سؤالات

معادلات دیفرانسیل ویژه دانشگاه علم و صنعت ایران

۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

از دستگاه زیر، فقط y را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} x'' + y' - \int_{0}^{t} y(\theta)d\theta = 0 \\ y'' + 2x' - y = 0 \end{cases} \quad , y(0) = 0 , y'(0) = 1 , x(0) = 1 , x'(0) = 0$$

۲ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

عبارت مقابل را محاسبه کنید.

$$L^{-1}\{\ln(\frac{s}{s+1}) + \frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}\}$$

۳ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

با استفاده از تبدیل لاپلاس، مقدار $\int_{0}^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^3} dx$ را محاسبه کنید.

۴ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

معادله زیر را به کمک روش سری‌های توانی حول نقطه $x = 0$، با فرض $x > 0$ حل کنید.

$$x(x+1)y'' + (1+5x)y' + 3y = 0$$

۵ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

معادله مقابل مفروض است: $y''' - 6y'' + 4y' + y = (x^2+1)e^{x} + e^{-x}\sin x + x^2 + 2x - 1$

الف) جواب عمومی معادله همگن متناظر آن را بیابید.

ب) فرم کلی جواب خصوصی را تعیین کنید.

۶ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

مطلوبست تعیین جواب خصوصی معادله $y''+y=f(x)$ که در آن

$$y(0)=y'(0)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases}4 & 0\le x\le 2\\ x+2 & x>2\end{cases}$$

۷ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

با توجه به شرایط $y(1)=0$ و $y'(1)=0$، جواب خصوصی معادله روبرو را بیابید. $x^2y''-xy'+y=2x$

۸ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۵-۱۳۹۴

معادله انتگرالی $y(0)=4\quad ,\quad y'=f(t)+\int_0^t y(t-u)\cos u\,du$ را حل کنید که در آن

$$f(t)=\begin{cases}0\ , & 0\le t<\pi\\ e^{t-\pi}\ , & t\ge\pi\end{cases}$$

۹ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۵-۱۳۹۴

مطلوب است محاسبه

الف) $\int_0^\infty e^{-2x}\frac{1-\cos 2x}{x}dx$

ب) $L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s(s+1)})\}$

ج) $L^{-1}\{\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}\}$

۱۰ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۵-۱۳۹۴

با استفاده از روش سری‌های توانی جواب معادلات دیفرانسیل زیر را حول نقطه $x=0$ به دست آورید.

$$2x^2(1-x)y''-x(1+7x)y'+y=0$$

۱۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۵-۱۳۹۴

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $y'''+2y''-3y'=x^2e^{-3x}+5x+3$

ب) $x^2y''+xy'-y=-2x^2\ln x$

۱۲ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۵-۱۳۹۴

از دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر فقط x را محاسبه نمایید.

$$\begin{cases}y''+x'=2\int_0^t y(u)du\\ x'+y'=2y\end{cases}$$

$$y(0)=x(0)=0\quad ,\quad y'(0)=1$$

۱۳ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

از دستگاه معادلات روبرو فقط تابع x را بیابید. $H(t-a)$ تـابع پله‌ای واحد در نقطه a می‌باشد.

$$\begin{cases} x'(t)+\int_{0}^{t} y(r)dr = H(t-1) \\ y'(t)+\int_{0}^{t} x(r)dr = H(t-2) \\ x(0)=y(0)=0 \end{cases}$$

۱۴ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

مقدار انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx$ را محاسبه نمایید.

۱۵ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$ را بیابید.

۱۶ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

جواب معادله دیفرانسیل روبه‌رو را با روش سری توابع حول نقطه $x=0$ به‌دست آورید. $4xy''+2y'+y=0$

۱۷ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

فرم جواب عمومی معادله روبه‌رو را بیابید. $y'''-3y''+3y'-y=e^{x}+\sin^{2}x$

۱۸ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

جواب عمومی معادله روبه‌رو را با اعمال تغییر متغیر $x=y^{2}$ بیابید. $x^{2}yy''+(y-xy')^{2}=0$

پاسخها

معادلات دیفرانسیل ویژه دانشگاه علم و صنعت ایران

۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

$$\begin{cases} x''+y'-\int_0^t y(\theta)d\theta=0 & (1) \\ y''+2x'-y=0 & (2) \end{cases} \quad ; \quad y(0)=0 \quad ; \quad y'(0)=1 \quad , \quad x(0)=1 \quad , \quad x'(0)=0$$

مشتق‌گیری از رابطه ۲ نسبت به x :

$$\rightarrow y'''+2x''-y'=0 \qquad (3)$$

$$\begin{cases} -2x''-2y'+2\int_0^t y(\theta)d\theta=0 & (4) \\ y'''+2x''-y'=0 & (3) \end{cases}$$

جمع روابط (۳) و (۴) $\rightarrow y'''-3y'+2\int_0^t y(\theta)d\theta=0 \qquad (5)$

مشتق‌گیری از رابطه (۵) نسبت به x $\Rightarrow y^{(4)}-3y''+2y=0 \xrightarrow{T} r^4-3r^2+2=0$:معادله مشخصه

$$\rightarrow (r^2-1)(r^2-2)=0 \rightarrow \begin{cases} r^2=1 \rightarrow r_1=1 \; ; \; r_2=-1 \\ r^2=2 \rightarrow r_3=\sqrt{2} \; ; \; r_4=-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$y=Ae^t+Be^{-t}+Ce^{\sqrt{2}t}+De^{-\sqrt{2}t}$$

$$\begin{cases} y(0)=0 \Rightarrow A+B+C+D=0 \\ y'(0)=0 \Rightarrow A-B+\sqrt{2}C-\sqrt{2}D=0 \end{cases}$$

۲ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

$$L^{-1}\left(\ln\left(\frac{s}{s+1}\right)+\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}\right)=L^{-1}\{\underbrace{\ln\left(\frac{s}{s+1}\right)}_{F_1(s)}\}+L^{-1}\{\underbrace{\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}}_{F_2(s)}\}$$

$$F_1(s)=\ln(\frac{s}{s+1})=\ln s-\ln(s+1)$$

$$L^{-1}(F'(s))=-tf(t) \qquad (*)$$

$$F_1'(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\xrightarrow{(*)}L^{-1}(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1})=-tf_1(t)\Rightarrow 1-e^{-t}=-tf_1(t)\Rightarrow f_1(t)=\frac{e^{-t}-1}{t}$$

$$F_2(s)=\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2} \qquad \Delta=16-20<0$$

$$s^2+4s+5=(s+2)^2+1\Rightarrow F_2(s)=\frac{s+2}{((s+2)^2+1)^2}$$

$$=e^{-2t}L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}=\frac{-e^{-2t}}{2}\{(\frac{1}{s^2+1})'\}=\frac{-e^{-2t}}{2}.t\sin t$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{\ln(\frac{s}{s+1})\}+L^{-1}\{\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}\}=\frac{e^{-t}-1}{t}-\frac{t}{2}\sin te^{-2t}$$

$$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^3}dx=I$$

تغییر متغیر : $x^3=u\rightarrow\begin{cases}x=U^{\frac{1}{3}}\\ dx=\frac{1}{3}U^{-\frac{2}{3}}\end{cases}\Rightarrow\int_0^\infty\sqrt{x}e^{-x^3}dx=\int_0^\infty U^{\frac{1}{6}}.e^{-U}.\frac{1}{3}U^{\frac{-2}{3}}du$

$$\rightarrow\int_0^\infty\frac{1}{3}U^{-\frac{1}{2}}.e^{-U}dU=I \quad ; \quad \begin{cases}x=0\rightarrow U=0\\ x\rightarrow\infty\Rightarrow U\rightarrow\infty\end{cases}$$

تعریف لاپلاس $\rightarrow L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\Rightarrow\frac{1}{3}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{U}}.e^{-U}du=\frac{1}{3}L\{\frac{1}{\sqrt{U}}\}\Big|_{s=1}$

$$L\{\frac{1}{\sqrt{U}}\}=L\{U^{-\frac{1}{2}}\}=\frac{\pi(-\frac{1}{2}+1)}{s^{1-\frac{1}{2}}}=\frac{\pi(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$$\Rightarrow\int_0^\infty\sqrt{x}e^{-x^3}dx=\frac{1}{3}L\{\frac{1}{\sqrt{U}}\}\Big|_{s=1}=\frac{1}{3}\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

$x(x+1)y''+(1+5x)y'+3y=0 \quad ; \quad x=0$ حول

بررسی نقطه $x=0$:

$$y''+\left(\frac{1+5x}{x(x+1)}\right)y'+\frac{3}{x(x+1)}y=0\ ;\ P(x)=\frac{1+5x}{x(x+1)}\ ,\ Q(x)=\frac{3}{x(x+1)}$$

$\lim\limits_{x\to 0}P(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+5x}{x(x+1)}=$ موجود نیست   بنابراین $x=0$ نقطه غیر عادی است.

$\lim\limits_{x\to 0}xP(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+5x}{x+1}=5=A$ موجود است

$\lim\limits_{x\to 0}x^2Q(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\frac{3}{x(x+1)}=3=B$ موجود است

بنابراین نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی منظم است.

معادله مشخصه: $r^2+(A-1)r+B=0\to r^2+4r+3=0\to (r+1)(r+3)=0$

$\Rightarrow r_1=-1\ ,\ r_2=-3\Rightarrow \Delta r=r_1-r_2=2$ صحیح است

$$\to y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n-1},\ y_2=ky_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-3}$$

$$y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)a_nx^{n-2},\ y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

جایگذاری: $x(x+1)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+(5x+1)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n-1)a_nx^{n-2}+3y=0$

$$\Rightarrow \sum_{\underbrace{n=0}_{n\to n-1}}^{\infty}(n-1)(n-2)a_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)a_nx^{n-2}+\sum_{\underbrace{n=0}_{n\to n-1}}^{\infty}5(n-1)a_nx^{n-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)a_nx^{n-2}+3\sum_{\underbrace{n=0}_{n\to n-1}}^{\infty}a_nx^{n-1}=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}5(n-2)a_{n-1}x^{n-2}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}3a_{n-1}x^{n-2}=0$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\{(n^2-5n+6+5n-10+3)a_{n-1}+(n^2-3n+2+n-1)a_n\}x^{n-2}+2a_0x^{-2}-a_0x^{-2}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_0=0\\(n^2-1)a_{n-1}+(n^2-2n+1)a_n=0\ ;\ n\ge 1\to (n+1)a_{n-1}+(n-1)a_n=0\ ;\ n\ge 1\end{cases}$$

$n=1\to 2a_0+0=0\to a_0=0$

$$n=2 \to 3a_1+a_2=0 \to a_2=-3a_1$$
$$n=3 \to 4a_2+2a_3=0 \to a_3=-2a_2=6a_1$$
$$n=4 \to 5a_3+a_4=0 \to a_4=-5a_3=-30a_1$$
$$\Rightarrow y_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1}=a_0x^{-1}+a_1+a_2+a_3x^2+a_4x^3+\dots$$
$$y_1=a_1-3a_1x+6a_1x^2-30a_1x^3+\dots=a_1(1-3x+6x^2-30x^3+\dots)$$
$$y_2=ky_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-3} \to y=Ay_1+By_2$$

۵ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

الف) جواب عمومی معادله همگن:

$$y'''-6y''+4y'+y=0 \Rightarrow \text{معادله مشخصه}: \lambda^3-6\lambda^2+4\lambda+1=0$$
$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda-1)=0$$
$$\Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=\frac{5+\sqrt{29}}{2},\ \lambda_3=\frac{5-\sqrt{29}}{2} \Rightarrow y_1=e^x,\ y_2=e^{\frac{5+\sqrt{29}}{2}x},\ y_3=e^{\frac{5-\sqrt{29}}{2}x}$$
$$\Rightarrow y_h=c_1e^x+c_2e^{\frac{5+\sqrt{29}}{2}x}+c_3e^{\frac{5-\sqrt{29}}{2}x}$$

ب) جواب خصوصی:
$$y'''-6y''+4y'+y=(x^2+1)e^x+e^{-x}\sin x+x^2+2x-1$$

اگر $f(x)$ برابر $e^{\alpha x}.Pm(x).\sin\beta x$ یا $e^{\alpha x}.Pm(x).\cos\beta x$ باشد، برای حدس جواب خصوصی در این حالت از $y_p=x^s e^{\alpha x}(q_m(x)\sin\beta x+r_m(x)\cos\beta x)$ استفاده می‌کنیم که s تعداد تکرار $\alpha+\beta i$ در معادله مشخصه است و $q_m(x)$ و $r_m(x)$ چندجمله‌ای‌های استاندارد از درجه m هستند.

$$(I)\quad y'''-6y''+4y'+y=(x^2+1)e^x \Rightarrow y_{p_1}=x^s e^x(Ax^2+Bx+C)$$
$$\alpha+\beta i=1$$

چون $\lambda=1$ یک بار به عنوان ریشه معادله مشخصه تکرار شده است بنابراین $s=1$.

$$\Rightarrow y_{p_1}=xe^x(Ax^2+Bx+C)$$
$$(II)\quad y'''-6y''+4y'+y=e^{-x}\sin x \Rightarrow y_{p_2}=x^s e^{-x}(D\sin x+E\cos x)$$
$$\alpha+\beta i=-1+i$$

چون $\lambda=-1+i$ به عنوان ریشه در معادله مشخصه نیست پس $s=0$.

$$\Rightarrow y_{p_2}=e^{-x}(D\sin x+E\cos x)$$
$$(III)\quad y'''-6y''+4y'+y=x^2+2x-1 \Rightarrow y_{p_3}=x^s(Fx^2+Gx+H)$$

چون $\lambda = ۰$ به عنوان ریشه در معادله مشخصه نیست پس $s = ۰$.

$$\Rightarrow y_{p_۳} = Fx^۲ + Gx + H$$

$$\Rightarrow y = y_{p_۱} + y_{p_۲} + y_{p_۳}$$

که برای به دست آوردن ضرایب باید این y را در معادله اصلی گذاشت.

۶ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

$$y'' + y = f(x) \ ; \ f(x) = \begin{cases} ۴ \ ; \ ۰ \le x \le ۲ \\ x + ۲ \ ; \ x > ۲ \end{cases} \quad , \quad y(۰) = y'(۰) = ۰$$

$$f(x) = ۴ + (x + ۲)u_۲(x)$$

از طرفین لاپلاس‌گیری می‌کنیم:

$$L\{y''\} + L\{y\} = L\{f(x)\}$$

$$L\{y''\} = s^۲Y - sy(۰) - y'(۰) = s^۲Y$$

$$\Rightarrow L\{f(x)\} = L\{۴ + (x + ۲)u_۲x\} = L\{۴\} + L\{xu_۲(x)\} + L\{۲u_۲(x)\}$$

$$= \frac{۴}{s} - \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-۲s}}{s}\right) + ۲\frac{e^{-۲s}}{s} = \frac{۴}{s} + \frac{۲}{s}e^{-۲s} + \frac{e^{-۲s}}{s^۲} + ۲\frac{e^{-۲s}}{s} = \frac{۴}{s} + \frac{۴}{s}e^{-۲s} + \frac{e^{-۲s}}{s^۲}$$

$$\Rightarrow s^۲Y + Y = \frac{۴}{s} + \frac{۴}{s}e^{-۲s} + \frac{e^{-۲s}}{s^۲} \to Y = \frac{۴}{s(s^۲ + ۱)} + \frac{۴}{s(s^۲ + ۱)}e^{-۲s} + \frac{e^{-۲s}}{s^۲(s^۲ + ۱)}$$

$$\to y(x) = ۴L^{-۱}\left\{\frac{۱}{s} - \frac{s}{s^۲ + ۱}\right\} + ۴L^{-۱}\left\{\frac{e^{-۲s}}{s} - \frac{s}{s^۲ + ۱}e^{-۲s}\right\} + L^{-۱}\left\{\frac{e^{-۲s}}{s^۲} - \frac{e^{-۲s}}{s^۲ + ۱}\right\}$$

$$= ۴(۱ - \cos x) + ۴(u_۲(x) - u_۲(x)\cos(x - ۲)) + (u_۲(x).(x - ۲) - u_۲(x).\sin(x - ۲))$$

$$\to y(x) = ۴(۱ - \cos x) + u_۲(x)(۲ - ۴\cos(x - ۲) + x - \sin(x - ۲))$$

۷ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

$$x^۲y'' - xy' + y = ۲x \ ; \ y(۱) = ۰ \ , \ y'(۱) = ۰$$

$$x = e^u \ ; \ y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = e^{-u}\frac{dy}{du} \ ; \ y'' = \frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{d}{dx}\left(e^{-u}\frac{dy}{du}\right) = e^{-۲u}\left\{\frac{d^۲y}{du^۲} - \frac{dy}{du}\right\}$$

جایگذاری $\to e^{۲u}.e^{-۲u}\left(\frac{d^۲y}{du^۲} - \frac{dy}{du}\right) - e^u.e^{-u}\frac{dy}{du} + y = ۲e^u$

$$\Rightarrow \frac{d^۲y}{du^۲} - ۲\frac{dy}{du} + y = ۲e^u$$

جواب عمومی معادله همگن $\to \frac{d^۲y}{du^۲} - ۲\frac{dy}{du} + y = ۰$ معادله مشخصه $\to r^۲ - ۲r + ۱ = ۰$

$\to (r - ۱)^۲ = ۰ \to r_۱ = r_۲ = ۱$ ریشه مضاعف

$$y_c = Ae^u + Bue^u = Ax + Bx\ln x$$

جواب خصوصی: $(D^2-2d+1)y=2e^u \to y_p(u)=\frac{1}{(D-1)^2}2e^u=u^2e^u=x(\ln x)^2$

$$\to y=y_c+y_p=Ax+Bx\ln x+x(\ln x)^2$$

$$\begin{cases} y(1)=0 \to A=0 \\ y'(1)=0 \to A+B=0 \to B=0 \end{cases} \Rightarrow y=y_p=x(\ln x)^2$$

۸ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۵-۱۳۹۴

$$y'=f(x)+\int_0^t y(t-u)\cos u\,du\ ,\quad y(0)=4\quad ;\quad f(t)=\begin{cases} 0 & ;\quad 0\le t\le \pi \\ e^{t-\pi} & ;\quad t\ge \pi \end{cases}=(e^{t-\pi}-0)u_\pi t$$

از طرفین لاپلاس‌گیری می‌کنیم: $\Rightarrow L\{y'\}=L\{f(t)\}+L\{\int_0^t y(t-u)\cos u\,du\}$

$$L\{y'\}=sY-y(0)=sY-4$$

$$L\{f(t)\}=L\{(e^{t-\pi}-0)u_\pi(t)\}=e^{-\pi s}L\{e^t\}=e^{-\pi s}(\frac{1}{s-1})$$

$$L\{\int_0^t y(t-u)\cos u\,du\}=L\{y(t)\}.L\{\cos t\}=Y(\frac{s}{s^2+1})$$

جایگذاری $\Rightarrow sY-4=\frac{e^{-\pi s}}{s-1}+Y\frac{s}{s^2+1}\ \Rightarrow\ Y(s-\frac{s}{s^2+1})=\frac{e^{-\pi s}}{s-1}+4$

$$\Rightarrow (Y(\frac{s^3}{s^2+1}))=\frac{e^{-\pi s}}{s-1}+4\ \Rightarrow\ Y=\frac{4(s^2+1)}{s^3}+\frac{s^2+1}{(s-1)s^3}e^{-\pi s}$$

$$\Rightarrow y(t)=L^{-1}\{\frac{4}{s}+\frac{4}{s^3}\}+L^{-1}\{e^{-\pi s}\frac{s^2+1}{s^3(s-1)}\}=4+2t^2+u_\pi(t)L^{-1}\{\frac{s^2+1}{s^3(s-1)}\}_{t\to t-\pi}$$

$$L^{-1}\{\frac{s^2+1}{s^3(s-1)}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s(s-1)}\}+L^{-1}\{\frac{1}{s^3(s-1)}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\}+L^{-1}\{\frac{1}{s^2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s})\}$$

$$=e^t-1+\int_0^t\int_0^t(e^t-1)dt\,dt=e^t-1+\int_0^t\{(e^t-t)-1\}dt=e^t-\frac{t^2}{2}-t-1$$

$$\Rightarrow y(t)=2t^2+4+u_\pi(t)\{e^{t-\pi}-\frac{(t-\pi)^2}{2}-(t-\pi)-1\}$$

۹ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۵-۱۳۹۴

الف) $\int_0^\infty e^{-2x}\underbrace{\frac{1-\cos 2x}{x}}_{f(x)}dx=\int_0^\infty e^{-2x}f(x)dx=\lim_{s\to 2}\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx=F(s)\big|_{s=2}$

$$F(s)=L\{\frac{1-\cos 2x}{x}\}=L\{\frac{g(x)}{x}\}=\int_s^{+\infty}G(s)ds$$

$$G(s)=L\{1-\cos 2x\}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}=\frac{4}{s(s^2+4)}$$

$$\Rightarrow \int_s^{+\infty}G(s)ds=\int_s^{+\infty}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4})ds=\ln s-\frac{1}{2}\ln(s^2+4)=\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\Big|_s^{+\infty}$$

$$=\lim_{s\to+\infty}\ln(\frac{s}{\sqrt{s^2+4}})-\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}=0-\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}=\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}e^{-2x}\frac{1-\cos 2x}{x}dx=F(s=2)=\ln\frac{\sqrt{4+4}}{2}=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2$$

ب)

$$L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s(s+1)})\}=L^{-1}\underbrace{\{\ln(s^2+1)-\ln s-\ln(s+1)\}}_{F(s)}$$

$$L^{-1}\{F'(s)\}=-tf(t)\ \Rightarrow\ f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=-\frac{1}{t}L^{-1}\{F'(s)\}$$

$$F'(s)=\frac{2s}{s^2+1}-\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\ \Rightarrow\ L^{-1}\{F'(s)\}=2\cos t-1-e^{-t}$$

$$\Rightarrow f(t)=L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s(s+1)})\}=\frac{2\cos t-e^{-t}-1}{-t}$$

ج)

$$L^{-1}\{\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}\}=L^{-1}\{\frac{s+2}{\{(s+2)^2+1\}^2}\}=e^{-2t}L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}=e^{-2t}L^{-1}\{\frac{d}{ds}(-\frac{1}{2}(\frac{1}{s^2+1}))^2\}$$

$$=e^{-2t}(-tL^{-1}\{\frac{-1}{2(s^2+1)}\})=-te^{-2t}(-\frac{1}{2}\sin t)=\frac{t}{2}e^{-2t}\sin t$$

۱۰ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۵-۱۳۹۴

$$2x^2(1-x)y''-x(7x+1)y'+y=0\quad,\quad x=0$$ حول

$$y''-\frac{7x+1}{2x(1-x)}y'+\frac{1}{2x^2(1-x)}y=0\ ;\ P(x)=-\frac{7x+1}{2x(1-x)}\ ;\ Q(x)=\frac{1}{2x^2(1-x)}$$

بنابراین $x=0$ یک نقطه غیر عادی است

$$\lim_{x\to 0}P(x)=\lim_{x\to 0}-\frac{7x+1}{2x(1-x)}=$$ موجود نیست

$$\lim_{x\to 0}P(x)=\lim_{x\to 0}x(\frac{-7x-1}{2x(1-x)})=\lim_{x\to 0}\frac{-7x-1}{2-2x}=-\frac{1}{2}=A$$ موجود است

$$\lim_{x\to 0}x^2Q(x)=\lim_{x\to 0}x^2\frac{1}{2x^2(1-x)}=\frac{1}{2}=B$$ موجود است، در نتیجه $x=0$ یک نقطه غیر عادی منظم است.

معادله مشخصه: $r^2+(A-1)r+B=0\Rightarrow r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}=0\Rightarrow 2r^2-3r+1=0\Rightarrow r_1=1,\ r_2=\frac{1}{2}$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}\ ;y_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{a^2+b^2}\ ;\ y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n\ ;\ y_1''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^{n-1}$$

$$\Rightarrow 2x^2(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)a_nx^{n-1}-x(7x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}2n(n+1)a_nx^{n+1}-\sum_{\underbrace{n=0}_{n\to n-1}}^{\infty}2n(n+1)a_nx^{n+2}-\sum_{\underbrace{n=0}_{n\to n-1}}^{\infty}7n(n+1)a_nx^{n+2}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2n(n+1)a_nx^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}2(n-1)na_{n-1}x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}7na_{n-1}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

$$-a_0x+a_0x+\sum_{n=1}^{\infty}\{(2n^2+2n-n-1+1)a_n+(2n-2n^2-7n)a_{n-1}\}x^{n+1}=0$$

$$\Rightarrow\ (2n^2+n)a_n+(-2n^2-5n)a_{n-1}=0\ \Rightarrow\ a_n=\frac{2n+5}{2n+1}a_{n-1}\quad ;\quad n\geq 1$$

$$n=1\Rightarrow a_1=\frac{7}{3}a_0\ ;\ n=2\Rightarrow a_2=\frac{9}{5}a_1=\frac{63}{15}a_0\ ;\ n=3\ \Rightarrow\ a_3=\frac{11}{7}a_2=\frac{99}{15}a_1=\frac{33}{5}a_0$$

$$\Rightarrow y_1=a_0(x+\frac{7}{3}x^2+\frac{21}{5}x^3+\frac{33}{5}x^4+\cdots)\ \Rightarrow\ y=Ay_1+By_2$$

۱۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۵-۱۳۹۴

الف)

$$y'''+2y''-3y'=\underbrace{x^2e^{-3x}}_{g(x)}+\underbrace{5x+3}_{f(x)}=g(x)+f(x)$$

$y'''+2y''-3y'=0$ جواب معادله همگن ; $r^3+2r^2-3r=0$ معادله مشخصه

$$\Rightarrow r(r+3)(r-1)=0\ \Rightarrow\ r_1=0\ ,\ r_2=1\ ,\ r_3=-3$$

$$\Rightarrow y_c=A+Be^x+Ce^{-3x}$$

جواب خصوصی $\Rightarrow (D^3+2D^2-3D)y=f(x)+g(x)$

$$y_P=\frac{1}{D(D+3)(D-1)}(f(x)+g(x))$$

$$\frac{1}{D(D+3)(D-1)}f(x)=\frac{1}{D(D+3)(D-1)}(5x+3)=(-\frac{1}{30}-\frac{2}{9}-\frac{70}{27}-....)(5x+3)$$

$$=-\frac{1}{3}(\frac{5}{2}x^2+3x)-\frac{2}{9}(5x+3)-\frac{7}{27}(3)=-\frac{5}{6}x^2-\frac{19}{9}x-\frac{53}{27}$$

$$\frac{1}{D(D+3)(D-1)}x^2e^{-3x}=e^{-3x}\frac{1}{D(D-3)(D-4)}x^2$$

$$=e^{-3x}\left(\frac{1}{12D}+\frac{7}{144}+\frac{370}{1728}+\frac{175}{20736}D^2+\ldots\right)x^2=e^{-3x}\left(\frac{x^3}{36}+\frac{7}{144}x^2+\frac{74}{1728}x+\frac{175}{10368}\right)$$

$$\Rightarrow y=y_p+y_c=A+Be^x+ce^{-3x}+\left(\frac{x^3}{36}+\frac{7}{144}x^2+\frac{74}{1728}x+\frac{175}{10368}\right)e^{-3x}-\frac{5}{6}x^2-\frac{19}{9}x-\frac{53}{27}$$

ب) $x^2y''+xy'-y=-2x^2\ln x$

تغییر متغیر: $x=e^u\ ;\ y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^{-u}\frac{dy}{du}\ ;\ y''=e^{-2u}\left(\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}\right)$

$$\Rightarrow e^{2u}.e^{-2u}\left(\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}\right)+e^u.e^{-u}\frac{dy}{du}-y=-2ue^{2u}\ \Rightarrow\ \frac{d^2y}{du^2}-y=-2ue^{2u}$$

جواب معادله همگن $:\frac{d^2y}{du^2}-y=0\ ;\ r^2-1=0\Rightarrow r=\pm1$ معادله مشخصه

$$\Rightarrow y_c=Ae^u+Be^{-u}=Ax+\frac{B}{x}$$

جواب خصوصی

$$y_p=\frac{1}{D^2-1}(-2ue^{2u})=-2e^{2u}\frac{1}{(D+2)^2-1}u$$

$$=-2e^{2u}\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{9}D-\ldots\right)u=-2e^{2u}\left(\frac{u}{3}-\frac{4}{9}\right)$$

$$\Rightarrow y=y_c+y_p=Ax+\frac{B}{x}+x^2\left(\frac{8}{9}-\frac{2}{3}\ln x\right)$$

۱۲ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۵-۱۳۹۴

$$\begin{cases}y''+x'=2\int_0^t y(u)du & (1)\\ x'+y'=2y & (2)\end{cases}\qquad x(0)=y(0)=0\ ,\ y'(0)=1$$

روابط (۱) و (۲) را از یکدیگر کسر می کنیم $\Rightarrow y''-y'=2\int_0^t y(u)du-2y$

مشتق‌گیری از طرفین $\Rightarrow y'''-y''=2y-2y'\Rightarrow y'''-y''+2y'-2y=0$

معادله مشخصه $: r^3-r^2+2r-2=0\Rightarrow(r^2+2)(r-1)=0\Rightarrow r_1=1\ ;\ r_2=\sqrt{2}i\ ;\ r_3=-\sqrt{2}i$

$$\to y(t)=Ae^t+B\sin\sqrt{2}t+C\cos\sqrt{2}t$$

$$\begin{cases}y(0)=0\Rightarrow A+C=0\\ y'(0)=1\Rightarrow A+\sqrt{2}B=1\end{cases}\Rightarrow A=-C=1-\sqrt{2}B$$

$$x'=2y-y'=2Ae^t+2B\sin\sqrt{2}t+2C\cos\sqrt{2}t-Ae^t-\sqrt{2}B\cos\sqrt{2}t+\sqrt{2}C\sin\sqrt{2}t$$

$$\Rightarrow x'(t) = Ae^{t} + (2B + \sqrt{2}C)\sin\sqrt{2}t + (2C - \sqrt{2}B)\cos\sqrt{2}t$$

$$\Rightarrow x'(t) = Ae^{t} + (\sqrt{2} - 2\sqrt{2}A)\sin\sqrt{2}t - (A+1)\cos\sqrt{2}t$$

$$x(t) = Ae^{t} + (2A-1)\cos\sqrt{2}t - (\frac{A+1}{\sqrt{2}})\sin\sqrt{2}t$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow A + (2A-1) = 0 \rightarrow A = \frac{1}{3} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{3}(e^{t} - \cos\sqrt{2}t - 2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t)$$

۱۳ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

$\begin{matrix} L(y(t)] = y(s) \\ L(x(t)] = x(s) \end{matrix}$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} x'(t) + \int_{0}^{t} y(r)dr = H(t-1) \\ y'(t) + \int_{0}^{t} x(r)dr = H(t-2) \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases} \rightarrow$$ از طرفین رابطه تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$\begin{cases} L[x'(t)] + L\int_{0}^{t} y(r)dr = L[H(t-1)] \\ L[y'(t) + \int_{0}^{t} x(r)dr = L[H(t-2)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sx(s) - x(0) + \dfrac{y(s)}{s} = \dfrac{e^{-s}}{s} \\ sy(s) - y(0) + \dfrac{x(s)}{s} = \dfrac{e^{-rs}}{s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s^{2}x(s) + y(s) = e^{-s} \quad (1) \\ x(s) + s^{2}y(s) = e^{-2s} \quad (2) \end{cases}$$

طرفین رابطه (۱) را در s^{2} ضرب می‌کنیم $\Rightarrow \begin{cases} s^{4}x(s) + s^{2}y(s) = s^{2}e^{-s} \\ x(s) + s^{2}y(s) = e^{-2s} \end{cases}$

$$\Rightarrow x(s)(2 - s^{4}) = e^{-2s} - s^{2}e^{-s} \Rightarrow x(s) = \frac{e^{-2s}}{1-s^{4}} - \frac{s^{2}}{1-s^{4}}e^{-s}$$

$$F_{1}(s) = \frac{1}{1-s^{4}}\ ,\ F_{2}(s) = \frac{s^{2}}{1-s^{4}}$$

$$F_{1}(s) - \frac{1}{1+s^{4}} = \frac{1}{(1-s^{2})(1+s^{2})} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-s^{2}} + \frac{1}{1+s^{2}})$$

$$f_1(t)=L^{-1}[F_1(s)]=\frac{1}{2}(-\sinh(t)+\sin(t))\ \ (*)$$

$$F_2(s)=\frac{s^2}{1-s^4}=\frac{s^2}{(1-s^2)(1+s^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-s^2}-\frac{1}{1+s^2}\right)$$

$$f_2(t)=L^{-1}[F_2(s)]=\frac{1}{2}(-\sinh(t)-\sin(t))\ \ (**)$$

$$\Rightarrow x(s)=H(t-2)f_1(t-2)-H(t-1)f_2(t-1)$$

$$\Rightarrow x(s)=H(t-2)\left[\frac{1}{2}(-\sinh(t-2)+\sin(t-2))\right]$$

$$-H(t-1)\left[\frac{1}{2}(-\sinh(t-1)-\sin(t-1)\right]$$

معادله $4xy''+2y'+y=0$ را به صورت $y''+\frac{1}{2x}y'+\frac{1}{4x}y=0$ نمایش می‌دهیم. نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی منظم است. زیرا:

$$\lim_{x\to 0}x\left(\frac{1}{2x}\right)=\underset{\substack{\downarrow\\ \alpha}}{\frac{1}{2}}<\infty \qquad \lim_{x\to 0}x^2\left(\frac{1}{4x}\right)=\underset{\substack{\downarrow\\ \beta}}{0}<\infty$$

طرفین معادله را در x^2 ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow x^2y''+\frac{1}{2}xy'+\frac{1}{4}xy=0\Rightarrow r^2+(\alpha-1)+\beta=0\Rightarrow r^2-\frac{r}{2}=0\Rightarrow r_1=\frac{1}{2},r_2=0$$

$$r_1-r_2=\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}\Rightarrow\begin{cases}y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_1}\\ y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\frac{1}{2}}\\ y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n}\end{cases}$$

$$y_2\to y_2'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}\ ,\ y_2''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\Rightarrow xy_2''+\frac{1}{2}xy_2'+\frac{1}{4}xy_2=0$$

$$\Rightarrow x^2\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\frac{1}{2}x\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}+\frac{1}{4}x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n}+\underbrace{\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}}_{n\to n-1}=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n-1}x^{n}=0$$

$$\Rightarrow ۹\times a_۰+\frac{۱}{۲}\times ۰\times a_۰+\sum_{n=۰}^{\infty}\left[\left(n(n-۱)+\frac{۱}{۲}n\right)a_n+\frac{۱}{۴}a_{n-۱}\right]x^n=۰$$

$$\Rightarrow \left(n(n-۱)+\frac{۱}{۲}n\right)a_n+\frac{۱}{۴}a_n-۱=۰\Rightarrow n\left(n-\frac{۱}{۲}\right)a_n+\frac{۱}{۴}a_{n-۱}=۰$$

$$\Rightarrow a_n=-\frac{\frac{۱}{۴}}{n\left(n-\frac{۱}{۲}\right)}a_{n-۱}\quad a\geq ۱$$

$$n=۱\rightarrow\ a_۱=-\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}}a_۰=-\frac{\frac{۱}{۴}}{۱\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)}a_۰$$

$$a_۲=-\frac{\frac{۱}{۴}}{۲\left(۲-\frac{۱}{۲}\right)}a_۱=\frac{\left(\frac{۱}{۴}\right)^۲}{۲!\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)\left(۲-\frac{۱}{۲}\right)}a_۰$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{(-۱)^n\left(\frac{۱}{۴}\right)^n}{n!\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)\dots\left(n-\frac{۱}{۲}\right)}$$

$$y_۲=x^{۰}\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n=a_۰x^{۰}\left[۱-\frac{\frac{۱}{۴}}{۱\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)}x+\dots+\frac{(-۱)^n\left(\frac{۱}{۴}\right)^n}{n!\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)\dots\left(n-\frac{۱}{۲}\right)}x^n\right]$$

$$y_۱=x^{\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^{n+\frac{۱}{۲}}$$

$$y_۱'=\sum_{n=۰}^{\infty}\left(n+\frac{۱}{۲}\right)a_nx^{n-\frac{۱}{۲}}\qquad y_۱''=\sum_{n=۰}^{\infty}\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\left(n-\frac{۱}{۲}\right)a_nx^{n-\frac{۳}{۲}}$$

$$\Rightarrow x^۲y_۱''+\frac{۱}{۲}xy_۱'+\frac{۱}{۴}xy_۱=۰$$

$$\Rightarrow x^۲\sum_{n=۰}^{\infty}\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\left(n-\frac{۱}{۲}\right)a_nx^{n-\frac{۳}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\sum_{n=۰}^{\infty}\left(n+\frac{۱}{۲}\right)a_nx^{n-\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۴}x\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^{n+\frac{۱}{۲}}=۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=۰}^{\infty}(n+\frac{۱}{۲})(n-\frac{۱}{۲})a_n x^{n+\frac{۱}{۲}}}_{n\to n-۱}+\frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}(n+\frac{۱}{۲})a_n x^{n+\frac{۱}{۲}}+\underbrace{\frac{۱}{۴}\sum_{n=۰}^{\infty}a_n x^{\frac{۳}{۲}+n}}_{n\to n-۱}=۰$$

$$\Rightarrow \sum_{n=۰}^{\infty}(n+\frac{۱}{۲})(n-\frac{۱}{۲})a_n x^{n+\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}(n+\frac{۱}{۲})a_n x^{n+\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۴}\sum_{n=۰}^{\infty}a_{n-۱} x^{n+\frac{۱}{۲}}=۰$$

$$\Rightarrow \sum_{n=۰}^{\infty}[[(n+\frac{۱}{۲})(n-\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۲}(n+\frac{۱}{۲})]a_n+\frac{۱}{۴}a_{n-۱}]x^n=۰$$

$$\Rightarrow (n+\frac{۱}{۲})na_n+\frac{۱}{۴}a_n-۱=۰\Rightarrow a_n=-\frac{\frac{۱}{۴}a_{n-۱}}{n(n+\frac{۱}{۲})}a_{n-۱}\qquad n\geq ۱$$

$$n=۱\to a_۱=-\frac{\frac{۱}{۴}a_۱}{۱(۱+\frac{۱}{۲})}$$

$$n=۲\to a_۲=-\frac{\frac{۱}{۴}a_۱}{۲(۲+\frac{۱}{۲})}=\frac{(\frac{۱}{۴})^۲}{۲!(۱+\frac{۱}{۲})(۲+\frac{۱}{۲})}a_۰$$

$$\dots\quad a_n=\frac{(-۱)^n(\frac{۱}{۴})^n}{n!(۱+\frac{۱}{۲})\dots(n+\frac{۱}{۲})}a_۰$$

$$\Rightarrow y_۱=x^{\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}a_n x^n=x^{\frac{۱}{۲}}\left[a_۰+a_۱x+m+a_nx^n+m\right]$$

$$=a_۰x^{\frac{۱}{۲}}[۱-\frac{\frac{۱}{۴}}{۱(۱+\frac{۱}{۲})}x+m+\frac{(-۱)^n(\frac{۱}{۴})^n}{n!(۱+\frac{۱}{۲})\dots(n+\frac{۱}{۲})}x^n+m]$$

۱۴ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

$$\int_۰^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-۲x}}{x}dx$$

$$L(f(t))=\int_۰^{+\infty}e^{-st}.f(t)dt$$

$$\int_۰^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-۲X}}{x}dx=\int_۰^{+\infty}e^{-۰t}.\frac{e^{-x}-e^{-۲t}}{x}dx=L(f(t))_{s\to ۰}$$

$$\Rightarrow L(f(t)) = \ln\frac{s+2}{s+1}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2t}}{x}dx = \lim_{s\to 0}(\ln\frac{s+2}{s+1}) = \ln\frac{2}{1} = \ln 2$$

۱۵ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

$$f(x) = \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$$

$$L(f(x)) = L\{\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\} = L\{\frac{1}{x}\underbrace{(e^{-x}-e^{-2x})}_{g(x)}\}$$

می‌دانیم:

$$L\{\frac{1}{t}f(t)\} = \int_s^{+\infty}F(s)ds$$

بنابراین:

$$L\{f(x)\} = L\{\frac{1}{x}g(x)\} = \int_s^{+\infty}G(s)ds$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} \Rightarrow \int_s^{+\infty}(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2})ds = \ln(s+1)-\ln(s+2)\Big|_s^{+\infty} = \ln\frac{s+1}{s+2}\Big|_s^{+\infty}$$

$$= \lim_{s\to\infty}(\ln\frac{s+1}{s+2}) - \ln\frac{s+1}{s+2} = \ln 1 - \ln\frac{s+1}{s+2} = 0 - \ln\frac{s+1}{s+2} = \ln\frac{s+2}{s+1} \Rightarrow L(f(x)) = \ln(\frac{s+2}{s+1})$$

۱۶ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

$$4xy''+2y'+y=0\ ,\ y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \Rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\ ,\ y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

جایگذاری $\Rightarrow 4x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$

ابتدا باید تمامی توان‌های x را یکسان‌سازی کنیم. همه توان‌ها را به $(n-1)$ می‌رسانیم:

$$4\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ ;\ n\to n-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}$$

$$\Rightarrow 4\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}=0$$

حال باید نقطه شروع سری‌ها را یکسان‌سازی کنیم:

$$4\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+(2\times 1\times a_1x^0+\sum_{n=2}^{\infty}2na_nx^{n-1})+(a_0x^0+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1})=0$$

$$\Rightarrow 2a_1 + a_0 + \sum_{n=2}^{\infty}\{4n(n-1)a_n + 2na_n + a_{n-1}\}x^{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = -\dfrac{a_0}{2} \\ 4n(n-1)a_n + 2na_n + a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n = \dfrac{-1}{2n(2n-1)}a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_2 = -\frac{1}{12}a_1 = \frac{1}{24}a_0 \ , \ a_3 = -\frac{1}{30}a_2 = -\frac{1}{24}\times\frac{1}{30}a_0, \dots$$

$$\Rightarrow y = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = a_0(1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{24\times 30}x^2 + \dots)$$

۱۷) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x + \sin^2 x$$

جواب خصوصی $\Rightarrow (D^3 - 3D^2 + 3D - 3)y = e^x + \sin^2 x$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{(D-1)^3}(e^x + \sin^2 x) = \frac{1}{(D-1)^3}e^x + \frac{1}{(D-1)^3}\sin^2 x$$

$$\frac{1}{(D-1)^3}e^x = \frac{x^3.e^x}{3!} = \frac{x^3}{6}e^x$$

$$\frac{1}{(D-1)^3}\sin^2 x \ ; \ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \Rightarrow \frac{1}{(D-1)^3}(\frac{1}{2}(1-\cos 2x))$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{(D-1)^3} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{(D-1)^3}\cos 2x = \frac{1}{2}\times(-1) - \frac{1}{2}\times\frac{1}{(D-1)^3}\cos 2x$$

چون $D^2 = -4 \Rightarrow$

$$\frac{1}{(D-1)^3}\cos 2x = \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 3D - 1}\cos 2x = \frac{1}{(-4)D - 3\times(-4) + 3D - 1}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{11-D}\cos 2x = \frac{11+D}{11+D}\times\frac{1}{11-D}\cos 2x = \frac{11+D}{121-D^2}\cos 2x = \frac{11+D}{121+4}\cos 2x$$

$$= \frac{11+D}{125}\cos 2x = \frac{11}{125}\cos 2x + \frac{1}{125}(-2\sin 2x) = \frac{1}{125}(11\cos 2x - 2\sin 2x)$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{x^3}{6}e^x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times(\frac{1}{125}(11\cos 2x - 2\sin 2x)) = -\frac{1}{250}(11\cos 2x - 2\sin 2x + 1) + \frac{x^3}{6}e^x$$

جواب عمومی $\Rightarrow y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \Rightarrow$ معادله مشخصه $\Rightarrow r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$

$$\Rightarrow (r-1)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 1 \Rightarrow y_c = Ae^x + Bxe^x + Cx^2e^x$$

جواب کلی $\Rightarrow y = y_c + y_p$

$x^2yy''+(y-xy')^2=0$

تغییر متغیر $x=y^2$ وجود ندارد بنابراین سؤال با فرض تغییر متغیر $y^2=U$ حل شده است:

$y^2=U \Rightarrow 2yy'=U' \,,\, 2y'^2+2y''y=U''$

$x^2yy''+(y-xy')^2=xyy''+y^2-2xyy'+x^2y'^2=0$

$\Rightarrow x^2\left(\dfrac{U''-2y'^2}{2}\right)+U-x(U')+x^2y'^2=0$

$\Rightarrow \dfrac{x^2U''}{2}-x^2y'^2+U-xU'+x^2y'^2=0$

$\Rightarrow x^2U''-2xU'+2U=0$

معادله بدست آمده از نوع لژاندر می‌باشد بنابراین:

$\lambda(\lambda-1)-2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=1 \,,\, \lambda_2=2$

$\Rightarrow U(x)=Ax^1+Bx^2=y^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{Ax+Bx^2}$