1)-1$$
$$=0.9772+0.8413-1=0.8185$$

۴.۳.۵ محاسبه احتمال برای متغیر نرمال غیر استاندارد

هرگاه $X\sim N(\mu,\sigma^2)$، می‌توان ثابت کرد که تبدیل $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است. با استفاده از این تبدیل برای متغیر نرمال غیر استاندارد، احتمال را به راحتی محاسبه می‌کنند. مثلاً با فرض $X\sim N(2,9)$ داریم:

$$P(X<3)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{3-2}{3}\right)=P(Z<0.33)=0.6293$$
$$P(-5<X<4)=P\left(\frac{-5-2}{3}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{4-2}{3}\right)=P(-2.33<Z<0.67)$$
$$=\Phi(0.67)-\Phi(-2.33)=0.7486+0.9901-1$$
$$=0.7387$$

۵.۳.۵ ترکیب خطی چند متغیر نرمال

فرض کنید $X_1,X_2,\dots,X_n$ مستقل و برای هر X_i داشته باشیم $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$. مقادیر ثابت $c_0,c_1,c_2,\dots,c_n$ را در نظر می‌گیریم. می‌توان ثابت کرد که

$$Y=c_0+c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n$$

دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس زیر است:

$$\mu_Y=c_0+c_1\mu_1+c_2\mu_2+\cdots+c_n\mu_n$$
$$\sigma_Y^2=c_1^2\sigma_1^2+c_2^2\sigma_2^2+\cdots+c_n^2\sigma_n^2$$

به ویژه هرگاه X_iها نرمال و مستقل با میانگین مشترک μ و واریانس مشترک σ^2 باشند، آنگاه معدل X_iها یعنی

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$$

دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ می‌باشد. این نتیجه با فرض $c_0=0$ و $c_1=c_2=\cdots=c_n=\frac{1}{n}$ فوراً بدست می‌آید.

مثال ۶ درآمد روزانه شخصی از سه محل تامین می‌گردد. از محل اول مقدار ثابت ۱۲۰ تومان، از محل دوم مقدار تصادفی $X_1\sim N(100,64)$ و از محل سوم مقدار تصادفی $X_2\sim N(80,36)$. با فرض مستقل بودن X_1 و X_2، احتمال اینکه درآمد روزانه این شخص بیش از ۳۱۰ تومان بشود چقدر است؟

حل – درآمد روزانه این شخص می‌شود متغیر تصادفی $Y=120+X_1+X_2$، که دارای توزیع نرمال با پارامترهای زیر است:

$$\mu=E(Y)=120+\mu_1+\mu_2=120+100+80=300$$

$$\sigma^2=Var(Y)=\sigma_1^2+\sigma_2^2=64+36=100$$

حال داریم:

$$P(Y>310)=P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}>\frac{310-300}{10}\right)=P(Z>1)$$
$$=1-P(Z\le 1)=1-\Phi(1)=0/1587$$

۶.۳.۵ تمرین بخش سه

۱. اگر Z دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، احتمالهای زیر را محاسبه کنید:

$$P(Z\le a)\qquad a=0,1,2,3,4$$
$$P(-a\le Z\le a)\qquad a=1,2,3,4$$

۲. اگر $X\sim N(2,9)$، احتمالهای زیر را حساب کنید:

$$P(X<3)\quad,\quad P(X>-1)\quad,\quad P(1\le X<4)$$

۳. اگر Z_1 و Z_2 مستقل و هر دو نرمال استاندارد باشند، ثابت کنید که $P(Z_1Z_2>0)=\frac{1}{2}$. اگر Z_1 و Z_2 مستقل و فقط متقارن باشند، آیا این رابطه درست است؟

۴. درجه حرارت در شهری دارای توزیع نرمال با میانگین ۶۸ درجه فارنهایت و انحراف معیار ۴ درجه فارنهایت می‌باشد. احتمال اینکه درجه حرارت بیش از ۷۰ درجه فارنهایت باشد چقدر است؟ توزیع درجه حرارت برحسب درجه سانتی‌گراد چیست؟

۵. دوره حاملگی دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۷۰ روز و واریانس ۱۰۰ روز می‌باشد. احتمال اینکه این دوره کمتر از ۲۵۰ روز باشد چیست؟

۶. نمره دانشجویان علوم در یک آزمون ریاضی دارای توزیع $N(60,25)$ است. استاد درس به دانشجویانی که نمره آنها بیش از $\mu+\sigma$ باشد نمره الف می‌دهد. در یک کلاس ۲۰۰ نفری انتظار چند الف دارند؟

۷. اگر X و Y مستقل و هر دو دارای توزیع $N(1,4)$ باشند.

$$P(X<2Y+1)\quad,\quad P(XY>0)\quad,\quad P(|X-Y|>2)$$

را حساب کنید.

۸. با فرض $Z\sim N(0,1)$ میانگین و واریانس Z را از راه انتگرال‌گیری پیدا کنید.

۹. با فرض $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ میانگین و واریانس X را به کمک تمرین ۸ پیدا کنید.

۱۰. با فرض $X\sim N(2,4)$ مطلوبست محاسبه $P(|X|<1)$ و $P(4X^2>1)$.

۴.۵ قضیه حد مرکزی و کاربرد آن

در این بخش به شرح یک قضیه معروف احتمال بنام قضیه حد مرکزی می‌پردازیم. از نظر تاریخی، دو موآور برای اولین بار در اوائل قرن هیجدهم میلادی این قضیه را برای متغیرهای تصادفی برنولی بکار برد. بعدها دیگران، در نیمه اول قرن بیستم، قضیه را در جهت‌های مختلف گسترش داده آن را تکمیل نمودند.

در اینجا، تنها قضیه را برای حالتی بسیار ساده، آن هم بدون اثبات، شرح می‌دهیم و با ذکر چند مثال کاربرد آن را روشن می‌کنیم.

۱.۴.۵ نمونه تصادفی

متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع $X_1, X_2, \dots, X_n$ را، که دارای توزیع مشترک $F(x)$ هستند، یک نمونه تصادفی n تائی از این توزیع می‌نامند. مثلاً وقتی یک تاس ناریب را ده بار مستقلاً می‌ریزیم، یک نمونه تصادفی ده‌تائی از این توزیع با چگالی زیر داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6} & x=1,2,\dots,6\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

یافته‌های این نمونه تصادفی ده‌تائی، یعنی مقادیری که عملاً مشاهده می‌کنیم، ممکن است بشوند:

۱، ۵، ۵، ۴، ۲، ۶، ۱، ۳، ۲، ۱

به عنوان مثالی دیگر، فرض کنید متغیر تصادفی $X \sim N(100, 16)$ اندازه قامت پسر هفت ساله باشد. اگر ۵ پسر هفت ساله را به تصادف انتخاب کنیم یک نمونه تصادفی پنج تائی از این توزیع نرمال داریم. یافته‌های این نمونه تصادفی پنج‌تائی تا یک سانتیمتر تقریب ممکن است بشوند:

۹۲، ۹۴، ۱۰۴، ۱۰۵، ۹۸

حال فرض کنید T_n و $\overline{X}_n$ به ترتیب مجموع و معدل X_iها در یک نمونه تصادفی n تائی باشند، یعنی

$$T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{T_n}{n}$$

اغلب نیاز داریم درباره این دو متغیر تصادفی احتمالهای زیر را محاسبه کنیم:

$P(A \le T_n \le B)$ برای دو عدد $A < B$

$P(a \le \overline{X}_n \le b)$ برای دو عدد $a < b$

در حالت کلی انجام این کار مستلزم داشتن توزیع T_n و توزیع $\overline{X}_n$ می‌باشد که معمولاً به آنها دسترسی نداریم. البته اگر نمونه تصادفی از توزیع نرمال آمده باشد، آنگاه T_n و $\overline{X}_n$ هم، که به صورت ترکیب

خطی از متغیرهای نرمال و مستقل $X_1, X_2, \dots, X_n$ می‌باشند، نرمال هستند و محاسبه آسان می‌شود. آیا این نتیجه در حالت کلی هم درست است؟ باید گفت نه! ولی اگر n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، می‌توان گفت که تحت شرایطی T_n و $\overline{X}_n$ تقریباً دارای توزیع نرمال هستند. در حقیقت این بیان، عصارهٔ قضیه حد مرکزی می‌باشد. اینک قضیه حد مرکزی را دقیقاً شرح می‌دهیم.

۲.۴.۵ قضیه حد مرکزی

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $F(x)$ با میانگین و واریانس μ و σ^2 باشد، به طوری که $\sigma^2 < \infty$. اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، دو نتیجه تقریبی زیر را داریم:

الف – $T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ تقریباً دارای توزیع $N(n\mu, n\sigma^2)$ است.

ب – $\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ تقریباً دارای توزیع $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ است.

این توزیعهای تقریبی را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$T_n \approx N(n\mu, n\sigma^2)$ مجموع

$\overline{X}_n \approx N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ معدل

اگر Φ توزیع نرمال استاندارد باشد، به صورت حدی برای هر z داریم:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{T_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le z\right) = \Phi(z)$$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z\right) = \Phi(z)$$

همان طوری که قبلاً دیدیم، اگر Z نرمال استاندارد باشد (به نگاره ۱ توجه کنید)

$$\Phi(z) = P(Z \le z)$$

و این احتمال را می‌توان از روی جدول ۳ پیدا کرد.

بزرگ بودن n به اندازه کافی شرطی مبهم می‌باشد که در تمام مسائل مورد تقریبی باعث کنجکاوی می‌گردد و انسان می‌پرسد به چه بزرگی؟ در این قضیه باید گفت که اگر توزیع F چندان چوله به چپ یا راست نباشد برای $n \ge 25$ تقریب خوبی بدست می‌آید. اینک به ذکر یک مثال می‌پردازیم:

مثال ۷ ده عدد به تصادف در فاصلهٔ $(0,1)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه مجموع آنها بیش از شش باشد چقدر است؟

حل - این ده عدد تصادفی، یک نمونهٔ تصادفی ده‌تائی $X_1, X_2, \dots, X_9, X_{10}$ را تشکیل می‌دهند. این متغیرهای تصادفی مستقل بوده و هر یک دارای توزیع یکنواخت در فاصلهٔ $(0,1)$، با میانگین $\mu=\frac{1}{2}$ و واریانس $\sigma^2=\frac{1}{12}$، می‌باشد. فرض کنید T مجموع این ده عدد تصادفی باشد. می‌خواهیم $P(T>6)$ را محاسبه کنیم. طبق قضیه حد مرکزی توزیع تقریبی T می‌شود $N(5,\frac{5}{6})$. از اینرو احتمال مطلوب می‌شود:

$$P(X_1+X_2+\dots+X_{10}>6)=P(T>6)=P\left(\frac{T-\mu_T}{\sigma_T}>\frac{6-5}{\sqrt{\frac{5}{6}}}\right)$$
$$\approx P(Z>1.1)=1-P(Z\le 1.1)$$
$$=1-\Phi(1.1)\approx 0.136$$

۳.۴.۵ ارتباط میان توزیع دو جمله‌ای و نرمال

فرض کنید $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد. همان طوری که می‌دانیم متغیر تصادفی $X=\sum_{i=1}^{n} Y_i$، یعنی تعداد پیروزیها، دارای توزیع دو جمله‌ای با میانگین np و واریانس npq می‌باشد. پس بنابر قضیه حد مرکزی، در صورتیکه n به اندازه کافی بزرگ باشد، متغیر تصادفی

$$\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$$

تقریباً دارای توزیع نرمال استاندارد است. به سخنی دیگر $X\sim B(n,p)$ و $U\sim N(np,npq)$ تقریباً همتوزیع هستند. برای هر دو عدد درست a و b با فرض $0\le a<b\le n$ داریم:

$$P(a\le X\le b)\approx P(a\le U\le b)$$

هر اندازه n بزرگتر و p به $\frac{1}{2}$ نزدیکتر باشد، تقریب بالا بهتر خواهد بود.

۴.۴.۵ تصحیح پیوستگی

تقریب توزیع دو جمله‌ای به وسیلهٔ توزیع نرمال در حقیقت تقریب یک توزیع گسسته به وسیلهٔ یک توزیع پیوسته می‌باشد. برای اینکه $P(a\le X\le b)$ با تقریب بهتری پیدا شود معمولاً آن را با

$P(a-0.5\le U\le b+0.5)$ تقریب می‌کنند. این عمل را تصحیح پیوستگی می‌نامند. دلیل افزودن یا کاستن ۰/۵ را به نقاط انتهائی از روی هیستوگرام به زودی شرح می‌دهیم.

می‌دانیم که برای متغیر نرمال $U\sim N(nq,npq)$ بعد از استاندارد کردن داریم:

$$P(a-0.5\le U\le b+0.5)=P\left(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{npq}}\le Z\le\frac{b+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{b+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

ملاحظه می‌شود که جملهٔ $\frac{0.5}{\sqrt{npq}}$ با بزرگ شدن n به صفر نزدیک می‌شود. پس در صورتیکه n به قدر کافی بزرگ باشد تصحیح پیوستگی عملاً بی‌اثر خواهد بود.

مثال ۸ فرض کنید $X\sim B(4,\frac{1}{2})$. مقدار واقعی و تقریب $P(2\le X\le 4)$ را حساب کنید.

حل - می‌دانیم که

$$Var(X)=1 \quad , \quad E(X)=2$$

$$P(X=x)=\binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} \qquad x=0,1,2,3,4$$

بنابراین جدول توزیع احتمال X به صورت زیر است

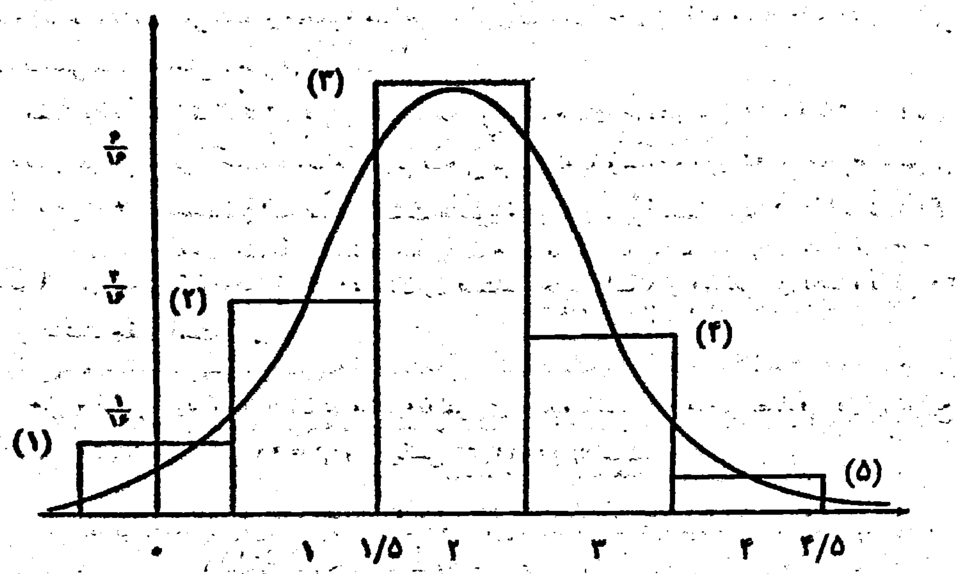
$X=x$	۰	۱	۲	۳	۴
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

دقیقاً داریم:

$$P(2\le X\le 4)=\sum_{x=2}^{4}P(X=x)$$
$$=\frac{11}{16}=0.6875$$

اگر توزیع $X\sim B(4,\frac{1}{2})$ را با توزیع $U\sim N(2,1)$ تقریب کنیم داریم:

$$P(2\le X\le 4)\approx P(2\le U\le 4)=P\left(\frac{2-2}{1}\le Z\le\frac{4-2}{1}\right)$$
$$=P(0\le Z\le 2)=\Phi(2)-\Phi(0)$$
$$=0.9772-0.5000=0.4772$$



نگاره ۲ منحنی نرمال و هیستوگرام

می‌بینید که این مقدار تقریبی با مقدار واقعی تفاوت زیاد دارد زیرا $n=۴$ بزرگ نیست.
حال محاسبه را با تصحیح پیوستگی انجام می‌دهیم.

$$P(۲\le X\le ۴)\approx P(۲-۰/۵\le U\le ۴+۰/۵)$$
$$=P(۱/۵\le U\le ۴/۵)$$
$$=P\left(\frac{۱/۵-۲}{۱}\le Z\le \frac{۴/۵-۲}{۱}\right)$$
$$=۰/۹۹۳۸+۰/۶۹۱۵-۱=۰/۶۶۵۳$$

با اینکه $n=۴$ بزرگ نیست، این تقریب به مقدار واقعی نزدیک است. نگارهٔ ۲ نشان می‌دهد که چرا در این مثال با استفاده از تصحیح پیوستگی تقریب بهتری داریم. ضمناً چون $p=\frac{۱}{۲}$، شکلی متقارن بدست می‌آید.

نخست هیستوگرام توزیع احتمال X را با استفاده از جدول توزیع احتمال بدین طریق رسم می‌کنیم: مستطیلهائی رسم می‌کنیم که دارای قاعده‌هائی به طول یک روی محور xها می‌باشند و وسط قاعده‌ها از

نقاطی به طولهای ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ تشکیل شده باشند. مساحت یا ارتفاع هر مستطیل به اندازهٔ احتمال نقطه وسط قاعده آن می‌باشد و مجموع مساحتها برابر یک است. حال از نقاط وسط قاعده‌های بالائی یک منحنی شبیه منحنی نرمال می‌گذرانیم.

مقدار واقعی $P(۲\le X\le ۴)$ برابر است با مجموع مساحتهای مستطیلهای (۳) و (۴) و (۵).
اما مقدار تقریبی آن برابر است با مساحت زیر منحنی نرمال که به وسیلهٔ محور xها و خطوط عمودی $x=۱/۵$ و $x=۴/۵$ محصور شده است (قسمت هاشور خورده) و برابر است با $P(۱/۵<U<۴/۵)$.

مثال ۹ در شهری ۵۶ درصد از رای دهندگان زن هستند. احتمال اینکه از ۵۰ نفر رای دهنده لااقل ۳۰ نفر زن باشند چقدر است؟

حل - فرض کنید X تعداد زن در میان ۵۰ نفر رای دهنده باشند. این متغیر تصادفی دارای توزیع $B(۵۰,۰/۵۶)$ با میانگین $np=۲۸$ و واریانس $npq=۱۲/۳۲$ است.

$$P(X\ge ۳۰)\approx P(U\ge ۲۹/۵)$$
$$=P\left(\frac{U-np}{\sqrt{npq}}>\frac{۲۹/۵-۲۸}{\sqrt{۱۲/۳۲}}\right)$$
$$=P(Z\ge ۰/۴۳)=۱-\Phi(۰/۴۳)$$
$$=۱-۰/۶۷=۰/۳۳$$

۵.۴.۵ تمرین بخش چهار

۱. در فاصلهٔ $(۰,۱)$ تعداد ۷۵ عدد تصادفی را انتخاب می‌کنیم. نشان دهید احتمال اینکه معدل این عددها در فاصله $(۰/۴۵,۰/۵۵)$ قرار گیرد تقریباً برابر است با ۰/۸۶۶.

۲. یک سکه نااریب را ۶ بار پرتاب می‌کنیم. اگر X تعداد شیرها باشد، احتمال $P(۲\le X\le ۳)$ را دقیقاً و با تقریب نرمال حساب و با یک نمودار نتایج را بیان کنید.

۳. فرض کنید $X\sim B(n,p)$. برای عدد درست a با $۰\le a\le n$ با استفاده از تقریب نرمال $P(X=a)$ را پیدا کنید (از یک نمودار استفاده کنید).

۴. احتمال اینکه نوزاد در تاریخی که دکتر پیش‌بینی می‌کند متولد شود $\frac{۱}{۴۰}$ می‌باشد. احتمال اینکه از ۴۰۰ نوزاد ۱۵ نوزاد در تاریخ پیش‌بینی شده متولد شوند چیست؟ تقریب پواسن و نرمال را بکار برید.

۵. یک نمونه تصادفی ۷۲تائی از چگالی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^{2}} & x>1\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

احتمال اینکه لااقل ۵۰ عضو این نمونه از ۳ بزرگتر باشند تقریباً چقدر است؟

۶. وزارتخانه‌ای ۸ خط تلفن و ۴۰ بخش دارد. هر بخش به مدت یک ساعت در روز (۱۲ ساعت) از این خطها استفاده می‌کند. فرض کنید X تعداد خطهای اشغال شده در لحظه‌ای معین باشد.

الف - نشان دهید که $X\sim B(40,\frac{1}{12})$.

ب - $P(X<8)$ را به تقریب محاسبه کنید. این احتمال را ضریب دسترسی به خط آزاد می‌نامیم.

ج - قرار است تعداد بخشها را به ۶۰ برسانند. اگر بخواهند ضریب دسترسی به خط آزاد تغییر نکند، وزارتخانه باید چند خط تلفن داشته باشد؟

۷. در ظرفی ۴۵ کارت سفید و ۵ کارت سبز داریم. ۱۰۰ بار، با جایگذاری از این ظرف به تصادف یک کارت بیرون می‌آوریم. فرض کنید X تعداد کارتهای سبز در این نمونه ۱۰۰تائی باشد. $P(X>16)$ را به کمک توزیع دو جمله‌ای، نرمال و پواسن پیدا کنید و نتایج را با هم مقایسه نمائید.

۸. نیروی تحمل یک نوع میله به طور متوسط ۱۴ کیلوگرم با انحراف معیار ۲ کیلوگرم است. احتمال تقریبی اینکه معدل نیروی تحمل برای ۱۰۰ عدد از این میله‌ها بیش از ۱۴/۵ کیلوگرم باشد چیست؟

۹. یک نمونه تصادفی ۱۰۰تائی از توزیع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F(x)=x^{3} \qquad 0\le x\le 1$$

احتمال تقریبی اینکه معدل این نمونه بیش از ۰/۶ باشد چیست؟

۱۰. نمونهٔ تصادفی $X_1,\dots,X_{100}$ را از یک توزیع پواسن با میانگین ۴ در نظر می‌گیریم. احتمال تقریبی اینکه معدل این نمونه بیش از ۵ باشد چیست؟

فصل ۶

نتیجه گیری آماری

در فصل نخست دیدیم که چگونه می‌توان داده‌ها، یعنی اطلاعات عددی دربارهٔ یک آزمایش تصادفی، را خلاصه کرد. در فصلهای دیگر قوانین احتمال، متغیر تصادفی، تابع توزیع، تابع چگالی، امید ریاضی و چند توزیع مهم را شرح دادیم.

در این فصل می‌خواهیم گفتار نخست را که جنبه عددی و مشاهده دارد با گفتارهای دیگر که جنبه نظری دارند و در آنها الگوهای شانس، یعنی قوانین توزیع احتمال، معرفی شده‌اند به نحوی ارتباط دهیم و به یک نوع نتیجه‌گیری به نام نتیجه‌گیری آماری یا استنباط آماری بپردازیم.

نخست منظور از آمار و فرق آن را با احتمال مطالعه می‌کنیم. سپس دربارهٔ پارامتر توزیع یک متغیر تصادفی تحت عناوین زیر سخن می‌گوئیم:

۱. برآورد یک پارامتر

۲. فاصله اطمینان برای یک پارامتر

۳. آزمون آماری یک پارامتر

در پایان این فصل به کوتاهی دربارهٔ متغیرهای χ^2 و T و F، که در کارهای آماری دارای کاربرد فراوان هستند سخن می‌گوئیم.

۱.۶ فرق احتمال و آمار

به زبان ساده، احتمال یعنی عددی در فاصلهٔ $[0,1]$ که میزان یقین دربارهٔ امری را بیان می‌دارد. آمار یعنی داده‌های عددی دربارهٔ امری. مثلاً می‌گوئیم احتمال بارندگی در فروردین ماه امسال ۰/۵ است. ولی می‌گوئیم آمار نشان می‌دهد طی ۴ سال گذشته میزان باران در فروردین ماه ۵۲، ۶۱، ۷۵، ۸۰ میلی‌متر بوده است.

اینک که با مفهوم دقیق احتمال و مدلهای احتمال آشنائی پیدا کرده‌ایم، و در ضمن می‌دانیم که چگونه داده‌های عددی را گروه بندی و خلاصه کنیم، منظور از علم آمار و احتمال را به صورت زیر بیان می‌داریم: آمار و احتمال عبارت است از جمع‌آوری داده‌های عددی با اصولی مقبول و پیاده کردن مدلهای احتمال روی آنها به منظور استخراج نتایجی بنام نتایج آماری.

۱.۱.۶ روش منطقی احتمال و آمار

روش احتمال از نظر منطق یک روش قیاسی است. در این روش باید به کبری یعنی قانون کلی (مثلاً انسان در معرض خطاست) و صغری یعنی حالت جزئی (مثلاً نویسنده این کتاب انسان است) و نتیجه یعنی نتیجهٔ مقایسه حالت جزئی با قانون کلی (مثلاً نویسنده این کتاب در معرض خطاست) توجه کرد.

روش آماری از نظر منطق یک روش استقرائی است، یعنی روشی است که طبق آن از امور جزئی (مثلاً مشاهدهٔ ۲۸۰ قریه با آب و برق در میان ۵۰۰ قریه) به یک قانون کلی (مثلاً احتمال آب و برق داشتن در هر قریه تقریباً ۰/۵ می‌باشد) پی می‌بریم. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

سکه‌ای را چندین بار مثلاً ۵۰۰ بار مستقلاً و تحت شرایط یکسان می‌اندازیم و فرض کنید ۲۸۰ بار شیر بیاید. با تعبیر احتمال به طریق فراوانی نسبی و با روش استقرائی می‌توان مقدار تقریبی p، یعنی شانس شیر آمدن را برابر $۰/۵۶ = \frac{۲۸۰}{۵۰۰}$ گرفت. در این عدد تا حدودی ناباوری و تردید وجود دارد. مثلاً اگر خود شما یا دیگری از نو سکه را ۵۰۰ بار بیاندازد، ممکن است تعداد شیرها با ۲۸۰ تفاوت پیدا کند. همچنین ممکن است شخص بخواهد با ابتکاری خاص (نه استفاده از احتمال به طریق فراوانی نسبی) از عدد ۲۸۰ استفاده کرده، مقدار تقریبی p را پیدا کند. بنابراین مقدار تقریبی p، که آن را برآورد p می‌نامیم، بر اثر عوامل تصادفی یا روش برآورد کاملاً محرز و مشخص نیست و همواره با مقدار واقعی آن تفاوت دارد. در آمار اصول و قواعدی را مطالعه می‌کنیم تا بر اساس آنها بتوانیم بهترین مقدار تقریبی را برای پارامتر مجهول p پیدا کنیم.

اینک فرض کنید که شانس شیر آمدن برای سکهٔ یاد شده با عدد ۰/۵۶ برآورد شود. این عدد را به طریق آماری به دست آورده‌ایم و آن را به عنوان یک قانون کلی برای شیر آمدن می‌پذیریم. حال سکه را دوبار می‌اندازیم. با استفاده از این قانون، احتمال اینکه سکه هر دو بار شیر بیاید می‌شود عدد $۰/۳۱۳۶ = ۰/۵۶^{۲}$. در این عدد بعد از قبول قانون کلی، تردیدی وجود ندارد زیرا آن را با روش قیاسی به دست آورده‌ایم.

۲.۶ برآورد آماری یک پارامتر

متغیر تصادفی گسسته یا پیوسته X را در نظر می‌گیریم. این متغیر ممکن است روی یک جمعیت تعریف شده باشد یا نتیجهٔ یک آزمایش تصادفی باشد. مثلاً تعداد فرزندان یک جوان ۲۵ ساله یک متغیر تصادفی گسسته و اندازه قامت او یک متغیر تصادفی پیوسته است. هرگاه سکه‌ای را پرتاب کنیم نتیجهٔ این آزمایش تصادفی از نظر شیر و خط یک متغیر تصادفی گسسته (متغیر برنولی) و از نظر مدت زمانی که سکه در حرکت است یک متغیر تصادفی پیوسته می‌باشد.

فرض کنید چگالی X برای ما معلوم باشد ولی به یک یا چند پارامتر مجهول بستگی داشته باشد. مثلاً در آزمایش برنولی، X دارای چگالی برنولی با پارامتر مجهول p است. در مورد اندازه قامت جوانان ۲۵ ساله، از راه جمع‌آوری و خلاصه کردن داده‌ها، می‌توان حدس زد که X دارای توزیع نرمال است. فرض کنید μ پارامتر مجهول باشد. می‌خواهیم این پارامتر مجهول را به تقریب تعیین کنیم یا به زبان آماری آن را برآورد نمائیم. برای این منظور نخست مفهوم نمونه تصادفی را شرح می‌دهیم.

۱.۲.۶ نمونهٔ تصادفی

هر نوع قضاوت آماری، به کمک مشاهدات مکرر یا آزمایشهای متعدد انجام می‌گیرد. بنابراین X را مستقلاً n بار تحت شرایط یکسان به صورت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ تصور می‌کنیم. واضح است که این متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع می‌باشند و در عمل پس از مشاهده به صورت n عدد حقیقی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ در می‌آیند.

۲.۲.۶ تعریف یک نمونه تصادفی

متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تائی از X هستند، هرگاه از یکدیگر مستقل و با X همتوزیع باشند.

۳.۲.۶ یافته‌های یک نمونه تصادفی

هرگاه در عمل اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را برای نمونه تصادفی مشاهده کنیم، آنها را یافته‌های این نمونه تصادفی می‌نامیم.

مثال ۱ یک تاس ناآریب را پنج بار می‌ریزیم. نمونهٔ تصادفی ۵تائی $X_1, X_2, \ldots, X_5$ به دست می‌آید.

اگر در عمل برای این نمونه تصادفی اعداد ۱، ۶، ۴، ۳، ۲، ۳ را مشاهده کنیم، این اعداد یافته‌های این نمونه تصادفی هستند.

مثال ۲ فرض کنید متغیر تصادفی X (برحسب میلی گرم) مقدار طلائی باشد که از یک کیلوگرم سنگ معدن طلا در آزمایشگاه به دست می‌آید. هرگاه این آزمایش را چهاربار مستقلاً انجام دهیم، یک نمونه تصادفی چهارتائی X_1, X_2, X_3, X_4 به دست می‌آید. اگر در عمل اعداد ۰/۶۱۲، ۰/۷۱۲، ۰/۵۱۳، ۰/۲۱۱ را مشاهده کنیم، این اعداد یافته‌های این نمونه تصادفی هستند.

۴.۲.۶ آماره

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای چگالی $f(x;\theta)$ باشد، که در آن $\theta\in A$ یک پارامتر مجهول است. مجموعهٔ A را که پارامتر θ می‌تواند در آن تغییر کند فضای پارامتر می‌نامیم. مثلاً اگر X یک متغیر برنولی، با احتمال $۰<\theta<۱$ برای پیروزی باشد $A=(۰,۱)$ فضای پارامتر است. ممکن است پارامتر θ چندبعدی به‌صورت $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$ باشد. مثلاً در توزیع نرمال پارامتر $\theta=(\mu,\sigma^2)$ یک پارامتر دو بعدی می‌باشد و فضای پارامتر عبارت است از ناحیه بالای محور طولها در صفحه مختصات.

برای اینکه مقدار تقریبی θ را پیدا کنیم، اعضای نمونه را به نحوی مناسب با هم ترکیب می‌نمائیم یعنی تابعی مناسب از آنها می‌سازیم تا بتوانیم پارامتر مجهول را برآورد کنیم.

۵.۲.۶ تعریف آماره

تابع $U=g(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ از نمونهٔ تصادفی $X_1,X_2,\ldots,X_n$ را که در آن پارامتر مجهول نباشد یک آماره می‌نامند. واضح است که U یک متغیر تصادفی است و توزیع آن ممکن است به پارامتر بستگی داشته یا نداشته باشد. مثلاً در توزیع $N(\mu,۱)$، توزیع آماره $U=\overline{X}$ یعنی $N(\mu,\frac{۱}{n})$ به پارامتر بستگی دارد، ولی توزیع آماره $V=X_n-X_1$ یعنی $N(۰,۲)$ به پارامتر بستگی ندارد. آماره‌ای برای برآورد کردن مفید است که توزیع آن به پارامتر مجهول بستگی داشته باشد و بتواند درباره این پارامتر ما را مطلع دارد.

۶.۲.۶ تعریف برآورد و برآورد یاب

هرگاه به جای نمونه تصادفی یافته‌های آن را در آماره $U=g(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ بگذاریم، یافته این آماره می‌شود عدد $u=g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. اگر این عدد را به عنوان مقدار تقریبی پارامتر θ به کار بریم،

آنگاه آماره U را یک برآوردیاب (یا برآوردگر یا برآورد کننده یا تخمین زن) و عدد u را یک برآورد (یا تخمین) برای پارامتر θ می‌گویند.

باید افزود که آماره و برآوردیاب هر دو متغیر تصادفی هستند، از اینرو آنها را با حروف بزرگ و یافته‌های آنها را با حروف کوچک نشان می‌دهیم. به سبب شباهت حروف کوچک و بزرگ در بعضی موارد (مانند s و S)، خواننده باید از متن مطلب تفاوت برآورد و برآوردیاب را تمیز دهد. توجه کنید که برآورد یاب پارامتر θ یک آماره است، ولی هر آماره برآوردیاب برای θ نمی‌باشد.

مثال ۳ فرض کنید در مثال ۲ داشته باشیم $X\sim N(\mu, ۰/۴)$. یک برآورد و یک برآوردیاب برای μ پیدا کنید.

حل – چون μ میانگین X است، پس انتظار داریم که اگر X را چندبار مشاهده کنیم معدل بشود μ. بنابراین یک برآورد مناسب برای μ می‌شود عدد زیر:

$$u=\bar{x}=\frac{۰/۲۱۱+۰/۵۱۳+۰/۷۱۲+۰/۶۱۲}{۴}=۰/۵۱۲$$

بطور کلی برآوردیابی که این برآورد را می‌دهد عبارتست از متغیر تصادفی زیر:

$$U=\overline{X}=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{۴}$$

مثال ۴ عددی به تصادف در فاصلهٔ (a,b) اختیار می‌کنیم و آن را با X نشان می‌دهیم a و b را برآورد کنید. در این مثال $\theta=(a,b)$ یک پارامتر دو بعدی می‌باشد.

حل – می‌دانیم X دارای چگالی زیر است:

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\frac{۱}{b-a} & a<x<b\\ ۰ & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

این چگالی را چگالی یکنواخت روی فاصله (a,b) می‌نامند. X را مستقلاً چندبار مثلاً پنج بار تصور می‌کنیم تا یک نمونه تصادفی پنج‌تائی بدست آید. فرض کنید اعداد ۱/۷، ۱/۴، ۱/۹، ۱/۳، ۱/۲ یافته‌های این نمونه باشند. می‌توان کوچکترین و بزرگترین عدد یعنی ۱/۲ و ۱/۹ را به عنوان برآورد a و b اختیار کرد. برآوردیاب a می‌شود آمارهٔ $U_1=min\{X_1,X_2,\ldots,X_5\}$ و برآورد یاب b می‌شود آمارهٔ $U_2=Max\{X_1,X_2,\ldots,X_5\}$.

۷.۲.۶ تمرین بخش دو

۱. یک تاس را ۵ بار می‌ریزیم تا نمونهٔ تصادفی $X_1, \dots, X_5$ به دست آید. یافته‌های این نمونه به چند طریق می‌توانند رخ دهند؟ احتمال اینکه یافته‌ها به صورت ۱، ۵، ۳، ۱، ۲ باشند چیست؟ شانس مشاهدهٔ خال ۶ را با روش استقرائی چگونه می‌یابید، هرگاه در ۱۰۰ ریزش ۲۰ بار خال ۶ مشاهده کنیم؟

۲. فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(\mu, 1)$ باشد. توزیع آماره‌های $U = X_1 + X_2 + X_3$ و $V = 2X_1 - X_2 - X_3$ را بیابید. کدام از این دو آماره برای برآورد کردن پارامتر μ مفید است؟ آیا $W = X_1 + X_2 - \mu$ یک آماره است؟

۳. شخصی اعداد ۸، ۶، ۴، ۷، ۵، ۳، ۹، ۲ را به تصادف در فاصلهٔ $(0, \theta)$ پیدا کرده است. پارامتر θ را چگونه برآورد می‌کند؟

۴. فرق برآورد و برآوردیاب چیست؟ فرق آماره و برآوردیاب چیست؟

۵. یک تاس اریب در دست است، که احتمال آمدن خال ۵، با آن $\frac{1}{4}$ است. این عدد را چگونه و یا چه روشی یافته‌اند؟ اگر این تاس را ۳ بار بریزیم، احتمال اینکه دوبار خال ۵ مشاهده کنیم چیست؟ این احتمال را با چه روشی می‌یابیم؟

۳.۶ روشهای برآوردیابی

فرض کنید X دارای چگالی $f(x;\theta)$ باشد که در آن پارامتر θ مجهول است. برای اینکه θ را برآورد کنیم، یعنی مقدار تقریبی آن را بیابیم، نخست نمونهٔ تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ را از این چگالی در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم اعداد $x_1, x_2, \dots, x_n$ یافته‌های این نمونهٔ تصادفی باشند. اینک دو روش معروف را برای برآوردیابی θ شرح می‌دهیم.

۱.۳.۶ روش گشتاورها

روش گشتاورها را برای برآورد کردن پارامترها، کارل پیرسن آماردان انگلیسی در ۱۸۹۴ به کار برده است و یکی از قدیمیترین روشها است که بر اساس گشتاورها می‌باشد. همانطوری که می‌دانیم $\mu = E(X)$ (μ را با پایان فرض می‌کنیم) را گشتاور مرتبه نخست X می‌نامند. بدیهی است که μ معمولاً تابعی از

پارامتر θ است، زیرا مثلاً در حالت پیوسته داریم:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;\theta)\,dx = g(\theta) \qquad \text{تابعی از } \theta$$

از طرف دیگر میانگین یا معدل $X_1, \dots, X_n$ یعنی

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

را که یک آماره می‌باشد و در آن پارامتر مجهول θ یافت نمی‌شود، گشتاور مرتبه نخست نمونه تصادفی می‌گویند. اگر به جای نمونه تصادفی یافته‌های آن را به کار بریم آنگاه یافتهٔ آمارهٔ $\overline{X}$ می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

این عدد را گشتاور مرتبه نخست داده‌ها می‌گوئیم.

۲.۳.۶ قانون اعداد بزرگ

بر اساس قانونی مشهور در احتمال، به نام قانون اعداد بزرگ یا قانون معدلها، می‌توان ثابت کرد که برای هر $\varepsilon > 0$ با بزرگ شدن n (اندازهٔ نمونه تصادفی) $P(|\overline{X}-\mu| > \varepsilon)$ به سمت صفر میل می‌نماید به سخنی دیگر، اگر نمونه بزرگ شود شانس نزدیک شدن معدل X_iها به μ زیاد می‌گردد.

معمولاً می‌نویسند $\overline{X} \xrightarrow{P} \mu$ و می‌گویند $\overline{X}$ در احتمال به μ میل می‌کند، هنگامی که n به بینهایت برود. به زبان آماری $\overline{X}$ را برآوردیابی سازگار برای μ می‌نامند.

این قانون را برای متغیرهای تصادفی صفر و یک، یکی از برادران برنولی ارائه داد. خنشین، ریاضیدان روسی، در اوائل قرن بیستم آن را در حالتی که μ باپایان باشد ثابت کرد. اگر واریانس X باپایان باشد به کمک نامساوی چبیچف، فوراً این قانون ثابت می‌شود.

با استفاده از این قانون و با استفاده از اینکه $E(\overline{X}) = \mu$، می‌توان گفت که $\overline{X}$ برآوردیابی مناسب برای μ است. اینک، با فرض اینکه θ یک بعدی باشد، از حل معادلهٔ تقریبی

$$\bar{x} \approx \mu = g(\theta)$$

برآوردی برای پارامتر مجهول θ به دست می‌آید که آن را برآورد گشتاوری θ می‌گویند. ما این برآورد را با $\bar{\theta}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۵ طول عمر یک نوع لامپ متغیر تصادفی X با چگالی زیر است.

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x} \quad \theta>0 & x>0\\ 0 & \text{جای دیگر}\end{cases}$$

با استفاده از یک نمونه تصادفی برآورد گشتاوری θ را بیابید. این چگالی را نمائی منفی می‌نامند.

حل - به کمک انتگرال جزء به جزء داریم:

$$\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\theta e^{-\theta x}dx=\frac{1}{\theta}=g(\theta)$$

حال μ را به کمک $\bar{x}$ برآورد می‌کنیم. برای این منظور از حل معادلهٔ تقریبی

$$\bar{x}\approx\frac{1}{\theta}$$

برآورد گشتاوری θ می‌شود عدد $\bar{\theta}=\frac{1}{\bar{x}}$. اگر به جای $\bar{x}$ متغیر تصادفی $\bar{X}$ را بگذاریم، برآوردیاب گشتاوری θ می‌شود متغیر تصادفی

$$\bar{\theta}=\frac{1}{\bar{X}}$$

توجه کنید که هم برای برآورد θ و هم برای برآوردیاب θ، نماد $\bar{\theta}$ را به کار می‌بریم. از متن مطلب معلوم می‌شود که $\bar{\theta}$ چه وقت عدد و چه وقت متغیر تصادفی است.

به طور کلی داریم:

گشتاور kام متغیر تصادفی X عبارتست از

$$\mu_k=E(X^k)=\int x^k f(x;\theta)\,dx$$

گشتاور kام نمونه تصادفی $X_1,X_2,\dots,X_n$ عبارتست از

$$\overline{X^k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

گشتاور kام داده‌های $x_1,x_2,\dots,x_n$ عبارتست از

$$\overline{x^k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

با فرض $Y=X^k$ و $Y_i=X_i^k$ و به کمک قانون اعداد بزرگ داریم:

$$\bar{Y}\xrightarrow{P}E(Y)$$

$$\overline{X^k}\xrightarrow{P}E(X^k)$$

$$\overline{X^k}\xrightarrow{P}\mu_k$$

برای $k=1$ قبلاً نشان دادیم که $\bar{X}\xrightarrow{P}\mu$ (μ_1 را برابر μ می‌گیریم).

بنابراین μ_k، یعنی گشتاور مرتبه kام X، را با $\overline{x^k}$ برآورد می‌کنیم. مثالهای زیر نشان می‌دهند که به کمک گشتاورهای بالاتر می‌توان پارامتر یک بعدی یا چند بعدی را برآورد کرد.

مثال ۶ فرض کنید $X\sim N(0,\theta)$. با استفاده از یک نمونهٔ تصادفی برآورد و برآوردیاب گشتاوری θ را بیابید.

حل - بدیهی است که

$$\mu_2=E(X^2)=\theta \quad,\quad \mu=E(X)=0$$

ملاحظه می‌شود که گشتاور نخست X به θ بستگی ندارد. پس با استفاده از گشتاور دوم X، برآورد و برآوردیاب گشتاوری θ می‌شوند:

$$\bar{\theta}=\overline{x^2}$$

$$\bar{\theta}=\overline{X^2}$$

مثال ۷ فرض کنید $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. با استفاده از یک نمونه تصادفی برآورد پارامترها را بیابید.

حل - می‌دانیم که

$$E(X)=\mu$$

$$E(X^2)=\mu^2+\sigma^2$$

$E(X)$ و $E(X^2)$ را به ترتیب با $\bar{x}$ و $\overline{x^2}$ برآورد می‌کنیم از حل دو معادله تقریبی

$$\mu\approx\bar{x}$$

$$\mu^2+\sigma^2\approx\overline{x^2}$$

برآوردهای گشتاوری پارامترهای μ و σ^2 می‌شوند اعداد

$$\bar{\mu} = \bar{x}$$

$$\bar{\sigma}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = S^2$$

برآوردیابهای گشتاوری این دو پارامتر عبارتند از متغیرهای تصادفی

$$\bar{\mu} = \bar{X}$$

$$\bar{\sigma}^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2 = S^2$$

در این مثال برای برآورد کردن پارامترها، از نرمال بودن متغیر تصادفی X استفاده نمی‌شود. در حقیقت نتایج بالا را می‌توان برای هر متغیر تصادفی X با میانگین و واریانس با پایان به کار برد.

۳.۳.۶ روش راستنمائی ماکزیمم

برای اینکه این روش را شرح دهیم، نخست به مثال زیر توجه نمائید.

متغیر تصادفی X دارای توزیع برنولی با پارامتر p است. این پارامتر برابر است با $\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{3}$، ولی نمی‌دانیم کدام. به سخنی دیگر فضای پارامتر عبارت است از مجموعهٔ دو عضوی $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$. نمونهٔ تصادفی X_1, X_2, X_3, X_4 را از X در نظر می‌گیریم. فرض کنید یافته‌های این نمونه را به صورت ۱، ۱، ۰، ۱ مشاهده کرده باشیم. می‌دانیم که در توزیع برنولی $E(X)=p$. بنابراین برآورد گشتاوری p می‌شود

$$\bar{p} = \frac{1+1+0+1}{4} = \frac{3}{4}$$

عدد $\frac{3}{4}$ با $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ تفاوت دارد یعنی این برآورد در فضای پارامتر نیست. پس برآورد گشتاوری در این مثال، نمی‌تواند مقدار p را تعیین کند. در حقیقت مقداری برای p یافته‌ایم که در فضای پارامتر وجود ندارد. اینک روش زیر را به کار می‌بریم:

نخست احتمال اینکه در توزیع برنولی، یافته‌های بالا را مشاهده کنیم به دست می‌آوریم. چون X_iها مستقل و هر یک دارای توزیع برنولی با پارامتر p هستند داریم:

$$P(X_1=1, X_2=1, X_3=0, X_4=1) = p.p.(1-p).p = p^3(1-p)$$

طبیعی است که مشاهدهٔ این داده‌ها از توزیع برنولی زمانی مصداق پیدا می‌کند که $p^3(1-p)$ بیشترین مقدار را روی مجموعهٔ $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$ داشته باشد. این احتمال به ازای $p=\frac{1}{3}$ برابر $\frac{2}{81}$ و به

ازای $p=\frac{1}{2}$ برابر $\frac{1}{16}$ است. بنابراین $p=\frac{1}{2}$ را به عنوان برآورد پارامتر مجهول بر می‌گزینیم. تابع $p^3(1-p)$ را با $L(p)$ نشان داده آن را تابع راستنمائی (یا درستنمائی) می‌نامند. عدد $\frac{1}{2}$، که $L(p)$ را روی فضای پارامتر ماکزیمم می‌کند، برآورد راستنمائی ماکزیمم می‌خوانند و با $\hat{p} = \frac{1}{2}$ نشان می‌دهند. این روش را روش راستنمائی ماکزیمم می‌گویند. حال در حالت کلی روش راستنمائی ماکزیمم را شرح می‌دهیم.

۴.۳.۶ تابع راستنمائی

نمونهٔ تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ را از متغیر تصادفی X با چگالی $f(x;\theta)$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم مقدار واقعی پارامتر θ به مجموعهٔ A به نام فضای پارامتر، تعلق داشته باشد. یافته‌های این نمونه تصادفی را با اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم که X_iها همتوزیع با X و مستقل هستند. بنابراین چگالی هر X_i برابر است با $f(x_i;\theta)$ و چگالی توام X_iها برابر است با حاصلضرب چگالیهای آنها. این چگالی توام را با فرض اینکه x_iها ثابت و θ متغیر باشد با $L(\theta)$ نشان می‌دهند و آن را تابع راستنمائی Likelihood Function برای یافته‌های نمونه تصادفی می‌نامند. به طور خلاصه داریم:

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\ldots f(x_n;\theta) = \Pi_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

در حالت گسسته $L(\theta)$ دقیقاً برابر است با احتمال مشاهدهٔ یافته‌های بالا بر حسب پارامتر مجهول θ. چه در حالت گسسته و چه در حالت پیوسته، هر اندازه $L(\theta)$ بیشتر باشد شانس مشاهدهٔ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ از چگالی $f(x;\theta)$ بیشتر است. از اینرو مقداری از θ در A را به عنوان برآورد θ بر می‌گزینیم که $L(\theta)$ را ماکزیمم کند.

۵.۳.۶ برآورد راستنمائی ماکزیمم

مقداری از θ در فضای پارامتر که $L(\theta)$ را ماکزیمم می‌کند، برآورد راستنمائی ماکزیمم نامیده می‌شود و آن را با $\hat{\theta}$ نشان می‌دهند. معمولاً می‌گویند Maximum Likelihood Estimate MLE پارامتر θ می‌شود $\hat{\theta}$. به طور خلاصه $\hat{\theta} \in A$ برای θ می‌شود MLE هرگاه داشته باشیم:

$$L(\hat{\theta}) \geq L(\theta) \qquad \forall \theta \in A$$

روش راستنمائی ماکزیمم را فیشر، آماردان انگلیسی، در ۱۹۱۲ ارائه داد. این روش در مقایسه با روش گشتاوری دارای ویژگیهای آماری سودمند می‌باشد.

مثال ۸ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای چگالی زیر باشد:

$$f(x;p)=\begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x=1,2,\dots \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

این چگالی را، چگالی هندسی می‌نامند زیرا به صورت یک جمله از تصاعد هندسی است. در حقیقت متغیر تصادفی X تعداد آزمایشهای برنولی مستقل است که باید انجام گیرد، تا نخستین پیروزی رخ دهد.

با استفاده از یک نمونهٔ تصادفی، MLE پارامتر $0<p<1$ را بیابید.

حل - فرض کنید $x_1,x_2,\dots,x_n$ یافته‌های یک نمونه تصادفی از X باشند، به طوری که یکی از آنها بیش از عدد ۱ باشد. تابع راستنمائی عبارت است از

$$L(p)=\Pi_{i=1}^{n} f(x_i;p)=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i-n}$$

لگاریتم $L(p)$ را با $l(p)$ نشان می‌دهیم و از آن نسبت به p مشتق اول و دوم می‌گیریم:

$$l(p)=n\ln p+(n\bar{x}-n)\ln(1-p)$$

$$l'(p)=\frac{n}{p}-\frac{n\bar{x}-n}{1-p}$$

$$l''(p)=-\frac{n}{p^2}+\frac{n\bar{x}-n}{(1-p)^2}$$

می‌توان نشان داد که پاسخ معادلهٔ $l'(p)=0$ یعنی $\frac{1}{\bar{x}}$ مشتق دوم را منفی می‌کند. بنابراین MLE پارامتر p می‌شود

$$\hat{p}=\frac{1}{\bar{x}}$$

و برآوردیاب متناظر با آن، متغیر تصادفی

$$\hat{p}=\frac{1}{\bar{X}}$$

است. به طریق بینشی (شهودی) می‌توان این برآورد را به شرح زیر پیدا کرد: در $x_1+x_2+\dots+x_n$ آزمایش برنولی مستقل، n پیروزی رخ می‌دهد. پس برآورد p برابر است با فراوانی نسبی پیروزیها، یعنی عدد

$$\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=\frac{1}{\bar{x}}$$

اگر تمام x_i‌ها برابر عدد ۱ باشند، آنگاه داریم:

$$L(p)=p^n$$

ماکزیمم این تابع در فاصلهٔ بسته $[0,1]$ برابر است با عدد ۱ و $\hat{p}=1$.

مثال ۹ برای چگالی مثال ۵، MLE پارامتر θ را با استفاده از یک نمونهٔ تصادفی بیابید.

حل - فرض کنید $x_1,x_2,\dots,x_n$ یافته‌های یک نمونه تصادفی از X باشد. تابع راستنمائی عبارت است از

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\theta^n e^{-\theta n\bar{x}} \qquad \theta>0$$

این تابع را روی فضای پارامتر یعنی روی فاصله $(0,\infty)$ ماکزیمم می‌کنیم. لگاریتم $L(\theta)$ را با $l(\theta)$ نشان می‌دهیم و از آن نسبت به θ مشتق اول و دوم می‌گیریم:

$$l(\theta)=n\ln\theta-n\theta\bar{x}$$

$$l'(\theta)=\frac{n}{\theta}-n\bar{x}$$

$$l''(\theta)=-\frac{n}{\theta^2}$$

پاسخ معادلهٔ $l'(\theta)=0$ یعنی $\frac{1}{\bar{x}}$ مشتق دوم را منفی می‌کند. بنابراین MLE پارامتر θ می‌شود

$$\hat{\theta}=\frac{1}{\bar{x}}$$

و برآوردیاب متناظر با آن، متغیر تصادفی

$$\hat{\theta}=\frac{1}{\bar{X}}$$

است. با توجه به مثال ۵، نتیجه می‌گیریم که MLE و برآورد گشتاوری برابرند. ناگفته نماند که این نتیجه همواره برقرار نیست.

مثال ۱۰ متغیر تصادفی X دارای توزیع برنولی با پارامتر $p\in\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\}$ است. یافته‌های یک نمونهٔ تصادفی از X عبارتند از ۰، ۱، ۰، ۱، ۱، ۱.

با استفاده از این یافته‌ها، MLE پارامتر p را بیابید.

حل – تابع راستنمائی عبارت است از

$$L(p)=P(X_1=1,X_2=1,X_3=0,X_4=1,X_5=0)=p^3(1-p)^2$$

برای ماکزیمم کردن $L(p)$ روی فضای پارامتر گسستهٔ $\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\}$ نمی‌توان مشتق $L(p)$ را به کار برد. مستقیماً داریم

$$L(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{32}$$
$$L(\tfrac{1}{3})=\frac{4}{243}$$
$$L(\tfrac{1}{4})=\frac{9}{1024}$$

بنابراین MLE پارامتر p می‌شود عدد $\hat{p}=\frac{1}{2}$، زیرا $L(\frac{1}{2})$ بیشترین مقدار را روی فضای پارامتر دارد.

۶.۳.۶ تمرین بخش سه

۱. فرض کنید X یک عدد تصادفی در فاصله (a,b) باشد. برآورد گشتاوری a و b را پیدا کنید. از نمونهٔ ۱/۱۲، ۱/۱۴، ۱/۰۷، ۱/۲۳، ۱/۱۵ استفاده کنید. آیا با روش دیگر هم می‌توانید a و b را برآورد کنید؟

۲. فرض کنید $X\sim N(\mu,1)$. برآورد گشتاوری و MLE پارامتر μ را پیدا کنید.

۳. فرض کنید X دارای توزیع برنولی با پارامتر p باشد. برآورد p را با استفاده از یک نمونه تصادفی از دو راه بیابید.

۴. فرض کنید $X\sim N(0,\theta)$. MLE پارامتر θ را بیابید.

۵. برآوردیاب U را برای پارامتر θ نااریب می‌نامیم هرگاه $E(U)=\theta$. ثابت کنید در توزیع $N(\mu,1)$ آماره $\bar{X}$ یک برآورد نااریب برای μ است.

۶. فرض کنید $X\sim P(\lambda)$. برآورد گشتاوری و MLE پارامتر λ را پیدا کنید.

۷. فرض کنید U_1 و U_2 دو برآوردیاب نااریب و مستقل با واریانسهای ۲ و ۳ برای پارامتر θ باشند. ضرائب a_1 و a_2 را طوری پیدا کنید تا

$$T=a_1U_1+a_2U_2$$

بتواند یک برآوردیاب نااریب با کمترین واریانس برای θ باشد. حال واریانسهای U_1 و U_2 و T را با هم مقایسه نمائید. کدام از این سه برآوردیاب، نااریب بهتر می‌باشد؟ (از تمرین ۵ استفاده کنید)

۸. متغیر تصادفی X دارای توزیع برنولی با پارامتر p است. فضای پارامتر عبارت است از $A=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\}$. X را پنج بار مستقلاً مشاهده کرده اعداد ۱، ۰، ۱، ۰، ۰، ۱ را به دست آورده‌ایم. MLE پارامتر p را بیابید.

۹. اگر U_1 و U_2 دو برآوردیاب نااریب و مستقل برای پارامتر θ باشند، یک برآوردیاب نااریب برای θ^2 و برای $\theta(1-\theta)$ برحسب U_1 و U_2 بیابید.

۱۰. شانس شیرآمدن با یک ۵ ریالی p_1 و با یک ۱۰ ریالی p_2 می‌باشد. چگونه یک برآوردیاب نااریب برای p_2-p_1 پیدا می‌کنید؟

۴.۶ فاصله اطمینان برای یک پارامتر

در بخش پیش دیدیم که چگونه می‌توان برای پارامتر θ یک مقدار تقریبی به نام برآورد پیدا کرد. در این بخش می‌خواهیم فاصله‌ای پیدا کنیم که θ بتواند با اطمینان زیاد در آن باشد. برای اینکه مفهوم چنین فاصله اطمینان را شرح دهیم، نخست به مثال زیر می‌پردازیم.

مثال ۱۱ یک نمونهٔ تصادفی ۱۰۰ تائی از $X\sim N(\mu,4)$ را در نظر می‌گیریم. احتمال اینکه پارامتر مجهول μ در فاصلهٔ تصادفی $(\bar{X}-0/4,\bar{X}+0/4)$ باشد چقدر است؟

حل – می‌دانیم که $\bar{X}\sim N(\mu,0/04)$ و $\frac{(\bar{X}-\mu)}{0/2}\sim N(0,1)$. پس داریم

$$P(\bar{X}-0/4<\mu<\bar{X}+0/4)=P(-2<\frac{\bar{X}-\mu}{0/2}<2)$$

$$=P(-2<Z<2)=\Phi(2)-\Phi(-2)=0/95$$

فاصلهٔ $(\bar{X}-0/4,\bar{X}+0/4)$ را یک فاصلهٔ تصادفی می‌نامند زیرا دو سر آن متغیر تصادفی می‌باشند. این فاصلهٔ تصادفی پارامتر μ را با احتمال ۰/۹۵ در بر می‌گیرد و اصطلاحاً آن را یک فاصلهٔ اطمینان برای μ با ضریب ۰/۹۵ می‌گویند. معنی جمله آخر این است که تقریباً ۹۵ درصد از فواصل عددی که از این راه به دست می‌آیند، می‌توانند پارامتر μ را در برگیرند. مثلاً، اگر یافته $\bar{X}$ بشود $\bar{x}=3/2$، یافته فاصله تصادفی بالا می‌شود $(2/8,3/6)$. این فاصله عددی از جمله فواصل عددی می‌باشد که

تقریباً ۹۵ درصد آنها μ را در بر می‌گیرند. از اینرو معمولاً می‌گویند فاصلهٔ عددی (۲/۸، ۳/۶) یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصدی می‌باشد. ولی تاکید می‌کنیم که جملهٔ آخر به این معنی نیست که فاصلهٔ عددی (۲/۸، ۳/۶)، با احتمال ۰/۹۵ پارامتر μ را در بر می‌گیرد، زیرا μ خود یک عدد می‌باشد و تنها با احتمال صفر یا یک می‌تواند در این فاصله قرار گیرد.

۱.۴.۶ تعریف فاصلهٔ اطمینان

یک نمونهٔ تصادفی از چگالی $f(x;\theta)$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم آمارهٔ U برآوردیاب پارامتر θ باشد. فاصلهٔ تصادفی

$$(g_1(U), g_2(U))$$

را که دو سر آن توابعی از آماره U می‌باشند در نظر می‌گیریم. اگر داشته باشیم

$$P(g_1(U)<\theta<g_2(U))=\gamma$$

به طوری که γ به پارامتر θ بستگی نداشته باشد و صرفاً یک عدد باشد، آنگاه می‌گوئیم این فاصله تصادفی یک فاصلهٔ اطمینان با ضریب γ برای پارامتر θ می‌باشد. هر اندازه γ به یک نزدیک‌تر و $E(g_1(U)-g_2(U))$، یعنی میانگین طول فاصله، کوچکتر باشد، فاصلهٔ یاد شده بهتر است.

اگر در فاصلهٔ تصادفی یاد شده به جای U یافتهٔ آن u را قرار دهیم، فاصلهٔ عددی $(g_1(u), g_2(u))$ می‌شود یافتهٔ فاصله اطمینان بالا.

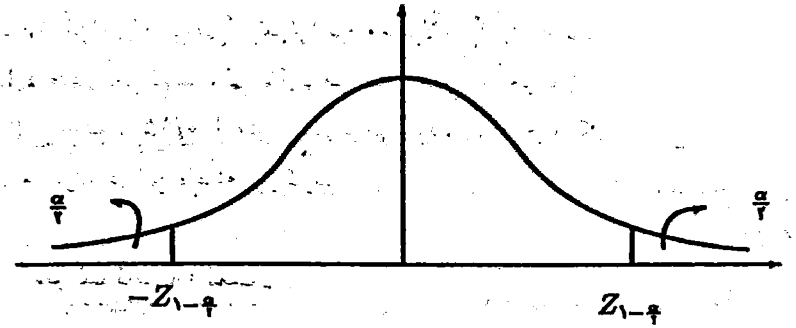
۲.۴.۶ طرز پیدا کردن فاصلهٔ اطمینان

نخست متغیر تصادفی $Q=q(U,\theta)$ را، که به صورت تابعی از آمارهٔ U و پارامتر θ می‌باشد، به نحوی می‌سازند که توزیع آن به θ بستگی نداشته باشد. Q را معمولاً تابع محوری می‌گویند. سپس دو عدد ثابت $a<b$ را چنان انتخاب می‌کنند تا داشته باشیم:

$$P(a<q(U,\theta)<b)=\gamma$$

از حل نامساوی داخل پرانتز بالا برحسب θ یک فاصله اطمینان با ضریب γ برای θ پیدا می‌شوند.

مثال ۱۲ فرض کنید $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ و σ^2 معلوم و μ پارامتر مجهول باشد. با استفاده از یک نمونهٔ تصادفی nتائی یک فاصلهٔ اطمینان با ضریب γ برای μ بسازید.



نگارهٔ ۱ منحنی نرمال استاندارد

حل - می‌دانیم که $\bar X$ برآوردیاب μ می‌باشد و داریم

$$Q=\frac{\bar X-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt n}}\sim N(0,1) \quad , \quad \bar X\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

پس می‌توانیم Q را، که توزیع آن به μ بستگی ندارد، به عنوان تابع محوری بگیریم. حال با توجه به نگارهٔ ۱ داریم:

$$P(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar X-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt n}}<z_{1-\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha=\gamma$$

از حل نامساوی داخل پرانتز بر حسب μ فاصله اطمینان زیر به دست می‌آید:

$$(\bar X-\frac{\sigma}{\sqrt n}z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar X+\frac{\sigma}{\sqrt n}z_{1-\frac{\alpha}{2}})$$

با داشتن α می‌توانیم عدد $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ را از جدول (۳) پیدا کنیم. جدول زیر برای پیدا کردن عدد $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ در دو انتهای چگالی نرمال برای بعضی مقادیر γ مفید می‌باشد.

γ	۰/۸۰	۰/۹۰	۰/۹۵	۰/۹۹
$\frac{\alpha}{2}$	۰/۱۰	۰/۰۵	۰/۰۲۵	۰/۰۰۵
$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	۱/۲۸۱۶	۱/۶۴۴۹	۰/۹۶۰۰	۲/۵۷۵۸

جدول ضریب اطمینان و مقدار $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

مثال ۱۳. آهن موجود در یک کیلوگرم سنگ آهن متغیر تصادفی $X \sim N(\mu, 100)$ برحسب میلی‌گرم می‌باشد. برای یک نمونهٔ تصادفی ۲۵ تائی یافتهٔ $\bar{X}$ عدد ۱۵ شده است یک فاصلهٔ اطمینان با ضریب ۰/۹۰ برای μ پیدا کنید.

حل – می‌دانیم که فاصلهٔ اطمینان به صورت زیر است:

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} , \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

برای اینکه یافتهٔ این فاصلهٔ اطمینان را پیدا کنیم از داده‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sigma^2 = 100 \;,\; \sigma = 10, n = 25 \;,\; \bar{x} = 15, \gamma = 0/90 \;,\; \frac{\alpha}{2} = 0/05$$

پس یافتهٔ فاصله اطمینان می‌شود فاصلهٔ عددی (۱۱/۷۱ ، ۱۸/۲۹). این یکی از فواصل اطمینان ۹۰ درصدی است که ممکن است μ را در برداشته باشد.

اگر در مثال بالا σ^2 مجهول باشد، باید به جای σ^2 برآورد آنرا بگذاریم. البته این کار موجب تغییر فرمول بالا می‌شود. ما روش برآورد کردن σ^2 و روش پیدا کردن فاصله اطمینان را در این حالت، در بخش ۶ از این فصل شرح می‌دهیم.

۳.۴.۶ تمرین بخش چهار

۱. یک نمونهٔ تصادفی ۱۰۰ تائی از $X \sim N(\mu, 4)$ را در نظر می‌گیریم. احتمال اینکه پارامتر مجهول μ در فاصلهٔ $(\bar{X} - 0/3, \bar{X} + 0/3)$ باشد چیست؟ اگر برای $\bar{X}$ عدد ۵ را مشاهده کنیم، منظور از یافتهٔ این فاصله اطمینان را شرح دهید.

۲. طول عمر یک نوع باتری اتومبیل متغیر تصادفی $X \sim N(\mu, 25)$ برحسب ماه است. طول عمر ۹ باتری عبارتند از:

۲۰ ، ۲۳ ، ۲۸ ، ۲۶ ، ۱۹ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۲۴ ، ۲۱

یک فاصلهٔ اطمینان ۹۰ درصدی برای پارامتر μ به دست آورید.

۳. نمرهٔ نهائی درس کلکولس در یک کلاس پر دانشجو متغیر تصادفی $X \sim N(\mu, 64)$ می‌باشد. برای یک نمونه ۳۶ تائی از این دانشجویان داریم $\bar{x} = 72$. یک فاصله اطمینان ۹۸ درصدی برای پارامتر μ پیدا کنید.

۴. فرض کنید $X \sim N(0, \sigma^2)$. احتمال اینکه σ در فاصله تصادفی $(|X|, 2|X|)$ باشد چیست؟ a و b را طوری پیدا کنید تا $(a|X|, b|X|)$ یک فاصلهٔ اطمینان هشتاد درصدی برای σ باشد. اندازهٔ نمونه را ۴ بگیرید.

۵. متغیر تصادفی X طول عمر یک لامپ می‌باشد. X دارای چگالی زیر است:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/\theta}}{\theta} & x > 0 , \theta > 0 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

c را طوری پیدا کنید تا فاصلهٔ تصادفی $(0, cX)$ یک فاصله اطمینان نود درصدی برای θ باشد.

۵.۶ آزمون آماری یک پارامتر

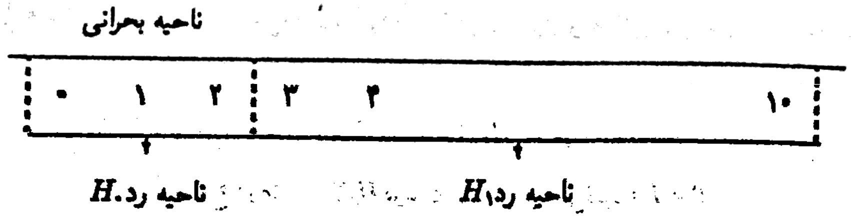
متغیر تصادفی X را که توزیع آن به پارامتر θ بستگی دارد در نظر می‌گیریم. ممکن است مقدار واقعی θ، به علت تغییر شرائط تغییر نماید. ادعای هر نوع تغییر را باید از راه مشاهده، یعنی به کمک داده‌ها، تائید یا انکار نمود. به زبان آماری این کار را آزمون آماری پارامتر θ می‌نامیم.

مثلاً فرض کنید $\theta = 0/8$ نسبت بیمارانی باشد که آنتی‌بیوتیک A آنها را بهبود می‌بخشد. ممکن است در طول زمان ویروس بیماری در برابر این دارو مقاوم شده باشد و بخواهیم نشان دهیم که اخیراً $\theta = 0/6$. اثبات آماری این امر، به کمک یک آزمون آماری دربارهٔ پارامتر متغیر تصادفی برنولی انجام می‌گیرد.

در این بخش نخست اصطلاحات آزمون آماری را به یاری مثال زیر شرح می‌دهیم.

سکه‌ای داریم که طبق معمول آنرا نااریب فرض می‌کنیم. این فرض را با $H_0: p = \frac{1}{2}$ نشان می‌دهیم و H_0 را فرض صفر می‌نامیم. کلمه صفر را به این دلیل به کار می‌بریم که در مورد سکه معمولی هر نوع تغییری را از نظر نااریبی ناچیز تصور می‌کنیم. شخصی که خود را دربارهٔ ضرب سکه‌ها مطلع می‌داند، می‌گوید اینگونه سکه‌ها اریب می‌باشند و باید فرض کرد که $p = \frac{1}{4}$. این فرض جدید را با $H_1: p = \frac{1}{4}$ نشان می‌دهیم و H_1 را فرض مقابل (در مقابل فرض H_0) می‌گوئیم فرضهای H_0 و H_1 را فرضهای ساده می‌نامیم. ولی فرضهائی مانند $H_0: p > \frac{1}{2}$ یا $H_1: p < \frac{1}{4}$ را فرضهای مرکب می‌گویند. در این بخش ما تنها دربارهٔ فرضهای ساده صحبت می‌کنیم. بنابراین با یک مسالهٔ آماری به صورت زیر روبرو هستیم:

$$\begin{cases} H_0 : p = \frac{1}{2} \\ H_1 : p = \frac{1}{4} \end{cases}$$



نگاره ۲ ناحیه رد H_0 و H_1

طبیعت این مسالهٔ آماری با یک مسالهٔ ریاضی تفاوت دارد. تنها از راه مشاهده و قرارداد می‌توان در مورد درستی یا نادرستی H_0 تصمیم گرفت. از اینرو چنین مساله‌ای را یک آزمون آماری و نتیجه تصمیم‌گیری درباره درستی H_0 یا H_1 را انجام یک آزمون آماری می‌نامیم.

۱.۵.۶ ناحیه بحرانی

چگونه آزمون بالا را انجام دهیم؟ سکه را مستقلاً چندین بار مثلاً ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم و متغیر تصادفی S را تعداد شیرها در این ۱۰ پرتاب می‌گیریم. در صورتی که سکه نااریب باشد، یعنی H_0 درست باشد، انتظار داریم که یافته S بشود ۵. طبیعی است که اگر S خیلی کوچک باشد، نمی‌توان H_0 را تائید کرد. بنابراین قرارداد می‌کنیم که اگر $S \le 2$ یعنی اگر یافتهٔ S در مجموعهٔ $C=\{0,1,2\}$ بیافتد، H_0 را رد کنیم. مجموعه C را ناحیه بحرانی می‌نامیم زیرا با رد H_0 وضعی را که تا بحال مورد قبول بوده است دیگر نمی‌پذیریم. اما اگر S در مجموعهٔ $\bar{C}=\{3,4,\dots,10\}$ بیافتد، دلیلی ندارد که H_0 را رد کنیم. این دو ناحیه را در نگاره ۲ نشان داده‌ایم.

آمارهٔ S را که آزمون بر پایه آن انجام می‌گیرد، آمارهٔ آزمون می‌نامند.

۲.۵.۶ خطاها

آیا قضاوت بالا بدون خطا می‌باشد؟ خیر، چون ممکن است با یک سکه نااریب $(p=\frac{1}{2})$ در ده پرتاب مثلاً دوبار شیر مشاهده کرد ولی قرارداد موجب می‌شود که H_0 را به ناحق رد کنیم. یا ممکن است با یک سکه اریب $(p=\frac{1}{4})$ در ده پرتاب مثلاً ۴ بار شیر مشاهده کرد، ولی قرارداد موجب می‌شود که H_1 را به ناحق رد کنیم. بنابراین مرتکب دو نوع خطا می‌شویم. قضاوت بالا بر اساس آن قرارداد در صورتی معقول می‌باشد که احتمال مرتکب شدن این خطاها تا آنجا که ممکن است کوچک باشد. احتمال این

خطاها را به ترتیب با α و β نشان می‌دهیم و آنها را خطای نوع اول و خطای نوع دوم می‌نامیم. بنابراین داریم:

خطای نوع اول: $\alpha = P(H_0 \text{ را رد می‌کنیم} \mid H_0 \text{ درست})$

خطای نوع دوم: $\beta = P(H_1 \text{ را رد می‌کنیم} \mid H_1 \text{ درست})$

α را اغلب میزان آزمون یا آستانه آزمون یا سطح آزمون می‌نامند و معمولاً آنرا ۰/۱۰ یا ۰/۰۵ یا ۰/۰۱ می‌گیرند. دلیل کوچک گرفتن α این است که نمی‌خواهند وضع موجود یعنی H_0 را به ناحق تغییر دهند و با خسارت روبرو شوند. در مثال بالا، متغیر تصادفی S که بر اساس آن تصمیم‌گیری می‌کنیم دارای توزیع $B(10,p)$ است. اگر H_0 درست باشد داریم $p=\frac{1}{2}$ و اگر H_1 درست باشد داریم $p=\frac{1}{4}$. پس، از جدول توزیع دو جمله‌ای داریم:

$$\alpha = P(S\in C|p=\tfrac{1}{2}) = P(S\le 2|p=\tfrac{1}{2})$$
$$= B(10,\tfrac{1}{2};2) = 0/0547$$

$$\beta = P(S\in \bar{C}|p=\tfrac{1}{4}) = P(S>2|p=\tfrac{1}{4})$$
$$= 1-B(10,\tfrac{1}{4};2) = 0/4744$$

ملاحظه می‌شود که خطای نوع دوم زیاد است، زیرا بر پایه ناحیه بحرانی مثلاً اگر یافته S بشود ۹ باز هم H_0 را درست می‌گیریم که معقول نمی‌باشد. در این حال حقاً باید گفت که فرض $H_1: p>\frac{1}{2}$ درست است.

۳.۵.۶ توان آزمون

احتمال رد H_0 را در صورتیکه H_1 درست باشد، یعنی احتمال رد H_0 را به حق، توان آزمون می‌نامند و با π نشان می‌دهند. بنابراین توان آزمون عبارت است از:

$$\pi = P(H_0 \text{ را رد می‌کنیم} \mid H_1 \text{ درست}) = 1 - P(H_1 \text{ را رد می‌کنیم} \mid H_1 \text{ درست}) = 1-\beta$$

ملاحظه‌می‌شود که جمع خطای نوع دوم و توان آزمون برابر عدد ۱ است. در مثال بالا داریم $\pi = 0/5256$.

مثال ۱۳ فرض کنید $X \sim N(\mu, 4)$ خطای اندازه‌گیری با یک دستگاه فیزیکی برحسب میکرو باشد. برای آزمون زیر:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 0 \\ H_1: \mu = 1 \end{cases}$$

یک نمونهٔ تصادفی ۲۵ تائی از X را در نظر می‌گیریم. اگر $\overline{X} \geq 0.4$ را به عنوان ناحیه بحرانی بگیریم خطاها و توان آزمون را حساب کنید.

حل - P_{H_0} و P_{H_1} را به ترتیب احتمال تحت فرض H_0 و H_1 می‌گیریم. حال داریم:

$$\alpha = P(\text{را رد می‌کنیم } H_0 \mid \text{درست } H_0) = P_{H_0}(\overline{X} > 0.4)$$

$$= P_{H_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} > \frac{0.4 - 0}{\frac{2}{5}}\right) = P(Z > 1)$$

$$= 1 - \phi(1) = 0.1587$$

$$\beta = P(\text{را رد می‌کنیم } H_1 \mid \text{درست } H_1) = P_{H_1}(\overline{X} \leq 0.4)$$

$$= P_{H_1}\left(\frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \leq \frac{0.4 - 1}{\frac{2}{5}}\right) P(Z \leq -1.5)$$

$$= \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668$$

توان آزمون می‌شود:

$$\pi = 1 - \beta = 0.9332$$

دلیل آنکه ناحیه بحرانی را به صورت $\overline{X} \geq 0.4$ گزیده‌ایم این است که $\overline{X}$ برآورد μ می‌باشد پس اگر $\overline{X}$ از صفر بیش از حد بزرگتر شود، نسبت به فرض H_0 تردید می‌کنیم.

مثال ۱۴ در آزمون مثال ۱۳ می‌خواهیم خطای نوع اول بشود $\alpha = 0.10$. ناحیه بحرانی را پیدا کنید.

حل - ناحیه بحرانی به صورت $\overline{X} > d$ است. باید d را طوری تعیین کنیم تا داشته باشیم $\alpha = 0.10$ می‌نویسیم:

$$\alpha = P(\text{را رد می‌کنیم } H_0 \mid \text{درست } H_0) = P_{H_0}(\overline{X} > d)$$

$$= P_{H_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} > \frac{d - 0}{\frac{2}{5}}\right) = P(Z > 2.5d) = 1 - \phi(2.5d)$$

$$\Phi(2.5d) = 0.90$$

$$2.5d = 1.28$$

$$d = 0.52$$

۴.۵.۶ تمرین بخش پنج

۱. می‌خواهیم برای یک سکه آزمون زیر را انجام دهیم:

$$\begin{cases} H_0: p = \frac{1}{2} \\ H_1: p = \frac{3}{4} \end{cases}$$

سکه را ده بار پرتاب می‌کنیم و S را تعداد شیرها در این ده پرتاب می‌گیریم. اگر $S \geq 8$ فرض H_0 را رد می‌کنیم.

الف - خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را حساب کنید.

ب - اگر $S \geq d$ را ناحیه بحرانی بگیریم، d را طوری تعیین کنید تا خطای نوع اول بیش از 0.09 نباشد.

۲. در تمرین ۲ از بخش چهار، تولید کننده باتری مدعی است که اخیراً طول عمر باتری به سبب ترکیبات جدید زیاد شده است. می‌خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 20 \\ H_1: \mu = 24 \end{cases}$$

اگر $\overline{X} > 25$ ناحیه بحرانی باشد، خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را حساب کنید. بر اساس داده‌ها فرض H_0 را رد می‌کنید؟

۳. در ظرفی سر بسته ۷ مهره می‌باشد که θ از آنها سفید و بقیه سیاه هستند می‌خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 2 \\ H_1 : \theta = 4 \end{cases}$$

شخصی دو مهره با هم از ظرف بیرون می‌آورد و به ما نشان می‌دهد. فرض H_0 را رد می‌کنیم اگر هر دو سفید باشند. خطای نوع اول و دوم و توان را حساب کنید.

۴. در تمرین ۵ از بخش ۳ می‌خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 200 \\ H_1 : \theta = 500 \end{cases}$$

اگر $X > 300$ مشاهده شود، فرض H_0 را رد می‌کنیم. خطای نوع اول و دوم را حساب کنید.

۵. آموزگاری عقیده دارد که دانش‌آموزان به اعداد ۲۰، ۱۹، ۱۸، ۱۷ از میان ۱ تا ۲۰ بیشتر علاقه دارند. از ۲۴ دانش‌آموز می‌خواهد که یکی از اعداد ۱ تا ۲۰ را انتخاب کنند. فرض کنید X تعداد دانش‌آموزانی باشد که یکی از اعداد ۲۰، ۱۹، ۱۸، ۱۷ را انتخاب کرده‌اند.

الف - توزیع احتمال X را پیدا کنید، در صورتی که دانش‌آموزان به تصادف عدد را انتخاب کنند.

ب - متغیر تصادفی X به چه ویژگی باید باشد تا عقیده آموزگار با خطای نوع اول پنج درصد تائید گردد؟

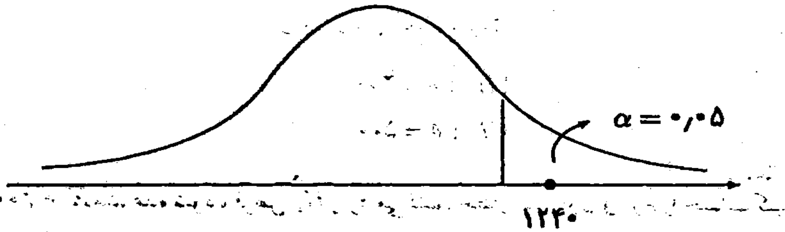
۶.۶ p- مقدار

مدتی است که در بسیاری از کتابهای آماری و نرم‌افزارهای آماری، حتی در ماشینهای حساب، اصطلاحی به نام p-value مشاهده می‌شود که ما آنرا p- مقدار یا مقدار احتمال می‌نامیم. فیشر، آماردان انگلیسی، آن را P می‌نامد. لهمن، آماردان دانشگاه برکلی آمریکا، به آن احتمال با معنی می‌گوید. اغلب مفهوم p- مقدار برای غیر آماردانان روشن نیست، با اینکه آن را به کار می‌برند. نخست این مفهوم را با مثال زیر شرح می‌دهیم.

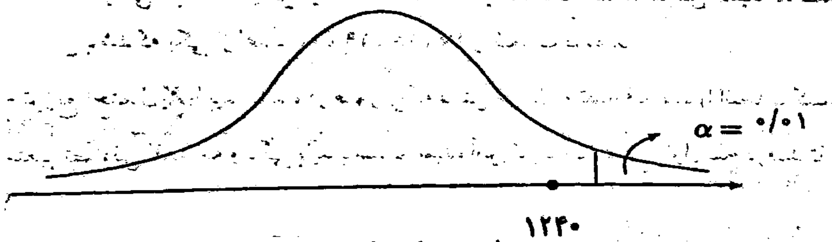
لامپهائی را که یک کارخانه تولید می‌کند دارای طول عمر نرمال با میانگین $\mu = 1200$ ساعت و انحراف معیار $\sigma = 200$ ساعت می‌باشند. صاحب کارخانه مدعی است که با ماشینهای جدید، میانگین

طول عمر افزایش یافته است. معدل طول عمر ۱۰۰ لامپ جدید ۱۲۴۰ ساعت شده است. می‌خواهیم با میزان $\alpha = 0/05$ این ادعا را بیازمائیم. به سخنی دیگر می‌خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم:

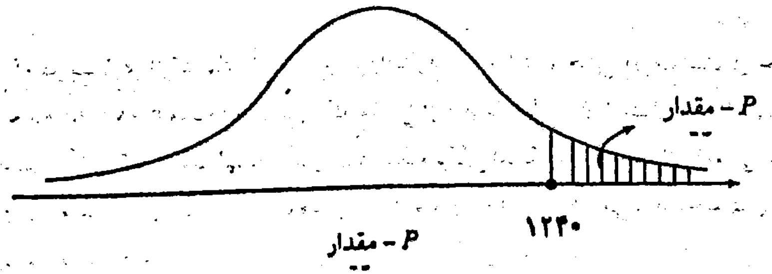
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1200 \\ H_1 : \mu > 1200 \end{cases}$$



ناحیه بحرانی با $\alpha = 0/05$



ناحیه بحرانی با $\alpha = 0/01$



نگاره ۳

می‌دانیم که برآوردیاب پارامتر μ آمارهٔ $\bar{X}$ است. اگر یافتهٔ این آماره یعنی $\bar{x}$ خیلی بزرگ شود، فرض H_0 را در برابر H_1 رد می‌کنیم بنابراین ناحیهٔ بحرانی به صورت $\bar{X} > c$ است. عدد c به میزان آزمون یعنی $\alpha = 0/05$ بستگی دارد و به طریق زیر آن را می‌یابیم:

$$\alpha = P(\text{رد } H_0 \mid \text{درست } H_0)$$

$$0/05 = P(\bar{X} > c \mid \text{درست } H_0)$$

آمارهٔ $\bar{X}$ دارای توزیع $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ است پس تحت فرض H_0 داریم $\bar{X} \sim N(1200, 400)$ اینک می‌نویسیم:

$$0/05 = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{c - 1200}{20}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{c - 1200}{20}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{c - 1200}{20}\right)$$

سرانجام با استفاده از جدول ۳ داریم

$$\Phi\left(\frac{c - 1200}{20}\right) = 0/95$$

$$\frac{c - 1200}{20} = 1/65$$

$$c = 1233$$

بنابراین ناحیهٔ بحرانی با میزان ۰/۰۵ می‌شود $\bar{X} > 1233$. چون یافتهٔ $\bar{X}$ یعنی عدد $\bar{x} = 1240$ در ناحیهٔ بحرانی می‌افتد، پس فرض H_0 را با میزان ۰/۰۵ رد می‌کنیم و فرض H_1 را می‌پذیریم. البته اگر α را برابر ۰/۰۱ بگیریم، با محاسبه‌ای مانند بالا، ناحیه بحرانی به صورت $\bar{X} > 1246$ در می‌آید. در این حالت $\bar{x} = 1240$ در ناحیهٔ بحرانی قرار نمی‌گیرد و در نتیجه فرض H_0 با میزان ۰/۰۱ رد نمی‌شود. ملاحظه می‌شود که رد H_0 بستگی به اندازهٔ α دارد. معمولاً با پیروی از سنتی که فیشر بنا گذارده است، α را عددی کوچک مانند ۰/۰۱ یا ۰/۰۵ یا ۰/۱۰ می‌گیرند تا H_0 را با کمال احتیاط رد کنند. اندازهٔ α به نظر پژوهشگر بستگی دارد. کوچکترین مقداری که برای α می‌توان در نظر گرفت تا H_0 رد شود، برابر است با

مساحت هاشور خورده‌ای در دم چگالی $\bar{X}$ که از $\bar{x} = 1240$ شروع می‌گردد. این احتمال در دم را p- مقدار می‌گویند. در مثال بالا داریم:

$$p\text{- مقدار} = P(\bar{X} \geq 1240 \mid \text{درست } H_0) = 1 - \phi(2) = 0/0228$$

نگاره ۳ ناحیه بحران را برای $\alpha = 0/05$ و $\alpha = 0/01$ و p- مقدار را نشان می‌دهد. چنین احتمالی می‌گوید، با فرض درستی H_0 یعنی $\mu = 1200$، ممکن است فقط در ۲ بار از ۱۰۰ بار $\bar{x}$ حداقل برابر ۱۲۴۰ شود. حال پژوهشگر برای خود α را آزادانه انتخاب می‌کند. (در صورتی که رد H_0 برای او زیانبار باشد، سعی می‌کند α را کوچک بگیرد.) اگر p- مقدار از این α که پژوهشگر با میل خود انتخاب کرده است کمتر باشد، فرض H_0 رد می‌شود.

مثلاً با $\alpha = 0/01$ فرض H_0 رد نمی‌شود ولی با $\alpha = 0/032$ رد می‌شود. با این روش، نیازی به یافتن ناحیه بحرانی نیست. اینک با استفاده از بحث بالا، p- مقدار را در حالت کلی تعریف می‌کنیم و روش محاسبهٔ آن را بیان می‌داریم. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای چگالی $f(x;\theta)$ باشد و بخواهیم آزمونی دربارهٔ پارامتر θ انجام دهیم. نخست نمونهٔ تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ را از X با یافته‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ در نظر می‌گیریم. حال آماره‌ای مناسب مانند U، که به صورت تابع $U = g(X_1, \ldots, X_n)$ است، در نظر می‌گیریم. این آماره می‌تواند برآوردیابی برای θ باشد، مانند $\bar{X}$ در مثال بالا که برآوردیاب پارامتر μ است. به U آمارهٔ آزمون می‌گویند و یافته آن را با $u = g(x_1, \ldots, x_n)$ نشان می‌دهند. افزون بر این، U را به نحوی بر می‌گزینیم که بتوان تابع توزیع یا تابع توزیع تقریبی آن را، تحت فرض H_0، پیدا کرد.

۱.۶.۶ تعریف p- مقدار

کمترین مقداری از α (یعنی میزان یا سطح آزمون) است، که یافتهٔ آمارهٔ آزمون ممکن است موجب رد فرض H_0 گردد.

۶٫۶٫۲ طرز محاسبهٔ p- مقدار

فرض کنید U آماره آزمون و u یافته آن باشد. معمولاً سه نوع آزمون به کار می‌رود:

الف - آزمون یکسوئی راست به صورت

$$\begin{cases} H_۰ : \theta = \theta_۰ \\ H_۱ : \theta > \theta_۰ \end{cases}$$

در این آزمون داریم:

$$\text{مقدار}-p = P_\theta(U \ge u)$$

ب - آزمون یکسوئی چپ به صورت

$$\begin{cases} H_۰ : \theta = \theta_۰ \\ H_۱ : \theta < \theta_۰ \end{cases}$$

در این آزمون داریم:

$$\text{مقدار}-p = P_\theta(U \le u)$$

ج - آزمون دوسوئی به صورت

$$\begin{cases} H_۰ : \theta = \theta_۰ \\ H_۱ : \theta \ne \theta_۰ \end{cases}$$

در این آزمون داریم:

$$\text{مقدار}-p = ۲\min\{P_{\theta_۰}(U \le u), P_{\theta_۰}(U \ge u)\}$$

نماد $P_{\theta_۰}(.)$ یا $P(.|\theta_۰)$ احتمال با فرض درست بودن $H_۰$ و نماد min به معنی کمترین است.

مثال ۱۵ تولید کننده باتریهای ۶ ولتی می‌گوید طول عمر آنها دارای توزیع $N(۵۵, ۱۰۰)$ است. معدل طول عمر ۲۵ عدد از این باتریها ۵۰ ساعت بوده است. آیا گفتهٔ تولید کننده را با میزان $\alpha = ۰/۰۵$ می‌پذیرید؟

حل - تولید کننده می‌گوید $\mu = ۵۵$، ولی عملاً برآورد این پارامتر $\bar{x} = ۵۰$ شده است. بنابراین آزمون زیر را برای توزیع نرمال انجام می‌دهیم.

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = ۵۵ \\ H_۱ : \mu < ۵۵ \end{cases}$$

با فرض اینکه $H_۰$ درست باشد، داریم $\bar{X} \sim N(۵۵, ۴)$. حال p- مقدار را با روش زیر می‌یابیم:

$$\text{مقدار}-p = P(\bar{X} \le ۵۰) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{۵۰-۵۵}{۲}\right)$$

$$= P(Z \le ۲/۵)$$

$$= ۰/۰۰۶۲$$

چون p- مقدار از ۰/۰۵ کمتر است، فرض $H_۰$ را با میزان ۰/۰۵ حتی ۰/۱۰ رد می‌کنیم.

مثال ۱۶ سکه‌ای را، که شانس شیرآمدن برای آن پارامتر p است، ۱۰ بار مستقلاً می‌اندازیم و ۲ بار شیر می‌بینیم. آزمون زیر را با میزان $\alpha = ۰/۰۵$ انجام دهید.

$$\begin{cases} H_۰ : p = \frac{۱}{۲} \\ H_۱ : p = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

حل - فرض کنید S مجموع شیرها در ۱۰ پرتاب مستقل باشد. می‌دانیم که تحت فرض $H_۰$ داریم $S \sim B(۱۰, \frac{۱}{۲})$. p- مقدار را می‌یابیم:

$$\text{مقدار}-p = P(S \le ۲) = B(۱۰, \tfrac{۱}{۲}; ۲) = ۰/۰۵۴۷$$

چون p- مقدار از $\alpha = ۰/۰۵$ بیشتر است، $H_۰$ را رد نمی‌کنیم. به سخنی دیگر با یک سکهٔ ناریب ممکن است در ۱۰ پرتاب حداکثر دوبار شیر به بینیم. احتمال چنین پیشامدی در مقام مقایسه با ۰/۰۵ کوچک نیست. پس دلیلی نداریم که به نااریبی سکه مشکوک گردیم.

مثال ۱۷ رئیس یک کارخانه ساعت‌سازی می‌گوید روزانه به طور متوسط ۵ عدد ساعت معیوب در میان ساعتهای تولید شده یافت می‌شوند. در یکی از روزها برحسب تصادف ۱۰ ساعت معیوب دیده شده‌اند. آیا گفتهٔ رئیس کارخانه با میزان $\alpha = ۰/۰۵$ پذیرفته می‌شود؟

حل - تعداد ساعتهای معیوب در روز یک متغیر تصادفی پواسن X با پارامتر λ است. آزمون دوسوئی زیر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{cases} H_۰ : \lambda = ۵ \\ H_۱ : \lambda \ne ۵ \end{cases}$$

خود X در حکم برآوردیاب گشتاوری λ است، زیرا $E(X)=\lambda$. بنابراین X را به عنوان آمارهٔ آزمون اختیار می‌کنیم و p- مقدار را با فرض اینکه $\lambda=5$ درست باشد می‌یابیم.

$$p\text{- مقدار} = 2\min\{P(X\leq 10),P(X\geq 10)\}$$

با استفاده از جدول ۲ داریم:

$$P(X\leq 10)=0/9863$$

$$P(X\geq 10)=1-P(X\leq 9)=1-0/9682=0/0318$$

پس داریم:

$$p\text{- مقدار} = 2\min\{0/9863,0/0318\}=0/0636$$

چون p- مقدار از ۰/۰۵ بیشتر است، گفته رئیس کارخانه را با میزان ۰/۰۵ رد نمی‌کنیم.

۳.۶.۶ تمرین بخش شش

۱. تعداد اعضای هر خانواده در شهری بزرگ متغیر تصادفی $X\sim N(\mu,4)$ است. در این شهر، برای یک نمونه تصادفی از ۱۰۰ خانواده، داریم $\bar{x}=4/2$. آزمون زیر را

$$\begin{cases}H_0:\mu=3/9\\ H_1:\mu>3/9\end{cases}$$

را با میزان ۰/۰۵ و ۰/۱۰ انجام دهید. p- مقدار را پیدا کنید.

۲. تمرین ۱ را برای آزمون دوسوئی زیر انجام دهید.

$$\begin{cases}H_0:\mu=3/9\\ H_1:\mu\neq 3/9\end{cases}$$

۳. شانس آمدن شیر با سکه‌ای پارامتر θ است. این سکه را ۱۰ بار انداخته و ۶ بار شیر دیده‌ایم. p-مقدار را برای آزمونهای زیر پیدا کنید.

$$\begin{cases}H_0:\theta=\frac{1}{2}\\ H_1:\theta>\frac{1}{2}\end{cases}\qquad\begin{cases}H_0:\theta=\frac{1}{2}\\ H_1:\theta\neq\frac{1}{2}\end{cases}$$

۴. در تمرین ۳، فرض کنید سکه را ۴۰۰ بار انداخته و ۲۴۰ بار شیر دیده باشیم. با این داده‌ها آزمونها را انجام دهید.

۵. فروشنده‌ای می‌گوید در هر بسته کاغذ به طور متوسط ۲ برگ لکه دار موجود است. در بسته‌ای ۴ برگ لکه‌دار مشاهده کرده‌ایم. گفتهٔ فروشنده را با میزان ۰/۰۵ بیازمائید.

۶. فرض کنید داشته باشیم $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. معدل یک نمونه تصادفی n تائی از X برابر عدد $\bar{x}$ شده است. p- مقدار را برای آزمون

$$\begin{cases}H_0:\mu=\mu_0\\ H_1:\mu\neq\mu_0\end{cases}$$

با فرض معلوم بودن σ^2 به طور کلی محاسبه کنید.

۷.۶ متغیرهای χ^2 و T و F و کاربرد آن

در این بخش درباره سه متغیر تصادفی مهم و کاربرد آنها سخن می‌گوئیم. چگالی‌های این متغیرهای تصادفی پیچیده می‌باشد و ما در این درس به آنها نیاز نداریم.

فرض کنید متغیرهای تصادفی $Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$ مستقل و هر یک دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک باشند. به سخن دیگر یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد در نظر می‌گیریم.

۱.۷.۶ متغیر تصادفی χ^2

می‌گوئیم متغیر تصادفی مثبت

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$$

دارای توزیع توان دوم کای Chi - square با n درجه آزادی است. عدد درست n را درجه آزادی نامیده‌اند زیرا این متغیر تصادفی تابعی از n متغیر تصادفی مستقل می‌باشد که هر کدام آزادانه می‌توانند تغییر کنند. برای اینکه درجه آزادی را مشخص کنیم این متغیر را با $\chi^2(n)$ نشان می‌دهیم. حرف یونانی χ را به توان دو می‌رسانیم تا با تعریف این متغیر تصادفی سازگار باشد. از اینرو $\chi^2(n)$ به عنوان یک نماد برای این متغیر تصادفی به کار می‌رود.

برای محاسبه بعضی از مقادیر احتمال از جدول ۴ استفاده می‌کنیم مثلاً

$$P(\chi^2(10)\leq 3/94)=0/05$$

به عنوان تمرین می‌توان ثابت کرد که

$$E(\chi^2(n)) = n$$

$$Var(\chi^2(n)) = 2n$$

یکی از ویژگیهای مهم متغیر تصادفی $\chi^2(n)$، ویژگی جمع‌پذیری است که اینگونه بیان می‌شود: اگر $\chi^2(n_1)$ و $\chi^2(n_2)$ مستقل باشند، آنگاه $\chi^2(n_1)+\chi^2(n_2)$ دارای توزیع $\chi^2(n_1+n_2)$ است. این ویژگی را می‌توان به یاری تعریف $\chi^2(n)$ ثابت کرد.

برای nهای بزرگ (مثلاً $n>30$) با استفاده از قضیه حد مرکزی می‌توان نشان داد که متغیر استاندارد χ^2 یعنی

$$Z=\frac{\chi^2(n)-n}{\sqrt{2n}}$$

تقریباً دارای توزیع نرمال $N(0,1)$ است. مثلاً با کاربرد تقریب نرمال داریم

$$P(\chi^2(200)\le 100)\approx P\left(Z\le \frac{100-200}{\sqrt{400}}\right)=P(Z\le -5)\approx 0$$

۲.۷.۶ متغیر تصادفی T

فرض کنید $Z\sim N(0,1)$ و متغیر تصادفی U همتوزیع با $\chi^2(n)$ باشد. اگر Z و U مستقل باشند، می‌گوئیم متغیر تصادفی

$$T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$$

دارای توزیع T با n درجه آزادی است. برای اینکه درجه آزادی را مشخص کنیم این متغیر را با $T(n)$ نشان می‌دهیم. منحنی چگالی این متغیر تصادفی مانند منحنی چگالی نرمال استاندارد، متقارن و زنگ شکل می‌باشد، ولی بیش از منحنی چگالی نرمال در دو انتهای آن احتمال نهفته است.

برای محاسبه بعضی از مقادیر احتمال از جدول ۵ استفاده می‌کنیم. مثلاً

$$P(T(12)\le 1.782)=0.95$$

اگر n بزرگ باشد (مثلاً $n>30$) می‌توان نشان داد که توزیع $T(n)$ تقریباً مانند توزیع متغیر تصادفی نرمال استاندارد است. مثلاً

$$P(T(50)\le 2)\approx P(Z\le 2)=0.977$$

۳.۷.۶ متغیر تصادفی F

فرض کنید متغیر تصادفی V همتوزیع با $\chi^2(n_1)$ و متغیر تصادفی W همتوزیع با $\chi^2(n_2)$ باشد. اگر V و W مستقل باشند می‌گوئیم متغیر تصادفی مثبت

$$F=\frac{\frac{V}{n_1}}{\frac{W}{n_2}}$$

دارای توزیع اف با n_1 و n_2 درجه آزادی می‌باشد. برای اینکه درجه‌های آزادی را مشخص کنیم این متغیر را با $F(n_1,n_2)$ نشان می‌دهیم. به کمک جدول ۶ می‌توانیم بعضی از مقادیر احتمال را برای این متغیر تصادفی حساب کنیم. مثلاً

$$P(F(6,3)\le 8.94)=0.95$$

۴.۷.۶ چند آماره مهم بر پایه توزیع نرمال

فرض کنید $X_1,X_2,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تائی $(n>1)$ از توزیع نرمال $N(\mu,\sigma^2)$ باشد. حال نگاهی به توابع زیر از این نمونه تصادفی می‌کنیم و هر یک را شرح می‌دهیم:

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$S_0^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

الف – آماره $\overline{X}$ یک برآوردیاب نااریب برای پارامتر مجهول μ می‌باشد. این آماره دارای توزیع $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ است.

ب – با فرض معلوم بودن μ، به آسانی می‌توان نشان داد که آماره S_0^2 یک برآوردیاب نااریب برای پارامتر σ^2 است و

$$\frac{nS_0^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$$

همتوزیع با $\chi^2(n)$ می‌باشد. البته اگر μ مجهول باشد، S_0^2 آماره نیست زیرا در آن پارامتر مجهول موجود است.

ج - اگر μ مجهول باشد آماره S^2 یک برآوردیاب نااریب برای σ^2 است.

در حقیقت اگر در S_0^2 به جای μ برآوردیاب آن، یعنی $\overline{X}$ را بگذاریم آماره زیر

$$S_b^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

به عنوان برآوردیاب σ^2 به دست می‌آید. ولی می‌توان ثابت کرد که

$$E(S_b^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

چون امید ریاضی S_b^2 برابر σ^2 نمی‌شود. اصطلاحاً S_b^2 را یک برآوردیاب اریب برای σ^2 می‌گویند (b حرف اول کلمه biased یعنی اریب می‌باشد). واضح است که

$$E(S^2)=E(\frac{n}{n-1}S_b^2)=\sigma^2$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که S^2 یک برآوردیاب نااریب برای پارامتر σ^2 است. این نتیجه برای هر توزیعی با میانگین μ و واریانس σ^2 درست است و نرمال بودن توزیع لزومی ندارد.

در بالا نشان دادیم که $\frac{nS_0^2}{\sigma^2}$ دارای توزیع $\chi^2(n)$ می‌باشد ولی در درسهای بعد ثابت می‌کنند که

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma})^2$$

دارای توزیع $\chi^2(n-1)$ است. چرا یک درجه آزادی کم می‌شود؟ چون مجموع متغیرهای $X_1-\overline{X}, X_2-\overline{X},\dots,X_n-\overline{X}$ صفر است، نمی‌توانند آزادانه تغییر کنند. بلکه با معلوم بودن $n-1$ تا از آنها متغیر آخر معلوم می‌شود. به طور خلاصه برای σ^2 در توزیع نرمال یا غیر نرمال، سه برآوردیاب داریم:

S_0^2	در صورتی که μ معلوم باشد:	این برآوردیاب نااریب است
S_b^2	در صورتی که μ مجهول باشد:	این برآوردیاب اریب است
S^2	در صورتی که μ مجهول باشد:	این برآوردیاب نااریب است

۵.۷.۶ استقلال $\overline{X}$ و S^2

در درسهای بعد ثابت می‌کنند که $\overline{X}$ یعنی معدل نمونه تصادفی نرمال و S^2 یعنی واریانس نمونه تصادفی نرمال، دو متغیر تصادفی مستقل می‌باشند. این ادعا ظاهراً بعید به نظر می‌آید زیرا هر دو تابع نمونه تصادفی می‌باشند ولی همانطوری که قبلاً دیده‌ایم استقلال یک رابطه احتمالی است، به این معنی که برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم

$$P(\overline{X}<a,S^2<b)=P(\overline{X}<a)P(S^2<b)$$

در ضمن چون

$$S^2=\frac{n}{n-1}S_b^2$$

پس $\overline{X}$ و S_b^2 هم مستقل‌اند ولی به یاد بسپارید که $\overline{X}$ و S_0^2 مستقل نیستند.

۶.۷.۶ توزیع $\frac{(\overline{X}-\mu)}{(\frac{S}{n^{1/2}})}$

فرض کنید $X_1,X_2,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد. می‌دانیم که $\overline{X}$ دارای توزیع $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ و $\frac{(\overline{X}-\mu)}{(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})}$ دارای توزیع $N(0,1)$ است. با توجه به اینکه S^2 یک برآوردیاب نااریب برای σ^2 می‌باشد. اگر به جای σ^2، S^2 بگذاریم، توزیع $\frac{(\overline{X}-\mu)}{(\frac{S}{\sqrt{n}})}$ چه خواهد شد؟ برای پاسخ به این پرسش می‌نویسیم:

$$\frac{(\overline{X}-\mu)}{(\frac{S}{\sqrt{n}})}=\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2/(n-1)}}}$$

از آنجائی که S^2 یک برآوردیاب نااریب برای σ^2 می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم $Z=\frac{(\overline{X}-\mu)}{(\sigma/\sqrt{n})}$ و $U=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$. می‌دانیم که Z دارای توزیع $N(0,1)$ و U دارای توزیع $\chi^2(n-1)$ می‌باشد. در ضمن Z و U مستقل‌اند، زیرا $\overline{X}$ و S^2 مستقل‌اند از اینرو، طبق تعریف متغیر T

$$\frac{(\overline{X}-\mu)}{(\frac{S}{\sqrt{n}})}=\frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{(n-1)}}}$$

دارای توزیع T با $n-1$ درجه آزادی است. با این حال هرگاه n خیلی بزرگ باشد این کسر به تقریب دارای توزیع نرمال استاندارد است.

۷.۷.۶ واریانس آمیخته

فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_m$ یک نمونه تصادفی از $X\sim N(\mu_۱,\sigma^۲)$ و $Y_۱, Y_۲, \ldots, Y_n$ یک نمونه تصادفی از $Y\sim N(\mu_۲,\sigma^۲)$ باشد، به طوری که X و Y و این دو نمونه مستقل بوده و $\mu_۱\neq\mu_۲$. ملاحظه می‌شود که این دو توزیع دارای واریانس مشترک $\sigma^۲$ می‌باشند، پارامتر $\sigma^۲$ را چگونه برآورد کنیم؟ برآوردیاب $\sigma^۲$ از روی نمونه اول و نمونه دوم به ترتیب می‌شوند

$$S_۱^۲=\frac{۱}{m-۱}\sum_{i=۱}^{m}(X_i-\overline{X})^۲$$

$$S_۲^۲=\frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(Y_i-\overline{Y})^۲$$

حال این دو برآوردیاب را به صورت زیر با هم می‌آمیزیم:

$$S_p^۲=\frac{(m-۱)S_۱^۲+(n-۱)S_۲^۲}{m+n-۲}$$

برآوردیاب $S_p^۲$ را اصطلاحاً واریانس آمیخته (pooled variance) می‌نامند. می‌توان ثابت کرد که $S_p^۲$ هم مانند $S_۱^۲$ و $S_۲^۲$ یک برآوردیاب نااریب برای $\sigma^۲$ می‌باشد یعنی

$$E(S_۱^۲)=E(S_۲^۲)=E(S_p^۲)=\sigma^۲$$

در ضمن $S_p^۲$ از دو برآوردیاب دیگر بهتر می‌باشد زیرا می‌توان ثابت کرد که

$$Var(S_p^۲)<Var(S_۱^۲)$$

$$Var(S_p^۲)<Var(S_۲^۲)$$

برای اثبات مطالب بالا باید نخست از مستقل بودن $S_۱^۲$ و $S_۲^۲$ و از جمع‌پذیری متغیرهای $\chi^۲$ مستقل استفاده کرد و نشان داد که $\frac{(m+n-۲)S_p^۲}{\sigma^۲}$ دارای توزیع $\chi^۲(m+n-۲)$ می‌باشد، و سپس میانگین و واریانس $\chi^۲(m+n-۲)$ را حساب نمود.

نسبت $\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲}$ را می‌توان به عنوان برآوردیاب نسبت $\frac{\sigma_۱^۲}{\sigma_۲^۲}$ به کار برد. اگر نسبت اول به یک نزدیک باشد، شانس مساوی بودن واریانسهای X و Y زیاد است. از اینرو داشتن توزیع $\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲}$ ضروری است.

۸.۷.۶ توزیع $\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲}$

برای دو نمونه تصادفی نرمال و مستقل، که در بالا به آنها اشاره شد، داریم:

$$V=\frac{(m-۱)S_۱^۲}{\sigma_۱^۲}\overset{D}{=}\chi^۲(m-۱)$$

$$W=\frac{(n-۱)S_۲^۲}{\sigma_۲^۲}\overset{D}{=}\chi^۲(n-۱)$$

(نماد $\overset{D}{=}$ به معنی همتوزیع بودن دو متغیر تصادفی است).

چون دو نمونه تصادفی بالا مستقل از هم می‌باشند، پس V و W هم مستقل‌اند. حال طبق تعریف متغیر تصادفی F نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\frac{V}{(m-۱)}}{\frac{W}{(n-۱)}}=\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲}\cdot\frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱^۲}\overset{D}{=}F(m-۱,n-۱)$$

پس می‌توان توزیع $\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲}$ را از روی توزیع $F(m-۱,n-۱)$ با داشتن $\sigma_۱^۲$ و $\sigma_۲^۲$ محاسبه کرد. به عنوان مثال اگر از $X\sim N(\mu_۱,۴)$ یک نمونه تصادفی ۱۱ تائی و از $Y\sim N(\mu_۲,۱)$ یک نمونه تصادفی ۹ تائی داشته باشیم و این دو نمونه از هم مستقل باشند، آنگاه

$$P\left(\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲}\leq ۱۳/۴\right)=P\left(\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲}\cdot\frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱^۲}\leq ۱۳/۴\times\frac{۱}{۴}\right)=P(F(۱۰,۸)\leq ۳/۳۵)$$

$$=۰/۹۵$$

۹.۷.۶ تمرین بخش هفت

۱. با استفاده از جدول $\chi^۲$، احتمال زیر را حساب کنید.

$$P(\chi^۲(۴۰)<۳۹/۳)$$

۲. عدد c را طوری تعیین کنید تا داشته باشیم

$$P(\chi^۲(۱۲)>c)=۰/۹۵$$

۳. با فرض $Z\sim N(۰,۱)$، $E(Z^k)$ را برای $k=۱,۲,۳,۴$ حساب کنید. حال امید ریاضی و واریانس $\chi^۲(n)$ را با استفاده از تعریف این متغیر پیدا کنید.

۴. با استفاده از تعریف $\chi^۲(n)$ و قضیه حد مرکزی نشان دهید که $\chi^۲(n)$ برای nهای بزرگ تقریباً دارای توزیع $N(n,۲n)$ می‌باشد. حال پاسخ تمرین ۱ را به تقریب به دست آورید.

۵. با استفاده از تعریف $\chi^۲(n)$، خاصیت جمع‌پذیری این متغیر را توجیه نمائید. با فرض مستقل بودن متغیرهای $\chi^۲(۵)$ و $\chi^۲(۷)$، احتمال زیر را حساب کنید:

$$P\left(\frac{\chi^۲(۵)+\chi^۲(۷)}{۲}<۲/۲۰\right)$$

۶. با استفاده از جدول T، احتمال زیر را حساب کنید:

$$P(۰/۱۲۹<T(۱۰)<۰/۵۴۲)$$

۷. عدد c را طوری تعیین کنید تا داشته باشیم

$$P(۲T(۷)>c)=۰/۳۵$$

۸. $p(T(۲۰۰)<۲)$ را به تقریب حساب کنید.

۹. با استفاده از جدول F، احتمالهای زیر را حساب کنید.

$$P(F(۵,۳)>۹/۰۱) \qquad P(F(۵,۵)<۱۱)$$

۱۰. عدد c را طوری پیدا کنید تا داشته باشیم

$$P(F(۱۲,۵)<c)=۰/۹۹$$

۱۱. با استفاده از تعریف $S_*^۲$، ثابت کنید که در توزیع نرمال، $\frac{nS_*^۲}{\sigma^۲}$ دارای توزیع $\chi^۲(n)$ می‌باشد. حال امید ریاضی و واریانس $S_*^۲$ را پیدا کنید.

۱۲. فرض کنید $X_۱,X_۲,\ldots,X_{۲۰}$ یک نمونه تصادفی از $N(۱,\theta)$ باشد. یک برآوردیاب نااریب برای θ پیدا کنید. با فرض $\theta=۴$، احتمال اینکه این برآوردیاب کوچکتر از ۵ باشد چیست؟

۱۳. فرض کنید $X_۱,X_۲,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد. تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\mu)^۲=\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\bar{X})^۲+n(\bar{X}-\mu)^۲$$

حال با استفاده از تعریف $S_\circ^۲$، امید ریاضی این متغیر را پیدا کنید.

۱۴. در تمرین ۱۳، اگر نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu,\sigma^۲)$ باشد، با استفاده از تعریف $S^۲$، امید ریاضی و واریانس این متغیر را حساب کنید.

۱۵. فرض کنید $X_۱,X_۲,\ldots,X_{۱۰}$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(۱,۳)$ باشد. احتمال زیر را حساب کنید.

$$P(\bar{X}>۳, S^۲<۱/۳۹)$$

۱۶. برای یک نمونه تصادفی ۶ تائی از $N(\mu_۱,۲)$ و یک نمونه تصادفی ۶ تائی از $N(\mu_۲,۴)$ با فرض مستقل بودن دو نمونه، احتمال زیر را حساب کنید.

$$P\left(\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲}>۲/۲۵۲\right)$$

۱۷. امید ریاضی و واریانس $S_p^۲$ (واریانس آمیخته) را حساب کنید.

۱۸. ثابت کنید که واریانس آمیخته نااریب است.

۱۹. $Var(S_p^۲)$ را پیدا کنید و با $Var(S_۱^۲)$ و $Var(S_۲^۲)$ مقایسه نمایید.

۲۰. برای K نمونه تصادفی مستقل، واریانس آمیخته را بیابید.

فصل ۷

نتیجه گیری آماری برای پارامترهای توزیع نرمال و پارامتر نسبت

۱.۷ فاصله اطمینان و آزمون آماری برای پارامترهای توزیع نرمال

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ باشد. در این بخش می‌خواهیم برای پارامترهای این توزیع فاصله اطمینان پیدا کنیم و در مورد آنها آزمون آماری انجام دهیم. ضریب فاصله اطمینان را با $1-\alpha$ و میزان آزمون را با α نشان می‌دهیم. در عمل α را کوچک، معمولاً ۰/۰۱ یا ۰/۰۵ یا ۰/۱ اختیار می‌کنند، تا فرض H_0 که تا به حال مورد قبول بوده است به ناحق رد نشود.

۱.۱.۷ فاصله اطمینان برای μ

چنین فاصله‌ای را می‌توان به آسانی پیداکرد. دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف - σ^2 معلوم

برای تابع محوری

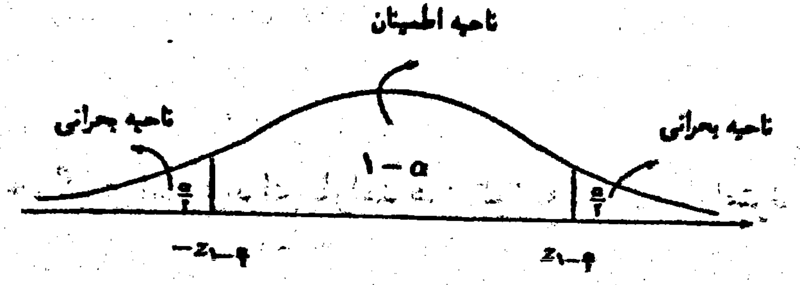
$$Q=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$$

با توجه به نگاره ۱ داریم

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

از حل نامساوی دو سوئی داخل پرانتز برحسب μ فاصله زیر به دست می‌آید:

$$\left(\bar{X}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad (1)$$



نگاره ۱ چگالی تابع محوری Q

ب - σ^2 مجهول

در تابع محوری Q به جای σ^2 برآوردیاب آن S^2 را می‌گذاریم تا تابع محوری زیر، که دارای توزیع تی با $n-1$ درجه آزادی است، به دست آید:

$$Q^*=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\overset{D}{=}T(n-1)$$

برای تابع محوری Q^* داریم

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$$

از حل نامساوی دو سوئی داخل پرانتز بر حسب μ فاصله زیر به دست می‌آید:

$$\left(\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \qquad (2)$$

فاصله (۲) مانند فاصله (۱) می‌باشد، با این تفاوت که σ به S و $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (که در جدول نرمال است) به فاصله $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ (که در جدول T است) تبدیل شده‌اند. این دو فاصله دارای احتمالهای مساوی در دو انتها هستند (در هر دو انتها مقدار احتمال $\frac{\alpha}{2}$ می‌باشد) و می‌توان ثابت کرد که بهترین فواصل اطمینان می‌باشند. منحنی چگالی تابع محوری Q^* هم مانند نگاره ۱ می‌باشد. به ویژه اگر $n\geq 30$ باشد تقریباً $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ و $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ برابرند.

۷.۱.۲ آزمون آماری برای μ

برای آزمون μ دو فرض ساده به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} H_0 : \mu=\mu_0 \\ H_1 : \mu=\mu_1 \end{cases} \qquad \mu_1>\mu_0$$

اگر $\overline{X}$ یعنی برآوردیاب μ، بیش از حد بزرگ شود H_0 را رد می‌کنیم و H_1 را می‌پذیریم، زیرا می‌دانیم که $\mu_1>\mu_0$. برای تعیین ناحیه بحرانی کافی است که مقدار ثابت c را، که به α بستگی دارد، طوری پیدا کنیم تا داشته باشیم

$$Q=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>c$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف - σ^2 معلوم

تحت فرض H_0 داریم $Q\sim N(0,1)$، یعنی Q با متغیر نرمال استاندارد Z همتوزیع می‌باشد. چون می‌خواهیم خطای نوع اول برابر α باشد، پس

$$\alpha=P(\text{را رد کنیم } H_0 \mid \text{درست } H_0)=P(Z>c)=1-\Phi(c)$$

$$\Phi(c)=1-\alpha$$

$$c=z_{1-\alpha}$$

بنابراین فرض H_0 را موقعی رد می‌کنیم که $Q>z_{1-\alpha}$ یا

$$\overline{X}>\mu_0+z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (۳)$$

ب - σ^2 مجهول

به جای σ^2 برآوردیاب آن S^2 را می‌گذاریم. در نتیجه Q به

$$Q^*=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

تبدیل می‌شود که همتوزیع با $T(n-1)$ است. بنابراین فرض H_0 را موقعی رد می‌کنیم که $Q^*>t_{1-\alpha}(n-1)$ یا

$$\overline{X}>\mu_0+t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (۴)$$

ناحیه بحرانی (۳) مانند (۴) می‌باشد، با این تفاوت که σ^2 به S^2 و عدد $z_{1-\alpha}$ به عدد $t_{1-\alpha}(n-1)$ تبدیل شده‌اند.

اینک چند نکته مهم را شرح می‌دهیم:

یک - ناحیه بحرانی (۳) و (۴)، خواه σ^2 معلوم یا مجهول باشد، به μ_1 بستگی ندارند و تنها از $\mu_1>\mu_0$ استفاده شده است. از اینرو می‌توان این دو ناحیه بحرانی را برای آزمون زیر هم که به آزمون یکسوئی شهرت دارد به کار برد.

$$\begin{cases} H_0 : \mu=\mu_0 \\ H_1 : \mu>\mu_0 \end{cases}$$

در این آزمون، فرض H_0 را، که تحت آن توزیع X مشخص و قابل محاسبه می‌باشد، یک فرض ساده می‌نامند. ولی فرض H_1 را که تحت آن توزیع قابل محاسبه نمی‌باشد (زیرا نمی‌دانیم که μ چقدر است، تنها می‌دانیم که از μ_0 بزرگتر است) یک فرض مرکب می‌گویند.

دو - ناحیه بحرانی برای آزمون یکسوئی

$$\begin{cases} H_0 : \mu=\mu_0 \\ H_1 : \mu<\mu_0 \end{cases}$$

بر اساس کوچک بودن $\overline{X}$ به دست می‌آید. اگر مانند بالا عمل کنیم دو ناحیه بحرانی زیر به دست می‌آیند:

$$\overline{X}<\mu_0-z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (۵)$$ σ^2 معلوم

$$\overline{X}<\mu_0-t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (۶)$$ σ^2 مجهول

سه - ناحیه بحرانی برای آزمون دو سوئی

$$\begin{cases} H_{\circ} : \mu = \mu_{\circ} \\ H_{1} : \mu \neq \mu_{\circ} \end{cases}$$

بر اساس کوچک بودن یا بزرگ بودن $\overline{X}$ به دست می‌آید. اگر احتمال را در هر سو $\frac{\alpha}{2}$ بگیریم، ناحیه بحرانی زیر به دست می‌آید:

الف) σ^2 - معلوم

$$\overline{X} > \mu_{\circ} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{n} \text{ یا } \overline{X} < \mu_{\circ} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (۷)$$

(ب) σ^2 - مجهول

$$\overline{X} > \mu_{\circ} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \text{ یا } \overline{X} < \mu_{\circ} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (۸)$$

جمله $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$ را جمله خطا می‌گویند. کوچکی آن به α و n و S بستگی دارد.

چهار - به عنوان مثال، ملاحظه می‌شود که فاصله اطمینان (۱) و ناحیه بحرانی دو سوئی (۷) با هم ارتباط نزدیک دارند و برای تعیین آنها به طریق زیر عمل می‌کنیم:

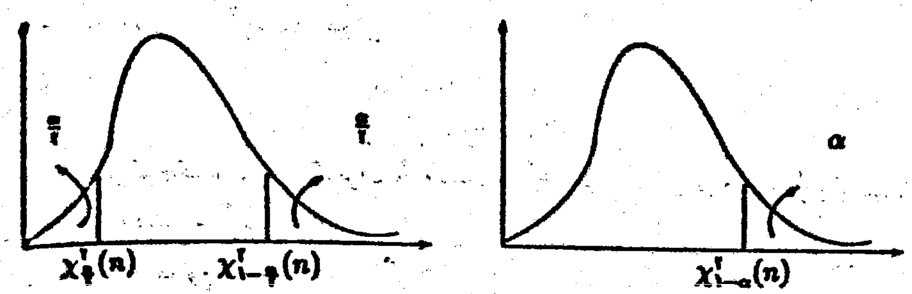
تابع محوری Q را که تابعی از پارامتر μ و آماره $\overline{X}$ می‌باشد پیدا می‌کنیم که با فرض $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، Q دارای توزیع $N(\circ, 1)$ است. روی محور طولها دو نقطه $-z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ و $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ را اختیار می‌نمائیم. از نامساوی $|Q| < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ فاصله اطمینان و از نامساوی $|Q| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ناحیه بحرانی به دست می‌آید. به عبارت دیگر فاصله $(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}})$ روی محور طولها، مخصوص فاصله اطمینان و مکمل آن مخصوص ناحیه بحرانی است (دو نقطه انتهائی را نادیده می‌گیریم، چون دارای احتمال صفر هستند) (به نگاره ۱ نگاه کنید).

به همین طریق فاصله اطمینان (۲) و ناحیه بحرانی دو سوئی (۸) با هم ارتباط دارند. افزون بر این، این مشاهده کلی بوده، از این پس آن را در موارد دیگر هم به کار می‌بریم.

پنج - بنابر قضیه حد مرکزی نتایج بالا برای نمونه‌های بزرگ $(n \geq 30)$، که از توزیع نرمال نباشند، نیز به طور تقریبی درست‌اند.

۳.۱.۷ فاصله اطمینان برای σ^2

دو حالت در نظر می‌گیریم:



نگاره ۲ فاصله اطمینان آزمون σ^2

الف - μ معلوم

آماره $S_{\circ}^2$ یک برآوردیاب نااریب برای σ^2 است و

$$Q_1 = n\frac{S_{\circ}^2}{\sigma^2}$$

دارای توزیع $\chi^2(n)$ می‌باشد. پس Q_1 یک تابع محوری است. روی محور طولها فاصله $(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n), \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n))$ را اختیار می‌کنیم. دو سر این فاصله را به یاری جدول $\chi^2(n)$ با داشتن n و α می‌یابیم. (به نگاره ۲ نگاه کنید). برای این تابع محوری داریم:

$$P(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) < \frac{nS_{\circ}^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)) = 1-\alpha$$

با حل نامساوی دوسوئی داخل پرانتز برحسب σ^2، یک فاصله اطمینان با احتمالهای مساوی در دو انتها می‌شود:

$$\left(\frac{nS_{\circ}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{nS_{\circ}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right) \qquad (۹)$$

ب - μ مجهول

آماره S^2 یک برآوردیاب نااریب برای σ^2 است و

$$Q_1^* = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

دارای توزیع $\chi^2(n-1)$ می‌باشد، پس اگر در فاصله (۹)، $S_{\circ}^2$ را به S^2 و n را به $n-1$ تبدیل کنیم، فاصله اطمینان در این حالت به دست می‌آید.

۴.۱.۷ آزمون آماری برای σ^2

برای آزمون

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2=\sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2>\sigma_0^2 \end{cases}$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف - μ معلوم

چون $\frac{nS_0^2}{\sigma_0^2}$ تحت فرض H_0 دارای توزیع $\chi^2_{(n)}$ است، پس ناحیه بحرانی می‌شود:

$$\frac{nS_0^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n) \qquad (۱۰)$$

ب - μ مجهول

چون $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ تحت فرض H_0 دارای توزیع $\chi^2_{(n-1)}$ است، پس ناحیه بحرانی مانند ناحیه بحرانی (۱۰) می‌باشد، با این تفاوت که باید S_0^2 را به S^2 و n را به $n-1$ تبدیل کرد.

به همین طریق می‌توان به عنوان تمرین ناحیه بحرانی آزمون یکسرئی

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2=\sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2<\sigma_0^2 \end{cases}$$

و ناحیه بحرانی آزمون دوسوئی

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2=\sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2\neq\sigma_0^2 \end{cases}$$

را با تغییرات لازم به دست آورید.

مثال ۱ مقدار محصولی را که یک کارخانه شیمیائی در روز تولید می‌کند متغیر تصادفی X برحسب تن، با توزیع نرمال می‌باشد. برای ۵۰ روز $\bar{x}=871$ تن و $s=21$ مشاهده شده‌اند. یک فاصله اطمینان نود درصدی برای میانگین X به دست آورید.

حل - از فاصله اطمینان (۲) استفاده می‌کنیم. داده‌ها عبارتند از

$$n=50\ ,\ \bar{x}=871\ ,\ s=21\ ,\ t_{/95}(49)\approx z_{/95}=1/645$$

دو انتهای فاصله می‌شوند

$$871 \pm 1/645\left(\frac{21}{\sqrt{50}}\right)$$

بنابراین فاصله (۸۶۶/۱۱،۸۷۵/۸۹) به دست می‌آید.

مثال ۲ مدت آرام بخشی یک نوع مسکن، متغیر تصادفی نرمال X برحسب دقیقه می‌باشد. آمار نشان می‌دهد که برای ۱۲ مصرف کننده $\bar{x}=42$ و $s=11/9$. آزمون زیر را با میزان پنج درصد انجام دهید.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2=100 \\ H_1 : \sigma^2>100 \end{cases}$$

حل - ناحیه بحرانی آزمون از نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$$

$$n=12 \qquad \sigma^2=100 \qquad s^2=(11/9)^2 \qquad \alpha=0/05$$

چون $(n-1)s^2/\sigma^2=15/58$ و $\chi^2_{/95}(11)=19/67$، پس H_0 را رد نمی‌کنیم.

۵.۱.۷ تمرین بخش یک

۱. در مثال ۱ یک فاصله اطمینان نود درصدی برای σ^2 به دست آورید.

۲. در مثال ۱ آزمون

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2=400 \\ H_1 : \sigma^2>400 \end{cases}$$

را با میزان ده درصد انجام دهید.

۳. در مثال ۲ یک فاصله اطمینان نود درصدی برای μ به دست آورید.

۴. در مثال ۲، اگر $\mu = 35$، یک فاصله اطمینان نود درصدی برای σ^2 به دست آورید.

۵. فرض کنید X دارای توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد. اگر μ و σ^2 هر دو مجهول باشند، با استفاده از نمونه تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ فرم ناحیه بحرانی را برای آزمونهای زیر پیدا کنید (خطای نوع اول را α بگیرید)

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

۶. در مثال ۲، اگر $\sigma^2 = 100$ آزمون

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 35 \\ H_1 : \mu > 35 \end{cases}$$

را با میزان ده درصد انجام دهید، و توان آزمون را برای $\mu_1 = 40$ حساب کنید.

۷. در مثال ۱، آزمون زیر را از راه p- مقدار با ۰/۱۰ $= \alpha$ انجام دهید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 70 \\ H_1 : \mu \neq 70 \end{cases}$$

۸. در مثال ۲، آزمون زیر را از راه p- مقدار با ۰/۰۵ $= \alpha$ انجام دهید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 8 \\ H_1 : \mu < 8 \end{cases}$$

۹. مطالعه آماری در گذشته نشان داده است که در عرض سال به طور متوسط کارمندان ۱۵ روز در اثر بیماری غیبت دارند. پژوهشگری برای ۲۵ کارمند در سال گذشته شماره روزهای غیبت را به شرح زیر ثبت کرده است:

۱۲ ۴۰ ۱۴ ۱۲ ۵۰ ۳ ۰ ۱۰ ۲۵ ۵
۱ ۱۰ ۱۶ ۱۸ ۱۴ ۲۰ ۴۷ ۴ ۸ ۳۲
۹ ۲۳ ۵ ۵۸ ۲۲

با میزان ۵ درصد بیازمائید که در سال گذشته روزهای غیبت بیش از ۱۵ روز است. از p- مقدار استفاده کنید.

۱۰. در تمرین ۹، با میزان ده درصد بیازمائید که در سال گذشته روزهای غیبت با ۱۵ اختلاف چندانی ندارند.

۲.۷ فاصله اطمینان و آزمون آماری برای پارامترهای دو توزیع نرمال مستقل

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ و $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ یک نمونه تصادفی $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ باشد. این دو متغیر تصادفی و در نتیجه دو نمونه را مستقل از هم می‌گیریم. مثلاً نمونه اول را اندازه‌های قد بیست دانش‌آموز هفت ساله در شیراز و نمونه دوم را اندازه‌های قد پانزده دانش‌آموز هفت ساله در تبریز تصور کنید.

در این بخش می‌خواهیم برای پارامترهائی مانند $\mu_2-\mu_1$ و $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ فاصله اطمینان پیدا کنیم و در مورد آنها آزمون آماری انجام دهیم.

چون این دو نمونه نرمال از هم مستقل می‌باشند، پس $\overline{X}\sim N(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{m})$ و $\overline{Y}\sim N(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n})$ هم مستقل هستند و $\overline{Y}-\overline{X}\sim N(\mu_2-\mu_1,\sigma^2_{\overline{Y}-\overline{X}})$ یک برآوردیاب نااریب برای $\mu_2-\mu_1$ است. بدیهی است که

$$\sigma^2_{\overline{Y}-\overline{X}} = var(\overline{Y}-\overline{X}) = \frac{\sigma_2^2}{n}+\frac{\sigma_1^2}{m}$$

افزون بر این، دو آماره

$$S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} (Y_j-\overline{Y})^2 \quad \text{و} \quad S_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} (X_i-\overline{X})^2$$

مستقل بوده و به ترتیب برآوردیابهای نااریب برای σ_1^2 و σ_2^2 می‌باشند. در فصل پیش دیدیم که

$$\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \overset{D}{=} \chi^2(n-1) \quad \text{و} \quad \frac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\overset{D}{=}\chi^2(m-1)$$

۱.۲.۷ فاصله اطمینان برای $\mu_2-\mu_1$

برای پیدا کردن این فاصله $\overline{Y}-\overline{X}$ را استاندارد می‌کنیم. تابع محوری

$$Q=\frac{\overline{Y}-\overline{X}-(\mu_2-\mu_1)}{\sigma_{\overline{Y}-\overline{X}}} \overset{D}{=} Z\sim N(0,1)$$

بدست می‌آید. دو حالت در نظر می‌گیریم و ضریب اطمینان را $1-\alpha$ فرض می‌کنیم.

الف - σ_1^2 و σ_2^2 معلوم

در این حالت $\sigma^2_{\overline{Y}-\overline{X}}$ معلوم می‌باشد و داریم

$$P(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Q < z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

از حل نامساوی دوسوئی داخل پرانتز بالا برحسب $\mu_2-\mu_1$ فاصله زیر به دست می‌آید.

$$\bar{Y}-\bar{X}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}<\mu_2-\mu_1<\bar{Y}-\bar{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}} \qquad (۱۱)$$

ب - σ_1^2 و σ_2^2 مجهول

در این حالت در صورتی که داشته باشیم $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$، σ^2 را به وسیله واریانس آمیخته یعنی

$$S_p^2=\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$$

برآورد می‌کنیم. در نتیجه یک برآوردیاب نااریب برای $\sigma^2_{\bar{Y}-\bar{X}}$ می‌شود

$$\widehat{\sigma^2_{\bar{Y}-\bar{X}}}=S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$$

حال از تابع محوری

$$Q^*=\frac{\bar{Y}-\bar{X}-(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{\widehat{\sigma^2_{\bar{Y}-\bar{X}}}}}\stackrel{D}{=}T(m+n-2)$$

استفاده می‌کنیم. بنابراین فاصله اطمینان برای $\mu_2-\mu_1$ مانند فاصله (۱۱) می‌شود، با این تفاوت که باید به جای $\sigma^2_{\bar{Y}-\bar{X}}$ برآوردیاب آن یعنی $\widehat{\sigma^2_{\bar{Y}-\bar{X}}}$ و به جای عدد $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ عدد $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$ را قرار داد. در نتیجه فاصله زیر به دست می‌آید:

$$\bar{Y}-\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}<\mu_2-\mu_1<\bar{Y}-\bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

۲.۲.۷ آزمون آماری برای $\mu_2-\mu_1$

برای انجام آزمون زیر

$$\begin{cases}H_0:\mu_2-\mu_1=a\\ H_1:\mu_2-\mu_1>a\end{cases}$$

از آماره $\bar{Y}-\bar{X}$ استفاده می‌کنیم. اگر این آماره بیش از حد بزرگ شود H_0 را رد می‌کنیم. دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف - σ_1^2 و σ_2^2 معلوم

با استفاده از تابع محوری Q، که در بالا به آن اشاره شد، ناحیه بحرانی می‌شود $Q>z_{1-\alpha}$ یا

$$\bar{Y}-\bar{X}>\mu_2-\mu_1+z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}} \qquad (۱۳)$$

ب - σ_1^2 و σ_2^2 مجهول

در صورتی که داشته باشیم $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$، با استفاده از تابع محوری Q^*، که در بالا به آن اشاره شد، ناحیه بحرانی می‌شود $Q^*>t_{1-\alpha}(m+n-2)$ یا

$$\bar{Y}-\bar{X}>\mu_2-\mu_1+t_{1-\alpha}(m+n-2)S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \qquad (۱۴)$$

به همین طریق می‌توان برای آزمونهای زیر

$$\begin{cases}H_0:\mu_2-\mu_1=a\\ H_1:\mu_2-\mu_1\neq a\end{cases} \qquad \begin{cases}H_0:\mu_2-\mu_1=a\\ H_1:\mu_2-\mu_1<a\end{cases}$$

ناحیه بحرانی پیدا کرد.

در صورتی که σ_1^2 و σ_2^2 مجهول و نابرابر باشند، به دست آوردن فاصله اطمینان و انجام آزمون آماری برای $\mu_2-\mu_1$، مستلزم به کار بردن فرمولهای پیچیده می‌باشد. ما از ذکر اینگونه فرمولها در اینجا خودداری می‌کنیم، تنها یادآور می‌شویم که اگر اندازه نمونه‌ها یعنی m و n بزرگ باشند می‌توان σ_1^2 و σ_2^2 را با S_1^2 و S_2^2 تقریب کرده آنها را دانسته تصور نمود و سپس فرمولهای (۹) و (۱۱) را به کار برد.

۳.۲.۷ فاصله اطمینان برای $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$

در بخش ۵ نشان دادیم که

$$Q_1=\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\,\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\stackrel{D}{=}F(m-1,n-1)$$

بنابراین Q_1 یک تابع محوری است و داریم

$$P\left(F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)<Q_1<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)\right)=1-\alpha$$

از حل نامساوی دو سوئی داخل پرانتز بالا برحسب σ_2^2/σ_1^2 فاصله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{S_2^2}{S_1^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)<\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}<\frac{S_2^2}{S_1^2}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1) \qquad (۱۵)$$

در اینجا لازم است درباره استفاده از جدول F نکته‌ای مهم را یادآور شویم. به عنوان مثال اگر $\alpha=۰/۱۰$ و درجه‌های آزادی صورت و مخرج به ترتیب $m_1=۸$ و $m_2=۶$ باشند، از جدول F داریم $F_{۰/۹۵}(۸,۶)=۴/۱۵$. اغلب جدولها احتمال طرف راست را منظور می‌دارند و به جای $F_{۰/۹۵}(۸,۶)$ می‌نویسند $F_{۰/۰۵}(۸,۶)$. ولی ما برای اینکه با تعریف توزیع احتمال هماهنگی داشته باشیم، $F_{۰/۹۵}(۸,۶)$ را نقطه‌ای می‌دانیم که در طرف چپ آن به اندازه ۰/۹۵ احتمال داریم. عدد $F_{۰/۰۵}(۸,۶)$. یعنی نقطه‌ای که طرف چپ آن ۰/۰۵ احتمال است، در جدول یافت نمی‌شود، زیرا جدول تنها نقاطی را می‌دهد که در طرف چپ آنها ۰/۹۰ یا ۰/۹۵ یا ۰/۹۹ احتمال موجود است. با اینحال می‌توان به عنوان تمرین رابطه عددی

$$F_\alpha(m_1,m_2)=\frac{۱}{F_{1-\alpha}(m_2,m_1)} \qquad ۰<\alpha<۱$$

را ثابت کرد. با استفاده از این رابطه داریم

$$F_{۰/۰۵}(۸,۶)=\frac{۱}{F_{۰/۹۵}(۶,۸)}=\frac{۱}{۳/۵۸}=۰/۲۸$$

۴.۲.۷ آزمون آماری برای $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$

اغلب می‌خواهیم بیازمائیم که دو توزیع نرمال مستقل دارای واریانسهای برابر می‌باشند، تا بتوانیم درباره $\mu_1-\mu_2$ آزمون انجام دهیم. از اینرو آزمون زیر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{cases}H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2\\ H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2\end{cases}$$

چون این آزمون دوسوئی می‌باشد، مکمل فاصله عددی

$$\left(F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1), F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)\right)$$

ناحیه بحرانی را مشخص می‌کند. بنابراین تحت فرض H_0، یعنی با فرض $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}=۱$، ناحیه بحرانی به صورت زیر است

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}<F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1) \quad \text{یا} \quad \frac{S_1^2}{S_2^2}>F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1) \qquad (۱۶)$$

این ناحیه بحرانی را می‌توان بدین طریق توجیه کرد: با فرض درست بودن H_0 داریم

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\overset{D}{=}F(m-1,n-1)$$

چون $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ را می‌توان به عنوان برآوردیاب $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ به کار برد، پس اگر $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ بیش از حد بزرگ یا کوچک شود باید فرض H_0 را رد کرد.

مثال ۵ درس زبان را در یک کلاس ۹ نفری با معلم زن و در یک کلاس ۷ نفری با معلم مرد تدریس کرده‌اند. در پایان یک امتحان استاندارد به هر دو کلاس داده و برای نمره‌ها در این دو کلاس، نتایج زیر را به دست آورده‌اند.

$$\bar{x}=۸۵ \quad s_1=۴ \quad \bar{y}=۸۱ \quad s_2=۵$$

با فرض نرمال بودن و مستقل بودن نمره‌ها، آزمون زیر را با میزان ده درصد انجام دهید.

$$\begin{cases}H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2\\ H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2\end{cases}$$

حل – از ناحیه بحرانی (۱۶) استفاده می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{۱۶}{۲۵}=۰/۶۴ \quad F_{۰/۰۵}(۸,۶)=۰/۲۸ \quad F_{۰/۹۵}(۸,۶)=۴/۱۵$$

چون

$$F_{۰/۰۵}(۸,۶)<S_1^2/S_2^2<F_{۰/۹۵}(۸,۶)$$

پس دلیلی نداریم که H_0 را رد کنیم.

مثال ۶ با فرض $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ در مثال ۵، آزمون زیر را با میزان ده درصد انجام دهید.

$$\begin{cases}H_0: \mu_1=\mu_2\\ H_1: \mu_1\neq\mu_2\end{cases}$$

حل – در حقیقت می‌خواهیم بیازمائیم که نمره‌ها در هر دو کلاس برابرند. نخست واریانس مشترک یعنی $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ را به وسیله S_p^2 برآورد می‌کنیم.

$$S_p^2=\frac{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{m+n-2}=۱۹/۸۶$$

می‌توان نشان داد که ناحیه بحرانی آزمون با فرض درست بودن H_0، یعنی با فرض $\mu_1 = \mu_2$، یعنی $\mu_2 - \mu_1 = 0$ می‌شود:

$$\bar{X}-\bar{Y} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \quad \text{یا} \quad \bar{X}-\bar{Y} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

ملاحظه می‌گردد که

$$\bar{x}-\bar{y} = 85-81 = 4 \quad t_{0/95}(14) = 1/76$$

$$t_{0/95}(14)s_p\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{7}} = 3/95$$

پس داده‌ها در نامساوی اول ناحیه بحرانی صدق می‌کنند. بنابراین فرض H_0 را با میزان ده درصد رد می‌کنیم.

۵.۲.۷ تمرین بخش دو

۱. در مثال ۵، یک فاصله اطمینان نود درصدی برای $\mu_2 - \mu_1$ پیدا کنید.

۲. در مثال ۵، یک فاصله اطمینان نود درصدی برای σ_1^2/σ_2^2 پیدا کنید.

۳. ناحیه بحرانی آزمون زیر را

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

با میزان α برای دو توزیع نرمال مستقل پیدا کنید.

۴. ناحیه بحرانی آزمون زیر را

$$\begin{cases} H_0 : \mu_2 = \mu_1 \\ H_1 : \mu_2 > \mu_1 \end{cases}$$

با میزان α برای دو توزیع نرمال مستقل پیدا کنید.

۵. یک فاصله اطمینان با ضریب $1-\alpha$ برای $2\mu_1 + 3\mu_2$ در دو توزیع نرمال مستقل پیدا کنید.

۶. در یک آزمون حساب سال پنجم ابتدائی، نمره‌های ۸ دانش‌آموز پسر عبارتند از

۱۹, ۱۸, ۱۶, ۱۱, ۱۲, ۱۴, ۱۷, ۱۰

و نمره‌های ۶ دانش‌آموز دختر عبارتند از

۱۱, ۱۴, ۱۳, ۱۷, ۱۸, ۱۶

با فرض نرمال بودن نمره‌ها، با میزان ده درصد بیازمائید که بطور متوسط دانش‌آموزان پسر و دانش‌آموزان دختر در درس حساب هم قوه می‌باشند.

۷. فرض کنید در دو توزیع نرمال مستقل μ_1 و μ_2 معلوم باشند. یک فاصله اطمینان با ضریب $1-\alpha$ برای σ_1^2/σ_2^2 پیدا کنید.

۸. در تمرین ۶، با میزان ده درصد بیازمائید که واریانسها برابر می‌باشند.

۹. رابطه $F_\alpha(m_1, m_2) = \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m_2, m_1)}$ را ثابت کنید.

۱۰. طول عمر ۹ باتری اتومبیل ساخت کارخانه A به طور متوسط ۱۳۰۵ ساعت با انحراف معیار ۴۲۰ ساعت، و طول عمر ۱۶ باتری اتومبیل ساخت کارخانه B به طور متوسط ۱۲۱۰ ساعت با انحراف معیار ۳۸۰ ساعت بوده است. تحت فرض نرمال

الف – با میزان ۱۰ درصد بیازمائید که واریانسها برابراند؛

ب – با میزان ۱۰ درصد بیازمائید که میانگین طول عمر برای باتریهای دو کارخانه یکسان است.

ج – یک فاصله اطمینان با ضریب نود درصد برای تفاضل میانگینها پیدا کنید.

۳.۷ آزمونهای گوناگون برای پارامترهای نسبت

پارامتر نسبت و نتیجه‌گیری آماری برای آن در عمل کاربرد فراوان دارد. مثلاً در یک کارخانه لازم است که مرتب نسبت فرآورده‌های معیوب را به تمام فرآورده‌ها گزارش دهند. برای پزشک اهمیت دارد که بداند چند درصد از بیمارانش با داروئی که تازه به بازار آمده است معالجه شده‌اند. این پارامتر را می‌توان به عنوان پارامتر توزیع برنولی یعنی p (شانس پیروزی) تعبیر کرد. اغلب ممکن است لازم شود که دو پارامتر نسبت را با هم مقایسه نمائیم و درباره تفاضل آنها نتیجه‌گیری آماری کنیم.

در این بخش می‌خواهیم برای یک پارامتر نسبت یا تفاضل دو پارامتر نسبت، فاصله اطمینان پیدا کنیم و برای آزمون آنها آزمون آماری انجام دهیم. مطابق معمول ضریب اطمینان را $1-\alpha$ و میزان آزمون را α می‌گیریم.

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از متغیر برنولی X با پارامتر $0<p<1$ باشد. می‌دانیم که میانگین و واریانس X عبارتند از p و pq. از طرفی $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X}$ یعنی تعداد پیروزیها در n آزمایش برنولی مستقل (با شانس p برای پیروزی و شانس $q=1-p$ برای شکست) دارای توزیع دوجمله‌ای با میانگین np و واریانس npq می‌باشد. برآوردیاب گشتاوری و MLE پارامتر p می‌شود

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X}$$

افزون بر این بنابر قضیه حد مرکزی، در صورتی که n به اندازه کافی بزرگ باشد (مثلاً $n>20$) متغیر تصادفی

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}.$$

دارای توزیع مجانبی نرمال استاندارد، یعنی تقریباً دارای توزیع $N(0,1)$ است. بنابراین برای nهای بزرگ Q یک تابع محوری است.

۱.۳.۷ فاصله اطمینان برای p

چون تقریباً $Q \sim N(0,1)$، پس

$$p\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Q < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha$$

از حل نامساوی دو سوئی

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

می‌توان یک فاصله اطمینان برای p به دست آورد. ولی چون در این نامساوی p از درجه دو می‌شود، فاصله‌ای ساده به دست نمی‌آید. اگر در مخرج Q به جای p و q برآوردیابهای آنها یعنی $\hat{p}$ و $\hat{q} = 1-\hat{p}$ را بگذاریم، می‌توان ثابت کرد

$$Q^* = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$$

هم برای n بزرگ تقریباً دارای توزیع $N(0,1)$ است.

از اینرو برای به دست آوردن فاصله اطمینان به جای Q متغیر تصادفی Q^* را به کار می‌بریم، به آسانی می‌توان نشان داد که فاصله اطمینان تقریبی می‌شود

$$\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \qquad (۱۷)$$

فاصله (۱۷) مانند فاصله (۱) برای پارامتر μ در توزیع نرمال می‌باشد، با این تفاوت که $\hat{p}$ را به جای $\bar{X}$ و $\hat{p}\hat{q}$ (یعنی برآوردیاب واریانس متغیر برنولی) را به جای σ^2 گذارده‌ایم.

چون متغیر برنولی گسسته می‌باشد، محاسبه دقیق فاصله اطمینان برای nهای کوچک آسان نمی‌باشد و باید از روی جدول توزیع دو جمله‌ای یا آزمایش و خطا این کار را انجام داد.

۲.۳.۷ آزمون آماری برای p

برای انجام آزمون آماری

$$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p < p_0 \end{cases}$$

فرض H_0 را موقعی رد می‌کنیم که $\hat{p}$ یعنی برآوردیاب p بیش از حد کوچک شود. بنابراین ناحیه بحرانی به‌وسیله‌نامساوی $\hat{p} < c$ تعیین می‌شود. مقدار ثابت c به α بستگی دارد و نمی‌توان آن را دقیقاً پیدا کرد، زیرا $\hat{p}$ یک متغیر تصادفی گسسته است. از اینرو برای nهای بزرگ از تابع محوری $Q^* = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\hat{p}_0\hat{q}_0/n}}$

$$Q^* = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}}$$

که تحت فرض H_0 به تقریب دارای توزیع $N(0,1)$ است استفاده می‌کنیم. اگر Q^* بیش از حد کوچک شود، یعنی $Q^* < k$، فرض H_0 را رد می‌کنیم. برای تعیین k، با فرض درست بودن H_0، از

$$\alpha = P(Q^* < k) = P\left(\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}} < k\right)$$

استفاده می‌کنیم. بدیهی است که تقریباً $k = -z_{1-\alpha}$. پس ناحیه بحرانی تقریبی می‌شود

$$\hat{p} < p_0 - z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \qquad (۱۸)$$

ملاحظه می‌شود که این ناحیه بحرانی مانند ناحیه بحرانی (۵) برای آزمون

$$\begin{cases}H_0: \mu=\mu_0\\ H_1: \mu<\mu_0\end{cases}$$

در مورد توزیع نرمال (σ^2 معلوم) است، با این تفاوت که به جای μ_0 و $\bar{X}$ و σ^2 به ترتیب p_0 و $\hat{p}$ و $\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}$ را گذارده‌ایم.

به همین طریق می‌توان برای آزمونهای زیر ناحیه بحرانی را پیدا کرد:

$$\begin{cases}H_0: p=p_0\\ H_1: p\neq p_0\end{cases}\qquad \begin{cases}H_0: p=p_0\\ H_1: p>p_0\end{cases}$$

۳.۳.۷ فاصله اطمینان برای p_2-p_1

نمونه تصادفی $X_1,X_2,\dots,X_m$ را از توزیع $B(1,p_1)$ و نمونه تصادفی $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ را از توزیع $B(1,p_2)$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم این دو توزیع برنولی و همچنین این دو نمونه از هم مستقل باشند.

بدیهی است که برای m و n بزرگ تقریباً داریم:

$$\hat{p}_1\sim N\left(p_1,\frac{p_1q_1}{m}\right)\qquad \hat{p}_2\sim N\left(p_2,\frac{p_2q_2}{n}\right)$$

چون این دو نمونه از هم مستقل می‌باشند، پس تقریباً داریم

$$\hat{p}_2-\hat{p}_1\sim N\left(p_2-p_1,\frac{p_1q_1}{m}+\frac{p_2q_2}{n}\right)$$

با استفاده از تابع محوری

$$Q=\frac{\hat{p}_2-\hat{p}_1-(p_2-p_1)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{m}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n}}}\overset{D}{\cong} Z\sim N(0,1)$$

می‌توان یک فاصله اطمینان برای p_2-p_1 به دست آورد. برای این منظور نامساوی

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}}<Q<z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

را برحسب p_2-p_1 حل می‌کنیم. در نتیجه داریم

$$\hat{p}_2-\hat{p}_1- -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{m}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n}}<p_2-p_1<\hat{p}_2-\hat{p}_1+ -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{m}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n}}$$

فاصله اطمینان بالا مانند فاصله (۱۱) برای $\mu_2-\mu_1$ در مورد دو توزیع نرمال مستقل می‌باشد.

۴.۳.۷ آزمون آماری $p_1=p_2$

برای انجام آزمون

$$\begin{cases}H_0: p_1=p_2=p\\ H_1: p_1<p_2\end{cases}$$

از تابع محوری Q در بالا استفاده می‌کنیم. تحت فرض H_0، $\hat{p}_2-\hat{p}_1$ دارای واریانس $pq\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$ می‌باشد. به جای این واریانس برآوردیاب آن را به کار می‌بریم.

بدیهی است که $\hat{p}=(m\hat{p}_1+n\hat{p}_2)/(m+n)$. در نتیجه Q به

$$Q^*=\frac{\hat{p}_2-\hat{p}_1}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}}$$

تبدیل می‌شود. اگر $\hat{p}_2-\hat{p}_1$ یا Q^* بیش از حد بزرگ شود، فرض H_0 را رد می‌کنیم. پس ناحیه بحرانی می‌شود

$$\hat{p}_2-\hat{p}_1>z_{1-\alpha}\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} \qquad (۲۰)$$

به همین طریق می‌توان برای آزمونهای زیر ناحیه بحرانی پیدا کرد.

$$\begin{cases}H_0: p_1=p_2=p\\ H_1: p_1\neq p_2\end{cases}\qquad \begin{cases}H_0: p_1=p_2=p\\ H_1: p_1>p_2\end{cases}$$

مثال ۷ در شهری بزرگ پیش از رای‌گیری برای انتخاب شخصی به عنوان نماینده، یک آمارگیری ساده انجام داده‌اند. در یک نمونه تصادفی ۱۰۰ نفری ۵۹ رای موافق مشاهده شده است. یک فاصله اطمینان برای نسبتی از رای دهندگان موافق در این شهر پیدا کنید.

حل – فرض کنید p نسبت موردنظر باشد. بنابراین احتمال اینکه هر یک از رای دهندگان رای موافق دهند p می‌باشد. در یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی، با شانس p برای پیروزی، ۵۹ پیروزی داریم، از اینرو $\hat{p}=0/59$. اگر ضریب اطمینان را ۰/۹۵ بگیریم و از فاصله (۱۷) استفاده کنیم، دو سر این فاصله عبارتند از

$$\hat{p}\pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0/59\pm 1/96\,(0/049)$$

بنابراین یک فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای p می‌شود $(0/496, 0/686)$.

مثال ۸ در یک نمونه تصادفی ۲۰۰ نفری از شهر A شماره با سوادان ۱۲۰ نفر و در یک نمونه تصادفی ۵۰۰ نفری از شهر B این شماره ۲۴۰ نفر است. با میزان پنج درصد بیازمائید که هر دو شهر به کمک نسبت با سواد دارند.

حل - نسبت با سوادان در این دو شهر به ترتیب عبارتند از

$$\hat{p}_1=\frac{120}{200}=0/60$$

$$\hat{p}_2=\frac{240}{500}=0/48$$

بر اساس این دو برآورد به نظر می‌آید که نسبت با سوادان در شهر A بیشتر می‌باشد. بنابراین آزمون زیر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{cases}H_0:p_1=p_2=p\\ H_1:p_1>p_2\end{cases}$$

ناحیه بحرانی را می‌توان مانند ناحیه بحرانی (۲۰) پیدا کرد. فرض H_0 را موقعی رد می‌کنیم که

$$\hat{p}_2-\hat{p}_1<-z_{1-\alpha}\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$$

بدیهی است که برآورد p می‌شود

$$\hat{p}=\frac{120+240}{200+500}=0/51$$

زیرا تحت فرض H_0 نسبت باسوادان در هر دو شهر یکسان است و عملاً در یک نمونه تصادفی ۷۰۰ نفری ۳۶۰ نفر باسواد مشاهده کرده‌ایم. طرف چپ نامساوی بالا می‌شود ۰/۱۲- و طرف راست آن ۰/۰۶۸۶- . بنابراین نامساوی برقرار است و فرض H_0 با میزان پنج درصد رد می‌شود.

۵.۳.۷ تمرین بخش سه

۱. در مثال ۷ با میزان ده درصد بیازمائید که پنجاه درصد از رای دهندگان رای موافق می‌دهند. در این مثال P- مقدار را بیابید.

۲. در مثال ۸ یک فاصله اطمینان نود درصدی برای p_1-p_2 پیدا کنید.

۳. ناحیه بحرانی آزمون دوسوئی زیر را برای پارامتر توزیع برنولی با میزان α چگونه انجام می‌دهید؟

$$\begin{cases}H_0:p=p_0\\ H_1:p\neq p_0\end{cases}$$

۴. پزشکی مدعی است که هفتاد درصد از بیماران قلبی با داروئی که اخیراً کشف شده است بهبود می‌یابند. اگر ۸۰ بیمار از ۱۵۰ بیمار با این دارو بهبود یابند، با میزان ده درصد ادعای پزشک را بیازمائید. P- مقدار را بیابید.

۵. در یک نمونه تصادفی از ۵۰۰ دانشجوی پسر ۳۰۰ نفر طرفدار کلاسهای بعدازظهر، و در یک نمونه تصادفی از ۱۰۰ دانشجوی دختر ۶۲ نفر طرفدار این موضوع هستند. با میزان ده درصد بیازمائید که پسر و دختر هم رای می‌باشند.

۶. تولید کننده‌ای، کاغذ را کارتنهای ۱۰۰۰ برگی تحویل می‌دهد. در ۲۵ کارتن، ۸ کارتن کمتر از ۱۰۰۰ برگ دارند. فرض کنید پارامتر p درصد کارتنهای با کمتر از ۱۰۰۰ برگ باشد. آزمون زیر را میزان $\alpha=0/10$ انجام دهید.

$$\begin{cases}H_0:p=0/25\\ H_1:p>0/25\end{cases}$$

۷. پرونده‌های یک بیمارستان نشان می‌دهد که از ۱۰۰۰ مرد ۵۲ نفر و از ۱۰۰۰ زن ۲۳ نفر بیماری قلبی دارند. آیا بیماران قلبی مرد بیش از بیماران قلبی زن می‌باشند؟ از P- مقدار استفاده کنید و α را ده درصد بگیرید.

۸. در تمرین ۷ یک فاصله اطمینان با ضریب نود درصدی برای تفاضل نسبتهای بیماران قلبی مرد و زن بیابید.

۹. تولید کننده‌ای می‌خواهد دو نوع حشره‌کش A و B را با هم مقایسه نماید. دو اطاق هم اندازه هر یک با ۱۰۰۰ حشره در نظر گرفته است و در یک اطاق بسته‌ای از حشره‌کش A و در اطاق دیگر بسته‌ای از حشره‌کش B مصرف می‌کند. تعداد ۸۲۵، ۷۶۰ حشره به ترتیب با حشره‌کش A و B نابود می‌شوند. یک فاصله اطمینان نود درصدی برای تفاضل نسبتها پیدا کنید.

۱۰. در تمرین ۹ با $\alpha=0/10$ بیازمائید که حشره‌کش A موثرتر از حشره‌کش B می‌باشد.

فصل ۸

ضریب همبستگی و خط برگشت

در این فصل ضریب همبستگی و خط برگشت را که با هم ارتباط نزدیک دارند با زبانی ساده شرح می‌دهیم. این مفاهیم در رشته‌های علوم، مهندسی، و علوم تربیتی و اجتماعی دارای کاربرد فراوان می‌باشند. بنابراین می‌کوشیم تا این واژه‌های آماری را با ریاضی مقدماتی روشن کنیم. در بخش ۱، ضریب همبستگی و طرز محاسبه آن را از نظر احتمال و از نظر آمار بیان می‌داریم. در بخش ۲ خط برگشت یا خط رگرسیون را تشریح می‌کنیم.

۱۸ برآورد ضریب همبستگی

در بخش ۶ فصل چهارم، مفهوم ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی X و Y را، که دارای چگالی توام $f(x;y)$ هستند، شرح دادیم. این ضریب را که در حقیقت یکی از ویژگیهای چگالی توام است با پارامتر ρ نشان دادیم و به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\rho=\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

به ویژه نشان دادیم که:

الف - $-1\leq\rho\leq 1$ یا $|\rho|\leq 1$

ب - برای $ac>0$ داریم:

$$\rho(aX+b,cY+d)=\rho(X,Y)$$

به عبارت دیگر ضریب همبستگی با تغییر مبدأ اندازه‌گیری و تغییر واحد اندازه‌گیری تغییر نمی‌کند.

ج - برای $\rho=\pm 1$ رابطه خطی زیر میان X و Y برقرار است:

$$\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\mp\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}=0$$

د - اگر X و Y مستقل باشند، $\rho=0$. ولی اگر $\rho=0$، X و Y ممکن است مستقل نباشند. در این بخش می‌خواهیم پارامتر ρ را با روش گشتاوری برآورد کنیم.

۱.۱.۸ برآورد پارامتر ρ

نمونه تصادفی $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),(Y_3,Y_3)\dots,(X_n,Y_n)$ را، با یافته‌های $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$ از جفت (X,Y) در نظر می‌گیریم. مثلاً اگر X و Y به ترتیب اندازه قد و اندازه وزن یک کودک پنج ماهه باشند، با انتخاب ده کودک به تصادف یک نمونه تصادفی ده‌تائی به دست می‌آید که یافته‌های آن بعد از اندازه‌گیری مشخص می‌شوند.

برای اینکه ρ را با روش گشتاوری برآورد کنیم. نخست σ_X^2 و σ_Y^2 و σ_{XY} را به کمک آماره‌های زیر برآورد می‌کنیم:

$$\widehat{\sigma_X^2}=S_X^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\overline{X^2}-\overline{X}^2$$

$$\widehat{\sigma_Y^2}=S_Y^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2=\overline{Y^2}-\overline{Y}^2$$

$$\hat{\sigma}_{XY}=S_{XY}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})=\overline{XY}-\overline{X}\,\overline{Y}$$

اینک پارامتر ρ را به یاری

$$R=\frac{S_{XY}}{S_XS_Y}$$

برآورد می‌کنیم. یافته‌های آماره‌های بالا را با حروف کوچک به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$s_x^2=\overline{x^2}-\bar{x}^2$$

$$s_y^2=\overline{y^2}-\bar{y}^2$$

$$s_{XY}=\overline{xy}-\bar{x}\,\bar{y},$$

$$r=\frac{S_{xy}}{S_xS_y}$$

لازم است که تقارن میان ρ و R و r را شرح دهیم:

۱. ρ یک پارامتر می‌باشد و تنها با داشتن فرمول چگالی توام (X, Y) می‌توان آن را محاسبه کرد. ولی چون معمولاً چگالی توام را نمی‌دانیم، ρ در دست نیست و آن را برآورد می‌کنیم. این پارامتر را اغلب ضریب همبستگی جمعیت می‌نامند.

۲. R یک متغیر تصادفی است که به عنوان برآوردیاب ρ به کار می‌رود. توزیع این برآوردیاب را نمی‌توان در حالت کلی پیدا کرد. در حالتهای خاص هم این توزیع چندان ساده نمی‌باشد.

۳. r، یعنی یافته R، یک عدد است و در حقیقت یک برآورد برای پارامتر بر اساس یافته‌های نمونه تصادفی می‌باشد. این عدد را ضریب همبستگی نمونه می‌نامند.

۲.۱.۸ ویژگیهای برآورد r

این برآورد مانند ρ دارای ویژگیهای زیر است:

الف - با تغییر مبدء اندازه‌گیری و تغییر واحد اندازه‌گیری، مقدار r تغییر نمی‌کند. برای اثبات، تغییر مبدء و واحد را با تبدیل زیر نشان می‌دهیم:

$$x_i' = ax_i + b \qquad a > 0$$

$$y_i' = cy_i + d \qquad c > 0$$

این تبدیل $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ را به $(x_1', y_1'), (x_2', y_2'), \dots, (x_n', y_n')$ تبدیل می‌کند. با یافته‌های تبدیل شده داریم

$$r' = \frac{s_{x'y'}}{s_{x'} s_{y'}} = \frac{ac\ s_{xy}}{a\ s_x\ c\ s_y} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = r$$

مثلاً فرض کنید x اندازه قد یک کودک پنج ماهه برحسب اینچ و y اندازه وزن او برحسب پوند باشد. حال x' را اندازه قد برحسب سانتیمتر با مبدا بیست سانتیمتر و y' را اندازه وزن برحسب کیلوگرم با مبدا نیم‌کیلوگرم فرض می‌کنیم. تبدیل زیر به دست می‌آید:

$$x' = 2.45x - 20$$

$$y' = 0.45y - 0.5$$

با این تبدیل مقدار r تغییر نمی‌کند.

ب - همواره داریم: $-1 \le r \le 1$

برای اثبات $r \le 1$ نامساوی زیر را به کار می‌بریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} - \frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right)^2 \ge 0$$

طرف چپ را بسط می‌دهیم و از تعریف s_x^2 و s_y^2 و s_{xy} استفاده می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$n - 2nr + n \ge 0$$

یا

$$r \le 1$$

برای اثبات $r \ge -1$ در نامساوی بالا $-$ را به $+$ تبدیل می‌کنیم.

ج - با فرض $r = \pm 1$ نقاط $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ روی یک خط راست قرار می‌گیرند. برای اثبات، ملاحظه می‌شود که $r = 1$ اگر و تنها اگر نامساوی بالا به تساوی تبدیل شود یا اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} - \frac{y_i - \bar{y}}{s_y} = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

بنابراین اگر $r = 1$، نقاط (x_i, y_i) روی خط

$$\frac{x - \bar{x}}{s_x} - \frac{y - \bar{y}}{s_y} = 0$$

که دارای ضریب زاویه مثبت است قرار می‌گیرند.

به همین طریق ثابت می‌کنیم که اگر $r = -1$ نقاط (x_i, y_i) روی خط

$$\frac{x - \bar{x}}{s_x} + \frac{y - \bar{y}}{s_y} = 0$$

که دارای ضرب زاویه منفی است قرار می‌گیرند.

ویژگیهای بالا نشان می‌دهند که r شدت همبستگی خط میان دو متغیر را بیان می‌دارد، و تغییر مبده و واحد اندازه‌گیری r را تغییر نمی‌دهد.

مثال ۱ فرض کنید x نمره درس ریاضی و y نمره درس فارسی یک دانش‌آموز اول راهنمائی باشد. جدول زیر نمره‌های شش دانش‌آموز را نشان می‌دهد.

x_i نمره ریاضی	۹	۱۲	۱۱	۱۴	۱۰	۱۲
y_i نمره فارسی	۱۵	۲۰	۱۹	۲۳	۱۷	۱۸

برآورد ضریب همبستگی را حساب کنید.

حل - یافته‌های نمونه تصادفی عبارتند از:

$$(۱۲,۸),(۱۰,۱۷),(۱۴,۲۳),(۱۱,۱۹),(۱۲,۲۰),(۹,۱۵)$$

بعد از انجام محاسبات لازم داریم:

$$\bar{x}=۱۱/۳۳۳ \ ,\quad \bar{y}=۱۸/۶۶۶ \ ,\quad \overline{x^۲}=۱۳۱ \ ,\quad \overline{y^۲}=۳۵۴/۶۶۷ \ ,\quad \overline{xy}=۲۱۵/۳۳۳$$

$$s_x^۲=۲/۵۵۵ \ ,\quad s_y^۲=۶/۲۲۲ \ ,\quad s_{xy}=۳/۷۷۷$$

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}=۰/۹۴۷$$

چون این ضریب به یک نزدیک می‌باشد، پس رابطه خطی میان نمره و فارسی شدید است، و به طور متوسط این دو نمره در جهت یکدیگر افزایش یا کاهش می‌یابند.

۳.۱.۸ توزیع تقریبی R

فیشر، آماردان انگلیسی، تبدیل زیر را که به تبدیل فیشر شهرت دارد به کار برده است:

$$W=\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+R}{۱-R}$$

او ثابت کرده است که برای نمونه‌های بزرگ (مثلاً $n \geq ۲۵$) W تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس تقریبی

$$\mu_w \approx \frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+\rho}{۱-\rho}$$

$$\sigma_W^۲ \approx \frac{۱}{n-۳}$$

می‌باشد. از اینرو به طور تقریبی داریم

$$Z=\frac{W-\mu_W}{\sigma_W}\sim N(۰,۱)$$

با استفاده از این توزیع تقریبی می‌توان برای ρ فاصله اطمینان پیدا کرد و درباره آن آزمون آماری انجام داد.

مثال ۲ برای یک نمونه ۱۰۳ تائی از (X,Y) داریم $r=۰/۵$. آزمون زیر را با میزان $\alpha=۰/۰۵$ انجام دهید:

$$\begin{cases} H_۰ : \rho=۰/۶ \\ H_۱ : \rho \neq ۰/۶ \end{cases}$$

حل - با استفاده از تبدیل فیشر داریم

$$W=\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+۰/۵}{۱-۰/۵}=۰/۵۵$$

$$\mu_W \approx \frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+۰/۶}{۱-۰/۶}=۰/۶۹$$

$$\sigma_W^۲ \approx \frac{۱}{n-۳}=\frac{۱}{۱۰۰}$$

$$z=\frac{W-\mu_W}{\sigma_W}=\frac{۰/۵۵-۰/۶۹}{۰/۱}=-۱/۴$$

از روی جدول نرمال داریم $z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}=z_{۰/۹۷۵}=۱/۹۶$. بنابراین ناحیه بحرانی به صورت $|z|>1.96$ است. چون $|z|=۱/۴$ در ناحیه بحرانی نمی‌باشد، پس فرض $H_۰$ را با میزان پنج درصد رد نمی‌کنیم.

۴.۱.۸ توزیع نرمال توام

جفت $(Z_۱,Z_۲)$ دارای توزیع نرمال توام استاندارد است. هرگاه چگالی توام آن به صورت زیر باشد:

$$f(z_۱,z_۲;\rho)=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{۱-\rho^۲}}e^{-\frac{۱}{۲(۱-\rho^۲)}(z_۱^۲-۲\rho z_۱ z_۲+z_۲^۲)} \qquad |\rho|\leq ۱$$

می‌توان ثابت کرد که Z_1 و Z_2 هر کدام دارای توزیع نرمال استاندارد هستند و ضریب همبستگی آنها برابر است با پارامتر ρ. به ویژه Z_1 و Z_2، با چگالی توام بالا، مستقل‌اند اگر و تنها اگر $\rho = 0$. حال تبدیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} X = \sigma_1 Z_1 + \mu_1 \\ Y = \sigma_2 Z_2 + \mu_2 \end{cases}$$

واضح است که $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. در ضمن ضریب همبستگی X و Y برابر است با ضریب همبستگی Z_1 و Z_2 یعنی ρ. می‌گوئیم جفت (X,Y) دارای توزیع نرمال توام یا توزیع نرمال دو بعدی است. با فرض $\mu_1 = \mu_2 = 0$ و $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$، جفت (X,Y) هم دارای توزیع نرمال توام استاندارد می‌باشد. جفت نرمال توام دارای ویژگی مهم زیر است:

X و Y، با توزیع نرمال توام، مستقل‌اند، اگر و تنها اگر $\rho = 0$

به عنوان مثال اندازه قد یک جوان را با X و اندازه وزن او را با Y نشان می‌دهیم. معمولاً جفت (X,Y) دارای توزیع نرمال توام است و X و Y مستقل نیستند.

۵.۱.۸ چگالی R تحت فرض نرمال

در حالت خاصی که X و Y هر دو نرمال و مستقل باشند، می‌توان ثابت کرد که آماره

$$V = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}$$

دقیقاً دارای توزیع $T(n-2)$ است. با استفاده از آماره V و ویژگی جفت نرمال توام (X,Y) می‌توان مستقل بودن X و Y را آزمون کرد. این آزمون معادل با آزمون $H_0: \rho = 0$ می‌باشد.

مثال ۳ فرض کنید X نمره زبان و Y نمره ریاضی یک دانشجوی سال اول باشد و بدانیم که جفت (X,Y) دارای توزیع نرمال توام است. برای یک نمونه تصادفی ده‌تائی از این دانشجویان داریم $r = 0/1$. با میزان پنج درصد مستقل بودن نمره‌های این دو درس را بیازمائید.

حل - آزمون زیر را انجام می‌دهیم، زیرا یافته R خیلی کوچک است.

$$\begin{cases} H_0: \rho = 0 \\ H_1: \rho \neq 0 \end{cases}$$

یافته آماره V برابر است با

$$v = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0/1\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0/01}} = 0/284$$

آماره V با فرض نرمال بودن و مستقل بودن X و Y دارای توزیع $T(8)$ است. از روی جدول T داریم $t_{0/025}(8) = 2/306$. چون یافته V در ناحیه بحرانی نمی‌باشد، فرض مستقل بودن X و Y را با میزان پنج درصد رد نمی‌کنیم.

۶.۱.۸ تمرین بخش یک

۱. جدول زیر نمره‌های ۷ دانشجو در امتحان ریاضی و زبان می‌باشد.

نمره ریاضی	۱۲	۱۳	۱۰	۱۳	۱۵	۱۱	۱۲
نمره زبان	۱۲	۱۴	۱۳	۱۵	۱۱	۱۴	۱۱

r را حساب کنید. به هر نمره ریاضی ۲ اضافه می‌کنیم و هر نمره زبان را در ۱/۲۵ ضرب می‌نمائیم. برای نمره‌های تبدیل شده ضریب همبستگی را حساب کنید و با r مقایسه نمائید.

۲. برای داده‌های (۷۵,۵۰) و (۵۰,۲۵) و (۱۲۵,۱۰۰) و (۱۲۵,۵۰) یک تبدیل مناسب به کار برید و سپس ضریب همبستگی را حساب کنید.

۳. فرض کنید در تمرین ۱، نمره ریاضی و نمره زبان دارای توزیع نرمال توام باشند. مستقل بودن این دو نمره را با میزان ده درصد بیازمائید.

۴. ثابت کنید: $|s_{xy}| \le s_x s_y$

۵. آیا $\rho = 0$ مستلزم $r = 0$ می‌باشد؟ چرا؟

۶. برای یک جفت تصادفی از (X,Y)، با فرض $\mu_X = \mu_Y = 1$ و $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 4$، داریم $\rho = -1$. چه رابطه‌ای میان Y و X برقرار است؟

۷. ثابت کنید اگر $r = -1$، آنگاه (x_i, y_i)ها روی یک خط راست جا دارند. ضریب همبستگی را برای داده‌های (۲,۷) و (۰,۳) و (۱,۱-) و (۱,۳) و (۱-,۲-) بیابید. آیا این نقاط روی یک خط راست قرار دارند؟

۸. ضریب همبستگی میان قد و وزن ۱۰۰ نوزاد برابر است با $r = ۰/۳$ آزمون زیر را با میزان ده درصد انجام دهید.

$$\begin{cases} H_0 : \rho = ۰/۲۵ \\ H_1 : \rho > ۰/۲۵ \end{cases}$$

آزمون را با پیدا کردن ناحیه بحرانی و با استفاده از p- مقدار انجام دهید.

۹. در مثال ۲ یک فاصله اطمینان با ضریب نود درصد برای ρ بیابید.

۱۰. اگر جفت (X,Y) دارای توزیع نرمال توام باشد، $X\pm Y$ دارای توزیع نرمال است. میانگین و واریانس $X\pm Y$ را پیدا کنید و ضریب همبستگی $X+Y$ و $X-Y$ را بیابید.

۱۱. برای مثال ۳، با پیدا کردن ناحیه بحرانی و همچنین محاسبه p- مقدار آزمون زیر را انجام دهید.

$$\begin{cases} H_0 : \rho = ۰ \\ H_1 : \rho > ۰ \end{cases}$$

اگر داده‌ها از توزیع نرمال دو بعدی باشند، آزمون را چگونه انجام می‌دهید؟

۲.۸ خط برگشت

نمره کنکور دانشجوئی که در مهرماه ثبت نام کرده است ۸۳ می‌باشد. آیا می‌توان درباره معدل سالانه او پیش‌بینی کرد؟ تحت شرائطی، با استفاده از تجربیات گذشته، ممکن است این کار را انجام داد. ولی معدل سالانه او، که در پایان سال تحصیلی گزارش خواهد شد، فعلاً یک متغیر تصادفی است که به عوامل بیشمار از جمله نمره کنکور بستگی دارد.

در این مثال دو متغیر داریم: نخست، نمره کنکور که از آغاز آن را دقیقاً می‌دانیم، این متغیر غیر تصادفی را با x نشان می‌دهیم و آن را متغیر مستقل یا قابل کنترل می‌نامیم. دوم، معدل سالانه که یک متغیر تصادفی، وابسته به نمره کنکور، می‌باشد، این متغیر تصادفی شرطی را با $Y|x$ نشان می‌دهیم و آن را متغیر وابسته می‌نامیم.

برای سادگی، فرض می‌کنیم $Y|x$ یک تابع خطی از x به صورت $a+bx$ و واریانس آن σ^2 باشد. البته این میانگین و واریانس ممکن است علاوه بر x به متغیرهای غیر تصادفی دیگر هم بستگی داشته باشند یا به صورت خطی نباشند. فعلاً در این درس، ما همین حالت ساده را مطالعه می‌کنیم.

در این حالت ساده ما انتظار داریم که معدل سالانه برای افرادی که نمره کنکور آنها x است، به طور متوسط بشود $a+bx$. در اثر عوامل تصادفی به اندازه $Y|x-(a+bx)$ اختلاف تصادفی به وجود می‌آید. این اختلاف تصادفی را با متغیر تصادفی E، نشان می‌دهیم و آن را خطای تصادفی می‌نامیم.

۱.۲.۸ مدل خطی ساده

$$Y|x = a+bx+E$$

را یک مدل خطی ساده می‌گویند. در این مدل، متغیر غیر تصادفی x متغیر مستقل است و از آغاز آن را دقیقاً می‌دانیم. متغیر تصادفی $Y|x$ متغیر وابسته به x است و دارای میانگین $a+bx$ و واریانس σ^2 می‌باشد. متغیر تصادفی E خطای تصادفی است و دارای میانگین صفر و واریانس σ^2 می‌باشد. پارامترهای این مدل عبارتند از a و b و σ^2.

۲.۲.۸ یک نمونه از متغیر مستقل و متغیر وابسته با مدل خطی ساده

در مدل خطی بالا برای متغیر مستقل x مقادیر ثابت $x_1, x_2, \dots, x_n$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم این مقادیر با متغیرهای تصادفی شرطی $Y|x_1, Y|x_2, \dots, Y|x_n$ متناظر باشند. ما این متغیرهای تصادفی شرطی را برای راحتی با $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ و یافته‌های آنها را با $y_1, y_2, \dots, y_n$ نشان می‌دهیم. برای هر Y_i، $i = 1, 2, \dots, n$ داریم:

$$Y_i = a + bx_i + E_i$$

$$E(Y_i) = a + bx_i \quad , \quad Var(Y_i) = \sigma^2$$

$$E(E_i) = ۰ \quad , \quad Var(E_i) = \sigma^2$$

به طور خلاصه یک نمونه از متغیرهای مستقل و وابسته به صورت زیر است:

$$(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \dots, (x_n, Y_n)$$

در این نمونه x_iها از آغاز معلوم هستند ولی هر Y_i متغیر تصادفی است. بعد از مشاهده، یافته‌های زیر برای نمونه بالا به دست می‌آیند:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

۳.۲.۸ روش کمترین توانهای دوم برای برآورد a و b

فرض می‌کنیم

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$$

یافته‌های یک نمونه در مدل خطی باشد. مثلاً x_iها را نمرهای کنکور n دانشجو می‌گیریم. این نمره‌ها را هنگام ثبت نام در دست داریم. بعد از پایان سال تحصیلی، معدل سالانه آنها به صورت y_iها (یعنی یافته‌های متغیرهای تصادفی Y_iها) گزارش گردیده‌اند.

خطای تصادفی E_i را با استفاده از y_i به جای Y_i، با

$$e_i=y_i-(a+bx_i)$$

نشان می‌دهیم. در روش کمترین توانهای دوم، برای اینکه مدل خطی برای نمونه بالا مصداق پیداکند و برازنده آن باشد، مجموع توانهای دوم خطاها، یعنی عبارت زیر که تابعی از a و b می‌باشد، باید می‌نیمم گردد:

$$A(a,b)=\sum_{i=1}^{n} e_i^2=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bx_i)]^2$$

برای می‌نیمم کردن تابع $A(a,b)$ می‌توان از مشتق این تابع نسبت به a و b استفاده کرد. ولی ما با استفاده از جبر مقدماتی، می‌نیمم این تابع را به روش زیر پیدا می‌کنیم. نخست نمادهای زیر را تعریف می‌نمائیم:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad s_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i \qquad s_y^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

اینک با افزودن و کاستن $\bar{y}$ و همچنین $\bar{x}$، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}A(a,b)&=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\bar{y}-b(x_i-\bar{x})+\bar{y}-a-b\bar{x}]^2\\&=ns_y^2+nb^2s_x^2+n(\bar{y}-a-b\bar{x})^2-2bns_{xy}\\&=ns_x^2\left(b-\frac{s_{xy}}{s_x^2}\right)^2+n(\bar{y}-a-b\bar{x})+ns_y^2-n\frac{s_{xy}^2}{s_x^2}\\&\geq n\left(s_y^2-\frac{s_{xy}^2}{s_x^2}\right)=\text{مینیمم مقدار } A\end{aligned}$$

بدیهی است که می‌نیمم مقدار $A(a,b)$ موقعی بدست می‌آید که a و b در روابط زیر صدق کنند

$$\begin{cases}b-\dfrac{s_{xy}}{s_x^2}=0\\ \bar{y}-a-b\bar{x}=0\end{cases}$$

از حل دستگاه بالا برحسب a و b، برآوردهای این دو پارامتر می‌شوند:

$$\begin{cases}\hat{b}=\dfrac{s_{xy}}{s_x^2}\\ \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\end{cases}$$

به کمک تساویهای زیر معلوم می‌شود که $\hat{b}$ ترکیبی خطی از y_iها است.

$$\hat{b}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{ns_x^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\bar{x}}{ns_x^2}y_i$$

بنابراین $\hat{a}$ و $\hat{b}$ هر دو ترکیبهای خطی از $y_1,y_2,\dots,y_n$ هستند.

هرگاه در $\hat{a}$ و $\hat{b}$ به جای y_i بگذاریم Y_i، مطابق معمول برآوردیابهای a و b، که دو متغیر تصادفی هستند، به دست می‌آیند. ما برای برآوردیابها هم نمادهای $\hat{a}$ و $\hat{b}$ را به کار می‌بریم. از متن مطلب می‌فهمیم که کجا برآورد و کجا برآوردیاب داریم.

به آسانی می‌توان نشان داد که برای دو متغیر تصادفی $\hat{a}$ و $\hat{b}$ داریم:

$$E(\hat{a})=a \qquad E(\hat{b})=b$$

یعنی این دو برآوردیاب ناریب می‌باشند.

۴.۲.۸ پیش‌بینی متغیر وابسته به طور متوسط

هرگاه در

$$E(Y|x)=a+bx$$

به جای a و b برآوردهای آنها را بگذاریم، برآورد این میانگین به دست می‌آید. ما این برآورد را با $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ نشان می‌دهیم. با استفاده از این رابطه می‌توانیم با داشتن x (مثلاً نمره کنکور)، مقدار متغیر وابسته را (مثلاً معدل سالانه را) به طور متوسط به وسیله $\hat{y}$ پیش‌بینی کنیم.

۵.۲.۸ برآورد خطای تصادفی

فرض کنید x_i مقدار متغیر مستقل و y_i یافته متغیر وابسته باشد. حال اگر متغیر وابسته را با داشتن x_i به وسیله $\hat{y}_i=\hat{a}+\hat{b}x_i$ پیش‌بینی کنیم، برآورد خطای تصادفی می‌شود

$$\hat{e}_i=y_i-\hat{y}_i=y_i-\hat{a}-\hat{b}x_i$$

عدد $\hat{e}_i$ را پس مانده Residual رگرسیون می‌گویند. اگر در این رابطه $\hat{a}$ و $\hat{b}$ دو برآوردکننده باشند و y_i را به Y_i تبدیل کنیم، آنگاه $\hat{E}_i$ می‌شود یک متغیر تصادفی. امید ریاضی $\hat{E}_i$ برابر صفر است.

معمولاً $\sum_{i=1}^{n}\hat{E}_i^2$ یعنی مجموع توانهای دوم برآورد خطاها را با SSE که علامت اختصاری Sum of the Squares of Errors است نشان می‌دهند. بدیهی است که یافته SSE برابر است با می‌نیمم تابع $A(a,b)$ یعنی

$$A(\hat{a},\hat{b})=SSE=n\left(s_y^2-\frac{s_{xy}^2}{s_x^2}\right)$$

۶.۲.۸ برآورد σ^2

می‌دانیم که

$$E(E_i^2)=Var(E_i)+E^2(E_i)=\sigma^2$$

چون $\hat{E}_i$ برآوردکننده E_i می‌باشد، پس می‌توانیم σ^2 را به وسیلهٔ

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{E}_i^2=\frac{1}{n}SSE$$

برآورد کنیم. ملاحظه می‌شود که $\hat{\sigma}^2$ درست برابر است با $\frac{1}{n}$ می‌نیمم مجموع توانهای دوم خطاها. پس داریم:

$$\hat{\sigma}^2=S_y^2-\frac{S_{xy}^2}{S_x^2}=S_y^2-\hat{b}^2S_x^2$$

هرگاه در $\hat{\sigma}^2$ به جای y_i، Y_i بگذاریم، برآوردیاب σ^2 به دست می‌آید. می‌توان ثابت کرد که:

$$E(\hat{\sigma}^2)=\frac{n-2}{n}\sigma^2$$

بنابراین یک برآورد نااریب برای σ^2 می‌شود:

$$\hat{\hat{\sigma}}^2=\frac{n}{n-2}\hat{\sigma}^2=\frac{n}{n-2}(s_y^2-\hat{b}^2s_x^2)$$

۷.۲.۸ خط برگشت

در بالا دیدیم که با داشتن x، می‌توانیم میانگین متغیر وابسته را به کمک خط $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ پیش‌بینی کنیم. با تغییر x نقاط $(x,\hat{y})$ روی این خط، که آنرا خط برگشت یا خط رگرسیون می‌نامیم، قرار می‌گیرند. با جایگذاری $\hat{a}$ و $\hat{b}$ معادله این خط را می‌توان به طریق دیگر هم نوشت:

$$\hat{y}=(\bar{y}-\hat{b}\bar{x})+\hat{b}x$$

$$\hat{y}-\bar{y}=\hat{b}(x-\bar{x})$$

چون

$$\hat{b}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}\frac{s_y}{s_x}=r\frac{s_y}{s_x}$$

پس خط برگشت به صورت زیر در می‌آید:

$$\hat{y}-\bar{y}=r\frac{s_y}{s_x}(x-\bar{x})$$

ضریب زاویه این خط برابر است با $\hat{b}=r\frac{s_y}{s_x}$ و خط از نقطه $(\bar{x},\bar{y})$ می‌گذرد. اگر $r=\pm1$ باشد این خط بر خط

$$\frac{y-\bar{y}}{s_y}\pm\frac{x-\bar{x}}{s_x}=0$$

که در بخش پیش دیدیم منطبق می‌شود. در این حالت می‌توان گفت که میان متغیر مستقل و متغیر وابسته یک رابطه خطی برقرار است و پیش‌بینی بدون خطا انجام می‌گیرد.

۸.۲.۸ توزیع برآورد یابها در حالت نرمال

فرض کنید Y_iها مستقل و دارای توزیع نرمال باشند، یعنی

$$Y_i \sim N(a+bx_i, \sigma^۲) \qquad i=۱,۲,\dots,n$$

چون $\hat a$ و $\hat b$ هرکدام بصورت یک ترکیب خطی از متغیرهای نرمال مستقل $Y_۱, Y_۲, \dots, Y_n$ هستند، پس هرکدام دارای توزیع نرمال می‌باشند. از طرفی داریم

$$E_i \sim N(۰,\sigma^۲)$$

$$\frac{E_i^۲}{\sigma^۲} \overset{D}{=} \chi^۲(۱)$$

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{E_i^۲}{\sigma^۲} \overset{D}{=} \chi^۲(n)$$

حال اگر به جای E_i برآورد یاب آن یعنی $\hat E_i = Y_i - \hat a - \hat b x_i$ را قرار دهیم دو درجه آزادی از دست می‌رود (زیرا به جای دو پارامتر a و b برآوردیابهای آنها را گذارده‌ایم) و داریم

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{\hat E_i^۲}{\sigma^۲} \overset{D}{=} \chi^۲(n-۲)$$

خلاصه، با استفاده از مطالب بالا و انجام محاسباتی که ما از ذکر آنها در اینجا خودداری می‌کنیم، نتایج زیر به دست می‌آیند:

$$\hat a \sim N\left(a, \frac{\sigma^۲}{n}\left(۱+\frac{\bar x^۲}{s_x^۲}\right)\right)$$

$$\hat b \sim N\left(b, \frac{\sigma^۲}{n s_x^۲}\right)$$

$$\frac{(n-۲)\hat\sigma^۲}{\sigma^۲} \overset{D}{=} \chi^۲(n-۲)$$

افزون بر این می‌توان ثابت کرد که $\hat a$ و $\hat\sigma^۲$ و همچنین $\hat\sigma^۲$ و $\hat b$ مستقل‌اند. حال با استفاده از تعریف توزیع T که در فصل ۵ به آن اشاره شد، سه تابع محوری مهم زیر برای نتیجه گیریهای آماری درباره پارامترها

دست می‌آیند:

$$Q_۱ = \frac{(n-۲)\hat\sigma^۲}{\sigma^۲} \overset{D}{=} \chi^۲(n-۲)$$

$$Q_۲ = \frac{\sqrt{n}(\hat a - a)}{\sqrt{\hat\sigma^۲\left(۱+\frac{\bar x^۲}{s_x^۲}\right)}} \overset{D}{=} T(n-۲)$$

$$Q_۳ = \frac{\sqrt{n}(\hat b - b)}{\sqrt{\frac{\hat\sigma^۲}{s_x^۲}}} \overset{D}{=} T(n-۲)$$

به کمک این متغیرهای محوری، همانطوری که در فصلهای ۶ و ۷ دیدیم، می‌توانیم برای پارامترهای a و b و $\sigma^۲$ فاصله اطمینان پیدا کنیم و دربارهٔ آنها آزمون آماری انجام دهیم.

مثال ۴ جدول زیر نمره کنکور و معدل سالانه ده دانشجوی علوم را نشان می‌دهد. این نمره‌ها به معیار صد استاندارد شده‌اند. یک مدل خطی ساده را در نظر گرفته و پارامترها را برآورد کنید.

x_i	۵۲	۷۵	۳۴	۴۷	۵۷	۲۸	۳۹	۲۱	۴۳	۶۴
y_i	۷۵	۹۸	۵۶	۸۹	۹۲	۷۳	۶۵	۵۲	۷۸	۸۲

جدول نمره کنکور و معدل سالانه

حل - فرض کنید x_i نمره کنکور و y_i معدل سالانه برای دانشجوی iام باشند با استفاده از جدول بالا داریم

$$\bar x = ۴۶ \quad \overline{x^۲} = ۲۳۶۳/۴ \quad s_x^۲ = ۲۴۷/۴$$

$$\bar y = ۷۶ \quad \overline{y^۲} = ۵۹۸۱/۶ \quad s_y^۲ = ۲۰۵/۶$$

$$\overline{xy} = ۳۶۸۵/۴ \quad \bar x \bar y = ۳۴۹۶ \quad s_{xy} = ۱۸۹/۴$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = ۰/۸۴$$

برآورد ضرب همبستگی این دو نمره با استفاده از جدول بالا برابر ۰/۸۴ است. بنابراین تا حدودی همبستگی خطی میان نمره کنکور و معدل سالانه برقرار می‌باشد. اگر هر (x_i, y_i) را با یک نقطه در صفحه محور مختصات نشان دهیم، ملاحظه می‌شود که این نقاط تمایل دارند که اطراف یک خط

راست باشد (به نگاره ۱ توجه کنید). پس فرض مدل خطی ساده دور از انتظار نمی‌باشد. برآورد پارامترها می‌شوند

$$\hat{b}=\frac{s_{xy}}{s_x^{۲}}\approx ۰/۷۷$$

$$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\approx ۴۰/۷۸$$

$$\hat{\sigma}^{۲}=\frac{n}{n-۲}(s_y^{۲}-\hat{b}^{۲}s_x^{۲})\approx ۷۵/۷۵$$

مثال ۵ در مثال ۴ خط برگشت را پیدا کنید و برای هر x_i متغیر وابسته را پیش‌بینی نمائید.

حل - خط برگشت عبارتست از

$$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$$

یا

$$y=۴۰/۷۸+۰/۷۷x$$

به عنوان مثال برای $x_{۱}=۵۲$، متغیر وابسته به طور متوسط با مقدار

$$\hat{y}_{۱}=۴۰/۷۸+۰/۷۷(۵۲)=۸۰/۸۲$$

پیش‌بینی می‌شود. آنچه را که برای متغیر وابسته مشاهده کرده‌ایم $y_{۱}=۷۵$ می‌باشد. پس برآورد خطای تصادفی یا پس مانده رگرسیون می‌شود:

$$\hat{e}_{۱}=y_{۱}-\hat{y}_{۱}=۷۵-۸۰/۸۲=-۵/۸۲$$

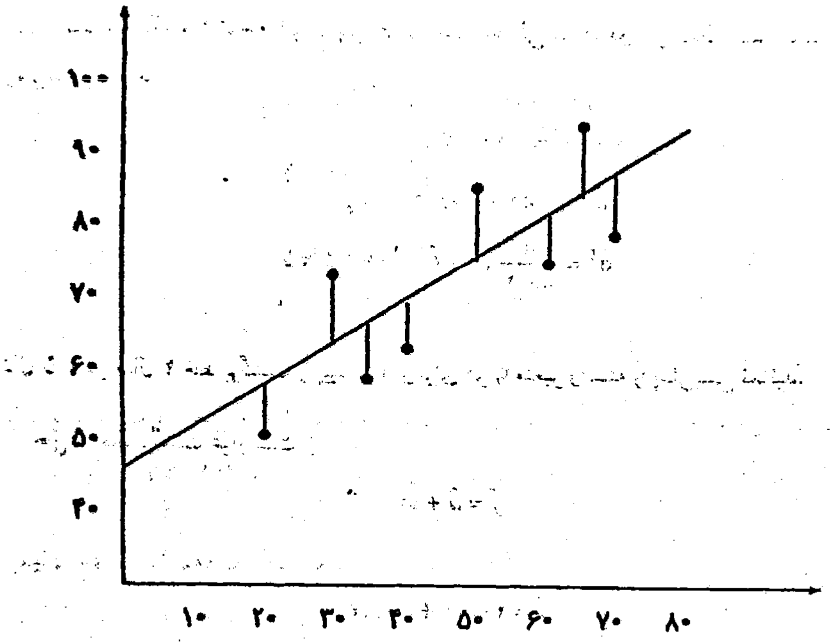
در شکل زیر خط برگشت و نقاط (x_i,y_i) و $(x_i,\hat{y}_i)$ و $\hat{e}_i$ را مشاهده می‌کنید.

مثال ۶ در مثال ۴، آزمون زیر را با میزان ۰/۰۵ انجام دهید:

$$\begin{cases}H_0: b=۰\\ H_1: b\neq ۰\end{cases}$$

حل - از تابع محوری

$$Q_{۲}=\frac{\sqrt{n}(\hat{b}-b)}{\sqrt{\hat{\sigma}^{۲}/s_x^{۲}}}$$



نگاره ۱ خط برگشت و برآورد خطاهای تصادفی

که دارای توزیع T با $n-۲$ درجه آزادی است استفاده می‌کنیم. تحت فرض H_0 یافته این تابع می‌شود:

$$q_{۲}=\frac{\sqrt{۱۰}(۰/۷۷-۰)}{\sqrt{\frac{۷۵/۵۵}{۲۴۷/۴}}}=۴/۴۰$$

از طرفی ناحیه بحرانی با میزان پنج درصد می‌شود $|t|>۲.۳۰۶$. بنابراین فرض H_0 را رد می‌کنیم این موضوع به طور شهودی هم معقول به نظر می‌آید، زیرا (x_i,y_i)ها اطراف خطی با ضریب زاویه غیر صفر جا دارند.

۹.۲.۸ تمرین بخش دو

۱. در مثال ۴، یک فاصله اطمینان با ضریب نود درصد برای b پیدا کنید.

۲. در مثال ۴، یک فاصله اطمینان با ضریب نوددرصد برای $\sigma^{۲}$ پیدا کنید.

۳. در مثال ۴، اگر نمره کنکور دانشجوئی ۸۳ باشد، معدل سالانه او را پیش‌بینی کنید.

۴. در جدول زیر، متغیر مستقل عبارتست از نیروی کشش به یک میلهٔ فولادی و متغیر وابسته افزایش طول میله است.

متغیر مستقل	۱	۲	۳	۴	۵
متغیر وابسته	۲	۴	۵	۶	۸

برای این دو متغیر یک مدل خطی ساده فرض می‌کنیم، برآورد پارامترهای این مدل خطی را پیدا کنید.

۵. در تمرین ۴، خط رگرسیون را پیدا کرده رسم کنید.

۶. در تمرین ۴، اگر متغیر مستقل ۳/۵ باشد، متغیر وابسته را پیش‌بینی کنید.

۷. در تمرین ۴، پس مانده‌ها و SSE و برآورد σ^2 را بیابید.

۸. در تمرین ۴، تحت شرایط نرمال یک فاصله اطمینان با ضریب نود درصد برای σ^2 را پیدا کنید.

۹. یک نوع ماده شیمیائی داریم که در x درجه حرارت y گرم آن تجزیه می‌شود در پنج آزمایش داده‌های زیر به دست آمده‌اند.

x	۲-	۱-	۰	۱	۲
y	۵	۴	۳	۲	۱

یک مدل خطی ساده برای این دو متغیر فرض کنید. خط بازگشت را پیدا کرده رسم نمائید.

۱۰. فرض کنید در تمرین ۹، درجه حرارت ۳ باشد. مقدار ماده‌ای را که تجزیه می‌شود پیش‌بینی کنید.

۱۱. ثابت کنید در یک مدل خطی ساده داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2=\mathrm{SSE}+n(a-\hat{a})^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2(b-\hat{b})^2$$

۱۲. با فرض نرمال و مستقل بودن Y_iها توزیع $\hat{a}$ و $\hat{b}$ را کاملاً مشخص نمائید.

۱۳. ثابت کنید که امید ریاضی $\hat{E}_i$ صفر است.

۱۴. در مدل خطی

$$Y=mx+E$$

برآورد m را به کمک $(x_1,Y_1),\ldots,(x_n,Y_n)$ پیدا کنید.

۱۵. در تمرین ۱۴ نشان دهید که برآوردیاب m نااریب است.

فصل ۹

آزمون مدلهای احتمال به کمک توزیع χ^2

تا به حال در تمام آزمونها فرض می‌کردیم که نوع توزیع متغیر تصادفی X یعنی مدل احتمال را می‌دانیم و آزمون را برای پارامتر آن توزیع انجام می‌دادیم، مثلاً برای پارامتر μ در توزیع نرمال. اینک می‌خواهیم دربارهٔ توزیع X آزمون کنیم. مثلاً فرض کنید X شمارهٔ تصادفهای رانندگی روزانه در یکی از چهارراهها در فاصلهٔ زمانی ساعت ۸ تا ۹ باشد. با داشتن آمار تصادفها برای ۲۰ روز می‌خواهیم بیازمائیم که X دارای توزیع پواسن است. به عنوان مثالی دیگر، فرض کنید X وزن یک نوزاد باشد، با داشتن وزن ۱۰۰ نوزاد می‌خواهیم بیازمائیم که X دارای توزیع نرمال است.

توزیعی راکه گمان می‌بریم داده‌ها از آن آمده باشند، مثلاً پواسن یا نرمال، توزیع برازنده بر داده‌ها و آزمونی را که باید برای بررسی درستی این گمان انجام داد آزمون برازندگی Goodness Of Fit Test می‌نامند. مشهورترین آزمون برازندگی، آزمون χ^2 است. این آزمون به وسیلهٔ آماره‌ای انجام می‌گیرد که برای نمونه‌های بزرگ تقریباً دارای توزیع χ^2 است. چنین آزمونی را پیرسن، آماردان انگلیسی، در ۱۹۰۰ میلادی پیشنهاد کرد. آزمون χ^2 را برای مستقل بودن دو متغیر تصادفی، مثلاً مستقل بودن قد و وزن نوزاد، و برای همتوزیع بودن دو متغیر تصادفی، مثلاً همتوزیع بودن وزن نوزاد ایرانی و وزن نوزاد چینی، نیز به کار می‌برند. در این فصل با مثالهای ساده، اینگونه آزمونها را شرح می‌دهیم.

۱.۹ آزمون χ^2 برای برازندگی

فرض کنید یک آزمایش تصادفی انجام گیرد و نتیجه آن را تنها در یکی از رده‌های دو به دو جدای $C_1, C_2, \ldots, C_k$ مشاهده کنیم. احتمال مشاهدهٔ نتیجه این آزمایش تصادفی را در C_i با عدد $1 > p_i > 0$ نشان می‌دهیم، به طوری که $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$.

اینک آزمایش تصادفی را n بار مستقلاً تکرار می‌کنیم. فرض کنید O_i بار نتیجه را در C_i مشاهده نمائیم. متغیر تصادفی O_i را فراوانی مشاهده شده Observed Frequency می‌نامند. چون احتمال

مشاهدهٔ نتیجه آزمایش در C_i برابراست با p_i، پس انتظار داریم که در این n آزمایش به طور متوسط np_i بار نتیجه آزمایش در C_i مشاهده کنیم. عدد np_i را (که ممکن است عدد درست نباشد) با e_i نشان می‌دهند و آن را فراوانی مورد انتظار Expected Frequency می‌گویند. بدیهی است که

$$\sum_{i=1}^{k} O_i = \sum_{i=1}^{k} e_i = n$$

فرض H_0 را چنین بیان می‌کنیم: آزمایش تصادفی بالا دارای مدل احتمال زیر است:

مجموعه	C_1	C_2	$\ldots$	C_k
احتمال	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

چگونه این آزمون را انجام دهیم؟ بدیهی است که هرگاه فراوانیهای مشاهده شده و فراوانیهای مورد انتظار تحت مدل بالا بیش از حد تفاوت داشته باشند، نسبت به فرض H_0 بدگمان می‌شویم. به سخنی دیگر هرگاه آمارهٔ

$$\sum_{i=1}^{k} (O_i - e_i)^2$$

بیش از حد بزرگ باشد، فرض H_0 رد می‌شود. ولی توزیع این آماره را نمی‌توان پیدا کرد. پیرسن به جای این آماره، آماره زیر را به کار برد

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$$

و نشان داد که اگر n بزرگ باشد، این آماره، تحت فرض H_0، تقریباً دارای توزیع χ^2 با $k-1$ درجه آزادی است. رابطه میان فراوانیها سبب می‌شود که درجه آزادی به جای k بشود $k-1$. این آماره را V_k نشان می‌دهیم و آن را آماره χ^2 پیرسن می‌خوانیم. اگر با استفاده از جدول توزیع χ^2 داشته باشیم:

$$V_k > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$$

آنگاه فرض H_0 (یعنی برازندگی مدل) را با میزان α رد می‌کنیم. معمولاً تعداد رده‌ها، یعنی k، را به نحوی انتخاب می‌کنند تا فراوانی داده‌ها در هر رده دست کم ۵ باشد. رده‌هائی را که دارای فراوانی کمتر از ۵ باشند با رده‌های دیگر ادغام می‌کنند.

مثال ۱ یک تاس تخته را ۱۲۰ بار مستقلاً می‌اندازیم. جدول فراوانی خالهای مشاهده شده در جدول

بر داده شده است:

خال i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فراوانی	۱۸	۲۳	۱۶	۲۱	۱۸	۲۴

با میزان ۵ درصد بیازمائید که این تاس ناریب است.

حل - باید بیازمائیم که این تاس دارای مدل احتمال زیر است

خال	۱	۲	۳	۴	۵	۶
احتمال	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$

در این مثال رده C_i عبارتست از $\{i\}$ یعنی خود خال i.

فراوانی مورد انتظار برای خال i در صورتی که مدل احتمال یعنی فرض $H_۰$ درست باشد می‌شود:

$$e_i = n \times p_i = ۱۲۰ \times \frac{۱}{۶} = ۲۰$$

اینک جدول زیر را تنظیم می‌کنیم:

خال i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
O_i	۱۸	۲۳	۱۶	۲۱	۱۸	۲۴	۱۲۰
e_i	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۱۲۰
$\frac{(O_i-e_i)^۲}{e_i}$	$\frac{۴}{۲۰}$	$\frac{۹}{۲۰}$	$\frac{۱۶}{۲۰}$	$\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۴}{۲۰}$	$\frac{۱۶}{۲۰}$	۲/۵

چون $k = ۶$ ، پس درجهٔ آزادی V_k می‌شود $k - ۱ = ۵$. اینک داریم:

$$v_k = ۲/۵ \quad \chi^۲_{۰/۹۵}(۵) = ۱۱/۱ \quad v_k < \chi^۲_{۰/۹۵}(۵)$$

بنابراین فرض $H_۰$ را رد نمی‌کنیم، یعنی ناریبی تاس را با میزان ۵ درصد می‌پذیریم.

مثال ۲ فرض کنید X طول عمر یک نوع لامپ باشد، برحسب ماه. طول عمر ۲۰۰ لامپ از این نوع در جدول زیر داده شده است:

C_i	$X \le ۳$	$۳ < X \le ۶$	$۶ < X \le ۹$	$X \ge ۹$
O_i	۵۳	۴۲	۳۵	۷۰

آزمون زیر را انجام دهید:

$$H_۰: X \sim F(x) = ۱ - e^{-\frac{x}{۱۲}}, x > ۰$$

حل - فراوانیهای مورد انتظار را تحت فرض $H_۰$ می‌یابیم. مثلاً برای محاسبه $e_۱$ می‌نویسیم:

$$p_۱ = P(C_۱) = P(X \le ۳) = F(۳) = ۰/۲۲۱$$

$$e_۱ = np_۱ = ۲۰۰ \times ۰/۲۲۱ = ۴۴/۲$$

نتیجه محاسبات در جدول زیر دیده می‌شود:

C_i	$C_۱$	$C_۲$	$C_۳$	$C_۴$
O_i	۵۳	۴۲	۳۵	۷۰
e_i	۴۴/۲	۳۴/۶	۲۶/۸	۹۴/۴

$$v_۴ = ۱۲/۲۲ > \chi^۲_{۰/۹}(۳) = ۶/۲۵$$

بنابراین با میزان ده درصد فرض $H_۰$ رد می‌شود.

در صورتی که در مدل احتمال یک یا چند پارامتر مجهول باشد، باید نخست آنها را با استفاده از داده‌ها برآورد کرد. با برآورد هر پارامتر از درجه آزادی V_k یک درجه کاسته می‌شود. برای اینکه موضوع روشن شود به مثال ۳ توجه کنید.

مثال ۳ جدول زیر شماره تصادفها را برای ۵۰ هفته نشان می‌دهد.

شماره تصادفها در هفته	۰	۱	۲	≥ ۳
فراوانی هفته‌ها	۳۲	۱۲	۶	۰

فرض کنید Y شماره تصادفها در هر هفته باشد. با میزان ۵ درصد بیازمائید که Y دارای توزیع پواسن است.

حل - فرض $H_۰$ می‌گوید که Y دارای چگالی زیر است:

$$H_۰: f(y)=P(Y=y)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} \qquad y=۰,۱,\ldots$$

با استفاده از داده‌های بالا برآورد پارامتر λ می‌شود:

$$\hat{\lambda}=\frac{(۰\times۳۲)+(۱\times۱۲)+(۲\times۶)}{۵۰}=۰/۴۸$$

در این مثال رده سوم و چهارم را با هم ادغام می‌کنیم. بنابراین تنها سه رده $C_۱=(Y=۰)$ و $C_۲=(Y=۱)$ و $C_۳=(Y\geq ۲)$ را در نظر می‌گیریم و برآورد احتمال هر رده را تحت فرض $H_۰$ می‌یابیم:

$$\hat{p}_۱=P(Y=۰)=e^{-۰/۴۸}=۰/۶۱۹$$

$$\hat{p}_۲=P(Y=۱)e^{-۰/۴۸}\times۰/۴۸=۰/۲۹۷$$

$$\hat{p}_۳=P(Y\geq۲)=۱-\hat{p}_۱-\hat{p}_۲=۰/۰۸۴$$

حال فراوانیهای مورد انتظار عبارتند از:

$$\hat{e}_۱=n\hat{p}_۱=۵۰\times۰/۶۱۹=۳۰/۹۵$$

$$\hat{e}_۲=n\hat{p}_۲=۵۰\times۰/۲۹۷=۱۴/۸۵$$

$$\hat{e}_۳=n\hat{p}_۳=۵۰\times۰/۰۸۴=۴/۲۰$$

چون یک پارامتر را برآورد کرده‌ایم، آماره $V_۳$ تقریباً دارای توزیع $\chi^{۲}$ با یک درجه آزادی است. به آسانی داریم:

$$\nu_۳=۱/۳۵۴ \qquad \chi^{۲}_{۰/۹۵}(۱)=۳/۸۴$$

پس فرض $H_۰$ را با میزان ۵ درصد رد نمی‌کنیم.

۱.۱.۹ تمرین بخش یک

۱. سکه‌ای را ۱۰۰ بار به تصادف پرتاب کرده ۶۳ بار شیر و ۳۷ بار خط دیده‌ایم. با میزان پنج درصد بیازمائید که این سکه نااریب است.

۲. در یک مغازه آجیل فروشی، ماشینی تخمه و پسته و بادام و فندق را با هم می‌آمیزد. در یک بسته ۵۰۰ دانه‌ای، ۲۶۹ تخمه و ۱۱۲ پسته و ۶۴ بادام و ۴۵ فندق دیده‌ایم. با میزان ۵ درصد بیازمائید که آمیختگی ماشین متناسب با ۵، ۲، ۲، ۱ است.

۳. در درس آمار و احتمال جدول فراوانی نمره‌ها چنین است:

نمره	الف	ب	ج	د	ه
فراوانی	۱۴	۱۸	۳۲	۲۰	۱۶

با میزان ۱۰ درصد بیازمائید که توزیع نمره‌ها یکنواخت است.

۴. رابطه زیر را ثابت کنید:

$$\sum_{i=۱}^{k}\frac{(O_i-e_i)^{۲}}{e_i}=\sum_{i=۱}^{k}\frac{O_i^{۲}}{e_i}-n$$

۵. تجربه نشان داده است که نمره درس ریاضی عمومی هر دانشجو متغیر تصادفی X با توزیع $N(\mu,\sigma^{۲})$ است. استادی مدعی است که نمره‌های امتحان را روی منحنی برده بنابر دستور زیر نمره داده است:

نمره (الف)	$X>\mu+\frac{۳}{۲}\sigma$
نمره (ب)	$\mu+\frac{۱}{۲}\sigma<X<\mu+\frac{۳}{۲}\sigma$
نمره (ج)	$\mu-\frac{۱}{۲}\sigma<X<\mu+\frac{۱}{۲}\sigma$
نمره (د)	$\mu-\frac{۳}{۲}\sigma<X<\mu-\frac{۱}{۲}\sigma$
نمره (ه)	$X<\mu-\frac{۳}{۲}\sigma$

جدول زیر نمره‌های کلاس ۵۰۰ نفری این استاد را نشان می‌دهد.

نمره	الف	ب	ج	د	ه
فراوانی	۵۰	۱۱۵	۲۲۰	۹۰	۲۵

ادعای این استاد را با میزان پنج درصد بیازمائید.

۶. جدول زیر فراوانی تصادفها را در یک چهارراه برای ۷۰ روز غیر تعطیل، در فاصله ۷ تا ۹ صبح، نشان می‌دهد.

فراوانی روزها	۴	۱۰	۱۵	۱۲	۱۲	۶	۶	۵
شماره تصادفها	۱یا۰	۲	۳	۴	۵	۶	۷	بیش از ۷

با میزان پنج درصد بیازمائید که شماره تصادفها در روز، دارای توزیع پواسن است.

راهنمائی - نخست پارامتر میانگین را برآورد کنید و سپس $P(X=x)$ را برای شماره تصادفها بیابید.

۲.۹ آزمون χ^2 برای مستقل بودن

دو ویژگی A و B از جمعیتی را در نظر می‌گیریم، مثلاً قد و وزن، یا استعداد ریاضی و استعداد ادبیات، یا درآمد و درجه تحصیلی. فرض می‌کنیم که بتوانیم این دو ویژگی را به نحوی با دو متغیر تصادفی پیوسته یا گسسته X و Y نشان دهیم.

اینک می‌خواهیم بیازمائیم که این دو ویژگی یا X و Y مستقل‌اند (فرض H_0). فرض کنید که ویژگی A در r رده $A_1, \dots, A_r$ و ویژگی B در s رده $B_1, \dots, B_s$ بررسی گردد. بنابراین هر دو ویژگی با هم در rs رده $C_{11}, \dots, C_{rs}$ بررسی می‌شوند. منظور از C_{ij} عبارتست از داشتن ویژگی A در رده A_i و ویژگی B در رده B_j، مثلاً درآمد متوسط و درجه لیسانس. اگر دو ویژگی A و B بخواهند مستقل باشند احتمال توام زیر برای رده C_{ij} به دست می‌آید:

$$p_{ij}=P(C_{ij})=P(A_i)P(B_i)$$

برای اینکه این احتمال را تحت فرض H_0 برآورد کنیم یک نمونه تصادفی n تائی در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم

$$\hat{p}_{ij}=\frac{A_i\ \text{فراوانی}}{n}\cdot\frac{B_j\ \text{فراوانی}}{n}$$

حال فراوانی مورد انتظار برای C_{ij}، تحت فرض H_0، می‌شود:

$$e_{ij}=n\cdot\hat{p}_{ij}$$

اگر O_{ij} فراوانی مشاهده شده برای C_{ij} باشد، آماره χ^2 می‌شود

$$V=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r}\frac{(O_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

درجه آزادی V برابر است با $d=(r-1)(s-1)$، زیرا باید از $rs-1$ تعداد پارامترهائی را که برآورد می‌کنیم کم نمائیم. بنابراین داریم:

$$d=rs-1-(r-1)-(s-1)=(r-1)(s-1)$$

اگر مقداری را که برای V مشاهده می‌کنیم از $\chi^2_\alpha(d)$ بزرگتر شود فرض H_0 را با میزان α رد می‌کنیم.

مثال ۴ در شهری بزرگ ۱۰۰۰ خانواده را به تصادف انتخاب می‌کنیم و از هر خانواده دربارهٔ تعداد فرزندان و سواد خانواده پرسش می‌کنیم. می‌خواهیم بیازمائیم که این دو ویژگی مستقل‌اند.

فرض می‌کنیم تعداد فرزندان در سه رده A_1(هیچ یا یک فرزند) و A_2(دو یا سه فرزند) و A_3(بیش از سه فرزند) و سواد خانواده در دو رده B_1(با سواد) و B_2(بی‌سواد) تنظیم شده باشند.

جدول فراوانی زیر دیده شده است:

در این جدول فراوانیهای مشاهده شده و مورد انتظار را می‌بینید. به عنوان مثال مشاهده کرده‌ایم که در این نمونه ۱۰۰۰ تائی، ۱۸۲ خانواده بی‌سواد دارای هیچ یا یک فرزند هستند. فراوانی مورد انتظار یعنی ۲۰۱/۶ را چنین می‌یابیم:

تعداد فرزندان / سواد خانواده	A_1	A_2	A_3	جمع
B_1	۱۸۲ (۲۰۱/۶)	۲۱۵ (۲۱۰/۶)	۲۰۳ (۱۸۷/۸)	۶۰۰
B_2	۱۵۴ (۱۳۴/۴)	۱۳۶ (۱۴۰/۴)	۱۱۰ (۱۲۵/۲)	۴۰۰
جمع	۳۳۶	۳۵۱	۳۱۳	۱۰۰۰

$$\hat{p}_{11}=\frac{A_1\ \text{فراوانی}}{n}\cdot\frac{B_1\ \text{فراوانی}}{n}$$

$$=0/336\times 0/600=0/2016$$

بنابراین فراوانی مورد انتظار می‌شود

$$e_{11}=n\times\hat{p}_{11}=1000\times 0/2016=0/2016$$

درجه آزادی V برابر است با $d=(3-1)(2-1)=2$: حال داریم

$$v=\frac{(182-201/6)^2}{201/6}+\dots+\frac{(110-125/8)^2}{125/8}=8/069$$

چون ۷ بزرگتر از $۵/۹۹۱ = (۲)\chi^{۲}_{۰/۹۵}$ است پس با میزان پنج درصد فرض مستقل بودن تعداد فرزندان و سواد خانواده را رد می‌کنیم.

۱.۲.۹ تمرین بخش دو

۱. یک سکه نااریب و یک تاس چهاروجهی نااریب را ۸۰ بار با هم انداخته‌اند. با استفاده از جدول فراوانی زیر، با میزان ده درصد بیازمائید که فرایند سکه (H یا T) و فرایند تاس (۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴) از هم مستقل‌اند. معمولاً مستقل بودن این دو فرایند را به طور شهودی می‌پذیرند.

تاس / سکه	۱	۲	۳	۴
H	۸	۶	۱۲	۱۰
T	۱۲	۱۰	۸	۱۴

۲. در تمرین بالا آزمون را در حالتهای زیر چگونه انجام می‌دهید؟

الف - اگر سکه اریب و تاس نااریب باشد.

ب - اگر سکه نااریب و تاس اریب باشد.

ج - اگر سکه اریب و تاس اریب باشد.

راهنمائی - در هر مورد نخست پارامترهای مجهول را بیابید و سپس فراوانیهای مورد انتظار را پیدا کنید.

۳. با استفاده از جدول فراوانی زیر، مستقل بودن مصرف سیگار و عصبی بودن را با میزان پنج درصد بیازمائید.

	سیگاری	غیر سیگاری
عصبی	۲۱	۳۶
غیر عصبی	۴۸	۲۵

۴. یک سکه ۵۰ ریالی و یک سکه ۱۰۰ ریالی را ۵۰ بار با هم بریزید. جدول فراوانی را برای HH و HT و TH و TT مشاهده کنید. حال مستقل بودن فرایندهای این دو سکه را با میزان ده درصد بیازمائید.

۳.۹ آزمون همتوزیعی

یک ویژگی را در دو جمعیت در نظر می‌گیریم، مثلاً با سوادی در دو شهر بزرگ. فرض می‌کنیم که بترتیب این ویژگی را به نحوی در جمعیت اول با متغیر تصادفی X و در جمعیت دوم با Y نشان دهیم.

اینک می‌خواهیم بیازمائیم که X و Y همتوزیع هستند (فرض $H_{۰}$). ویژگی مورد مطالعه را در رده‌های $C_{۱}, \ldots, C_k$ تنظیم می‌نمائیم. فرض کنید احتمال اینکه یکی از اعضای جمعیت اول در C_i باشد برابر p_i و احتمال اینکه یکی از اعضای جمعیت دوم در C_i باشد برابر q_i شود، به طوری که

$$\sum_{i=۱}^{k} p_i = \sum_{i=۱}^{k} q_i = ۱$$

اگر هر دو جمعیت در رابطه با این ویژگی همتوزیع باشند، باید داشته باشیم:

$$p_i = q_i = r_i \quad i = ۱, \ldots, k$$

در صورتی که $H_{۰}$ درست باشد، r_i، یعنی احتمال مشترک، احتمال این است که یکی از اعضای دو جمعیت در C_i باشد.

برای اینکه آزمون را انجام دهیم، یک نمونه تصادفی m تائی از جمعیت اول و یک نمونه تصادفی n تائی از جمعیت دوم در نظر می‌گیریم. فرض کنید این دو نمونه از هم مستقل باشند. فراوانی مشاهده شده C_i را برای نمونه اول با M_i و برای نمونه دوم با N_i نشان می‌دهیم. فراوانیهای مورد انتظار تحت فرض $H_{۰}$ می‌شوند.

$$e_i = mp_i = mr_i$$

$$f_i = nq_i = nr_i$$

دو آماره

$$U = \sum_{i=۱}^{k} \frac{(M_i - e_i)^{۲}}{e_i}$$

$$V = \sum_{i=۱}^{k} \frac{(N_i - f_i)^{۲}}{f_i}$$

مستقل بوده و هر یک به تقریب (با فرض بزرگ بودن m و n) با $\chi^{۲}(k-۱)$ همتوزیع می‌باشند. بنابراین تحت فرض $H_{۰}$ به تقریب داریم:

$$W = U + V \overset{D}{=} \chi^{۲}(۲k-۲)$$

از آنجائی که پارامتر r_i مجهول می‌باشد، به جای آن برآوردش یعنی

$$\hat{r}_i = \frac{m_i + n_i}{m + n}$$

را به کار می‌بریم. چون باید $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$ یعنی $k-1$ پارامتر، را برآورد کنیم، پس درجه آزادی می‌شود:

$$d = 2k - 2 - (k-1) = k - 1$$

اگر برای یافته آماره W داشته باشیم

$$W > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$$

فرض H_0 را با میزان α رد می‌کنیم.

مثال ۵ در شهری از ۱۰۰۰ دانش‌آموز که به تصادف انتخاب شده‌اند ۵۰۰ نفر در دوره ابتدائی و ۴۰۰ نفر در دوره راهنمائی و ۱۰۰ نفر در دوره دبیرستان می‌باشند. در شهری دیگر از ۱۵۰۰ دانش‌آموز، اینگونه افراد عبارتند از ۵۰۰ و ۶۰۰ و ۴۰۰. با میزان یک درصد بیازمائید که این دو شهر از نظر ترکیب دانش‌آموزان این سه دوره همتوزیع می‌باشند.

در این دو شهر رویهم از ۲۵۰۰ دانش‌آموز، ۱۰۰۰ نفر در دوره ابتدائی و ۱۰۰۰ نفر در دوره راهنمائی و ۵۰۰ نفر در دوره دبیرستان می‌باشند.

اگر فرض H_0 یعنی همتوزیعی درست باشد، داریم

$$\hat{r}_1 = \frac{1000}{2500} = 0/4 \quad , \quad \hat{r}_2 = \frac{1000}{2500} = 0/4 \quad , \quad \hat{r}_3 = \frac{500}{2500} = 0/2$$

جدول فراوانیهای مشاهده شده و مورد انتظار را در زیر می‌بینید:

	فراوانی	ابتدائی	راهنمائی	دبیرستانی	جمع
شهریه دوم	O_i	۵۰۰	۴۰۰	۱۰۰	۱۰۰۰
	e_i	۴۰۰	۴۰۰	۲۰۰	
شهریه اول	O_i	۵۰۰	۶۰۰	۴۰۰	۱۰۰۰
	e_i	۶۰۰	۶۰۰	۳۰۰	
	جمع	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۵۰۰	۲۵۰۰

اینک یافته‌های آماره‌های U و V و W عبارتند از

$$u = \frac{(500-400)^2}{400} + \frac{(400-400)^2}{400} + \frac{(100-200)^2}{200} = 75$$

$$v = \frac{(500-600)^2}{600} + \frac{(1600-600)^2}{600} + \frac{(400-300)^2}{300} = 50$$

$$w = u + v = 75 + 50 = 125$$

$$d = 6-2-2 = 2 \text{ درجه آزادی}$$

$$w > \chi^2_{0/99}(2) = 9/21$$

بنابراین فرض H_0 را با میزان یک درصد رد می‌کنیم.

۱.۳.۹ تمرین بخش سه

۱. یک سکه طلا را ۱۰۰ بار انداخته‌ایم، ۴۰ بار شیر و ۶۰ خط آمده است. در حالی که یک سکه نقره در ۸۰ پرتاب، ۳۵ بار شیر و ۴۵ بار خط آمده است با میزان ده درصد بیازمائید که این دو سکه از نظر شیر و خط آمدن همتوزیع هستند.

۲. تمرین ۱ را با استفاده از تقریب نرمال و آزمون نرمال را انجام دهید.

۳. تخم گل هلندی از ۱۰۰ گل، ۲۴ گل سفید و ۳۰ گل صورتی و ۴۶ گل قرمز داده است. در حالی که نوع بلژیکی همین تخم از ۱۰۰ گل، ۲۰ گل سفید و ۴۰ گل صورتی و ۴۰ گل قرمز داده است. با میزان ده درصد بیازمائید که هر دو نوع تخم گل، از نظر رنگ گل همتوزیع هستند.

۴. دو تاس را ۵۰ بار به تصادف بریزید و جدول فراوانی خالها را به بینید. حال با میزان پنج درصد نشان دهید که هر دو تاس از نظر توزیع خالها یکسان هستند.

پاسخ تمرینهای انتخابی

فصل اول

بخش دو صفحهٔ ۲۳

۱. نژاد: اسمی، جدا، گسسته

۲. الف) جمعیت: دانش‌آموزان یک مدرسه، نمونه: بچه‌هایی که اسم آنها با م شروع می‌شود، متغیر: قدرت دید.

۴. مستقل از a

۵. ۲/۴۷۱ ۲/۴۷ ۲/۴۷۱۵:

۷. $y = 10x$: مقیاس‌های اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی تغییر نمی‌کنند.

بخش سه صفحهٔ ۲۸

۱. داده‌ها از نوع جدا هستند، ۴۰٪ از خانواده‌ها بیش از ۵ قرص مصرف می‌کنند.

۲. داده‌ها با مقیاس ترتیبی اندازه‌گیری شده‌اند، ۶۲/۵٪ از دانش‌آموزان نمره کمتر از ۱۲ دارند.

۳. داده‌ها از نوع پیوسته هستند.

بخش چهار صفحهٔ ۳۴

۱. ۲٪ بیش از $\mu + 2\sigma$ و ۱۶٪ کمتر از $\mu - \sigma$

بخش پنج صفحهٔ ۲۸

۲. $M = ۷$ ، $D_۴ = ۶/۶$ ، $Q_۱ = ۵$ ، $m = ۸$

۳. $M = ۱۶۸/۲$ ، $m = ۱۶۷$ ، $\bar{x} = ۱۶۶/۶۵$

۴. $Q_۳ = ۱۶۴/۶۷$

۸. میانگین اصلاح شده = ۳ ، $\bar{x} = ۳/۷۱۴$

بخش شش صفحهٔ ۵۶

۱. $s = ۱۲/۴۱$ ، $R' = ۱۰$ ، $R = ۱۲$ $Q = ۲/۶۳$ ، $Q' = ۸/۳۷۵$

۳. $m = ۳۵۰/۵۲۶$ ، $S_x^۲ = ۴۵۱/۹۶$ ، $\bar{x} = ۳۴۹/۳$

فصل دوم

بخش یک صفحهٔ ۷۵

۱. موضوع: رنگ صفحه.

$S =$ {قرمز، سفید، سبز}

۲. فضا نمونه ناپایدار است.

۶. الف) $E \cap F' \cap G'$

ب) $(E \cap F) \cap (G \cap F) \cup (E \cap G) \cup (E \cap F \cap G)$

ج) $(E \cap F \cap G') \cup (E \cap G \cap F') \cup (E' \cap G \cap F)$

۱۰. درست، درست درست، درست

بخش دو صفحهٔ ۸۱

۳. $\frac{۱}{۵۲}$ ، ۲۰

۵. $\frac{۲}{۷}$

۶. ۷

بخش سه صفحهٔ ۸۶

۱. $\frac{۲}{۸}$ ، $\frac{۷}{۸}$

۲. $\frac{۴}{۷}$

۳. ۶۰۰

۴. $\frac{۱}{۴}$

۵. $\frac{۱}{۱۰}$

۸. ۰/۳ ، ۰/۷ ، ۰/۴ ، ۰/۳

۹. ۰/۷ ، ۰/۴ ، ۰/۳ ، ۰/۷ ،

بخش چهار صفحهٔ ۱۰۰

۲. $۶^۵$ ، $(\frac{۴}{۶})^۵$

۳. $\frac{۱}{۱۰}$ ، $\frac{۴}{۱۰}$ ، $\frac{۱}{۱۰}$

۴. $۹^۴$

۵. ۱۲۰ ، $\frac{۳}{۱۰}$

۶. ۷۲۰

۷. ۱۲۶۰ ، ۰/۰۲۸

۸. $۱/۳ \times ۱۰^{۱۲}$ ، ۰/۰۰۶

۹. ۲۴ ، $\frac{۱}{۲}$

۱۰. ۰/۲۰۵

۱۲. ۷۲۵۷۶۰

۱۳. ۳^N

۱۴. $\binom{R-N-۱}{R-۲N}$

۱۵. $\binom{R-۱}{R-N}$ ، ۶

۱۶. N^R، $\frac{N^R}{R!}$، $\frac{N!}{(N-R)!}$، $\frac{N!}{(N-R)!R!}$، $\binom{N}{R}$

۱۷. ۶۰، ۱۲۵

۱۸. ۸۴

۱۹. ۰/۲۵۳، ۰/۳۹

۲۰. ۷۵۶۰

۲۳. ۴۲۰۰، ۰/۰۰۸۳

۲۶. ۰/۰۹۴

بخش پنج صفحهٔ ۱۱۱

۲. $\frac{۲۵}{۹۱}$، $\frac{۹۱}{۲۱۶}$، $\frac{۲۵}{۳۶}$

۳. $\frac{۱}{۵}$

۴. $\frac{۳}{۴}$

۱۲. خیر

بخش شش صفحهٔ ۱۱۷

۲. $\frac{۱}{۲}$

۳. ۰/۰۱۳

۷. $\frac{۳}{۸}$

بخش هفت صفحهٔ ۱۲۳

۱. ۰/۰۲۵۵

۲. $\frac{۱۱}{۲۵}$، $\frac{۹}{۱۱}$

۳. $\frac{۷}{۲۵}$، $\frac{۴}{۷}$

۴. ۰/۰۳۸، $\frac{۲^n}{۲^n+۹}$

۵ ۰/۰۸۳

بخش هشت صفحهٔ ۱۳۰

۲. $\frac{۱}{۴}$

فصل سوم

بخش یک صفحهٔ ۱۳۵

۱. ب) $\frac{۷}{۸}$، صفر، $\frac{۳}{۸}$،

د) خیر، بلی

۲. ج) ۰/۲۷۵

۳. ب) ۰/۹

۴. $\frac{۱}{۱۲}$، $\frac{۱}{۶}$

بخش دو صفحهٔ ۱۴۷

۱. ب) $\frac{۳}{۸}$، $\frac{۷}{۸}$، $\frac{۳}{۸}$

۲. الف) $۲\sqrt{۲}x - ۲x^۲,\ ۰ \le x < \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ب) ۰/۹۶

ج) صفر

۳. $T(x)$، تابع توزیع نیست ولی بقیه تابع توزیع میباشند

۴. $m = ۰$

$F_Y(y) = \frac{y^۲}{y^۲+۱}\ y \ge ۰$

$m = \frac{\pi}{۲}$، $۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

بخش سه صفحهٔ ۱۵۷

۱. $\frac{۷}{۸}$ ، $\frac{۳}{۸}$

۲. بلی

۳. الف) $f_X(x) = ۲\sqrt{۲} - ۴x \quad ۰ < x < \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ب) ۰/۰۹۶

۵. $\frac{۱}{۲}$

۸. $۱ - e^{-۲x}, x > ۰$

بخش چهار صفحهٔ ۱۶۲

۱. خیر

۲. بلی

۳. خیر

۴. خیر

فصل چهارم

بخش یک صفحهٔ ۱۷۲

۱. ۲۳۷/۵

۲. X و Y همتوزیع نیستند و $E(X) \neq E(Y)$ ولی $EX^۲ = EY^۲$

۴. ۱

۵. μ

۶. $E(X)$ وجود ندارد

۷. $E(X)$ وجود ندارد

۸. $E(X)=E(Y)=۱$ ، $E(X^۲)=E(Y^۲)=\frac{۴}{۳}$ ، $E(X+Y)=۲$ ، $E(X-Y)=۰$ ، $E(X+Y)(X-Y)=۰$

۹. $p\mu_۱ + q\mu_۲$

۱۱. $E(X)=\frac{۵}{۴}$ ، $E(Y)=۲$ ، $E(XY)=\frac{۹}{۴}$ ، $E(X+Y)=\frac{۱۳}{۴}$

۱۲. $E(X)=E(Y)=\frac{۷}{۱۲}$ ، $E(XY)=\frac{۱}{۳}$

۱۵. $E(Cos X)=\frac{۱}{۲}$ ، $E(Cos^۲ X)=\frac{۱}{۳}$

بخش دو صفحهٔ ۱۷۸

۱. ۳/۵ ، ۴۲/۲۵

۲. صفر ، $\frac{۱}{۳}$ ، ۰/۵۸ ، $\frac{۱}{۳}$ ، $\frac{۴}{۵۴}$ ، ۰/۳ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۱۲}$ ، ۰/۲۹ ، ۳- ، $\frac{۴}{۳}$ ، ۱/۱۵ ، $\frac{۱۱}{۳}$ ، ۸/۶۹ ، ۲/۹۵

۳. ۶۰ ، ۱۰۰ ، ۱۰

۴. ۶ ، ۶-

۹. $\frac{N+۱}{۲}$ ، $\frac{N^۲-۱}{۱۲}$

۱۳. $\frac{۲}{۳}$

۱۵. $\frac{۴}{۴۵}$

بخش سه صفحهٔ ۱۸۴

۱. ۲ ، ۲ ، ۴ ، ۰

۲. $\frac{۸}{۱۵}$ ، $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۹}$ ، $\frac{۴}{۲۲۵}$

۵. صفر

۸. ۵۲

بخش چهار صفحهٔ ۱۸۹

۱. $\frac{۱}{۳۲}$ ، ۰/۱۰ ، ۰/۲۸۷

۳. $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$ ، $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$

۵. $\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$

۷. μ ، $\frac{\sigma^{۲}}{n}$

۸. صفر

۹. ۱-

۱۰. $\frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

فصل پنجم

بخش یک صفحهٔ ۱۹۶

۱. $\frac{۱۲}{۵}$ ، $\frac{۲۴}{۲۵}$ ، ۰/۳۵

۲. ۵ ، /۰۰۲

۴. $B(n,q)$

۵. $(۰/۶)^{۱۲}$

۶. ۰/۰۰۷

۸. $x = ۱, ۲, ۳, \ldots$ $f(x) = pq^{x-۱}$

۹. ۰/۱۲۵

۱۰. $\frac{۱۲}{۵}$ ، $\frac{۶}{۲۵}$ ، $\frac{۱}{۵}$

۱۲. $\frac{۱}{۲۲}$ ، $\frac{۱۳}{۱۲}$ ، $\frac{۹۵}{۱۲۲}$

۱۳. ۰/۳۷۵

۱۴. ۰/۴۲ ، ۲/۶۲۵

۱۵. $-npq$ ، ۱-

بخش دو صفحهٔ ۲۰۰

۱. ۰/۷۶۲

۲. ۰/۱۳۶

۴. ۰/۰۰۲۵

۵. ۰/۰۸۰۳

۶. ۰/۰۰۳۴

۷. ۰/۳۹۳۲

۸. ۰/۰۴۷۴

۱۱. $P(۱)$ ، $P(۲)$ ، $P(۳)$

۱۲. $P(۳)$

بخش سه صفحهٔ ۲۰۵

۲. ۰/۳۷۴۷ ، ۰/۸۴۱۳ ، ۰/۶۲۹۳

۴. ۰/۳۰۸۵ ، $N(۲۰, ۴/۹۴)$

۵. ۰/۰۲۲۸

۶. ۳۲

۷. ۰/۴۸۴۰ ، ۰/۵۷۳۳ ، ۰/۶۷۳۶

۱۰. ۰/۶۱۷۰ ، ۰/۲۴۱۷

بخش چهار صفحهٔ ۲۱۲

۲. ۰/۵۴۶۸ ، ۰/۵۴۷۹

۴. ۰/۰۳۴۷ ۰/۰۳۵۷

۵. صفر

۶. ب) ۰/۹۹۸۴

۷. ب) ۰/۰۳۶۶

فصل ششم

بخش دو صفحهٔ ۲۱۹

۱. 6^5 ، $\frac{1}{6^5}$

۲. $N(2\mu,3)$ ، $N(0,6)$ ، U ، خیر

۳. بزرگترین مقدار را بعنوان برآورد θ اختیار می‌کنیم

بخش سه صفحهٔ ۲۲۷

۱. بله، کوچکترین و بزرگترین مشاهده

۲. $\bar{X}$ ، $\bar{X}$

۳. $\bar{X}$ ، $\bar{X}$

۴. $\overline{X^2}$

۶. $\bar{X}$ ، $\bar{X}$

۷. $\frac{3}{5}$ ، $\frac{2}{5}$ ، T بهتر است

۸. $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$

۹. U_1U_2 ، $U_1(1-U_2)$

۱۰. $\overline{X_2}-\overline{X_1}$

بخش چهار صفحهٔ ۲۳۱

۱. ۰/۸۶۶۴

۲. (۱۹/۰۳ ، ۲۲/۵۳)

۳. (۶۸/۸۹ ، ۷۵/۱۱)

۵. ۹/۵

بخش پنج صفحهٔ ۲۳۶

۱. الف) ۰/۰۵۴۷ ، ۰/۴۷۴۴ ، ۰/۵۲۵۶

ب) ۸

۲. ۰/۰۰۱۳ ، ۰/۷۲۵۷ ، ۰/۲۷۴۳

۳. $\frac{1}{21}$ ، $\frac{5}{7}$ ، $\frac{2}{7}$

۴. ۰/۲۲۳۱ ، ۰/۴۵

۵. الف) $X\sim B(24,\frac{1}{5})$

بخش شش صفحهٔ ۲۴۳

۱. p- مقدار = ۰/۰۶۶۸

۲. p- مقدار ۰/۱۳۳۶

۳. ۰/۵۱۵۶ ، ۰/۲۵۷۸

۴. p- مقدار صفر می‌شود، (برای هر دو آزمون)

بخش هفت صفحهٔ ۲۵۰

۱. ۰/۵۰

۲. ۶/۵۷

۳. صفر، ۱، صفر، ۳، n، $2n$

۴. ۰/۴۷

۵. ۰/۰۲۵

۶. ۰/۱۵

۷. ۰/۸۰۴

۸. ۰/۰۰۱۳

۹. ۰/۹۹ ، ۰/۰۵

۱۰. ۹/۸۸

۱۱. σ^2 ، $\frac{2\sigma^2}{n}$

۱۲. $\overline{X}^2-2\overline{X}+1$ ، ۰/۸

۱۳. $\frac{n-1}{n}\sigma^2$

۱۴. σ^2 ، $\frac{2\sigma^4}{n-1}$

۱۵. صفر

۱۶. ۰/۰۶۲۱

۱۷. σ^2 ، $\frac{2\sigma^2}{m+n-2}$

فصل هفتم

بخش یک صفحهٔ ۲۶۰

۱. (۳۲۰/۱۳ ، ۶۲۰/۹۵)

۲. H_0 را رد نمی‌کنیم.

۴. (۱۰۲/۱۸ ، ۴۱۰/۲۷)

۶. H_0 را رد می‌کنیم.

۹. ۰/۸۵

۱۰. ۰/۳۱

بخش دو صفحهٔ ۲۶۷

۱. (۷/۹۵- ، ۰/۰۵-)

۲. (۰/۱۵ ، ۲/۲۹)

۵. اگر σ_1 و σ_2 مجهول باشند:

$$2\overline{X}+3\overline{Y}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_p\sqrt{\frac{2}{m}+\frac{9}{n}}<2\mu_1+3\mu_2<2\overline{X}+3\overline{Y}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_p\sqrt{\frac{4}{m}+\frac{9}{m}}$$

۶. نمی‌توانیم H_0 را رد کنیم.

۸. نمی‌توانیم H_0 را رد کنیم.

۱۰. الف) نمی‌توانیم H_0 را رد کنیم.

ب) نمی‌توانیم H_0 را رد کنیم.

ج) (۱۸۵/۹۹ و ۳۷۵/۹۹-)

بخش سه صفحهٔ ۲۷۳

۱. H_0 رد می‌شود.

۲. (۰/۱۸۷۸ و ۰/۰۵۲۲)

۴. H_0 رد می‌شود

۵. نمی‌توانیم H_0 را رد کنیم.

فصل هشتم

بخش یک صفحهٔ ۲۸۲

۱. ۰/۲۴۵-

۲. ۰/۴۴۷

۵. خیر

۶. $X + Y = ۲$

۷. ۰/۹۵۹۴ ، خیر

۸. مقدار-$p = ۰/۲۹۸۱$

۹. (۰/۳۶۷ ، ۰/۶۱۴)

۱۰. $\mu_۱ \pm \mu_۲$ ، $\sigma_۱^۲ + \sigma_۲^۲ \pm ۲\rho\sigma_۱\sigma_۲$

بخش دو صفحهٔ ۲۹۲

۱. (۰/۴۴۵ ، ۱/۰۹۵)

۲. (۳۹/۰۹۷ ، ۲۲۱/۹۷۸)

۳. ۱۰۴/۶۹

۴. $\hat{b} = ۱/۴$ ، $\hat{a} = ۰/۸$ ، $\hat{a}^۲ = ۰/۱۳۳$

۵. $\hat{y} = ۰/۸ + ۱/۴x$

۶. ۵/۷

۷. $\hat{a}_۲ = ۰/۱۳۳$ ، $SSE = ۰/۴$

۸. (۰/۰۵۱ ، ۱/۱۳۶)

۹. $\hat{y} = ۳ - x$

۱۰. صفر

۱۴. $$\hat{m} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i Y_i}{\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲}$$

فصل نهم

بخش یک صفحهٔ ۲۹۲

۱. $V_k = ۶/۶۷ > \chi^۲_{۰/۹۵}(۱) = ۳/۸۴$ فرض ناریب بودن رد می‌شود.

۲. $V_k = ۱۶/۳۴۴ > \chi^۲_{۰/۹۵}(۳) = ۷/۸۱$ فرض آمیختگی رد می‌شود.

۳. $V_k = ۱۰ > \chi^۲_{۰/۹}(۴) = ۷/۷۸$ فرض یکنواخت بودن نمره‌ها رد می‌شود.

۵. $V_k = ۲۲/۷۵ > ۹/۴۹ = \chi^۲_{۰/۹۵}(۴)$ فرض نرمال بودن نمره‌ها رد می‌شود.

۶. $V_k = ۱/۸۹ < ۱۲/۶ = \chi^۲_{۰/۹۵}(۶)$ فرض پواسن بودن رد می‌شود.

بخش دو صفحهٔ ۳۰۳

۱. $V_k = ۴/۸ < \chi^۲_{۰/۹}(۷)$ فرض مستقل بودن سکه و تاس پذیرفته می‌شود.

۲. الف) $V_k = ۴/۰۴ < \chi^۲_{۰/۹}(۶) = ۱۰/۶$ فرض مستقل بودن سکه و تاس پذیرفته می‌شود.

ب) $V_k = ۳/۲۷ < \chi^۲_{۰/۹}(۴) = ۷/۷۸$ فرض مستقل بودن سکه و تاس پذیرفته می‌شود.

ج) $V_k = ۲/۴۹ < \chi^۲_{۰/۹}(۳) = ۶/۲۵$ فرض مستقل بودن سکه و تاس پذیرفته می‌شود.

۳. $V_k = ۱۰/۷۳ > \chi^۲_{۰/۹۵}(۱) = ۳/۸۴$ فرض صفر رد می‌شود.

بخش سه صفحهٔ ۳۰۶

۱. $\omega = u + v = ۰/۲۶۴ = \chi^۲_{۰/۹}(۱) = ۲۱۷۱$ فرض همتوزیع بودن رد نمی‌شود.

۲. $Z = -۰/۵۴ > z_{۰/۰۵} = -۱/۶۴۵$ فرض صفر رد نمی‌شود.

۳. $\omega = u + v = ۲/۲۱۰ < \chi^۲_{۰/۹}(۲) = ۴/۶۱$ فرض همتوزیع بودن رد نمی‌شود.

واژه نامه فارسی به انگلیسی

آ

آزمایش، ۶۹	Experiment
آزمایش تصادفی، ۶۹	Random Experiment
آزمون، ۲۳۲	Test
آزمون برازندگی، ۲۹۵	Goodness of Fit Test
آمار، ۱۷	Statistics
آمار توصیفی، ۱۷	Descriptive Statistics
آماره، ۲۱۷	Statistic
اجتماع، ۷۱	Union
احتمال، ۶۸	Probability
احتمال پسین، ۱۲۲	Posterior Probability
احتمال پیشین، ۱۲۲	Prior Probability
احتمال شرطی، ۱۱۳	Conditional Probability
استرلینگ (۱۷۷۰-۱۶۹۲) ریاضیدان انگلیسی، ۹۳	Stirling, J.
استقرا، ۲۱۵	Induction
استوینز استاد روانشناسی دانشگاه هاروارد، ۱۹	Stevens, S.S
اشتراک، ۷۲	Intersection
امید، انتظار، ۱۶۳	Expectation
انحراف، ۵۰	Deviation
انحراف معیار ۳۸، ۵۱، ۱۷۷	Standard Deviation
اندازه‌گیری، ۱۹	Measuring

ب

با پایان، ۷۴	Finite
با معنائی، ۲۳۷	Significance
بخت پولی، ۸۱	Odds
برآورد، تخمین، ۲۱۷	Estimate
برآورد راستنمائی ماکزیمم، ۲۲۴	MLE
برآوردیاب، برآوردگر، برآورد کننده، ۲۱۷	Estimator
برآوردیابی، ۲۱۷	Estimation
برجستگی، ۵۸	Kurtosis
برد، ۵۰	Range
برل (۱۹۵۶-۱۸۸۸) ریاضیدان فرانسوی، ۱۰۶	Borel
برگشت، رگرسیون، ۲۷۵، ۲۹۴	Regression
برنولی، (۱۷۰۵-۱۶۵۴) ریاضیدان سویسی، ۱۹۲	Bernoulli, J.
بول (۱۸۶۴-۱۸۱۵) ریاضیدان انگلیسی، ۱۱۲	Boole, G.
بونفرونی، احتمال دان، ۱۱۲	Bonferoni,
به تصادف، ۱۳۵	At random
بی‌پایان، ۷۴	Infinite
بیز (۱۷۶۱-۱۷۰۱) کشیش و فیلسوف انگلیسی، ۱۱۸	Bayes, T

پ

پاسکال، (۱۶۶۲-۱۶۲۳) ریاضیدان فرانسوی، ۶۸	Pascal
پواسن (۱۸۴۰-۱۷۸۱) ریاضیدان فرانسوی، ۱۹۷	Poisson, S.D.
پیرسن (۱۹۳۶-۱۸۷۵) آماردان انگلیسی، ۵۹، ۲۹۴	Pearson, K.
پیشامد، ۷۰	Event

ت

تابع توزیع، ۱۳۶	Distribution Function
تباهیده، ثابت، ۱۴۵	Degenerate
ترکیب، ۹۲	Combination

ترکیب خطی، ۱۷۰	Linear Combination
تصحیح پیوستگی، ۲۰۹	Continuity Correction
تفاضل، ۷۲	Difference
تفاضل متقارن، ۷۲	Symmetric Difference
توان، ۲۳۴	Power
توان دوم کی، ۲۴۴	Chi - square
توزیع آمیخته، ۱۴۵، ۱۵۶	Mixed Distribution
توکی، آماردان آمریکائی، ۶۱	Tuky, J.W.

ج

جایگشت، ۹۰	Permutation
جدا، ۱۲۶	Disjoint
جدول، ۲۴	Table
چارک، ۴۰	Quartile
چبیچف، (۱۸۲۱-۱۸۹۱) ریاضیدان روسی، ۱۷۹	Chebychev
چگالی، ۱۴۸	Density
چگالی توام، ۱۵۸	Joint Density
چندک، ۴۰	Quantile
چولگی، ۵۸	Skewness
چوله، ۴۶	Skewed

خ

خطاها، ۲۳۳	Errors
خطای تصادفی، ۲۸۷	Random Error
خینشین (۱۸۹۲-۱۹۵۹) ریاضیدان روسی، ۲۲۰	Khinchine, A.

د

داده، ۲۲	Datum
داده‌ها، ۲۲	Data
داده‌های استاندارد، ۵۴	Standard Data

داده‌های پیوسته، ۲۲	Continuous Data
داده‌های تبدیل شده، ۵۲	Coded Data
داده‌ها گسسته جدا، ۲۲	Discrete Data
دانشمند ایتالیائی (۱۵۰۱-۱۵۷۶)، ۶۸	Cardan,
درجه آزادی، ۲۴۴	Degrees of Freedom
دو جمله‌ای، ۱۹۳	Binomial
دو موآور (۱۶۶۷-۱۷۵۴) ریاضیدان فرانسوی، ۲۰۶	De Moire, A.
دو نمائی، ۴۵	Bimodal
دهک، ۴۰	Decile

ر

راستنمائی، درستنمائی، ۲۲۴	Likelihood
راستنمای ماکزیمم، ۲۲۴	Maximum Likelihood
رخ دادن، ۷۵	Occur
روش گشتاوری، ۲۱۹	Moment Method

س

سر راست کردن، رند کردن، ۲۲	Rounding

ش

شانس، اقبال، ۶۸	Chance
شخصی، ۸۰	Personal
شمارش، ۸۸	Counting

ص

صدک، ۴۰	Percentile

ض

ضریب اطمینان، ۲۳۰	Confidence Coefficient
ضریب تغییر، ۵۵	Coefficient of Variation

ف	
فاصله اطمینان، ۲۲۸	Confidence Interval
فراوانی، ۲۵	Frequency
فراوانی انباشته، ۲۵	Cumulative Frequency
فراوانی مشاهده شده، ۲۹۵	Obsered Frequency
فراوانی مورد انتظار، ۲۹۶	Expected Frequency
فراوانی نسبی، ۲۵	Relative Frequency
فرما، (۱۶۶۵-۱۶۰۱) ریاضیدان فرانسوی، ۶۸	Ferma,
فضای نمونه، ۷۰	Sample Space
فیشر (۱۹۶۲-۱۸۹۰) آماردان انگلیسی، ۲۷۹، ۶۷	Fisher, R.A.
ق	
قضیه حد مرکزی، ۲۰۶	Central Limit Theorem
قیاس، ۲۱۵	Deduction
ک	
کریش ریاضیدان انگلیسی، ۷۹	Kerrich, J
کمترین توانهای دوم، ۲۸۵	Least Sum of the Square (LSS)
کواریانس، همپراش، ۱۸۰	Covariance
کولموگروف، (۱۹۸۷-۱۹۰۳) ریاضیدان روسی، ۶۸	Kolomogrov
گ	
گالیله، (۱۶۴۲-۱۵۶۴) دانشمند ایتالیائی، ۶۸	Galileo
گشتاور، ۵۸	Moment
گشتاور مرکزی، ۵۸	Central Moment
ل	
لهمن آماردان آمریکائی، ۲۳۷	Lehmann
م	
مارکف (۱۹۲۲-۱۸۵۶) ریاضیدان روسی، ۱۷۹	Markow, A.

دارد، ۱۷۷	Standard Variable
سته، ۱۳۵	Continuous Variable
ادفی، ۱۳۲	Random Variable
رهی، ۲۱	Categorical Variable
سته، جدا، ۱۳۵	Discrete Variable
۷۶	Complement
، ۱۲۴	Independent
، یافته، ۲۱۶	Observed Value
، ۳۶	Average
توافقی، ۳۶	Harmonic Mean
وزنی، با ضریب، ۳۶	Weighted Average
پراکندگی، ۴۹	Dispersion Measure
تمرکز، مرکزی، میانی، ۳۵	Central Measure
، ۲۳۷	P-value
ن اسمی، ۱۹	Nominal Scale
ن ترتیبی، ۲۰	Ordinal Scale
ن سازی، ۱۹	Scaling
ن فاصله‌ای، ۲۰	Interval Scale
ن نسبتی، ۲۱	Ratio Scale
نی، ۳۱	Curve
نی فراوانی، ۳۱	Frequency Curve
نی نرمال، ۳۲	Normal Curve
گین، ۱۶۴، ۳۶	Mean
گین اصلاح شده، ۴۷	Trimmed Mean
گین حسابی، ۳۶	Arithmetic Mean
گین ریشه‌ای، ۳۷	Square Root Mean
نگین سه چارکی، ۴۰	Tripartile Mean
نگین هندسی، ۳۶	Geometric Mean
انه، ۳۷	Median

میدان سیگما، ۱۰۵	Sigma Field

ن

ناحیه بحرانی، ۲۳۳	Critical Region
نتیجه‌گیری، استنباط، برداشت، ۲۱۴	Inference
نرمال استاندارد، ۳۴	Standard Normal
نرمال توام، ۲۸۳	Bivariate Normal
نسبت، ۲۶۸	Proportion
نما، ۴۳	Mode
نمودار، ۳۰	Graph
نمودار جعبه‌ای، ۶۴	Box Plot
نمودار ساقه‌ای، ۶۱	Stem Graph
نمونه تصادفی، ۲۱۶	Random Sample

و

واریانس، پراش، ۵۱، ۱۷۵	Variance
واریانس آمیخته، ۲۴۹	Pooled Variance

ه

هانتر، آماردان آمریکائی، ۶۳	Hunter
همبستگی، ۱۸۵	Correlation
هستوگرام، همبند، ۳۰	Histogram
همشانسی، ۷۷	Equally Likelihood
همتوزیع، ۱۴۶	Identically Distributed

ی

یکنواخت، ۸۲	Uniform

واژه نامه انگلیسی به فارسی

A

Arithmatic mean	میانگین حسابی، ۳۶
At random	به تصادف، ۱۳۵
Average	معدل، ۳۶

B

Bayes, T	بیز (۱۷۶۱-۱۷۰۱) فیلسوف و کشیش انگلیسی، ۱۱۸
Bernoulli, J	برنولی (۱۷۰۵-۱۶۵۴)، ۱۹۲
Bimodal	دو نمایی، ۴۵
Binomial	دو جمله‌ای، ۱۹۳
Bivariate Normal	نرمال توام، ۲۸۳
Bonferroni	بونفرونی احتمال دان، ۱۱۲
Boole, G	بول (۱۸۶۴-۱۸۱۵) ریاضیدان انگلیسی، ۱۱۲
Borel	برل (۱۹۵۶-۱۱۸۸) ریاضیدان فرانسوی، ۱۰۶
Box Plot	نمودار جعبه‌ای، ۶۴

C

Cardan	دانشمند ایتالیایی (۱۵۷۶-۱۵۰۱)، ۶۸
Categorical Variable	متغیر گروهی، ۲۱
Central Limit Theorem	قضیه حد مرکزی، ۲۰۶
Central Measure	معیار تمرکز، مرکزی، میانی، ۳۵
Central Moment	گشتاور مرکزی، ۵۸

شانس، اقبال، ۶۸	Chance
چبیچف (۱۸۹۱-۱۸۲۱) ریاضیدان روسی، ۱۷۹	Chebychev
توان دوم کی، ۲۴۴	Chi - square
داده‌های تبدیل شده، ۵۲	Coded Data
ضریب تغییر، ۵۵	Coefficent Of Variation
ترکیب، ۹۲	Combination
متمم، ۷۲	Complement
احتمال شرطی، ۱۱۳	Conditional Probability
ضریب اطمینان، ۲۳۰	Confidence Coefficient
فاصله اطمینان، ۲۲۸	Confidence Interval
تصحیح پیوستگی، ۲۰۹	Continuity Correction
داده‌های پیوسته، ۲۲	Continuous Data
متغیر پیوسته، ۱۳۵	Continuous Variable
همبستگی، ۱۸۵	Correlation
شمارش، ۸۸	Counting
کواریانس، همپراش، ۱۸۰	Covariance
ناحیه بحرانی، ۲۳۳	Critical Region
فراوانی انباشته، ۲۵	Cumulative Frequency
منحنی، ۳۱	Curve

D

داده‌ها، ۲۲	Data
داده، ۲۲	Datum
دهک، ۴۰	Decile
قیاس، ۲۱۵	Deduction
تباهیده، ثابت، ۱۲۵	Degenerate
درجه آزادی، ۲۴۴	Degrees Of Freedom
دو موآور (۱۷۵۴-۱۶۶۷) ریاضیدان فرانسوی، ۲۰۶	DeMoivre, A.
چگالی، ۱۴۸	Density

آمار توصیفی، ۱۷	Descriptive Statistics
انحراف، ۵۰	Deviation
تفاضل، ۷۲	Difference
داده‌های گسسته، جدا، ۲۲	Discrete Data
متغیر گسسته، جدا، ۱۳۵	Discrete Variable
جدا، ۱۲۶	Disjoint
معیار پراکندگی، ۴۹	Dispersion Measure
تابع توزیع، ۱۳۶	Distribution Function

E

همشانسی، ۷۷	Equally Likelihood
خطاها، ۲۳۳	Errors
برآورد، تخمین، ۲۱۷	Estimate
برآوردیابی، ۲۱۷	Estimation
برآوردیاب، برآوردگر، برآورد کننده، ۲۱۷	Estimator
پیشامد، ۷۰	Event
امید، انتظار، ۱۶۳	Expectation
فراوانی مورد انتظار، ۲۹۶	Expected Frequency
آزمایش، ۶۹	Experiment

F

فرما، ریاضیدان فرانسوی (۱۶۶۵-۱۶۰۱)، ۶۸	Ferma
باپایان، ۷۴	Finite
فیشر (۱۹۶۲-۱۸۹۰) آماردان انگلیسی، ۲۷۹، ۶۷	Fisher, R.A.
فراوانی، ۲۵	Frequency
منحنی فراوانی، ۳۱	Frequency Curve

G

گالیله، دانشمند ایتالیایی (۱۶۴۲-۱۵۶۴)، ۶۸	Galileo
میانگین هندسی، ۳۶	Gemetric Mean

Goodness of Fit Test	آزمون برازندگی، ۲۹۵
Graph	نمودار، ۳۰

H

Harmonic Mean	معدل توافقی، ۳۶
Histogram	هیستوگرام، همبند، ۳۰
Hunter	هانتر، آماردان آمریکایی، ۶۳

I

Identically Distributed	همتوزیع، ۱۴۶
Independent	مستقل، ۱۲۴
Induction	استقرا، ۲۱۵
Inference	نتیجه‌گیری، استنباط، برداشت، ۲۱۴
Infinite	بی‌پایان، ۷۴
Intersection	اشتراک، ۷۲
Interval Scale	مقیاس فاصله‌ای، ۲۰

J

Joint Density	چگالی توأم، ۱۵۸

K

Kerrich, J	کریش، ریاضیدان انگلیسی، ۷۹
Khinchine, A.	خینشین (۱۹۵۹-۱۸۹۲) ریاضیدان روسی، ۲۲۰
Kolomogrov	کولموگروف، ریاضیدان روسی (۱۹۸۷-۱۹۰۳)، ۶۸
Kurtosis	برجستگی، ۵۸

L

Least Sum Of The Square (LSS)	کمترین توانهای دوم، ۲۸۵
Lehmann	لهمن آماردان آمریکایی، ۲۳۷
Likelihood	راستنمایی، درستنمایی، ۲۲۴
Linear Combination	ترکیب خطی، ۱۷۰

M

Markov, A.	مارکف (۱۹۹۲-۱۸۵۶) ریاضیدان روسی، ۱۷۹
Maximum Likelihood	راستنمایی ماکزیمم، ۲۲۴
Mean	میانگین، ۱۶۴، ۳۶
Measuring	اندازه‌گیری، ۱۹
Median	میانه، ۳۷
Mixed Distribution	توزیع آمیخته، ۱۴۵، ۱۵۶
MLE	برآورد درستنمایی ماکزیمم، ۲۲۴
Mode	نما، ۴۳
Moment	گشتاور، ۵۸
Moment Method	روش گشتاوری، ۲۱۹

N

Nominal Scale	مقیاس اسمی، ۱۹
Normal Curve	منحنی نرمال، ۳۲

O

Observed Frequency	فراوانی مشاهده شده، ۲۹۵
Observed Value	یافته، مشاهده، ۲۱۶
Occur	رخ دادن، ۷۰
Odds	بخت پولی، ۸۱
Ordinal Scale	مقیاس ترتیبی، ۲۰

P

Pascal	پاسکال، ریاضیدان فرانسوی (۱۶۶۲-۱۶۲۳)، ۶۸
Pearson, K.	پیرسن (۱۹۳۶-۱۸۵۷) آماردان انگلیسی، ۵۹، ۲۹۴
Percentile	صدک، ۴۰
Permutation	جایگشت، ۹۰
Personal	شخصی، ۸۰
Prior Probability	احتمال پیشین، ۱۲۲

Probability	احتمال، ۶۸
Preprotion	نسبت، ۲۶۸
Poisson, S.D.	پواسن (۱۸۴۰-۱۷۸۱) ریاضیدان فرانسوی، ۱۹۷
Pooled Variance	واریانس آمیخته، ۲۴۹
Posterior Probability	احتمال پسین، ۱۲۲
Power	توان، ۲۳۴
P - Value	مقدار P - مقدار احتمال، ۲۳۷

Q

Quantile	چندک، ۴۰
Quartile	چارک، ۴۰

R

Random Error	خطای تصادفی، ۲۸۷
Random Experiment	آزمایش تصادفی، ۶۹
Random Sample	نمونه تصادفی، ۲۱۶
Random Variable	متغیر تصادفی، ۱۳۲
Range	برد، ۵۰
Ratio Scale	مقیاس نسبتی، ۲۱
Regression	برگشت، رگرسیون، ۲۷۵، ۲۹۴
Relative Frequency	فراوانی نسبی، ۲۵
Rounding	سر راست کردن، رند کردن، ۲۲

S

Sample	فضای نمونه، ۷۰
Scaling	مقیاس سازی، ۱۹
Sigma Field	میدان سیگما، ۱۰۵
Significance	با معنایی، ۲۳۷
Skewed	چوله، ۴۶
Skewness	چولگی، ۵۸

Square Root Mean	میانگین ریشه‌ای، ۳۷
Standard Data	داده‌های استاندارد، ۵۴
Standard Deviation	انحراف معیار، ۵۱، ۱۷۷
Standard Normal	نرمال استاندارد، ۳۴
Standard Variable	متغیر استاندارد، ۱۷۷
Statistic	آمار، ۲۱۷
Statistics	آماره، ۱۷
Stem Graph	نمودار ساقه‌ای، ۶۱
Stevens, S.S.	استیونز، استاد روانشناسی دانشگاه هاروارد، ۱۹
Stirling	استرلینگ (۱۷۷۰-۱۶۹۲) ریاضیدان انگلیسی، ۹۳
Symmetric Difference	تفاضل متقارن، ۷۲

T

Table	جدول، ۲۴
Test	آزمون، ۲۳۲
Trimmed Mean	میانگین اصلاح شده، ۴۷
Triquartile Mean	میانگین سه چارکی، ۴۰
Tuky, J.W.	توکی، آماردان آمریکایی، ۶۱

U

Uniform	یکنواخت، ۸۲
Union	اجتماع، ۷۱

V

Variance	واریانس، پراش، ۵۱، ۱۷۵

W

Weighted Average	معدل وزنی، با ضریب، ۳۶

جدول ۱ - توزیع ۲ جمله‌ای

n	r	p = 0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
5	0	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.0778	0.0312	0.0102	0.0024	0.0003	0.0000
	1	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.3370	0.1875	0.0870	0.0308	0.0067	0.0005
	2	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.6826	0.5000	0.3174	0.1631	0.0579	0.0086
	3	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9130	0.8125	0.6630	0.4718	0.2627	0.0815
	4	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9898	0.9688	0.9222	0.8319	0.6723	0.4095
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.3487	0.1074	0.0563	0.0282	0.0060	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7361	0.3758	0.2440	0.1493	0.0464	0.0107	0.0017	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9298	0.6778	0.5256	0.3828	0.1673	0.0547	0.0123	0.0016	0.0001	0.0000
	3	0.9872	0.8791	0.7759	0.6496	0.3823	0.1719	0.0548	0.0106	0.0009	0.0000
	4	0.9984	0.9672	0.9219	0.8497	0.6331	0.3770	0.1662	0.0474	0.0064	0.0002
	5	0.9999	0.9936	0.9803	0.9527	0.8338	0.6230	0.3669	0.1503	0.0328	0.0016
	6	1.0000	0.9991	0.9965	0.9894	0.9452	0.8281	0.6177	0.3504	0.1209	0.0128
	7	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9877	0.9453	0.8327	0.6172	0.3222	0.0702
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9893	0.9536	0.8507	0.6242	0.2639
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9940	0.9718	0.8926	0.6513
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	0.2059	0.0352	0.0134	0.0047	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.5490	0.1671	0.0802	0.0353	0.0052	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.8159	0.3980	0.2361	0.1268	0.0271	0.0037	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9444	0.6482	0.4613	0.2969	0.0905	0.0176	0.0019	0.0001	0.0000	0.0000
	4	0.9873	0.8358	0.6865	0.5155	0.2173	0.0592	0.0094	0.0007	0.0000	0.0000
	5	0.9978	0.9389	0.8516	0.7216	0.4032	0.1509	0.0338	0.0037	0.0001	0.0000
	6	0.9997	0.9819	0.9434	0.8689	0.6098	0.3036	0.0951	0.0152	0.0008	0.0000
	7	1.0000	0.9958	0.9827	0.9500	0.7869	0.5000	0.2131	0.0500	0.0042	0.0000
	8	1.0000	0.9992	0.9958	0.9848	0.9050	0.6964	0.3902	0.1311	0.0181	0.0003
	9	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9662	0.8491	0.5968	0.2784	0.0611	0.0023
	10	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9907	0.9408	0.7827	0.4845	0.1642	0.0127
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9981	0.9824	0.9095	0.7031	0.3518	0.0556
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9963	0.9729	0.8732	0.6020	0.1841
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9948	0.9647	0.8329	0.4510
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9953	0.9648	0.7941
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	0.1216	0.0115	0.0032	0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3917	0.0692	0.0243	0.0076	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.6769	0.2061	0.0913	0.0355	0.0036	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.8670	0.4114	0.2252	0.1071	0.0160	0.0013	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9568	0.6296	0.4148	0.2375	0.0510	0.0059	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9887	0.8042	0.6172	0.4164	0.1256	0.0207	0.0016	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.9976	0.9133	0.7858	0.6080	0.2500	0.0577	0.0065	0.0003	0.0000	0.0000
	7	0.9996	0.9679	0.8982	0.7723	0.4159	0.1316	0.0210	0.0013	0.0000	0.0000
	8	0.9999	0.9900	0.9591	0.8867	0.5956	0.2517	0.0565	0.0051	0.0001	0.0000
	9	1.0000	0.9974	0.9861	0.9520	0.7553	0.4119	0.1275	0.0171	0.0006	0.0000
	10	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.8725	0.5881	0.2447	0.0480	0.0026	0.0000
	11	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9435	0.7483	0.4044	0.1133	0.0100	0.0001
	12	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9790	0.8684	0.5841	0.2277	0.0321	0.0004
	13	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9935	0.9423	0.7500	0.3920	0.0867	0.0024
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9984	0.9793	0.8744	0.5836	0.1958	0.0113
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9941	0.9490	0.7625	0.3704	0.0432
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9987	0.9840	0.8929	0.5886	0.1330
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9964	0.9645	0.7939	0.3231
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9924	0.9308	0.6083
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9885	0.8784
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

جدول ۲ - توزیع پواسن

r	μ = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6730	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
6							1.0000	1.0000	1.0000

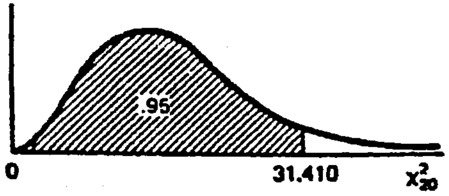
r	μ = 1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8		1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9			1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10				0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11				1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12					1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13						1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14							1.0000	0.9999	0.9998
15								1.0000	0.9999
16									1.0000

r	μ = 5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5
0	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008
2	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149
4	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403
5	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885
6	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649
7	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687
8	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918
9	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218
10	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453
11	0.9890	0.9799	0.9661	0.9466	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520
12	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364
13	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981
14	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400
15	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665
16	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911
18		1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9976	0.9957
19			1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980
20					1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991
21						1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
22							1.0000	0.9999	0.9999
23								1.0000	0.9999
24									1.0000

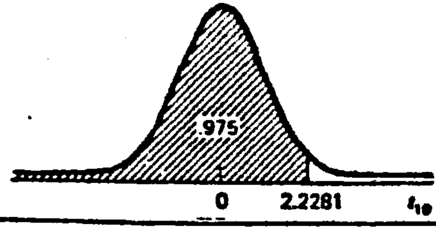
جدول ۳ - توزیع نرمال

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

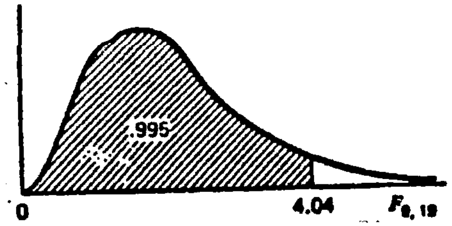
جدول ۴ - توزیع χ^2



درجه آزادی	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.20}$	$\chi^2_{.30}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.70}$	$\chi^2_{.80}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.995}$
1	.000	.000	.001	.004	.016	.064	.148	.455	1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.010	.020	.051	.103	.211	.446	.713	1.39	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.00	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.65	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.0	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	8.34	10.7	12.2	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	9.34	11.8	13.4	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	10.3	12.9	14.6	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	11.3	14.0	15.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	12.3	15.1	17.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.8	13.3	16.2	18.2	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.3	11.7	14.3	17.3	19.3	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.2	12.6	15.3	18.4	20.5	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.0	13.5	16.3	19.5	21.6	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	12.9	14.4	17.3	20.6	22.8	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.83	7.63	8.91	10.1	11.7	13.7	15.4	13.3	21.7	23.9	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	14.6	16.3	19.3	22.8	25.0	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	15.4	17.2	20.3	23.9	26.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	16.3	18.1	21.3	24.9	27.3	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	17.2	19.0	22.3	26.0	28.4	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	18.1	19.9	23.3	27.1	29.6	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	18.9	20.9	24.3	28.2	30.7	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	19.8	21.8	25.3	29.2	31.8	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	20.7	22.7	26.3	30.3	32.9	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	21.6	21.6	27.3	31.4	34.0	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	22.5	24.6	28.3	32.5	35.1	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	23.4	25.5	29.3	33.5	36.2	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.1	24.4	26.5	29.0	32.3	34.9	39.3	44.2	47.3	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.3	34.8	37.7	41.3	44.3	49.3	54.7	58.2	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	50.6	53.8	59.3	65.2	69.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0



درجه آزادی	$t_{.55}$	$t_{.60}$	$t_{.65}$	$t_{.70}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.9995}$
1	.158	.325	.510	.727	1.00	1.38	1.96	3.08	6.31	12.7	31.8	63.7	637
2	.142	.289	.445	.617	.816	1.06	1.39	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	31.6
3	.137	.277	.424	.584	.765	.978	1.25	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	12.9
4	.134	.271	.414	.569	.741	.941	1.19	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	8.61
5	.132	.267	.408	.559	.727	.920	1.16	1.48	2.01	2.57	3.36	4.03	6.86
6	.131	.265	.404	.553	.718	.906	1.13	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.96
7	.130	.263	.402	.549	.711	.896	1.12	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50	5.40
8	.130	.262	.399	.546	.706	.889	1.11	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	5.04
9	.129	.261	.398	.543	.703	.883	1.10	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.78
10	.129	.260	.397	.542	.700	.879	1.09	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.59
11	.129	.260	.396	.540	.697	.876	1.09	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.44
12	.128	.259	.395	.539	.695	.873	1.08	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06	4.32
13	.128	.259	.394	.538	.694	.870	1.08	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	4.22
14	.128	.258	.393	.537	.692	.868	1.08	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98	4.14
15	.128	.258	.393	.536	.691	.866	1.07	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	4.07
16	.128	.258	.392	.535	.690	.865	1.07	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	4.02
17	.128	.257	.392	.534	.689	.863	1.07	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.96
18	.127	.257	.392	.534	.688	.862	1.07	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.92
19	.127	.257	.391	.533	.688	.861	1.07	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.88
20	.127	.257	.391	.533	.687	.860	1.06	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84	3.85
21	.127	.257	.391	.532	.686	.859	1.06	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.82
22	.127	.256	.390	.532	.686	.858	1.06	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.79
23	.127	.256	.390	.532	.685	.858	1.06	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.77
24	.127	.256	.390	.531	.685	.857	1.06	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.74
25	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.06	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79	3.72
26	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.06	1.32	1.70	2.06	2.48	2.78	3.71
27	.127	.256	.389	.531	.684	.855	1.06	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.69
28	.127	.256	.389	.530	.683	.855	1.06	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.67
29	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.05	1.31	1.70	2.04	2.46	2.76	3.66
30	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.05	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.65
∞	.126	.253	.385	.524	.674	.842	1.04	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.29



$\alpha = .10$

$m_2 \backslash m_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	39.864	49.500	53.593	55.833	57.241	58.204	58.906	59.439	59.858
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3427	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400
4	4.5448	4.3246	4.1908	4.1073	4.0506	4.0098	3.9790	3.9549	3.9357
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163
6	3.7760	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7265	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473
11	3.2252	2.8595	2.6602	2.5362	2.4512	2.3891	2.3416	2.3040	2.2735
12	3.1765	2.8068	2.6055	2.4801	2.3940	2.3310	2.2828	2.2446	2.2135
13	3.1362	2.7632	2.5603	2.4337	2.3467	2.2830	2.2341	2.1953	2.1638
14	3.1022	2.7265	2.5222	2.3947	2.3069	2.2426	2.1931	2.1539	2.1220
15	3.0732	2.6952	2.4898	2.3614	2.2730	2.2081	2.1582	2.1185	2.0862
16	3.0481	2.6682	2.4618	2.3327	2.2438	2.1783	2.1280	2.0880	2.0553
17	3.0262	2.6446	2.4374	2.3077	2.2183	2.1524	2.1017	2.0613	2.0284
18	3.0070	2.6239	2.4160	2.2858	2.1958	2.1296	2.0785	2.0379	2.0047
19	2.9899	2.6056	2.3970	2.2663	2.1760	2.1094	2.0580	2.0171	1.9836
20	2.9747	2.5893	2.3801	2.2489	2.1582	2.0913	2.0397	1.9985	1.9649
21	2.9609	2.5746	2.3649	2.2333	2.1423	2.0751	2.0232	1.9819	1.9480
22	2.9486	2.5613	2.3512	2.2193	2.1279	2.0605	2.0084	1.9668	1.9327
23	2.9374	2.5493	2.3387	2.2065	2.1149	2.0472	1.9949	1.9531	1.9189
24	2.9271	2.5383	2.3274	2.1949	2.1030	2.0351	1.9826	1.9407	1.9063
25	2.9177	2.5283	2.3170	2.1843	2.0922	2.0241	1.9714	1.9292	1.8947
26	2.9091	2.5191	2.3075	2.1745	2.0822	2.0139	1.9610	1.9188	1.8841
27	2.9012	2.5106	2.2987	2.1655	2.0730	2.0045	1.9515	1.9091	1.8743
28	2.8939	2.5028	2.2906	2.1571	2.0645	1.9959	1.9427	1.9001	1.8652
29	2.8871	2.4955	2.2831	2.1494	2.0566	1.9878	1.9345	1.8918	1.8560
30	2.8807	2.4887	2.2761	2.1422	2.0492	1.9803	1.9269	1.8841	1.8498
40	2.8354	2.4404	2.2261	2.0909	1.9968	1.9269	1.8725	1.8289	1.7929
60	2.7914	2.3932	2.1774	2.0410	1.9457	1.8747	1.8194	1.7748	1.7380
120	2.7478	2.3473	2.1300	1.9923	1.8959	1.8238	1.7675	1.7220	1.6843
∞	2.7055	2.3026	2.0838	1.9449	1.8473	1.7741	1.7167	1.6702	1.6315

$\alpha = .10$

10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
60.195	60.705	61.220	61.740	62.002	62.265	62.529	62.794	63.061	63.328
9.3916	9.4081	9.4247	9.4413	9.4496	9.4579	9.4663	9.4746	9.4829	9.4913
5.2304	5.2156	5.2003	5.1845	5.1764	5.1681	5.1597	5.1512	5.1425	5.1337
3.9199	3.8955	3.8689	3.8443	3.8310	3.8174	3.8036	3.7896	3.7753	3.7607
3.2974	3.2682	3.2380	3.2067	3.1905	3.1741	3.1573	3.1402	3.1228	3.1050
2.9369	2.9047	2.8712	2.8363	2.8183	2.8000	2.7812	2.7620	2.7423	2.7222
2.7025	2.6681	2.6322	2.5947	2.5753	2.5555	2.5351	2.5142	2.4928	2.4708
2.5380	2.5020	2.4642	2.4246	2.4041	2.3830	2.3614	2.3391	2.3162	2.2926
2.4163	2.3789	2.3396	2.2983	2.2768	2.2547	2.2320	2.2085	2.1843	2.1592
2.3226	2.2841	2.2435	2.2007	2.1784	2.1554	2.1317	2.1072	2.0818	2.0554
2.2482	2.2087	2.1671	2.1230	2.1000	2.0762	2.0516	2.0261	1.9997	1.9721
2.1878	2.1474	2.1049	2.0597	2.0360	2.0115	1.9861	1.9597	1.9323	1.9036
2.1376	2.0966	2.0532	2.0070	1.9827	1.9576	1.9315	1.9043	1.8759	1.8462
2.0954	2.0537	2.0095	1.9625	1.9377	1.9119	1.8852	1.8572	1.8280	1.7973
2.0593	2.0171	1.9722	1.9243	1.8990	1.8728	1.8454	1.8168	1.7867	1.7551
2.0281	1.9854	1.9399	1.8913	1.8656	1.8388	1.8108	1.7816	1.7507	1.7182
2.0009	1.9577	1.9117	1.8624	1.8362	1.8090	1.7805	1.7506	1.7191	1.6856
1.9770	1.9333	1.8868	1.8368	1.8103	1.7827	1.7537	1.7232	1.6910	1.6567
1.9557	1.9117	1.8647	1.8142	1.7873	1.7592	1.7298	1.6988	1.6659	1.6308
1.9367	1.8924	1.8449	1.7938	1.7667	1.7382	1.7083	1.6768	1.6433	1.6074
1.9197	1.8750	1.8272	1.7756	1.7481	1.7193	1.6890	1.6569	1.6228	1.5862
1.9043	1.8593	1.8111	1.7590	1.7312	1.7021	1.6714	1.6389	1.6042	1.5668
1.8903	1.8450	1.7964	1.7439	1.7159	1.6864	1.6554	1.6224	1.5871	1.5490
1.8775	1.8319	1.7831	1.7302	1.7019	1.6721	1.6407	1.6073	1.5715	1.5327
1.8658	1.8200	1.7708	1.7175	1.6890	1.6589	1.6272	1.5934	1.5570	1.5176
1.8550	1.8090	1.7596	1.7059	1.6771	1.6468	1.6147	1.5805	1.5437	1.5036
1.8451	1.7989	1.7492	1.6951	1.6662	1.6356	1.6032	1.5686	1.5313	1.4906
1.8359	1.7895	1.7395	1.6852	1.6560	1.6252	1.5925	1.5575	1.5198	1.4784
1.8274	1.7808	1.7306	1.6759	1.6465	1.6155	1.5825	1.5472	1.5090	1.4670
1.8195	1.7727	1.7223	1.6673	1.6377	1.6065	1.5732	1.5376	1.4989	1.4564
1.7627	1.7146	1.6624	1.6052	1.5741	1.5411	1.5056	1.4672	1.4248	1.3769
1.7070	1.6574	1.6034	1.5435	1.5107	1.4755	1.4373	1.3952	1.3476	1.2915
1.6524	1.6012	1.5450	1.4821	1.4472	1.4094	1.3676	1.3203	1.2646	1.1926
1.5987	1.5458	1.4871	1.4206	1.3832	1.3419	1.2951	1.2400	1.1686	1.0000

$\alpha = .05$

m_2 \ m_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385
3	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8868	8.8452	8.8123
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3883	6.2560	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2066	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8378	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8626	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3808	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3513	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3661
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9751	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2782	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0848	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2540	2.1665	2.0970	2.0401
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2900	2.1750	2.0867	2.0164	1.9588
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

$\alpha = .05$

10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.09	251.14	252.20	253.25	254.32
19.396	19.413	19.429	19.446	19.454	19.462	19.471	19.479	19.487	19.496
8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.5720	8.5494	8.5265
5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.7170	5.6878	5.6581	5.6281
4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3984	4.3650
4.0600	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6688
3.6365	3.5747	3.5108	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
3.3472	3.2840	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
2.9782	2.9130	2.8450	2.7740	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.6090	2.5705	2.5309	2.4901	2.4480	2.4045
2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.3410	2.2962
2.6710	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
2.6021	2.5342	2.4630	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2230	2.1778	2.1307
2.5437	2.4753	2.4035	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.1040	2.0584	2.0107	1.9604
2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
2.3779	2.3080	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9796	1.9302	1.8780
2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
2.3210	2.2504	2.1757	2.0960	2.0540	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.9380	1.8895	1.8380	1.7831
2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.0050	1.9605	1.9139	1.8649	1.8128	1.7570
2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.9390	1.8920	1.8424	1.7897	1.7331
2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.7110
2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.9010	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7307	1.6717
2.1900	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6377
2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
1.9926	1.9174	1.8364	1.7480	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.4290	1.3519	1.2539
1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.3940	1.3180	1.2214	1.0000

$\alpha = .01$

$m_2 \backslash m_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052.2	4999.5	5403.3	5624.6	5763.7	5859.0	5928.3	5981.6	6022.5
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.332	99.356	99.374	99.388
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158
6	13.745	10.925	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1016	7.9761
7	12.246	9.5466	8.4513	7.8467	7.4604	7.1914	6.9928	6.8401	6.7188
8	11.259	8.6491	7.5910	7.0060	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106
9	10.561	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511
10	10.044	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424
11	9.6460	7.2057	6.2167	5.6683	5.3160	5.0692	4.8861	4.7445	4.6315
12	9.3302	6.9266	5.9526	5.4119	5.0643	4.8206	4.6395	4.4994	4.3875
13	9.0738	6.7010	5.7394	5.2053	4.8616	4.6204	4.4410	4.3021	4.1911
14	8.8616	6.5149	5.5639	5.0354	4.6950	4.4558	4.2779	4.1399	4.0297
15	8.6831	6.3589	5.4170	4.8932	4.5556	4.3183	4.1415	4.0045	3.8948
16	8.5310	6.2262	5.2922	4.7726	4.4374	4.2016	4.0259	3.8896	3.7804
17	8.3997	6.1121	5.1850	4.6690	4.3359	4.1015	3.9267	3.7910	3.6822
18	8.2854	6.0129	5.0919	4.5790	4.2479	4.0146	3.8406	3.7054	3.5971
19	8.1850	5.9259	5.0103	4.5003	4.1708	3.9386	3.7653	3.6305	3.5225
20	8.0960	5.8489	4.9382	4.4307	4.1027	3.8714	3.6987	3.5644	3.4567
21	8.0166	5.7804	4.8740	4.3688	4.0421	3.8117	3.6396	3.5056	3.3981
22	7.9454	5.7190	4.8166	4.3134	3.9880	3.7583	3.5867	3.4530	3.3458
23	7.8811	5.6637	4.7649	4.2635	3.9392	3.7102	3.5390	3.4057	3.2986
24	7.8229	5.6136	4.7181	4.2184	3.8951	3.6667	3.4959	3.3629	3.2560
25	7.7698	5.5680	4.6755	4.1774	3.8550	3.6272	3.4568	3.3239	3.2172
26	7.7213	5.5263	4.6366	4.1400	3.8183	3.5911	3.4210	3.2884	3.1818
27	7.6767	5.4881	4.6009	4.1056	3.7848	3.5580	3.3882	3.2558	3.1494
28	7.6356	5.4529	4.5681	4.0740	3.7539	3.5276	3.3581	3.2259	3.1195
29	7.5976	5.4205	4.5378	4.0449	3.7254	3.4995	3.3302	3.1982	3.0920
30	7.5625	5.3904	4.5097	4.0179	3.6990	3.4735	3.3045	3.1726	3.0665
40	7.3141	5.1785	4.3126	3.8283	3.5138	3.2910	3.1238	2.9930	2.8876
60	7.0771	4.9774	4.1259	3.6491	3.3389	3.1187	2.9530	2.8233	2.7185
120	6.8510	4.7865	3.9493	3.4796	3.1735	2.9559	2.7918	2.6629	2.5586
∞	6.6349	4.6052	3.7816	3.3192	3.0173	2.8020	2.6393	2.5113	2.4073

$\alpha = .01$

10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
6055.8	6106.3	6157.3	6208.7	6234.6	6260.7	6286.8	6313.0	6339.4	6366.0
99.399	99.416	99.432	99.449	99.458	99.466	99.474	99.483	99.491	99.501
27.229	27.052	26.872	26.690	26.598	26.505	26.411	26.316	26.221	26.125
14.546	14.374	14.198	14.020	13.929	13.838	13.745	13.652	13.558	13.463
10.051	9.8883	9.7222	9.5527	9.4665	9.3793	9.2912	9.2020	9.1118	9.0204
7.8741	7.7183	7.5590	7.3958	7.3127	7.2285	7.1432	7.0568	6.9690	6.8801
6.6201	6.4691	6.3143	6.1554	6.0743	5.9921	5.9084	5.8236	5.7372	5.6495
5.8143	5.6668	5.5151	5.3591	5.2793	5.1981	5.1156	5.0316	4.9460	4.8588
5.2565	5.1114	4.9621	4.8080	4.7290	4.6486	4.5667	4.4831	4.3978	4.3105
4.8492	4.7059	4.5582	4.4054	4.3269	4.2469	4.1653	4.0819	3.9965	3.9090
4.5393	4.3974	4.2509	4.0990	4.0209	3.9411	3.8596	3.7761	3.6904	3.6025
4.2961	4.1553	4.0096	3.8584	3.7805	3.7008	3.6192	3.5355	3.4494	3.3608
4.1003	3.9603	3.8154	3.6646	3.5868	3.5070	3.4253	3.3413	3.2548	3.1654
3.9394	3.8001	3.6557	3.5052	3.4274	3.3476	3.2656	3.1813	3.0942	3.0040
3.8049	3.6662	3.5222	3.3719	3.2940	3.2141	3.1319	3.0471	2.9595	2.8684
3.6909	3.5527	3.4089	3.2588	3.1808	3.1007	3.0182	2.9330	2.8447	2.7528
3.5931	3.4552	3.3117	3.1615	3.0835	3.0032	2.9205	2.8348	2.7459	2.6530
3.5082	3.3706	3.2273	3.0771	2.9990	2.9185	2.8354	2.7493	2.6597	2.5660
3.4338	3.2965	3.1533	3.0031	2.9249	2.8442	2.7608	2.6742	2.5839	2.4893
3.3682	3.2311	3.0880	2.9377	2.8594	2.7785	2.6947	2.6077	2.5168	2.4212
3.3098	3.1729	3.0299	2.8796	2.8011	2.7200	2.6359	2.5484	2.4568	2.3603
3.2576	3.1209	2.9780	2.8274	2.7488	2.6675	2.5831	2.4951	2.4029	2.3055
3.2106	3.0740	2.9311	2.7805	2.7017	2.6202	2.5355	2.4471	2.3542	2.2559
3.1681	3.0316	2.8887	2.7380	2.6591	2.5773	2.4923	2.4035	2.3099	2.2107
3.1294	2.9931	2.8502	2.6993	2.6203	2.5383	2.4530	2.3637	2.2695	2.1694
3.0941	2.9579	2.8150	2.6640	2.5848	2.5026	2.4170	2.3273	2.2325	2.1315
3.0618	2.9256	2.7827	2.6316	2.5522	2.4699	2.3840	2.2938	2.1984	2.0965
3.0320	2.8959	2.7530	2.6017	2.5223	2.4397	2.3535	2.2629	2.1670	2.0642
3.0045	2.8685	2.7256	2.5742	2.4946	2.4118	2.3253	2.2344	2.1378	2.0342
2.9791	2.8431	2.7002	2.5487	2.4689	2.3860	2.2992	2.2079	2.1107	2.0062
2.8005	2.6648	2.5216	2.3689	2.2880	2.2034	2.1142	2.0194	1.9172	1.8047
2.6318	2.4961	2.3523	2.1978	2.1154	2.0285	1.9360	1.8363	1.7263	1.6006
2.4721	2.3363	2.1915	2.0346	1.9500	1.8600	1.7628	1.6557	1.5330	1.3805
2.3209	2.1848	2.0385	1.8783	1.7908	1.6964	1.5923	1.4730	1.3246	1.0000