آگهی وجدان

مخاطب گرامی!

این مجموعه جهت استفاده شما در ایام امتحانات پایان ترم تهیه گردیـده اسـت.

هرگونه **کپی** از این فایل، علاوه بر اعمال خسارات مادی و معنوی به همکاران

این مجموعه، از نظر اخلاقی و شرعی مسئولیت دارید!

سؤالات

ریاضی مهندسی ویژه دانشگاه علم و صنعت ایران

۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

تصویر نیمه بالایی دایره یکه را تحت نگاشت $w = z + \frac{1}{z}$ بیابید.

۲ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

تصویر ناحیه محصور بین خطوط $x = 1$، $y = 1$ و $x + y = 1$ را تحت نگاشت $w = z^2$ بیابید.

۳ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

حاصل هر یک از دو انتگرال زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} \quad a, k > 0$

ب) $\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta$

۴ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

فرض کنید c مسیر ساده بسته‌ای در جهت مثبت در صفحه مختلط بوده و قرار دهید: $g(a) = \oint_c \frac{z^3 + 2}{(z - a)^3} dz$

نشان دهید وقتی a در درون c باشد، آنگاه $g(a) = 6\pi ai$.

۵ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

بسط سری لوران تابع $f(z) = \frac{3z^2 - 6z + 2}{z^3 - 3z^2 + 2z}$ را در طوق $1 < |z| < 2$ بیابید.

۶ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

از تابع $f(z)=e^{-z^{۲}}$ در امتداد مستطیلی به رئوس $-a$، a، $a+ib$ و $-a+ib$ در جهت مثلثاتی انتگرال گرفته و سپس با استفاده از فرمول $\int_{۰}^{\infty} e^{-x^{۲}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ نشان دهید:

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-x^{۲}}\cos ۲bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}e^{-b^{۲}}$$

۷ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

اگر f یک تابع تحلیلی باشد، ثابت کنید: $(\nabla^{۲}=\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}})$ $\nabla^{۲}|f(z)|^{۲}=۴|f'(z)|^{۲}$

۸ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

تبدیل موبیوسی بیابید که ناحیه $D=\{z:\operatorname{Re}(z)\geq ۰\}$ را بر روی ناحیه $D'=\{w:|w|\leq ۱\}$ بنگارد.

۹ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

مقدار انتگرال $\int_{۰}^{۲\pi}\frac{\sin^{۲}\theta}{۵-۴\cos\theta}d\theta$ را محاسبه کنید.

۱۰ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

اگر c ربع $|x|+|y|=۱$ در جهت مثلثاتی طی شده باشد و تعریف کنیم $(|\omega|<۱)$ $g(\omega)=\oint_{c}\frac{\sin z}{e^{z}(z-\omega)}dz$

مقدار $g'(\frac{i}{z})$ را به‌دست آورید.

۱۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

هرگاه $f(z)$ تابعی تحلیلی با قسمت حقیقی $u(x,y)=e^{-۲xy}\sin(x^{۲}-y^{۲})$ باشد، مقدار $f'(۱)$ را محاسبه کنید.

۱۲ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

جواب‌های معادله $\tan z=i$ را در صورت وجود بیابید.

گروه آموزشی
۳۳۳۶ ۴۳۳۹
www.Amad-Group.ir

آگهی وجدان

مخاطب گرامی!

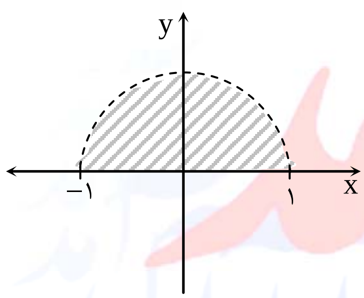
این مجموعه جهت استفاده شما در ایام امتحانات پایان ترم تهیه گردیـده اسـت. هرگونه **کپی** از این فایل، علاوه بر اعمال خسارات مادی و معنوی به همکاران این مجموعه، از نظر اخلاقی و شرعی مسئولیت دارید!

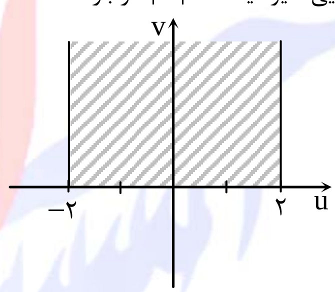
پاسخها

ریاضی مهندسی ویژه دانشگاه علم و صنعت ایران

۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

نیمه بالایی دایره یکه $|z|=1$ در بازه $0 \le \theta \le \pi$ را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم.





$$w = u + iv, z_0 = r_0(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$u + iv = (r_0 + \frac{1}{r_0})\cos\theta + (r_0 - \frac{1}{r_0})\sin\theta$$

$$r_0 = 1 \rightarrow \begin{cases} u = (r_0 + \frac{1}{r_0})\cos\theta = 2\cos\theta \\ r = (r_0 - \frac{1}{r_0})\sin\theta = 0 \end{cases} \quad , \quad 0 \le \theta \le \pi \Rightarrow \begin{cases} -2 \le u \le 2 \\ v = 0 \end{cases}$$

۲ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

با فرض $w = u + iv$ و $z = x + iy$ خواهیم داشت:

$$w = z^2 \rightarrow u + iv = (x + iy)^2$$

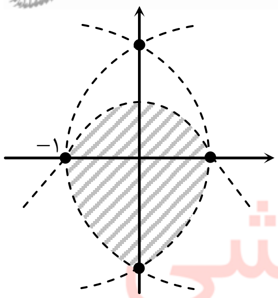
$$= x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

$$x=1\rightarrow\begin{cases}u=1-y^2\\ v=2x\end{cases}\rightarrow u=1-\frac{v^2}{4}\qquad (1)$$

$$y=1\rightarrow\begin{cases}u=x^2-1\\ v=2x\end{cases}\rightarrow u=\frac{v^2}{4}-1\qquad (2)$$

$$x+y=1\Rightarrow u=(x+y)(x-y)$$

$$\Rightarrow u^2=(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=(x+y)^2-4xy$$



$$u^2=1-2v\qquad (3)$$

تصویر ناحیه داده شده محل تلاقی۳ منحنی(۱)، (۲) و(۳) می‌باشد.

۳) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

الف)
$$I=\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx\qquad a,k>0$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}I_m\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{iax}}{x^2+a^2}dx$$

نقاط تکین تابع $f(z)=\frac{ze^{iaz}}{z^2+a^2}$ عبارتند از $z=\pm ai$ که بایستی مانده تـابع $f(z)$ را در $z=ai$ واقـع در نیم‌صفحه فوقانی به‌دست آورد.

$$\operatorname{Res}\frac{ze^{iaz}}{z^2+a^2}=2\pi i(\frac{1}{2}e^{-a^2})=\pi ie^{-a^2}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\pi e^{-a^2}$$

ب) با استفاده از تغییر متغیر $\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$ و $d\theta=\frac{dz}{iz}$ داریم:

$$I=\oint_{|z|=1}(\frac{z^2+1}{2z})^4\frac{dz}{iz}=\frac{1}{16i}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^4}{z^5}dz$$

$z=0$ نقطه تکین و درون دایره واحد و قطب مرتبه پنجم می‌باشد.

$$\operatorname{Res}\frac{(z^2+1)^4}{z^5}\Big|_{z=0}=\lim_{z\to 0}\frac{d^4}{dz^4}((z^2+1)^4)=48z^4+48+96z+192z^4+320z^4+19z^2$$

$$=560z^4+211z^2+96z+48\Big|_{z=0}=48\Rightarrow I=2\pi i(\frac{48}{16i})=6\pi$$

۴) دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

$$\operatorname{Res}\frac{z^3+2}{(z-a)^3}\Big|_{z=a}=\lim_{z\to a}\frac{d^2}{dz^2}(z^3+2)=6z\Big|_{z=a}=6a$$

$$\Rightarrow g(a)=\oint_C\frac{z^3+2}{(z-a)^3}dz=2\pi i(6a)=12\pi ai$$

۵ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴–۱۳۹۳

$$f(z)=\frac{3z^2-6z+2}{z(z-2)(z-1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{z-1}$$

برای پیدا کردن مجهولات A، B و C قرار می‌دهیم $A(z-2)(z-1)+Bz(z-1)+Cz(z-2)=3z^2-6z+2$

و به ازای سه نقطه $z=0$، $z=1$ و $z=2$ داریم: $A=1\,,B=1\,,C=1$

بنابراین می‌توان نوشت: $f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-1}$

در ناحیه $1<|z|<2$ داریم $\frac{1}{2}<|\frac{1}{z}|<1$ و در نتیجه قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{n+1}$$

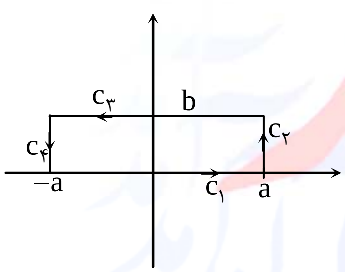
از آن‌جا که $|\frac{z}{2}|<1$ پس قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n$$

بنابراین سری لوران تابع $f(z)$ عبارتند از:

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{n+1}$$

۶ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴–۱۳۹۳



به واسطه تحلیلی بودن تابع e^{-z^2} داریم: $\oint_c e^{-z^2}dz=0$

و با محاسبه انتگرال مختلط به روش مستقیم داریم:

$$c_1: y=0\rightarrow z=x$$
$$c_2: x=a\rightarrow z=a+iy$$
$$c_3: y=b\rightarrow z=x+ib$$
$$c_4: x=-a\rightarrow z=-a+iy$$

$$\oint_c e^{-z^2}dz=\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx+\int_{0}^{b}e^{-(a+iy)^2}idy+\int_{a}^{-a}e^{-(x+ib)^2}dx+\int_{b}^{0}e^{-(-a+iy)^2}idy$$

وقتی $a\rightarrow+\infty$ داریم:

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx+0+\int_{\infty}^{-\infty}e^{-(x+ib)^2}dx+0=\sqrt{\pi}-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2-b^2+2ibx)}dx$$

$$=\sqrt{\pi}-e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-2ibx}dx=\sqrt{\pi}-e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}(\cos 2bx-i\sin 2bx)dx$$

که به واسطه زوج بودن $e^{-x^2}\cos 2bx$ و فرد بودن $e^{-x^2}\sin 2bx$ داریم:

$$\oint_c e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}-2e^{b^2}\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=0\rightarrow\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

www.Amad-Group.ir

۷ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۴-۱۳۹۳

با فرض $f(z)=u+iv$ داریم:

$$|f'(z)|^{2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{2}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{2}$$

$$\nabla^{2}|f(z)|^{2}=\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\right)(u^{2}+v^{2})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u^{2}+v^{2})\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}(u^{2}+v^{2})\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}+2u\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{2}+2v\frac{\partial^{2}v}{\partial x^{2}}+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}+2u\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{2}+2\frac{\partial^{2}v}{\partial y^{2}}$$

$$=4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}+4\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{2}=4|f'(z)|^{2}$$

۸ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

تحت نگاشت $\omega=\frac{z-1}{z+1}$ داریم:

$$\omega z+\omega=z-1\to\omega+1=z(1-\omega)$$

$$z=\frac{\omega+1}{1-\omega}=\frac{(u+1)+iv}{(1-u)-iv}=\frac{(u+1)+iv}{(1-u)-iv}\times\frac{(1-u)+iv}{(1-u)+iv}=\frac{(1-u^{2}-v^{2})+i(2v)}{(1-u)^{2}+v^{2}}$$

$$\operatorname{Re}z\geq 0\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow\frac{1-u^{2}-v^{2}}{(1-u)^{2}+v^{2}}\geq 0\Rightarrow u^{2}+v^{2}\leq 1\to|\omega|\leq 1$$

۹ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ داریم:

$$\cos\theta=\frac{z^{2}+1}{2z}\quad,\quad\cos 2\theta=\frac{z^{4}+1}{2z^{2}}$$

$$\sin^{2}\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{2z^{2}-z^{4}-1}{2z^{2}}\right)$$

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{\sin^{2}\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{2z^{2}-z^{4}-1}{4z(5z-2z^{2}-2)}dz=\oint_{|z|=1}f(z)dz$$

$$z=0\xrightarrow{\text{قطب ساده}}\operatorname{Res}f(z)\big|_{z=0}=\lim_{z\to 0}\frac{2z^{2}-z^{4}-1}{4(5z-2z^{2}-2)}=\frac{1}{8}$$

$$-2z^{2}+5z-2=0\to z=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{-4}\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{درون دایره واحد}\\ 2 & \text{بیرون دایره واحد}\end{cases}$$

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=\frac{۱}{۲}}=\lim_{z\to\frac{۱}{۲}}\frac{۲z^{۲}-z^{۴}-۱}{۴(۵-۴z)}=-\frac{۳}{۶۴}$$

$$\int_{۰}^{۲\pi}\frac{\sin^{۲}\theta}{۵-۴\cos\theta}d\theta=۲\pi i\left(\frac{۱}{۸}-\frac{۳}{۶۴}\right)=\frac{۵\pi i}{۳۲}$$

۱۰ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۴–۱۳۹۳

نقطه تکین تابع $f(z)=\dfrac{\sin z}{e^{z}(z-\omega)}$ عبارتند از $z=\omega$ که قطب مرتبه اول می‌باشد.

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=\omega}=\lim_{z\to\omega}(z-\omega)f(z)=\lim_{z\to\omega}\frac{\sin z}{e^{z}}=\frac{\sin\omega}{e^{\omega}}$$

اگر $z=\omega$ داخل مرز c باشد: $g(\omega)=۲\pi i\dfrac{\sin\omega}{e^{\omega}}\Rightarrow g'(\omega)=۲\pi i(e^{-\omega}\cos\omega-e^{-\omega}\sin\omega)$

$$g'(\omega)=۲\pi ie^{-\omega}(\cos\omega-\sin\omega)$$

اگر $z=\omega$ داخل مرز c نباشد $g(\omega)=۰$ و در نتیجه $g'(\omega)=۰$

$\omega=\dfrac{۱}{z}$ داخل مرز c است زیرا $\left|\dfrac{i}{z}\right|=\dfrac{۱}{|z|}<۱$

$$g'\left(\frac{i}{z}\right)=۲\pi ie^{\frac{-i}{z}}\left(\cos\frac{i}{z}-\sin\frac{i}{z}\right)$$

۱۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۴–۱۳۹۳

$$u_x=۲e^{-۲xy}(-y\sin(x^{۲}-y^{۲})+x\cos(x^{۲}-y^{۲}))$$
$$u_y=-۲e^{-۲xy}(x\sin(x^{۲}-y^{۲})+y\cos(x^{۲}-y^{۲}))$$

اگر $f(z)$ تابعی تحلیلی باشد در معادلات کوشی ریمان صدق می‌کند. یعنی $u_x=v_y\ ,\ u_y=-v_x$
که v مزدوج همساز u بوده و $f(z)=u+iv$

$$f'(z)=(u_x+iv_x)=۲e^{-۲xy}((-y+xi)\sin(x^{۲}-y^{۲})+(x+yi)\cos(x^{۲}-y^{۲}))$$

$$z=۱\ \begin{cases}x=۱\\ y=۰\end{cases}\qquad f'(۱)=۲(\cos۱+i\sin۱)$$

۱۲ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۴–۱۳۹۳

$$\tan z=i\to\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}=i\Rightarrow e^{iz}-e^{-iz}=-e^{iz}-e^{-iz}\Rightarrow ۲e^{iz}=۰$$

که غیرممکن است پس معادله مورد نظر جواب ندارد. دقت کنید در مفهوم حدی، معادله حاصله را می‌توان اینطور ادامه داد: $e^{iz}=۰\Rightarrow iz=-\infty\Rightarrow z=i\infty$

یعنی جواب‌های معادله موهومی محض هستند.