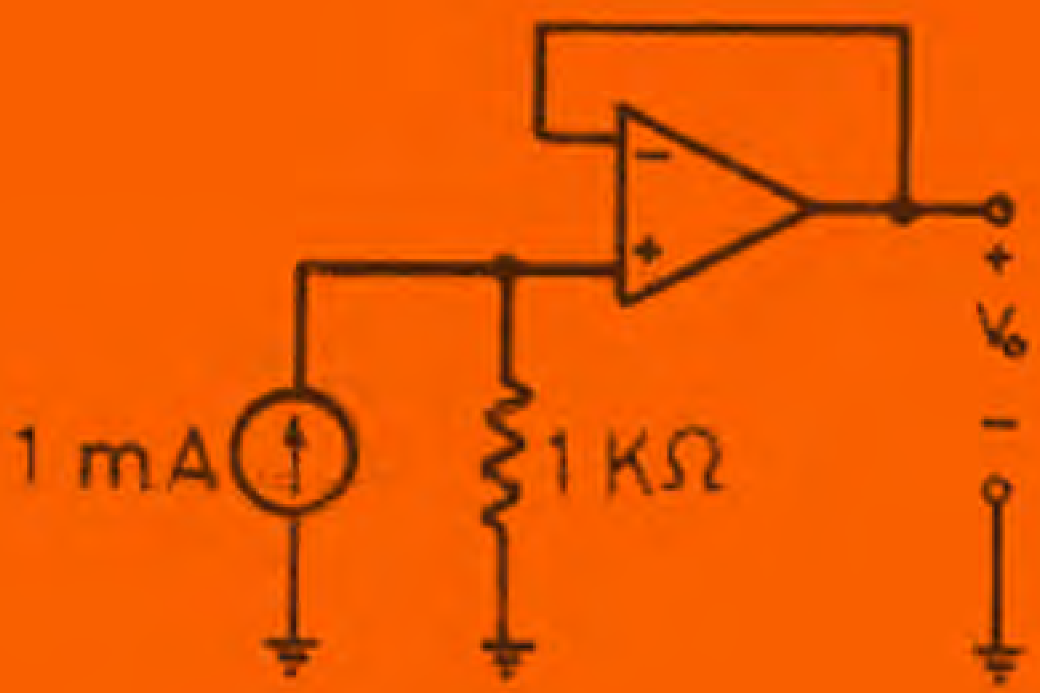
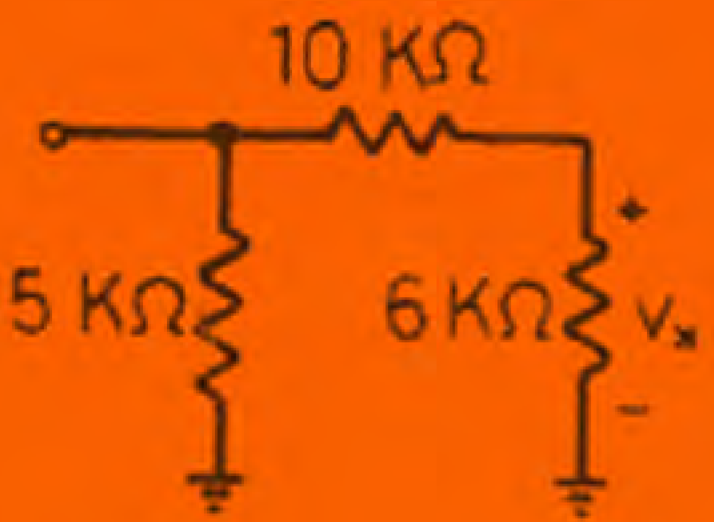
تحلیل مدارهای الکتریکی





پرفسور ویلیام هیت

مترجم :

مهندس امیر ستارزاده

پرفسور ویلیام هیت

تحلیل مدارهای الکتریکی

مهندس امیر ستارزاده

سال هزار و سیصد و هفتاد و یک خورشیدی

این کتاب ترجمه‌ای است از جدیدترین چاپ کتاب نسخه انگلیسی آن

ENGINEERING CIRCUIT ANALYSIS
INTERNATIONAL STUDENT EDITION

تحلیل مدارهای الکتریکی

پروفسور ویلیام هیت

مترجم: مهندس امیر ستارزاده

ناشر: نشر روایت ـ نشر قائم

چاپ اول ـ ۳۰۰۰ نسخه ـ پاییز ۱۳۷۱

حروفچینی مؤسسه همراه ـ چاپ احمدی

تحلیل مدارهای الکتریکی

فهرست مطالب

بخش دوم ـ مدارهای گذرا

پیشگفتار

کتابی که پیش روی خوانندگان عزیز قرار دارد ترجمه‌ای است از کتاب معروف «تحلیل مدارهای الکتریکی» اثر دانشمند و مهندس بزرگ آمریکایی «ویلیام هیت»، که کاملاً برای دانشجویان و دانشگاهیان محترم ما شناخته شده می‌باشد و نیازی به معرفی ندارد. لذا اینجانب قصد معرفی این کتاب را ندارم و هدفم از نگارش این سطور بعنوان مقدمه صرفاً چند کلمه‌ای صحبت نمودن با خوانندگان عزیز می‌باشد.

همانگونه که بر اهل فن روشن است، درس تحلیل مدار اصلی‌ترین درس پایه برای رشتهٔ مهندسی برق (قدرت) و مهندسی الکترونیک (با گرایشهای الکترونیک و مخابرات و کنترل و سخت‌افزار کامپیوتر) می‌باشد و اگر دانشجو این درس را با موفقیت و با کیفیت خوب نگذراند، یا نمی‌تواند دروس بالاتر و تخصصی‌تر را اخذ نماید و اگر هم اخذ نماید در مطالعهٔ آنها با مشکل مواجه خواهد شد زیرا زیربنای آنها درس تحلیل مدار می‌باشد.

پرواضح است که برای فهمیدن یک درس دانشگاهی مهمترین عوامل عبارتند از: استاد و کتاب، و چون بدلایل مختلف از قبیل کمبود وقت وغیره استاد بخشی از مطالعه را از روی کتاب به خود دانشجو واگذار می‌کند (و اگر هم اینطور نباشد دانشجو برای مرور مطالب نیاز به کتاب خواهد داشت)، درمی‌یابیم که اگر بگوییم «کتاب خوب مهمترین عامل یادگیری دروس دانشگاهی می‌باشد»، بیجا نگفته‌ایم.

حال بیایید به این پرسش پاسخ دهیم که «کتاب خوب در درس تحلیل مدار کدام است؟» **این کتاب، همانا کتاب «تحلیل مدار هیت» می‌باشد.**

لذا اینجانب نظر به اینکه خواندن یک متن فارسی از همه نظر برای دانشجویان ما راحت‌تر و خوشایندتر از متن انگلیسی می‌باشد، تصمیم به ترجمهٔ این کتاب گرفتم

تا به این طریق هدیه‌ای را در حد توان خود به دانشجویان عزیز و جامعهٔ دانشگاهی‌مان تقدیم کنم. البته فعلاً جلد اول کتاب که شامل ۱۰ فصل از آخرین چاپ کتاب اصلی می‌باشد آماده شده است که جلد دوم آن هم متعاقباً به حضورتان تقدیم خواهد شد. در ترجمهٔ این کتاب سعی شده است از نقطهٔ ضعفی که در آثار اکثر مترجمین کتب فنی در سالهای اخیر مشاهده شده است و عمدتاً ناشی از دو علت می‌باشد (یکی ناآشنا بودن مترجم به متون فنی و دیگری تعصب بی‌مورد در بکار بردن واژه‌های فارسی و واژه‌سازی‌های ناشیانه و غلط برای اصطلاحات فنی جا افتاده در بین اهل فن)، اجتناب شود.

مترجم هرگز برای اینکه مورد تشویق مخالفان کلمات لاتین قرار گیرد به جای اصطلاحات فنی جا افتاده و مأنوس از قبیل فرکانس، امپدانس، ولتاژ، فاز وغیره، از کلمات عجیب و غریب که هر دانشجو و خواننده‌ای را گیج و سردرگم می‌کند استفاده نکرده است و سعی شده است که لحن بیان فارسی کتاب هماهنگ با همان لحن سخن و کلمات و اصطلاحاتی باشد که دو نفر فرد فنی در رشته برق و الکترونیک به هنگام مکالمات روزمره در کارگاه و یا کلاس درس و یا در کریدور دانشکده به هنگام بحث و جدل‌های دانشجویی برای حل یک مسئله تحلیل مدار بکار می‌برند، باشد.

در خاتمه آرزو می‌کنم این اثر برای دانشجویان عزیز و اهل فن در رشته برق و الکترونیک مفید واقع شود و اشتباهات احتمالی را هم با نظر بلند خویش بدیدهٔ اغماض بنگرند. ضمناً لازم میدانم از تشویق‌ها و راهنمایی‌های ناشر محترم (که از دوستان عزیز و فاضل من می‌باشند) که همیشه باعث دلگرمی اینجانب بوده است و نیز زحمات بیدریغ کارکنان مؤسسه همراه که زحمت طاقت‌فرسای تایپ این کتاب را متحمل شدند تشکر کنم.

مهندس امیر ستارزاده

بخش ۱

مدارهای مقاومتی

فصل ۱

تعاریف و واحدها

۱ - ۱ مقدمه:

هدف این متن، بطوریکه از عنوان آن پیداست، ارائه مطالبی است که ما را به مهارتی در موضوع تحلیل مدار مهندسی رهنمون شود. این موضوع بطور بالقوه برای هر نوع مهندس و نیز برای بسیاری از فیزیکدانان و ریاضیدانان کاربردی بسیار مفید می‌باشد، همچنین آن محرکی، مبارزه‌جویانه و کاملاً لذت‌بخش هم می‌باشد. فرد مبتدی ممکن است بلافاصله سؤال کند، «تحلیل مدار مهندسی چیست؟» جواب نسبتاً خوب و ملایم است و ما می‌توانیم آن را با یک نگاه سریع به یک دیکشنری دانشگاهی که تعابیر زیر را ارائه کرده است، به‌دست آوریم:

مهندسی: علمی است که به‌وسیله آن خواص مواد و منابع انرژی موجود در طبیعت برای بشر مفید واقع می‌شود.

مدار: اتصالی از قطعات الکتریکی ساده که در آن حداقل یک مسیر بسته که جریان بتواند در آن جاری شود وجود داشته باشد.

تحلیل: مطالعهٔ ریاضی یک پدیدهٔ پیچیده و ارتباط بین اجزاء آن.

بنابراین ممکن است ما متمایل به این تصمیم شویم که «تحلیل مدار مهندسی» یک مطالعهٔ ریاضی اتصالات مفید قطعات الکتریکی ساده‌ای که در آن حداقل یک مسیر بستهٔ وجود دارد، می‌باشد. این تعریف اساساً درست است، اگرچه ما تا زمانیکه مفاهیم «جریان» و «قطعات الکتریکی» را توضیح ندهیم نمی‌توانیم آن را کاملاً درک کنیم.

سالیانی نه چندان دور کتابی از این نوع به‌عنوان یک متنی صرفاً برای مهندسی برق در نظر گرفته می‌شد. اما حالا بطور روزافزونی برای دانشجویان مهندسی ساختمان، مهندسی مکانیک

و سایر رشته‌های مهندسی و نیز برای یک دانشجوی عادی ریاضی کاربردی، کامپیوتر، زیست‌شناسی یا فیزیک به‌صورت یک درس مشترک شده است.

اگر ما قبلاً در یک دورهٔ مهندسی برق وارد شده باشیم و یا این قصد را داشته باشیم، در این‌صورت تحلیل مدار می‌تواند یک درس مقدماتی در حوزهٔ انتخاب ما باشد.

اگر هم با سایر رشته‌های مهندسی مشارکت و آمیزش داشته باشیم در این‌صورت تحلیل مدار قسمت عمده‌ای از کل مطالعهٔ ما دربارهٔ مهندسی برق را تشکیل خواهد داد و همچنین ما را قادر خواهد کرد که کار الکتریکی‌مان را در الکترونیک، ابزار دقیق و سایر زمینه‌ها ادامه دهیم. اگر چه مهمتر از همه امکان توسعهٔ پایهٔ تحصیلاتمان است که به ما داده می‌شود و می‌توانیم اعضای آگاه تیمی باشیم که مقدمتاً مواجه با چند قطعه و یا دستگاه الکتریکی بوده است. ارتباط موثر در چنین تیمی فقط در صورتی حاصل می‌شود که زبان و تعاریف مورد استفاده برای همه آشنا باشد.

تعداد کمی از کارهای مهندسی چند سال اخیر را می‌توان به یک فرد نسبت داد. دوران مخترعین ادیسون گونه سپری شده است و از یک مهندس تحصیلکرده انتظار داریم که جزئی از یک گروه شامل انواع مهندسین، ریاضیدانان کاربردی، دانشمندان کامپیوتر و فیزیکدانان باشد. کار این گروه به‌وسیله مدیرانی که آموزشهای فنی دیده‌اند هماهنگ می‌شود و محصولات صنعتی به‌وسیله مردان و زنانی که دارای معلومات علمی یا مهندسی می‌باشند، تولید، فروخته و یا تعمیر و نگهداری می‌شوند.

تحصیلات مهندسی امروز به تنهایی برای کار بر روی جنبه‌های طراحی فنی مسائل مهندسی نمی‌باشند. تلاشهای آنان امروزه به ماوراء خلق ماشینهای بخار و سیستمهای رادار و به تلاشهای شدید برای حل مسائل اجتماعی ـ اقتصادی مانند آلودگی آب و هوا، شهرسازی، حمل و نقل، کشف منابع انرژی جدید و حفظ منابع طبیعی موجود خصوصاً نفت و گاز طبیعی توسعه یافته است.

برای مشارکت در حل اینگونه مسائل مهندسی، یک مهندس باید مهارتهای زیادی کسب کند که یکی از آنها اطلاعاتی دربارهٔ تحلیل مدارهای الکتریکی می‌باشد.

ما این مطالعه را با توجهی به دستگاه آحاد و چند تعریف و قرارداد پایه‌ای شروع خواهیم نمود. برای کسانی که اطلاعاتی مقدماتی از الکتریسته و مغناطیس پایه دارند مطالب این فصل می‌تواند بطور سریع مطالعه شود. بعد از اینکه در این مطالب مقدماتی تسلط حاصل شد، می‌توانیم توجه خود را به یک مدار الکتریکی ساده معطوف کنیم.

۲ ـ ۱ دستگاه آحاد:

ما باید ابتدا یک زبان مشترک را پی‌ریزی کنیم. مهندسین نمی‌توانند با یکدیگر بطور تفاهیم آمیز مکالمه کنند مگراینکه هر عبارتی که بکار می‌رود واضح و تعریف شده باشد. این مطلب هم صحیح است که ما از کتابی که بطور دقیق هر کمیتی را که ارائه می‌کند تعریف نکرده باشد بهره کمی خواهیم برد. (اگر ما در یک آگهی تجارتی تلویزیونی بطور مبهم بگوییم ـ «لباسهایتان را ۴۰ درصد سفیدتر کنید» ـ و بخود زحمت ندهیم که سفیدی را تعریف کنیم و یا واحدهایی را که به‌وسیله آنها بتوان آن را اندازه گیری نمود ارائه دهیم در این صورت در مهندسی موفق نخواهیم بود اگرچه ممکن است مقدار زیادی مواد پاک کننده بفروشیم.) برای بیان مقدار یک کمیت قابل اندازه گیری باید هم یک عدد و هم یک واحد ارائه دهیم مانند: «۳ اینچ». خوشبختانه ما همه از دستگاه اعداد واحدی استفاده می‌کنیم و آن را بخوبی می‌شناسیم. این امر برای واحدها صادق نیست و برای آشنا شدن با یک دستگاه آحاد مناسب باید مقداری وقت صرف نمود. ما باید بر روی یک دستگاه آحاد استاندارد بتوافق برسیم و از تداوم و مقبولیت عمومی آن مطمئن شویم. واحد استاندارد طول را نباید بر حسب فاصلهٔ بین دو نقطه بر روی یک نوار لاستیکی خاصی تعریف نمود. این دائمی نیست و به‌علاوه هر کس دیگری از استاندارد دیگری استفاده می‌کند.

ما همچنین احتیاج داریم که هر اصطلاح فنی را در موقعی که معرفی می‌شود تعریف کنیم و این تعریف را بر حسب واحدها و کمیتهایی که قبلاً تعریف شده است بیان کنیم. در اینجا تعریف همیشه نمی‌تواند به همان اندازه‌ای که بطور تئوریک تصور می‌شود عمومی باشد. مثلاً به‌زودی نیاز خواهیم داشت که ولتاژ را تعریف کنیم ما باید یا یک تعریف خیلی کامل و کلی را که ما فعلاً نمی‌توانیم آن را بفهمیم، بپذیریم و یا یک تعریف غیرعمومی ولی ساده‌تر را که فعلاً منظور ما را برآورده کند بپذیریم. تا زمانیکه یک تعریف کلی‌تر مورد نیاز باشد، آشنایی ما با مفاهیم ساده‌تر به فهمیدن ما کمک خواهد کرد. همچنین معلوم خواهد شد که بسیاری از کمیتها بطور خیلی تنگاتنگی به یکدیگر وابسته‌اند بطوریکه برای تعریف اولی باید قبلاً تعاریف چندی ارائه شود تا آن کمیت را بطور کامل بفهمیم. مثلاً وقتیکه «عنصر مداری» تعریف می‌شود مناسب‌تر است که آن را بر حسب جریان و ولتاژ تعریف کنیم و وقتیکه جریان و ولتاژ تعریف می‌شوند اگر اینکار را با توجه به یک عنصر مداری انجام دهیم مفید خواهد بود. هیچیک از این سه تعریف را نمی‌توان بخوبی فهمید تا زمانیکه همهٔ آنها بیان شده باشند. بنابراین تعریف اول ما از عنصر

مداری ممکن است نارسا باشد اما پس از اینکه جریان و ولتاژ را بر حسب عنصر مداری تعریف نمودیم باز خواهیم گشت و عنصر مداری را بطور دقیق‌تری تعریف خواهیم نمود.

برای انتخاب یک دستگاه آحاد ما امکان انتخاب زیادی نداریم. دستگاهی را که ما بکار خواهیم برد بوسیله ادارهٔ ملی استانداردها در سال ۱۹۶۴ پذیرفته شده است و بوسیله همهٔ انجمنهای حرفه‌ای مهندسین بکار می‌رود و زبانی است که امروزه کتابها با آن نوشته می‌شوند. این دستگاه، سیستم بین‌المللی واحدها است (با علامت اختصاری SI) که بوسیله کنفرانس عمومی اوزان و مقادیر در سال ۱۹۶۰ تصویب شده است. دستگاه SI براساس شش واحد پایه‌ای بنا نهاده شده است: متر، کیلوگرم، ثانیه، آمپر، کلوین و شمع. البته این دستگاه، یک «دستگاه متریک» است که بعضی از اشکال آن بطور مشترکی در اکثر کشورهای پیشرفته صنعتی بکار می‌رود و استفاده از آن بخصوص در آمریکا شدیداً تاکید می‌شود. ما متعاقباً تعاریف متر، کیلوگرم، ثانیه و آمپر را مورد توجه قرار خواهیم داد و لیست علائم اختصاری استاندارد آنها و سایر واحدهای SI را که ما مورد استفاده قرار خواهیم داد در آخر کتاب آمده است.

در سدهٔ ۱۷۰۰، متر بصورت یک ده میلیونیم فاصلهٔ از قطب زمین تا استوا تعریف شد و این فاصله بوسیله دو خط نازک روی یک میله‌ای از آلیاژ پلاتین - ایریدیوم در دمای صفر درجهٔ سلیوس (°C) [که سابقاً سانتیگراد نامیده می‌شد] علامت گذاری شده بود. اگر چه مساحی‌های دقیق‌تر نشان دادند که آن علامتهای روی میله دقیقاً بیانگر این کسر نصف‌النهار زمین نیستند با وجود این فاصله بین علامتهای روی میله تا سال ۱۹۶۰ بعنوان تعریف استاندارد متر بصورت بین‌المللی پذیرفته شد.

در آن سال کنفرانس عمومی تعریف دقیق‌تری از متر (m) را بصورت مضربی از طول موج تشعشع نارنجی کریپتون ۸۶ بنا نهاد و سپس در سال ۱۹۸۳ متر بصورت دقیق‌تر بعنوان فاصله‌ای که نور در $\frac{۱}{۲۹۹۷۹۲۴۵۸}$ ثانیه در فضا طی می‌کند تعریف شد.

واحداساسی جرم، کیلوگرم (kg) در سال ۱۹۰۱ بصورت جرم یک قطعه پلاتین که با متر استاندارد در ادارهٔ بین‌المللی اوزان و مقادیر در سور فرانسه نگهداری می‌شد، تعریف شد. این تعریف در سال ۱۹۶۰ دوباره تأیید شد. جرم این قطعه تقریباً ۰/۰۰۱ جرم یک متر مکعب آب خالص در ۴C° می‌باشد.

سومین واحد اصلی، ثانیه (S)، تا سال ۱۹۵۶ بصورت $\frac{۱}{۸۶۴۰۰}$ یک روز متوسط شمسی تعریف می‌شد. در آن زمان آن را بصورت $\frac{۱}{۳۱۵۵۶۹۲۵,۹۷۴۷}$ سال حارهٔ ۱۹۰۰ تعریف نمودند. در سال ۱۹۶۴ بصورت دقیق‌تر یعنی ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ پریود از فرکانس عبوری بین ترازهای

هیپرفاین $m_f = 0$, $F = 3$, $F = 4$, $m_f = 0$ حالت اساسی $2s_{1/2}$ اتم سزیم ۱۳۳ که بوسیله میدانهای خارجی مختل نشده باشد، تعریف شد. این تعریف اخیر دائمی بوده و قابل تجدید تراز تعاریف قبل می‌باشد و فقط برای فیزیکدانان اتمی قابل فهم می‌باشد. اگرچه هر یک از این تعاریف بطور مناسبی ثانیه‌ای را که همه با آن آشنا هستیم توصیف می‌کنند.

چهارمین واحد اصلی، آمپر (A)، بعداً در همین فصل پس از اینکه با خواص اساسی الکتریسته آشنا شدیم تعریف خواهد شد. دو واحد اصلی باقیمانده، کلوین (K) و شمع (cd)، ضرورت چندانی برای تحلیل مدار ندارند.[1]

دستگاه SI برای ارتباط دادن واحدهای بزرگتر یا کوچکتر به واحد اصلی از سیستم اعشاری استفاده می‌کند و برای مشخص نمودن توانهای مختلف ۱۰ از پیشوندهای استانداردی استفاده می‌کند که عبارتند از:

اتو ($a - 10^{-18}$)	دسی ($d - 10^{-1}$)
فمتو ($f - 10^{-15}$)	دکا ($da - 10^{1}$)
پیکو ($p - 10^{-12}$)	هکتو ($h - 10^{2}$)
نانو ($n - 10^{-9}$)	کیلو ($k - 10^{3}$)
میکرو ($\mu - 10^{-6}$)	مگا ($M - 10^{6}$)
میلی ($m - 10^{-3}$)	گیگا ($G - 10^{9}$)
سانتی ($c - 10^{-2}$)	ترا ($T - 10^{12}$)

پیشوندهایی که در داخل کادر مشخص شده‌اند بوسیله دانشجویان درس تئوری مدارهای الکتریکی بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. این پیشوندها ارزش به‌خاطر سپردن را دارند زیرا هم در این کتاب و هم در سایر آثار علمی بطور مکرر بکار می‌روند. بنابراین یک میلی ثانیه (ms) برابر است با ۰٫۰۰۱ ثانیه و یک کیلومتر (Km) برابر است با $1000m$. اکنون واضح است که گرم (g) ابتدا بعنوان واحد جرم وضع شده است و سپس کیلوگرم بعنوان

۱- تعاریف کامل تمام واحدهای اصلی و بحث بیشتر درباره دستگاه بین‌المللی آحاد را می‌توان در C.H. Page et al.، تمرین توصیه شدهٔ IEEE برای واحدها در کار منتشر شدهٔ علمی و فنی IEEE Spectrum، جلد ۳، صفحه ۱۶۹ تا ۱۷۳، مارس ۱۹۶۶ پیدا کرد. مقادیر عددی دقیق در فصل ۲ هندبوک توابع ریاضی، چاپ دهم، ۱۹۷۲ از ادارهٔ ملی استانداردها سری ۵۵ ریاضیات کاربردی ارائه شده است.

$1000g$ بیان شده است. اما اکنون کیلوگرم واحد اصلی ما است و ما اگر بخواهیم کمی خودمان را گیج کنیم می‌توانیم گرم‌رابصورت‌میلی کیلوگرم‌درنظربگیریم. ترکیب چند پیشوند مانند میلی میکرو ثانیه غیرقابل قبول است و باید عبارت نانو ثانیه بکار رود. همچنین می‌توان بجای $10^{-6}m$ از میکرون استفاده نمود که کلمهٔ صحیح آن میکرومتر (μm) می‌باشد و از آنگستروم (A°) هم می‌توان برای $10^{-10}m$ استفاده نمود. این رابطهٔ قوای ۱۰ در دستگاه آحاد انگلیسی که متأسفانه در این کشور رواج کامل دارد بکار نمی‌رود.

مواقع زیادی پیش می آید که باید نتایج حاصل از یک تحلیل مهندسی به سیستم آحاد انگلیسی برای استفاده در کارگاه و یا وضوح بحث با سایرین تبدیل شود.

اکثر ما تصور ذهنی بهتری از $2in$ نسبت به $5cm$ داریم. اگرچه این وابستگی بزرگ به سیستم قدیمی بتدریج تغییر می کند.

واحدهای اساسی سیستم انگلیسی بر حسب واحدهای SI بشرح زیر تعریف می‌شوند: $1in$ دقیقاً برابر است با $0/0254m$، یک پوند جرم (lbm) دقیقاً برابر با ۰/۴۵۳۵۹۲۳۷ کیلوگرم و ثانیه در هر دو سیستم مشترک است.

به‌عنوان آخرین مورد در بحث‌مان دربارهٔ واحدها، سه واحد فرعی که برای اندازه‌گری نیرو، کار و انرژی و توان بکار می‌رود را مورد توجه قرار می‌دهیم. نیوتن[1] واحد اساسی نیرو است و آن مقدار نیرویی است که لازم است تا به جرم یک کیلوگرم شتاب یک متر بر مجذور ثانیه (m/s^2) بدهد. نیروی یک نیوتن معادل است با ۰/۲۲۴۸۱ پوند نیرو ($1bf$) و یک فرد مذکر نوزده ساله که دارای جرم $68Kg$ می‌باشد نیروی $667N$ بر نیروسنج اعمال می‌کند.

واحد اساسی کار یا انرژی ژول (J) می‌باشد که بعنوان یک نیوتن متر (N.m) تعریف می‌شود. اعمال یک نیروی ثابت یک نیوتن در فاصله یک متر نیاز به صرف انرژی یک ژول دارد. این مقدار انرژی برای بلند کردن این کتاب، بوزن تقریبی $10\ N$، به مسافت تقریبی $10\ cm$ کافی می‌باشد. یک ژول معادل است با $0/73756\ ft - lbf$. سایر واحدهای انرژی عبارتند از کالری(cal)[2] برابر با $4,1868\ J$، واحد حرارتی بریتانیا (Btu) برابر با $1055,1\ J$ و

۱- قابل ذکر است که همه واحدهایی که به یادبود دانشمندان مشهور نامگذاری می‌شوند با حروف بزرگ نوشته می‌شوند.

۲ - کالریی که با غذا، نوشیدنیها و ورزش بکار می‌رود در واقع کیلوکالری یعنی $4186,8\ J$ می‌باشد.

کیلو وات ساعت (kwh) برابر با $۳/۶ \times ۱۰^{۶}$ J. آخرین کمیت فرعی که ما با آن سروکار خواهیم داشت توان می‌باشد که عبارت است از سرعت انجام کار و یا صرف انرژی. واحد اساسی توان وات می‌باشد که به‌صورت ۱ $J/_s$ تعریف می‌شود. یک وات برابر است با $۰/۷۳۷۵۶$ ft − $lfb/_s$. آن همچنین معادل است با ۱/۷۴۵٫۷ اسب بخار (hp) که اسب بخار واحدی است که امروزه از واژه‌های مهندسی خارج شده است.

توجه: در سراسر متن تمریناتی در آخر قسمتهایی که اصول جدید ارائه شده است آمده است که بمنظور این است که به دانشجو اجازه دهد آموخته‌هایش از مفاهیم اساسی را بیازماید. مسائل داده شده برای کسب آشنایی با عبارات و ایده‌های جدید مفید می‌باشند و همگی باید انجام داده شوند. جوابهای تمرینات به ترتیب داده شده است.

تمرین ۱ ـ ۱: (a)حجم یک مکعب مستطیل به ابعاد :
$۱۰^{۸}$nm × ۳ × $۱۰^{۵}$µm × ۸cm برحسب $dm^{۳}$ چقدر است؟ (b) اگر یک بسته شیرینی ژله‌ای حاوی ۵۰۰۰Kcal باشد و همه این انرژی به گرما تبدیل شود چند Btu می‌دهد؟ (c) چه نیرویی بر حسب نیوتن لازم است تا شتاب $۲۰۰ in/_s{}^{۲}$ به جرم 3lbm بدهد؟

جواب: ۲/۴۰ , ۱۹۸۴۰ , ۶/۹۱

۳ ـ ۱ ـ واحد بار:

قبل از شروع بحث الکتریسیته و مدارهای الکتریکی می‌توان بر حسب یک مورد مشابه پدیده الکتریسیته را توصیف نمود. وقتیکه ما یک توپ بیس‌بال را بالای دست نگهداریم و آن را رها کنیم می‌دانیم که بطرف زمین می‌افتد زیرا نیروی جاذبه بر آن اعمال می‌شود. ما همچنین می‌توانیم بدقت توضیح دهیم که آن چگونه شتاب می‌گیرد، سرعت آن در هر لحظه چقدر است، چه وقت به نقطه مشخص می‌رسد و در هر لحظه مشخصی در کجا می‌باشد. اگرچه، تعداد کمی از ما می‌فهمیم که چرا آن می‌افتد با وجوداینکه ما خیلی خوب می‌دانیم که نیروی جاذبه چکار می‌کند ولی نمی‌دانیم که آنها چه هستند.

به‌طریق مشابهی مهندسین برق با نیروها، خطاهای اندازه گیری، آثار گرمایی و سایر پاسخهای قابل اندازه گیری الکتریسیته کاملاً آشنا هستند اما آنها بندرت با ماهیت تئوری (و فلسفی) الکتریسیته به تنهایی مواجه می‌شوند. بنابراین هدف ما تلاشی است برای مشاهدهٔ پدیدهٔ

الکتریسیته، توصیف آن بطور ریاضی و کاربرد عملی آنها می‌باشد. ما باید فقط بطور اتفاقی با دلیل آنها مواجه شویم.

فرض کنید که ما یک تکهٔ کوچکی از مادهٔ سبکی مانند چوب پنبه را برداریم و آن را به‌وسیله یک نخ نازک بیاویزیم. حال اگر ما یک شانه پلاستیکی را با پارچه پشمی مالش دهیم و سپس آن را با چوب‌پنبه تماس دهیم در می‌یابیم که چوب‌پنبه مایل است که از شانه دور شود و یک نیروی دافعه بین ـ شانه و چوب‌پنبه وجود دارد. بعد از اینکه شانه را زمین گذاشتیم اگر چوب‌پنبه را به پارچه پشمی نزدیک کنیم می‌بینیم که یک نیروی جاذبه بین چوب‌پنبه و پارچه پشمی وجود دارد.

ما هر دوی این نیروها را در چوب‌پنبه با بیان اینکه آنها نیروهای الکتریکی ناشی از وجود بارهای الکتریکی بر روی چوب پنبه‌و شانه و پارچه پشمی هستند، توضیح می‌دهیم. بطریق مشابهی ما نیروی توپ بیس‌بال را به نیروی جاذبه‌ای که ناشی از وجود جرمهای ثقلی در توپ بیس‌بال و زمین است، نسبت می‌دهیم.

آزمایش ما نشان می‌دهد که نیروی الکتریکی ممکن است جاذبه یا دافعه باشد و از این نظر تشابه با نیروی جاذبهٔ ثقلی نقض می‌شود. تا جاییکه امروزه ما می‌دانیم نیروی دافعهٔ ثقلی وجود ندارد.

ما وجود دو نیروی الکتریکی جاذبه و دافعه را با این فرضیه که دو نوع بار الکتریکی وجود دارد و بارهای مشابه یکدیگر را می‌رانند و بارهای غیرهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند توضیح می‌دهیم. این دو نوع بارالکتریکی مثبت و منفی نامیده می‌شوند اگرچه ما می‌توانستیم آنها را طلا و سیاه و یا بارهای شیشه‌ای و صمغی بنامیم (همانگونه که سالها قبل نامیده می‌شدند). بار الکتریکی که ابتدا در شانه ظاهر شد توسط بنزامین فرانکلین بار منفی نامیده شد و آنکه روی پارچه پشمی بود بار مثبت نام گرفت.

ما اکنون آزمایش خود را با این اصطلاحات جدید توضیح می‌دهیم. بوسیله مالش شانه با پارچه یک بار منفی در شانه و یک بار مثبت در پارچه تولید می‌شود. تماس چوب‌پنبه با شانه باعث می‌شود که تعدادی از بارهای منفی آن به چوب‌پنبه منتقل شود و نیروی دافعهٔ بین بارهای همنام چوب پنبه و شانه باعث می‌شود که توپ دور شود. حال اگر ما پارچه پشمی دارای بار مثبت را نزدیک چوب‌پنبهٔ دارای بار منفی بیاوریم یک نیروی جاذبه بین دو بار مخالف هویدا می‌شود.

ما اکنون همچنین می‌دانیم که تمام مواد از اجزاء ساختمانی بنیادی بنام اتم تشکیل شده‌اند و اتمها بنوبهٔ خود از ذرات بنیادی مختلفی تشکیل یافته‌اند. سه ذرهٔ مهم که اتم از آنها تشکیل شده

است عبارتند از الکترون، پرتون و نوترون.الکترون دارای بار منفی و پروتون دارای بار مساوی و مثبت و نوترون هم بدون بار الکتریکی می‌باشد. وقتیکه ما شانه پلاستیکی را با پارچه پشمی مالش می‌دهیم شانه بار منفی می‌گیرد زیرا مقداری از الکترونهای پشم به شانه منتقل می‌شوند و سپس پارچه پشمی تعداد الکترونهایش کمتر از آنی می‌شود که بتواند حالت خنثی الکتریکی را حفظ کند و در نتیجه به‌صورت یک بار مثبت رفتار می‌کند.

جرم هر سه ذرهٔ فوق‌الذکر بطور آزمایشی تعیین شده‌اند و عبارتند از:
$9/1 \times 10^{-31}$Kg برای الکترون و در حدود ۱۸٤۰ برابر آن برای پروتون و نوترون.

اکنون ما آماده‌ایم تا واحد اساسی بار یعنی کولن را که پس از شارل کولن، اولین فردی که اندازه گیریهای کمّی دقیقی برای نیروی بین دو بار انجام داد، بنام او نامیده شد تعریف کنیم.

البته کولن را بهر طریق که مناسب و عامه‌پسند و دائمی باشد و تعاریف قبلی را نقض نکند می‌توانیم تعریف کنیم. باز هم ما آزادی چندانی نداریم زیرا تعریفی که قبلاً بطور عمومی پذیرفته شده است به‌صورت زیر است: دو ذرهٔ باردار کوچک با بار مساوی که در خلاء به‌فاصلهٔ یک متری هم قرار دارند و یکدیگر را با نیروی $10^{-7}C^2N$ دفع می‌کنند دارای بار یکسان مثبت یا منفی یک کولن (C) می‌باشند. علامت C بیانگر سرعت نور یعنی $2/997925 \times 10^{8}\ m/s$ می‌باشد. بر حسب این واحد بار یک الکترون $-1/60219 \times 10^{-19}C$ می‌باشد و یک کولن (منفی) حاوی $6/24 \times 10^{18}$ الکترون می‌باشد. ما می‌توانیم بار را به‌وسیله Q یا q نشان دهیم که حرف بزرگ نشان‌دهندهٔ باری است که با زمان تغییر نمی‌کند و یا ثابت است و حرف کوچک بطور کلی باری را نشان می‌دهد که ممکن است متغیر با زمان هم باشد. ما اغلب این را مقدار لحظه‌ای بار می‌نامیم و ممکن است وابستگی زمانی آن را با نوشتن $q(t)$ مورد تأکید قرار دهیم. توجه داشته باشید که $q(t)$ ممکن است بیانگر یک مقدار ثابت هم به‌صورت حالت خاص باشد. این استفاده از حروف کوچک و بزرگ را می‌توان به همهٔ کمیتهای دیگر الکتریکی تعمیم داد.

هنگام نوشتن اکثر دانشجویان بین حروف کوچک و بزرگ تمایزی قائل نمی‌شوند و این می‌تواند پی آمدهای جدی بدنبال داشته باشد که اکثر آنها مضر می‌باشند. مثلاً در الکترونیک این چهار جریان کلکتور همگی دارای مفاهیم مختلفی هستند i_c ، i_C ، I_c ، I_C.

تمرین ۲ ـ ۱: در موارد زیر چه باری بر حسب fc ارائه می‌شود: (a) به‌وسیله ۱۰ میلیون پروتون؟ (b) به‌وسیله 10^{20}g الکترون؟ (c) 10^{7} الکترون به‌اضافهٔ 3×10^{6} پروتون به‌اضافهٔ 10^{8} نوترون؟

جواب: ۱٦۰۲ ، ‎-۱۷۵۹ ، ‎-۱۱۲۲fc.

۴ - ۱ - جریان

پدیدهٔ الکتریکی که در بالا مورد بحث قرار گرفت متعلق به حوزهٔ الکترواستاتیک می‌باشد که به رفتار بارهای الکتریکی در حال سکون می‌پردازد. این فقط از این نظر برای ما جالب است که شروعی است برای تعریف بار الکتریکی و همچنین وسیله‌ای مفید برای این تعریف می‌باشد.

اگر چه یک قسمت آزمایش از الکترواستاتیک سرچشمه می‌گیرد یعنی فرآیند انتقال بار از پارچه پشمی به شانه و یا از شانه به چوب پنبه. این ایدهٔ «انتقال بار» یا «بار متحرک» برای ما در مطالعهٔ مدارهای الکتریکی از اهمیت حیاتی برخوردار است زیرا در انتقال بار از یک نقطه به نقطهٔ دیگر ما می‌توانیم انرژی را هم از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر انتقال دهیم. بعنوان یک مثال عملی می‌توان از خطوط انتقال انرژی سراسری کشور نام برد.

چیزی که آن هم به همین اندازه اهمیت دارد امکان تغییر سرعتی است که با آن سرعت بار برای مخابره یا انتقال اطلاعات، انتقال می‌یابد. این فرآیند اساس سیستمهای مخابراتی از قبیل رادیو، تلویزیون و تله‌متری می‌باشد. بار متحرک یک جریان را ارائه می‌کند که ما در زیر بدقت آن را تعریف خواهیم نمود.

جریان موجود در یک مسیر مجزا مانند یک سیم فلزی هم دارای اندازه و هم دارای جهت می‌باشد و معیاری است برای سرعت حرکت بار از یک نقطه مرجع مشخص و در یک جهت معین. ما اکنون یک مثال نسبتاً دلخواه را در نظر می‌گیریم که ما را به تعریف کلی جریان بعنوان تغییر بار در واحد زمان dq/dt رهنمون خواهد شد.

بیایید یک مسیر مجزا را که در طول آن بار می‌تواند حرکت کند در نظر بگیریم و چند سؤال درباره نحوه حرکت بارها در طول این هادی بپرسیم. بعنوان یک ناظر مستقیم یک دانشجو را در نقطهٔ A روی مسیر قرار می‌دهیم و از او خواهش می‌کنیم که مقدار کل باری را که از مبداء زمان $t = 0$ عبور کرده است ثبت کند. ما می‌خواهیم که این اطلاعات در هر ثانیه اخذ شود و سپس دستورالعملهای زیر انجام شود:

۱ - جهت مثبت به‌طرف سمت راست شماست.

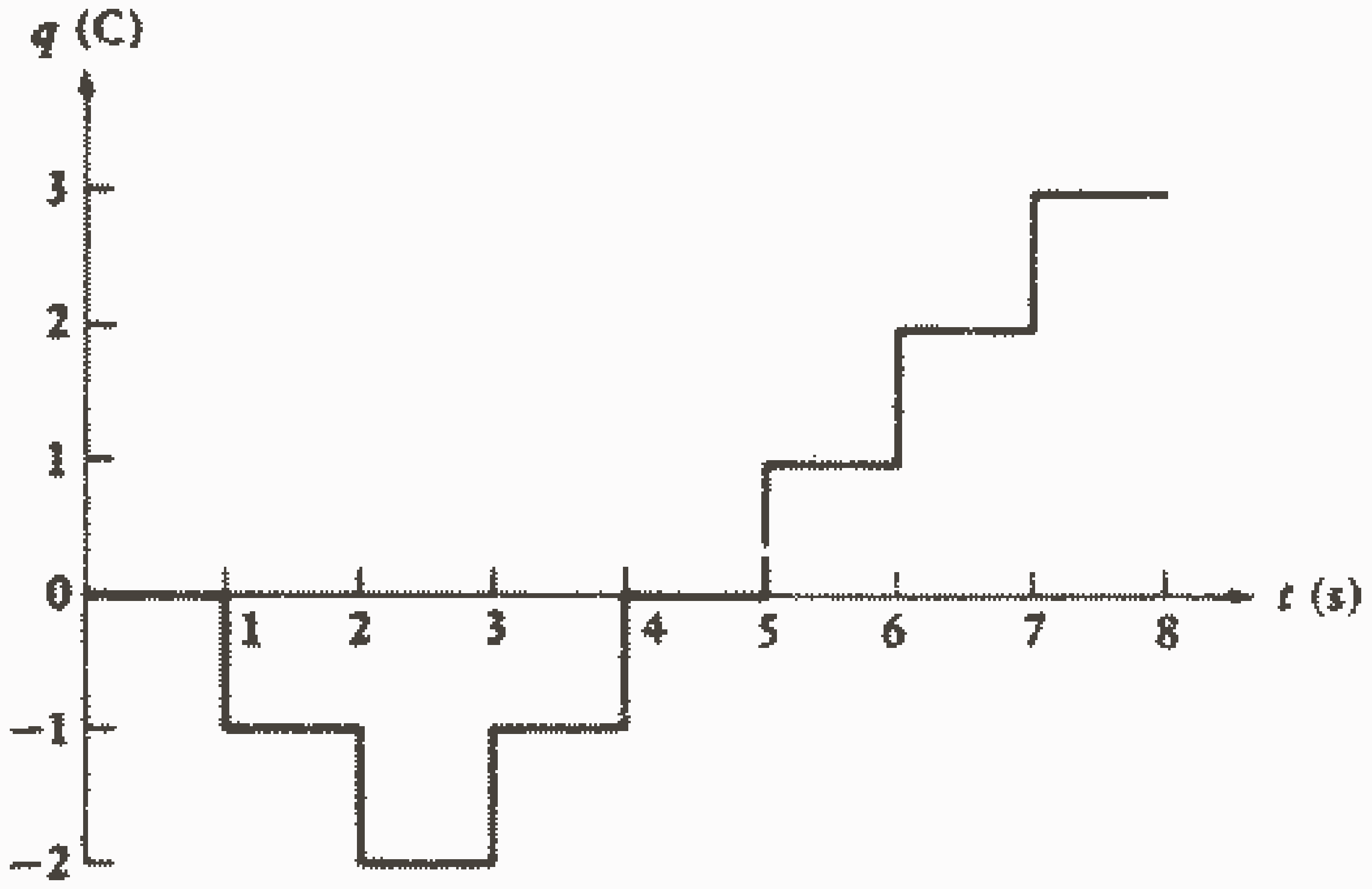
۲ - اگر بار مثبت از مقابل شما در جهت مثبت عبور کند اندازهٔ بار را جمع کنید.

۳ - اگر بار مثبت در جهت منفی حرکت کند، اندازه بار را تفریق کنید.

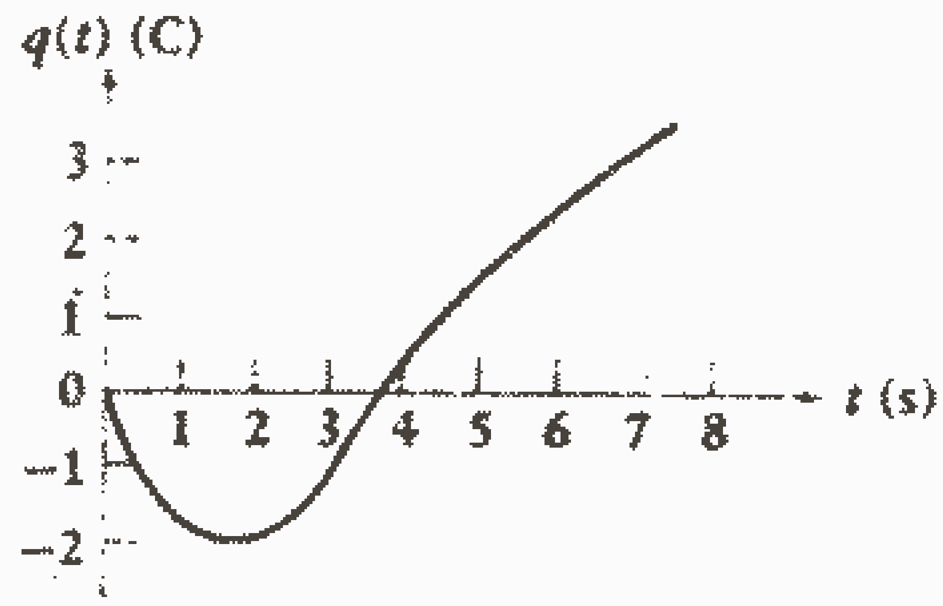
۴ - اگر بار منفی در جهت مثبت حرکت کند نیز اندازهٔ بار را تفریق کنید.

۵ - اگر بار منفی در جهت منفی حرکت کند، اندازهٔ بار را جمع کنید.

ناظر برای ۸ ثانیه نگاه می‌کند و اطلاعات را ثبت می‌کند و سپس نمودار شکل ۱ ـ ۱ را به ما می‌دهد که بیانگر این است که q کل باری است که از مقابل او از لحظهٔ $t = ۰$ عبور کرده است.



شکل ۱ ـ ۱: نموداری از کل بار q که از یک نقطه مرجع از لحظهٔ $t = 0$ عبور کرده است. بار در فواصل زمانی یک ثانیه اندازه‌گیری شده است.



شکل ۲ ـ ۱: نمودار مقدار لحظه‌ای کل بار q(t) که از یک نقطهٔ مبنا از لحظهٔ $t = 0$ عبور کرده است.

حال می‌بینیم که راههای زیادی برای تفسیر نمودار ثبت شده وجود دارد. مثلاً در ثانیهٔ اول یا یک واحد بار مثبت به سمت چپ حرکت کرده است و یا یک واحد بار منفی به سمت راست حرکت کرده است. همین حالت برای فاصلهٔ زمانی 1S دوم هم وجود دارد. در واقع در هر یک از این انتروالها ناظر می‌توانست ۱۰۰ واحد بار مثبت را به سمت راست و ۱۰۱ بار را به سمت چپ شمرده باشد. شاید بارهای مثبت و منفی در هر دو جهت در حرکت بوده‌اند.

خوشبختانه لازم نیست بدانیم که کدام یک از این بی‌نهایت حالت ممکن عملاً اتفاقی افتاده است. آثار الکتریکی تولید شده به‌وسیله هر یک یکسان خواهد بود.

اکنون ما اطلاعات را به‌وسیله اندازه گیریهای با تعداد بیشتر و مکرر پالایش می‌کنیم و این امر احتیاج به این دارد که اجزاء کوچکتر و کوچکتر بار شمرده شوند که حد آن مقدار باری است که به‌وسیله یک الکترون منفرد حمل می‌شود. این نمودار اکنون به‌صورت یک منحنی در شکل ۲ ـ ۱ ظاهر می‌شود.

ما اکنون آماده‌ایم که سرعت انتقال بار را مورد توجه قرار دهیم. در فاصلهٔ زمانی از t تا $t + \Delta t$ باری که از نقطهٔ مبنا عبور می‌کند از q به $q + \Delta q$ افزایش پیدا کرده است. اگر نمودار

در این فاصله نزولی باشد در این‌صورت Δq مقداری است منفی. بنابراین سرعتی که بار از نقطهٔ مبنا عبور می‌کند در لحظهٔ t تقریباً مساوی با $\Delta q/\Delta t$ می‌باشد و وقتیکه Δt کوچک شود مقدار دقیق سرعت به‌وسیله مشتق به‌دست می‌آید:

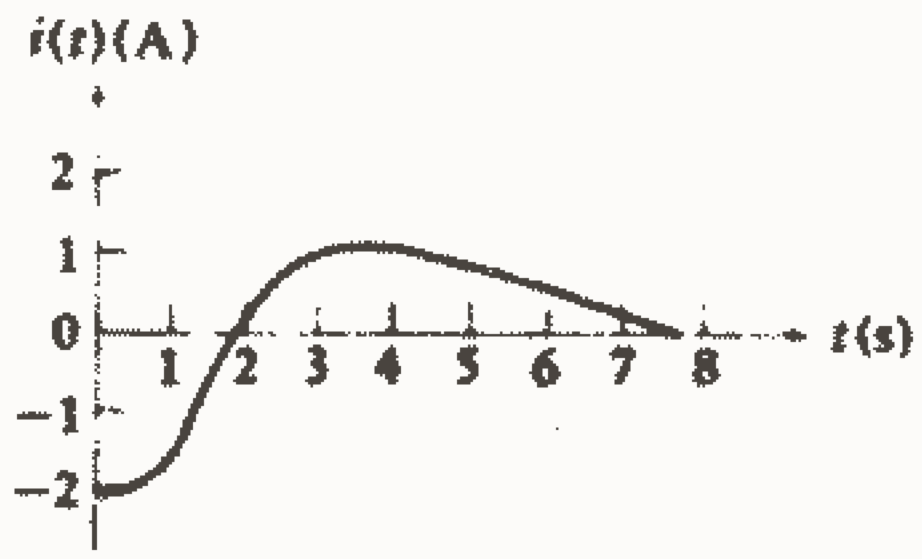
$$\frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

ما جریان را در یک نقطهٔ مشخص و در یک جهت مشخص به‌صورت سرعت عبور بار مثبت از آن نقطه در جهت مشخص تعریف می‌کنیم. جریان را با علامت I یا i نمایش می‌دهیم و بنابراین: (۱) $i = \frac{dq}{dt}$.

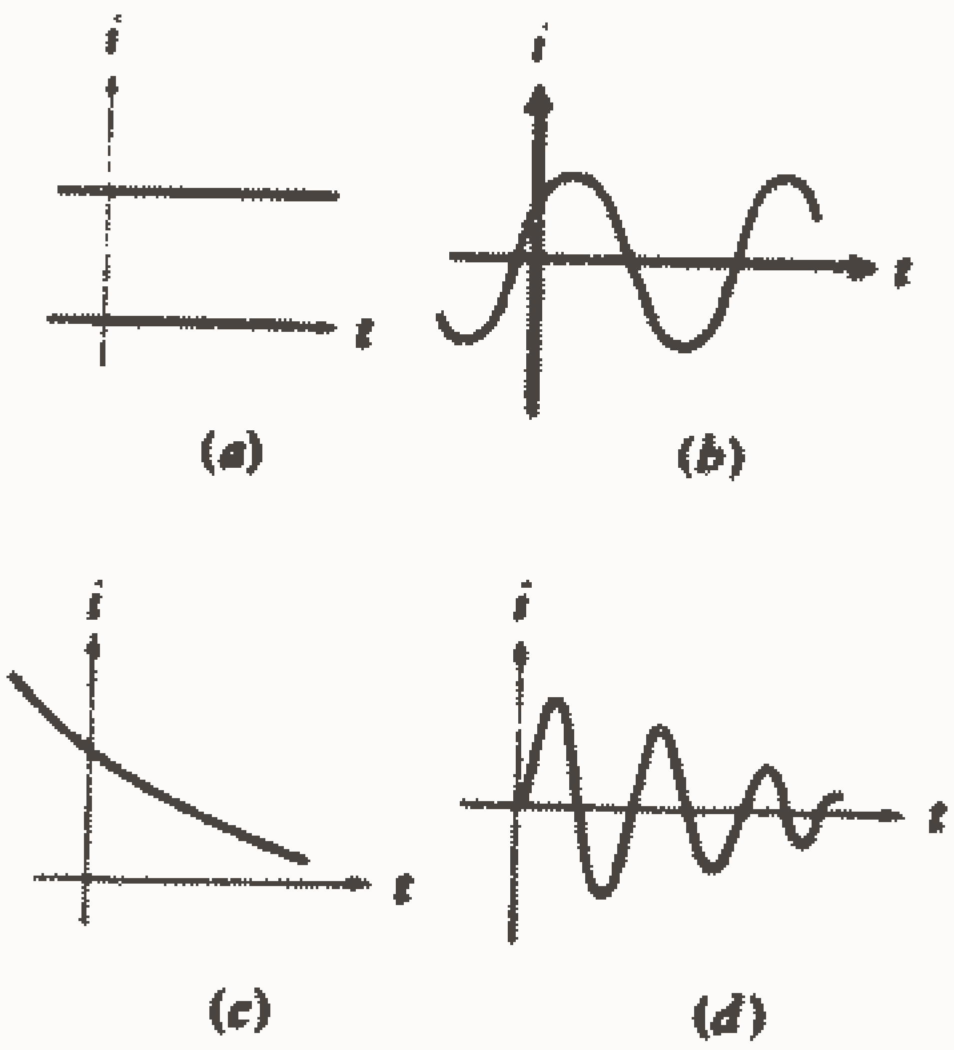
واحد جریان آمپر (A) است که متناظر است با عبور بار با سرعت $1\,C/s$. آمپر به یادبود ۱ ـ ۱ م. آمپر فیزیکدان فرانسوی اوایل قرن نوزدهم نامگذاری شده است. آن را اغلب با amp هم نشان می‌دهند ولی این حالت غیررسمی می‌باشد. استفاده از حرف کوچک i هم برای مقدار لحظه‌ای می‌باشد. با استفاده از اطلاعات شکل ۲ ـ ۱ جریان لحظه‌ای به‌صورت لحظه‌ای به‌صورت شیب منحنی در هر نقطه به‌دست می‌آید که این منحنی جریان در شکل ۳ ـ ۱ رسم شده است. بار منتقل شده از زمان t_0 تا t را می‌توان به‌صورت یک انتگرال معین بیان نمود.

$$q\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} i\,dt$$

کل بار منتقل شده در تمام زمانها را با اضافه کردن $q(t_0)$ یعنی مقدار باری که تا زمان t_0 منتقل‌شده است به رابطه بالا می‌توان به دست آورد. (۲) $q = \int_{t_0}^{t} i\,dt + q(t_0)$



شکل ۳-۱: جریان لحظه‌ای q در شکل ۲-۱ داده شده است و $i = dq/dt$



شکل ٤-۱: چند نوع جریان: (a) جریان مستقیم dc (b) جریان سینوسی یا ac (c) جریان نمایی (d) جریان سینوسی میرا

شکل ۵-۱: دو روش برای نشان دادن یک جریان واحد.

چند نوع جریان مختلف در شکل ٤ ـ ۱ نشان داده شده است. جریانی که ثابت است به‌نام جریان مستقیم و یا بطور ساده‌تر dc خوانده می‌شود و در شکل 4a - ۱ نشان داده شده است.، ما مثالهای عملی زیادی برای جریانهایی که بطور سینوسی با زمان تغییر می‌کنند خواهیم یافت، شکل 4b - ۱، جریانهایی از این نوع در مدارهای معمولی خانگی وجود دارند. چنین جریانی اغلب جریان متناوب یا ac نامیده می‌شود. با جریانهای نمایی و سینوسی میرا که در شکلهای 4c - ۱ d , رسم شده‌اند نیز بعداً مواجه خواهیم شد.

ما یک علامت ترسیمی به‌وسیله قرار دادن یک فلش در کنار هادی حامل جریان برای جریان وضع می‌کنیم. بنابراین در شکل 5a - ۱ جهت فلش و مقدار ۳A نشان‌دهندهٔ این است که یا یک بار مثبت خالص $^{C}/_{s}$۳ به سمت راست و یا یک بار منفی خالص $^{C}/_{s}$۳- به سمت چپ حرکت می‌کند. در شکل 5b - ۱ هم دو امکان وجود دارد، یا $^{C}/_{s}$۳- به سمت چپ و یا $^{C}/_{s}$۳+ به سمت راست جاری می‌باشد. هر چهار بیان فوق و هر دو شکل جریانهایی را نشان می‌دهند که از نظر آثار الکتریکی معادل می‌باشند و می‌گوییم که آنها مساوی هستند.

بهتر است جریان را به‌صورت حرکت بار مثبت تصور کنیم اگرچه بطوریکه شناخته شده است جریان در یک هادی نتیجهٔ حرکت الکترون‌هاست. در گازهای یونیزه، محلولهای الکترولیت و بعضی از مواد نیمه هادی اجزاء باردار مثبت متحرک قسمتی از جریان و یا کل آن را تشکیل می‌دهند. تعریف و علامتی که ما پذیرفته‌ایم استاندارد می‌باشد. لازم است بدانیم که فلش جریان جهت عملی جریان را نشان نمی‌دهد بلکه بطور ساده قراردادی است که به ما اجازه می‌دهد به طور دور از ابهام دربارهٔ «جریان داخل یک سیم» صحبت کنیم. فلش بخش اساسی تعریف جریان است! بنابراین صحبت کردن دربارهٔ مقدار جریان $i_1(t)$ بدون مشخص کردن فلش، بحث کردن دربارهٔ یک موجود تعریف نشده می‌باشد. بنابراین شکلهای 6a, b - ۱ بیان نامفهومی از $i_1(t)$ می‌باشند در حالیکه شکل 6c-۱ نماد تعریف شدهٔ مناسبی می‌باشد. به یاد داشته باشید که:

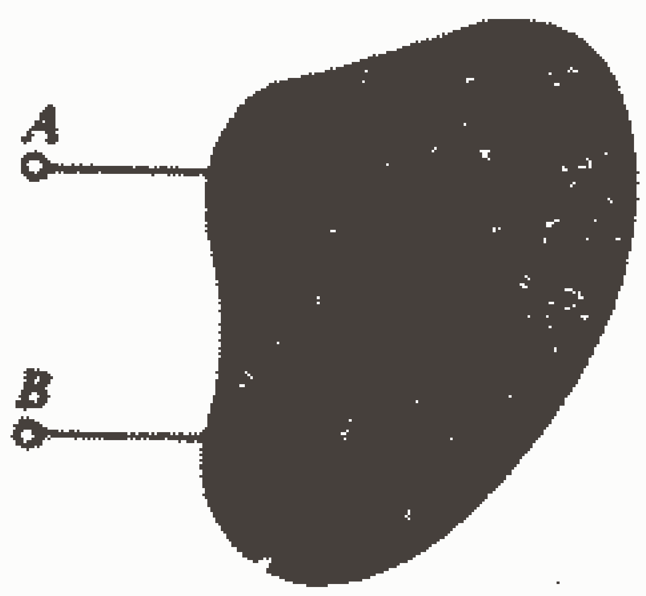
تمرین ۳ ـ ۱: جریان $i_1(t)$ در شکل 6c - ۱ به‌صورت $5e^{4t}A$ برای $t < 0$ ، $5e^{-4t}A$ برای $t > 0$ داده شده است. پیدا کنید: (a) $i_1(0/25)$ (b) مقدار متوسط $i_1(t)$ در فاصلهٔ $-0/25 < t < 0/25S$ (c) مقدار کل باری که از چپ به راست در طول هادی در فاصلهٔ زمانی $-0/25 < t < 0/25S$ عبور کرده است.

جواب: ۱/۸۳۹A ، ۳/۱٦A ، ۱/۵۸۰C

شکل ۶ ـ ۱: (a) و (b) تعاریف ناقص، نامناسب و غلط یک جریان می‌باشند. (c) تعریف صحیح $i_1(t)$.

۵ - ۱ - ولتاژ

حال ما باید به یک عنصر مداری اشاره کنیم و ما آن را به‌صورت خیلی کلی تعریف خواهیم نمود. وسایل الکتریکی مانند فیوز، لامپ روشنایی، مقاومت، باتری، خازن، مولد و کویل جرقه را می‌توان به‌وسیله ترکیبی از عناصر مداری ساده بیان نمود. ما با نشان دادن یک عنصر مداری عمومی به‌صورت یک شیء بدون شکل که دارای دو ترمینال می‌باشد که اتصال به سایر عناصر به‌وسیله آنها طبق شکل ۷ ـ ۱ انجام می‌شود، آغاز می‌کنیم. این عکس ساده می‌تواند به‌عنوان تعریف یک عنصر مداری کلی به کار رود.



شکل ۷ ـ ۱: یک عنصر مداری عمومی به وسیله یک جفت ترمینال مشخص می‌شود که سایر عناصر مداری می‌توانند به آنها وصل شوند.

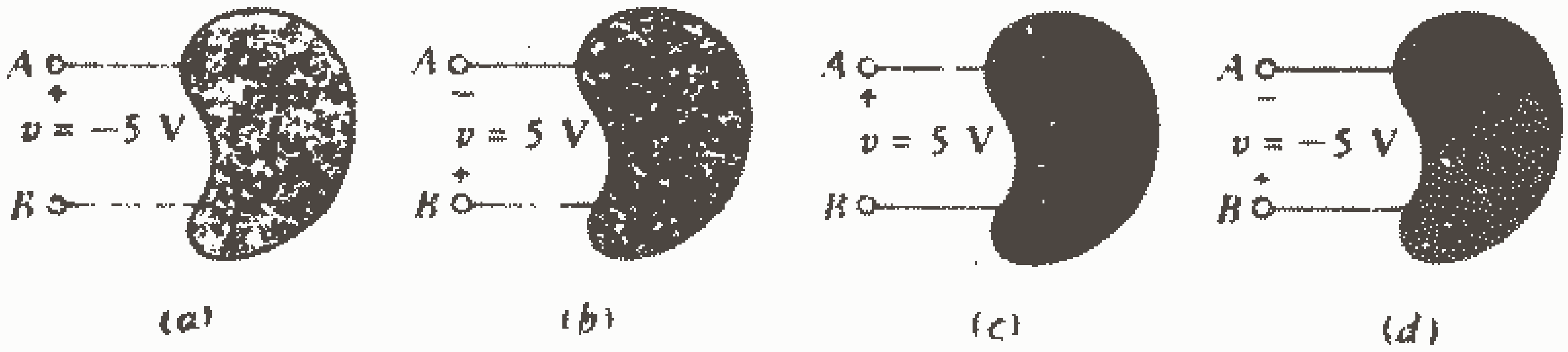
دو مسیر وجود دارد که از طریق آنها جریان می‌تواند به عنصر وارد و یا از آن خارج شود. بعداً ما عناصر مداری خاص را به‌وسیله توصیف مشخصه‌های الکتریکی که ممکن است در ترمینالهای آنها مشاهده شود، تعریف خواهیم نمود.

بیایید فرض کنیم که جریان مستقیم در ترمینال A وارد عنصر عمومی شکل ۷ ـ ۱ شود و از B خارج شود. همچنین فرض می‌کنیم که عبور این بار از میان عنصر احتیاج به صرف انرژی دارد. در این صورت می گوییم که یک ولتاژ الکتریکی و یا اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو ترمینال وجود دارد و یا اینکه یک ولتاژ و یا اختلاف پتانسیل در دو سر عنصر وجود دارد. بنابراین ولتاژ دو سر یک جفت ترمینال معیاری است برای کاری که لازم است تا بار را از میان عنصر عبور دهد. بطور خاص‌تر ما ولتاژ دو سر عنصر را به‌صورت کار لازم برای حرکت دادن یک بار مثبت ۱c از یک ترمینال به ترمینال دیگر تعریف خواهیم کرد. علامت ولتاژ در زیر مورد بحث قرار خواهد گرفت. واحد ولتاژ ولت (V) می‌باشد که برابر است با $1^{J}/_{c}$ و ولتاژ را با V یا v نمایش می‌دهند. ما در واقع خوشبخت هستیم که اسم کامل فیزیکدان قرن هیجده ایتالیا یعنی آلساندرو گیزپ آنتونیو ولتا برای واحد اختلاف پتانسیل بکار نرفته است. یک اختلاف پتانسیل و یا ولتاژ می‌تواند بین یک جفت ترمینال وجود داشته باشد خواه جریانی جاری باشد و یا نباشد. مثلاً یک باتری اتومبیل دارای ولتاژ ۱۲ ولت در دو سر ترمینالهایش می‌باشد حتی اگر هیچ چیزی به ترمینالهایش وصل نشده باشد.

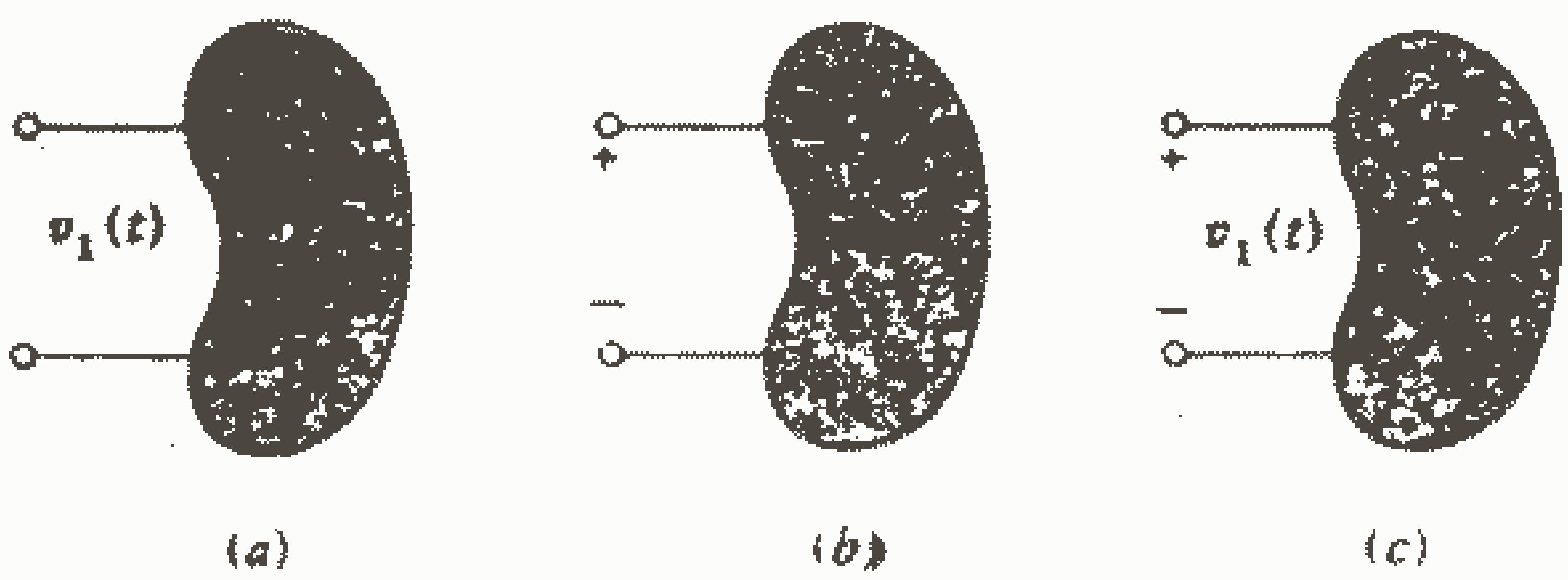
انرژیی که برای راندن بار در عنصر مصرف می‌شود باید بنابر اصل بقای انرژی در جای دیگری ظاهر شود. وقتیکه بعداً با عناصر مداری خاص برخورد نمودیم باید متذکر شویم که آیا انرژی به صورتی سهل الوصول ذخیره می‌شود و یا اینکه بطور غیرقابل برگشتی به حرارت، انرژی صوتی و غیره تبدیل می‌شود.

حال باید قراردادی وضع کنیم که به‌وسیله آن بتوانیم بین حالتی که انرژی به‌وسیله منبع خارجی به عنصر داده می‌شود و حالتی که انرژی به‌وسیله عنصر به وسیلهٔ خارجی داده می‌شود تمایز قائل شویم. ما اینکار را به‌وسیله انتخاب علامتی برای ولتاژ ترمینال A نسبت به ترمینال B انجام می‌دهیم. اگر جریان مثبتی به ترمینال A وارد شود و اگر یک منبع خارجی باید انرژی مصرف کند تا این جریان را برقرار کند، در این صورت ترمینال A نسبت به ترمینال B مثبت است و به‌طریق دیگر می‌توانیم بگوییم که ترمینال B نسبت به ترمینال A منفی است. مفهوم ولتاژ به‌وسیله یک جفت علامت مثبت ـ منفی جبری نشان داده می‌شود. مثلاً در شکل ۱-۸a قرار گرفتن علامت مثبت در ترمینال A نشان می‌دهد که ترمینال A به اندازهٔ v ولت نسبت به ترمینال B مثبت می‌باشد. سپس اگر ما دریابیم که مقدار v برابر با ۵v- است آنگاه می‌توانیم بگوییم که یا A به اندازهٔ ۵V- نسبت به B مثبت است و یا B، ۵V نسبت به A مثبت است. سایر حالات در شکلهای ۱ - ۸b - c , d نشان داده

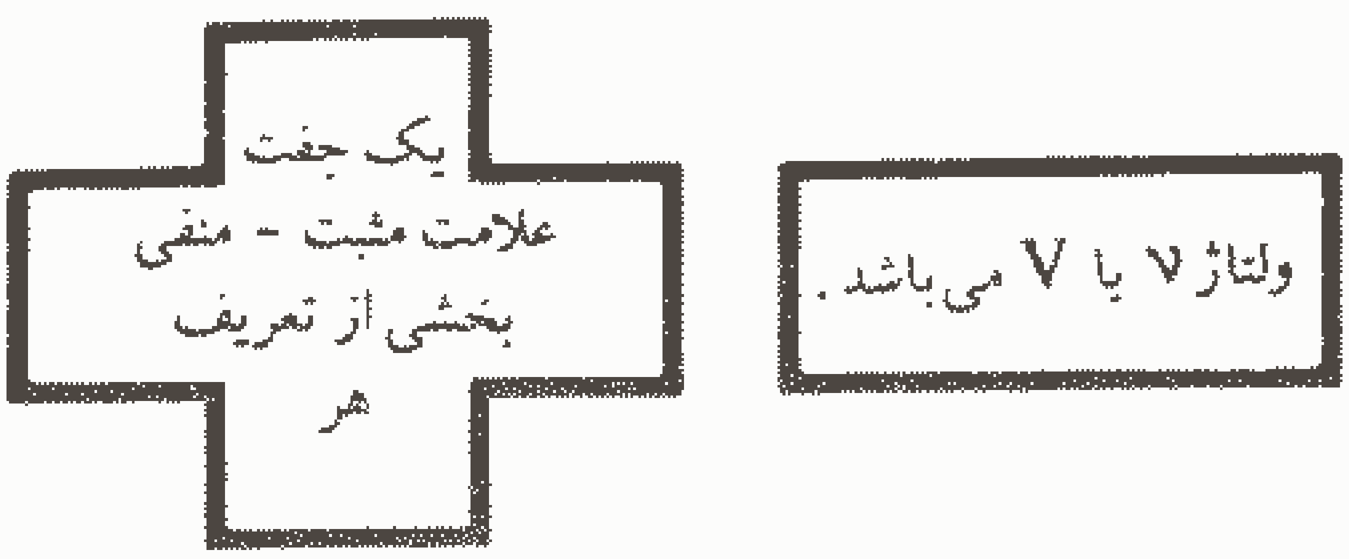
شده‌اند. درست همانگونه که در بحث‌مان دربارهٔ جریان ذکر کردیم لازم است توجه کنیم که علامت مثبت و منفی جبری پلاریته عملی ولتاژ را نشان نمی‌دهد بلکه بطور ساده قراردادی است که ما را قادر می‌سازد بطور دور از ابهام دربارهٔ «ولتاژ دو سر جفت ترمینال» صحبت کنیم. تعریف هر ولتاژی باید شامل یک جفت علامت مثبت ـ منفی استفاده از یک عبارت تعریف نشده می‌باشد. شکلهای 9a , b – ۱ تعریف $v_1(t)$ را ارائه نمی‌کنند اما شکل 9c – ۱ اینکار را انجام می‌دهد.



شکل ۸ ـ ۱: در (a) و (b) ترمینال B به اندازهٔ 5 V نسبت به ترمینال A مثبت است و در (c) و (d) ترمینال A، 5V نسبت به B مثبت است.



شکل ۹ ـ ۱: (a) و (b) تعریف ناقصی از یک ولتاژ (c) تعریف صحیح شامل علامتی برای متغیر و یک جفت علامت مثبت ـ منفی می‌باشد.



تمرین ۴ ـ ۱: در شکل 9c – ۱ فرض کنید $v_1(t) = 100 \cos 250t$ پیدا کنید: (a $v_1(1ms)$ ، (b) $v_1(8ms)$ ، (c) انرژی لازم برای حرکت دادن 4c از ترمینال پایین‌تر به ترمینال بالاتر در $t = 4ms$.

جواب: ۹۶/۹۷V ، ۴۱/۶۷V- ، ۲۱۶J-

۶ ـ ۱ ـ قدرت

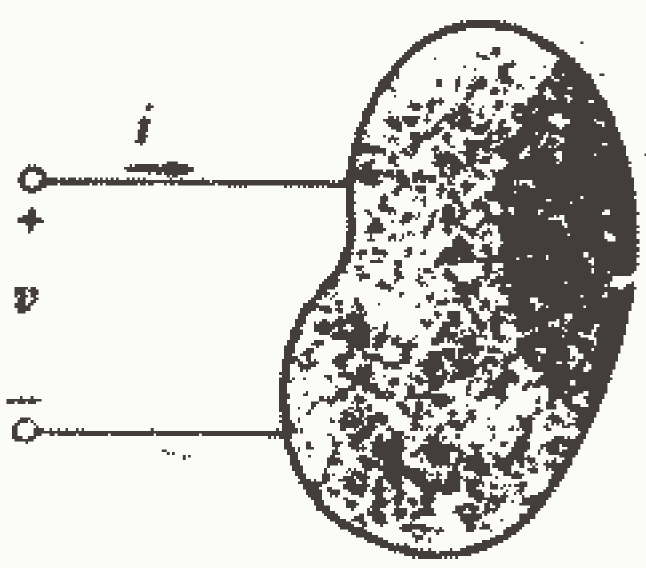
ما اکنون احتیاج داریم عبارتی برای قدرت جذب شده به‌وسیله هر عنصر مداری بر حسب ولتاژ دو سر آن و جریان آن، تعیین کنیم. ولتاژ قبلاً بر حسب صرف انرژی تعریف شده است و قدرت عبارت از سرعت مصرف انرژی می‌باشد. اگرچه تا زمانیکه جهت جریان مشخص نشود هیچ بیانی را راجع به انتقال انرژی در هیچیک از چهار حالت نشان داده شده در شکل ۸ ـ ۱ نمی‌توان ارائه نمود.

بیایید فرض کنیم که یک فلش جریان در هر یک از پایه‌های بالایی رو به سمت راست قرار گرفته باشد و با مقدار «۲A +» مشخص شده باشد، سپس از آنجاییکه در هر دو حالت c , d ترمینال A نسبت به ترمینال B به اندازهٔ ۵V مثبت می‌باشد و یک جریان مثبت به ترمینال A وارد می‌شود پس انرژی به عنصر داده می‌شود و در دو حالت باقیمانده، عنصر به مدار خارجی انرژی می‌دهد.

ما قبلاً قدرت را تعریف کرده‌ایم و باید آن را با P یا p نشان دهیم. اگر یک ژول انرژی برای انتقال یک کولن بار در قطعه‌ای مصرف شود در اینصورت سرعت مصرف انرژی در انتقال یک کولن بار در ثانیه در قطعه یک وات خواهد بود. این قدرت جذب شده باید متناسب با تعداد کولن های انتقال یافته در ثانیه و یا جریان و همچنین انرژی لازم برای انتقال یک کولن در عنصر و یا ولتاژ باشد. بنابراین داریم: $p = vi$ (۳).

از نظر دیمانسیون طرف راست این معادله حاصلضرب ژول بر کولن در کولن بر ثانیه می‌باشد که همانگونه که انتظار می‌رود واحد ژول بر ثانیه و یا وات به‌دست می‌آید.

$J/C \cdot C/s \Rightarrow J/s = W$



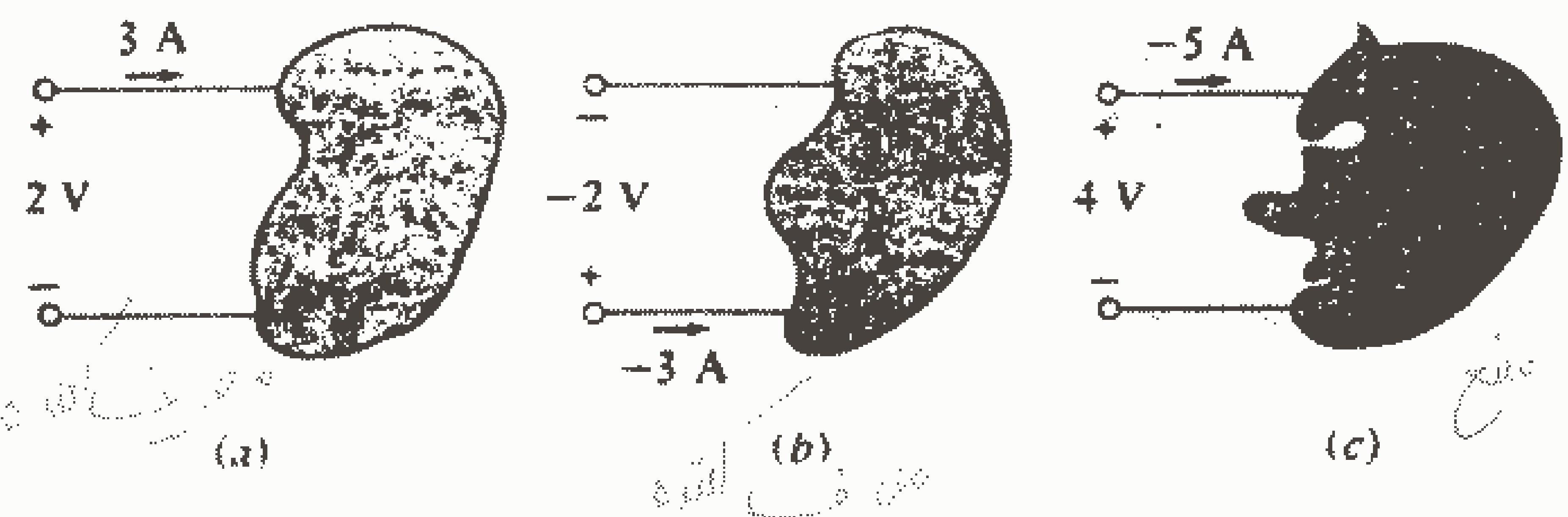
شکل ۱۰ ـ ۱: قدرت جذب شده به وسیله عنصر به صورت حاصلضرب $P = Vi$ می‌باشد.

اگر یک فلش جریان رو به سمت راست و با مقدار «۲A+» در هر یک از پایه‌های بالایی شکل ۸-۱ قرار داده شود قدرت ۱۰w به‌وسیله عنصر c , d ، ۱۰w- به‌وسیله a , b جذب می‌شود (و یا ۱۰w تولید می‌شود).

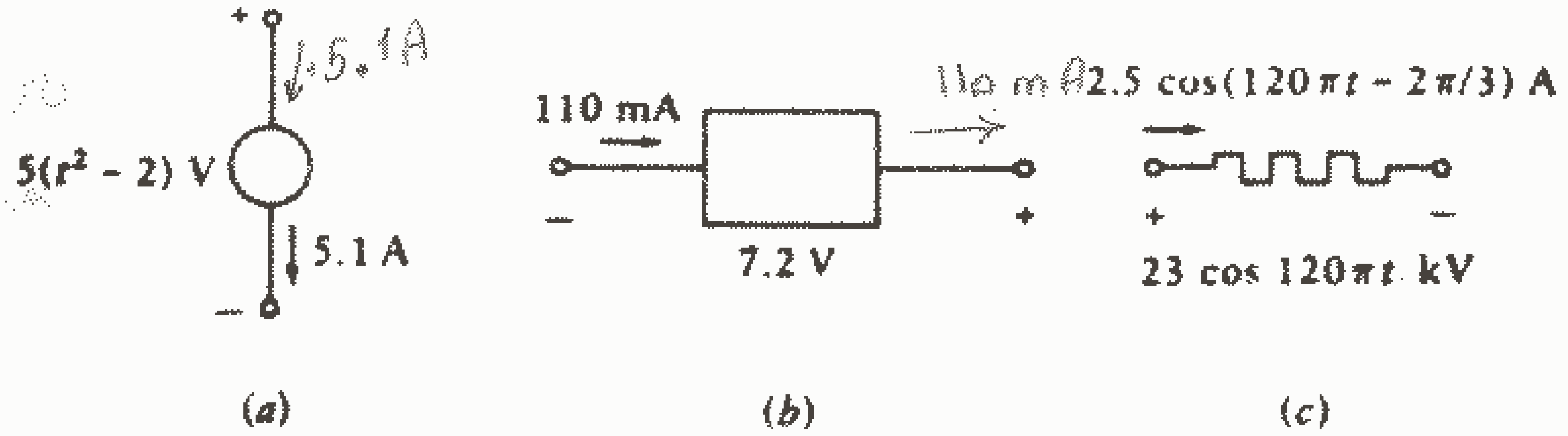
قرارداد جریان، ولتاژ و قدرت در شکل ۱۰ ـ ۱ خلاصه شده است. شکل نشان می‌دهد که

اگر یک ترمینال عنصر V ولت نسبت به دیگری مثبت باشد و جریان i از ترمینال اول وارد عنصر شود در اینصورت قدرت P = vi به‌وسیله عنصر جذب می‌شود و یا به آن تحویل داده می‌شود.

وقتیکه فلش جریان در ترمینال مثبت رو به داخل عنصر باشد ما از قرارداد علامت غیرفعال استفاده می‌کنیم. این قرارداد باید به‌دقت مطالعه و فهمیده شود و به‌خاطر سپرده شود. به‌عبارت دیگر این قرارداد به ما می‌گوید که اگر فلش جریان و پلاریته ولتاژ در ترمینالهای عنصر طوری قرار گیرند که جریان از ترمینال مثبت عنصر وارد شود و اگر هم فلش و هم جفت علامت ولتاژ مقادیر جبری مناسبی مشخص شوند در اینصورت قدرت جذب شده به‌وسیله عنصر را می‌توان با حاصلضرب این دو مقدار بیان نمود. اگر مقدار عددی حاصلضرب منفی باشد در اینصورت می‌گوییم که عنصر قدرت منفی جذب می‌کند و یا عملاً قدرت تولید می‌کند و یا به مدار خارجی قدرت تحویل می‌دهد. مثلاً در شکل ۱۰ ـ ۱ با V = ۵V و i = −٤A می‌توان گفت عنصر −۲۰w جذب می‌کند و یا ۲۰w تولید می‌کند.



شکل ۱۱ ـ ۱: (a) قدرت ٦ w = (۳) (۲) =P به وسیله عنصر جذب می‌شود.
(b) قدرت ٦ w = (−۳) (−۲) =P به وسیله عنصر جذب می‌شود.
(c) قدرت −۲۰ w = (−۵) (٤) =P به وسیله عنصر جذب می‌شود و یا ۲۰ W به وسیله عنصر تحویل داده می‌شود.



شکل ۱۲ ـ ۱: به تمرین ۵ ـ ۱ مراجعه کنید.

سه مثال شکل ۱۱ ـ ۱ این قرارداد را بیشتر توضیح می‌دهد.

تمرین ۵ - ۱ - پیدا کنید: (a) قدرت تحویل داده شده به عنصر مداری شکل ۱۲a-۱ در $t =$ ۰٫۸s، (b) قدرت تولید شده به وسیله عنصر مداری در شکل ۱۲b-۱، (c) قدرت جذب شده به وسیله عنصر مداری در شکل ۱۲c-۱ در $t = 0$.

جواب: ۳۴/۶۸w- , ۷۹۲mw , ۲۸/۷۵Kw-

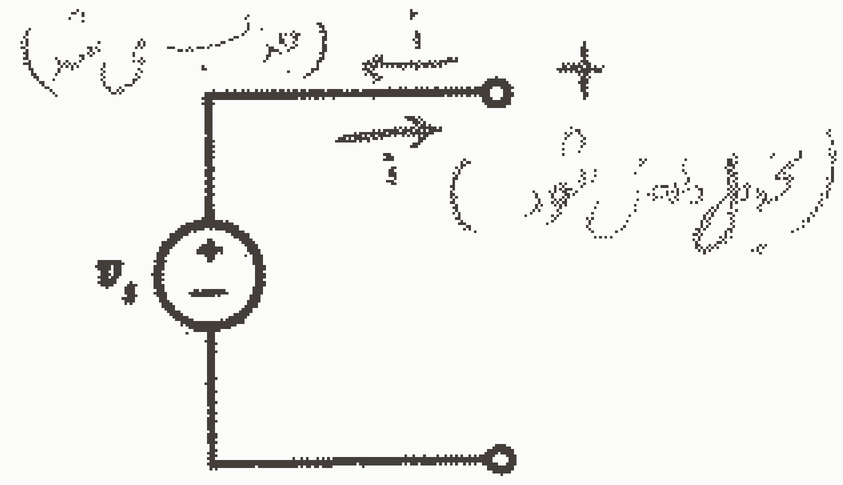
۷ ـ ۱ ـ انواع مدارها و عناصر مداری

با استفاده از مفاهیم جریان و ولتاژ اکنون امکان تعریف دقیق‌تر عنصر مداری وجود دارد. این امر حائز اهمیت است که مابین قطعهٔ فیزیکی و مدل ریاضی آن که ما برای تحلیل رفتار آن در مدار بکار خواهیم برد تفاوت قائل شویم. بیایید توافق کنیم ما عبارت «عنصر مداری» را برای اشاره به مدل ریاضی بکار بریم. انتخاب یک مدل خاص بر هر قطعهٔ واقعی باید براساس اطلاعات تجربی و یا آزمایش صورت بگیرد و ما معمولاً فرض خواهیم کرد که این انتخاب قبلاً انجام یافته است. ما باید ابتدا روشهای تحلیل مدارهای ایده آل را بیاموزیم. عنصر مداری عمومی - عنصر مداری ساده

اکنون اجازه دهید بین یک عنصر مداری عمومی و یک عنصر مداری ساده با بیان اینکه یک عنصر مداری عمومی ممکن است ترکیبی از چند عنصر مداری ساده باشد اما یک عنصر مداری ساده را نمی‌توان به عناصر مداری سادهٔ دیگر تجزیه نمود، تفاوت قائل شویم. جهت اختصار توافق می‌کنیم که عبارت عنصر مداری را کلاً برای عنصر مداری ساده بکار بریم. تمام عناصر سادهٔ مداری را که در آینده با آنها مواجه خواهیم شد می‌توان با توجه به رابطهٔ بین ولتاژ دو سر عنصر و جریان آن طبقه‌بندی نمود. مثلاً، اگر ولتاژ دو سر عنصر مستقیماً متناسب با جریان آن باشد یعنی $v = ki$ در اینصورت ما این عنصر را مقاومت می‌نامیم. سایر انواع عناصر مداری ساده دارای ولتاژ متناسب با مشتق زمانی و یا انتگرال نسبت به زمان جریان می‌باشند. همچنین عناصری وجود دارند که ولتاژ آنها کاملاً مستقل از جریان و یا جریان کاملاً مستقل از ولتاژ می‌باشد، اینها را منابع مستقل می‌نامند. به‌علاوه، ما نیاز به تعریف انواع خاص منابع داریم که در آنها ولتاژ و یا جریان بستگی به جریان یا ولتاژ قسمت دیگری از مدار دارد، چنین منابعی را منابع وابسته یا کنترل شده می‌نامند.

بنابر تعریف یک عنصر مداری ساده عبارت است از مدل ریاضی یک قطعهٔ الکتریکی دو ترمینالی و آن را می‌توان به‌وسیله رابطهٔ ولتاژ ـ جریان آن کاملاً توصیف نمود و نمی‌توان آن را به قطعات دو ترمینالی دیگر تجزیه نمود.

اولین عنصری که ما به آن نیاز داریم منبع ولتاژ مستقل می‌باشد که آن را به‌وسیله یک ولتاژ ترمینال که کاملاً مستقل از جریان آن است مشخص می‌نماییم. بنابراین، اگر یک منبع ولتاژ مستقل بما داده شود و گفته شود که ولتاژ ترمینال ۵۰t^2V است، می‌توانیم مطمئن باشیم که در $t = 2s$ ولتاژ برابر با ۲۰۰V خواهد بود، صرفنظر از جریانی که کشیده می‌شد یا کشیده می‌شود و یا کشیده خواهد شد. نمایش یک منبع ولتاژ مستقل در شکل ۱۳ ـ ۱ نشان داده شده است. اندیس S صرفاً نشان‌دهندهٔ این است که ولتاژ مورد نظر ولتاژ منبع می‌باشد.



شکل ۱۳ ـ ۱: سمبل مداری یک منبع ولتاژ مستقل. سمبل مداری یک منبع ولتاژ وابسته با کنترل شده در شکل ۱۶a ـ ۱ نشان داده شده است.

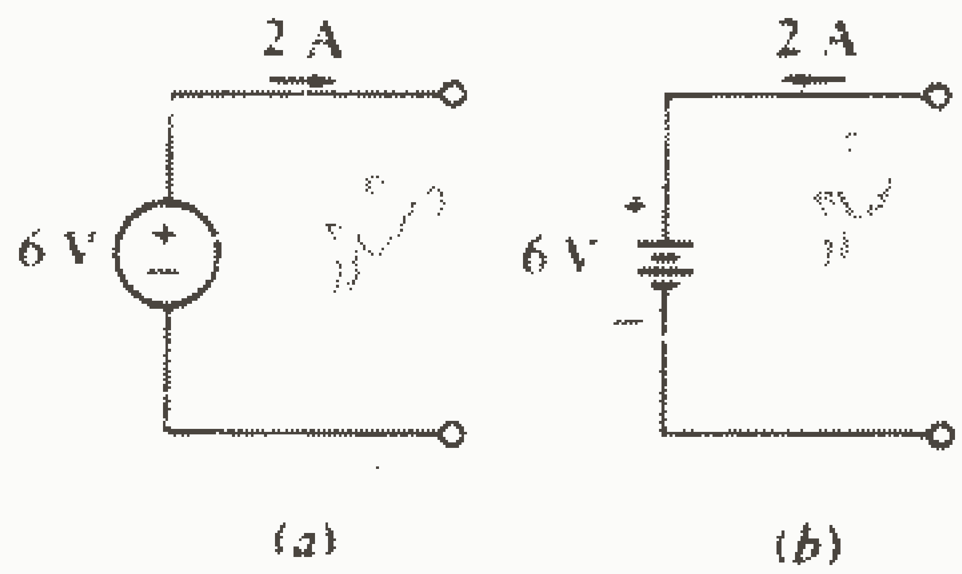
نکته‌ای که تکرار آن مفید است این است که وجود علامت مثبت در انتهای فوقانی سمبل مداری منبع ولتاژ مستقل در شکل ۳-۱ الزاما به این معنی نیست که ترمینال بالایی همیشه باید نسبت به ترمینال پایینی مثبت باشد. بلکه به این معنی است که ترمینال بالایی v_s ولت نسبت به ترمینال پایینی مثبت می‌باشد. اگر، در لحظه‌ای، v_s منفی باشد در اینصورت ترمینال بالایی عملا نسبت به ترمینال پایینی در آن لحظه منفی می‌باشد.

اگر یک فلش جریان با مقدار « i » در مجاورت پایهٔ فوقانی این منبع قرار گیرد و رو به چپ باشد در اینصورت جریان i به ترمینالی که علامت مثبت دارد وارد می‌شود بنابراین منبع قدرت $P = v_s i$ را جذب کند. در نتیجه ما ممکن است جهت فلش را رو به راست انتخاب کنیم تا قدرت $v_s i$ به‌وسیله منبع تحویل داده شود. هر یک از این دو جهت را می‌توان بکار برد.

منبع ولتاژ مستقل یک منبع ایده آل است و نمی‌تواند دقیقاً نمایندهٔ هر وسیلهٔ فیزیکی واقعی باشد زیرا منبع ایده آل بطور تئوری می‌تواند انرژی بی‌نهایت از ترمینالهایش تحویل دهد. هر کولن که از میان آن عبور می‌کند انرژی v_s ژول می‌گیرد و تعداد کولن‌ها در ثانیه نامحدود است. اگرچه، این منبع ولتاژ ایده آل می‌تواند تقریب قابل قبولی برای برخی منابع ولتاژ عملی باشد. مثلاً یک باتری اتومبیل دارای ولتاژ ترمینالی ۱۲V می‌باشد که تا زمانیکه جریان عبوری از

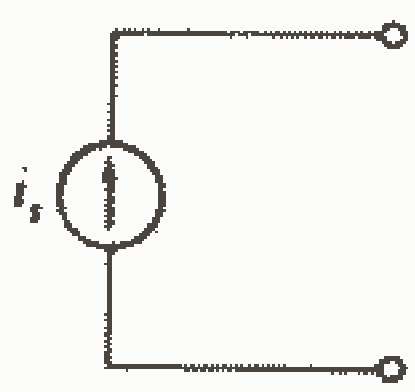
آن بیش از چند آمپر نشود، ثابت می‌ماند. این جریان کوچک می‌تواند در هر یک از دو جهت جاری شود. اگر آن مثبت باشد و از ترمینال مثبت خارج شود در اینصورت باتری به چراغهای جلو قدرت می‌دهد و می‌گوییم دشارژ می‌شود اما اگر جریان مثبت باشد و رو به داخل ترمینال مثبت جاری باشد در اینصورت باتری در حال شارژ شدن است.

یک پریز برق خانگی معمولی نیز بطور تقریب می‌تواند یک منبع ولتاژ مستقل باشد که ولتاژ $v_s = ۱۱۵\sqrt{۲}\cos ۲\pi ۶۰ t$ V را ارائه می‌کند و این بیان برای جریانهای کمتر از ۲۰A صحیح است. یک منبع ولتاژ مستقل که دارای یک ولتاژ ترمینال ثابت است اغلب منبع ولتاژمستقل dc[1] نامیده‌می‌شودو با یکی از دو علامت شکل ۱۴ ـ ۱ نشان داده می‌شود. در شکل ۱۴b - ۱ توجه داشته باشید که وقتیکه صفحات واقعی باتری در نظر گرفته شود صفحهٔ طویل‌تر در ترمینال مثبت قرار می‌گیرد و در اینصورت علامت مثبت و منفی زائد و اضافی می‌باشند ولی آنها معمولاً بکار می‌روند.



شکل ۱۴ ـ ۱: نمایش‌های مختلف یک منبع ولتاژ ثابت یا dc
در (a) منبع ۱۲ w تحویل می‌دهد و در (b) باتری
۱۲ w جذب می‌کند.

منبع ایده آل دیگری که ما نیاز خواهیم داشت منبع جریان مستقل می‌باشد. در این مورد جریان عبوری از عنصر کاملاً مستقل از ولتاژ دو سر آن است. سمبل یک منبع جریان مستقل در شکل ۱۵ ـ ۱ نشان داده شده است. اگر i_s ثابت باشد منبع را منبع جریان مستقل dc می‌نامیم.



شکل ۱۵ ـ ۱: سمبل مداری یک منبع جریان مستقل

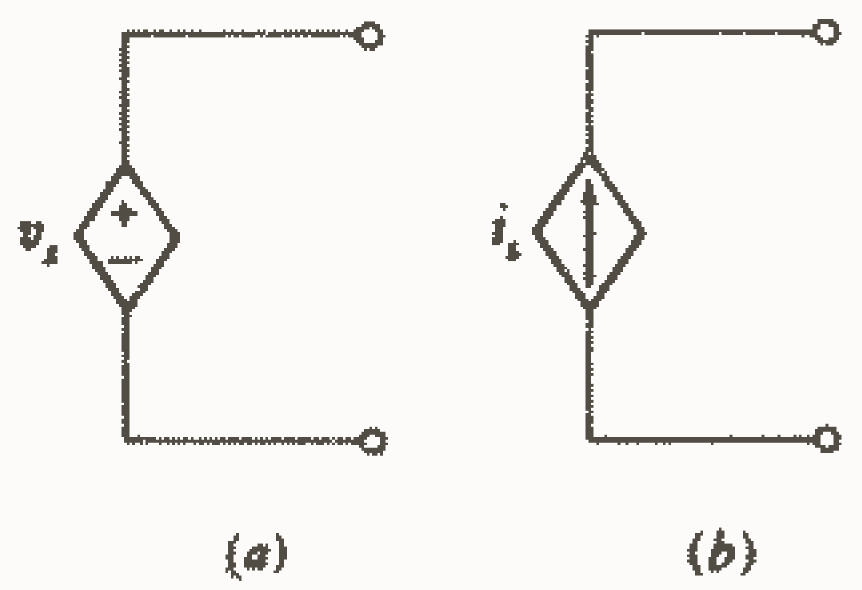
---

۱ - عباراتی مانند «منبع ولتاژdc » و «منبع جریان dc » بطور معمول و رایج بکار می‌روند. بطور دقیق‌تر آنها به معنی «منبع ولتاژ جریان مستقیم» و «منبع جریان، جریان مستقیم» می‌باشند. اگرچه این عبارات ممکن است طولانی و گیج کننده باشند و بقدری کاربرد وسیع دارند که دلیلی برای مخالفت با آنها وجود ندارد.

مانند منبع ولتاژ مستقل، منبع جریان مستقل تقریب خوبی برای یک عنصر فیزیکی است. بطور تئوری آن می‌تواند قدرت بی‌نهایت از ترمینال‌هایش تحویل دهد زیر برای هر ولتاژی که دو سرش باشد هر چقدر هم که این ولتاژ بزرگ باشد جریان یکسانی تولید می‌کند. با وجود این تقریب خوبی برای بسیاری از منابع عملی بخصوص در مدارات الکترونیکی است.

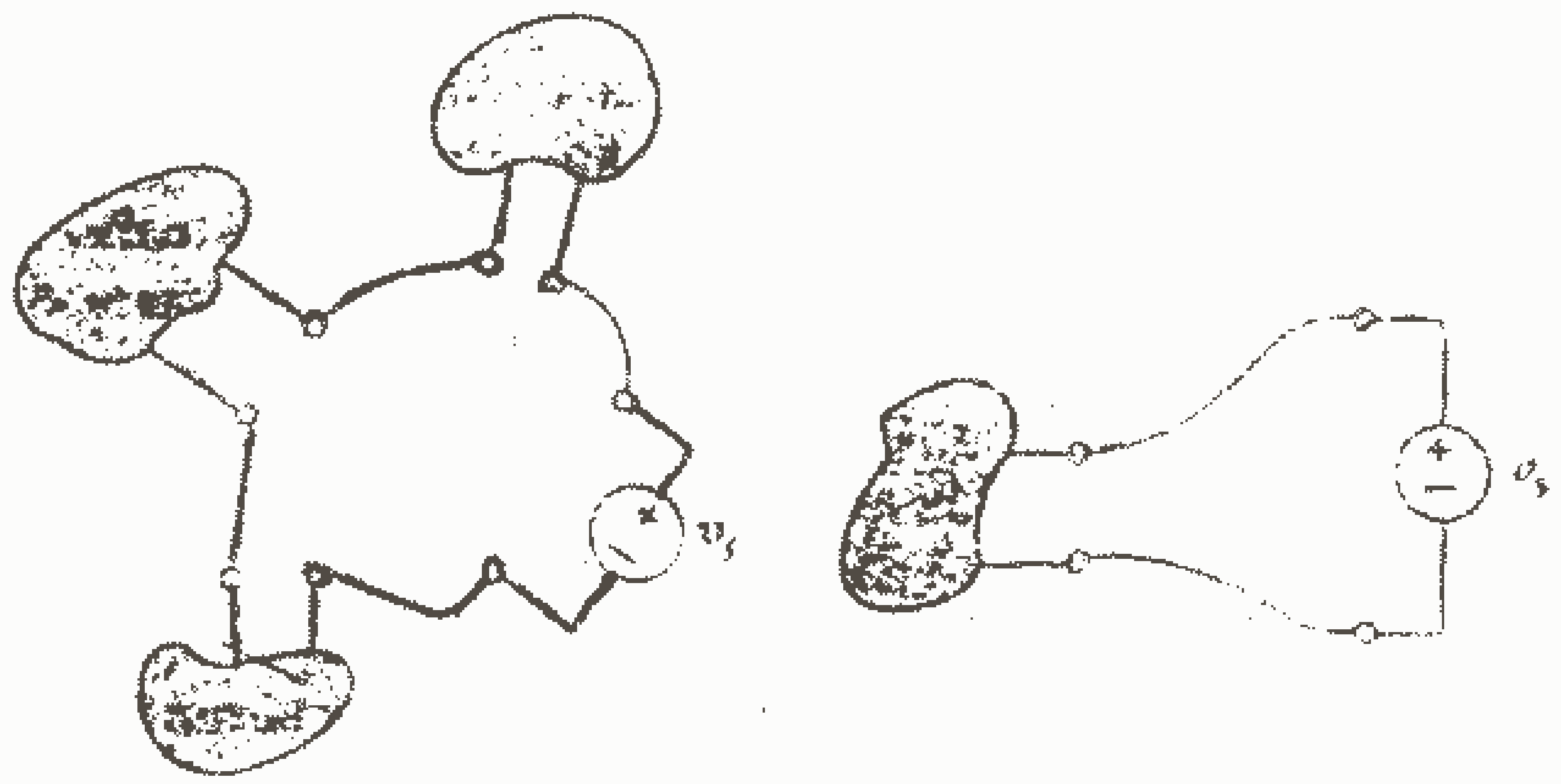
همچنین منبع جریان مستقل dc با تقریب بسیار نزدیکی بیانگر شعاع پروتونی یک سیکلوترون که در جریان اشعهٔ ثابت در حدود $1\mu A$ کار می‌کند و تحویل $1\mu A$ را تقریباً با هر قطعه‌ای که در دو سر ترمینالهایش (زمین و اشعه) قرار گیرد ادامه می‌دهد، می‌باشد. دو نوع منابع ایده آل را که تاکنون مورد بحث قرار داده‌ایم منابع مستقل نامیده می‌شوند زیرا مقدار کمیت منبع به هیچ وجه به‌وسیله فعالیتهای بقیه مدار تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد. این مغایر با نوع دیگری از منبع ایده آل یعنی منبع وابسته یا کنترلشده که در آن کمیت منبع به‌وسیله جریان یا ولتاژ قسمت دیگری از مدار کنترل می‌شود، می‌باشد. برای تمایز قائل شدن بین منابع مستقل و وابسته سمبلهای لوزی شکل نشان داده شده در شکل ۱۶ ـ ۱ را معرفی می‌کنیم. چنین منابعی در مدار معادل الکتریکی بسیاری از قطعات الکترونیکی مانند ترانزیستورها، تقویت کننده‌های عملیاتی و مدارهای مجتمع ظاهر می‌شوند. ما همهٔ اینها را در فصول آتی خواهیم دید.

منابع ولتاژ و جریان مستقل و وابسته عناصر فعال هستند و قادرند به مدار خارجی قدرت تحویل دهند. حال ما یک عنصر غیرفعال را به‌عنوان عنصری که فقط قادر است قدرت بگیرد تصور می‌کنیم. اگرچه، بعداً خواهیم دید که برخی عناصر غیرفعال قادر به ذخیرهٔ مقدار محدودی انرژی و باز پس دادن آن به یک عنصر خارجی می‌باشند و چون ما فعلاً آنها را عنصر غیرفعال می‌نامیم در آینده لازم خواهد بود که دو تعریف خود را اصلاح کنیم.

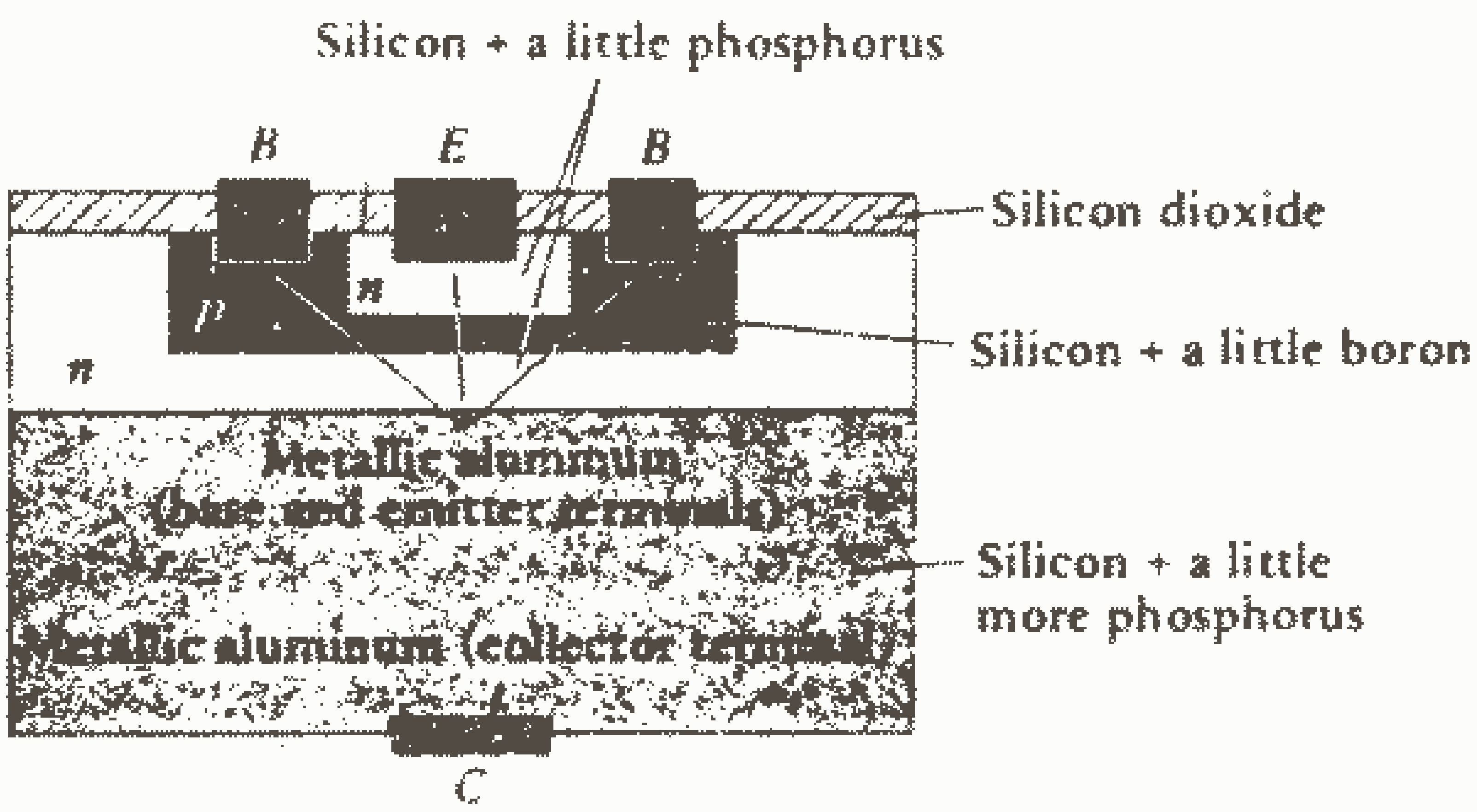


شکل ۱۶ ـ ۱: شکل‌های لوزی گونه سمبل مداری منبع ولتاژ وابسته را در (a) و منبع جریان وابسته را در (b) نشان می‌دهند.

اتصال دو یا چند عنصر مداری ساده یک شبکهٔ الکتریکی نامیده می‌شود. اگر شبکه حداقل یک مسیر بسته داشته باشد آن را یک مدار الکتریکی نیز می‌نامند. هر مدار یک شبکه است ولی همهٔ شبکه‌ها مدار نیستند. شکل ۱۷a - ۱ شبکه‌ای را نشان می‌دهد که مدار نیست و شکل ۱۷b - ۱ شبکه‌ای را نشان می‌دهد که یک مدار هم هست.



(b)



(a)

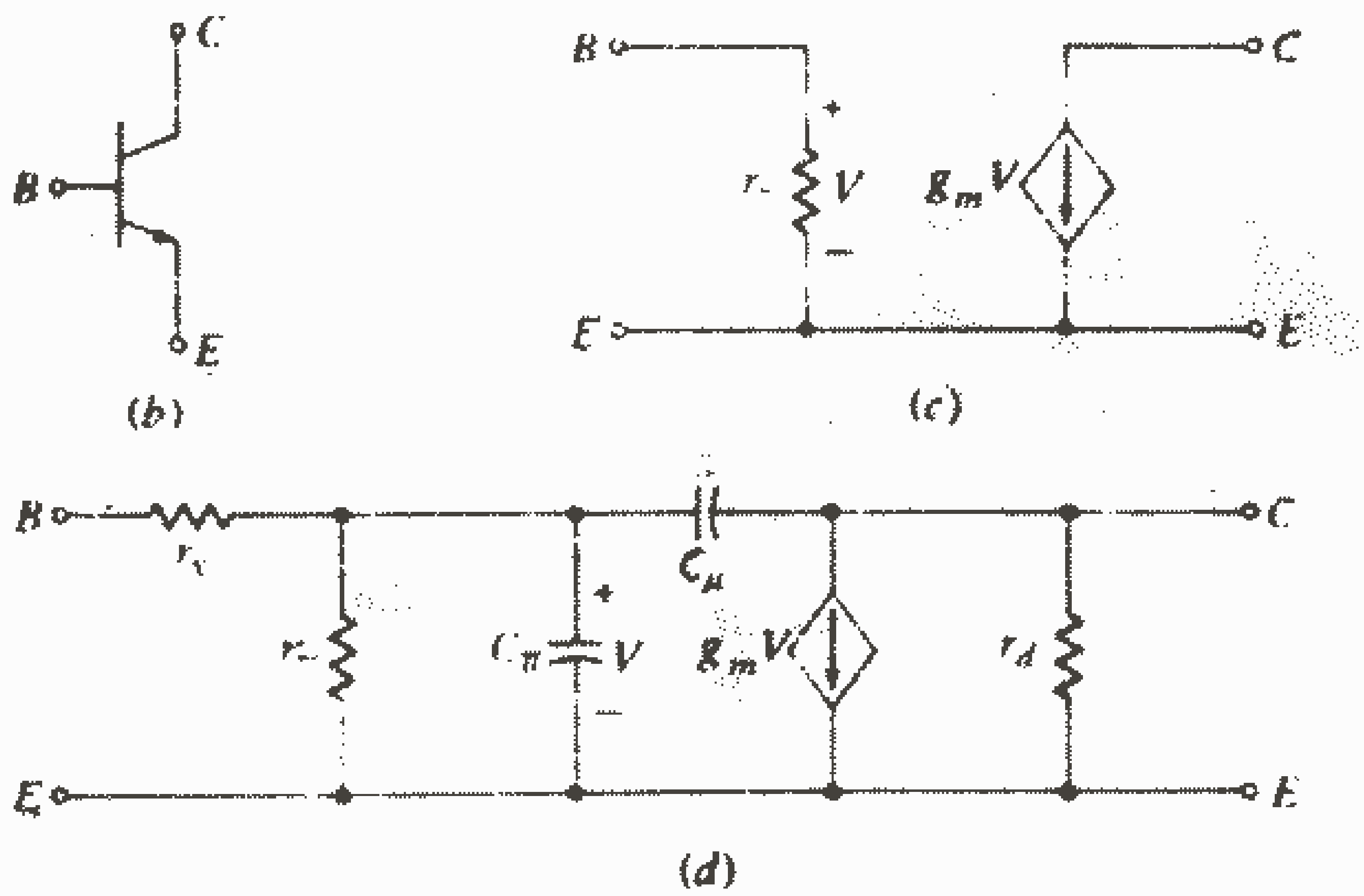
شکل ۱۷ ـ ۱: (a) یک شبکهٔ الکتریکی که مدار نیست. (b) یک شبکه که مدار هم هست.

شبکه‌ای که حداقل دارای یک عنصر فعال باشد، مانند یک منبع ولتاژ یا جریان مستقل، یک شبکه فعال می‌باشد. شبکه‌ای که دارای هیچ عنصر فعالی نباشد یک شبکهٔ غیرفعال است.

ما اکنون چیزی را که عنصر مداری می‌نامیم تعریف کرده‌ایم و تعاریف چند عنصر مداری

خاص از قبیل منابع ولتاژ و جریان مستقل و وابسته را ارائه کرده‌ایم. در باقیماندهٔ کتاب ما فقط چهار عنصر مداری دیگر را که همگی غیرفعال هستند تعریف خواهیم کرد بنامهای: مقاومت، سلف، خازن و یک جفت سلف که بطور متقابل کوپل شده‌اند. اینها همگی عناصر ایده‌آل هستند. آنها حائز اهمیت هستند زیرا ما می‌توانیم آنها را به‌صورت شبکه‌ها و مدارهایی که بیانگر وسایل واقعی هستند با دقتی که می‌خواهیم ترکیب کنیم.

بنابراین ترانزیستوری که ساختمان فیزیکی آن در شکل ۱۸a - ۱ ارائه شده است و سمبل الکتریکی آن در شکل ۱۸b - ۱ داده شده است را می‌توان به‌وسیله یک مقاومت و یک منبع جریان وابسته در شکل ۱۸C - ۱ مدل‌سازی کرد البته اگر ما فقط نیاز به عملکرد تقریبی آن در فرکانسهای متوسط داشته باشیم. توجه د اشته باشید که منبع جریان وابسته جریانی تولید می‌کند که بستگی به یک ولتاژ در جای دیگری از مدار دارد. شکل ۱۸d - ۱ مدل دقیق‌تری را برای کاربردهای فرکانس بالا که حاوی سه مقاومت، دو خازن و یک منبع جریان وابسته است، نشان می‌دهد.

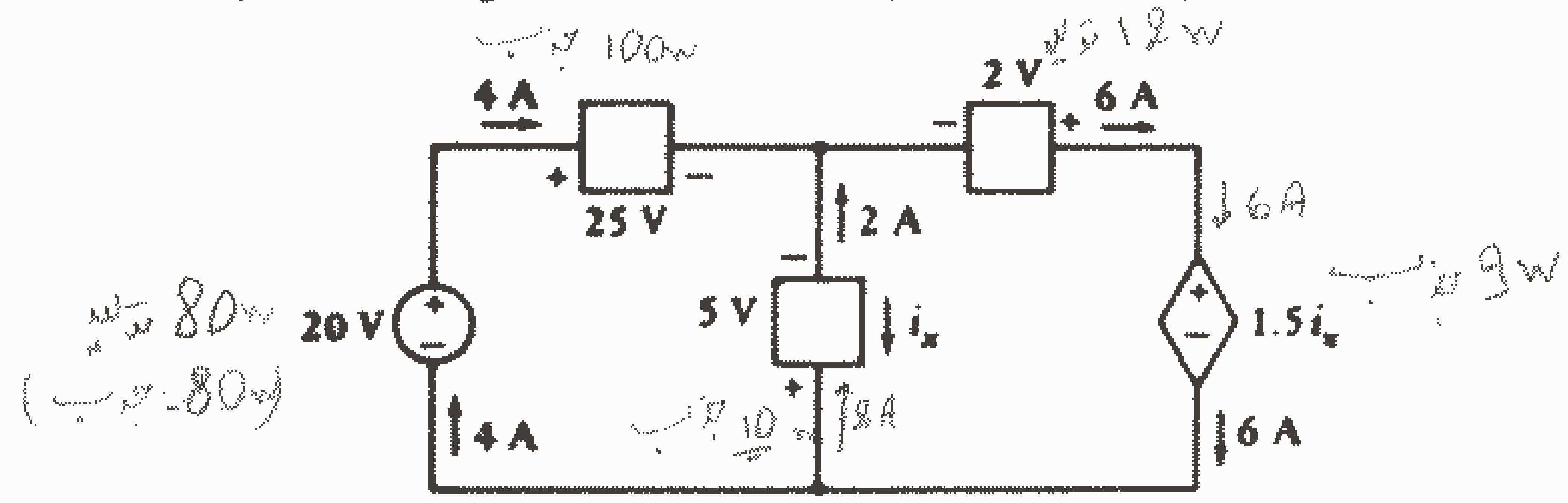


شکل ۱۸ ـ ۱: یک ساختمان فیزیکی ممکن برای یک ترانزیستور npn در قطبی سیلیکون (به مقیاس نیست) (b) سمبل مداری ترانزیستور npn (c) یک مدل مداری ساده که در فرکانس متوسط مفید می‌باشد. (d) یک مدل دقیق‌تر برای فرکانس بالا.

چنین ترانزیستورهایی ممکن است فقط قسمت کوچکی از یک مدار مجتمع را که احتمالاً به مساحت $۲mm^2$ و ضخامت ۰/۲mm است تشکیل دهند که البته هنوز چند هزار ترانزیستور و هزاران مقاومت و خازن هم دارد. بنابراین ما یک وسیله فیزیکی داریم که اندازه‌اش در حدود یکی از حروف این صفحه می‌باشد اما مدل آن شاید ترکیبی است از ده هزار عنصر مداری سادهٔ ایده آل.

مدلهای مناسب برای وسایل فیزیکی مختلف که دارای کاربردهای وسیعی هستند در دروس الکترونیک، تبدیل انرژی، آنتن و سایر دروسی که بعداً در دورهٔ تحصیلات مهندسی ظاهر خواهند گشت، مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

تمرین ۶ - ۱: قدرت جذب شده توسط هر عنصر در مدار شکل ۱۹ ـ ۱ را پیدا کنید.



شکل ۱۹ ـ ۱: مربوط به تمرین ۶ ـ ۱

مسائل[1]

۱ ـ یک خبرنگار مشهور خوش برخورد و ملایم[2] که دارای جرم ۸۰Kg می‌باشد، می‌تواند به بالای یک ساختمان بلند (۲۵۰m) با یک خیز، جهش کند و از نظر سرعت هم به سرعت گلوله ($۶۰۰m/_s$) می‌باشد. (a) حداکثر سرعت او بر حسب مایل بر ساعت چقدر است؟ (b) چه مقدار انرژی باید به خیزش بدهد تا دقیقاً به بالای ساختمان برسد؟ (c) این انرژی تا چند روز می‌تواند یک ماشین حساب الکترونیکی را که مصرف آن ۱۰۰mw می‌باشد، تغذیه کند؟ (d) نام دوست‌دختر این خبرنگار چیست؟

۲ ـ یک مرد یا زن ۷۰ کیلوگرمی با نرخ متوسط ۱۲۰w در ۲۴ ساعت انرژی می‌سوزاند. این سرعت متابولیکی هنگام خواب به ۷۵w تنزل می‌کند و هنگام پیاده‌روی به ۲۳۰w و هنگام دو با سرعت $۱۰mi/_h$ به ۱۰۰۰w صعود می‌کند. انرژی مصرف شده بر حسب اسب بخار هنگام دو با سرعت $۱۰mi/_h$ چقدر است؟

---

۱ - جواب مسائل فرد در آخر کتاب داده شده است.

۲ - اشاره به شخصیت یک سریال تلویزیونی در آمریکا دارد که شخصیتی قهرمان گونه (مثلا مانند سوپرمن) می‌باشد. (مترجم)

۳ ـ وقتیکه یک لباس خشک کن برقی خاصی با تمام قدرت کار می‌کند، ۵٫۲KW قدرت می‌کشد. (a) چند «اسب متوسط» را برای تولید این قدرت باید به‌کار برد؟ (b) با فرض اینکه سوختی دارای چگالی $۵۰\,\mathrm{lbm}/_{\mathrm{ft}}۳$ باشد و ۱۸۵۰۰^{btu} بر پوند جرم ارائه کند، چند لیتر ($۱۰۰۰\mathrm{cm}^{۳}$ = لیتر ۱) سوخت باید بدهیم تا این خشک کن به مدت یک ساعت کار کند؟

۴ ـ بار خالصی که در یک هادی در نقطهٔ x به سمت راست منتقل شده است، به‌صورت تابعی از زمان به‌صورت مقابل داده شده است:

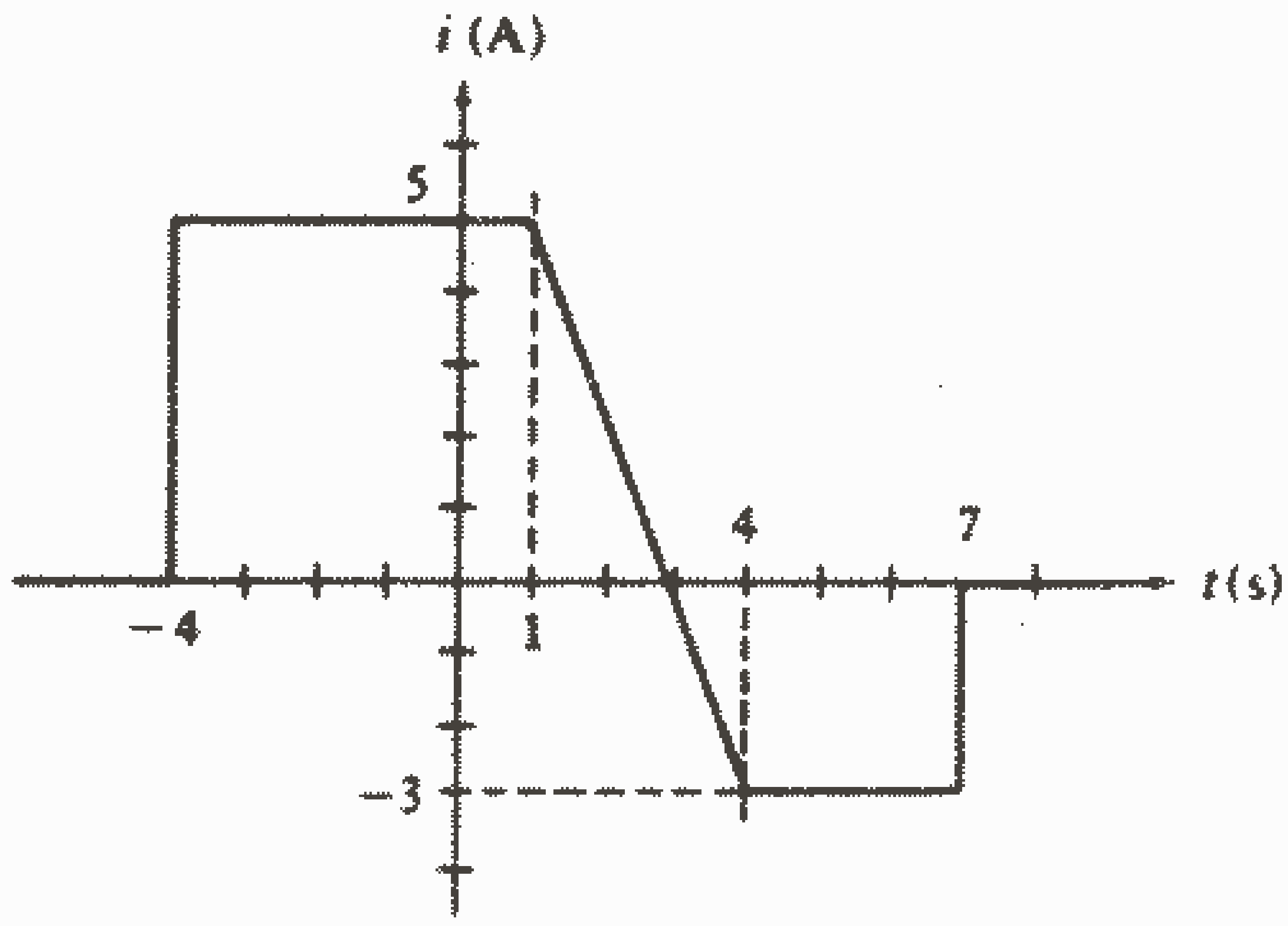
$$q = ۷c,\ t \geq ۶,\ q = ۵\sqrt{t + ۳^{-۸}},\ ۱ \leq t \leq ۶,\ q = ۴t + ۱۶,\ -۴ \leq t \leq -۲,$$

$$q = ۰\ ,\ t \leq -۴s,\ q = ۲t^{۲},\ -۲ \leq t \leq ۱$$

(a) q را نسبت به t رسم کنید. (b) i را درلحظات:

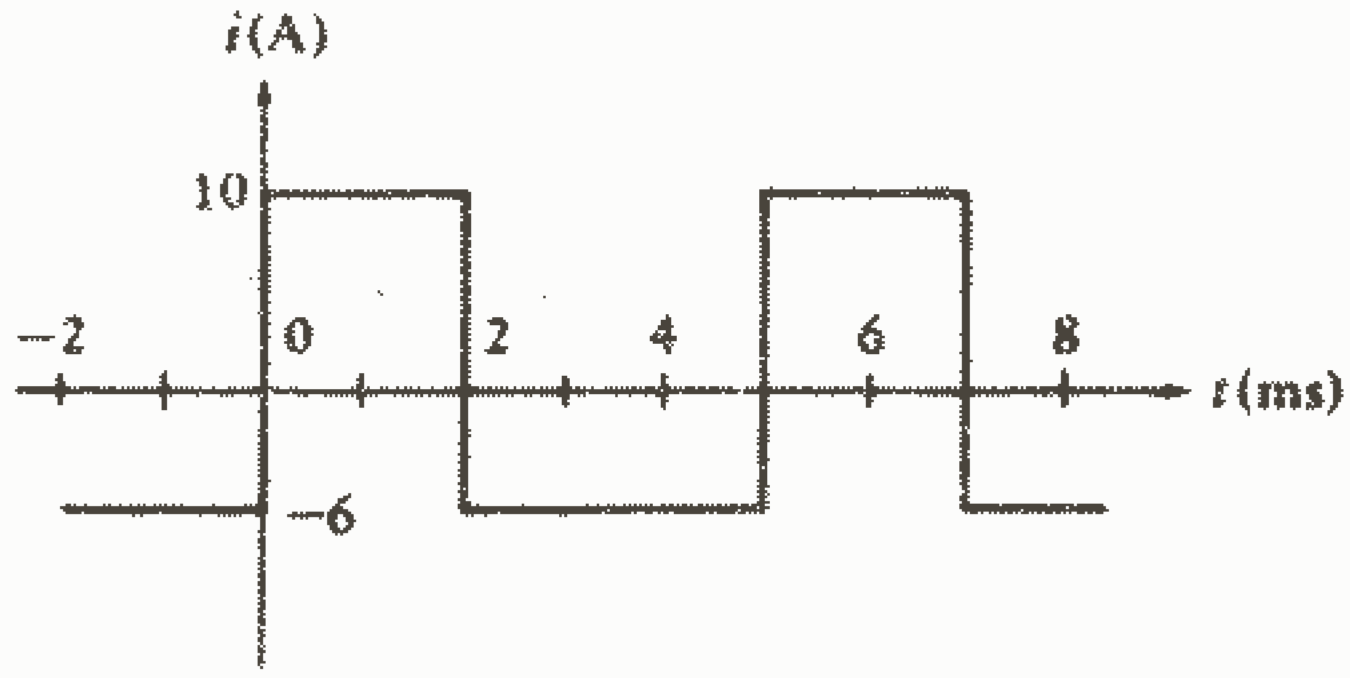
$t = -۴٫۵, -۳٫۵, -۲٫۵, \ldots, ۵٫۵, ۶٫۵s$ محاسبه کنید و i را نسبت به t رسم کنید.

۵ ـ نمودار i بر حسب t در شکل ۲۰-۱ داده شده است، کل باری را که از نقطه مرجع در فاصلهٔ زمانی $-۲ < t < ۵_s$ منتقل شده است محاسبه کنید.



شکل ۲۰ ـ ۱: به مسئله ۵ مراجعه کنید.

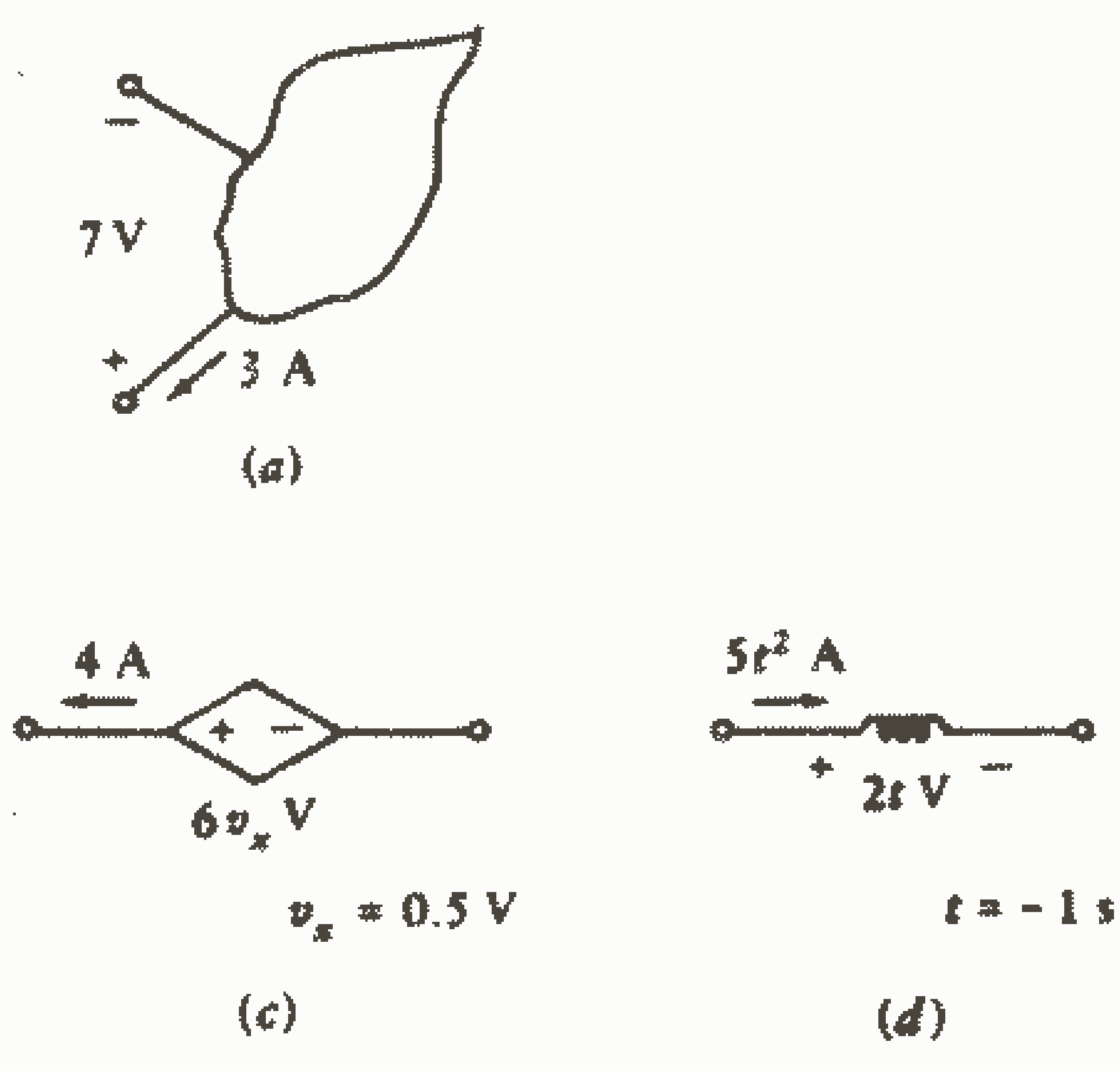
۶ ـ شکل موج شکل ۲۱-۱ دارای پریود $5ms$ می‌باشد. (a) مقدار متوسط جریان در یک پریود چقدر است؟ (b) چقدر بار در فاصلهٔ $1 \le t \le 4ms$ منتقل می‌شود؟ (c) اگر $q(0) = 0$ آنگاه $q(t)$ را در فاصلهٔ $0 < t < 12ms$ رسم کنید.



شکل ۲۱ ـ ۱: به مسئله ۶ و ۱۰ مراجعه کنید.

۷ ـ کل باری که به سمت راست نقطه A در یک هادی خاص بین t تا $t = 0$ جاری شده است به صورت $q_A(t) = 100e^{-200t} \cos 500t \; mc$ مشخص شده است. (a) چقدر بار بین $t = 1ms$ و $t = 2ms$ به سمت راست جاری می‌شود. (b) جریان روبه‌راست A در $t = 1ms$ چقدر است؟ (c) حال فرض کنید جریان روبه‌راست در A عبارت از $i_A(t) = 2(e^{-5000t} - e^{-8000t})A$ باشد، مقدار باری را که در فاصلهٔ $t=10\mu s$, $t = 80\mu s$ به راست جاری می‌شود چقدر است؟

۸ ـ قدرتی را که به‌وسیله هر یک از عناصر مداری شکل ۲۲-۱ جذب می‌شود، پیدا کنید.



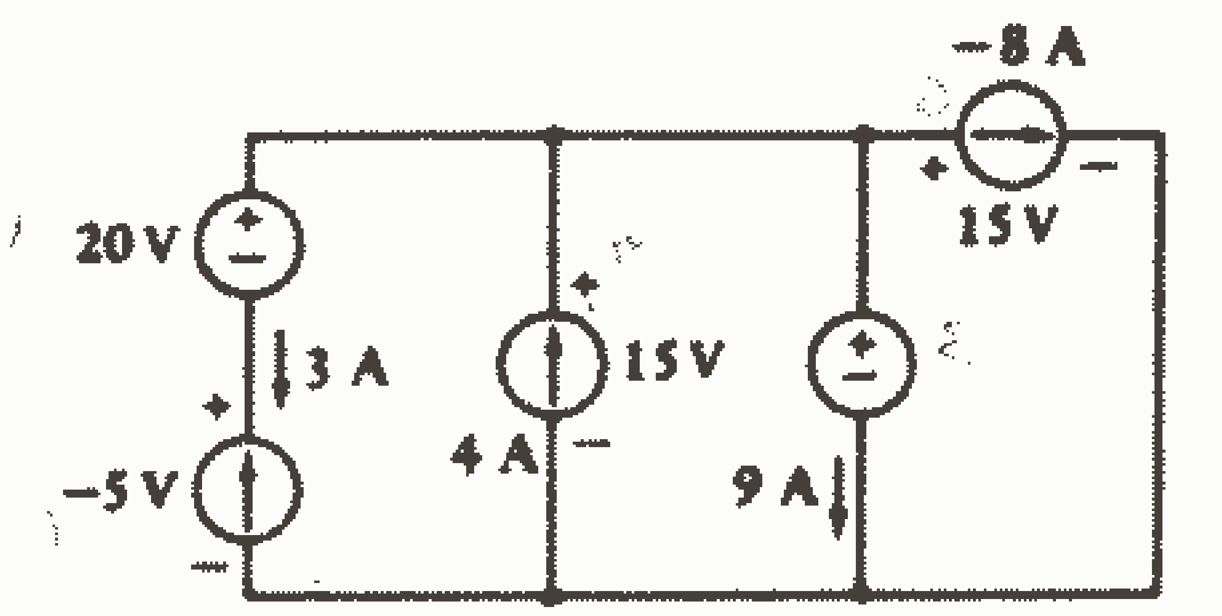
شکل ۲۲ ـ ۱: به مسئله ۸ مراجعه کنید.

۹ ـ فرض کنید برای عنصر مداری شکل ۱۰-۱ داشته باشیم: $i = 4e^{-50t}$ A و $v = 20 - 30e^{-50t}$ V (a) چقدر قدرت به‌وسیله این وسیله در $t = 10\text{ms}$ جذب می‌شود؟ (b) چقدر انرژی در فاصلهٔ $0 < t < \infty$ به این وسیله تحویل داده می‌شود؟

۱۰ ـ جریان i شکل ۲۱-۱ به ترمینال + یک عنصر مداری با ولتاژ v وارد می‌شود که $v = 20 \sin 400\pi t$ V می‌باشد. (a) ماکزیمم قدرت جذب شده به‌وسیله این عنصر چقدر است و در چه زمانی انجام می‌شود؟ (b) ماکزیمم قدرتی که این عنصر تحویل می‌دهد چقدر است و در چه زمانی روی می‌دهد؟ (c) چقدر انرژی در فاصلهٔ $0 < t < 5\text{ms}$ به این عنصر مداری تحویل داده می‌شود؟ (d) در این فاصله زمانی چه قدرت متوسطی به‌وسیله این عنصر جذب می‌شود؟

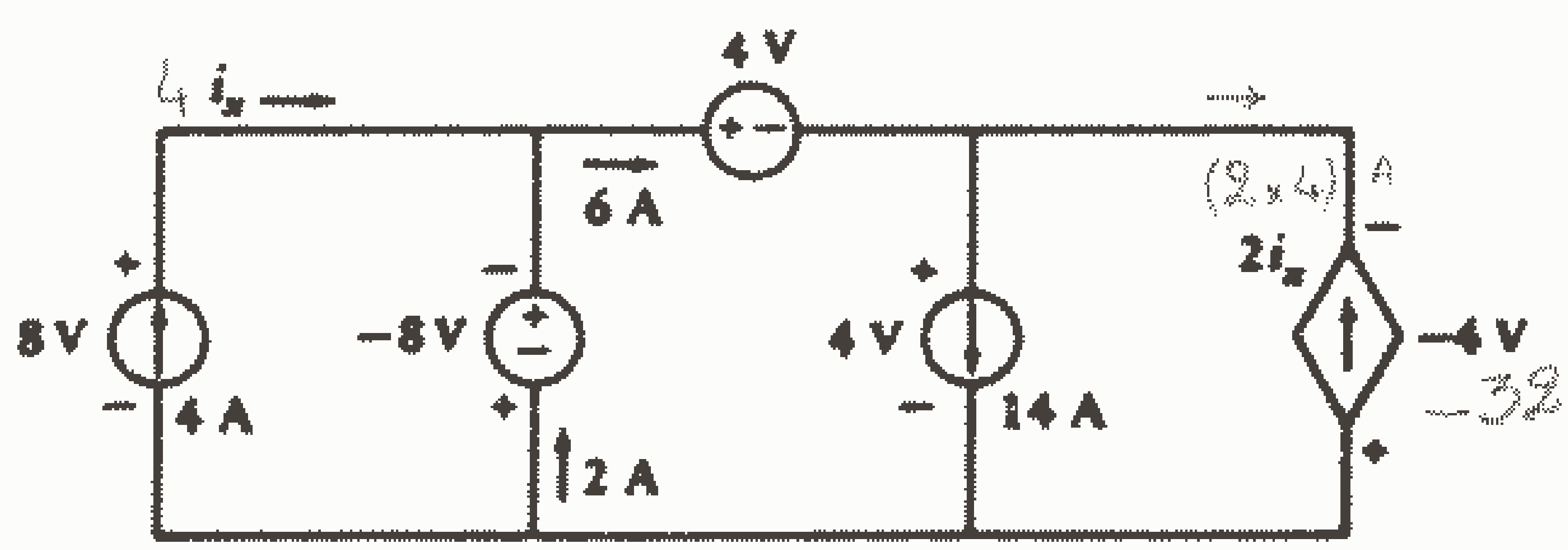
۱۱ ـ در شکل ۱۰-۱، فرض کنید $v = 2t^2 - 8t + 6$ V و قدرت جذب شده به‌وسیله عنصر مداری $P = 4(t^3 - 6t^2 + 11t - 6)$ W باشد. (a) چه مقدار انرژی از $t = 1$ تا $t = 3\text{s}$ به این عنصر تحویل داده می‌شود؟ (b) چه مقدار بار در فاصله زمانی $1 < t < 3\text{s}$ به عنصر تحویل داده می‌شود؟

۱۲ ـ مشخص کنید که کدامیک از پنج منبع شکل ۲۳-۱ شارژ می‌شود (قدرت مثبت جذب می‌کند) و نشان دهید که جمع جبری پنج قدرت جذب شده صفر است.



شکل ۲۳ ـ ۱: به مسئله ۱۲ مراجعه کنید.

۱۳ ـ قدرت تحویل داده شده به هر یک از عناصر شکل ۲۴-۱ را تعیین کنید.



شکل ۲۴ ـ ۱: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

۱۴ ـ در شکل ۱۰-۱ فرض کنید $v = 20e^{-0.2t}$ V. قدرت جذب شده به‌وسیله عنصر را در $t = 4s$ اگر i مقادیر زیر را داشته باشد، پیدا کنید:

(a) $0.1v$ ، (b) $0.1\, dv/dt$ ، (C) $0.1\int_0^t v\, dt + 5$ A

فصل ۲

قوانین تجربی و مدارهای ساده

۱ - ۲ مقدمه

در فصل گذشته ما با منابع مستقل و وابسته جریان و ولتاژ آشنا شدیم و متوجه شدیم که آنها عناصر ایده آلی هستند که فقط بطور تقریب نمایانگر یک مدار واقعی می‌باشند.

عنصر ایده آل دیگری به نام مقاومت خطی در این فصل معرفی خواهد شد. ما همچنین نظری مقدماتی به تقویت‌کننده عملیاتی خواهیم افکند که وسیلهٔ قابل توجهی است که امروزه جزء مهمی از بسیاری از مدارهای الکتریکی است. سپس باید دو قانون اساسی را که سودمند می‌باشند بپذیریم. با این قوانین و با پنج عنصر مداری ساده و تعاریفی که قبلاً داشته‌ایم، ما سپس می‌توانیم مطالعه مدارهای الکتریکی ساده را شروع کنیم. این مطالعه تقریباً بطور کامل به تحلیل، که فرایندی است که توسط آن جریان یا ولتاژ عنصری از مدار تعیین می‌شود، محدود خواهد شد. خوشبختانه تحلیل کامل مورد نیاز نیست و اغلب فقط یک جریان، ولتاژ و یا قدرت بخصوصی مورد نیاز می‌باشد.

بعد از اینکه در این درس و سایر دروس پایه، مهارتی در تحلیل حاصل شد، می‌توان مسائل سنتز را مورد توجه قرار داد. در این مورد به ما یک توصیف ریاضی از رفتار مطلوب مدار داده می‌شود و ما باید عناصر ضروری و اتصالاتشان را برای به دست آوردن پاسخ مطلوب، مشخص کنیم. مسائل سنتز اغلب بیش از یک پاسخ دارند. نوع نهایی مطلوب ما می‌باشد. گاهی اوقات اندازه، وزن، مشخصه‌های حرارتی، آثار محیطی و یا حتی نمای ظاهری باید در طراحی مورد توجه قرار گیرد.

واضح است که تجربه، پیش نیازی است برای مهارت در طراحی و نیز بدیهی است که تحلیل و سنتز باید در ابتدا آورده شوند.

این فصل و فصل بعدی محدود به تحلیل مدارهای ساده حاوی منابع جریان و ولتاژ و مقاومتها می‌باشند که منابع ممکن است مستقل و یا وابسته باشند. در تحلیل اینگونه مدارها ما باید از چندین تبدیل شبکه، قضایای مدار و روشهای ریاضی که بعدا قادر به اعمال آنها خواهیم بود، و با کمی اصلاحات دربارهٔ مدارهای حاوی انواع دیگری از عناصر غیرفعال تحریک شده بوسیله منابع متغیر با زمان، استفاده کنیم. ما روشهای مفید در تحلیل مدار را با اعمال آنها به ساده‌ترین حالت ممکن یعنی مدار مقاومتی، خواهیم آموخت.

۲ - ۲ قانون اهم

ساده‌ترین عنصر غیرفعال یعنی مقاومت را می‌توان با توجه به کارهای یک فیزیکدان گمنام آلمانی به نام جورج سیمون اهم که در سال ۱۸۲۷ جزوه‌ای تحت عنوان «بررسی ریاضی مدار گالوا» منتشر نمود، معرفی کرد. آن جزوه حاوی نتایج یکی از اولین کوششها برای اندازه‌گیری جریان و ولتاژ و ارتباط ریاضی آنها بود. یکی از این نتایج بیان یک رابطهٔ اساسی است که ما امروزه آن را قانون اهم می‌نامیم. اگر چه معلوم شده است که این نتیجه ٤٦ سال زودتر در انگلستان توسط هنری کاو اندیش کشف شده بود. با وجود این، امیدواریم که هیچ کس حتی اهم از کارهای انجام شده توسط کاواندیش خبر نداشت زیرا آن کارها حتی تا مدت زیادی بعد از مرگ هر دو منتشر و برملا نشدند. جزوهٔ اهم تا سالها بعد از اولین انتشارش انتقادهای ناروا و تمسخرهای زیادی را تحمل کرد. اما بعدها مورد قبول قرار گرفت و باعث رفع ابهام و گمنامی از نام اهم شد.

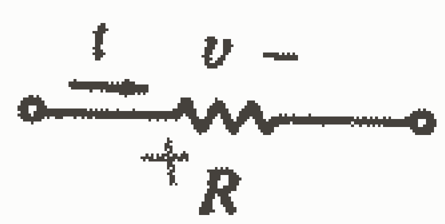
قانون اهم بیان می‌دارد که ولتاژ دو سر بسیاری از مواد هادی بطور مستقیم متناسب است با جریانی که از آن عبور می‌کند یعنی: $v = Ri$ (۱) که در این رابطه ثابت تناسب یعنی R مقاومت نامیده می‌شود. واحد مقاومت اهم است که ۱۷٫۸ می‌باشد و با علامت اختصاری امگای بزرگ Ω نشان داده می‌شود. وقتیکه این معادله را در دستگاه محورهای V نسبت به i رسم کنیم خط راستی بدست می‌آید که از مبداء می‌گذرد. این معادله یک معادلهٔ خطی است و ما آن را به عنوان تعریف یک مقاومت خطی در نظر خواهیم گرفت. بنابراین اگر نسبت جریان و ولتاژ مربوط به هر عنصر مداری ساده ثابت باشد این عنصر یک مقاومت خطی است و دارای مقاومتی مساوی با نسبت ولتاژ به جریان می‌باشد.

مقاومت معمولاً بصورت یک کمیت مثبت در نظر گرفته می‌شود، اگر چه مقاومت منفی را هم می‌توان با بعضی مدارهای خاص شبیه‌سازی نمود.

باز هم باید تاکید نمود که مقاومت خطی یک عنصر مداری ایده‌آل است و یک مدل ریاضی برای یک قطعهٔ فیزیکی می‌باشد. «مقاومتها» را می‌توان به راحتی تهیه و تولید نمود اما به زودی در می‌یابیم که نسبت ولتاژ - جریان این قطعهٔ فیزیکی فقط در محدودهٔ بخصوصی از جریان، ولتاژ و یا قدرت بطور قابل قبولی ثابت می‌باشد و بستگی به دما و سایر عوامل محیطی دیگر دارد.

ما معمولاً مقاومت خطی را بطور ساده مقاومت خواهیم خواند و نام کامل آن را فقط وقتی که طبیعت خطی آن مورد تاکید باشد به کار خواهیم برد. هر مقاومت غیرخطی هم همیشه به همان نام کاملش توصیف خواهد شد. مقاومتهای غیرخطی را نباید الزاماً عناصر نامطلوبی تصور نمود. اگر چه وجود آنها تحلیل مدار را مشکل می‌سازد ولی عملکرد قطعه ممکن است بستگی به غیرخطی بودن آن داشته باشد. دیودهای زنر، دیودتونلی و فیوزها چنین عناصری هستند.

شکل ۱ - ۲ رایجترین سمبل مداری یک مقاومت را نشان می‌دهد. طبق قراردادهای پذیرفته شده برای جریان، ولتاژ و قدرت در فصل گذشته، حاصلضرب v , i قدرت جذب شده به وسیله مقاومت را به دست می‌دهد. v , i طوری انتخاب می‌شوند که قرارداد علامت غیرفعال را بر آورده سازند.



$P = vi$

شکل ۱ - ۲: سمبل مداری یک مقاومت $P = vi = Ri^2 = v^2/R$, $R = v/i$

قدرت جذب‌شده عملاً به‌صورت گرما ظاهر می‌شود و همیشه مثبت است، یک مقاومت مثبت عنصری است غیرفعال که نمی‌تواند قدرت تحویل دهد و یا انرژی ذخیره نماید. روابط مختلف قدرت جذب شده عبارتند از: (۲) $P=Vi=i^2R=V^2/R$ یکی از مؤلفین (که ترجیح می‌دهد نامش فاش نشود)[1] تجربهٔ ناکامی از اتصال سهوی یک مقاومت Ω ۱۰۰ و W ۲ کربنی به دو سر یک منبع ۱۱۰ ولتی داشته است. شعله، دود و ترکیدگی حاصله نسبتا سراسیمه‌کننده بود و نشان می‌داد که یک مقاومت عملی برای اینکه مانند مدل خطی ایده‌آل آن عمل کند دارای محدودیتهایی می‌باشد.

در این حالت، از مقاومت نگون بخت خواسته شده بود که W ۱۲۱ را جذب کند در حالیکه

---

۱ - نام وی در صورت ارائه تقاضای کتبی به W.H.H با کمال میل تقدیم خواهد شد.

فقط برای تحمل ۲ W طراحی شده بود، و عکس‌العمل آن بطوریکه انتظار می‌رفت تند و خشن بود.

نسبت جریان به ولتاژ هم مقداری است ثابت: (۳) $R = G$ ، $v = 1$ ، G, i هدایت نامیده می‌شود. واحد هدایت مهو یعنی ۱ A/V می‌باشد و با علامت اختصاری امگای وارونه یعنی ℧ نمایش داده می‌شود. واحد SI برای هدایت زیمنس (S) می‌باشد که هنوز در آمریکا استفادهٔ وسیعی پیدا نکرده است. برای نشان دادن هدایت هم از همان سمبل مداری مقاومت استفاده می‌شود. قدرت جذب شده هم الزاما مثبت می‌باشد و می‌توان آن را بر حسب هدایت به صورت زیر بیان نمود: (٤) $P = vi = v^2G = i^2/G$

بنابراین یک مقاومت ۲ Ω دارای هدایت ۱/۲℧ می‌باشد و اگر جریان ۵ A در آن جاری باشد ولتاژ ۱۰ V در دو سر ترمینالهای آن ظاهر می‌شود و قدرت ۵۰ W را جذب می‌کند.

همهٔ روابط بالا بر حسب جریان، ولتاژ و قدرت لحظه‌ای نوشته شده است مانند $V = Ri,\ P = vi$ واضح است که جریان و ولتاژ یک مقاومت باید نسبت به زمان تغییرات یکسانی داشته باشند بنابراین اگر $v = 2 \sin 100t\ V,\ R = 10\Omega$ باشد در اینصورت $i = 0/2 \sin 100t A$ می‌باشد و قدرت برابر است با $0/4 \sin^2 100t\ W$ و نمودار ساده‌ای ماهیت متفاوت تغییرات آن با زمان را نشان خواهد داد. با وجود اینکه جریان و ولتاژ در فواصل زمانی خاصی منفی می‌باشند، قدرت جذب شده هرگز منفی نمی‌شود. برای تعریف دو اصطلاح رایج یعنی اتصال کوتاه و مدار باز می‌توان از مفهوم مقاومت به عنوان پایه و اساس استفاده نمود. اتصال کوتاه را بعنوان مقاومت صفر اهم تعریف می‌کنیم و چون $v = Ri$ بنابراین ولتاژ دو سر اتصال کوتاه باید صفر باشد اگرچه جریان ممکن است هر مقداری داشته باشد. به طریق مشابهی ما مدار باز را به عنوان مقاومت بی‌نهایت تعریف می‌کنیم و بنابراین جریان باید صفر باشد، صرفنظر از ولتاژ دو سر مدار باز که هر اندازه می‌تواند باشد.

به یاد داشته باشید وقتیکه هر فرمولی شامل v ، i باشد همهٔ v ، iها باید در یک دیاگرام مداری با پلاریته و جهت‌هایشان تعریف شوند وگرنه $v = -Ri$ را درست مانند $v = Ri$ می‌توان برای یک مقاومت به کار برد.

تمرین ۱ - ۲:

اگر v ، i در شکل ۱ - ۲ تعریف شده باشند، پیدا کنید: (a) R را اگر

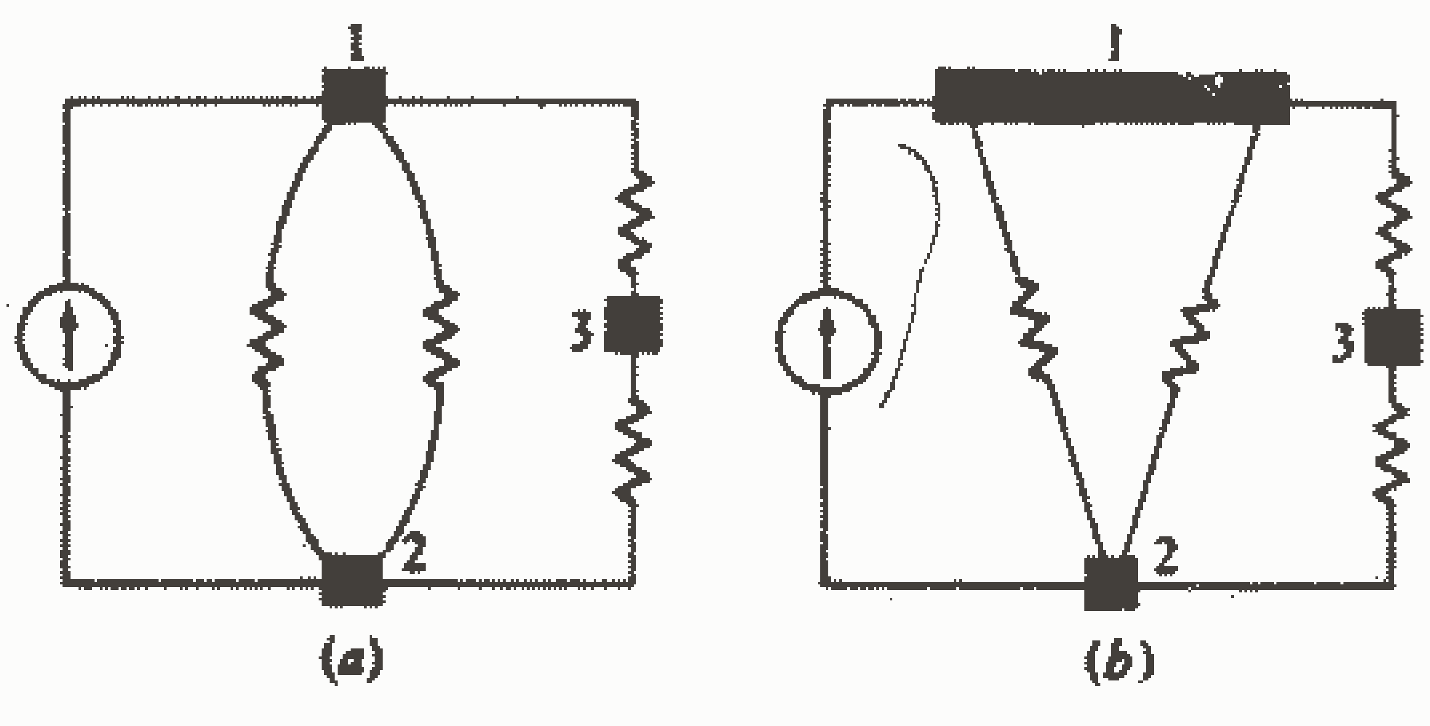
$v = -۸\ V$ و $i = -۵m\ A$ و (b) قدرت جذب شده را اگر $i = -۵\ A$ و $R = ۲,۲\ \Omega$ (c) i را اگر $R = ۸\Omega$ و مقاومت در حال جذب قدرت $۲۰۰\ mw$ باشد. (d) G را اگر $v = ۲,۵\ V$ و $i = ۱۰۰\ mA$.

جواب: $۱,۶۰\ K\ \Omega$ ، $۵۵\ w$ ، $\pm ۱۵۸,۱\ mA$ ، ۴۰m℧

۳ - ۲ قوانین کیرشوف

ما اکنون آماده هستیم که روابط جریان و ولتاژ را در مدارهای ساده‌ای که از اتصال دو یا چند عنصر مداری ساده حاصل شده‌اند، مورد توجه قرار دهیم. این عناصر به وسیله هادیهای الکتریکی و یا پایه‌هایشان که دارای مقاومت صفر هستند و یا هادیهای کامل می‌باشند، به هم وصل می‌شوند. سپس از آنجاییکه شبکه به صورت تعدادی عناصر ساده و پایه‌های وصل کنندهٔ آنها ظاهر می‌شود، آن را شبکه فشردهٔ ثابت می‌نامند. مسئله تحلیل وقتی مشکلتر می‌شود که ما با یک شبکهٔ ثابت گسترده، که اساسا شامل بینهایت عناصر کوچک ناپیدا می‌باشد، مواجه می‌شویم. توجه به این مورد اخیر را به درسهای بعدی موکول می‌کنیم.

(نقطه‌ای که در آن دو یا چند عنصر دارای اتصال مشترک می‌باشند یک گره نامیده می‌شود.) شکل ۲ - ۲ (a) مداری را نشان می‌دهد که دارای سه گره می‌باشد. گاهی اوقات شبکه‌ها طوری رسم می‌شوند که دانشجوی ناآگاه را به دام این اشتباه می‌اندازد که فکر می‌کند گره‌هایی بیش از آنچه که عملاً در مدار هست، وجود دارد. این امر وقتی روی می‌دهد که یک گره، مانند گره ۱ در شکل۲a - ۲، به صورت دو اتصال جداگانه که به وسیله یک هادی (با مقاومت صفر) مانند شکل ۲b - ۲ به هم وصل شده‌اند، نشان داده می‌شود. اگر چه همهٔ کاری که انجام شده است فقط گسترش دادن یک نقطه مشترک به صورت یک خط مشترک است. بنابراین، ما باید الزاما همهٔ پایه‌های هادی کامل و قسمتهایی از پایه‌ها را که به گره‌وصل هستند بصورت جزئی از گره در نظر بگیریم. همچنین توجه داشته باشید که هر عنصر در هر یک از سرهایش یک گره دارد.



شکل ۲ - ۲ (a) مداری که شامل سه گره و پنج شاخه می‌باشد.
(b) گره ۱ طوری دوباره رسم شده است که به صورت دو گره به نظر آید در حالیکه هنوزهم یک گره است.

فرض کنید که ما از یک گره شبکه شروع کنیم و از یک عنصر مداری ساده عبور کنیم و به گره موجود در سر دیگر آن برسیم و سپس از آن گره و از عنصر دیگری عبور کنیم و به گره دیگری برسیم و اینکار را تا هر جا که می‌خواهیم ادامه دهیم اگر با هیچ گره‌ای بیش از یکبار مواجه نشویم در این صورت به مجموعهٔ گره‌ها و عناصری که از آنها عبور کرده‌ایم یک مسیر می‌گوییم. اگر گرهی را که از آن شروع کرده‌ایم همان گرهی باشد که در آن ختم کرده‌ایم در این صورت این مسیر را بنابر تعریف یک مسیر بسته یا حلقه می‌نامیم.

مثلاً در شکل ۲a - ۲ اگر ما از گره ۲ حرکت کنیم و از منبع جریان عبور کنیم و به گره ۱ برسیم و سپس از طریق مقاومت بالایی سمت راست به گره ۳ برسیم ما یک مسیر را ایجاد کرده‌ایم اما از آنجاییکه ما دوباره به گره ۲ نرسیده‌ایم، در نتیجه یک مسیر بسته یا حلقه نداریم. اگر ما از گره ۲ شروع کنیم و از طریق منبع جریان به گره ۱ برسیم و از مقاومت سمت چپ پایین بیاییم و به گره ۲ برسیم و سپس از مقاومت وسطی بالا برویم و دوباره به گره ۱ برسیم، ما یک مسیر نخواهیم داشت زیرا با یک گره (و در واقع ۲ گره) بیش از یکبار مواجه شده‌ایم، ما همچنین یک حلقه هم نخواهیم داشت زیرا یک حلقه باید مسیر هم باشد.

اصطلاح دیگری که کاربرد آن مفید است، شاخه می‌باشد. ما شاخه را به عنوان یک مسیر منفرد و تکی، که از یک عنصر ساده و گره‌های دو سرش تشکیل شده است، در یک شبکه تعریف می‌کنیم. بنابراین یک مسیر مجموعهٔ خاصی از شاخه‌ها می‌باشد. مدار نشان داده شده در شکلهای ۲a,b - ۲ شامل پنج شاخه می‌باشد. ما اکنون آماده‌ایم که اولین قانون از دو قانونی را که به نام گوستاو رابرت کیرشوف (یک استاد دانشگاه آلمانی که در زمانی که اهم آزمایشاتش را انجام می‌داد متولد شد) نامیده شده است مورد توجه قرار دهیم[1]. این قانون مفید و آموزنده، قانون جریان کیرشوف (و یا به اختصار Kcl) نامیده می‌شود و چنین بیان می‌دارد:

مجموع جبری تمام جریانهایی که به یک گره وارد می‌شوند صفر است.

در این کتاب این قانون را اثبات نخواهیم کرد. اگر چه، آن بسادگی یک بیان ریاضی برای

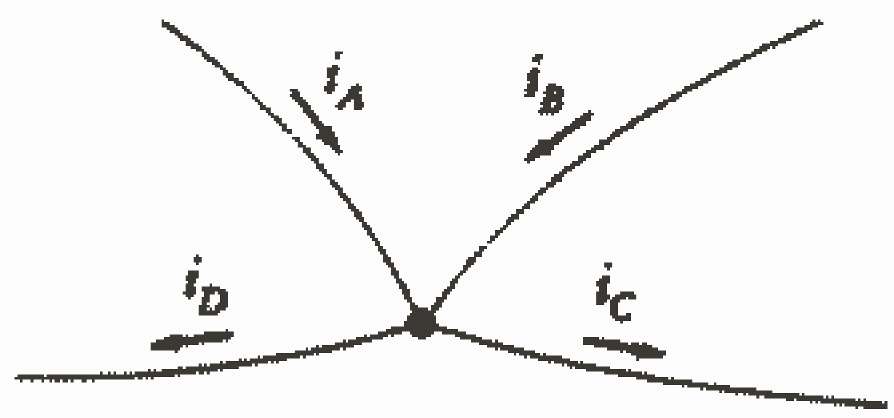
---

۱ - کیرشوف حرفهٔ تدریس را بعنوان یک مدرس با سمت رسمی اما بدون حقوق در دانشگاه برلین شروع کرد که این امر امروزه نزد استادان جوان، انتخابی پسندیده نمی‌باشد.

این حقیقت است که بار نمی‌تواند در یک گره انباشته شود. یعنی، اگر جریان خالصی به یک گره جاری باشد، آنگاه سرعتی که کولنها در آن گره انباشته می‌شوند صفر نخواهد بود. و چون یک گره یک عنصر مداری نیست و نمی‌تواند بار را ذخیره، نابود و یا تولید کند. بنابراین مجموع جریانها باید صفر باشد.

گره شکل ۳ - ۲ را در نظر بگیرید. مجموع جبری چهار جریان ورودی به گره باید صفر باشد*:

$$i_A + i_B - i_C - i_D = 0$$



شکل ۳ - ۲: قانون جریان کیوشوف (KCL) ما را قادر می‌سازد که بنویسیم:

$i_A + i_B - i_C - i_D = 0, i_C + i_D - i_A - i_B = 0,$ یا $i_A + i_B = i_C + i_D.$

بدیهی است که این قانون را می‌توان بطور یکسان برای مجموع جبری جریانهایی که از هر گره خارج می‌شوند اعمال نمود.

$$-i_A - i_B + i_C + i_D = 0$$

ما همچنین ممکن است بخواهیم مجموع جریانهایی را که فلش آنها رو به داخل گره است با مجموع جریانهایی که فلش آنها رو به خارج گره است مساوی قرار دهیم:

$$i_A + i_B = i_C + i_D$$

یک بیان خلاصه و جمع و جور برای قانون جریان کیرشوف عبارت است از:

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0 \qquad (۵)$$

و این یک بیان خلاصه برای رابطه زیر می‌باشد:

$$i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_N = 0 \qquad (۶)$$

خواه رابطه (۵) و یا رابطه (۶) بکار رود از آن چنین استنباط می‌شود که تعداد N فلش جریان همگی رو به داخل گره مورد نظر و یا رو به خارج از گره می‌باشند.

گاهی اوقات تفسیر قانون جریان کیرشوف بر حسب یک تشابه هیدرولیکی مفید می‌باشد. آب، مانند بار، نمی‌تواند در یک نقطه جمع شود و بنابراین اگر ما اتصال چند لوله را به عنوان یک گره در نظر بگیریم، واضح است که تعداد گالنهای آب که در هر ثانیه وارد گره می‌شوند باید مساوی با تعداد گالنهایی باشد که در هر ثانیه از آن گره خارج می‌شود.

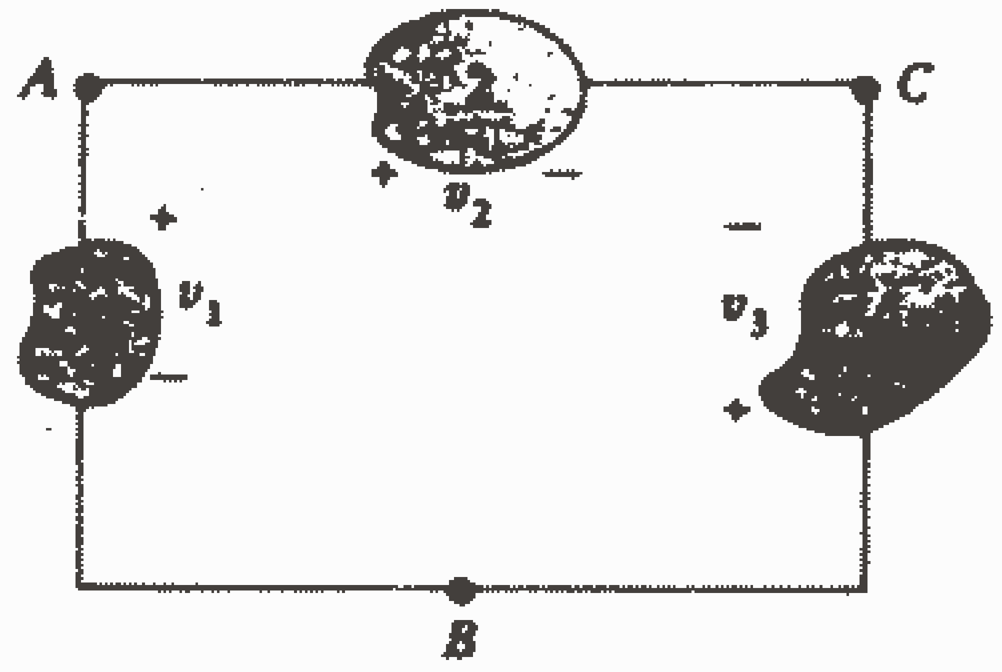
اکنون می‌پردازیم به قانون ولتاژ کیرشوف (KVL). این قانون هم بیان می‌دارد که:

مجموع جبری ولتاژها در هر حلقهٔ بسته در یک مدار برابر است با صفر.

ما باز هم این قانون را به صورت اثبات شده می‌پذیریم، اگر چه در تئوری مقدماتی الکترو مغناطیسی بطور مبسوط آن را اثبات می‌کنند.

$q = it$

جریان، متغییری است که به بار جاری در یک عنصر مداری مربوط است در حالیکه ولتاژ معیاری است برای اختلاف انرژی پتانسیل در دو سر عنصر. مقدار منفرد و یکتایی برای این کمیت در تئوری مدار وجود دارد. بنابراین انرژی لازم برای حرکت دادن یک بار واحد از نقطه A به نقطه B در یک مدار باید دارای مقداری باشد که مستقل از مسیر A تا B باشد. در شکل ۴ ـ ۲ اگر ما یک کولن بار را از A به B از طریق عنصر ۱ حمل کنیم، پلاریتهٔ مبنای V_1 نشان می‌دهد که ما V1 ژول کار انجام می‌دهیم. حال اگر ما مسیر A تا B را از طریق نقطه C انتخاب کنیم در اینصورت $v_2 - v_3$ ژول انرژی مصرف خواهیم کرد.



شکل ٤ ـ ۲: اختلاف پتانسیل بین نقاط A و B مستقل از مسیر انتخاب شده می‌باشد و یا $v_1 = v_2 - v_3$

اگر چه، کار انجام شده در یک مدار مستقل از مسیر است و این مقادیر باید مساوی باشند. بنابراین:

$$v_1 = v_2 - v_3 \qquad (۷)$$

از مطلب فوق چنین بر می‌آید که اگر ما یک مسیر بسته را دنبال کنیم، مجموع جبری ولتاژهای دو سر عناصر مجزا باید صفر باشد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = 0 \quad \text{or} \quad v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N = 0 \qquad (۸)$$

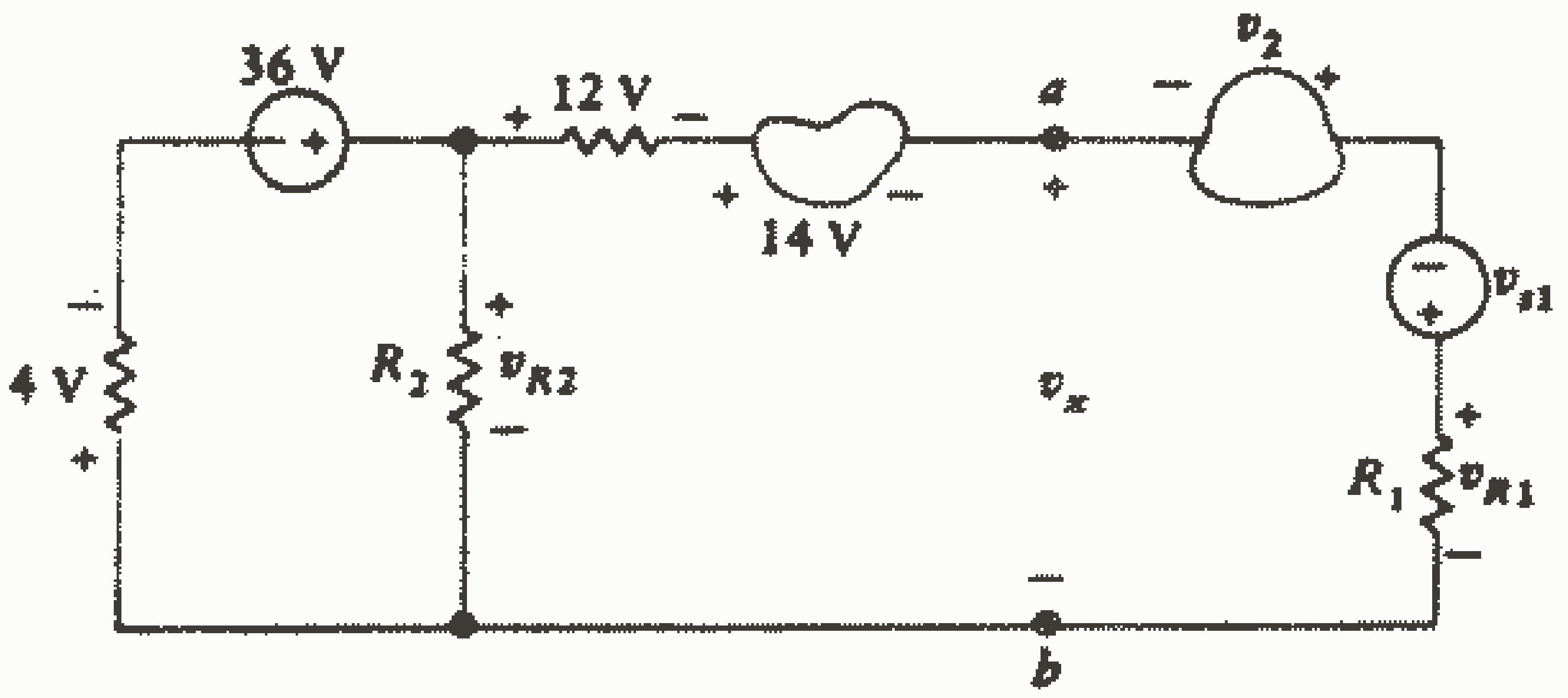
قانون ولتاژ کیرشوف نتیجه‌ای است از بقای انرژی و خاصیت بقایی (کنسروایتو) مدارهای الکتریکی. این قانون را می‌توان بر حسب یک مورد مشابه ثقلی هم تفسیر نمود یعنی اگر جرمی را حول یک مسیر بسته در یک میدان ثقلی کنسروایتو حرکت دهیم کل کار انجام شده بر روی آن جرم صفر خواهد بود.

ما می‌توانیم KVL را به طرق مختلفی به یک مدار اعمال کنیم. یک روشی که نسبت به سایر روشها ما را به خطای کمتری در نوشتن معادلات رهنمون می‌شود این است که در جهت حرکت عقربه‌های ساعت در حول یک مسیر بسته حرکت کنیم و ولتاژ هر عنصری را که به قطب مثبت آن برخورد کردیم با علامت مثبت و ولتاژ هر عنصری را که ابتدا به قطب منفی آن برخورد کردیم با علامت منفی بنویسیم. با اعمال این روش به تک حلقهٔ شکل ۴ - ۲ خواهیم داشت:

$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

که مطمئناً با نتایج قبلی ما یعنی معادلهٔ (۷) توافق دارد.

به عنوان آخرین مثال بیایید برویم به سراغ مدار شکل ۵ - ۲.



شکل ۵ - ۲: مداری که در آن KVL نشان می‌دهد که

$v_x = 6$ V و $v_{R2} = 32$ V

در این مدار هشت عنصر مداری وجود دارد و ولتاژهای دو سر هر عنصر با زوجهای مثبت - منفی نشان داده شده‌اند. فرض کنید که می‌خواهیم VR۲ را پیدا کنیم. ما می‌توانیم اینکار را با نوشتن یک معادله KVL حول حلقهٔ سمت چپ انجام دهیم:

$$4 - 36 + v_{R2} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{R2} = 32 \quad V$$

و سرانجام بیایید فرض کنیم که می‌خواهیم مقدار v_x را تعیین کنیم. ما می‌توانیم این را به عنوان جمع جبری ولتاژهای دو سر سه عنصر سمت راست و یا بعنوان ولتاژی که در دو سر یک ولتمتر ایده آل که به نقاط a , b وصل شده باشد ظاهر می‌شود، تصور کنیم.

ما می‌توانیم KVL را از گوشهٔ پایین سمت چپ شروع کنیم و بالا برویم و به a برسیم و از طریق Vx به b برویم و از طریق پایهٔ هادی به نقطهٔ شروع برسیم:

$$4 - 36 + 12 + 14 + v_x = 0 \rightarrow v_x = 6 \quad V$$

با دانستن vR۲ می‌توانستیم از طریق R۲ راه کوتاه‌تری طی کنیم:

$$-32 + 12 + 14 + v_x = 0 \rightarrow v_x = 6 \quad V$$

تمرین

۲ - ۲ - تعداد شاخه‌ها و گره‌ها را در هر یک از مدارهای شکل ۶-۲ تعیین کنید.

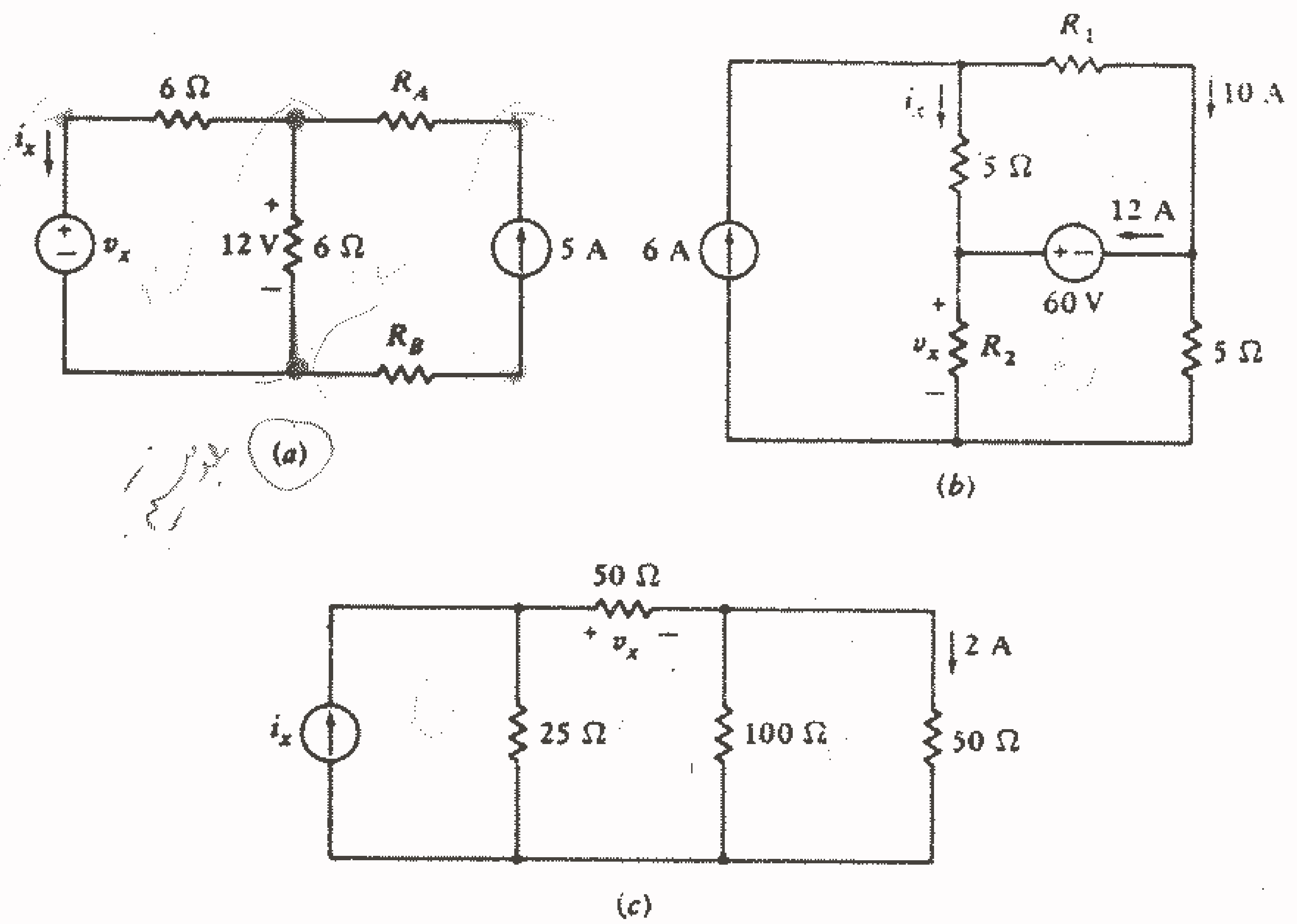
جواب: ۶ و ۵؛ و ۶؛ ۳ و ۵

۳ - ۲ - مقدار i را در هر یک از مدارهای شکل ۶ - ۲ تعیین کنید.

جواب: ۳ و ۴- و ۱۳A

۴ - ۲ - مقدار Vx را در هر یک از مدارهای شکل ۶ - ۲ تعیین کنید.

جواب: ۳ و ۴- و ۱۳A



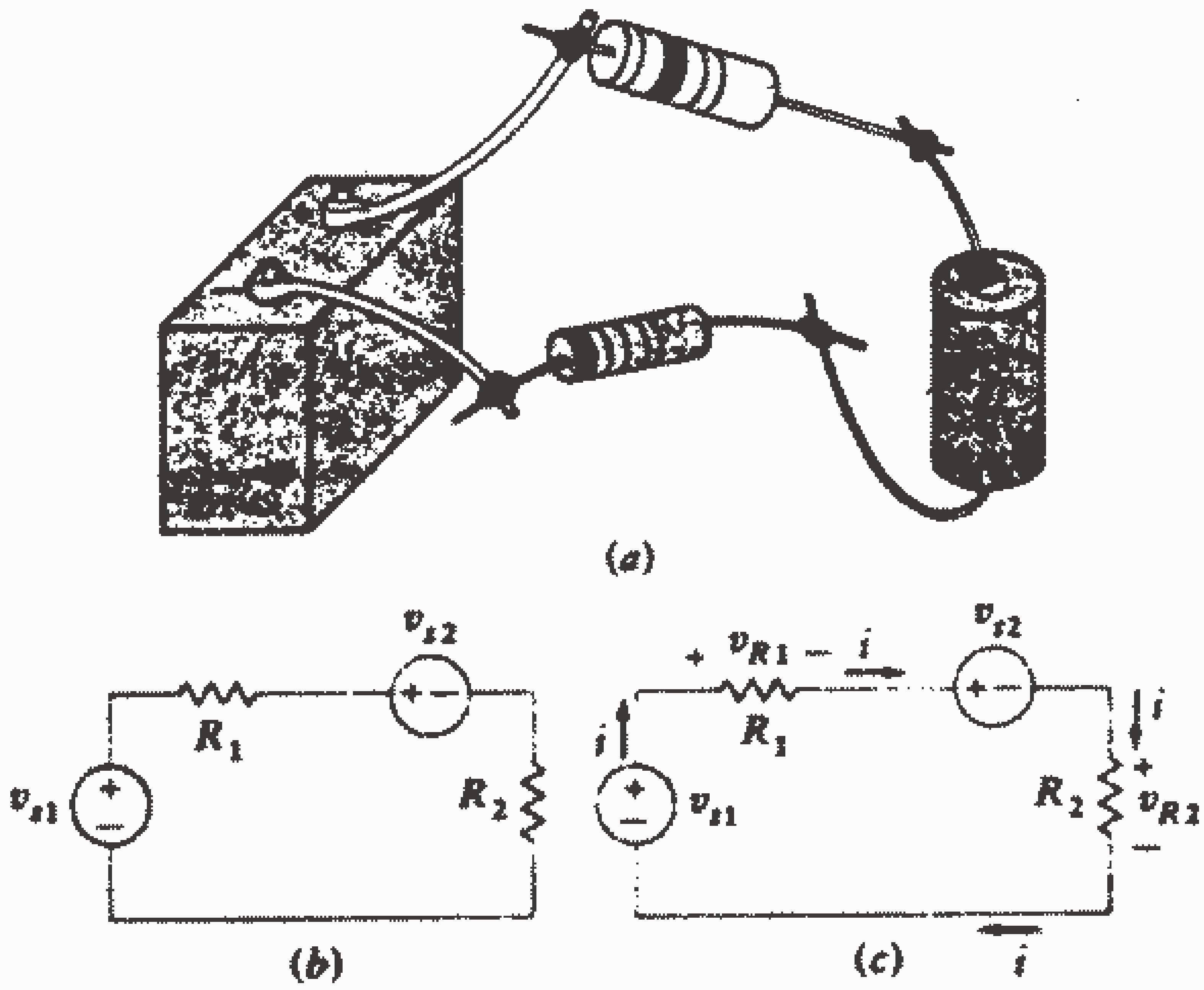
شکل ۶ ـ ۲: مراجعه شود به تمرینات ۲ ـ ۲ و ۳ ـ ۲ و ۴ ـ ۲.

۴ ـ ۲ تحلیل یک مدار تک حلقه‌ای

با بیان قوانین اهم و کیرشوف ما می‌توانیم توان تحلیلی خود را با کاربرد این ابزارها در تحلیل یک مدار مقاومتی ساده، محک بزنیم. شکل a ۷ ـ ۲ نشان می‌دهد که چگونه اتصال سری دو باتری و دو مقاومت می‌تواند به وسیله یک نوجوان با استفاده از یک هویه نو ایجاد شود. توجه داشته باشید که یک هادی رابط به ترمینال مثبت باتری سمت چپ وصل شده است و سر دیگر سیم به یکی از پایه‌های مقاومت لحیم شده است. فرض شده است که ترمینال، هادیهای رابط و خال لحیم همگی دارای مقاومت صفر هستند و تشکیل یک گره را در گوشه بالای سمت چپ مدار شکل b ۷ ـ ۲ می‌دهند. هر دو باتری را با منابع ولتاژ ایده آل جایگزین می کنیم یعنی هر مقاومتی را که داشته باشند بقدری کوچک فرض می کنیم که قابل صرفنظر باشند و در غیر اینصورت می‌توانیم آنها را با R۱ و R۲ ترکیب شده فرض کنیم. همچنین فرض می کنیم که دو مقاومت با مقاومتهای خطی ایده آل جایگزین شده باشند.

فرض می کنیم که مقادیر مقاومتها و ولتاژ منابع در شکل ۲ - ۷b معلوم باشند و سعی می کنیم جریان هر عنصر، ولتاژ دو سر هر عنصر و قدرت جذب شده به وسیله هر عنصر را تعیین کنیم. اولین گام در تحلیل ما در نظر گرفتن جهتهای مبنا برای جریانهای مجهول می‌باشد. بیایید بطور دلخواه یک جریان، در جهت عقربه‌های ساعت در نظر بگیریم که از ترمینال بالایی منبع ولتاژ سمت چپ جاری می‌شود. این انتخاب به وسیله یک فلش مقدار i نقطهٔ مدار در شکل ۲ - ۷C نشان داده شده است. یک کاربرد سادهٔ قانون جریان کیرشوف ما را مجاب می کند که همین جریان از همهٔ عناصر دیگر مدار هم باید جاری باشد. ما این واقعیت را در اینجا با قرار دادن چند فلش جریان دیگر در مدار مورد تأکید قرار می‌دهیم.

بنابر تعریف عناصری که حامل جریان یکسانی باشند می‌گوییم اتصال سری دارند. توجه داشته باشید که ممکن است چند عنصر حامل جریانهای مساوی باشند اما سری نباشند، دو لامپ ۱۰۰w در دو خانهٔ همسایه ممکن است دقیقاً حامل جریانهای مساوی باشند اما آنها جریان یکسانی (واحدی) را حمل نمی کنند و سری نمی‌باشند.



شکل ۷ ـ ۲: (a) نموداری از یک مدار تک حلقه‌ای واقعی که شامل چهار عنصر، اتصالات لحیم و سیمهای رابط می‌باشد. (b) مدل مداری که در آن ولتاژ منابع و مقادیر مقاومتها داده شده است. (c) علائم مبنای ولتاژ و جریان به مدار اضافه شده است.

یعنی جریان در جهت سر وارد می‌شود $+IR$ است سر مثبت R

قدم دوم ما در این تحلیل انتخاب یک مبنای ولتاژ برای هر یک از دو مقاومت می‌باشد. ما قبلاً پی بردیم که اعمال قانون اهم بدون علامت منفی یعنی $v = Ri$ لازمه‌اش این است که جهت جریان و ولتاژ طوری انتخاب شود که جریان از ترمینالی وارد شود که علامت مثبت ولتاژ قرار دارد. این قرارداد علامت غیرفعال می‌باشد. اگر انتخاب جهت جریان دلخواه باشد آنگاه اگر بخواهیم قانون اهم را بفرم $v = Ri$ بکار بریم انتخاب جهت ولتاژ مشخص و فیکس می‌شود. ولتاژهای v_{R1} و v_{R2} در شکل ۷ C - ۲ نشان داده شده‌اند.

قدم سوم اعمال قانون ولتاژ کیرشوف به مسیر بسته منفرد موجود می‌باشد. بیایید تصمیم بگیریم که حرکت به دور مدار را در گوشهٔ پایینی چپ در جهت عقربه‌های ساعت شروع کنیم و هر ولتاژ را که ابتدا به قطب مثبت آن برخورد کردیم با علامت مثبت و هر ولتاژی را که ابتدا به قطب منفی آن برخورد کردیم با علامت منفی بنویسیم. بنابراین:

$$-v_{s1} + v_{R1} + v_{s2} + v_{R2} = 0$$

و سرانجام ما قانون اهم را به عناصر مقاومتی اعمال می کنیم:

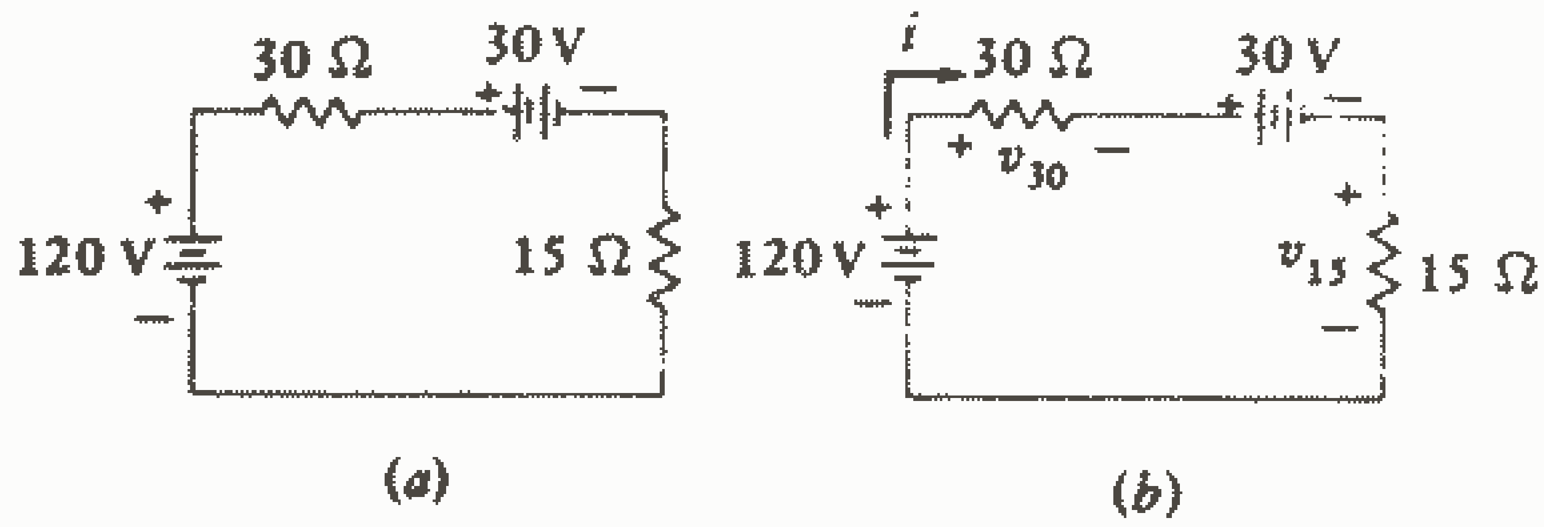
$v_{R1} = R_1 i \quad , \quad v_{R2} = R_2 i$ و خواهیم داشت: $\qquad -v_{s1} + R_1 i + v_{s2} + R_2 i = 0$

این معادلهٔ اخیر را نسبت به i حل می کنیم و بدست می آوریم:

$$i = \frac{v_{s1} - v_{s2}}{R_1 + R_2}$$

که دراین معادلهٔ اخیر همهٔ کمیتهای سمت راست معادله معلوم هستند و ما را قادر می‌سازند که مقدار i را تعیین کنیم. حال می‌توانیم ولتاژ یا قدرت مربوط به هر عنصر را در یک مرحله با اعمال روابط $p = vi, v = Ri$ و یا $P = Ri^2$ بدست آوریم.

بیایید مثال عددی نشان داده شده در شکل ۸a - ۲ را مورد توجه قرار دهیم.



شکل ۸ - ۲: یک مدار سری. (b) مداری که در آن مبنای جریان و ولتاژ مشخص شده است.

دو باتری و دو مقاومت بطور سری به هم وصل شده‌اند. یک جریان در جهت عقربه‌های ساعت و دو ولتاژ مقاومتی در مدار مانند شکل ‎8b - ۲‎ تعیین شده‌اند و با استفاده از قانون ولتاژ کیرشوف داریم: $-120 + v_{30} + 30 + v_{15} = 0$ و با استفاده از قانون اهم برای هر مقاومت خواهیم داشت: $-120 + 30i + 30 + 15i = 0$ که از آن به دست می‌آید: $i = \frac{۱۲۰ - ۳۰ - ۲A}{۳۰ + ۱۰} = ۲A$ بنابراین ولتاژهای دوسر مقاومتها عبارتند از $v_{۳۰} = ۲(۳۰) = ۶۰\ V$ و

$v_{۱۵} = ۲(۱۵) = ۳۰\ V$

قدرت جذب شده به وسیله هر عنصر با حاصلضرب ولتاژ دو سر هر عنصر و جریان ورودی به ترمینال مثبت آن به دست می‌آید. برای باتری ‎۱۲۰ V‎ قدرت جذب شده عبارت است از $P_{۱۲۰v} = ۱۲۰\ (-۲) = -۲۴۰$ و در نتیجه قدرت ‎۲۴۰W‎ به وسیله این منبع به سایر عناصر مدار تحویل داده می‌شود. به طریق مشابه داریم: $P_{۳۰v} = ۳۰(۲) = ۶۰W$ و ما درمی‌یابیم که این عنصر به ظاهر فعال، عملا قدرت جذب می کند (و یا شارژ می‌شود). قدرت جذب شده به وسیله هر مقاومت (مثبت) الزاما مثبت است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$p_{۳۰} = v_{۳۰}i = ۶۰(۲) = ۱۲۰\ W$ و یا $p_{۳۰} = Ri^{۲} = (۳۰)۲^{۲} = ۱۲۰\ W$ و

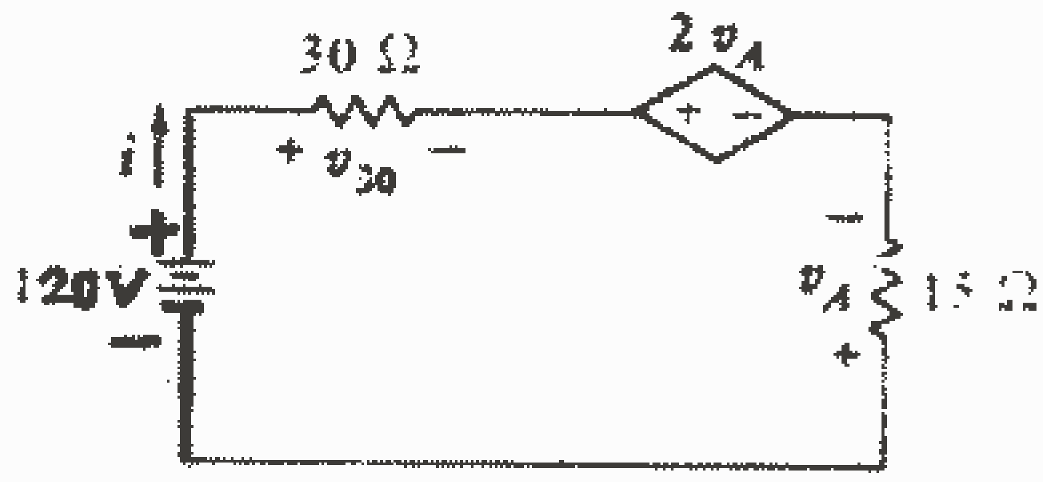
$p_{۱۵} = v_{۱۵}i = Ri^{۲} = ۶۰\ W$. نتایج رامی توانیم چک کنیم زیرا کل قدرت جذب شده باید صفر باشد و یا بعبارت دیگر، قدرت تحویل داده شده به وسیله باتری‎V ۱۲۰‎ دقیقاً برابر است با مجموع قدرتهای جذب‌شده‌به وسیله سه عنصر دیگر. یک تعادل قدرتی اغلب روش مفیدی برای چک کردن اشتباهات ناشی از بی‌دقتی می‌باشد. قبل از به اتمام رساندن این مثال بهتر است. متقاعد شده باشیم که فرض اولیهٔ ما دربارهٔ جهت مبنای جریان تاثیری در جوابهای به دست آمده ندارد. بیایید یک جریان ix در خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر بگیریم، بنابراین $i_x = -i$. اکنون هر دو ولتاژهای مقاومتی دارای پلاریتهٔ مخالف خواهند شد و خواهیم داشت:

$$-۱۲۰ - ۳۰i_x + ۳۰ - ۱۵i_x = 0 \quad و \quad i_x = -۲A \quad و \quad v_x = -۶۰V \quad و \quad v_{x۱۵} = -۳۰V$$

از آنجاییکه هر قدرت مبنای جریان و ولتاژ معکوس شده است، بدیهی است که نتایج یکسان می‌باشند و هر قدرت جذب شده همان مقادیر قبلی خواهد بود. هر جهت اتفاقی و یا راحتی را برای جریان می‌توان انتخاب نمود، اگر چه اغلب جریانهای در جهت عقربه‌های ساعت انتخاب می‌شوند. کسانی که بر جوابهای مثبت اصرار می‌ورزند همیشه می‌توانند به عقب برگردند و جهت فلش جریان را معکوس نمایند و مسئله را دوباره حل کنند.

حال بیایید تحلیل را با قرار دادن یک منبع ولتاژ وابسته به جای یکی از منابع ولتاژ مستقل کمی مشکل کنیم که این امر در شکل ۹ ـ ۲ نشان داده شده است. ما باز هم یک جهت مبنا برای

جریان i و ولتاژ v_{30} تعیین می‌کنیم. لازم نیست ولتاژی برای مقاومت ۱۵ Ω تعیین کنیم زیرا ولتاژ کنترل کننده v_A برای منبع وابسته قبلا مشخص شده است. اگر چه قابل ذکر است که علائم مبنا برای v_A برعکس آنچه که ما می‌خواستیم تعیین کنیم می‌باشند و قانون اهم برای این عنصر باید به صورت $v_A = -15i$ نوشته شود.



شکل ۹ ـ ۲: یک جریان i و ولتاژ v_{30} در یک مدار تک حلقه‌ای حاوی یک منبع وابسته مشخص شده‌اند.

ما قانون ولتاژ کیرشوف را در حلقه اعمال می‌کنیم:

$$-120 + v_{30} + 2v_A - v_A = 0$$

دوبار از قانون اهم استفاده می‌کنیم: $v_{30} = 30i$ و $v_A = -15i$ و خواهیم داشت:

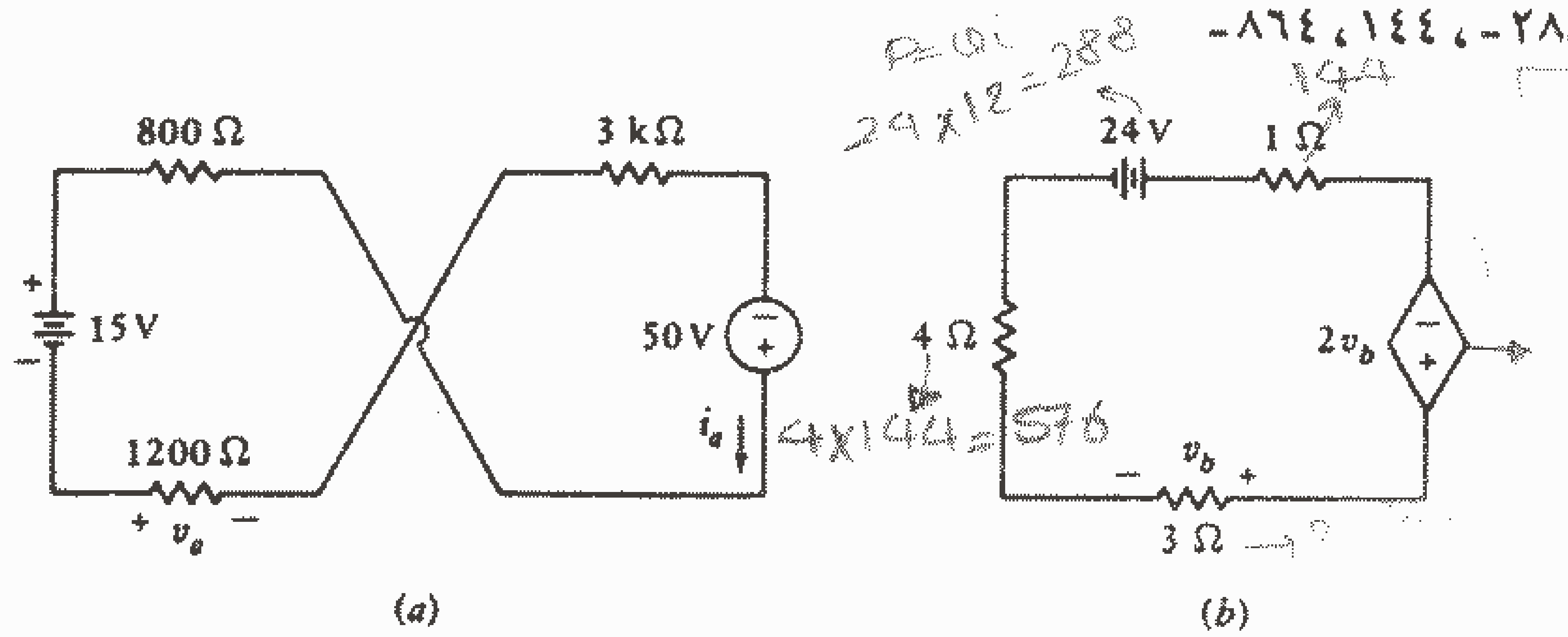
$$-120 + 30i - 30i + 15i = 0 \rightarrow i = 8 \quad A$$

روابط قدرت نشان می‌دهد که باتری ۱۲۰ V قدرت ۹۶۰ w را تحویل می‌دهد و منبع وابسته قدرت ۱۹۲۰ w را تحویل می‌دهد و دو مقاومت با هم قدرت ۲۸۸۰ W را تلف می‌کنند. کاربردهای عملی‌تر منابع وابسته در مدار معادلهای ترانزیستور و تقویت‌کننده عملیاتی در فصل بعدی ظاهر خواهند شد.

تمرین

۵ ـ ۲ـ برای مدار شکل ۱۰ a ـ ۲ پیدا کنید: (a) i_x؛ (b) v_x؛ (c) قدرت تحویل داده شده به وسیله باتری ۱۵V. جواب: ۷ mA؛ ۸,۴ V؛ ۱۰۵ m W- .

۶ ـ ۲ ـ در مدار شکل b ۱۰ ـ ۲، قدرت جذب شده به وسیله هر یک از پنج عنصر موجود در مدار را پیدا کنید. جواب: از گوشهٔ پایین سمت چپ و در جهت عقربه‌های ساعت: W ۴۳۲، ۵۷۶، ۲۸۸-، ۱۴۴، ۸۶۴-

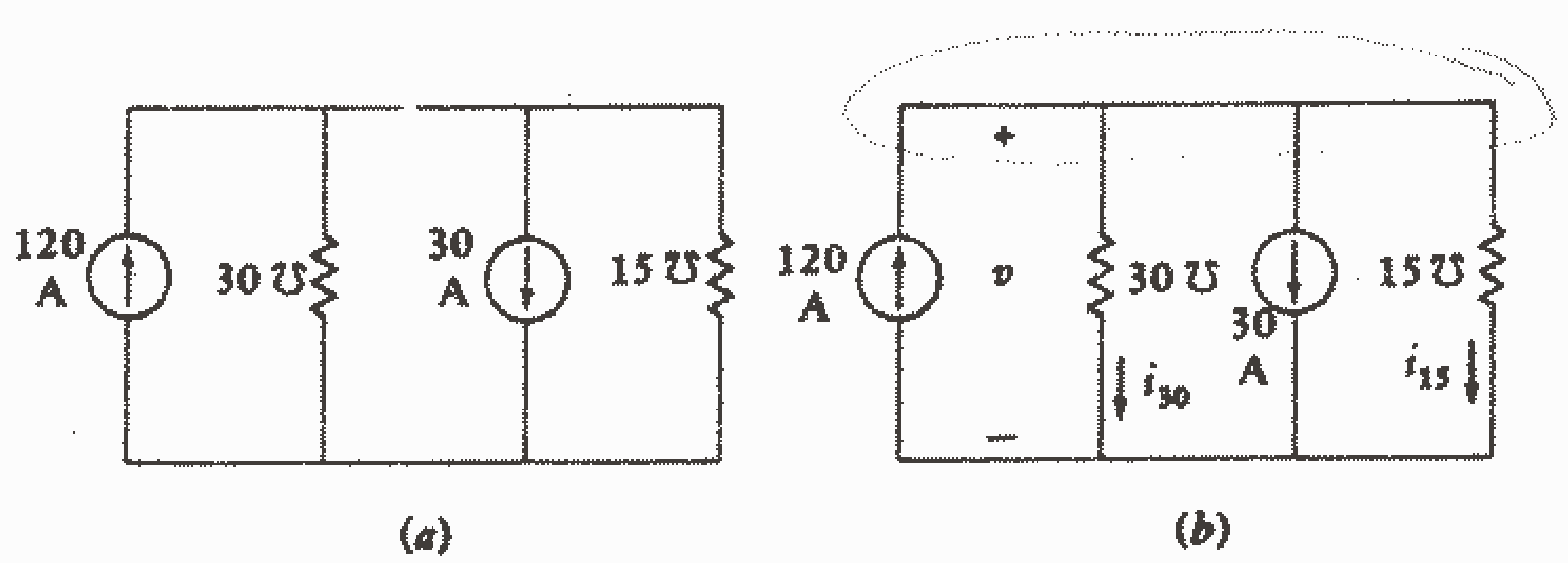


شکل ۱۰ ـ ۲: مراجعه شود به تمرینات ۵ ـ ۲ و ۶ ـ ۲

۵ ـ ۲ مدار یک جفت گرهی

همتا و متناظر مدار تک حلقه‌ای که قبلاً مورد بحث قرار گرفت، مدار یک جفت گرهی می‌باشد که در آن هر تعداد عناصر ساده بین زوج گره یکسانی وصل می‌شوند. یک مثال برای چنین مداری در شکل a ۱۱ ـ ۲ نشان داده شده است.

مقادیر دو منبع جریان و هدایتها داده شده‌اند و ما می‌خواهیم یکبار دیگر جریان، ولتاژ و قدرت هر عنصر را بدست آوریم.



شکل ۱۱ ـ ۲: (a) یک مدار یک جفت گرهی. (b) یک ولتاژ و دو جریان مشخص شده‌اند.

اکنون قدم اول ما فرض کردن یک ولتاژ برای دو سر هر عنصر و انتخاب یک پلاریتهٔ مبنای دلخواه می‌باشد. سپس قانون ولتاژ کیرشوف به ما حکم می کند که ولتاژ دو سر هر شاخه یکسان است زیرا برای هر شاخه از یک گره تا گره دیگر یک مسیر بسته وجود دارد.

برای اینکه ولتاژ کل صفر شود لازم است که ولتاژ دو سر هر عنصر یکسان باشد. ما عناصری را که ولتاژ دو سرشان مشترک می‌باشد می گوییم اتصال موازی دارند. بیاید این ولتاژ را v بنامیم و آن را به طور دلخواه مانند شکل b ۱۱ ـ ۲ نشان دهیم.

سپس دو جریانی که در مقاومتها جاری هستند مطابق با قرارداد علامت غیرفعال انتخاب می‌شوند. این جریانها هم در شکل b ۱۱ ـ ۲ نشان داده شده‌اند.

قدم سوم ما در تحلیل مدار یک جفت گرهی، اعمال KCL به هر یک از دو گره موجود در مدار می‌باشد. معمولا واضح‌تر است که آن را به گرهی که قطب مثبت ولتاژ مبنا قرار دارد اعمال کنیم و در نتیجه ما مجموع جبری جریانهایی را که از گره بالایی خارج می‌شوند مساوی صفر قرار می‌دهیم: $-120 + i_{30} + 30 + i_{15} = 0$ و سرانجام جریان هر مقاومت را بر حسب v و هدایت آن مقاومت توسط قانون اهم بیان می‌کنیم:

$$i_{30} = 30v \quad \text{و} \quad i_{15} = 15v$$

$$\rightarrow \quad -120 + 30v + 30 + 15v = 0 \quad \rightarrow \quad v = 2 \quad V$$

$$i_{30} = 60 \quad A \quad \text{و} \quad i_{15} = 30 \quad A$$

مقادیر قدرتهای جذب شده را اکنون می‌توان به سادگی به دست آورد. در دو مقاومت داریم:

$$p_{30} = 30(2)^2 = 120 \quad W \qquad p_{15} = 15(2)^2 = 60 \quad W$$

و برای دو منبع داریم:

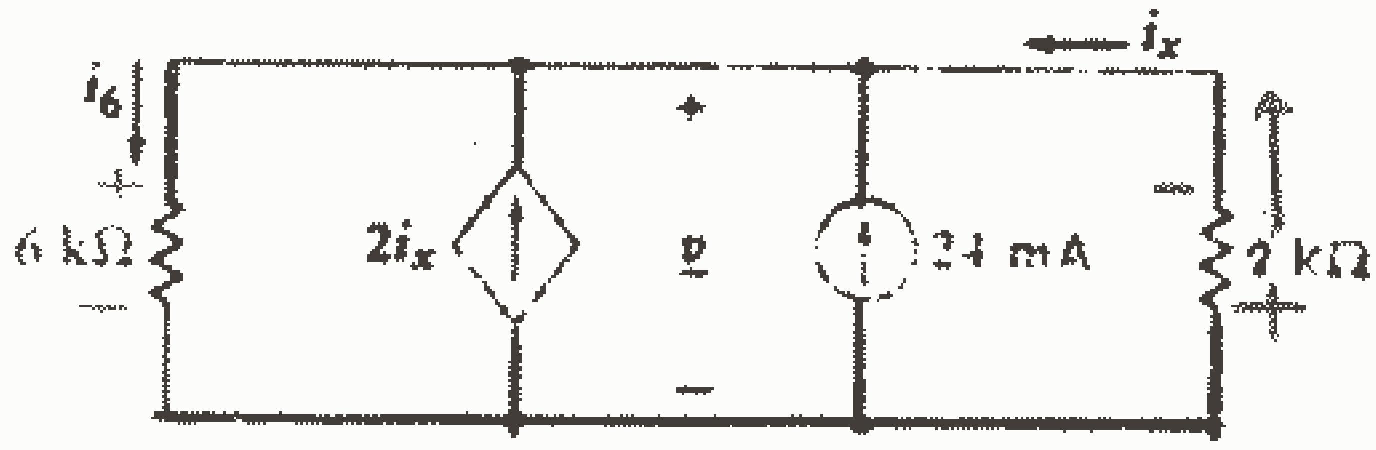
$$p_{120A} = 120(-2) = -240 \quad W \qquad p_{30A} = 30(2) = 60 \quad W$$

بنابراین منبع جریان بزرگتر W ۲۴۰ به سه عنصر دیگر مدار تحویل می‌دهد و یکبار دیگر قانون بقای انرژی اثبات می‌شود.

تشابه این مثال را با مثال قبلی که حل مدار سری با منابع مستقل را نشان می‌داد، نباید از نظر دور داشت. اعداد همگی یکسان هستند، اما جریانها با ولتاژها، مقاومتها با هدایتها و «سری» با «موازی» عوض شده است. این مورد مثالی است از تناظر (duality) و می گوییم که دو

مدار دقیقاً متناظر یکدیگر هستند. اگر مقادیر عناصر و یا مقادیر منابع در هر مداری تغییر کند، بدون تغییر آرایش مدار، در این صورت دو مدار را متناظر (و یا هم پاسخ ـ مترجم) می‌نامند، اگر چه دقیقاً متناظر نباشند. ما بعداً تناظر را مورد مطالعه و استفاده قرار خواهیم داد و فعلا فقط این تصور را داریم که هر نتیجه‌ای که بر حسب جریان، ولتاژ و مقاومت در یک مدار سری به دست می آوریم دارای همتایی بر حسب ولتاژ، جریان و هدایت در یک مدار موازی می‌باشد.

حال بیایید مهارت خود را در یک مدار یک جفت گرهی شامل یک منبع وابسته مطابق شکل ۱۲ ـ ۲ بکار بریم.



شکل ۱۲ ـ ۲: ولتاژ V و جریان i_6 در یک مدار یک جفت گرهی حاوی یک منبع وابسته، مشخص شده‌اند.

منبع جریان وابسته به وسیله جریان i_x مقاومت ۲ K Ω کنترل می‌شود. ما یک ولتاژ دلخواه v را با قطب مثبت در بالا و یک جریان i_6 در مقاومت ۶ K Ω مشخص می کنیم.

مجموع جریانهایی که از گره بالایی خارج می‌شوند صفر می‌باشد، یعنی:

$i_6 - 2i_x - 0.024 - i_x = 0$ ما سپس قانون اهم را به هر مقاومت اعمال می‌کنیم البته با توجه به این امر که مقادیر رایج‌تر مقاومت به جای هدایت داده شده است:

$i_6 = \frac{v}{6000}$ and $i_x = \frac{-v}{2000}$ و بنابراین:

$$\frac{v}{6000} - 2\left(\frac{-v}{2000}\right) - 0.024 - \left(\frac{-v}{2000}\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad v = 600 \times 0.024 = 14.4 \quad \text{V}$$

هر اطلاعات دیگری از این مدار را اگر بخواهیم پیدا کنیم، اکنون به سادگی فقط با یک قدم به دست می آید. مثلا، قدرت تحویل داده شده به وسیله منبع مستقل عبارت است از

$p_{24} = 14.4(0.024) = 0.346$ W و جریانی که از هادی وسطی فوقانی رو به راست جاری است برابر است با:

$$i = -0.024 + (14.4/2000) = -0.0168 \text{ A}, \text{ یا } -16.8 \text{ mA.}$$

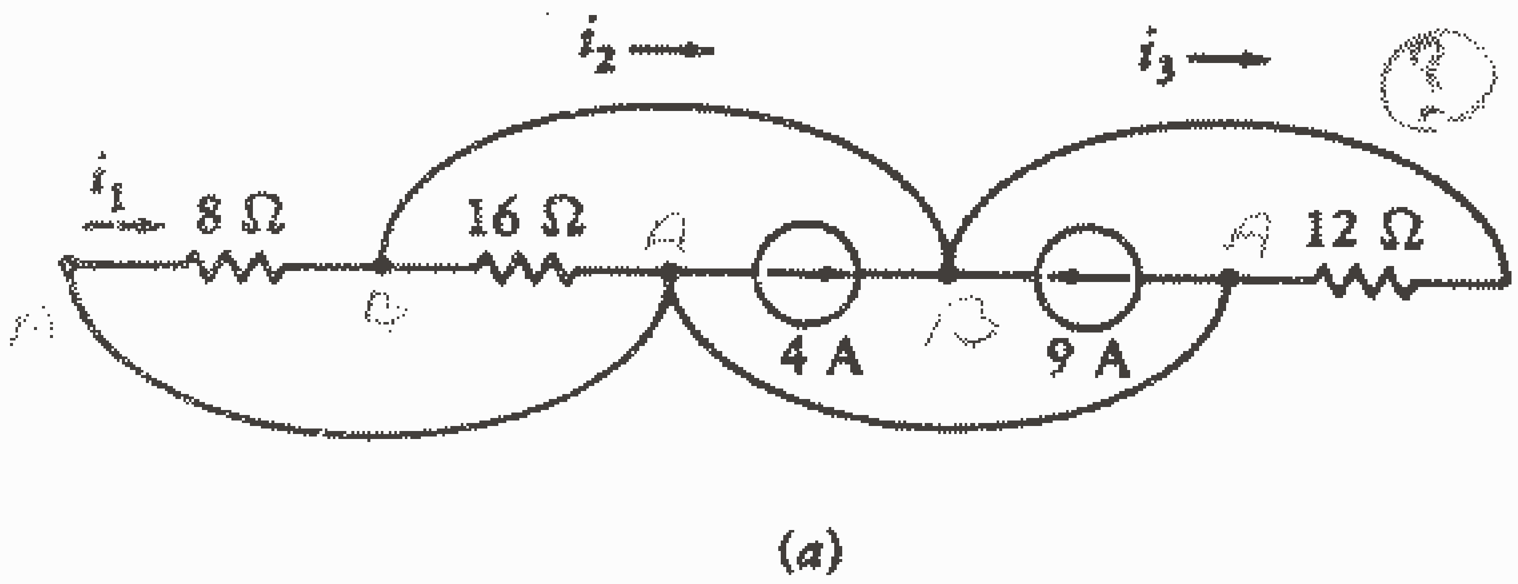
تمرین

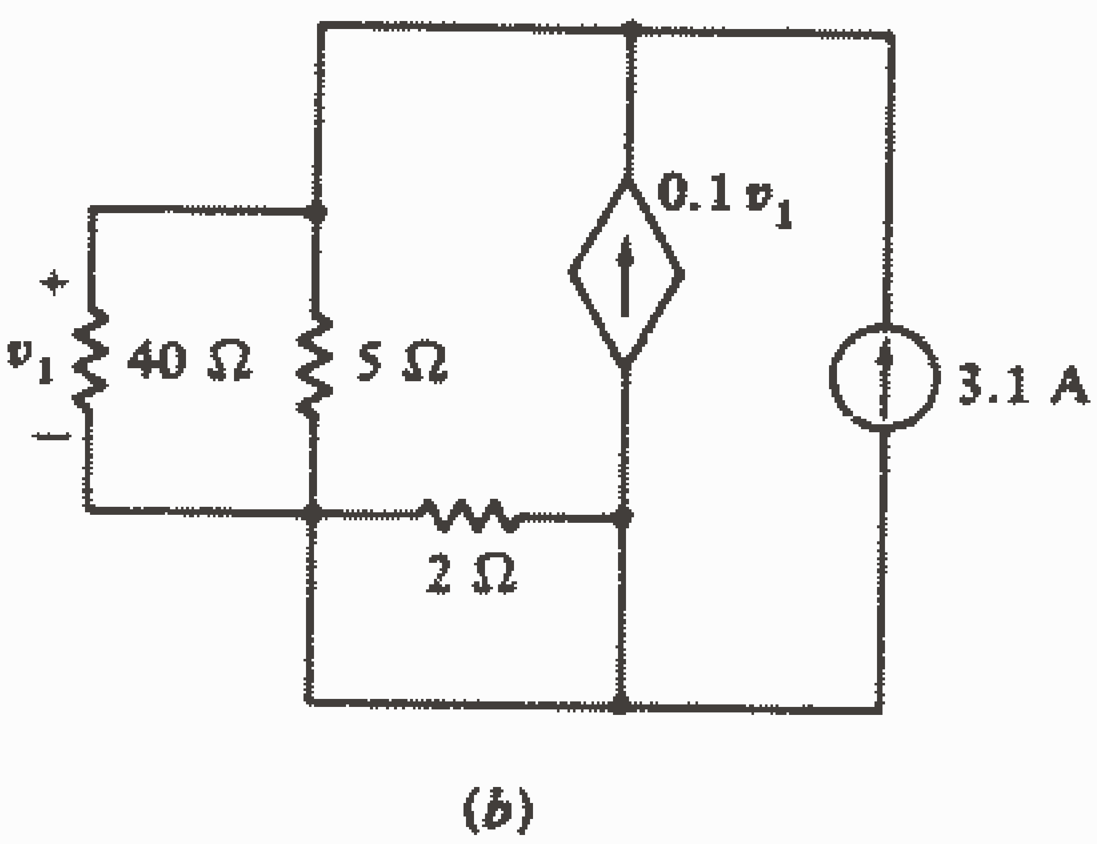
۷ ـ ۲ ـ در مدار یک جفت گرهی شکل a ۱۳ ـ ۲ پیدا کنید:

(a) i۱ , (b) i۲ ,(c) i۳ جواب: A ٦ - ، ۹ - ، ٤

۸ ـ ۲ ـ در مدار یک جفت گرهی شکل b ۱۳ ـ ۲ قدرت جذب شده به وسیله هر یک از پنج عنصر را به دست آورید.

جواب: از چپ به راست: ۱۵٫٤، ۱۲۳، ۰، ٦۱٫۵-، ۷٦٫۹- W





شکل ۱۳ ـ ۲: مراجعه شود به تمرینات ۷ ـ ۲ و ۸ ـ ۲.

٦ ـ ۲ ترکیب مقاومتها و منابع

بعضی از معادلاتی را که ما تاکنون برای مدارهای سادهٔ سری و موازی نوشته‌ایم، می‌توانند حذف شوند. این امر با جایگزین نمودن یک ترکیب نسبتاً پیچیدهٔ مقاومتها با یک مقاومت معادل منفرد البته جاییکه ما جریان، ولتاژ و قدرت یکی از این مقاومتهای بخصوص را احتیاج نداشته باشیم، حاصل می‌شود. در این صورت تمام ولتاژها و جریانها و قدرت بقیه مدار تغییر نخواهد کرد. ما ابتدا ترکیب سری N مقاومت را که در شکل a ۱٤ ـ ۲ نشان داده شده است در نظر می گیریم.

قسمت سایه خورده‌ای که مقاومتها را احاطه کرده است برای این منظور است که القاء‌کننده این مطلب به ذهن باشد که آنها در یک «جعبهٔ سیاه» و یا شاید در اتاقک دیگری محصور شده‌اند و ما می‌خواهیم این N مقاومت را با یک مقاومت معادل Req جایگزین کنیم بطوریکه بقیهٔ مدار (در این حالت فقط منبع ولتاژ) احساس نکند که تغییری روی داده است. جریان، قدرت و ولتاژ منبع در قبل و بعد از این جایگزینی، یکسان می‌باشد.

با اعمال قانون ولتاژ کیرشف داریم:

$$v_s = v_1 + v_2 + \cdots + v_N$$

و با استفاده از قانون اهم:

$$v_s = R_1 i + R_2 i + \cdots + R_N i = (R_1 + R_2 + \cdots + R_N) i$$

و سپس این رابطه را با معادلهٔ ساده‌ای که بیانگر مدار معادل شکل ۱۴b-۲ می‌باشد مقایسه می کنیم، $v_s = R_{eq} i$ در نتیجه مقدار مقاومت معادل برای N مقاومت سری عبارت است از:

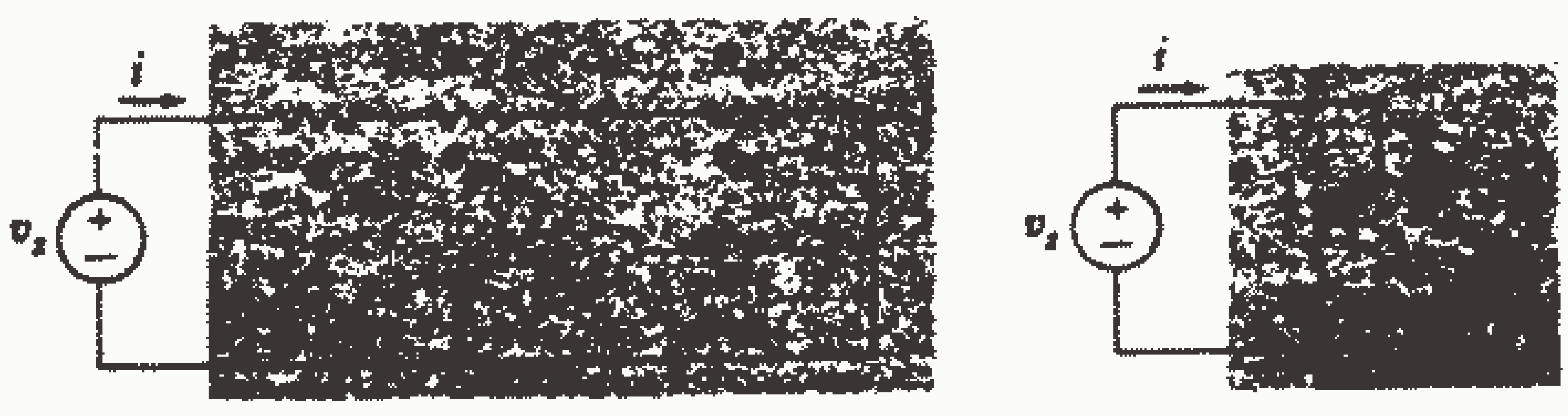
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \qquad (۹)$$

بنابراین ما قادر هستیم یک شبکهٔ دو ترمینالی مرکب از N مقاومت سری را با یک عنصر دو ترمینالـی R_{eq} که همان رابطهٔ $V - i$ را دارا می‌باشد، جایگزین کنیم. هیچ اندازه‌گیری که ما بتوانیم در بیرون «جعبهٔ سیاه» انجام دهیم نمی‌تواند به ما بگوید که کدام مدار کدام است.

دوباره تأکید می کنیم که ممکن است جریان، ولتاژ و یا قدرت یکی از عناصر اولیه (قبل از جایگزینی با مقاومت معادل) مورد توجه ما باشد مثلاً وقتیکه ولتاژ یک منبع ولتاژ وابسته بستگی به ولتاژ، مثلاً $R_۳$، داشته باشد. چون $R_۳$ با چند مقاومت سری ترکیب شده و تشکیل یک مقاومت معادل را داده است پس آن از بین رفته است و ولتاژ دو سر آن را نمی‌توان تعیین نمود مگر اینکه $R_۳$ را با جدا کردن آن از ترکیب مشخص نمود. البته بهتر بود که آینده‌نگر می‌بودیم و از همان ابتدا $R_۳$ را ترکیب نمی کردیم.

یک بررسی معادله ولتاژ کیرشوف بر روی یک مدار سری دو امکان ساده‌سازی دیگر را نیز نمایان می کند. یکی اینکه محل قرار گرفتن عناصر در یک مدار سری فرقی نمی‌کند و دیگر اینکه چند منبع ولتاژ سری را می‌توان با یک منبع ولتاژ معادل که ولتاژ آن برابر با مجموع جبری منابع جداگانه باشد، جایگزین نمود. معمولاً وقتیکه یک منبع وابسته در یک ترکیب سری باشد کار کمی مشکلتر می‌شود.

این ساده‌سازیها را می‌توان با توجه به مدار شکل ۱۵ a ـ ۲ تجسم نمود.

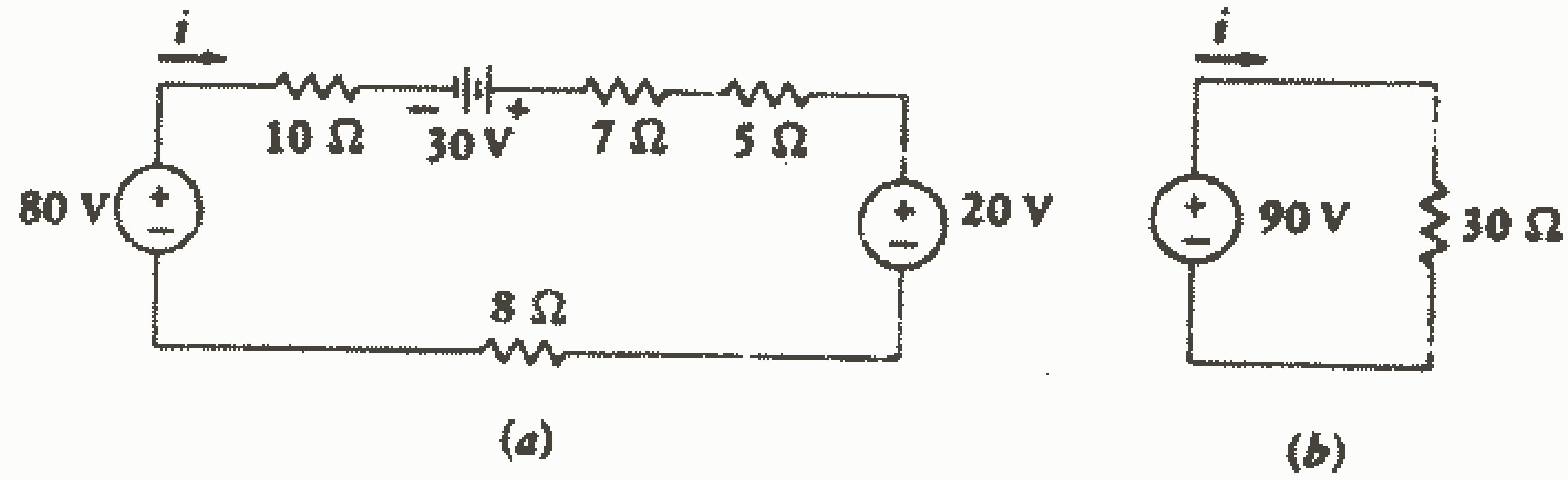


(a) (b)

شکل ۱٤ ـ ۲: (a) مداری که شامل N مقاومت سری می‌باشد.

(b) یک مدار معادل ساده‌تر با: $R_{eq} = R_۱ + R_۲ + \cdots + R_N$.

ما ابتدا محل عناصر را عوض می‌کنیم و دقت می‌کنیم که جهت مناسب منابع حفظ شود و سپس سه منبع ولتاژ را به صورت یک منبع معادل V ۹۰ ترکیب می‌کنیم و چهار مقاومت را به صورت یک مقاومت معادل Ω ۳۰ به طوریکه در شکل b ۱۵ ـ ۲ نشان داده شده است، ترکیب می‌کنیم. بنابراین به جای نوشتن $-80 + 10i - 30 + 7i + 5i + 20 + 8i = 0$ به طور ساده‌تر می‌توانیم بنویسیم: $-90 + 30i = 0 \rightarrow i = 3 \quad A$



شکل ۱۵ ـ ۲: (a) یک مدار سری داده شده. (b) یک مدار معادل ساده‌تر.

برای محاسبهٔ قدرت تحویل داده شده به وسیله منبع V ۸۰ در مدار داده شده، لازم است که به آن مدار باز گردیم با علم به اینکه جریان A ۳ می‌باشد. قدرت مطلوب W ۲٤۰ می‌باشد.

جالب است توجه کنیم که هیچیک از عناصر مدار اولیه در مدار معادل باقی نمی‌ماند مگراینکه بخواهیم سیمهای رابط را به عنوان عنصر به حساب آوریم.

ساده‌سازیهای مشابهی را می‌توان برای مدارهای موازی در نظر گرفت[1] یک مدار شامل N هدایت موازی مانند شکل a ۱٦ ـ ۲ ما را به معادلهٔ KCL زیر رهنمون می‌شود:

$$i_s = i_1 + i_2 + \cdots + i_N$$

و یا

$$i_s = G_1 v + G_2 v + \cdots + G_N v = (G_1 + G_2 + \cdots + G_N)v$$

در حالیکه معادل آن در شکل ۲-۱٦b می‌دهد: $i_s = G_{eq} v$ بنابراین داریم:

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_N$$

برحسب مقاومت بجای هدایت داریم:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}$$

و یا: (۱۰)

$$R_{eq} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + \cdots + 1/R_N}$$

---

۱ ـ تناظر

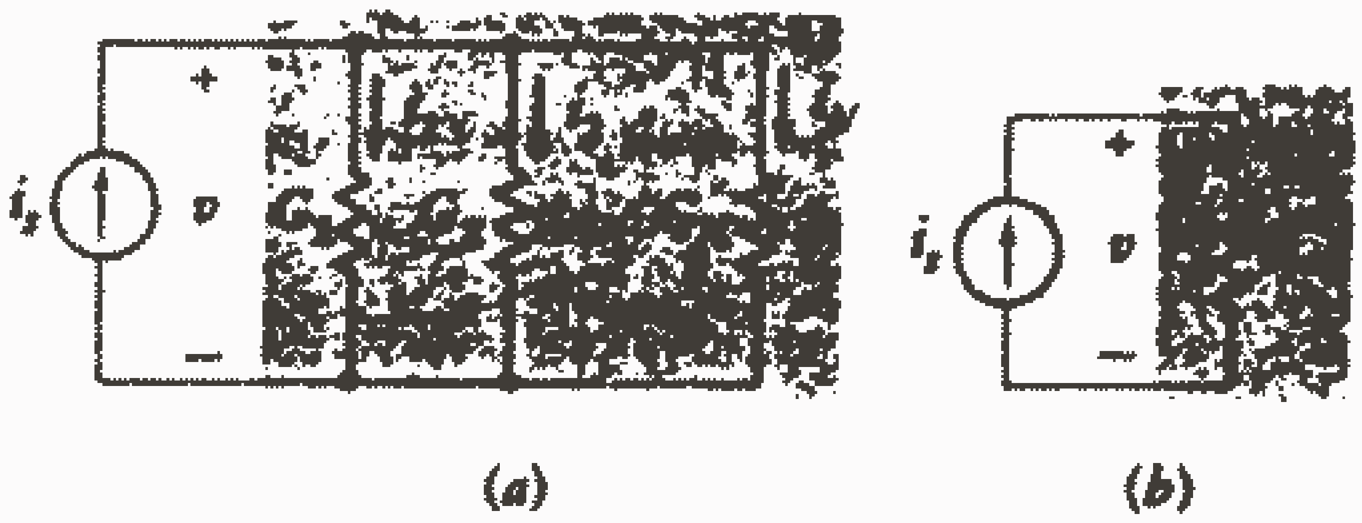
این معادلهٔ اخیر احتمالا در اغلب موارد برای ترکیب مقاومتهای موازی بکار می‌رود. ترکیب موازی اغلب بصورت $R_{eq} = R_1 \| R_2 \| R_3$ نوشته می‌شود.

در حالت خاصی که فقط دو مقاومت موازی داشته باشیم، خواهیم داشت:

$$R_{eq} = R_1 \| R_2 = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} \quad \text{یا} \quad R_{eq} = R_1 \| R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad (۱۱)$$

رابطه (۱۱) برای به خاطر سپردن مناسب‌تر است.

منابع جریان موازی را هم می‌توان با جمع جبری نمودن جریانهای منفرد، ترکیب نمود و محل عناصر موازی را می‌توان به دلخواه تغییر داد.



شکل ۱۶ - ۲: (a) یک مدار شامل N مقاومت موازی با هدایت‌های $G_1, G_2, \ldots, G_N$ (b) یک مدار معادل ساده‌تر: $G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_N$

ترکیبات مختلفی را که در این قسمت توضیح دادیم برای ساده کردن مدار شکل ۲-۱۷a بکار می‌بریم. فرض کنیم که می‌خواهیم قدرت و ولتاژ منبع وابسته را بدست آوریم. ما آنرا تنها می گذاریم و سپس دو منبع باقیمانده را به صورت یک منبع ۲A ترکیب می کنیم و مقاومتها را با ترکیب دو مقاومت ۶Ω موازی به یک مقاومت ۳Ω شروع می کنیم و سپس ترکیب سری ۳Ω و ۱۵Ω را انجام می‌دهیم و سپس دو مقاومت موازی ۹Ω و ۱۸Ω را ترکیب می کنیم و مقاومت ۶Ω بدست می‌آید و این حداکثر جایی است که بطور سودمند می‌توانیم پیش برویم. مطمئنا ترکیب موازی ۶Ω و ۳Ω می‌شود ۲Ω، اما در اینصورت جریان i_3 که منبع به آن وابسته است از بین می‌رود.[۱] از مدار معادل شکل ۲-۱۷b داریم:

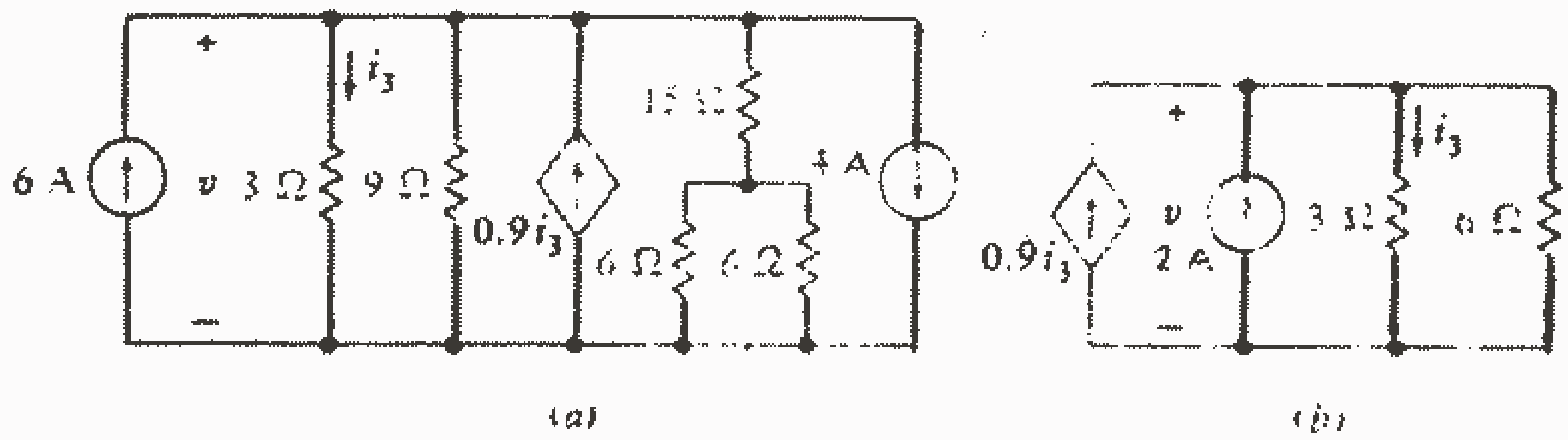
$$-0.9 i_3 - 2 + i_3 + \frac{v}{6} = 0 \quad , \quad v = 3 i_3 \rightarrow i_3 = \tfrac{10}{3} \ \text{A} \rightarrow \quad v = 10 \ \text{V}$$

---

۱ - البته ما می‌توانستیم آنرا با نوشتن $i_3 = ۷/۳$ حفظ کنیم که در اینصورت i_3 برحسب متغیرهایی که در مدار نهایی ظاهر می‌شود، بیان می‌شود.

بنابراین منبع وابسته قدرت $v(0.9i_3) = 10(0.9 \times \frac{10}{3}) = 30\ \mathrm{W}$ را به بقیه مدار تحویل می‌دهد. حال اگر بطور بی‌موقع و بعنوان یک کار از موقع گذشته از ما بخواهند قدرت تلف شده در مقاومت ۱۵Ω را بدست آوریم، باید به مدار اصلی برگردیم. این مقاومت با یک مقاومت معادل ۳Ω سری می‌باشد و ولتاژ ۱۰V در دو سر کل مقاومت ۱۸Ω وجود دارد بنابراین جریان ۵/۹ A از مقاومت ۱۵Ω عبور می‌کند و قدرت جذب شده بوسیله این عنصر عبارت است از (۱۵) ۲(۵/۹) و یا ٤٫٦۳W .

در خاتمه بحث ترکیب عناصر سری و موازی، باید به ترکیب موازی دو منبع ولتاژ و ترکیب سری دو منبع جریان توجه نماییم. مثلا منبع معادل یک ترکیب موازی منبع ۵V با منبع ۱۰V چه می‌شود؟ بنابر تعریف یک منبع ولتاژ، ولتاژ دو سر منبع نمی‌تواند تغییر کند، پس بنابر قانون ولتاژ کیرشوف باید ۵ مساوی ۱۰ باشد که از نظر فیزیکی غیر ممکن است (بنابراین، منابع ولتاژ فقط وقتی می‌توانند موازی باشند که ولتاژ دو سر هر یک از آنها در هر لحظه مساوی باشد) بعدا خواهیم دید که منابع ولتاژ عملی را می‌توان بدون هیچگونه مشکل تئوریک بطور موازی ترکیب نمود.



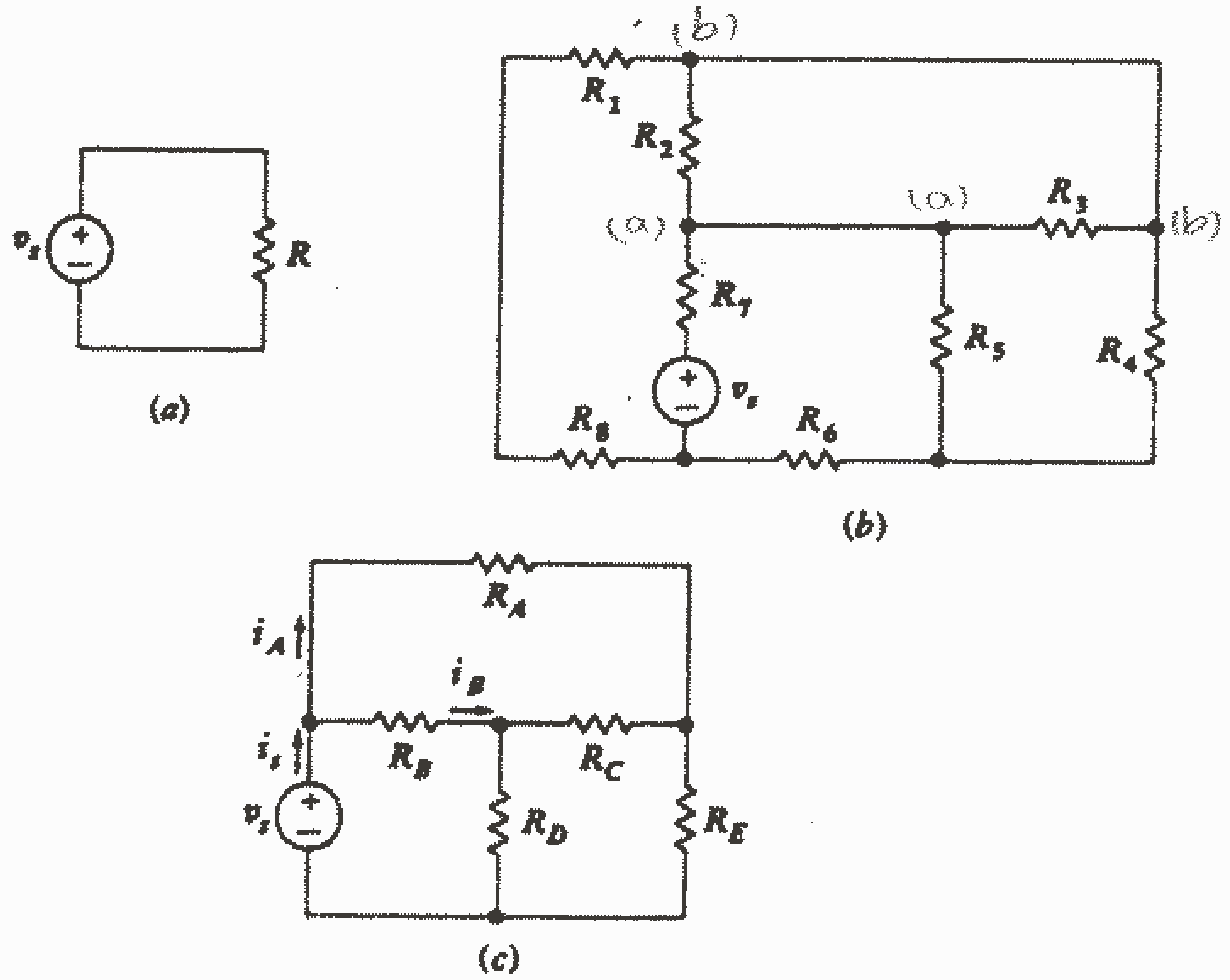
شکل ۱۷ ـ ۲: (a) یک مدار شده. (b) مدار معادل ساده شده.

(بطریق مشابه دو منبع جریان را نمی‌توان بطور سری ترکیب نمود مگر اینکه هر یک در هر لحظه دارای جریان مساوی، و هم علامت، باشند.)

یک منبع ولتاژ موازی یا سری با یک منبع جریان یک سرگرمی فکری جالب را ارائه می‌کند. این دو حالت ممکن در مسئله ۳٤ آخر فصل نشان داده شده است.

و سرانجام سه توضیح نهایی دربارهٔ ترکیب سری و موازی می‌تواند مفید باشد. توضیح اول را با مراجعه به شکل ۱۸a-۲ و پرسیدن اینکه، «آیا v_x و R سری هستند و یا موازی؟» می‌توان ارائه

نمود. جواب این پرسش واضح است: «هر دو» هر دو عنصر حامل جریان یکسان بوده در نتیجه سری هستند و همچنین هر دوی آنها ولتاژ یکسانی دارند پس موازی می‌باشند. این مدار ساده تنها حالتی است که این مطلب در مورد آن صادق است.



شکل ۱۸ - ۲: (a) این دو عنصر مداری هم موازی و هم سری هستند.

(b) R_2 ، R_3 موازی و R_1 ، R_8 سری هستند.

(c) هیچ عناصر مداری سری و موازی وجود ندارد.

نکتهٔ دوم یک تذکر می‌باشد. مدارها را ممکن است دانشجویان ناشی و یا اساتید بی‌دقت طوری رسم کنند که تشخیص ترکیبات سری و موازی مشکل باشد. مثلا در شکل ۱۸b-۲ فقط دو مقاومت R_2 و R_3 موازی هستند در حالیکه فقط دو مقاومت R_1 و R_8 سری می‌باشند. البته v_s و R_7 نیز سری هستند.

توضیح آخر اینکه لازم نیست یک عنصر مداری ساده موازی و یا سری با هیچ عنصر مداری سادهٔ دیگری باشد. مثلا R_4 و R_5 در شکل ۱۸b-۲ با هیچ عنصر مداری سادهٔ دیگری موازی یا

سری نیستند و هیچ عنصر مداری ساده‌ای در شکل ۱۸c-۲ وجود ندارد که با عنصر مداری سادهٔ دیگری موازی یا سری باشد.

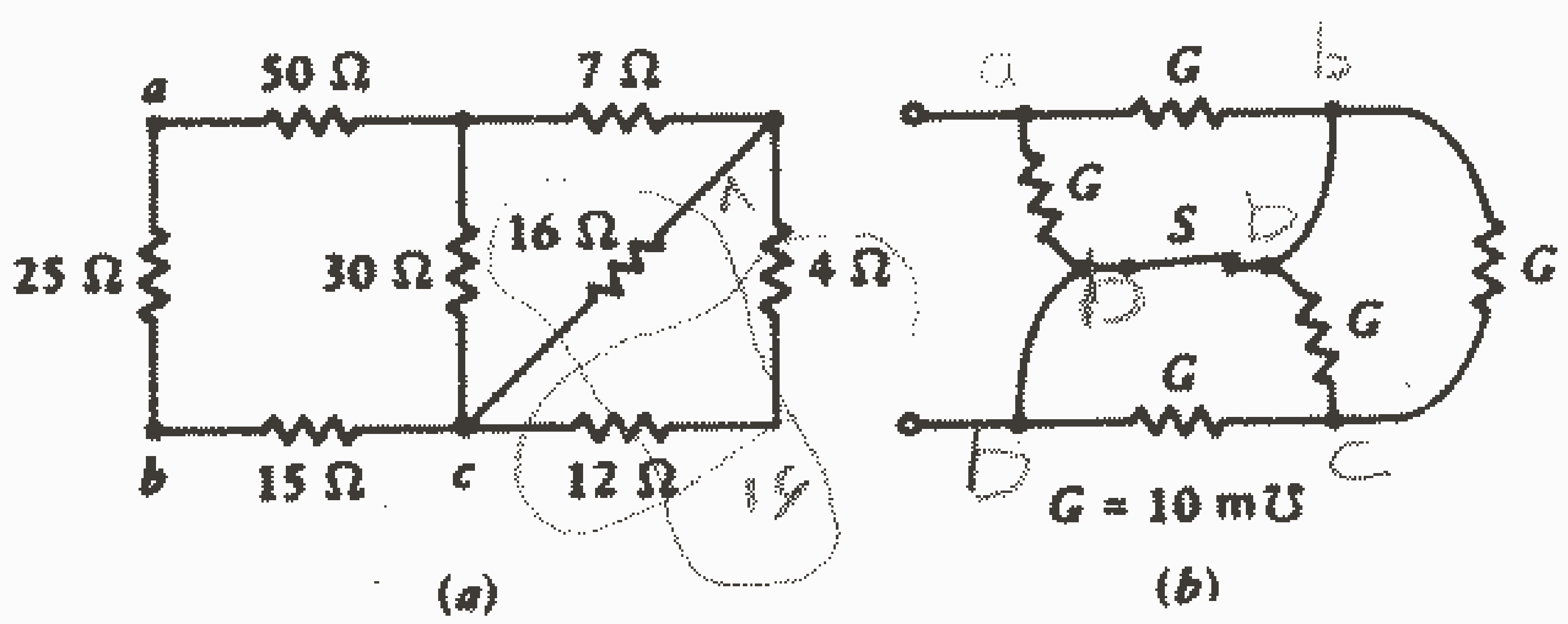
تمرین

۹-۲ - اهم متر وسیله‌ای است که مقدار مقاومتی را که بین دو ترمینال آن دیده می‌شود، ارائه می کند. مقدار صحیح خوانده شده وقتی که این وسیله به شبکهٔ شکل ۱۹a-۲ وصل شود در نقاط زیر چه خواهد بود: ab (a), ac (b), bc (c)?

جواب: ۱۲٫۷۵، ۲۴، ۱۸٫۷۵Ω

۱۰ - ۲ - چه هدایتی در ترمینال‌های شبکهٔ شکل ۱۹b-۲ اندازه‌گیری می‌شود اگر کلید S:(a) باز باشد، (b) بسته باشد، (c) بوسیله یک هدایت ۱۰m℧ جایگزین شود.

جواب: ۱۶٫۲۵ ، ۲۰ ، ۱۴m℧



شکل ۱۹ - ۲: به تمرین ۹-۲ و ۱۰-۲ مراجعه کنید.

۷ - ۲ تقسیم ولتاژ و جریان

با ترکیب مقاومت‌ها و منابع ما یک روش برای کوتاه کردن کار تحلیل یک مدار بدست آوردیم. اختصار مفید دیگر کاربرد ایده‌های تقسیم ولتاژ و جریان می‌باشد. تقسیم ولتاژ برای بیان ولتاژ دو سر یکی از چند مقاومت سری برحسب ولتاژ دو سر کل ترکیب بکار می‌رود. در شکل ۲۰-۲، واضح است که ولتاژ دو سر R_2 عبارت است از: $v_2 = R_2 i = R_2 \frac{v}{R_1 + R_2}$

و یا

$$\boxed{v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v}$$

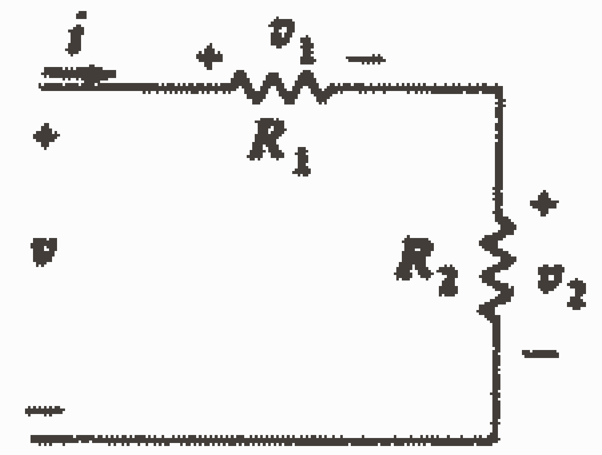
و بطریق مشابه ولتاژ دو سر R_1 عبارت است از:

$$\boxed{v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v}$$

اگر شبکهٔ شکل ۲۰-۲ با جایگزینی R_2 بوسیله $R_2, R_3, \dots, R_N$ تعمیم داده شود آنگاه ما نتیجهٔ کلی برای تقسیم ولتاژ در N مقاومت سری را بشرح زیر خواهیم داشت:

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N} v \qquad (۱۲)$$

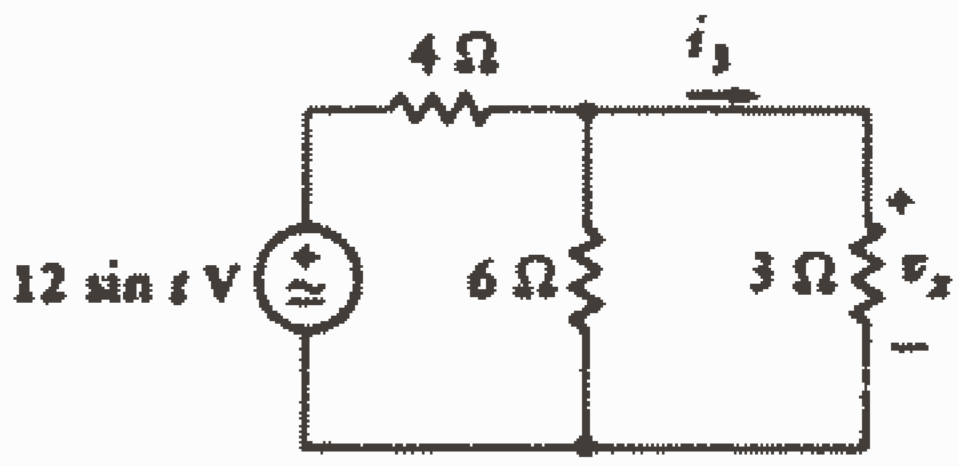
یعنی ولتاژی که در سر یک مقاومت سری ظاهر می‌شود برابر است با ولتاژ کل ضرب در نسبت آن مقاومت به مقاومت کل.



شکل ـ ۲۰ ـ ۲: تجسمی از تقسیم ولتاژ، $v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$

تقسیم ولتاژ و ترکیب مقاومت هر دو را می‌توان به مدار شکل ۲۱-۲ اعمال نمود. ما بطور ذهنی مقاومت‌های ۳Ω و ۶Ω را ترکیب می‌کنیم و مقاومت ۲Ω را بدست می‌آوریم و در نتیجه بدست می‌آید: $v_x = \frac{۲}{۶}(12 \sin t) = 4 \sin t$ V

متناظر تقسیم ولتاژ، تقسیم جریان می‌باشد. ما اکنون یک جریان کل داریم که به چند هدایت موازی تغذیه می‌شود که در مثال شکل ۲۲-۲ نشان داده شده است.



شکل ۲۱ ـ ۲: یک مثال عددی که نشان دهندهٔ ترکیب مقاومت و تقسیم ولتاژ می‌باشد علامت موج در داخل علامت منبع نشان دهندهٔ این است که تغییرات با زمان سینوسی می‌باشد.

جریانی که از G_2 عبور می کند برابر است با:

$$i_2 = G_2 v = G_2 \frac{i}{G_1 + G_2}$$

و یا

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i$$

و بطور مشابه داریم:

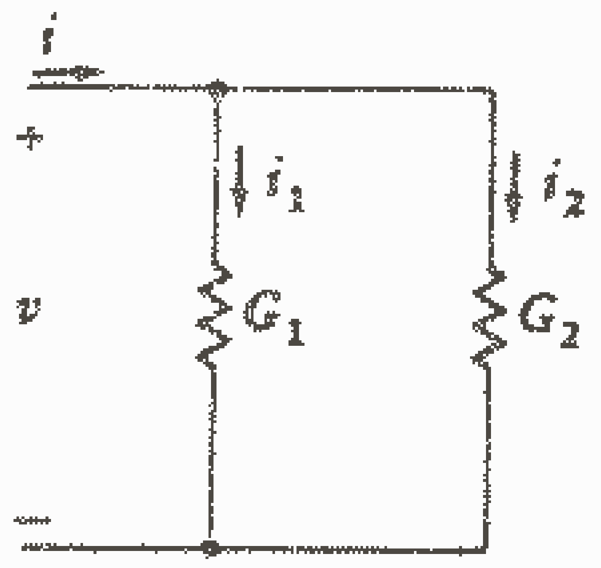
$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i$$

بنابراین جریانی که از هر یک از دو هدایت موازی عبور می کند برابر است با جریان کل ضرب در نسبت آن هدایت به هدایت کل.

از آنجاییکه اغلب مقدار مقاومت را به جای هدایت به ما می‌دهند، یک شکل مهم‌تر نتیجهٔ فوق با جایگزینی $1/R_1$ به جای G_1 و $1/R_2$ به جای G_2 بصورت زیر بدست می آید:

$$\boxed{i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i \qquad \text{و} \qquad i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i}$$

در اینجا طبیعت به ما روی خوش نشان نداده است و در این دو معادلهٔ اخیر فاکتوری داریم که بطور ظریفی با فاکتوری که برای تقسیم ولتاژ داشتیم فرق دارد و برای اجتناب از اشتباه باید قدری سعی و کوشش به خرج دهیم. اکثر دانشجویان به رابطه تقسیم ولتاژ به صورت «بدیهی» و به رابطه تقسیم جریان بصورت «مغایر» می‌نگرند. این امر همچنین کمک می کند دریابیم که از دو مقاومت موازی آنکه بزرگتر است جریان کمتری می کشد.



شکل ۲۲ ـ ۲: تصویری از تقسیم جریان، $i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$

ما این نتایج را هم می‌توانیم با جایگزین کردن اتصال موازی $G_2, G_3, \cdots G_N$ به جای G_2 در شکل ۲۲-۲ تعمیم دهیم. بنابراین برای N هدایت موازی داریم:

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + \cdots + G_N} i \qquad (۱۳)$$

برحسب مقادیر مقاومتی نتیجهٔ فوق بصورت زیر درمی‌آید:

$$i_1 = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2 + \cdots + 1/R_N}\, i \qquad (14)$$

بعنوان مثالی برای تقسیم جریان و ترکیب مقاومت بیایید به مثال شکل ۲۱-۲ برگردیم و رابطه‌ای برای جریان مقاومت ۳Ω بنویسیم. جریان کلی که از ترکیب مقاومت ۳Ω و ٦Ω می گذرد عبارت است از:

$$i = \frac{12 \sin t}{4 + (6)(3)/(6 + 3)} = 2 \sin t$$

و در نتیجه جواب مطلوب برابر است با:

$$i_3 = \frac{12 \sin t}{4 + (6)(3)/(6 + 3)} \frac{6}{6 + 3} = ٤/٣ \sin t$$

متاسفانه تقسیم جریان را گاهی اوقات که عملی نیست بکار می‌برند. بعنوان یک مثال، بیایید دوباره به مدار شکل ۱۸c-۲ ، مداری که قبلا توافق کرده‌ایم هیچ عنصر مداری سری یا موازی ندارد، توجه کنیم. بدون مقاومت‌های موازی هیچ راهی وجود ندارد که بتوانیم تقسیم جریان را بکار بریم. معذالک، دانشجویان زیادی وجود دارند که با یک نگاه سریع به مقاومت‌های R_A و R_B سعی می‌کنند با استفاده از تقسیم جریان معادلهٔ غلطی مانند $\cancel{i_A = i\frac{R_B}{R_A + R_B}}$ بنویسند.

به یاد داشته باشید که مقاومت‌های موازی باید بین یک جفت گره واحدی وصل شده باشند.

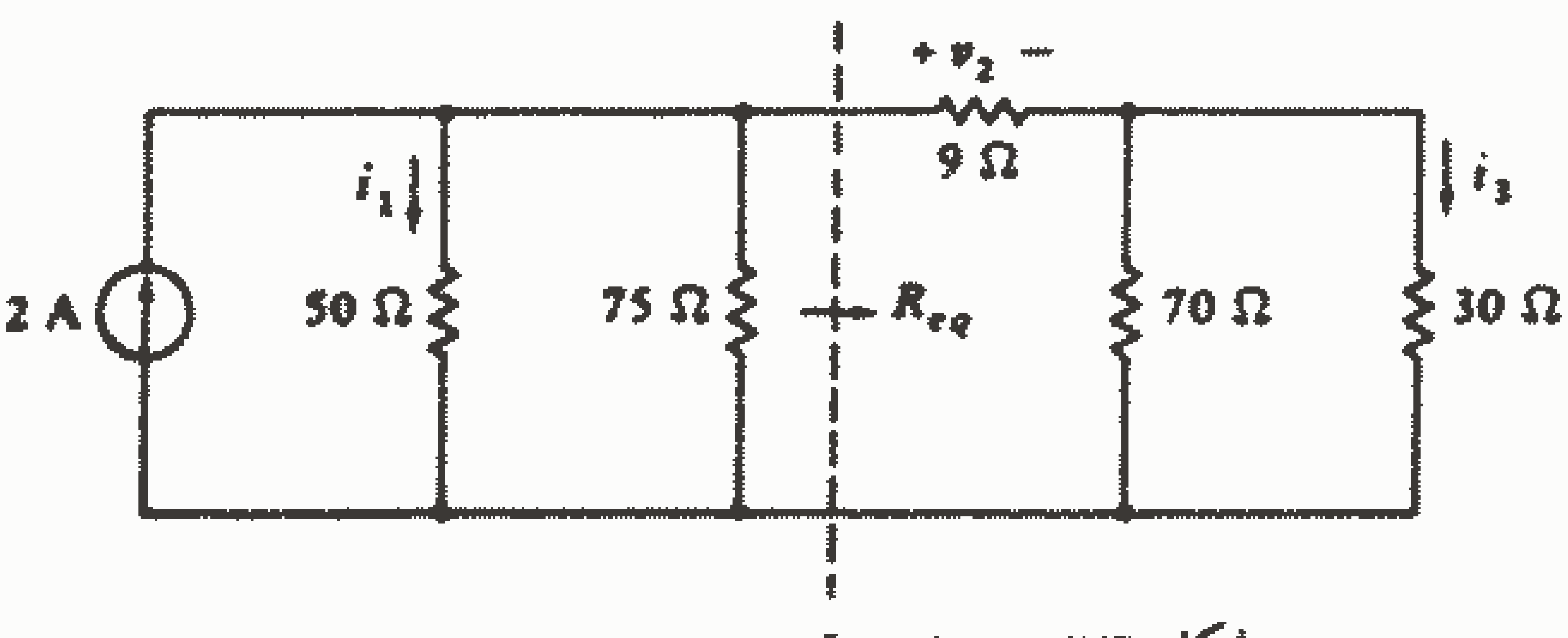
تمرین

۱۱ - ۲ - در مدار شکل ۲۳-۲: (a) با استفاده از روش ترکیب مقاومتها، R_{eq} را پیدا کنید.

(b) با استفاده از تقسیم جریان i_1 را پیدا کنید.

(c) با استفاده از تقسیم ولتاژ، v_2 را پیدا کنید.

(d) با استفاده از تقسیم جریان، i_3 را پیدا کنید. جواب: ۰٫٦A ، ۹V ، ۰٫۷A



شکل ۲۳ - ۲: به تمرین ۱۱-۲ مراجعه شود.

۸ - ۲ - یک مثال عملی: تقویت کنندهٔ عملیاتی

اکنون به اندازهٔ کافی قوانین پایه و تکنیک‌های تحلیلی ساده به ما معرفی شده است که ما قادر باشیم آنها را بطور موفقیت آمیز به بعضی مدارهای عملی جالب اعمال کنیم. در این قسمت ما بررسی یک وسیلهٔ الکترونیکی بنام تقویت کنندهٔ عملیاتی و یا به اختصار op-amp را شروع خواهیم کرد.

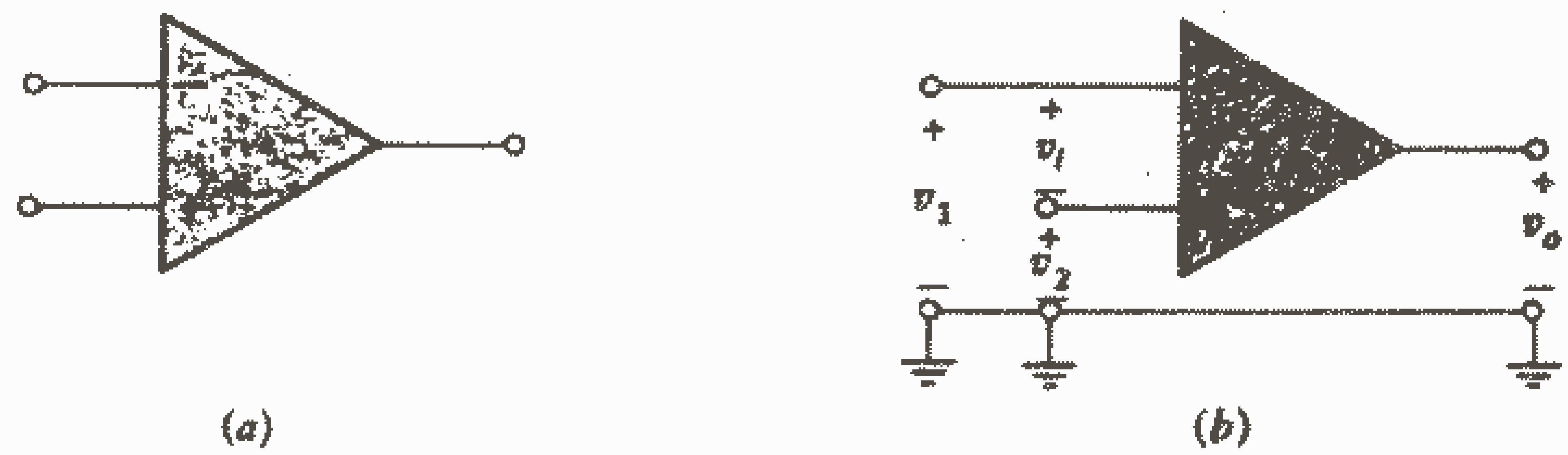
اولین تقویث کننده‌های عملیاتی در دههٔ ۱۹۴۰ با استفاده از لامپهای خلاء برای انجام عملیات ریاضی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، مشتق گیری و انتگرال گیری بطریق الکتریکی، ساخته شدند و در نتیجه حل الکتریکی معادلات دیفرانسیل را در کامپیوترهای آنالوگ اولیه ممکن ساختند.

op-amp اگر به اصول اساسی آن برگردیم دقیقا یک منبع ولتاژ کنترل شده بوسیله ولتاژ می‌باشد. منبع ولتاژ وابسته در ترمینالهای خروجی op-amp ظاهر می‌شود و ولتاژی که به آن بستگی دارد به ترمینال‌های ورودی اعمال می‌شود.

علامتی که بطور رایج برای op-amp بکار می‌رود در شکل ۲-۲٤a نشان داده شده است. دو ترمینال ورودی در سمت چپ و یک ترمینال خروجی در سمت راست نشان داده شده است. همچنین یک ترمینال و یا گره مشترک بنام «زمین» هم وجود دارد که معمولا بصورت واضح و آشکار بعنوان یک ترمینال op-amp نشان داده نمی‌شود. در مدارهای عملی اغلب عناصر زیادی به بدنهٔ فلزی و یا شاسی که مدار روی آن بنا می‌شود وصل می‌شوند و سپس این شاسی بوسیله یک هادی خوب به زمین وصل می‌شود. بنابراین، بدنهٔ فلزی، گره زمین می‌شود. علامت گره زمین چند بار در قسمت پایین شکل ۲-۲٤b نشان داده شده است.

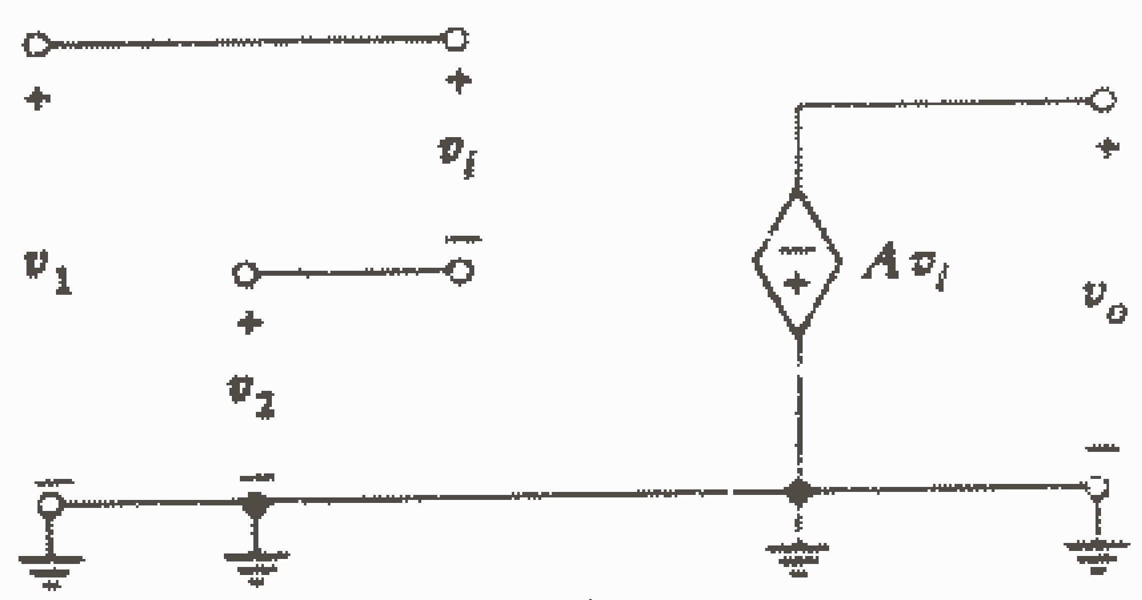
اگرچه ما می‌توانیم یک سیگنال ولتاژ و یا منبع ولتاژ منفردی را مستقیما بین ترمینال‌های ورودی اعمال کنیم ولی در بیشتر کاربردهای عملی بین هر ترمینال ورودی و زمین یک ولتاژ اعمال می‌شود. ترمینال ورودیی که با علامت (—) مشخص می‌شود بنام ورودی معکوس کننده خوانده می‌شود و یک ولتاژ v_1 بین ورودی معکوس کننده و زمین تعریف می‌شود که در شکل ۲-۲٤b نشان داده شده است.

ولتاژ v_2 بین ورودی غیرمعکوس کننده و زمین تعریف می‌شود. ما به طور خلاصه خواهیم دید که ولتاژ $(v_1 - v_2)$ به طور تقویت شده و معکوس شده از نظر پلاریته بین ترمینال خروجی و زمین ظاهر می‌شود.



شکل ۲۴ - ۲: (a) علامت مداری یک تقویت‌کنندهٔ عملیاتی.
(b) ولتاژهای ورودی v_1 ، v_2 ، اختلاف آنها v_i و خروجی v_o مشخص شده‌اند.

اگر $v_2 = 0$ باشد، آنگاه v_1 به صورت تقویت و معکوس شده در خروجی ظاهر می‌شود و اگر $v_1 = 0$ ، آنگاه v_2 به صورت تقویت شده و بدون تغییر علامت در خروجی ظاهر می‌شود. ضریب تقویت از 10^4 تا 10^7 برای op - ampهای مختلف تغییر می کند و یک مقدار معمول 10^5 می‌باشد. تفاضل v_1 و v_2 ولتاژ ورودی $v_i = v_1 - v_2$ می‌باشد. یک op - amp ممکن است قیمت کمی در حدود ۲۰ سنت داشته باشد که با آن یک مدار مجتمع(IC) حاوی ۲۵ ترانزیستور و یک دوجین مقاومت که همگی در یک قوطی کوچک و یا ویفر سرامیک با ۸ یا ۱۰ پایه برای اتصال به مدار خارجی بسته‌بندی شده‌اند، به دست می آوریم. در بعضی حالات چیپ IC ممکن است شامل چند op - amp باشد. علاوه بر پایهٔ خروجی و دو پایهٔ ورودی پایه‌های دیگر برای اعمال ولتاژهایی به ترانزیستورها و تنظیم خارجی برای متعادل کردن و جبران‌سازی op - amp می‌باشند. اگر چه ما فعلاً با مدار داخلی op - amp و یا IC کاری نداریم و فقط با روابط ولتاژ و جریان که در ترمینالهای خارجی وجود دارد، سر و کار داریم. بنابراین اتصالات نشان داده شده در شکل ۲۴a - ۲ کافی می‌باشند.



شکل ۲۵ - ۲: یک مدل ساده برای یک op - amp شامل یک منبع وابسته و چند ترمینال می‌باشد.

شکل ۲۵ - ۲ یک مدل مفید برای یک op - amp را نشان می‌دهد. مقاومت بین ترمینالهای ورودی بقدری بزرگ (۱۰^۵ تا ۱۰^۵ Ω) است که ما با اطمینان می‌توانیم آن را به وسیله یک مدار باز نشان دهیم. در مثالهای بعدی ما این مقاومت ورودی R_i را بین دو ترمینال ورودی وصل خواهیم کرد ولی فعلاً با مدل ایده آل کار می کنیم.

یک منبع ولتاژ وابستهٔ کنترل شده به وسیله ولتاژ یک ولتاژ خروجی مساوی با A برابر تفاضل دو ولتاژ ورودی ارائه می‌کند. مدلهای دقیقتر op - amp شامل یک مقاومت خروجی R_o از ۱ تا ۱۰۰۰Ω به طور سری با منبع ولتاژ و ترمینال خروجی می‌باشد.

فرض می کنیم $v_1 = 1\ \mu V$ ، $v_2 = 0.6\ \mu V$ ، $A = 10^5$ آنگاه

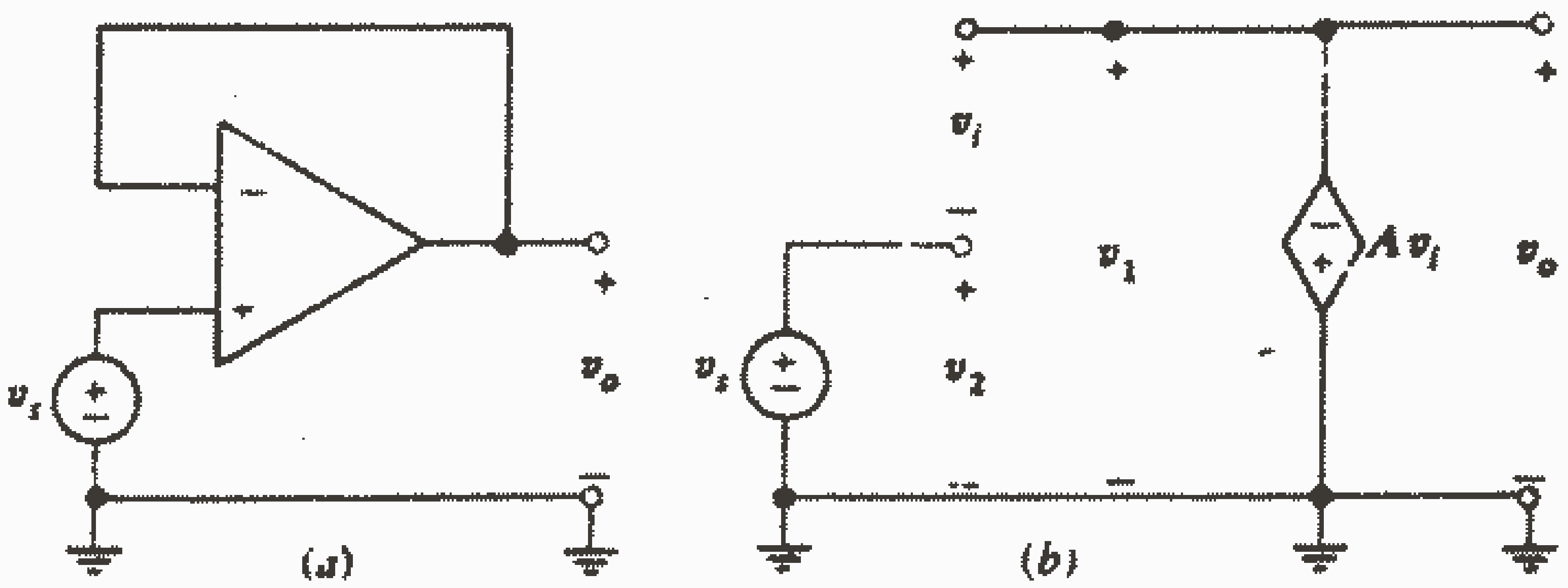
$$v_i = 10^{-6} - 0.6 \times 10^{-6} = 0.4 \times 10^{-6}\ V, \quad و \quad v_o = -10^5 \times 0.4 \times 10^{-6} = -0.4\ V.$$

به پلاریتهٔ منبع وابسته توجه داشته باشید. حال اگر ورودی غیرمعکوس‌کننده را به زمین وصل کنیم،آنگاه $v_2 = 0$ ، $v_i = 10^{-6}\ V$ و $v_o = -10^5 \times 10^{-6} = -0.1\ V$ و اگر ورودی معکوس‌کننده را زمین کنیم آنگاه:

$$v_1 = 0 \quad و \quad v_i = -0.6 \times 10^{-6}\ V ,\quad v_o = -10^5(-0.6 \times 10^{-6}) = 0.06\ V$$

تقویت‌کننده عملیاتی به ندرت به صورت لخت و عریان ارائه شده در مثال بالا به کار برده می‌شود. معمولاً چند عنصر مداری به صورت موازی یا سری با ورودی یا خروجی و یا بین خروجی و ورودی وصل می‌شوند. ما بسیاری از این مدارهای عملی را در مطالعه‌مان دربارهٔ تحلیل مدار در فصلهای آتی به عنوان مثال به کار خواهیم برد.

اولین مثال ولتاژ فالوور می‌باشد که در شکل ۲۶a - ۲ نشان داده شده است. در اینجا یک سیگنال ورودی v_s بین ورودی غیرمعکوس‌کننده و زمین وصل شده است به طوریکه $v_2 = v_s$. یک اتصال کوتاه مستقیماً از خروجی به وردی معکوس‌کننده وصل شده است و $v_1 = v_o$.



شکل ۲۶ - ۲: (a) یک op - amp که به صورت یک ولتاژ فالوور بسته شده است.
(b) مدار معادل به صورت یک مدار تک حلقه‌ای با یک مدار باز و جریان حلقه‌ای صفر در نظر گرفته شده است.

شکل ۲٦a - ۲ یک مدار معادل را نشان می‌دهد اما به نظر می‌رسد که مدار تک حلقه‌ای باشد ولواینکه یک مدار باز بین دو ترمینال ورودی موجود می‌باشد. در واقع جریان حلقه باید صفر باشد و بنابراین هیچ جریانی در هیچ کجای مدار وجود ندارد.

از بحث فوق چنین بر می‌آید که قانون جریان کیرشوف اطلاعات بیشتری نمی‌تواند به ما بدهد و قانون اهم هم بدون وجود مقاومت بلااستفاده می‌ماند و ما فقط می‌توانیم به قانون ولتاژ کیرشوف، برای اطلاعات بیشتر درباره رابطهٔ بین ولتاژ خروجی V_o و ولتاژ ورودی V_s، امیدوار باشیم.

در حلقه داریم:

$$-\nu_s - \nu_i - A\nu_i = 0 \ , \ \nu_o = -A\nu_i \text{ و یا } \nu_i = -\nu_o/A$$

بنابراین:

$$-\nu_s + \nu_o/\ A\ (1+A) = \cdot \rightarrow \nu_o = A/\ \ 1+A\ \nu_s \qquad (۱۵)$$

اگر $A = ۱۰^۵$ آنگاه $\nu_o = ۰,۹۹۹\ ۹۹۰\ \nu_s$ و در نتیجه برای تمام اهداف عملی داریم $\nu_o = \nu_s$ و ولتاژ خروجی، ولتاژ ورودی را «پیروی» می‌کند. مزیت چنین تقویت‌کننده‌ای با بهرهٔ واحد این است که ورودی جریان ناچیز و قدرت ناچیزی از منبع می‌کشد در حالیکه خروجی می‌تواند جریانهای قابل توجهی (۱۰ تا ۲۰ mA) قدرت (۱۰۰ تا ۵۰۰ mw) را به بار خروجی تحویل دهد. بنابراین، بار تأثیر کمی بر روی منبع دارد و به همین علت ولتاژ فالوور را تقویت‌کنندهٔ بافر نیز می‌نامند.

چند مقدار عددی ویژه برای ولتاژها می‌تواند مفید باشد. اگر $\nu_s = ۱V$ آنگاه $\nu_o = ۰,۹۹۹۹۹۰\ V$ وقتیکه $A = ۱۰^۵$ و ولتاژ ورودی $\nu_i = -۹,۹۹۹۹\ \mu V$. اندازهٔ ولتاژ ورودی خیلی کوچک است و ما اغلب تحلیل تقریبی op - amp را با فرض اینکه جریان و ولتاژ ورودی $\nu_i = 0$ هر دو صفر می‌باشند انجام می‌دهیم. اگر ما اینکار را برای ولتاژ فالوور انجام دهیم بلافاصله نتیجه می‌گیریم که $\nu_o = \nu_s$.

این نتیجه را با سختی بیشتری با قرار دادن $A \rightarrow \infty$ در معادله (۱۵) می‌توان به دست آورد.

تمرین

۱۲ - ۲ - یک ولتاژ فالوور با استفاده از یک op - amp که در آن $A = ۱۲۰۰۰$ ساخته شده است. اگر $\nu_s = ۱mV$ پیدا کنید: (a) $\nu_۱$، (b) $\nu_۲$، (c) ν_i، (d) ν_o

جواب: ۰,۹۹۹۹۱۷ mV ،۱mV ،۰۸۳۳μV٪- ، ۰,۹۹۹۹۱۷ mA

مسائل

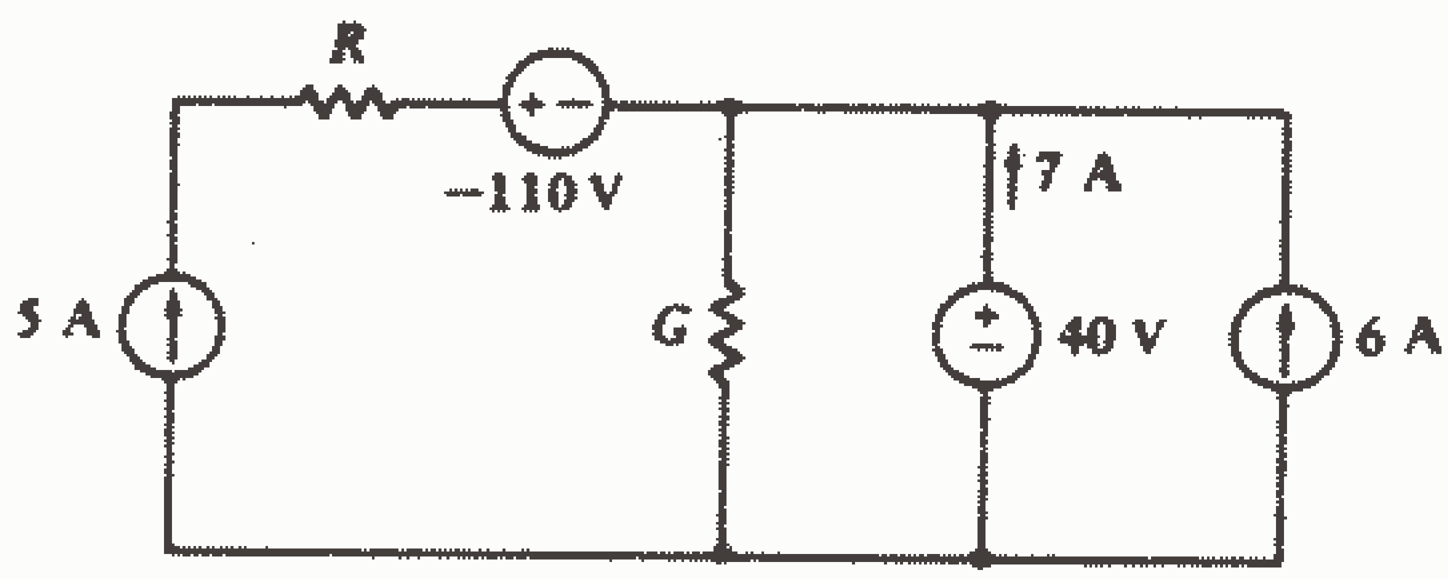
۱ - مقدار مقاومتی را در حالات زیر پیدا کنید: (a) اگر جریان ثابت C/s ۵ انرژی ۱۰Kj را در مدت ٤ دقیقه به این عنصر تحویل دهد. (b) قدرت Kw ۱ را وقتیکه به یک باتری ۱۲ ولتی وصل می‌شود، تلف کند: (c) چه قدرت متوسطی را منبع $v_s = ۸۰ \cos ۵۰۰\pi t$ V به یک مقاومت ۵Ω در فاصلهٔ $o \le t \le ۱۲$ ms تحویل می‌دهد؟

۲ - جریان i (t) در شکل ۱ - ۲ در فاصلهٔ ۰<t<۱S برابر ٤A و در فاصلهٔ ۱<t<۲S برابر ٤A- می‌باشد و این حالت پریودیک را ادامه می‌دهد. P(t), V(t), i(t) را در فاصلهٔ ۰<t<٤S رسم کنید.

۳ - مقاومت dc یک هادی به طول l و سطح مقطع یکنواخت A عبارت است از:

$R = \rho\, l/A = l/\delta A$ که در آن ρ و مقاومت مخصوص الکتریکی و δ (سیگما) هدایت مخصوص الکتریکی می‌باشد. اگر $\delta = ۵{,}۸ \times ۱۰^{۷}$ ℧/m برای مس باشد: (a) چه طولی از یک سیم مسی (بر حسب فوت) ۱۸# (به قطر ۱,۰۲٤ mm) دارای مقاومت۱Ω می‌باشد؟(b) اگر یک برد مداری دارای نوار مسی به ضخامت in ۰,۰۰۱۳ و عرض in ۲% بتواند جریان ۳A را به طور ایمن در دمای 60°c حمل کند، چه قدرتی را این جریان به یک هادی به طول in ٦ تحویل می‌دهد؟

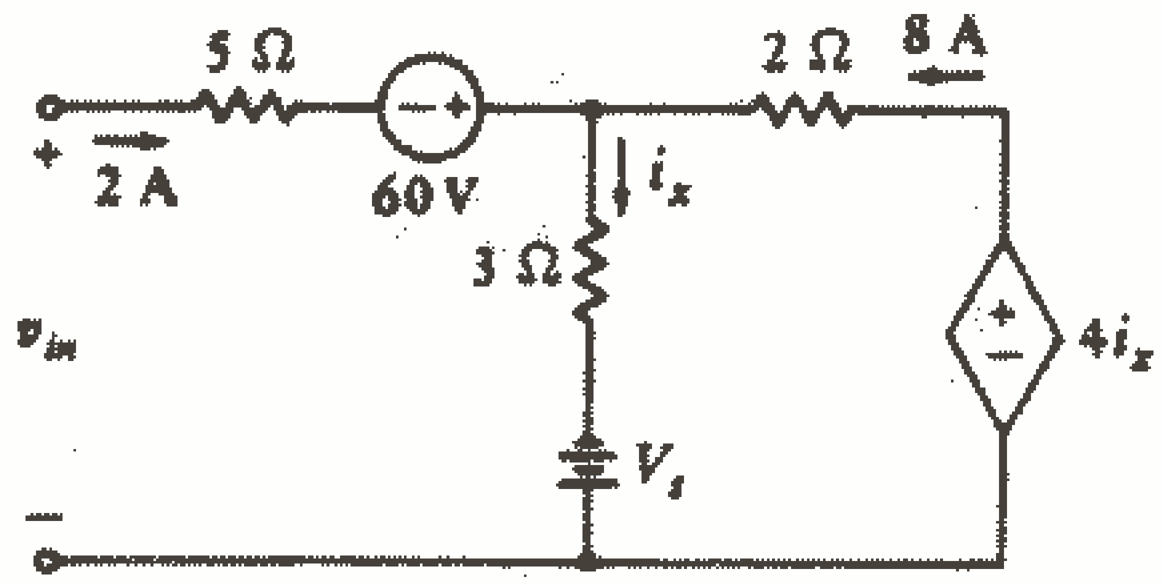
٤ - در مدار شکل ۲۷ - ۲ ، G ، R را اگر منبع ۵A قدرت W ۱۲۵ را تحویل دهد پیدا کنید.



شکل ۲۷ ـ ۲: به مسئله ٤ مراجعه کنید.

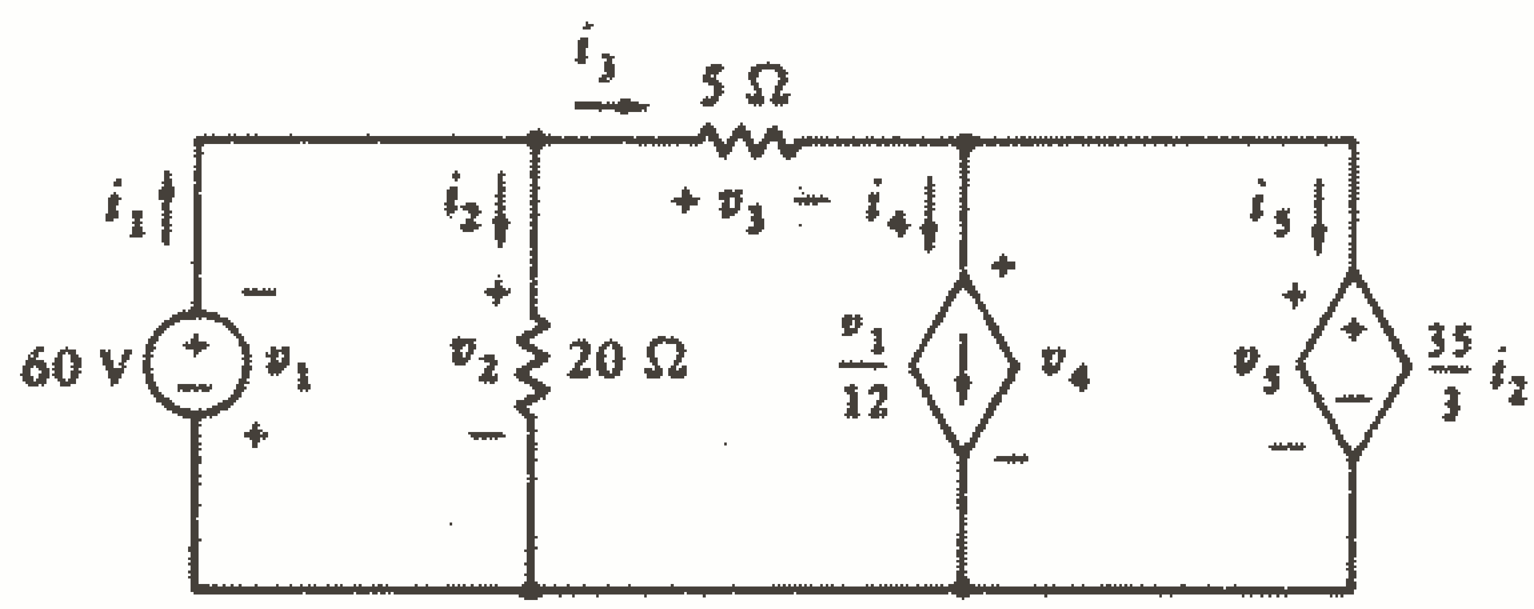
۵ - قانون اهم و قوانین کیرشوف را در مدار شکل ۲۸ - ۲ اعمال کنید و مقادیر زیر را پیدا کنید:

(a) v_{in} (b) قدرت تحویل داده شده به وسیله منبع وابسته. (c) v_s .



شکل ۲۸ ـ ۲: به مسئله ۵ مراجعه کنید.

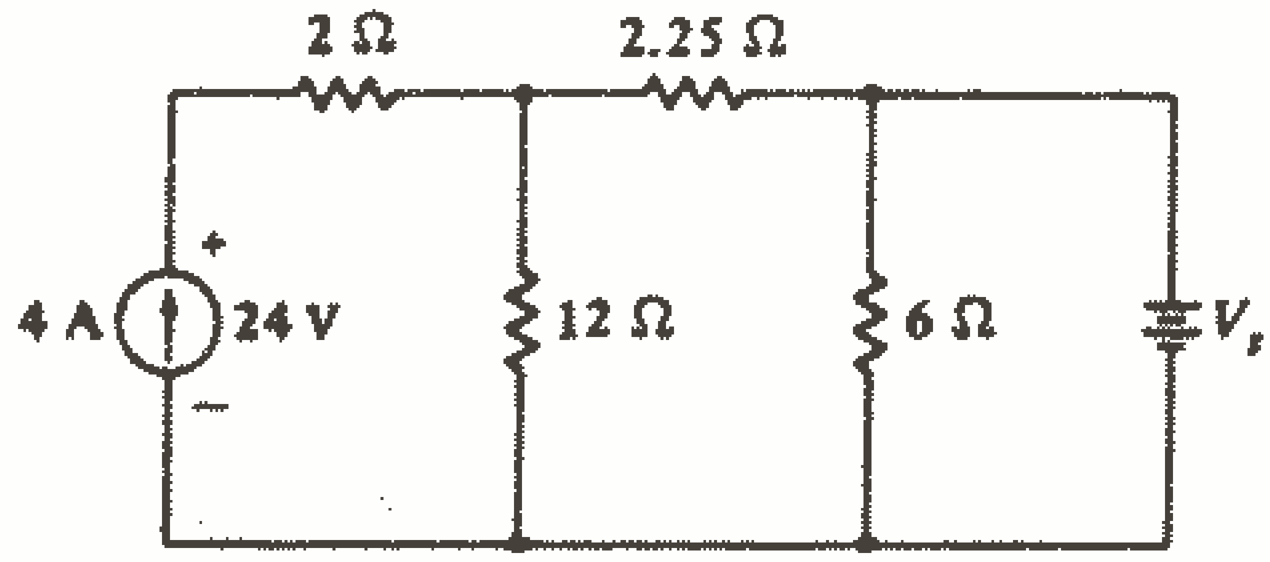
۶ - (a) قانون اهم و قوانین کیرشوف را به طور قدم به قدم به مدار شکل ۲۹ - ۲ اعمال کنید و همه ولتاژها و جریانها را پیدا کنید. (b) قدرت جذب شده به وسیله هر عنصر را محاسبه کنید و نشان دهید که مجموع قدرتها صفر است.



شکل ۲۹ ـ ۲: به مسئله ۶ مراجعه کنید.

۷ - در مدار شکل ۳۰ - ۲، قدرت جذب شده به وسیله عناصر زیر را پیدا کنید:

(a) منبع ٤A (b) مقاومت ۲Ω (c) مقاومت ۱۲Ω (d) مقاومت ٦Ω (c) منبع ولتاژ v_s.

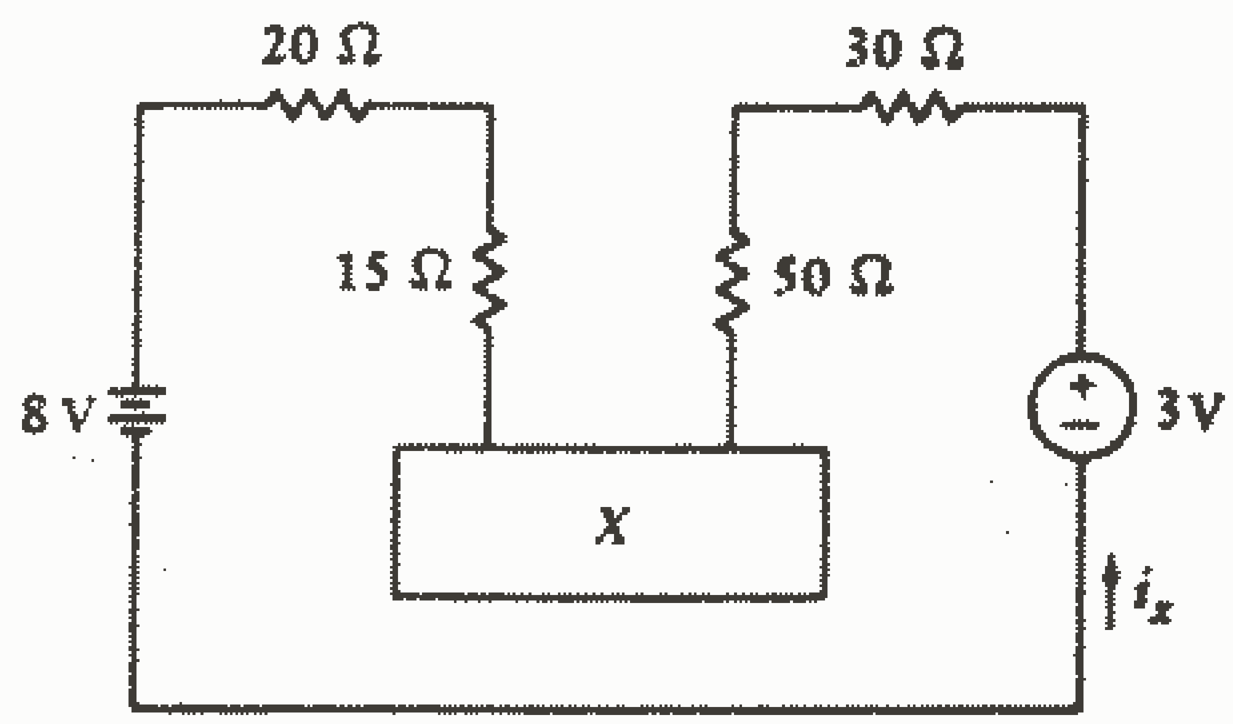


شکل ۳۰ ـ ۳: به مسئله ۷ مراجعه کنید.

۸ ـ مداری شامل شش عنصر و چهار گره می‌باشد که گره‌ها به شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ می‌باشند. هر عنصر مداری بین یک زوج گره متفاوتی بسته شده است. جریان از گره ۱ به ۲ عبارت است از $i_{12} = 15A$ و $i_{34} = -8A$. مقادیر i_{23}، i_{13} و i_{41} را اگر i_{24} مقادیر زیر را داشته باشد به دست آورید:

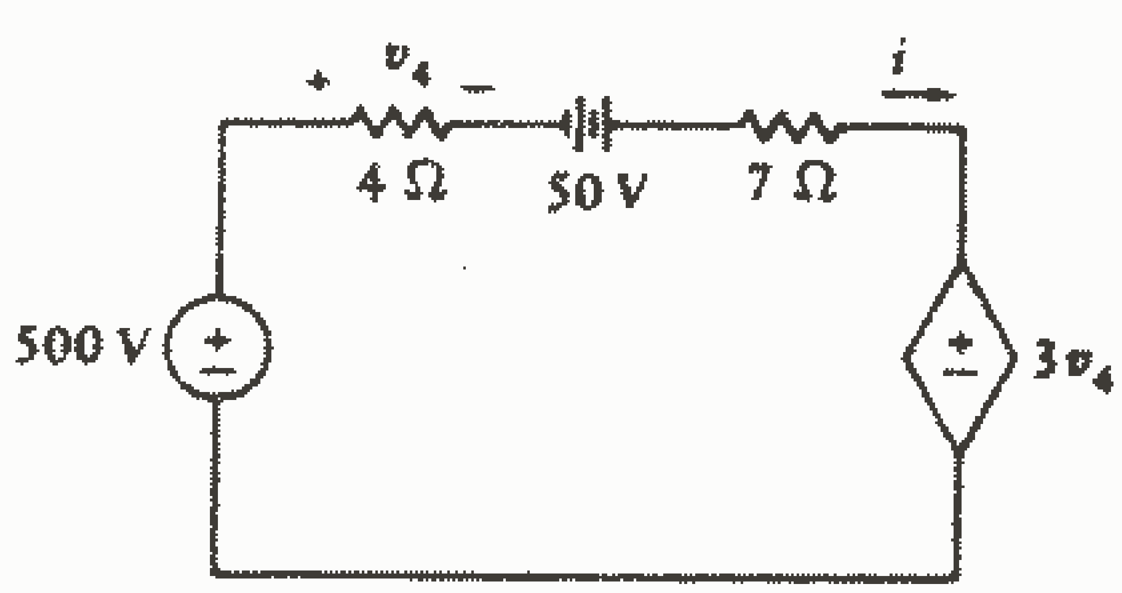
0 (a) 18A (b) -18A (c)

۹ - قدرت جذب شده به وسیله عنصر X را در شکل ۳۱ - ۲ پیدا کنید. اگر X : (a) مقاومت $70\ \Omega$ باشد. (b) منبع ولتاژ مستقل ۲۷ با علامت + در چپ باشد. (c) منبع ولتاژ وابسته با علامت + در سمت چپ و با مقدار $19\ i_x$ باشد. (d) منبع جریان مستقل 52mA با فلش به سمت راست باشد.



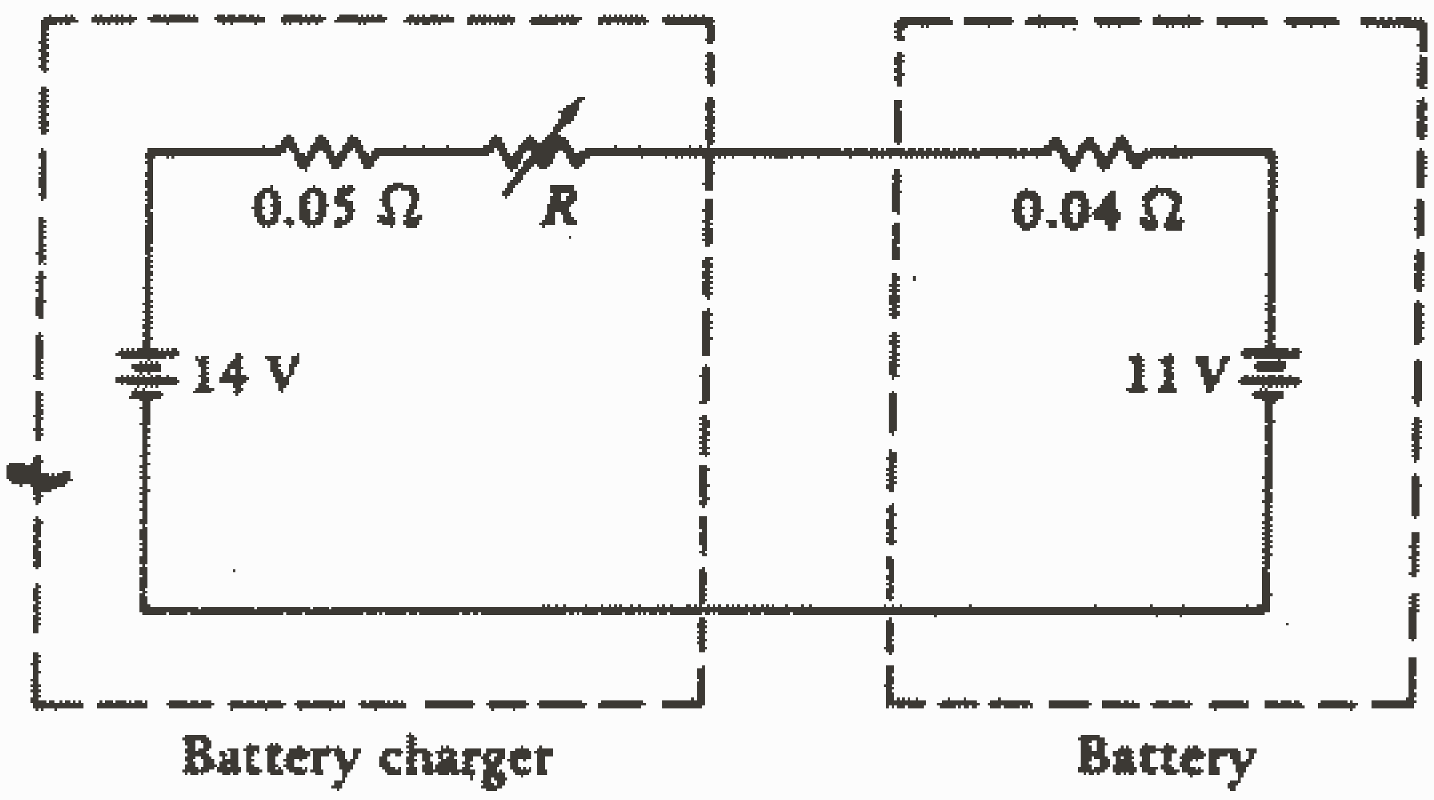
شکل ۳۱ ـ ۲: به مسئله ۹ مراجعه شود.

۱۰ - (a) i را در شکل ۳۲ - ۲ پیدا کنید. (b) حال فرض کنید که v_4 در دو سر مقاومت 4Ω و منبع 50V با علامت + در سمت چپ باشد و دوباره i را پیدا کنید.



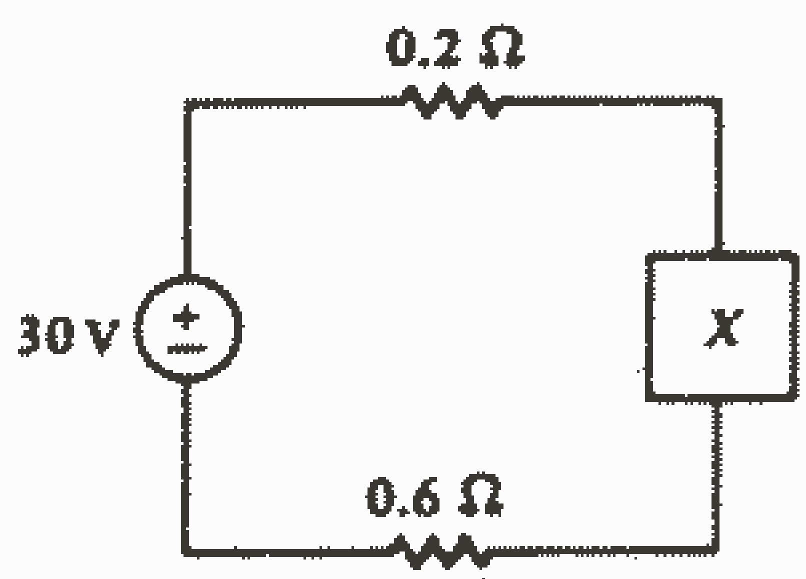
شکل ۳۲ ـ ۲: به مسئله ۱۰ مراجعه کنید.

۱۱ - برای شارژ باتری مدل شده در شکل ۳۳ - ۲: (a) R را طوری پیدا کنید که یک جریان شارژکننده 2,5 A جاری شود. (b) R را طوری پیدا کنید که قدرت 25 W به منبع ولتاژ ایده‌آل 11 V تحویل داده شود. (c) R را طوری پیدا کنید که قدرت 25 W به ترکیب %4Ω و 11 V تحویل داده شود.



شکل ۳۳ - ۲: به مسئله ۱۱ مراجعه کنید.

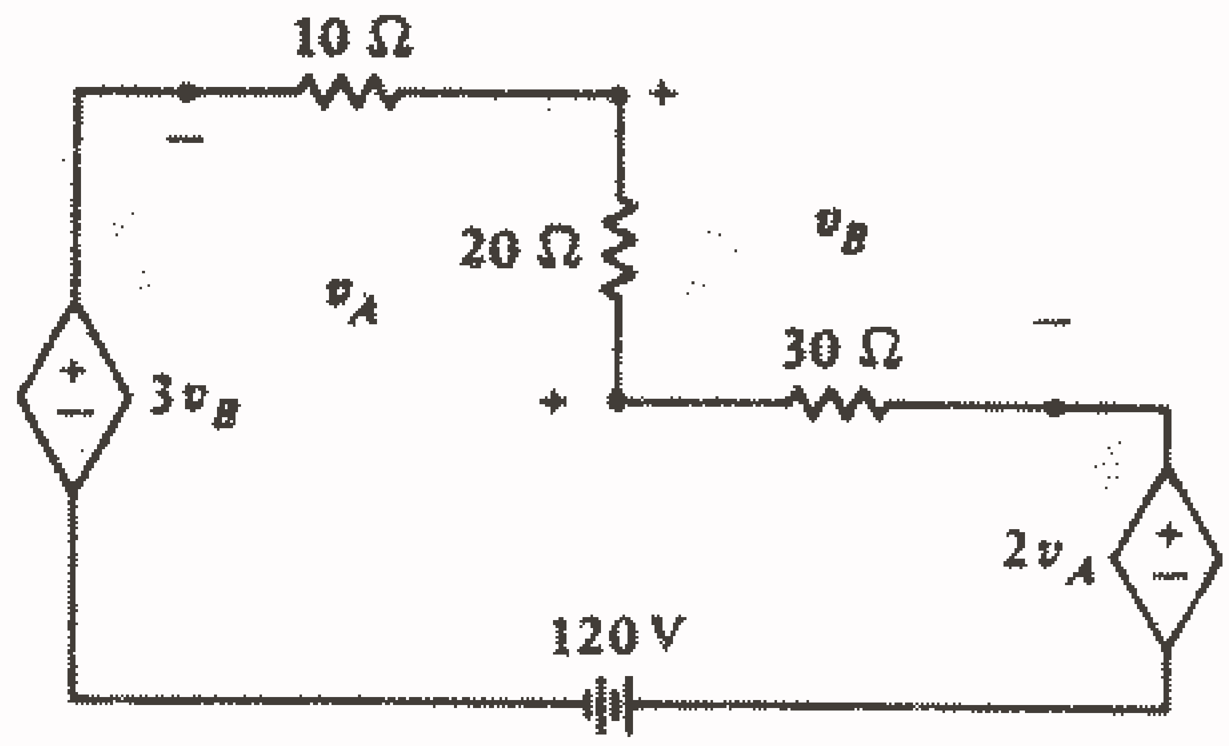
۱۲ - در مدار شکل ۳٤ - ۲، X یک عنصر مداری ساده است. فرض کنید که X قدرت ۱۰۰W را جذب می‌کند: (a) اگر X مقاومت بزرگتر از ۵Ω باشد، R را پیدا کنید. (b) اگر X یک منبع ولتاژ مستقل با علامت مثبت در بالا باشد، v_s را پیدا کنید (v_s < ۵ V)



شکل ۳٤ - ۲: به مسئله ۱۲ و ۱۳ مراجعه کنید.

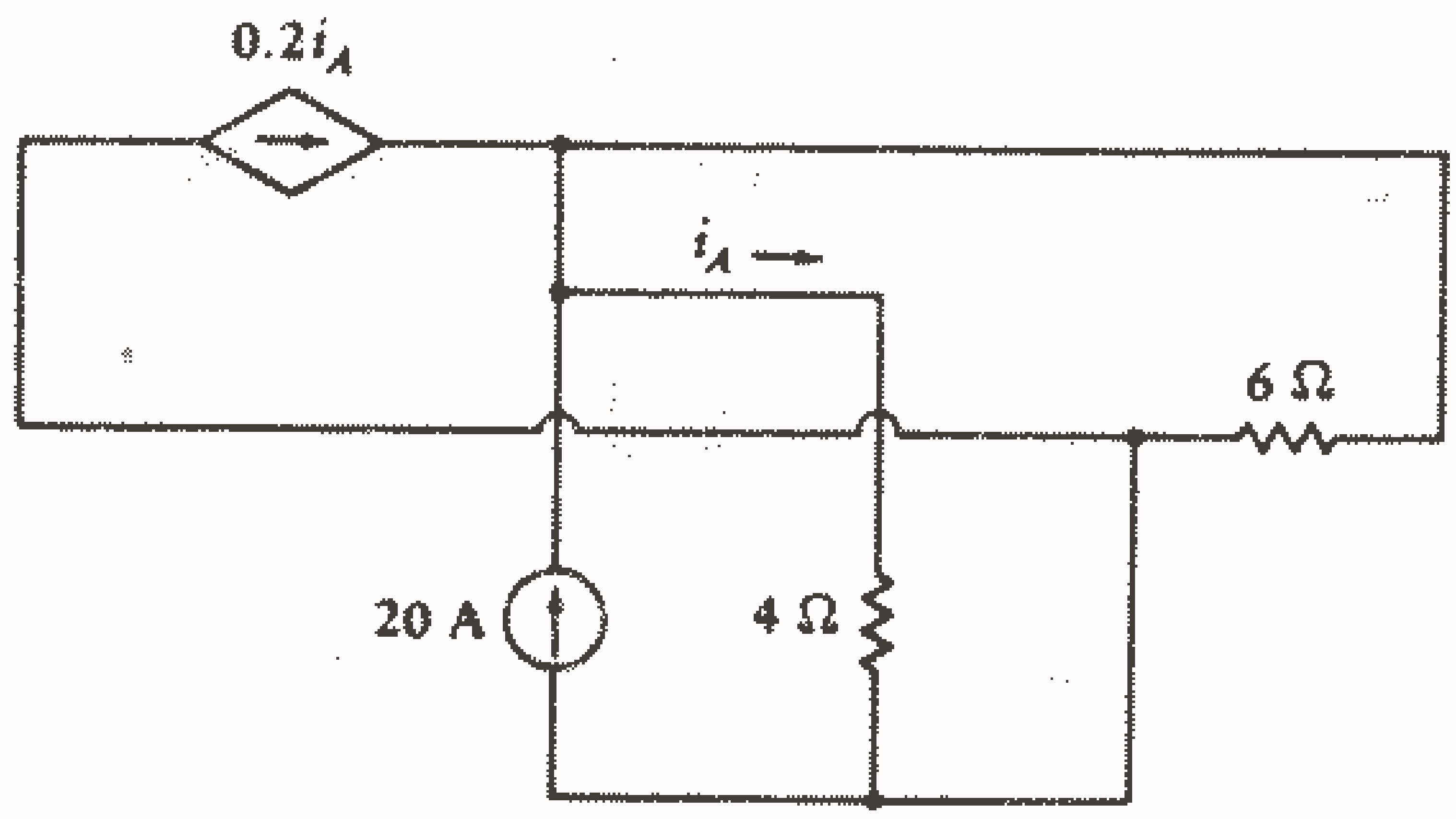
۱۳ - فرض کنید که ولتاژ دو سر مقاومت ۰٫۲Ω در شکل ۳٤ - ۲ برابر ٤V با علامت + در سمت چپ باشد و X یک عنصر مداری مجهول باشد. (a) قدرت جذب شده به وسیله هر عنصر را در مدار پیدا کنید. (b) اگر X یک مقاومت باشد مقدار آن را (که ممکن است منفی باشد) پیدا کنید، اگر X منبع ولتاژ مستقل باشد v_s و پلاریتهٔ آن را پیدا کنید و اگر X یک منبع جریان مستقل باشد i_s و جهت آن را پیدا کنید. (c) قسمتهای a ، b را اگر علامت + منبع ٤V در سمت راست باشد تکرار کنید.

۱٤ - قدرت جذب شده به وسیله هر یک از شش عنصر مدار شکل ۳۵ - ۲ را پیدا کنید.



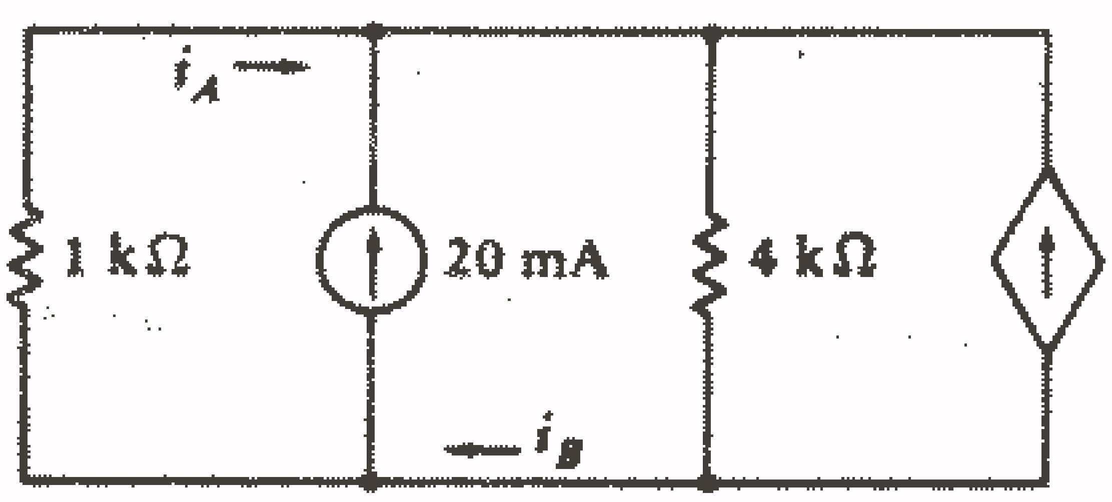
شکل ۳۵ ـ ۲: به مسئله ۱۴ مراجعه کنید.

۱۵ ـ قدرت جذب شده به وسیله هر عنصر مدار شکل ۳۶ ـ ۲ را پیدا کنید.



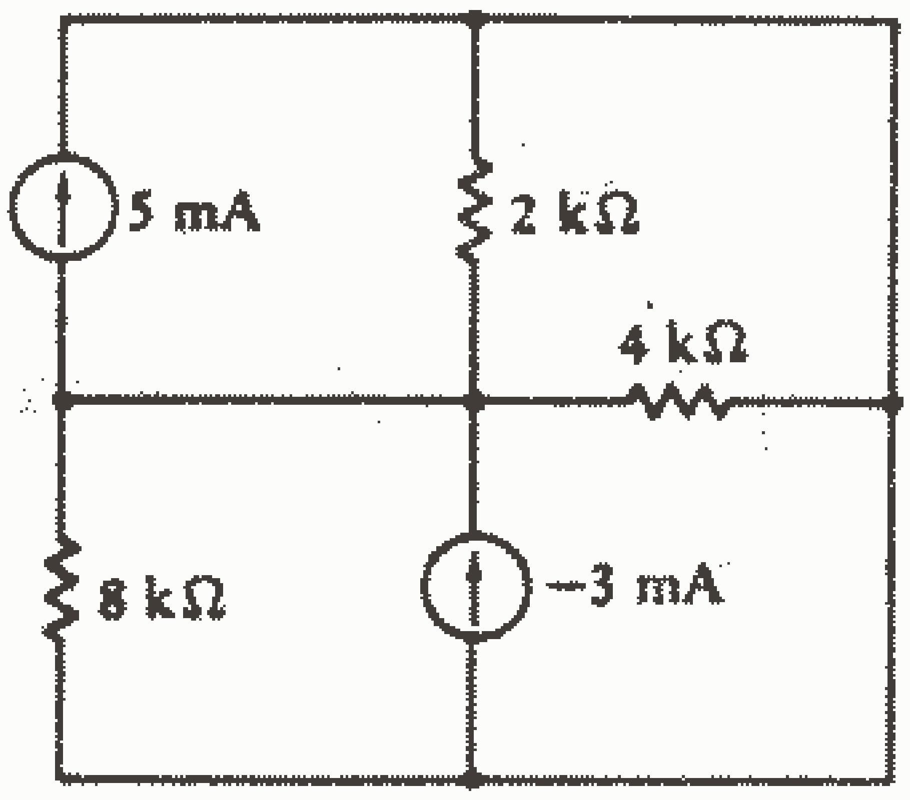
شکل ۳۶ ـ ۲: به مسئله ۱۵ مراجعه کنید.

۱۶ - در شکل ۳۷ - ۲ قدرت داده شده به وسیله هر منبع را پیدا کنید، اگر منبع وابسته: (a): $3i_A$ باشد. (b) $3i_B$ باشد.



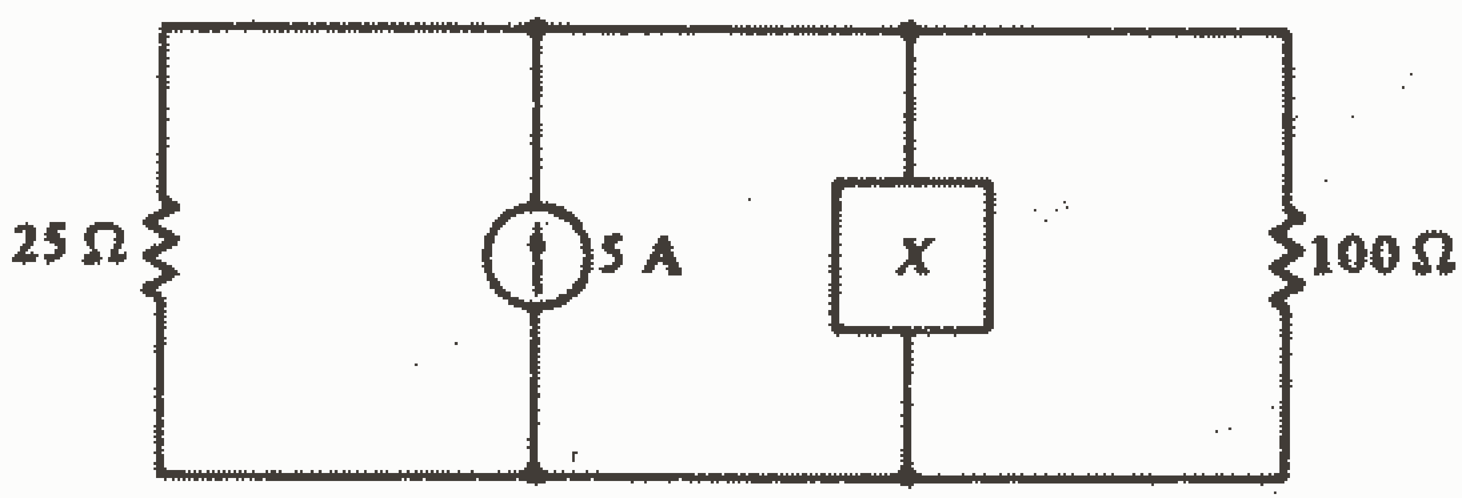
شکل ۳۷ ـ ۲: به مسئله ۱۶ مراجعه کنید.

۱۷ - قدرت جذب شده به وسیله هر عنصر مداری را در مدار شکل ۳۸ - ۲ پیدا کنید.



شکل ۳۸ ـ ۲: به مسئله ۱۷ مراجعه کنید.

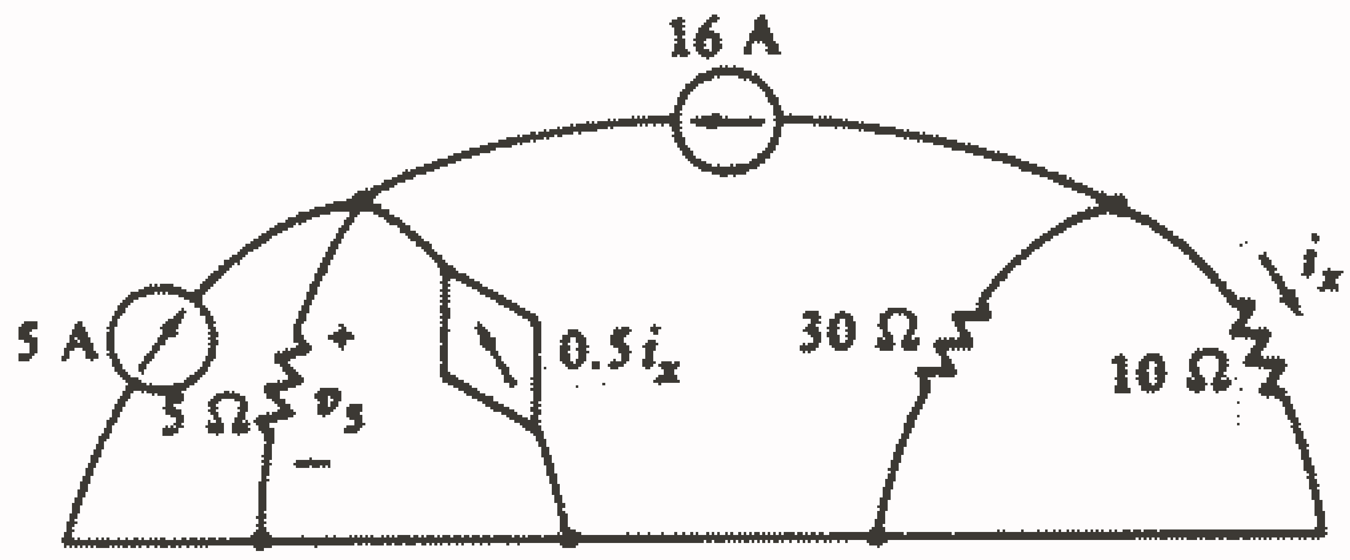
۱۸ ـ در مدار شکل ۳۹ ـ ۲، X یک عنصر مداری ساده است. فرض کنید که X قدرت ۱۰۰W را جذب میکند: (a) اگر X یک مقاومت بزرگتر از ۵۰Ω باشد، R را پیدا کنید. (b) اگر X یک منبع جریان مستقل باشد، i_s را که جهت فلش آن رو به پایین است پیدا کنید (i_s > ۲A).



شکل ۳۹ ـ ۲: به مسئله ۱۸ و ۱۹ مراجعه کنید.

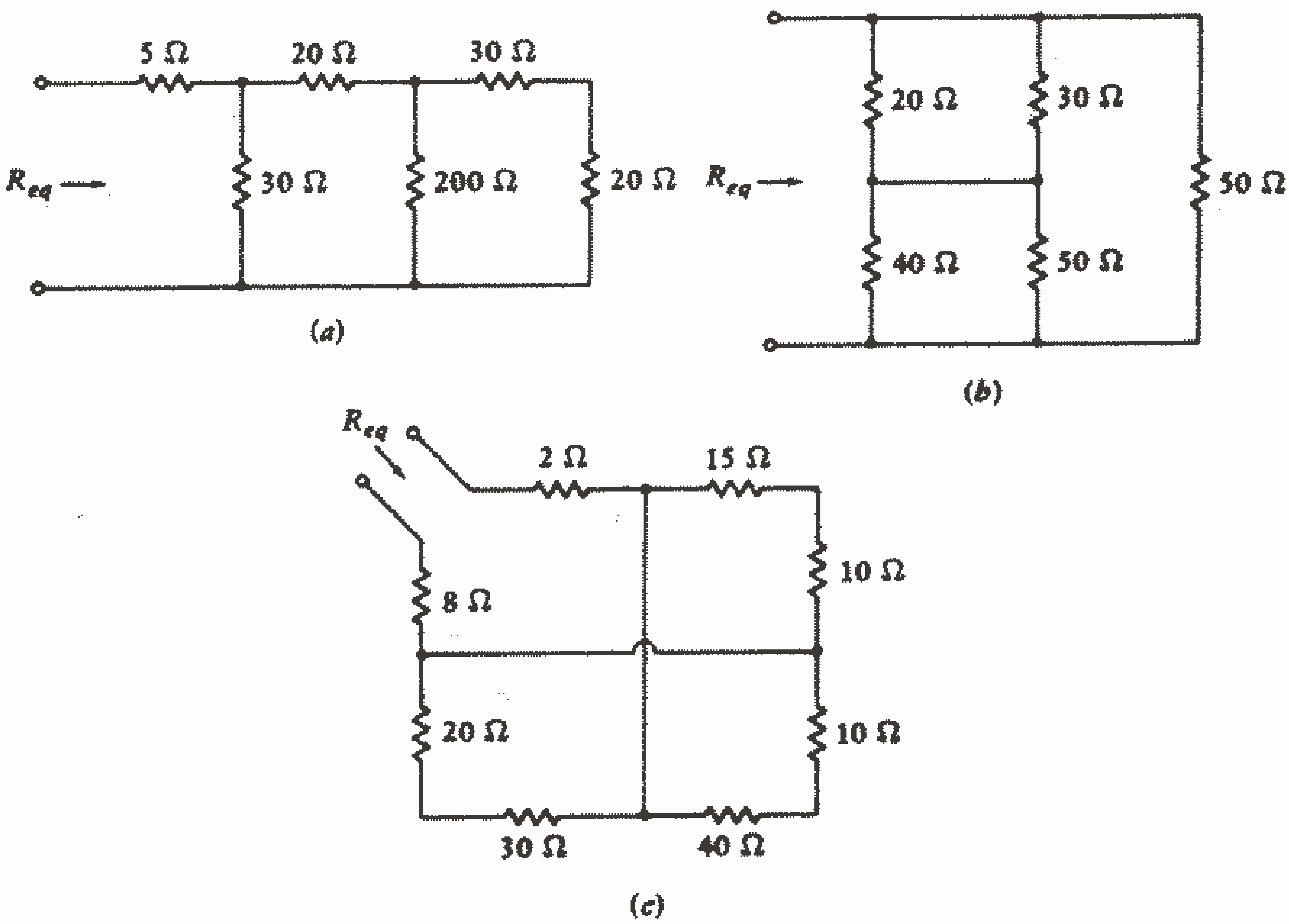
۱۹ ـ فرض کنید که جریان رو به پایین در مقاومت ۱۰۰Ω در شکل ۳۹ ـ ۲ برابر ۱٫۲A باشد و X یک عنصر مداری مجهول باشد. (a) قدرت جذب شده هر عنصر را در مدار پیدا کنید. (b) اگر X یک مقاومت باشد مقدار آنرا (که ممکن است منفی باشد) پیدا کنید، اگر X یک منبع جریان مستقل باشد، i_s و جهت آنرا پیدا کنید و اگر X یک منبع ولتاژ مستقل باشد v_s و پلاریتهٔ آنرا مشخص کنید. (c) اگر جریان ۱٫۲A رو به بالا باشد قسمت‌های a و b را تکرار کنید.

۲۰ ـ (a) تکنیکهای تحلیل مدار یک جفت گرهی را به گره بالایی سمت راست در شکل ۴۰ ـ ۲ به کار برید و i_x را پیدا کنید. (b) حال با گره بالایی سمت چپ کار کنید و v_s را پیدا کنید. (c) منبع ۱۶A چه قدرتی را تولید می کند؟



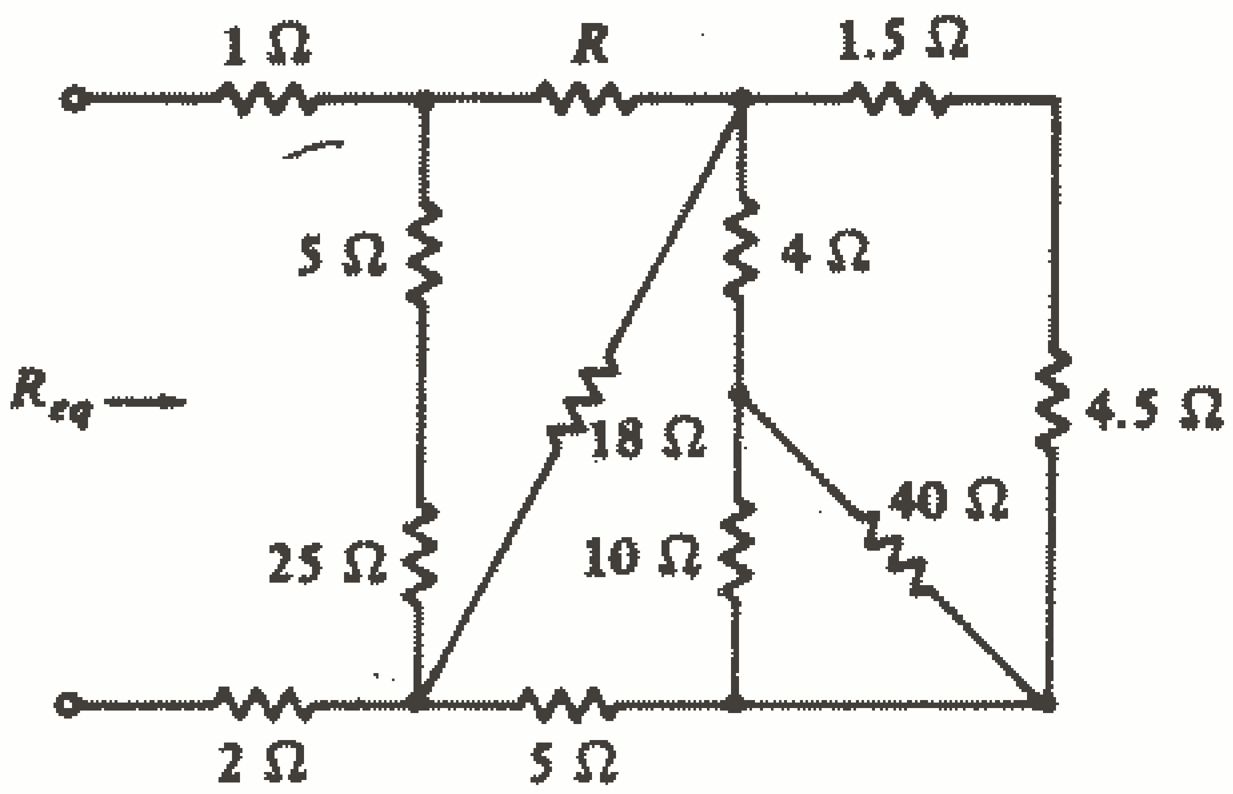
شکل ۴۰ ـ ۲: به مسئله ۲۰ مراجعه کنید.

۲۱ - R_{eq} را برای هر یک از سه شبکهٔ مقاومتی شکل ۴۱ ـ ۲ پیدا کنید.



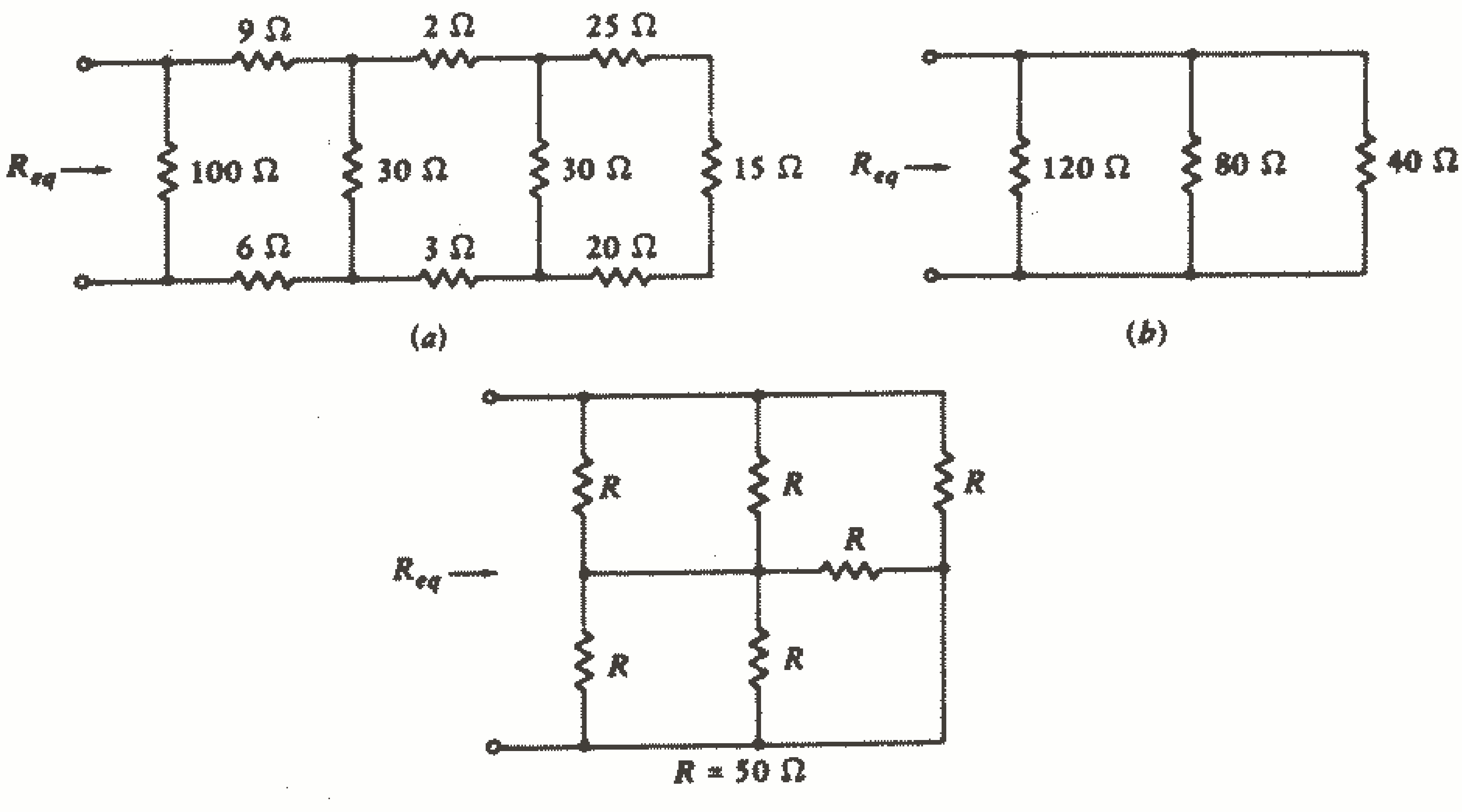
شکل ۴۱ ـ ۲: به مسئله ۲۱ مراجعه کنید.

۲۲ ـ برای شبکهٔ ۴۲ ـ ۲: (a) اگر $R = ۱۴\Omega$ باشد آنگاه R_{eq} را پیدا کنید. (b) اگر $R_{eq} = ۱۴\Omega$ آنگاه R را پیدا کنید.



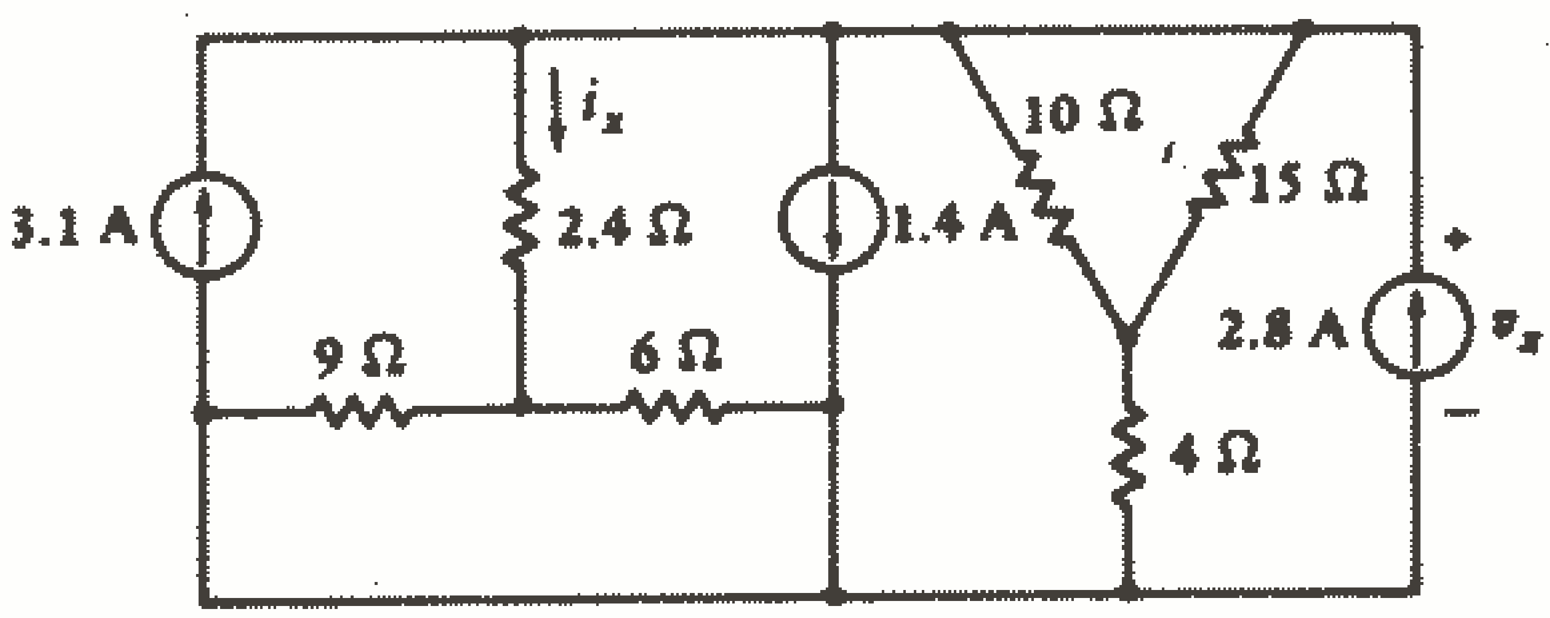
شکل ۴۲ ـ ۲: به مسئله ۲۲ مراجعه کنید.

۲۳ ـ R_{eq} را برای هر یک از شبکه‌های شکل ۴۳ ـ ۲ پیدا کنید.



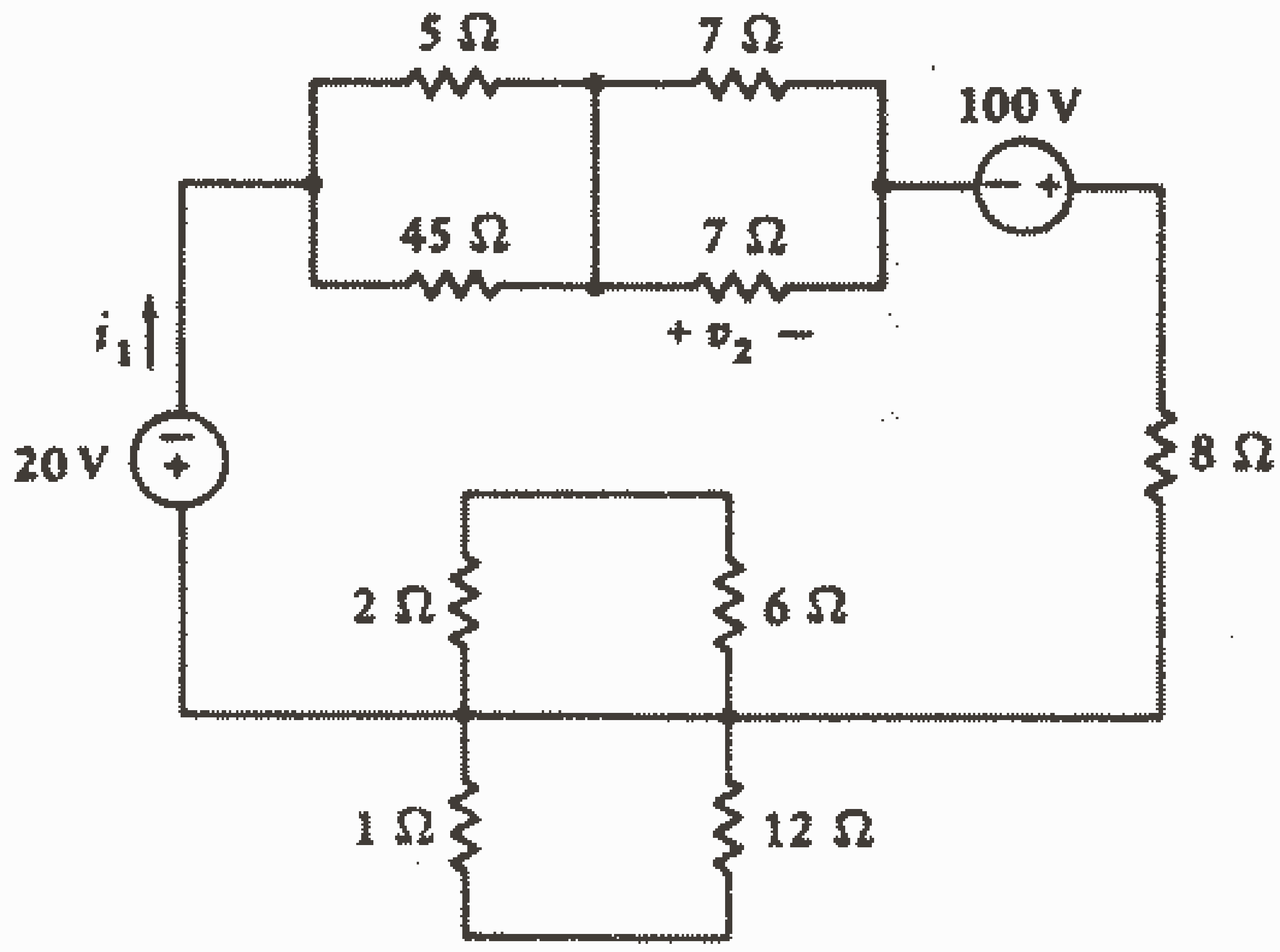
شکل ۴۳ ـ ۲: به مسئله ۲۳ مراجعه کنید.

۲۴ ـ با ترکیب مقاومتها و منابع در مدار شکل ۴۴ ـ ۲ مقادیر v_x ، i_x را پیدا کنید.



شکل ۴۴ ـ ۲: به مسئله ۲۴ مراجعه کنید.

۲۵ - با استفاده از ترکیب مقاومتها و منابع، مدار شکل ۴۵ ـ ۲ را ساده کنید و سپس v_2 و i_1 را پیدا کنید.

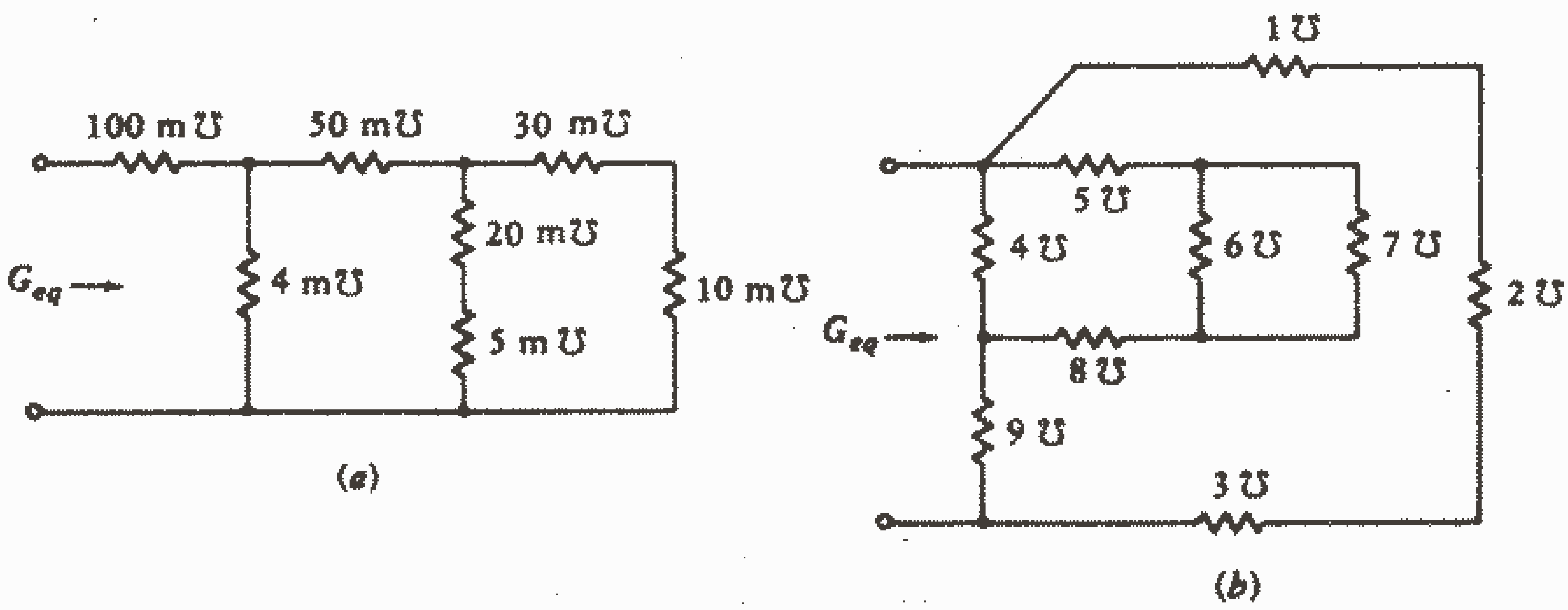


شکل ۴۵ ـ ۲: به مسئله ۲۵ مراجعه کنید.

۲۶ ـ ۱۰ مقاومت ۲۰Ω داده شده است. (a) کمترین مقاومت معادل (غیرصفر) که از مونتاژ آنها می‌توان به دست آورد چقدر است. (b) بزرگترین مقاومت معادل (محدود) چقدر است؟ آرایش این مقاومتها را برای ایجاد مقاومت معادلهای زیر نشان دهید:

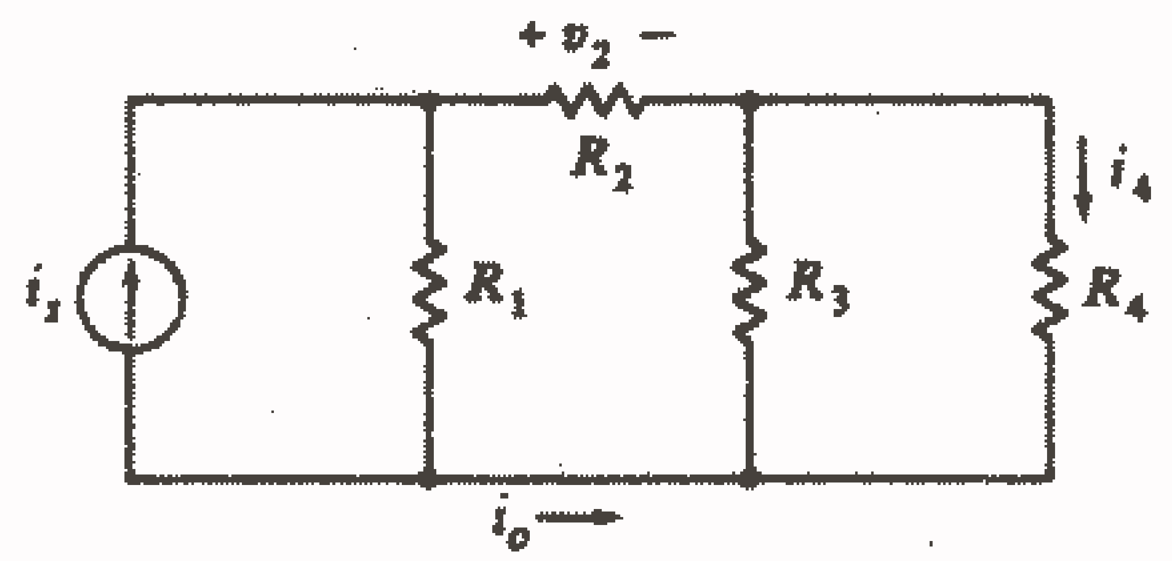
(c) ۲۹Ω (d) ٦Ω

۲۷ ـ هدایت معادل هر یک از شبکه‌های شکل ٤٦ ـ ۲ را پیدا کنید.



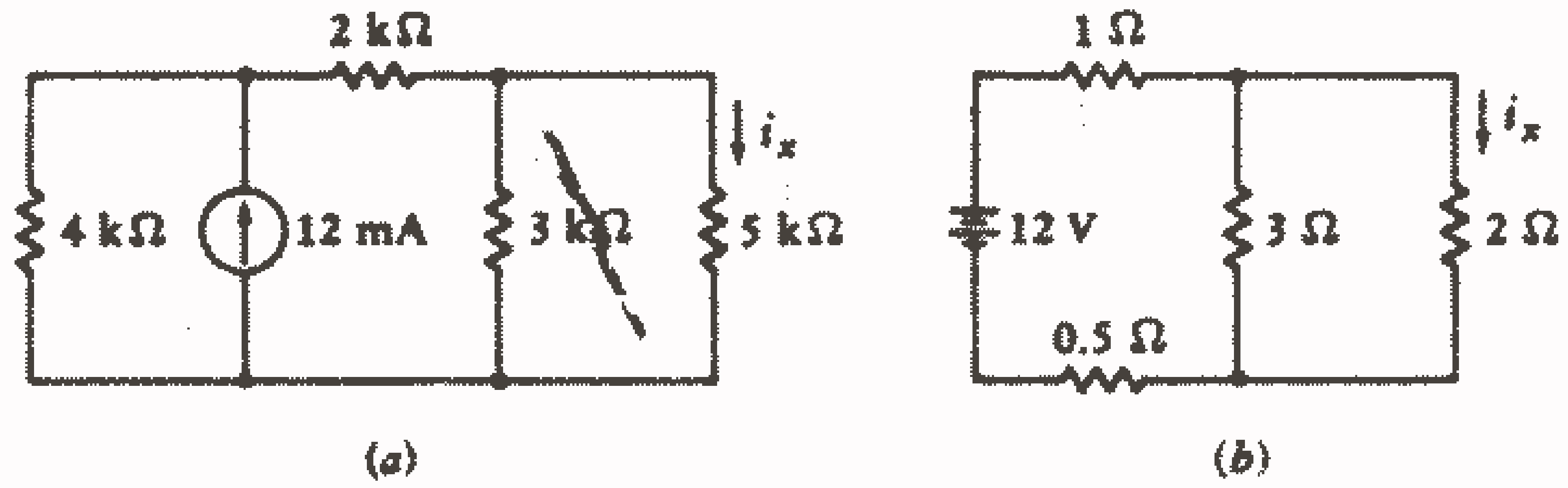
شکل ٤٦ ـ ۲: به مسئله ۲۷ مراجعه کنید.

۲۸ ـ با استفاده از ترکیب مقاومتها و تقسیم جریان و ولتاژ در مدار شکل ۴۷ ـ ۲، رابطه‌ای برای: (a) i_4، (b) v_2، (c) i_o پیدا کنید.



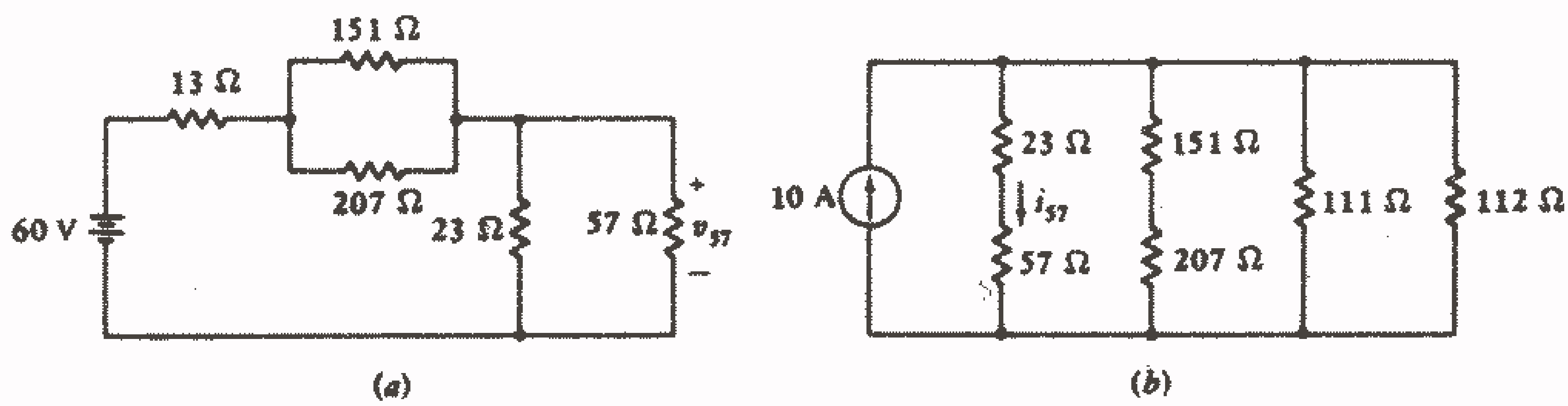
شکل ۴۷ ـ ۲: به مسئله ۲۸ مراجعه کنید.

۲۹ ـ با استفاده از ترکیب مقاومتها و تقسیم ولتاژ و جریان، i_x را در هر یک از مدارهای شکل ۴۸ ـ ۲ پیدا کنید.



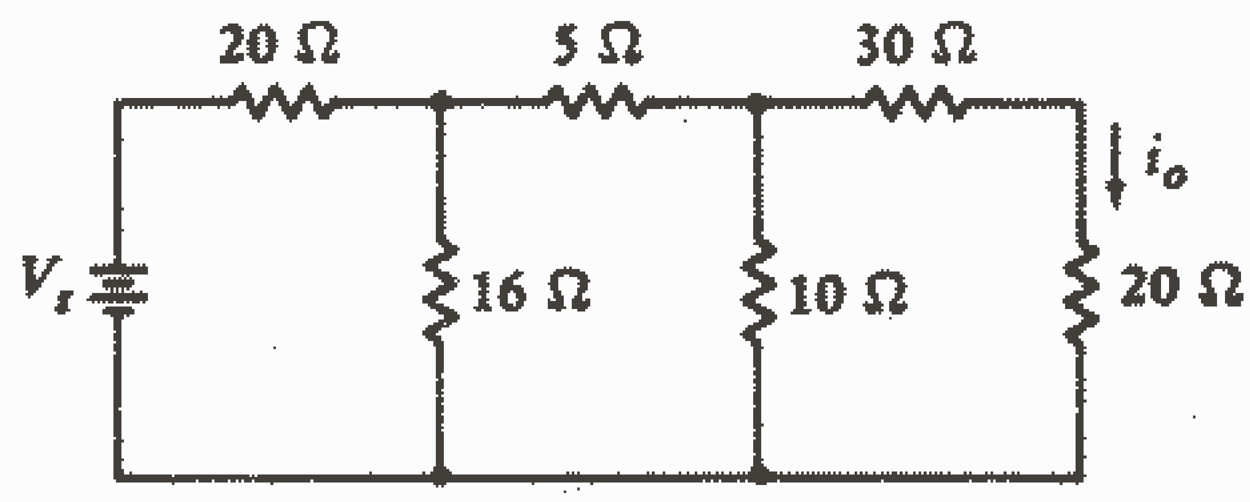
شکل ۴۸ ـ ۲: به مسئله ۲۹ مراجعه کنید.

۳۰ ـ (a) با استفاده از ترکیب مقاومتها و تقسیم ولتاژ، یک رابطهٔ یک سطری بنویسید تا v_{57} در مدار شکل a ۴۹ – ۲ محاسبه شود. (b) با استفاده از ترکیب مقاومتها و تقسیم جریان رابطه‌ای یک سطری بنویسید تا i_{57} در مدار شکل b ۴۹ – ۲ محاسبه شود.



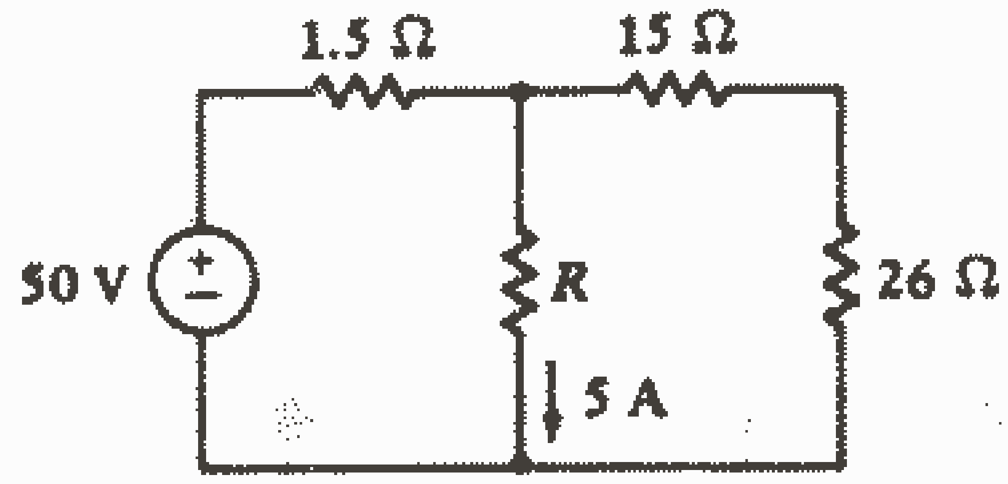
شکل ۴۹ ـ ۲: به مسئله ۳۰ مراجعه کنید.

۳۱ ـ مدار شکل ۵۰ – ۲ شامل یک شبکهٔ نردبانی مقاومتی سه قسمتی است. (a) فرض کنید $i_o = 1$ A و قدم به قدم از سمت راست به طرف منبع عمل کنید و v_s را پیدا کنید. (b) اگر $i_o = 0{,}4$ A مقدار v_s چقدار است؟ (C) اگر $v_s = 100$ V مقدار i_o را پیدا کنید.



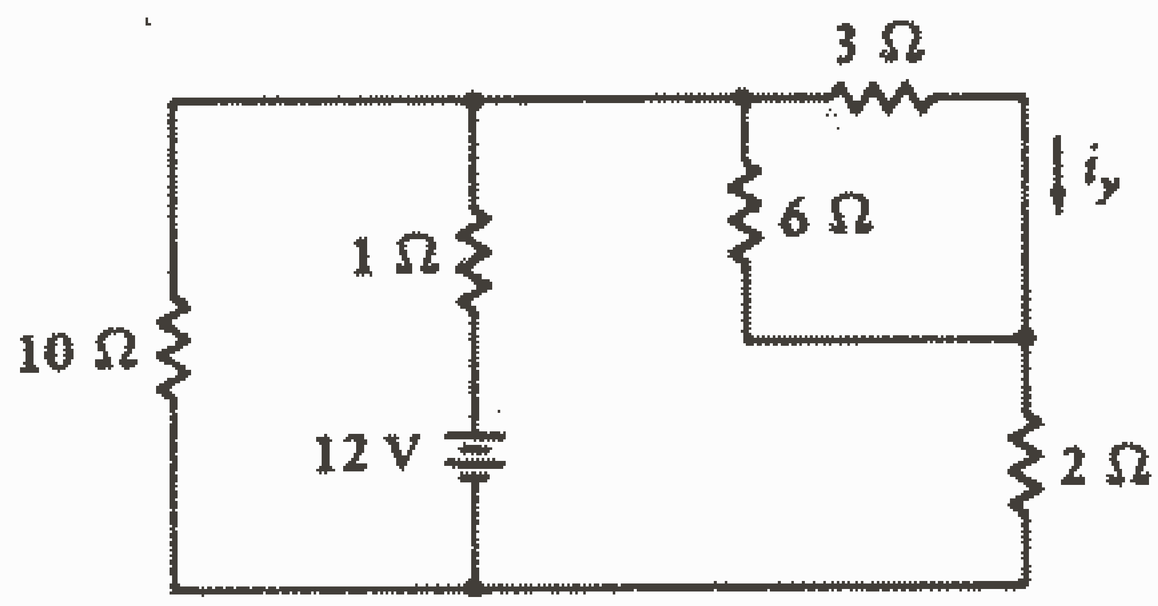
شکل ۵۰ ـ ۲: به مسئله ۳۱ مراجعه کنید.

۳۲ ـ مقدار R را در مدار شکل ۵۱ ـ ۲ پیدا کنید.



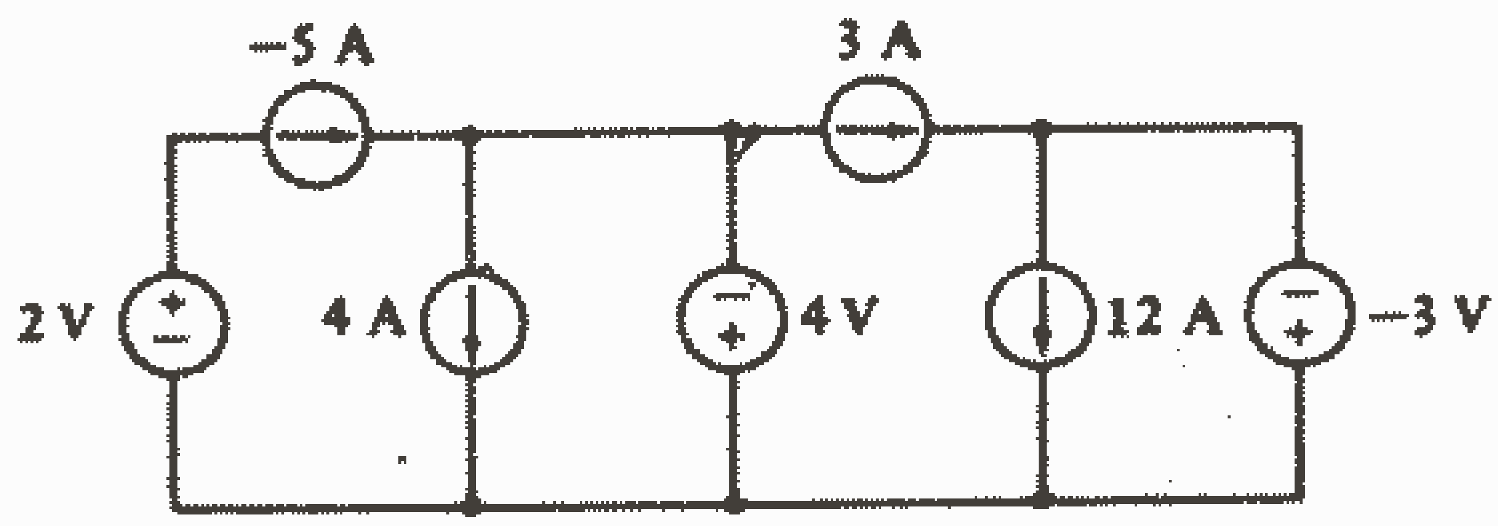
شکل ۵۱ ـ ۲: به مسئله ۳۲ مراجعه کنید.

۳۳ ـ (a) با استفاده از ترکیب مقاومتها، تقسیم ولتاژ و تقسیم جریان، i_y را در مدار شکل ۵۲ ـ ۲ پیدا کنید. (b) مقاومت ۳Ω به چه مقداری باید تغییر کند تا $i_y = ۱$ A شود؟



شکل ۵۲ ـ ۲: به مسئله ۳۳ مراجعه کنید.

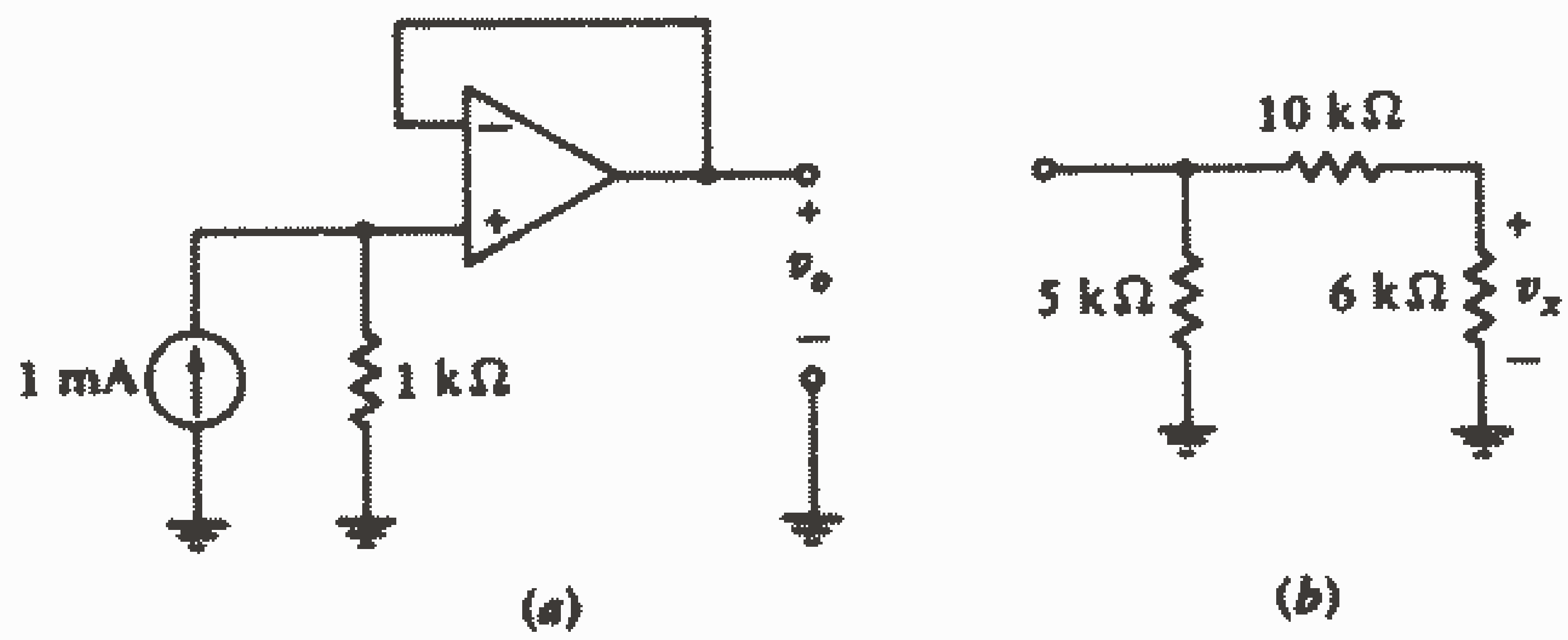
۳۴ ـ مدار شکل ۵۳ ـ ۲ مثالهای متعددی از منابع جریان و ولتاژ را به طور سری و موازی نشان می‌دهد. (a) قدرت جذب شده به وسیله هر منبع را پیدا کنید. (b) منبع ٤ V به چه مقدار باید تغییر کند تا قدرت داده شده به وسیله منبع ۵- A به صفر تنزل کند؟



شکل ۵۳ ـ ۲: به مسئله ۳٤ مراجعه کنید.

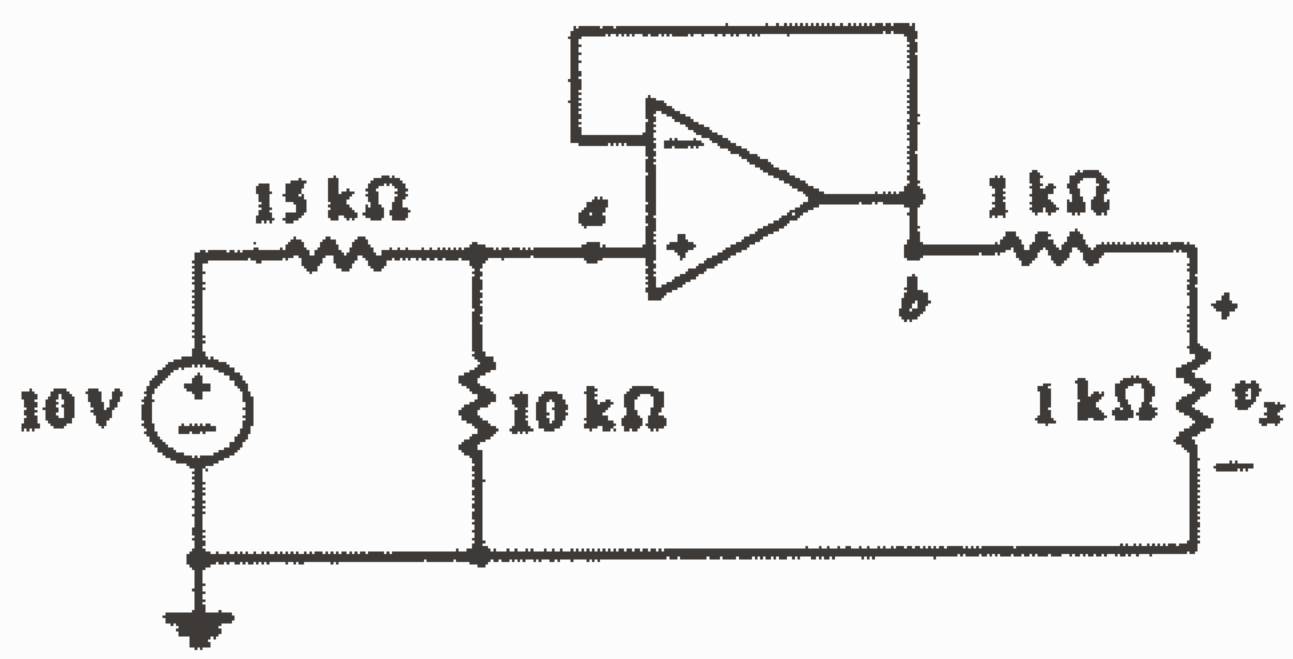
۳۵ ـ برای یک op - amp خاص بهرهٔ A برابر ۲۰۰۰ و R_i = ۵۰ kΩ بین ورودیهای معکوس‌کننده و غیرمعکوس‌کننده می‌باشد. این op - amp به صورت یک ولتاژ فالوور با v_s = ۱V بسته شده است: (a) v_o، (b) v_i، (c) قدرت تحویل داده شده به وسیلهٔ v_s را پیدا کنید.

۳۶ ـ (a) در ولتاژ فالوور شکل ٥٤ a - ۲ اگر A بزرگ باشد، v_x را پیدا کنید.
(b) اگر شبکهٔ شکل ٥٤b - ۲ خروجی ولتاژ فالوور وصل شود، v_x را پیدا کنید.



شکل ٥٤ ـ ۲: به مسئله ۳٦ مراجعه کنید.

۳۷ ـ (a) در مدار شکل ۵۵ ـ ۲ اگر A بزرگ باشد، v_x را پیدا کنید. (b) اگر op - amp از مدار برداشته شود و نقاط b،a به هم وصل شوند، v_x را پیدا کنید.



شکل ۵۵ ـ ۲: به مسئله ۳۷ مراجعه کنید.

فصل ۳

چند تکنیک مفید تحلیل مدار

۱ - ۳ مقدمه

ما اکنون باید با قانون اهم و قوانین کیرشوف و کاربرد آنها در تحلیل مدارهای مقاومتی سادهٔ سری و موازی آشنا شده باشیم و اکنون باید قادر باشیم که مقاومتها یا منابع را به طور سری و موازی ترکیب کنیم و قادر باشیم که اصول تقسیم ولتاژ و جریان را به کار بریم. اکثر مدارهایی را که تاکنون بر روی آنها تمرین کرده‌ایم ساده بوده و از اهمیت عملی کمی برخوردار بوده‌اند، آنها برای کمک به یادگیری ما دربارهٔ کاربرد قوانین اساسی مفید می‌باشند. اکنون باید تحلیل مدارهای پیچیده‌تر را شروع کنیم.

سیستمهای عملی که ما در سالهای آینده آنها را تحلیل و طراحی خواهیم کرد شامل مدارهای کنترل الکتریکی و الکترونیکی، سیستمهای مخابراتی، مبدلهای انرژی مانند موتورها و ژنراتورها، سیستمهای توزیع قدرت، مدارهای رابط برای ICهای تجارتی قابل دسترس و وسایل سرگرمی و یا سایر وسایلی که فعلاً ناشناخته هستند، می‌باشد.

بسیاری از ما با مسائلی از قبیل جریان گرما، جریان سیال و رفتار سیستمهای مکانیکی متنوعی مواجه خواهیم شد. در تحلیل هر یک از این حالات اغلب بهتر است که آن را با یک مدار معادل الکتریکی جایگزین کنیم.

به عنوان یک مثال می‌توانیم یک تقویت‌کنندهٔ ترانزیستوری، وسیله‌ای الکترونیکی که بخشی از اغلب سیستمهای مخابراتی و مدارهای کنترل می‌باشد، را در نظر بگیریم ترانزیستورها، همراه با مقاومتها و سایر عناصر مداری غیرفعال، برای تقویت کردن و یا بزرگ کردن سیگنالهای الکتریکی (ولتاژ یا جریان) و اعمال آنها به بارهای مورد نظر به کار می‌روند. آنها همچنین بطور

وسیعی به عنوان اجزاء سوئیچهای الکتریکی سریع و مدارهای منطقی که تشکیل‌دهندهٔ کامپیوترهای دیجیتال هستند، به کار می‌روند می‌توان ترانزیستور، مقاومت، سایر عناصر مداری غیرفعال، منبع سیگنال و بار را به وسیله ترکیبی از عناصر مداری ساده مانند منابع جریان، منابع ولتاژ و مقاومت جایگزین نمود. در این صورت پاسخهای مسئله به وسیله روشهای تحلیل مدار که ما قبلاً آموخته و یا در این فصل خواهیم آموخت، به دست می‌آیند.

وقتیکه ما قادر باشیم رفتار سیستمهای جریان سیال و جریان گرما، پاسخ دینامیکی سطوح کنترل هواپیما و سایر پدیده‌های غیرالکتریکی را به طور ریاضی توصیف کنیم، خواهیم دید که معادلات حاصله اغلب دقیقاً مشابه آنهایی هستند که روابط جریان و ولتاژ را در مدارهای الکتریکی توصیف می‌کنند.

در این صورت ممکن است به این نتیجه برسیم که ساختن مدار الکتریکی مشابه خیلی ساده‌تر و ارزانتر از ساختن یک نمونهٔ اصلی از سیستم واقعی می‌باشد. در این صورت از مدار الکتریکی می‌توان برای پیشگویی عملکرد سایر سیستمها با تغییر دادن عناصر مختلف استفاده نمود و می‌تواند برای حصول یک طرح نهایی بهتر به ما کمک کند. این است اساس کار کامپیوترهای آنالوگ الکترونیکی.

بدیهی است که یکی از اهداف عمدهٔ این فصل باید آموزش روشهای ساده‌سازی تحلیل مدارهای پیچیده‌تر باشد. از میان این روشها می‌توان از جمع اثرها و تحلیل گره، حلقه و چشمه نام برد. ما همچنین سعی خواهیم کرد توانایی انتخاب مناسبترین روش تحلیل را توسعه دهیم. اغلب پیش می‌آید که ما فقط عملکرد یک قسمت ایزوله شده از یک مدار پیچیده را به طور مفصل و دقیق می‌خواهیم، در این صورت روش جایگزینی بقیهٔ مدار با یک مدار معادل بسیار ساده شده، مطلوب می‌باشد. این مدار معادل اغلب یک مقاومت بطور سری یا موازی با یک منبع ایده‌آل می‌باشد. قضایای تونن و نورتن ما را قادر می‌سازند که این جایگزینی را انجام دهیم.

ما مطالعهٔ روشهای ساده‌سازی تحلیل مدار را با بررسی یک روش عمومی پرقدرت یعنی تحلیل گره آغاز می‌کنیم.

۲ - ۳ تحلیل گره

در فصل گذشته ما تحلیل یک مدار سادهٔ مشتمل بر فقط دو گره را مورد توجه قرار دادیم. سپس دریافتیم که قدم اصلی تحلیل به دست آوردن یک معادله بر حسب تنها کمیت مجهول یعنی ولتاژ بین جفت گره، می‌باشد. ما اکنون تعداد گره‌ها را افزایش خواهیم داد و در نتیجه برای هر

گرهی که اضافه شود یک مجهول و یک معادله هم اضافه خواهد شد.

بنابراین، یک مدار سه گرهی دارای دو ولتاژ مجهول و دو معادله، یک مدار ده گرهی دارای نه ولتاژ مجهول و نه معادله و یک مدار N گرهی نیاز به (N-۱) ولتاژ و (N-۱) معادله دارد در این قسمت مامکانیسم تحلیل گره را مورد توجه قرار می‌دهیم اما توجیه و استدلال روشهایمان را به قسمتهای آتی این فصل موکول می‌کنیم.

به عنوان یک مثال بیایید مدار سه گرهی نشان داده شده در شکل ۱a - ۳ را در نظر بگیریم. ما می‌توانیم محل سه گره را با رسم مجدد مدار مانند شکل ۱b - ۳ که در آن هر گره با یک عدد مشخص شده است، مورد تأکید قرار دهیم.

اکنون مایلیم که به هر گره یک ولتاژ نسبت دهیم اما باید بخاطر داشته باشیم که یک ولتاژ همیشه بین دو گره در شبکه تعریف می‌شود. بنابراین یک گره را به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم و سپس یک ولتاژ بین هر گره و گره مبنا تعریف می‌کنیم. بنابراین ما دوباره توجه می‌کنیم که فقط (N-۱) ولتاژ در یک مدار N گرهی تعریف می‌شود.

گره ۳ را به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم هر یک از گره‌های دیگر را هم می‌توانستم به عنوان گره مبنا انتخاب کنیم ولی برای ساده‌تر شدن معادلات حاصله گرهی را که بیشترین اتصال را دارد به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم.

اگر در مدار گره زمین وجود داشته باشد، مناسبترین کار این است که آن را به عنوان گره مبنا انتخاب کنیم. اغلب گره زمین به صورت پایهٔ مشترکی در سرتاسر قسمت پایینی مدار ظاهر می‌شود.

ولتاژ گره ۱ نسبت به گره مبنای ۳ را به صورت v_1 و ولتاژ گره ۲ نسبت به گره مبنا را v_2 تعریف می‌کنیم. این دو ولتاژ کافی هستند و ولتاژ بین هر جفت گره دیگر را می‌توان بر حسب آنها پیدا کرد.

مثلاً ولتاژ گره ۱ نسبت به گره ۲ عبارت است از $(v_1 - v_2)$. ولتاژهای v_1 ، v_2 و علامت مبنای آنها در شکل ۱C - ۳ نشان داده شده است. در این شکل مقادیر مقاومتها نیز با مقادیر هدایت جایگزین شده‌اند. و سرانجام مدار با حذف همهٔ علائم مبنای ولتاژها به صورت شکل ۱d-۳ خلاصه شده است. یک گره مبنا به وضوح مشخص شده است و ولتاژ هر گره به صورت ولتاژ آن گره نسبت به گره مبنا در نظر گرفته شده است. این تنها وضعیتی است که در آن ما باید علائم ولتاژ را بدون جفت مثبت و منفی مربوطه به کار بریم البته بجزبرای علامت باتری که درشکل ۱۴b-۱ تعریف شد.

ما باید اکنون قانون جریان کیرشوف را به گره‌های ۱ و ۲ اعمال کنیم. این کار را با قرار دادن جریان کل خارج شده از گره از طریق هدایتها با جریان کل منبع وارد شونده به گره انجام می‌دهیم.

بنابراین:
$$0.5v_1 + 0.2(v_1 - v_2) = 3$$

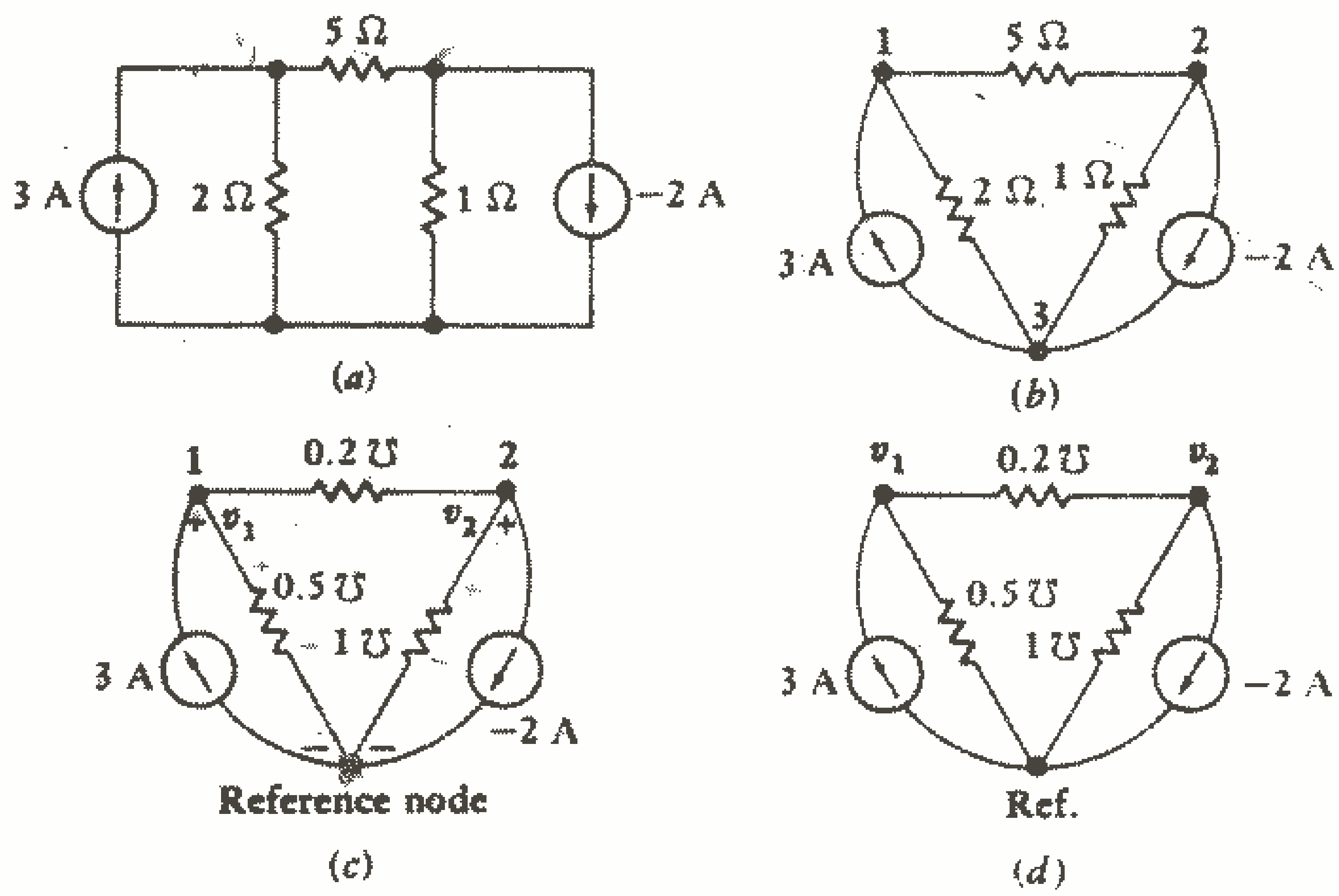
و یا:
$$0.7v_1 - 0.2v_2 = 3 \qquad (1)$$

در گره ۲ داریم:
$$1v_2 + 0.2(v_2 - v_1) = 2$$

و یا:
$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = 2 \qquad (2)$$

معادلات (۱) و (۲) معادلات مطلوب بر حسب دو مجهول هستند و به سادگی می‌توان آنها را حل نمود. نتایج عبارتند از:

$$v_1 = 5 \quad V$$
$$v_2 = 2.5 \quad V$$



شکل ۱ ـ ۳: (a) یک مدار سه گرهی. (b) مدار به منظور تأکید سه گره دوباره رسم شده است و هر گره شماره‌گذاری شده است. (c) یک ولتاژ: همراه با پلارتیه مبنا، بین هر گره و گره مبنا تعیین شده است. (d) تعیین ولتاژها با حذف پلارتیه خلاصه شده است. فرض شده است که هر ولتاژ نسبت به مبنا مثبت است.

همچنین ولتاژ گره ۱ نسبت به گره ۲ عبارت است از $(v_2 - v_1)$ یا ۲,۵ V و حال ما هر جریان یا قدرتی را در مدار با یک مرحله می‌توانیم پیدا کنیم. مثلاً، جریانی که‌ازهدایت ۰/۵℧ پایین می‌آید برابر است با v_1 ۰/۵ و یا ۲/۵ A.

حال بیایید تعداد گره‌ها را یک عدد افزایش دهیم. مدار جدید در شکل 2a - ۳ نشان داده شده است و در شکل 2b - ۳ با مشخص کردن گره‌ها و انتخاب یک گره مبنای مناسب و تعیین نمودن ولتاژ گره‌ها، دوباره رسم شده است. سپس جریانهای خارج شونده از گره ۱ را جمع می‌کنیم:

$$3(v_1 - v_2) + 4(v_1 - v_3) - (-8) - (-3) = 0$$

و یا:

$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11 \qquad (3)$$

در گره ۲ داریم:

$$3(v_2 - v_1) + 1v_2 + 2(v_2 - v_3) - 3 = 0$$

و یا:

$$-3v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 3 \qquad (4)$$

در گره ۳ داریم:

$$4(v_3 - v_1) + 2(v_3 - v_2) + 5v_3 - 25 = 0$$

و یا:

$$-4v_1 - 2v_2 + 11v_3 = 25 \qquad (5)$$

معادلات ۳ تا ۵ را می‌توان با روش سادهٔ حذف مجهولات و یا به وسیله دستور کرامر و دترمینانها حل نمود.[۱]

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 25 & -2 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{vmatrix}}$$

با بسط دترمینان‌های صورت‌ومخرج به وسیله مینورها بر حسب ستون اول آنها داریم:

۱ - ضمیمه ۱ مرور مختصری بر دترمینان‌ها و حل یک دستگاه معادلات خطی بوسیله دستور کرامر را ارائه می کند.

$$v_1 = \frac{-11\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} + 25\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}}{7\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-11(62) - 3(-41) + 25(30)}{7(62) + 3(-41) - 4(30)} = \frac{-682 + 123 + 750}{434 - 123 - 120} = \frac{191}{191} = 1 \quad \text{V}$$

و بطور مشابه داریم:

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -11 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -4 & 25 & 11 \end{vmatrix}}{191} = 2 \quad \text{V}$$

و

$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 & -11 \\ -3 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 25 \end{vmatrix}}{191} = 3 \quad \text{V}$$

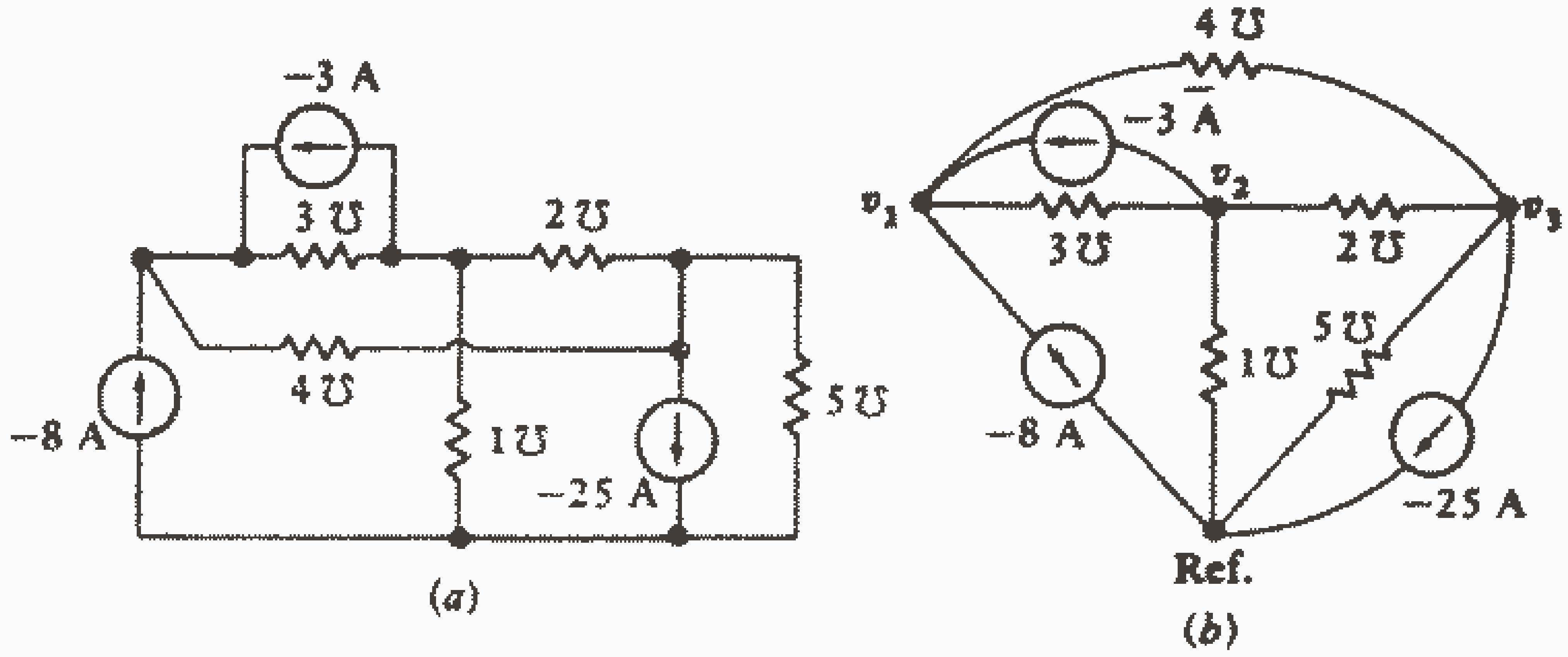
دترمینان مخرج در هر یک از سه مُحاسبه فوق مشترک می‌باشد. در مدارهایی که شامل منابع ولتاژ و یا منابع وابسته نمی‌باشند. (یعنی مدارهایی که فقط شامل منابع مستقل جریان هستند) دترمینان مخرج، دترمینان ماتریسی[1] است که به صورت ماتریس هدایت مدار تعریف می‌شود:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

باید توجه داشت که نه عنصر ماتریس فوق یک رشتهٔ مرتب ضرایب معادلات (۳)، (۴) و (۵) می‌باشند که هر یک از عناصر یک هدایت می‌باشند. سطر اول از ضرایب معادله KCL در گره اول (ضرایب به ترتیب v_1 ، v_2 ، v_3 داده شده‌اند) تشکیل شده است و سطر دوم مربوط به گره دوم و غیره می‌باشد.

۱ - تا فصل ۱۶ ماتریس‌ها را بطور ریاضی بررسی نخواهیم کرد و در آن زمان یک اطلاعات مقدماتی از جبر خطی ارائه می‌شود.

ماتریس هدایت نسبت به قطر اصلی (از گوشهٔ بالای چپ به گوشهٔ پایین راست) متقارن است و همهٔ عناصری که روی این قطر نیستند منفی بوده و عناصر روی قطر مثبت می‌باشند. این یک نتیجهٔ کلی از روش سیستماتیکی که برای مشخص نمودن متغیرها، اعمال KCL و مرتب نمودن معادلات به کار برده‌ایم و قضیهٔ هم پاسخی، که در فصل ۱۶ مورد بحث قرار خواهیم داد، می‌باشد.



شکل ۲ ـ ۳: (a) یک مدار شامل چهار گره و هشت شاخه.
(b) همان مدار با مشخص نمودن ولتاژها دوباره رسم شده است.

در اینجا فقط تقارن موجود در این گونه مدارها را که فقط شامل منابع جریان مستقل هستند مغتنم می‌شمریم و یک روش چک اشتباهات را در نوشتن معادلات مداری می‌پذیریم.

ما اکنون باید ببینیم که منابع ولتاژ و منابع وابسته چگونه روند تحلیل گرهی را تحت تاثیر قرار می‌دهند.

به عنوان یک مثال نوعی مدار شکل ۳ - ۳ را مورد توجه قرار می‌دهیم. مدار چهار گرهی قبلی ما با جایگزینی هدایت ℧۲ بین گره‌های ۲ و ۳ به وسیله یک منبع ولتاژ V ۲۲، تغییر یافته است. ما هنوز هم همان ولتاژهای v_1، v_2، v_3 را مشخص می کنیم. در گذشته قدم بعدی ما اعمال KCL به هر یک از سه گره غیر مبنا بود ولی اگر الان هم بخواهیم همان کار را انجام دهیم، خواهیم دید که در گره ۲ و ۳ با مشکل مواجه می‌شویم زیرا نمی‌دانیم چه جریانی از شاخهٔ محتوی منبع ولتاژ عبور می کند.

هیچ راهی وجود ندارد که به وسیلهٔ آن بتوانیم جریان را به صورت تابعی از ولتاژ بیان کنیم زیرا بنابر تعریف منبع ولتاژ، جریان مستقل از ولتاژ می‌باشد.

دو راه برای رهایی از این مشکل وجود دارد. راه مشکلتر این است که یک جریان مجهول به شاخهٔ حاوی منبع ولتاژ نسبت دهیم و سپس سه بار اقدام به اعمال KCL و سپس یکبار اقدام به اعمال KVL بین گره‌های ۲ و ۳ بکنیم که حاصل اینکار چهار معادله و چهار مجهول برای این مثال خواهد بود.

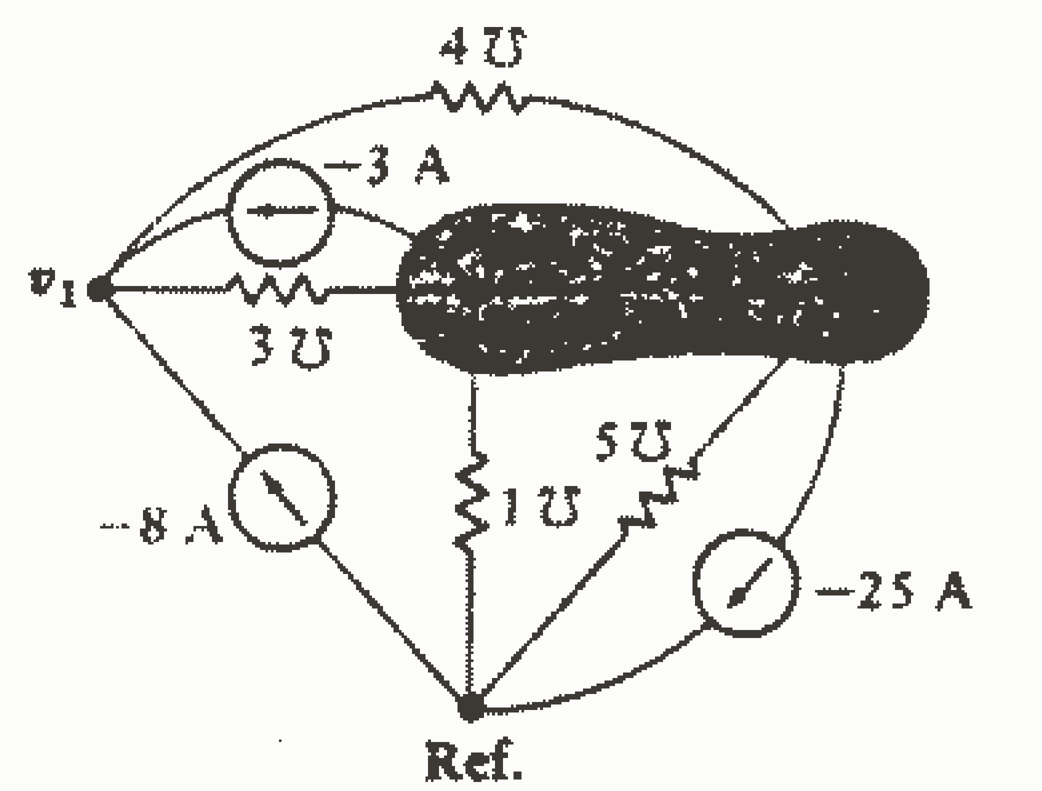
روش ساده‌تر این است که توافق کنیم که برای ما عمدتاً ولتاژ گره‌ها مورد توجه می‌باشد به طوریکه می‌توانیم جریان شاخه‌ای را که حاوی منبع ولتاژ است و برای ما مشکل آفرین شده است، نادیده بگیریم. این کار را با در نظر گرفتن گره ۲، گره ۳ و منبع ولتاژ به عنوان نوعی فوق نقطه و اعمال همزمان KCL به هر دو گره انجام می‌دهیم. این امر مطمئناً، ممکن می‌باشد زیرا اگر جریان کل خارج شونده از گره ۲ صفر باشد و جریان کل خارج شونده از گره ۳ هم صفر باشد، آنگاه جریان کلی که از کل ۲ گره خارج می‌شود صفر می‌باشد.

فوق نقطه به وسیله ناحیهٔ سایه خورده در شکل ۳ - ۳ مشخص شده است و ما مجموع شش جریان خارج شونده از فوق نقطه را مساوی صفر قرار خواهیم داد. با شاخه‌ای که هدایت ℧۳ دارد شروع می‌کنیم و در جهت عقربه‌های ساعت عمل می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$3(v_2 - v_1) - 3 + 4(v_3 - v_1) - 25 + 5v_3 + 1v_2 = 0$$

و یا

$$-7v_1 + 4v_2 + 9v_3 = 28$$



شکل ۳ - ۳: هدایت ℧ ۲ در شکل ۲ - ۳ به وسیلهٔ یک منبع ولتاژ مستقل جایگزین شده است. قانون جریان کیرشوف برای فوق نقطه به کار رفته است و ولتاژ منبع برابر با $v_2 - v_3$ قرار داده شده است.

معادله KCL در گره ۱ فرقی با معادلهٔ (۳) ندارد:

$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11$$

ما احتیاج به یک معادله دیگر هم داریم زیرا سه مجهول داریم و باید از این واقیت که یک منبع V ۲۲ بین گره‌های ۲ و ۳ وجود دارد استفاده کنیم: $v_3 - v_2 = 22$

این سه معادلهٔ اخیر را به صورت زیر دوباره‌نویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 7v_1 - 3v_2 - 4v_3 &= -11 \\ -7v_1 + 4v_2 + 9v_3 &= 28 \\ -v_2 + v_3 &= 22 \end{aligned}$$

جواب دترمینانی v_1 عبارت است از:

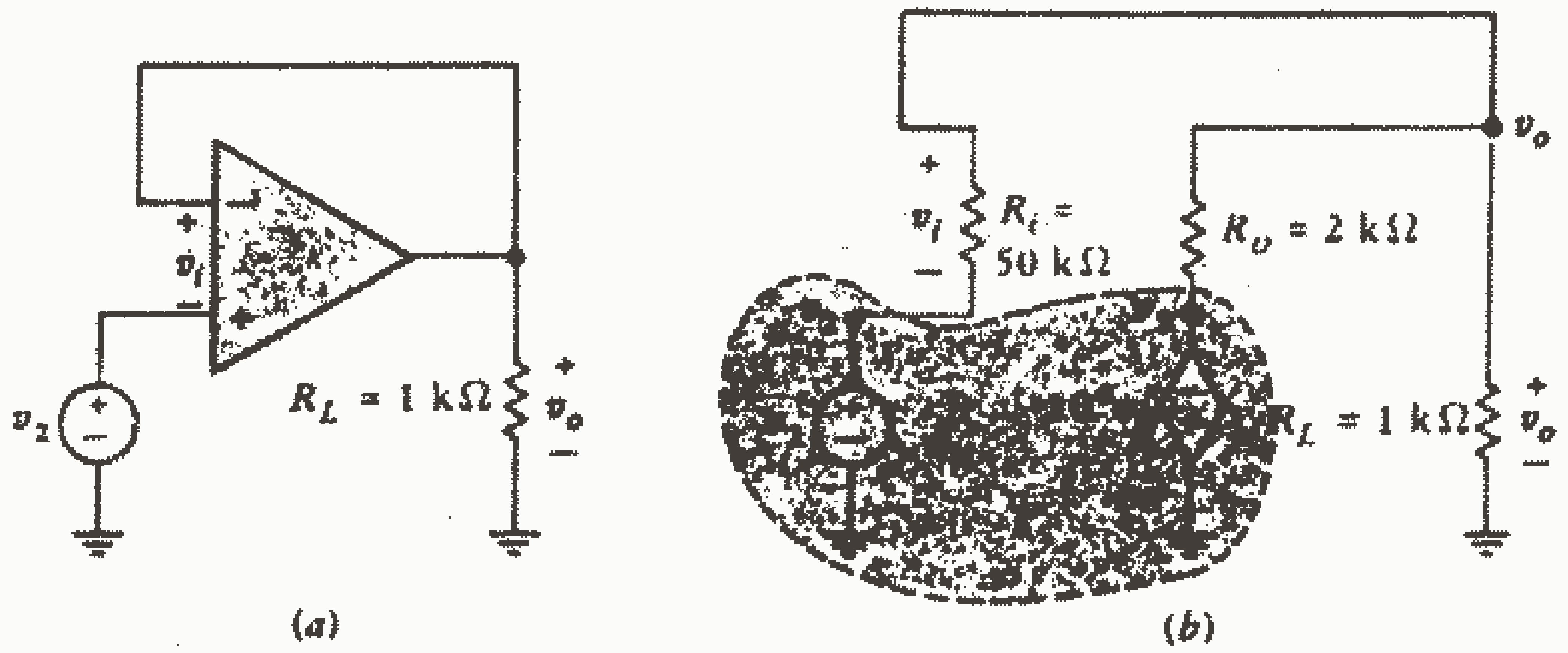
$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 28 & 4 & 9 \\ 22 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -7 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-189}{42} = -4.5 \quad V$$

به فقدان تقارن نسبت به قطر اصلی در دترمینان مخرج و منفی نبودن همهٔ عناصر غیرقطری توجه نمایید. این به دلیل وجود منبع ولتاژ است. همچنین توجه داشته باشید که دیگر نمی‌توانیم مخرج را دترمینان ماتریس هدایت بنامیم زیرا سطر پایین آن از معادلهٔ $-v_2 + v_3 = ۲۲$ حاصل می‌شود، و این معادله بستگی به هیچ هدایتی ندارد.

بنابراین وجود یک منبع ولتاژ تعداد گره‌های غیرمبنا را که باید برای آنها KCL اعمال شود، یک عدد کاهش می‌دهد و فرقی نمی‌کند که منبع ولتاژ بین دو گره غیرمبنا و یا بین یک گره و گره مبنا وصل شده باشد.

حال بیایید مداری را که شامل یک منبع وابسته است در نظر بگیریم. به عنوان مثال یک op - amp را که به‌صورت ولتاژفالوور وصل شده است طبق شکل ۳-٤a انتخاب می کنیم.

این همان مداری است که در قسمت گذشته از فصل ۲ مورد بررسی قرار دادیم به جز اینکه یک مقاومت بار محدود $R_L = ۱K\ \Omega$ اکنون بین ترمینال خروجی و زمین ظاهر شده است. op - amp را به‌وسیله مدلی که شامل یک مقاومت ورودی غیربینهایت، $R_i = ۵۰k\ \Omega$، و یک مقاومت خروجی غیرصفر، $R_o = ۲K\ \Omega$، می‌باشد و در شکل ۳ - ٤b نشان داده شده است، بیان می‌کنیم و یک مقدار معمول $A = ۱۰^٤$ را فرض می‌نماییم.



شکل ٤ - ٣: (a) یک ولتاژ فالوور که بار محدود R_L را تغذیه می‌کند.

(b) op - amp با مدار معادلی که شامل R_i غیربینهایت و R_o غیر صفر می‌باشد جایگزین شده است. سه ولتاژ گره نسبت به مبنا مشخص شده و یک فوق نقطه مشخص شده است.

زمین به عنوان گره مبنا انتخاب شده است و به سه گره غیرمبنا ولتاژهای v_2، v_o، v_3 نسبت داده شده است. توجه کنیم که منبع ولتاژ مستقل v_2 باعث می‌شود که گره v_2 و گره مبنا تشکیل یک فوق نقطه را بدهند، به علاوه منبع ولتاژ وابسته هم ما را مجبور می‌سازد که گره v_3 و گره مبنا را هم به عنوان یک فوق نقطه در نظر بگیریم. بنابراین، گره v_2 ، v_o و گره مبنا تشکیل یک فوق نقطه بزرگ را می‌دهند که به وسیله ناحیهٔ سایه خورده در شکل 4b - ۳ نشان داده شده است. از آنجاییکه فوق نقطه شامل گره مبنا می‌باشد، معادلهٔ KCL را برای آن نمی‌نویسیم. تنها معادله KCL که باید نوشته شود مربوط به گره v_o می‌باشد، یعنی:

$$\frac{v_o - v_2}{50000} + \frac{v_o - v_3}{2000} + \frac{v_o}{1000} = 0 \qquad (6)$$

بیایید منبع مستقل را $v_s = 1\ V$ در نظر بگیریم. اکنون دو ولتاژ گرهی مجهول v_3 ، v_o در معادله (٦) وجود دارد و معادلهٔ KCL مستقل دیگری را نمی‌توان نوشت. اگر چه ما هنوز باید ولتاژ هر منبع ولتاژ بین گره‌ها (و در نتیجه داخل محدودهٔ خط‌چین) و نیز کنترل منبع وابسته را (در اینجا v_i) بر حسب ولتاژ گره‌ها بنویسیم.

ابتدا به منابع ولتاژ داخل فوق نقطه توجه می‌کنیم. منبع $v_۲$ مساوی V ۱ در نظر گرفته شده است و به علاوه ولتاژ گرهی آن با $v_۲$ نمایش داده شده است. اگر ما به اندازهٔ کافی احمق می‌بودیم که آن را مثلاً v_A بنامیم، آنگاه باید معادلهٔ زاید $v_۲ = v_A$ را می‌نوشتیم. مورد بعدی منبع $A\,v_i$ می‌باشد. از آنجاییکه این منبع بین گره ۳ و زمین وصل شده است، داریم:

$$v_۳ = -۱۰^۴ v_i$$

و سرانجام، باید جریانها یا ولتاژهایی را که منابع وابسته با آنها کنترل می‌شوند به ولتاژ گره‌ها ربط دهیم. در اینجا V_i دو سر R_i تعریف شده است و داریم:

$$v_i = v_o - v_۲ = v_o - ۱$$

برای حل معادلهٔ (۶) نسبت به v_o مقدار $v_۳ = -۱۰^۴(v_o - ۱)$ را در معادله قرار می‌دهیم و یک معادله و یک مجهول به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_o - ۱}{۵۰۰۰۰} + \frac{v_o + ۱۰^۴(v_o - ۱)}{۲۰۰۰} + \frac{v_o}{۱۰۰۰} = 0$$

از حل معادلهٔ فوق پیدا می‌کنیم: $v_o = ۰٫۹۹۹۷۰۰\ V$ و در نتیجه ملاحظه می‌کنیم که ولتاژ خروجی حتی برای یک op - amp با گین نسبتاً کم، مقاومت ورودی کم و مقاومت خروجی زیاد، خیلی نزدیک به ولتاژ ورودی می‌باشد.

در خاتمه یادآور می‌شویم که منفی جملهٔ اول در معادلهٔ (۶) جریانی است که منبع ۱V تحویل می‌دهد که در اینجا برابر است با $\frac{۱ - v_o}{۵۰۰۰۰} = ۶\ nA$ که یک مقدار خیلی کوچکی است که قادر نیست حتی حساس‌ترین منابع را مختل سازد. برعکس، جریان خروجی عبارت از جملهٔ سوم معادله (۶) یعنی $\frac{V_o}{۱۰۰۰} = ۱\ mA$ که بیش از $۱۰^۵$ برابر بزرگتر می‌باشد. بنابراین ولتاژ فالوور می‌تواند جریان و قدرتی خیلی بیشتر از آنچه که از منبع می‌کشد به بار تحویل دهد. در انجام این عمل قانون بقای انرژی نقض نمی‌شود بلکه قدرت از منابع dc که معمولاً نشان داده نمی‌شوند، کشیده می‌شود.

حال اجازه دهید روش بدست آوردن معادلات گره را برای هر مدار مقاومتی خلاصه کنیم:

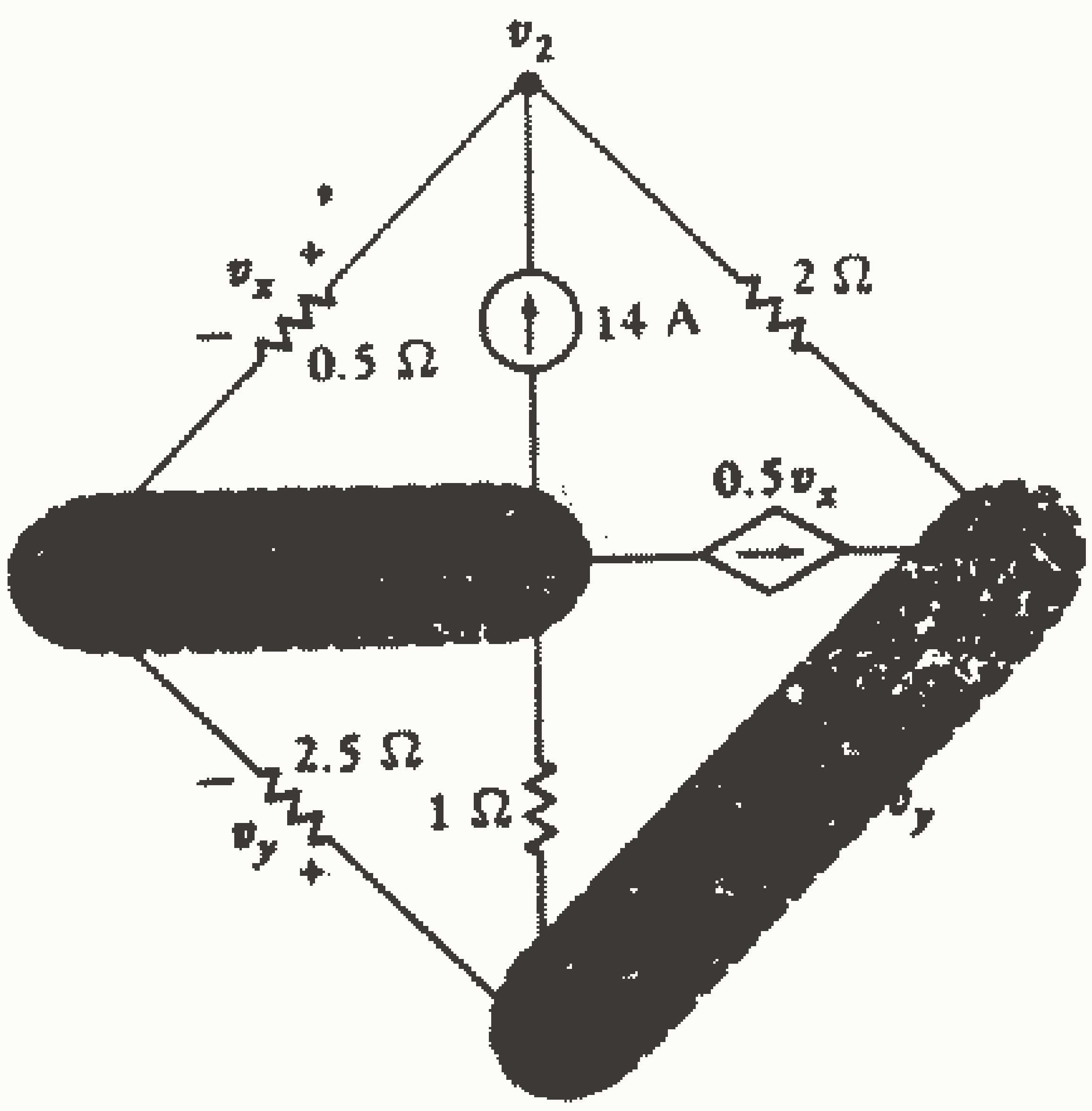
۱ - یک مدار ساده و تمیز بکشید. تمام مقادیر عناصر و منابع را مشخص کنید و هر منبع باید علامت مبنای خود را داشته باشد.

۲ - با فرض اینکه مدار N گره دارد، یکی از گروهها را به عنوان گره مبنا انتخاب کنید. سپس ولتاژهای گرهی $v_۱$، $v_۲$، .... ، $v_{N-۱}$ را در گرههای مربوطه‌شان بنویسید با توجه به اینکه هر ولتاژ گرهی نسبت به گره مبنای انتخاب شد، سنجیده می‌شود.

۳ - اگر مدار فقط شامل منابع جریان باشد، قانون جریان کیرشوف را در هر گره غیرمبنا اعمال کنید. برای بدست آوردن ماتریس هدایت در مدارهایی که فقط حاوی منابع جریان مستقل هستند، کل جریان خروجی از هر گره از طریق هدایت‌ها را با کل جریان ورودی به آن گره توسط منابع مساوی قرار دهید و جملات را از v_1 تا v_{n-1} مرتب کنید. برای هر منبع جریان وابسته موجود، جریان منبع و کمیت کنترل کننده آن را به متغیرهای $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ ربط دهید، البته اگر قبلا به این صورت نوشته نشده باشند.

۴ - اگر مدار حاوی منابع ولتاژ باشد در اطراف هر منبع ولتاژ با قرار دادن منبع و دو ترمینال آن داخل یک کادر خط‌چین یک فوق نقطه تشکیل دهید، به این ترتیب به ازای هر منبع ولتاژ موجود یک گره از تعداد گرههای مدار کاسته می‌شود. ولتاژهای گرهی مشخص شده نباید تغییر یابند. حال در این مدار اصلاح شده با استفاده از ولتاژهای گره به مبنای مشخص شده، KCL را به هر گره و یا فوق نقطه (البته بشرطی که شامل گره مبنا نباشد) اعمال کنید. هر ولتاژ منبع را به متغیرهای $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ نسبت دهید، البته اگر قبلا اینکار صورت نگرفته باشد.

حال با در نظر گرفتن این پیشنهادات و رهنمودها، بیایید مدار شکل ۵-۳ را که شامل همهٔ چهار نوع منبع و پنج گره می‌باشد، مورد توجه قرار دهیم.



شکل ۵ - ۳: یک مدار پنج گرهی که شامل هر چهار نوع منبع مختلف می‌باشد.

گره مرکزی را به عنوان مبنا انتخاب میکنیم و از $v_۱$ تا $v_۴$ را در جهت عقربه‌های ساعت از گره سمت چپ شروع به نامگذاری میکنیم.
بعد از تشکیل فوق نقطه در اطراف هر منبع ولتاژ، ملاحظه میکنیم که لازم است معادلات KCL را فقط در گره ۲ و فوق نقطهٔ شامل گره ۳ و ۴ و منبع ولتاژ وابسته بنویسم.
معادلهٔ دیگری برای فوق نقطهٔ شامل گره ۱ و منبع ولتاژ مستقل لازم نیست زیرا واضح است که $v_۱ = -۱۲V$ در گره ۲ داریم:

$$\frac{v_۲ - v_۱}{۰/۵} + \frac{v_۲ - v_۳}{۲} = ۱۴$$

همچنین در فوق نقطهٔ ۴ - ۳ داریم:

$$\frac{v_۳ - v_۲}{۲} - ۰/۵v_x + \frac{v_۴}{۱} + \frac{v_۴ - v_۱}{۲/۵} = 0$$

سپس ولتاژ منابع را به ولتاژ گره‌ها مربوط می‌کنیم:

$$v_۱ = -۱۲,\quad v_۳ - v_۴ = ۰/۲\,(v_۴ - v_۱)$$

و سرانجام منبع جریان وابسته را به حسب متغیرهای تعیین شده بیان می‌کنیم:

$$۰/۵v_x = ۰/۵\,(v_۲ - v_۱)$$

بنابراین، چهار معادله بر حسب چهار ولتاژ گره بدست می‌آوریم:

$$-۲v_۱ + ۲/۵v_۲ - ۰/۵v_۳ = ۱۴$$
$$v_۱ = -۱۲$$
$$۰/۱v_۱ - v_۲ + ۰/۵v_۳ + ۱/۴v_۴ = 0$$
$$۰/۲v_۱ + v_۳ - ۱/۲v_۴ = 0$$

که جوابهای آنها عبارتند از: $v_۴ = -۲v,\ v_۳ = 0,\ v_۲ = -۴v,\ v_۱ = -۱۲v$

تمرین

۱ - ۳ - روش تحلیل گره را برای پیدا کردن v_y در مدار شکل ۶-۳ بکار برید اگر عنصر A:

(a) یک منبع جریان A ۲ با فلش رو به راست باشد. (b) یک مقاومت ۸Ω باشد. (C) یک منبع ولتاژ V ۱۰ با علامت مثبت در سمت راست باشد.

جواب: V ‎-۲۰، -۱۶، -۶٫۹۱

۲ - ۳ - روش تحلیل گره را برای پیدا کردن v_y در مدار شکل ۶ - ۳ به کار برید، اگر عنصر A:

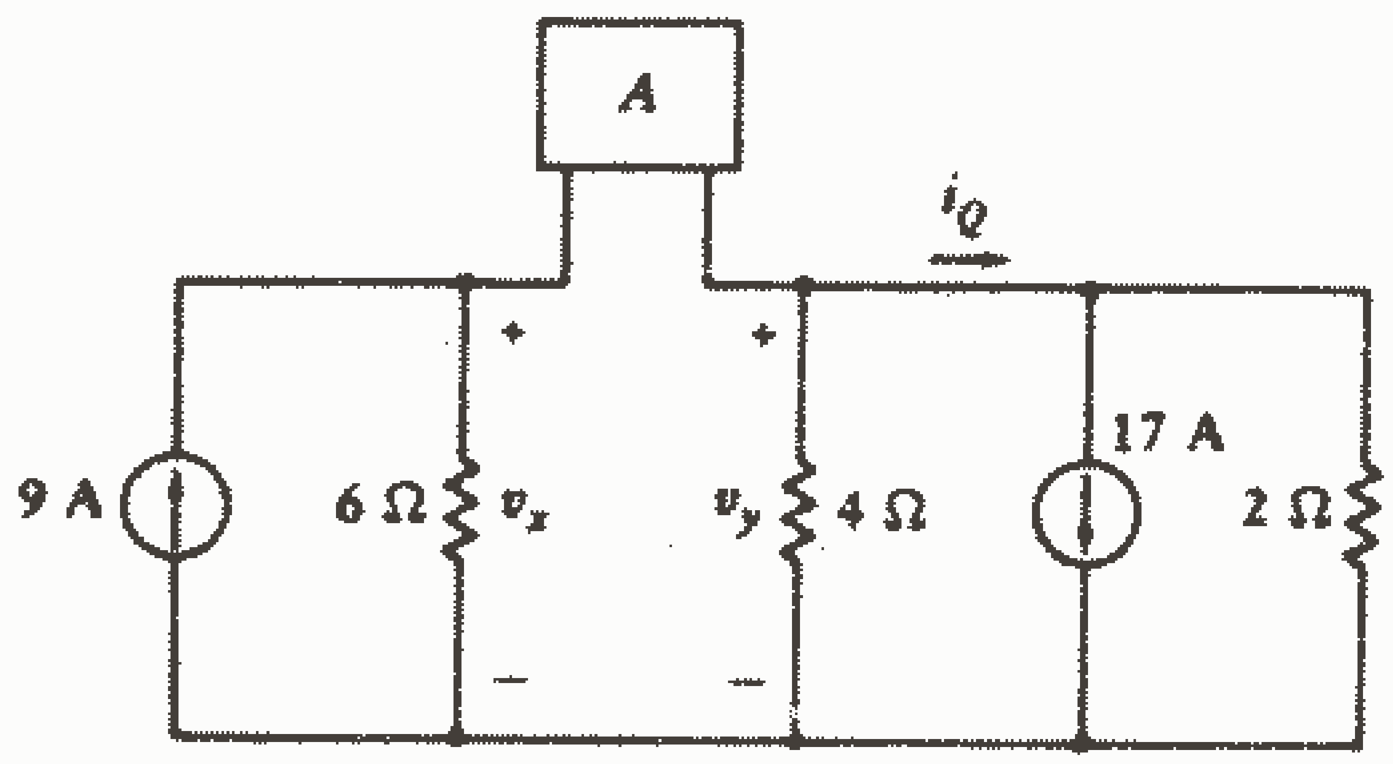
(a) یک منبع جریان وابسته با فلش رو به چپ و با مقدار v_x ۲٫۰ باشد.

(b) یک منبع ولتاژ وابسته با علامت مثبت در سمت چپ و مقدار i_O ۳ باشد.

(c) یک مدار باز باشد.

(d) یک اتصال کوتاه باشد.

جواب: ۴۹٫۳ V، ۱۴٫۱۴-، ۲۲٫۷-، ۸٫۷۳-



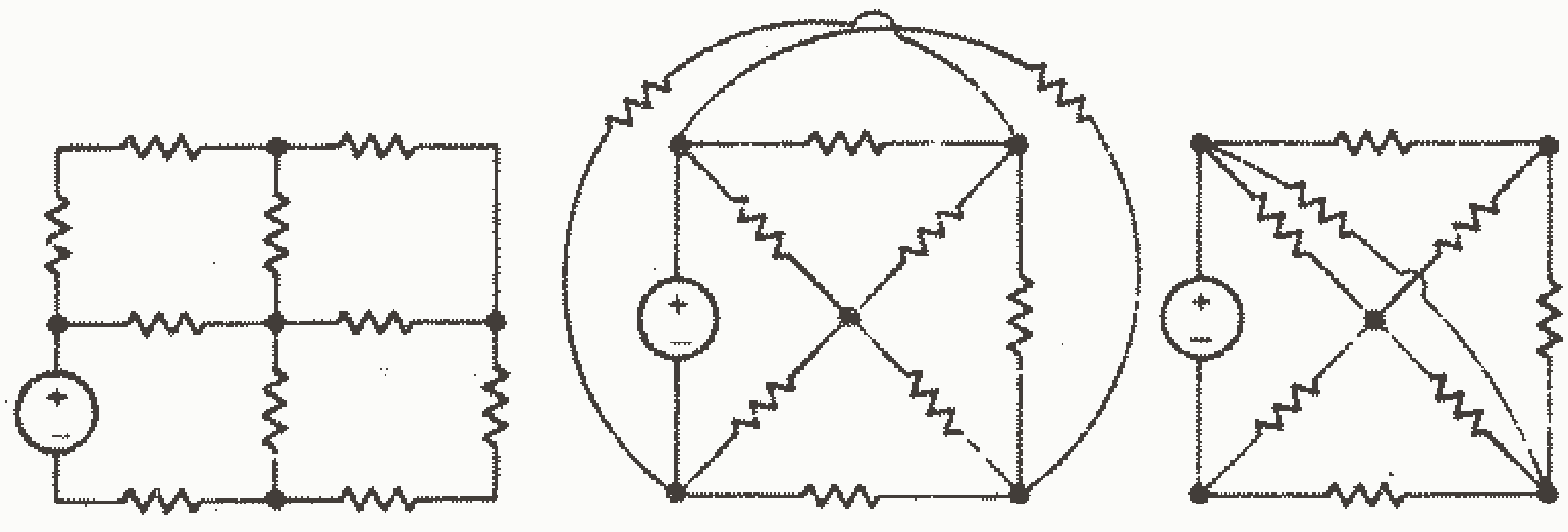
شکل ۶ ـ ۳: به تمرینات ۱ ـ ۳ و ۲ ـ ۳ مراجعه کنید.

۳ - ۳ تحلیل چشمه‌ای (مش)

تکنیک تحلیل گرهی که در قسمت قبل توصیف شد کاملاً عمومی است و همیشه می‌توان آن را به هر شبکهٔ الکتریکی اعمال نمود. اگر چه این تنها روشی نیست که بتوان ادعا نمود، بخصوص که در قسمتهای پایانی این فصل یک روش تحلیل گرهی تعمیم یافته و تکنیکی به نام تحلیل حلقه را خواهیم دید.

در ابتدا اجازه دهید روشی به نام تحلیل چشمه‌ای را مورد توجه قرار دهیم. اگر چه این روش قابل اعمال به هر شبکه‌ای نیست ولی برای اکثر شبکه‌هایی که ما نیاز به تحلیل آنها خواهیم داشت قابل استفاده است. روش تحلیل چشمه‌ای را فقط به شبکه‌هایی که مسطح (واژه‌ای که به زودی آن را تعریف می‌کنیم) هستند می‌توان اعمال نمود.

اگر بتوان مداری را در یک سطح مسطح به گونه‌ای رسم کرد که هیچ شاخه‌ای از روی شاخهٔ دیگر عبور نکند، این مدار را یک مدار مسطح می‌نامند. بنابراین شکل ۷a - ۳ یک شبکهٔ مسطح و شکل ۷b - ۳ یک شبکهٔ غیرمسطح و شکل ۷C - ۳، با وجود اینکه طوری رسم شده است که در نظر اول غیر مسطح به نظر می‌رسد، یک شبکهٔ مسطح را نشان می‌دهد.



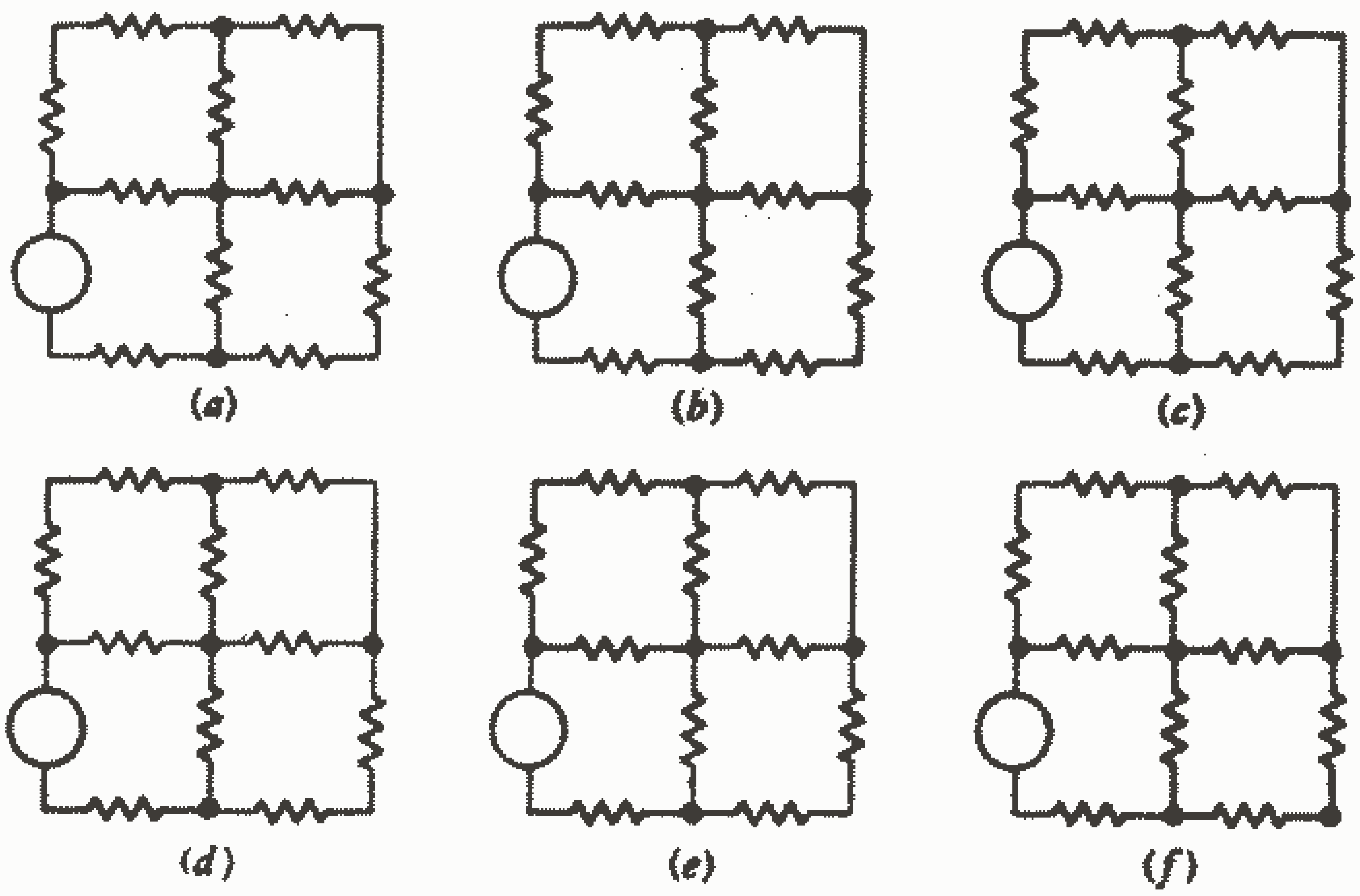
(a) (b) (c)

شکل ۷ ـ ۳: (a) یک شبکهٔ مسطح را می‌توان طوری رسم نمود که هیچ رویهم افتادگی وجود نداشته باشد.
(b) یک شبکه غیرمسطح را در یک سطح مسطح نمی‌توان به گونه‌ای رسم کرد که حداقل یک رویهم افتادگی نداشته باشد.
(c) یک شبکه مسطح را می‌توان طوری رسم نمود که غیر مسطح به نظر می‌آید.

در فصل دوم کلمات مسیر، مسیر بسته و حلقه تعریف شدند. قبل از اینکه یک چشمه را تعریف کنیم، بیایید مجموعه‌ای از شاخه‌های رسم شده با خطوط ضخیم را در شکل ۸ - ۳ مورد توجه قرار دهیم. اولین مجموعهٔ شاخه‌ها یک مسیر نیست زیرا هر چهار شاخه به گره مرکزی وصل شده‌اند و البته حلقه هم نمی‌تواند باشد. دستهٔ دوم شاخه‌ها هم یک مسیر نمی‌باشد زیرا برای رسم آن حتماً باید از گره مرکزی دوبار عبور کنیم.

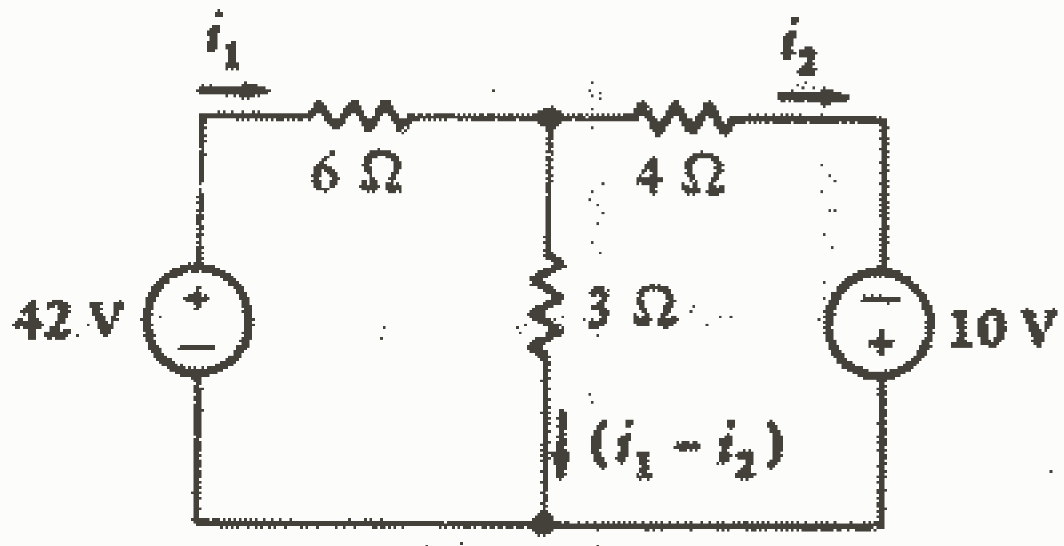
چهار مسیر باقیمانده همگی حلقه می‌باشند. این مدار شامل ۱۱ شاخه می‌باشد.

چشمه خاصیتی است از مدار مسطح و برای مدار غیرمسطح تعریف نشده است. ما چشمه را به عنوان حلقه‌ای که شامل حلقهٔ دیگری در داخل خودش نباشد تعریف می‌کنیم. بنابراین حلقه‌های شکل d ، c ۸ - ۳ چشمه نیستند در حالیکه حلقه‌های e ، f چشمه می‌باشند. وقتیکه مداری به صورت تمیز به فرم مسطح رسم شود اغلب دارای ظاهری به شکل یک پنجرهٔ چند قاب شیشه‌ای می‌باشد که هر قاب شیشه را می‌توان به عنوان یک چشمه تصور نمود. اگر شبکه‌ای مسطح باشد می‌توان از تحلیل چشمه‌ای برای تحلیل آن استفاده نمود. این تکنیک مفهوم جریان چشمه‌ای را در بر دارد که ما با در نظر گرفتن تحلیل مدار دو چشمه‌ای شکل ۹ - ۳ آن را معرفی خواهیم کرد.



شکل ۸ ـ ۳: (a) مجموعه شاخه‌هایی که به وسیله خطوط ضخیم مشخص شده‌اند نه یک مسیر می‌باشند و نه یک حلقه. (b) مجموعه شاخه‌ها در این حالت یک مسیر نیست زیرا باید از گره مرکزی دو بار عبور کنیم. (c) این مسیر یک حلقه است اما یک چشمه نیست، زیرا حلقه‌هایی دیگری را هم دربر دارد. (d) این مسیر هم یک حلقه است اما یک چشمه نیست. (e) و (f) هر یک از این مسیرها هم حلقه و هم چشمه می‌باشند.

همانگونه که در مدار تک حلقه‌ای انجام‌دادیم، با فرض نمودن یک جریان در یکی از شاخه‌ها شروع می‌کنیم. بیایید جریانی را که از مقاومت 6Ω به سمت راست جاری است i_1 بنامیم. قصد داریم قانون ولتاژ کیرشوف را حول هر یک از دو چشمه اعمال کنیم و دو معادلهٔ حاصل برای تعیین دو جریان مجهول کافی می‌باشند. بنابراین جریان دیگری به نام i_2 در مقاومت 4Ω رو به راست انتخاب می‌کنیم. ما همچنین می‌توانیم جریان دیگری به نام i_3 در شاخهٔ مرکزی رو به پایین انتخاب کنیم اما از قانون جریان کیرشوف واضح است که این جریان بر حسب دو جریان قبلی عبارت از $(i_1 - i_2)$ می‌باشد. جریانهای فرض شده در شکل ۹ ـ ۳ نشان داده شده‌اند.



شکل ۹ ـ ۳: دو جریان i_1 و i_2 در یک مدار دو چشمه‌ای در نظر گرفته شده‌اند.

با پیروی از روش حل مدار تک حلقه‌ای، اکنون قانون ولتاژ کیرشوف را به چشمه سمت چپ اعمال می‌کنیم:

$-۴۲ + ۶ i_1 + ۳ (i_1 - i_2) = ۰$ و یا $۹ i_1 - ۳ i_2 = ۴۲$ (۷)

و سپس آن را به چشمه سمت راست اعمال می‌کنیم:

$- ۳ (i_1 - i_2) + ۴ i_2 - ۱۰ = ۰$

و یا: $-۳ i_1 + ۷ i_2 = ۱۰$ (۸)

معادلات (۷) و (۸) معادلات مستقلی[1] هستند و نمی‌توان یکی را از روی دیگری به دست آورد. اینها دو معادله و دو مجهول هستند و بسادگی می‌توان جواب آنها را به دست آورد: i_1 برابر A ۶ و i_2 برابر A ۴ و در نتیجه $(i_1 - i_2)$ برابر A ۲ می‌باشد. ولتاژ و قدرت را هم در صورت لزوم بسرعت می‌توان به دست آورد.

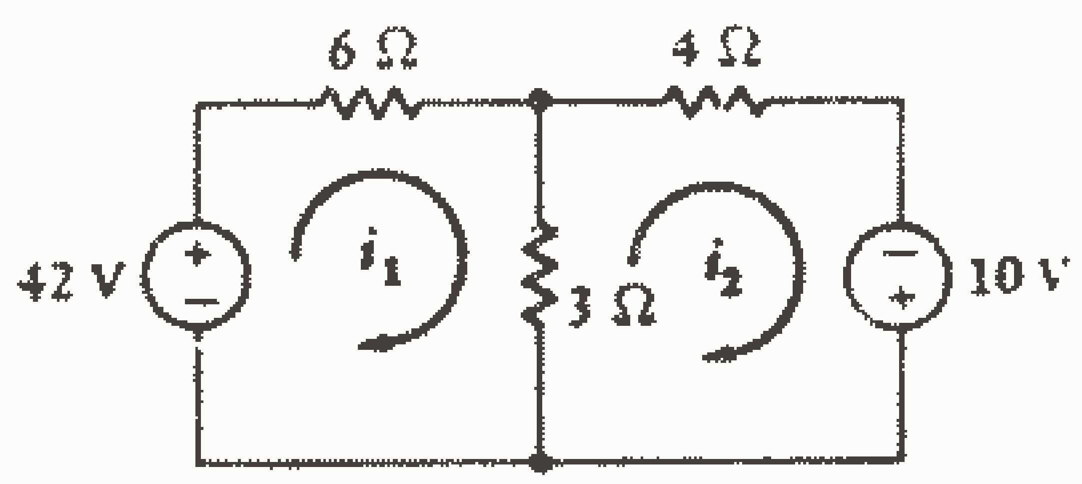
اگر مدار ما شامل M چشمه می‌بود آنگاه باید M جریان شاخه فرض می‌کردیم و M معادلهٔ مستقل می‌نوشتیم.[2] راه حل کلی را می‌توان از طریق استفاده از دترمینانها به دست آورد. حال بیایید همین مسئله را با روش کمی متفاوت با استفاده از جریانهای چشمه‌ای مورد توجه قرار دهیم. جریان چشمه‌ای را به عنوان جریانی که فقط حول محیط یک چشمه جاری است تعریف می‌کنیم. اگر چشمه سمت چپ مسئله‌مان را چشمهٔ ۱ بنامیم آنگاه می‌توانیم یک جریان چشمه‌ای i_1 را که در جهت عقربه‌های ساعت حول این چشمه جاری است در نظر بگیریم. یک جریان چشمه‌ای با یک فلش منحنی که داخل چشمهٔ مربوطه رسم می‌شود، نشان داده می‌شود که این موضوع در شکل ۱۰ ـ ۳ نمایش داده شده است.

---

۱ - در قسمت ۸-۳ نشان خواهیم داد که معادلات چشمه همیشه مستقل هستند.

۲ - اثبات این موضوع را در قسمت ۸ - ۳ می‌توان یافت.

جریان چشمه‌ای i_2 هم در حلقهٔ دیگر در جهت عقربه‌های ساعت وضع شده است. با وجود اینکه جهت دلخواه است ولی ما همیشه جریانهای چشمه‌ای را در جهت عقربه‌های ساعت انتخاب خواهیم کرد زیرا در این صورت یک تقارن خاصی که خطاها را تقلیل می‌دهد در معادلات حاصل می‌شود. ما دیگر هیچ جریان و یا فلش جریانی که به طور مستقیم در هر شاخهٔ مدار نشان داده شده باشد، نداریم. جریان هر شاخه را باید با توجه به جریانهای چشمه‌ای که در هر چشمه‌ای که آن شاخه در آن قرار دارد جاری می‌باشند، تعیین نمود. این امر مشکل نیست زیرا بدیهی است که هیچ شاخه‌ای نمی‌تواند در بیش از دو چشمه ظاهر شود. مثلاً مقاومت 3Ω در هر دو چشمه ظاهر می‌شود و جریانی که از آن پایین می‌آید برابر است با $(i_1 - i_2)$. مقاومت 6Ω فقط در چشمهٔ ۱ ظاهر می‌شود و جریانی که در آن به راست می‌رود برابر است با جریان چشمه‌ای i_1.



شکل ۱۰ ـ ۳: یک جریان چشمه‌ای در جهت عقربه‌های ساعت به هر یک از چشمه‌های یک مدار مسطح نسبت داده شده است.

یک جریان چشمه‌ای را اغلب می‌توان به عنوان یک جریان شاخه مشخص نمود مانند i_1 ، i_2 در بالا اگر چه این امر همیشه صادق نیست و برای بررسی یک شبکهٔ نه چشمه‌ای مربع به زودی خواهیم دید که جریان چشمهٔ مرکزی را نمی‌توان به صورت جریان هیچ یک از شاخه‌ها در نظر گرفت. یکی از بزرگترین مزیتهای استفاده از جریانهای چشمه‌ای این واقعیت است که قانون جریان کیرشوف خودبخود اقناع می‌شود. اگر یک جریان چشمه‌ای به داخل یک گره جاری شود، بدیهی است که از آن خارج هم خواهد شد.

بنابراین توجه خود را به اعمال KVL به هر چشمه معطوف می‌کنیم. برای چشمهٔ سمت چپ داریم:

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

و برای چشمهٔ سمت راست داریم: $$3(i_2 - i_1) + 4i_2 - 10 = 0$$

و این دو معادله با معادلات (۷) و (۸) معادل می‌باشند.

حال بیایید مدار پنج گرهی، هفت شاخه‌ای و سه چشمه‌ای شکل ۱۱ - ۳ را در نظر بگیریم. سه جریان چشمه‌ای لازم به طوریکه نشان داده شده، مشخص شده‌اند و ما طبق روش، KVL را در هر چشمه به کار می‌بریم:

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 6 + 2(i_1 - i_3) = 0$$
$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$
$$2(i_3 - i_1) - 6 + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

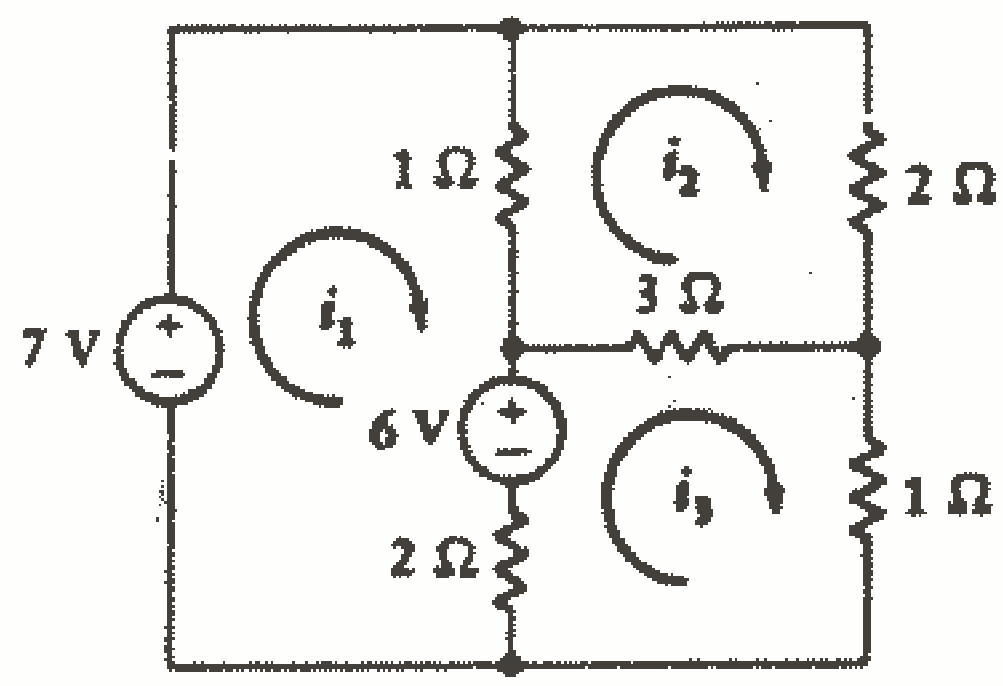
پس از ساده کردن داریم:

$$3i_1 - i_2 - 2i_3 = 1$$
$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0$$
$$-2i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 6$$

و با استفاده از دستور کرامر برای i_3 داریم:

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 0 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{117}{39} = 3 \quad \text{A}$$

سایر جریانهای چشمه‌ای عبارتند از: $i_1 = 3$ A ، $i_2 = 2$ A



شکل ۱۱ ـ ۳: جریانهای چشمه‌ای i_1 و i_2 و i_3 در یک مدار پنج گرهی، هفت شاخه‌ای و سه چشمه‌ای فرض شده‌اند.

دوباره ملاحظه می‌کنیم که ما یک دترمینان مخرج داریم که نسبت به قطر اصلی‌اش متقارن است و عضوهای قطر اصلی مثبت بوده و سایر عضوها صفر و یا منفی می‌باشند. این امر برای

مدارهایی صادق است که فقط شامل منابع ولتاژ مستقل هستند و جریانهای چشمه‌ای در جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته شده‌اند و عناصر سطر اول دترمینان ضرایب مرتب i_1 ، i_2 ،...، i_M در معادلات KVL در چشمه اول و عناصر سطر دوم متناظر با چشمه دوم و الی آخر می‌باشند.

این رشتهٔ متقارن که در مخرج ظاهر می‌شود دترمینان ماتریس مقاومت شبکه می‌باشد.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

حال چگونه باید این روند سر راست را وقتیکه یک منبع جریان در شبکه موجود است، اصلاح کنیم؟ با الهام از تحلیل گره (و تناظر) احساس می‌کنیم که دو روش ممکن وجود دارد. یکی اینکه می‌توانیم ولتاژ مجهولی را در دو سر منبع جریان در نظر بگیریم و مانند قبل KVL را در هر چشمه اعمال کنیم و سپس جریان منبع را به جریانهای چشمه‌ای مشخص شده، مربوط سازیم. این روش عموماً مشکلتر می‌باشد.

تکنیک بهتر روشی است که کاملاً مشابه روشن فوق نقطه در تحلیل گرهی می‌باشد. در آنجا ما فوق نقطه تشکیل دادیم و با محصور کردن کامل منبع ولتاژ در داخل فوق نقطه تعداد گره‌ها را به ازای هر منبع ولتاژ یک عدد کاهش دادیم. اکنون ما نوعی «فوق چشمه» را با استفاده از دو چشمه‌ای که دارای یک منبع جریان مشترک می‌باشند تشکیل می‌دهیم به طوریکه منبع جریان در داخل فوق چشمه قرار می‌گیرد. بنابراین تعداد چشمه‌ها را به ازای هر منبع جریان موجود یک عدد کاهش می‌دهیم. اگر منبع جریان در محیط مدار باشد آنگاه چشمه‌ای که منبع جریان در آن است حذف می‌شود.[۱]

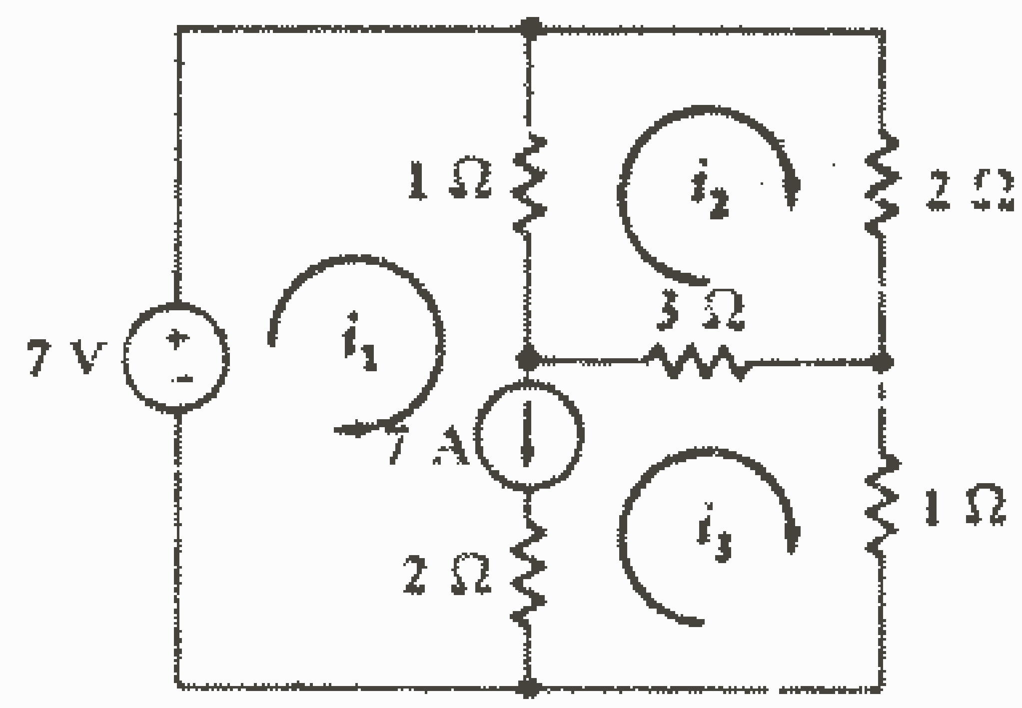
به عنوان یک مثال برای این روش، شبکهٔ شکل ۱۲ - ۳ را که در آن یک منبع جریان مستقل ۷A در مرز مشترک دو چشمه قرار دارد، در نظر می‌گیریم. جریانهای چشمه‌ای i_1، i_2، i_3 مشخص شده‌اند و منبع جریان ما را وادار می‌سازد که یک فوق چشمه شامل چشمه‌های ۱ و ۳ ایجاد کنیم. با اعمال KVL در این حلقه داریم:

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

و یا $$i_1 - 4i_2 + 4i_3 = 7 \qquad (۹)$$

---

۱ - چنین منبع جریانی عنصر مشترکی است در چشمه‌ای که خارج کل مدار را احاطه می کند. درست همانگونه که برای گره مبنا معادلهٔ گرهی نمی‌نویسیم، برای این چشمهٔ خارجی هم معادلهٔ KVL را نمی‌نویسیم.



شکل ۱۲ ـ ۳: تحلیل چشمه‌ای را به این مدار شامل یک منبع جریان به وسیله نوشتن KVL در حلقهٔ ۷ V و 1 Ω و 3 Ω و 1 Ω به کار برده‌ایم.

و در چشمهٔ ۲ داریم:

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

و یا

$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0 \qquad (۱۰)$$

و سرانجام منبع جریان را به جریانهای چشمه‌ای فرض شده نسبت می‌دهیم:

$$i_1 - i_3 = 7 \qquad (۱۱)$$

با حل معادلات (۹) تا (۱۱) داریم:

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{28}{14} = 2 \quad \text{A}$$

همچنین می‌توانیم به دست آوریم: $i_1 = 9$ A ، $i_2 = 2.5$ A

وجود یک یا چند منبع وابسته فقط لازم می‌دارد که مقدار هر یک از این منابع و متغییری که آنها را کنترل می‌کند را بر حسب جریانهای چشمه‌ای فرض شـده، بیان کنیم. مثلاً در شکل ۱۳ ـ ۳ توجه می‌کنیم که هم یک منبع جریان مستقل و هم یک منبع جریان وابسته در مدار موجود می‌باشد. سه جریان چشمه‌ای مشخص شده‌اند و KVL به چشمه ۲ اعمال شده است:

$$۱\ (i_۲ - i_۱) + ۲\ i_۲ + ۳\ (i_۲ - i_۳) = ۰$$

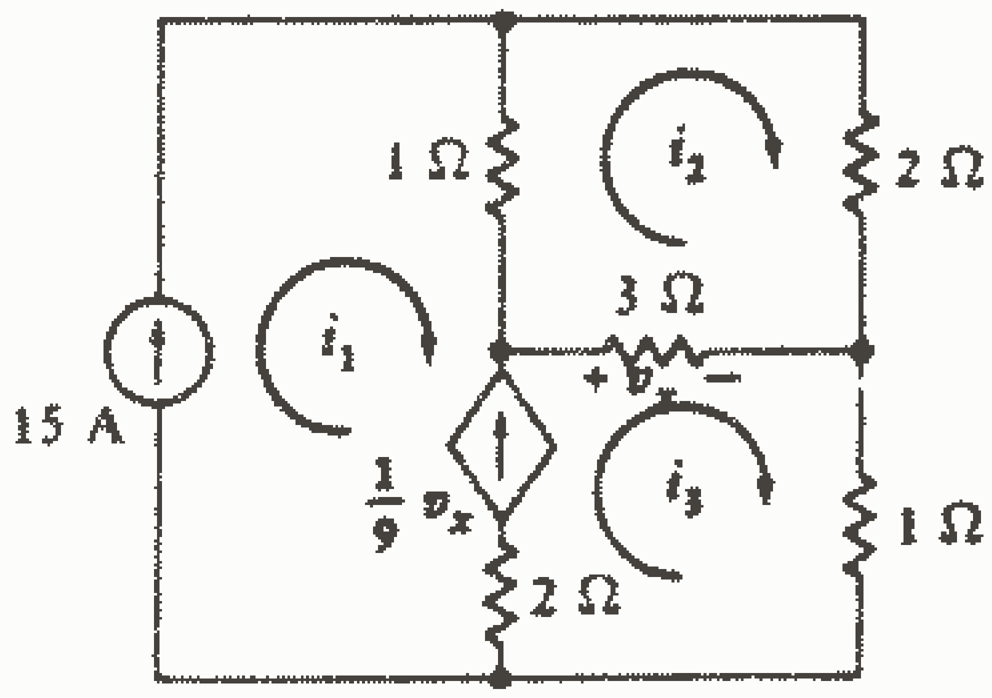
$$i_۱ = ۱۵\ ,\ \frac{۱}{۹} v_x = i_۳ - i_۱ = \frac{۱}{۹} [۳\ (i_۳ - i_۲)] \rightarrow -i_۱ + ۶\ i_۲ - ۳\ i_۳ = ۰$$

$$i_۱ = ۱۵$$

$$- i_۱ + \frac{۱}{۳} i_۲ + \frac{۲}{۳} i_۳ = ۰$$

که از معادلات بالا داریم:

$$i_3 = 17A \; , \; i_2 = 11 \; , \; i_1 = 15$$



شکل ۱۳ ـ ۳: وجود دو منبع جریان در این مدار سه چشمه‌ای لازم می‌دارد که KVL را فقط یک بار در چشمه ۲ به کار بریم.

لازم به ذکر است که ما کمی وقت خود را در تعیین جریان چشمه‌ای i_1 در چشمه چپ تلف نمودیم و باید بطور ساده یک جریان چشمه‌ای با مقدار A ۱۵ را برای آن در نظر می‌گرفتیم.

حال اجازه دهید روشی را که به وسیله آن معادلات چشمه‌ای را برای یک مدار مقاومتی به دست می آوریم به صورت زیر خلاصه کنیم:

۱ - اطمینان حاصل کنید که شبکه یک شبکهٔ مسطح باشد. اگر غیرمسطح باشد نمی‌توان از تحلیل چشمه‌ای استفاده نمود.

۲ - یک مدار ساده و تمیز و مرتب رسم کنید. تمام مقادیر منابع و عناصر را مشخص کنید. مقادیر مقاومتی بر مقادیر هدایتی ترجیح داده می‌شوند. هر منبع باید دارای علائم مبنای خود باشد.

۳ - با فرض اینکه مدار دارای M چشمه باشد، در هر چشمه جریانهای چشمه‌ای در جهت عقربه‌های ساعت $i_1, i_2, \ldots, i_M$ در نظر بگیرید.

٤ - اگر مدار فقط شامل منابع ولتاژ باشد، قانون ولتاژ کیرشوف را در هر چشمه اعمال کنید. برای بدست آوردن ماتریس مقاومت اگر مداری فقط شامل منابع ولتاژ مستقل باشد، مجموع همه ولتاژهای مقاومتی در جهت عقربه‌های ساعت را مساوی با مجموع همهٔ ولتاژهای منابع ولتاژ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت قرار دهید و جملات را از i_1 تا i_M مرتب کنید. برای هر منبع ولتاژ مربوط کنید، البته اگر قبلاً اینکار انجام نشده باشد.

۵ - اگر مدار حاوی منابع جریان باشد برای هر منبع جریانی که در دو چشمه مشترک باشد یک فوق چشمه ایجاد کنید و قانون KVL را در حلقه‌ای که از عناصر غیرمشترک دو چشمه تشکیل شده است اعمال کنید. KVL را لازم نیست به چشمه‌ای که حاوی یک منبع جریان در محیط مدار باشد، اعمال کنید جریانهای چشمه‌ای تعیین شده نباید تغییر داده شوند. حال هر جریان منبع را به متغییرهای i_1، i_2، ...، i_M، مربوط کنید، البته اگر قبلاً اینکار انجام نشده باشد.

تمرین

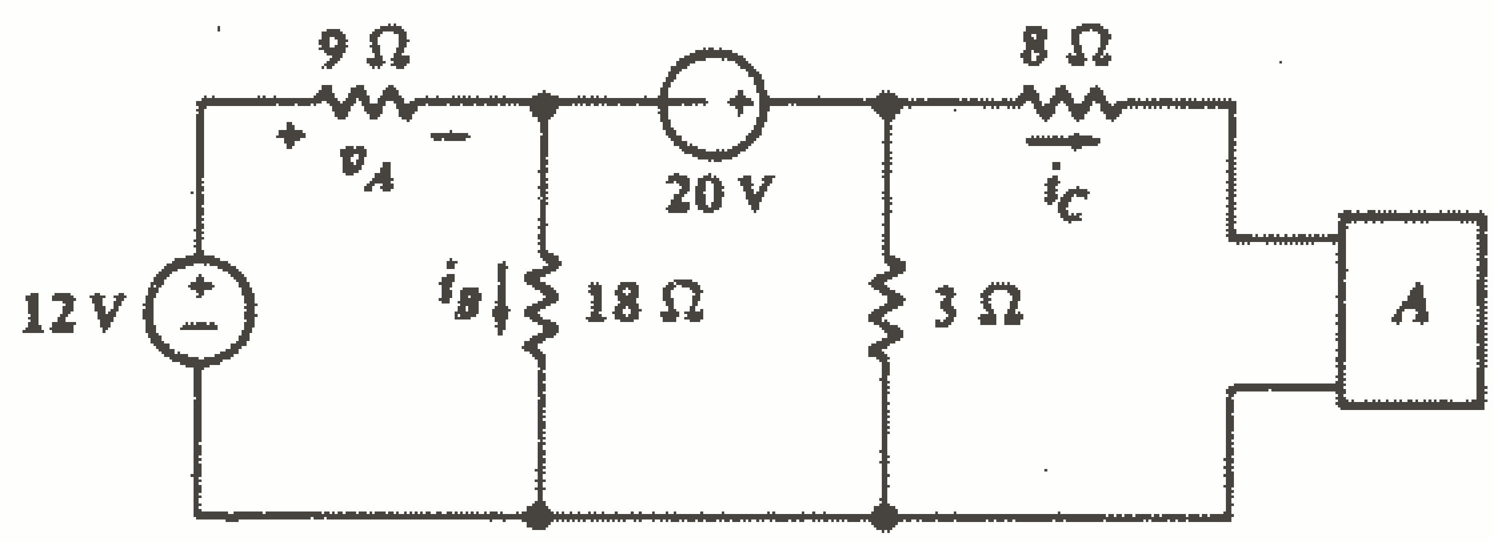
۳ - ۳ - با استفاده از تحلیل چشمه v_A را در مدار شکل ۱۴ - ۳ پیدا کنید، اگر عنصر A:

(a) یک منبع ولتاژ ٤ V با علامت مثبت در بالا باشد.

(b) یک مقاومت ۹Ω باشد.

(c) یک منبع جریان ٦۰۰ mA با فلش رو به پایین باشد.

جواب: ۲۳٫۹، ۲۳٫٦، ۲۳٫۷ V



شکل ١٤ - ۳: به تمرینات ۳ - ۳ و ٤ - ۳ مراجعه کنید.

٤ - ۳ - با استفاده از تحلیل چشمه i_c را در شکل ١٤ - ۳ پیدا کنید، اگر عنصر A:

(a) یک منبع ولتاژ وابسته، $0{,}2\,v_A$، با علامت مثبت در بالا باشد.

(b) یک منبع جریان وابسته، $0{,}5\,i_B$، با فلش رو به پایین باشد.

جواب: ۰٫۲۸۱-، ۰٫٤٦۲ A

۴ - ۳ - خطی بودن و جمع اثرها

تمام مدارهایی را که تاکنون تحلیل کرده‌ایم (و بعداً تحلیل خواهیم کرد) مدارهای خطی هستند. حال باید به طور دقیقتر یک مدار خطی را تعریف کنیم. با انجام اینکار سپس می‌توانیم مهمترین پی‌آمد خطی بودن یعنی اصل جمع اثرها را مورد توجه قرار دهیم. این اصل بسیار اساسی و بنیادی می‌باشد و به طور مکرر در مطالعهٔ تحلیل مدارهای خطی تکرار خواهد شد.

در واقع مشکل بودن تحلیل مدارهای غیرخطی به دلیل این است که نمی‌توان از اصل جمع اثرها برای تحلیل آنها استفاده نمود.

اصل جمع اثرها بیان می‌دارد که پاسخ (یک جریان و یا ولتاژ مطلوب) هر نقطهٔ یک مدار خطی که دارای بیش از یک منبع مستقل باشد برابر است با مجموع پاسخهای ناشی از هر یک از آن منابع به طور جداگانه. دربحثی که‌درپی‌می آید، مفهوم «خطی» و «به تنهایی فعال بودن» را مورد بررسی قرار خواهیم داد. همچنین اشاره‌ای هم به فرم کمی وسیعتر قضیه خواهیم داشت. اجازه دهید ابتدا یک عنصر خطی را به عنوان عنصر غیرفعالی که دارای رابطهٔ ولتاژ ـ جریان خطی می‌باشد تعریف کنیم. منظور ما از «رابطهٔ ولتاژ ـ جریان خطی» به طور ساده این است که حاصلضرب جریان متغیر با زمان آن عنصر در مقدار ثابت K، حاصلضرب ولتاژ متغیر با زمان آن عنصر در مقدار ثابت K را به دنبال داشته باشد. فعلاً فقط یک عنصر غیرفعال یعنی مقاومت تعریف شده است و رابطهٔ ولتاژ ـ جریان آن، $v(t) = Ri(t)$، هم بدیهی است که خطی می‌باشد. در واقع اگر $v(t)$ به صورت تابعی از $i(t)$ رسم شود، حاصل یک خط راست می‌باشد در فصل ٤ خواهیم دید که معادلات تعریف‌کنندهٔ ولتاژ ـ جریان برای خود القایی و خازن هم خطی می‌باشد و در فصل ۱۵ هم خواهیم دید که معادلهٔ تعریف‌کنندهٔ القاء متقابل هم خطی می‌باشد.

ما همچنین باید یک منبع وابسته خطی را به عنوان یک منبع جریان یا ولتاژ وابسته‌ای که جریان یا ولتاژ خروجی آن فقط متناسب با توان اول متغییر جریان یا ولتاژ و یا مجموع این کمیتها باشد، تعریف کنیم.

یعنی یک منبع ولتاژ وابسته $v_s = 0.6\, i_1 - 14 v_2$ خطی ولی

$$v_s = 0.6 i_1^2 \,, \quad v_s = 0.6\, i_1 v_2$$

غیر خطی می‌باشند.

حال می‌توانیم یک مدار خطی را به عنوان مداری که تماماً از منابع مستقل، منابع وابسته خطی و عناصر خطی تشکیل یافته است تعریف کنیم. از این تعریف می‌توان نشان داد که «پاسخ

متناسب است با منبع» و یا اینکه حاصلضرب همهٔ جریانها و ولتاژهای منابع مستقل در ضریب ثابت K همهٔ پاسخهای جریان و ولتاژ را (از قبیل خروجی جریان و ولتاژ منابع وابسته) به اندازهٔ همان ضریب K افزایش می‌دهد.

مهمترین نتیجهٔ خطی بودن، جمع اثرها می‌باشد. بیایید اصل جمع اثرها را با بررسی مدار شکل ۱۵ - ۳ که حاوی دو منبع جریان مستقل i_a ، i_b می‌باشد، باز کنیم. این منابع را اغلب «تابع تحریک» و ولتاژهایی را که آنها بین گره ۱ و ۲ و گره مبنا ایجاد می‌کنند «تابع پاسخ» و یا به اختصار «پاسخ» می‌نامند. هم توابع تحریک و هم پاسخها می‌توانند تابعی از زمان باشند.

دو معادلهٔ گرهی این مدار عبارتند از:

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = i_a \qquad (۱۲)$$

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = i_b \qquad (۱۳)$$

حال اجازه دهید آزمایش X را انجام دهیم. دو تابع تحریک را با i_{ax} ، i_{bx} تعویض می‌کنیم و حال دو ولتاژ مجهول چیز دیگری خواهند بود که ما آنها را v_{1x} ، v_{2x} می‌نامیم، بنابراین داریم:

$$0.7v_{1x} - 0.2v_{2x} = i_{ax} \qquad (۱٤)$$

$$-0.2v_{1x} + 1.2v_{2x} = i_{bx} \qquad (۱۵)$$

سپس آزمایش y را با تعویض منابع جریان به وسیله i_{ay} ، i_{by} و در نظر گرفتن پاسخها به صورت v_{1y} ، v_{2y} انجام می‌دهیم:

$$0.7v_{1y} - 0.2v_{2y} = i_{ay} \qquad (۱٦)$$

$$-0.2v_{1y} + 1.2v_{2y} = i_{by} \qquad (۱۷)$$

این سه دسته معادله مدار یکسانی را با منابع جریان مختلف توصیف می‌کنند. حال بیایید دو دسته معادلهٔ آخر را با هم جمع و یا «رویهم نهی» کنیم. (کلمهٔ Superpose به معنی رویهم نهی یا بر هم نهی می‌باشد که بیشتر یک اصطلاح هندسی است و از نظر گرامری اسم معنی آن می‌شود Superposition که در برخی متون فارسی به نام اصل بر هم نهی هم ترجمه شده است. مترجم). با جمع کردن معادلات (۱٤) و (۱٦) داریم:

$$(0.7v_{1x} + 0.7v_{1y}) - (0.2v_{2x} + 0.2v_{2y}) = i_{ax} + i_{ay} \qquad (۱۸)$$

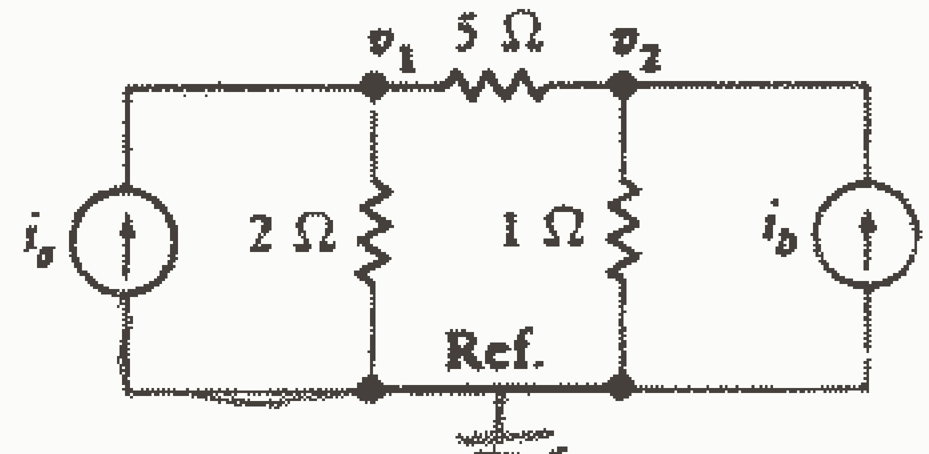
$$0.7v_1 \quad - \quad 0.2v_2 \quad = \quad i_a \qquad (۱۲)$$

و با جمع کردن (۱۵) و (۱۷) خواهیم داشت.

$$-(0.2v_{1x} + 0.2v_{1y}) + (1.2v_{2x} + 1.2v_{2y}) = i_{bx} + i_{by} \qquad (۱۹)$$

$$-0.2v_1 \quad + \quad 1.2v_2 \quad = \quad i_b \qquad (۱۳)$$

که به منظور مقایسهٔ راحتتر معادلهٔ (۱۲) بلافاصله زیر (۱۸) و معادلهٔ (۱۳) زیر (۱۹) نوشته شده است.



شکل ۱۵ ـ ۳: یک مدار سه گرهی شامل دو تابع تحریک، که برای توضیح اصل جمع اثرها به کار رفته است.

خطی بودن همهٔ این معادلات به ما اجازه می‌دهد که معادلهٔ (۱۸) را با (۱۲) و (۱۹) را با (۱۳) مقایسه کنیم و نتیجهٔ جالبی بگیریم. اگر ما i_{ax} ، i_{ay} را به گونه‌ای انتخاب کنیم که مجموع آنها i_a شود و i_{bx} ، i_{by} را به گونه‌ای انتخاب کنیم که جمع آنها i_b شود، آنگاه جوابهای مطلوب v_1 ، v_2 را می‌توان با «جمع کردن» v_{1x} با v_{1y} ، v_{2x} با v_{2y} به دست آورد. به عبارت دیگر ما می‌توانیم آزمایش X و آزمایش Y را انجام دهیم و نتیجه را یادداشت کنیم و سرانجام پاسخها را با هم جمع کنیم. اینها پاسخ مدار اصلی به منابع مستقلی خواهند بود که مجموع منابع مستقل به کار رفته در آزمایشهای X، Y هستند. این است مفهوم اساسی موجود در اصل جمع اثرها.

بدیهی است که ما می‌توانیم این نتایج را با تجزیه کردن هر منبع جریان به اجزاء زیادی، هر تعداد که بخواهیم، تعمیم دهیم و دلیلی وجود ندارد که نتوانیم آزمایشهای q،z را انجام دهیم. فقط لازم است که مجموع جبری اجزاء مساوی با جریان اولیه باشد. «قضیه جمع اثرها» معمولاً به صورت زیر بیان می‌شود:

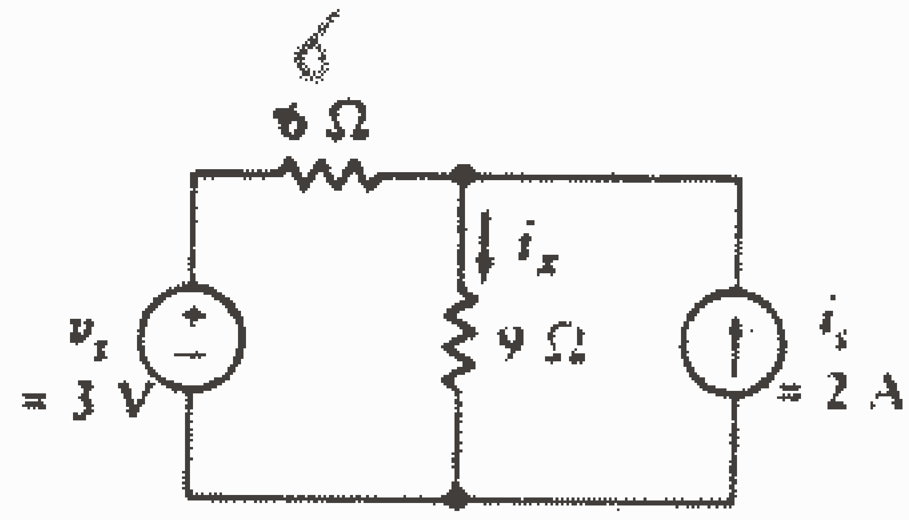
در هر مدار خطی مقاومتی شامل چندین منبع، ولتاژ و جریان هر مقاومت یا منبع را می‌توان با جمع جبری نمودن ولتاژها و جریانهای منفردی که در اثر هر یک از منابع به طور جداگانه حاصل می‌شود، به دست آورد.

بنابراین اگر N منبع مستقل وجود داشته باشد، باید N آزمایش انجام دهیم. هر منبع مستقل فقط در یک آزمایش فعال می‌باشد. یک منبع ولتاژ مستقل غیرفعال برابر است با یک اتصال کوتاه و یک منبع جریان مستقل غیرفعال معادل با یک مدار باز می‌باشد. توجه داشته باشید

که منابع «وابسته» در هر آزمایش فعال می‌باشند.

اگر چه، مداری که به عنوان مثال در بالا به کار رفته است نشان می‌دهد که قضیه را به صورت خیلی قویتر هم می‌توان بیان نمود یعنی اگر بخواهیم می‌توانیم گروهی از منابع مستقل را به طور دسته جمعی فعال و غیرفعال کنیم. مثلاً فرض کنید سه منبع مستقل موجود باشد، قضیه فوق بیان می‌دارد که ما می‌توانیم پاسخ را یا با فعال در نظر گرفتن یکی از منابع در هر دفعه و سپس جمع نمودن سه پاسخ به دست آوریم و یا به طریق دیگر یک بار جواب ناشی از منابع ۱ و ۲ فعال در مدار و بار دیگر جواب ناشی از منبع ۳ فعال در مدار را پیدا کنیم و دو پاسخ را با هم جمع کنیم. همچنین دلیلی وجود ندارد که یک منبع مستقل فقط باید مقدار اصلی خودش و صفر را در آزمایشات مختلف قبول کند، بلکه فقط لازم است که مجموع مقادیر مختلفی که می‌گیرد با مقدار اصلی‌اش مساوی باشد. اگر چه، تقریباً همیشه یک منبع غیرفعال را با ساده‌ترین مدار آن نمایش می‌دهند.

حال بیایید کاربرد اصل جمع اثرها را با بررسی مثالی که حاوی هر دو نوع منبع مستقل می‌باشد، توضیح دهیم.



شکل ۱۶ ـ ۳: مداری که شامل منبع ولتاژ و منبع جریان مستقل است و به سادگی با اصل جمع اثرها تحلیل می‌شود.

برای مدار شکل ۱۶ - ۳ بیایید از اصل جمع اثرها برای به دست آوردن جریان شاخه‌ای مجهول i_x استفاده کنیم. ابتدا می‌توانیم منبع جریان را مساوی صفر قرار دهیم و جزء i_x ناشی از منبع ولتاژ را برابر با ۰٫۲ A به دست آوریم. سپس اگر منبع ولتاژ را مساوی صفر قرار دهیم و از قانون تقسیم جریان استفاده کنیم ملاحظه می‌کنیم که جزء دیگر i_x برابر ۰٫۸ A می‌شود. جواب را به طور مفصل و با ذکر جزئیات به صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$i_x = i_x|_{i_s=0} + i_x|_{v_s=0} = \frac{3}{6+9} + 2\,\frac{6}{6+9} = 0.2 + 0.8 = 1.0 \quad \text{A}$$

به عنوان مثالی از کاربرد اصل جمع اثرها در مداری حاوی یک منبع وابسته، شکل ۱۷-۳ را مورد توجه قرار می‌دهیم. ما در جستجوی i_x هستیم و ابتدا منبع A ۳ را مدار باز می‌کنیم. معادلات چشمه برای تک چشمهٔ باقیمانده در مدار عبارت است از:

$$-10 + 2i'_x + 1i'_x + 2i'_x = 0 \quad \rightarrow \quad i'_x = 2$$

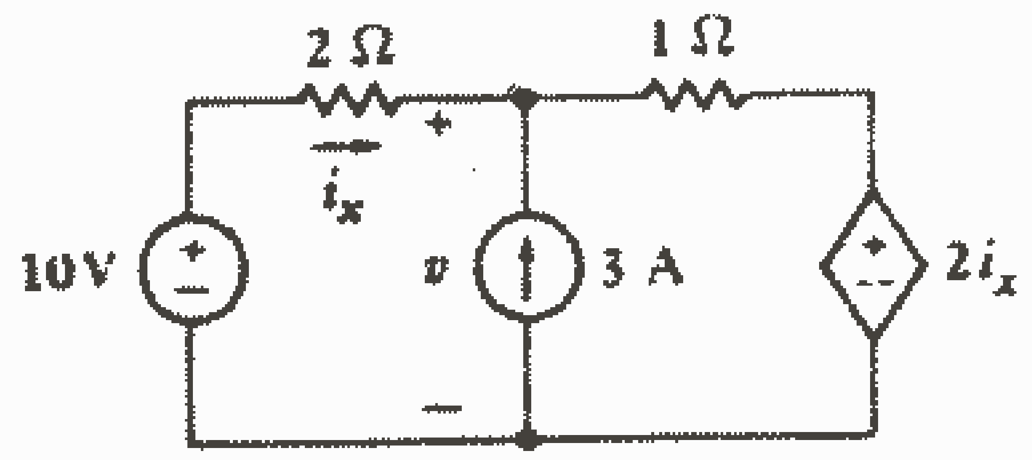
سپس منبع V ۱۰ را اتصال کوتاه می‌کنیم و معادلهٔ گره را می‌نویسیم:

$$\frac{v''}{2} + \frac{v'' - 2i''_x}{1} = 3$$

حال کمیت کنترل‌کنندهٔ منبع وابسته را به v'' مربوط می‌کنیم:

$$v'' = -2i''_x$$

خواهیم داشت: $i''_x = -0.6$ و در نتیجه: $i_x = i'_x + i''_x = 2 - 0.6 = 1.4$



شکل ۱۷ ـ ۳: از اصل جمع اثرها برای تحلیل این مدار به این صورت که ابتدا منبع A ۳ را با یک مدار باز و سپس منبع V ۱۰ را با یک اتصال کوتاه جایگزین می‌کنیم، استفاده می‌شود. منبع ولتاژ وابسته همیشه فعال است (مگر اینکه $i_x = 0$).

معمولاً چنین بر می‌آید که اگر به هنگام تحلیل یک مدار حاوی یک یا چند منبع وابسته با استفاده از اصل جمع اثرها بخواهیم در وقت صرفه‌جویی شود، همیشه باید حداقل دو منبع فعال باشند: یک منبع مستقل و تمام منابع وابسته.

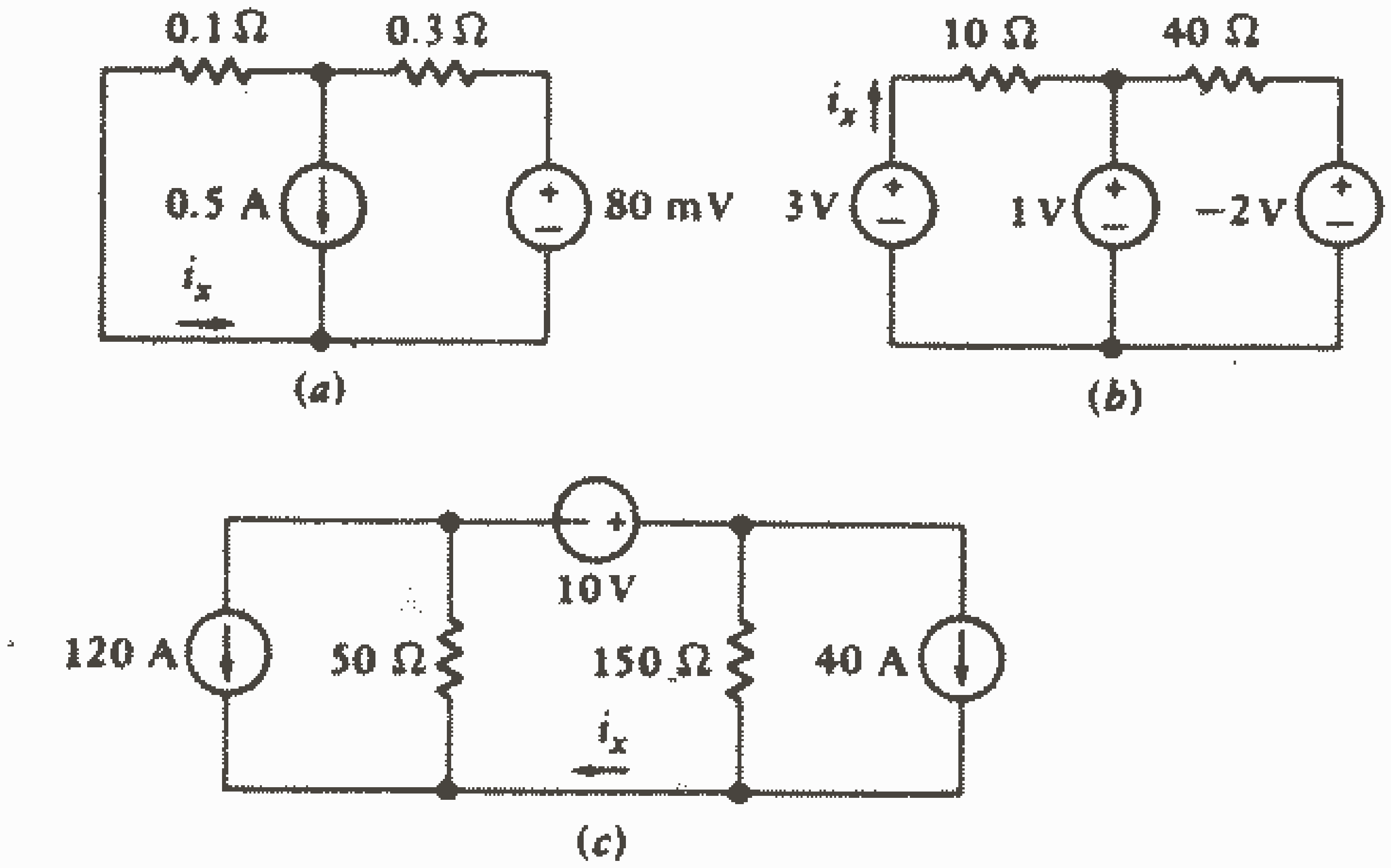
ما باید همیشه از محدودیتهای اصل جمع اثرها آگاه باشیم. این اصل را فقط برای پاسخهای خطی می‌توانیم به کار بریم، بنابراین رایجترین پاسخ غیرخطی یعنی قدرت را نمی‌توان به وسیله اصل جمع آثار به دست آورد. مثلاً دو باتری یک ولتی را به طور سری با یک مقاومت در نظر بگیرید. واضح است که قدرت تحویل داده شده به مقاومت برابر W ٤ است، اما اگر به اشتباه از

اصل جمع اثرها استفاده کنیم ممکن است بگوییم که هر باتری قدرت W ۱ را تحویل می‌دهد پس قدرت کل می‌شود W ۲، که غلط می‌باشد.

تمرین

۵ - ۳ - با استفاده از اصل جمع اثرها i_x را در هر یک از مدارهای شکل ۱۸ - ۳ پیدا کنید.

جواب: ۵۰ , ۲۰۰, −۱۷۵ mA



شکل ۱۸ - ۳: به تمرین ۵ - ۳ مراجعه کنید.

۵ - ۳ تبدیل منابع

در تمام کارهای قبلی‌مان تا به حال به طور مدام از منابع ولتاژ و جریان ایده‌آل استفاده کرده‌ایم، حال وقت آن رسیده است که با در نظر گرفتن منابع عملی یک قدم به واقعیت نزدیکتر شویم. این منابع ما را قادر می‌سازند که نمایش واقعی‌تری از وسایل فیزیکی داشته باشیم. با تعریف نمودن منابع عملی ما سپس روشهایی را که به وسیله آنها منابع ولتاژ و جریان عملی را می‌توان بدون اینکه اثری در بقیه مدار داشته باشند تعویض نمود، مطالعه خواهیم کرد. چنین منابعی را منابع معادل خواهیم نامید. روشهای ما هم برای منابع مستقل و هم برای منابع وابسته قابل استفاده می‌باشند، اگر چه خواهیم دید که برای منابع وابسته چندان مفید نیستند.

منبع ولتاژ ایده‌آل به عنوان وسیله‌ای که ولتاژ ترمینالش مستقل از جریان عبوری از آن می‌باشد تعریف شد. یک منبع dc V ۱ جریان A ۱ در مقاومت Ω ۱ و جریان A۱۰۰۰۰۰۰

در مقاومت $1\mu\ \Omega$ تولید می‌کند و می‌تواند قدرت بی‌نهایت تحویل دهد.

البته چنین منبعی به طور عملی وجود ندارد و ما توافق کردیم که یک منبع ولتاژ واقعی را بتوان به وسیله یک منبع ولتاژ ایده‌آل فقط در مواقعی که جریان و قدرت کم از آن کشیده شود، نمایش داد.

مثلاً یک باتری اتومبیل رامی‌توان به طور تقریب یک منبع ولتاژ ایده‌آل دانست البته اگر جریان آن از چند آمپر تجاوز نکند.

هر کسی که تا به حال سعی کرده باشد یک اتومبیل را در حالیکه چراغهای جلوی آن روشن است استارت بزند، ملاحظه کرده است که چراغها هنگامی که از باتری می‌خواهیم جریان زیاد استارتر، ۱۰۰ A یا بیشتر به علاوهٔ جریان چراغها را تأمین نماید به طور محسوسی خاموش می‌شوند. تحت این شرایط به سختی می‌توان باتری را یک منبع ولتاژ ایده‌آل دانست. منبع ولتاژ ایده‌آل را با در نظر گرفتن اینکه در جریانهای زیاد ولتاژ ترمینالی آن کاهش می‌یابد، می‌توان اصلاح نمود. بیایید فرض کنیم که به طور تجربی مشاهده کرده‌ایم که ولتاژ ترمینالی یک باتری وقتیکه جریان صفر باشد ۱۲ V و وقتیکه جریان ۱۰۰ A از آن کشیده می‌شود ۱۱ V می‌باشد. بنابراین یک مدل دقیقتر می‌تواند یک منبع ولتاژ ایده‌آل ۱۲ V به طور سری با مقاومتی باشد که در جریان ۱۰۰ A در دو سر آن ۱ V ظاهر شود. این مقاومت ۱ % Ω می‌باشد و این مقاومت همراه با منبع ولتاژ ایده‌آل تشکیل یک منبع ولتاژ عملی را می‌دهند بنابراین ما از ترکیب سری دو عنصر مداری ایده‌آل، یک منبع ولتاژ مستقل و یک مقاومت، برای مدل نمودن یک وسیله واقعی استفاده می‌کنیم.

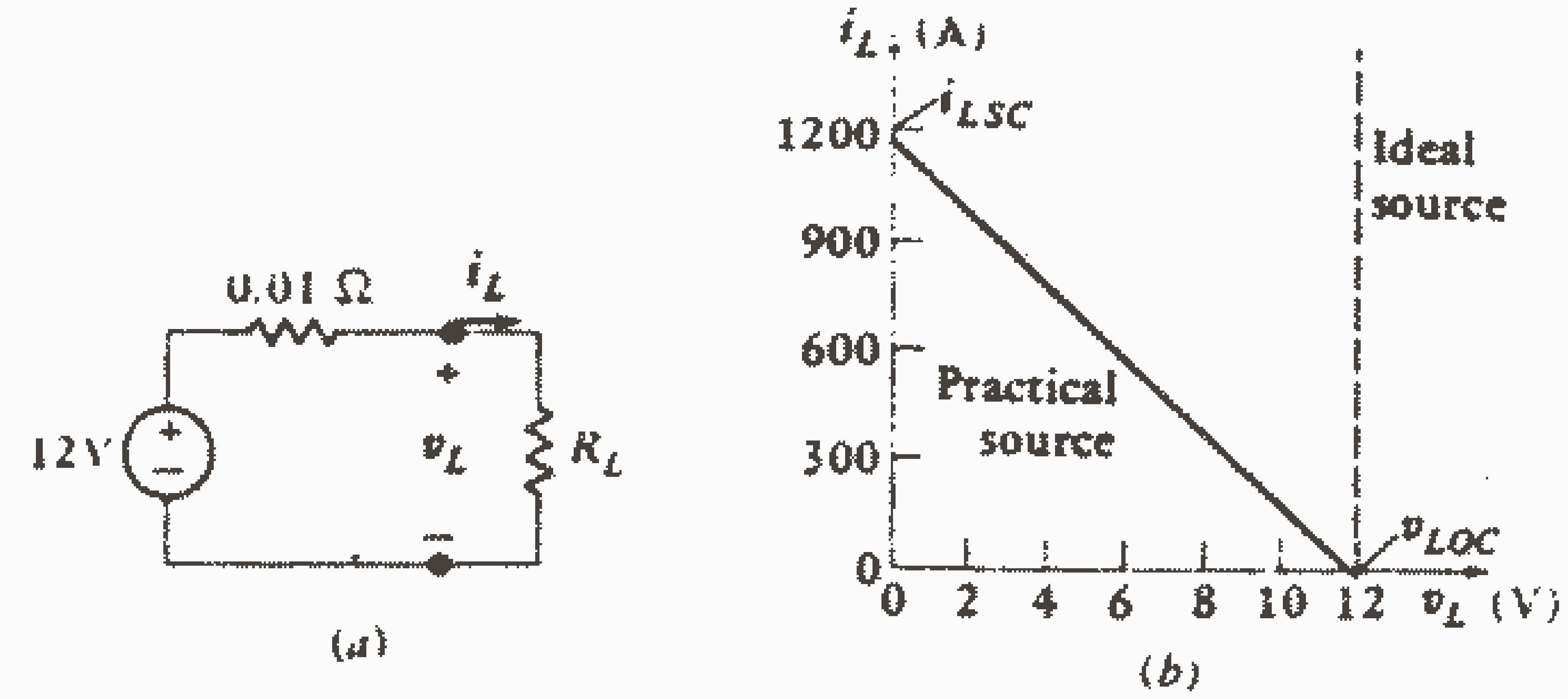
البته نباید انتظار داشته باشیم که چنین ترکیبی از عناصر ایده‌آل در داخل باتری ما موجود باشد. هر وسیله واقعی به وسیله رابطهٔ ولتاژ ـ جریان معینی در ترمینالهایش مشخص می‌شود و مسئله ما پیدا کردن ترکیبی از عناصر ایده‌آل می‌باشد که بتواند یک مشخصهٔ ولتاژ ـ جریان مشابهی را، حداقل در محدودهٔ مفیدی از جریان، ولتاژ و قدرت، ارائه کند.

این منبع ولتاژ عملی خاص که به یک مقاومت بار عمومی R_L وصل شده است، در شکل ۳-۱۹a نشان داده شده است. ولتاژ دو سر منبع عملی همان ولتاژ دو سر R_L است که با v_L نشان داده شده است.

شکل ۳ - ۱۹ b نمودار جریان بار i_L را نسبت به ولتاژ بار v_L برای منبع فوق‌الذکر نشان می‌دهد. معادلهٔ KVL را برای مدار شکل ۳ - ۱۹ a می‌توان بر حسب i_L ، v_L نوشت:

$$12 = 0.01 i_L + v_L \quad \longrightarrow \quad i_L = 1200 - 100 v_L$$

این یک معادلهٔ خطی بر حسب i_L ، v_L است و نمودار شکل b ۱۹ - ۳ یک خط راست می‌باشد هر نقطهٔ روی خط متناظر است با یک مقدار متفاوتی از R_L. مثلاً نقطه وسط خط راست وقتی به دست می آید که مقاومت بار مساوی با مقاومت داخلی منبع واقعی یعنی R_L=%۱Ω شود. در اینجا ولتاژ بار فقط یک دوم ولتاژ منبع ایده آل است.



شکل ۱۹ ـ ۳: (a) یک منبع عملی که رفتار یک باتری ۱۲ V را تقریب می‌کند در حالی که به یک بار R_L وصل شده است نشان داده شده است. (b) رابطهٔ بین i_L و v_L خطی می‌باشد.

وقتیکه $R_L = \infty$ و هیچ جریانی به وسیله بار کشیده نمی‌شود، در این صورت منبع عملی مدار باز است و ولتاژ ترمینال آن و یا ولتاژ مدار باز عبارت است از v_{Loc} = ۱۲ V .

اگر از طرف دیگر $R_L = 0$ و بدینوسیله ترمینالهای بار اتصال کوتاه شود آنگاه یک جریان بار یا جریان اتصال کوتاه i_{Lsc} = ۱۲۰۰ A عبور خواهد کرد. در عمل چنین تجربه‌ای احتمالاً منجر به نابودی اتصال کوتاه، باتری و هر وسیله اندازه‌گیری موجود در مدار خواهد شد. از آنجاییکه نمودار i_L نسبت به v_L یک خط مستقیم است باید تذکر دهیم که مقادیر v_{Loc} ، i_{Lsc} به طور یکتا کل منحنی i_L-v_L را مشخص می‌سازند.

خط چین عمودی نشاندهندهٔ نمودار i_L-v_L برای یک منبع ولتاژ ایده آل می‌باشد که ولتاژ ترمینال برای هر مقدار جریان بار ثابت می‌ماند. برای منبع ولتاژ عملی، ولتاژ ترمینال فقط وقتیکه جریان بار نسبتاً کوچک باشد مقداری نزدیک به منبع ایده آل دارد.

حال بیایید یک منبع ولتاژ عملی به طوریکه در شکل a ۲ - ۳ نشان داده شده است در نظر بگیریم ولتاژ منبع ایده آل برابر v_s می‌باشد و یک مقاومت R_{s} بنام مقاومت داخلی یا مقاومت

خروجی بطور سری با آن قرار دارد. یک بار دیگر توجه می‌دهیم که این مقاومت واقعاً وجود ندارد و یا ما آن را با سیم و لحیم در مدار قرار نداده‌ایم و فقط نشاندهندهٔ کاهش ولتاژ ترمینال به هنگام افزایش جریان بار می‌باشد. وجود آن ما را قادر می‌سازد که رفتار یک منبع ولتاژ واقعی را دقیقتر مدل‌سازی کنیم.

رابطهٔ خطی بین i_L , v_L عبارت است از:

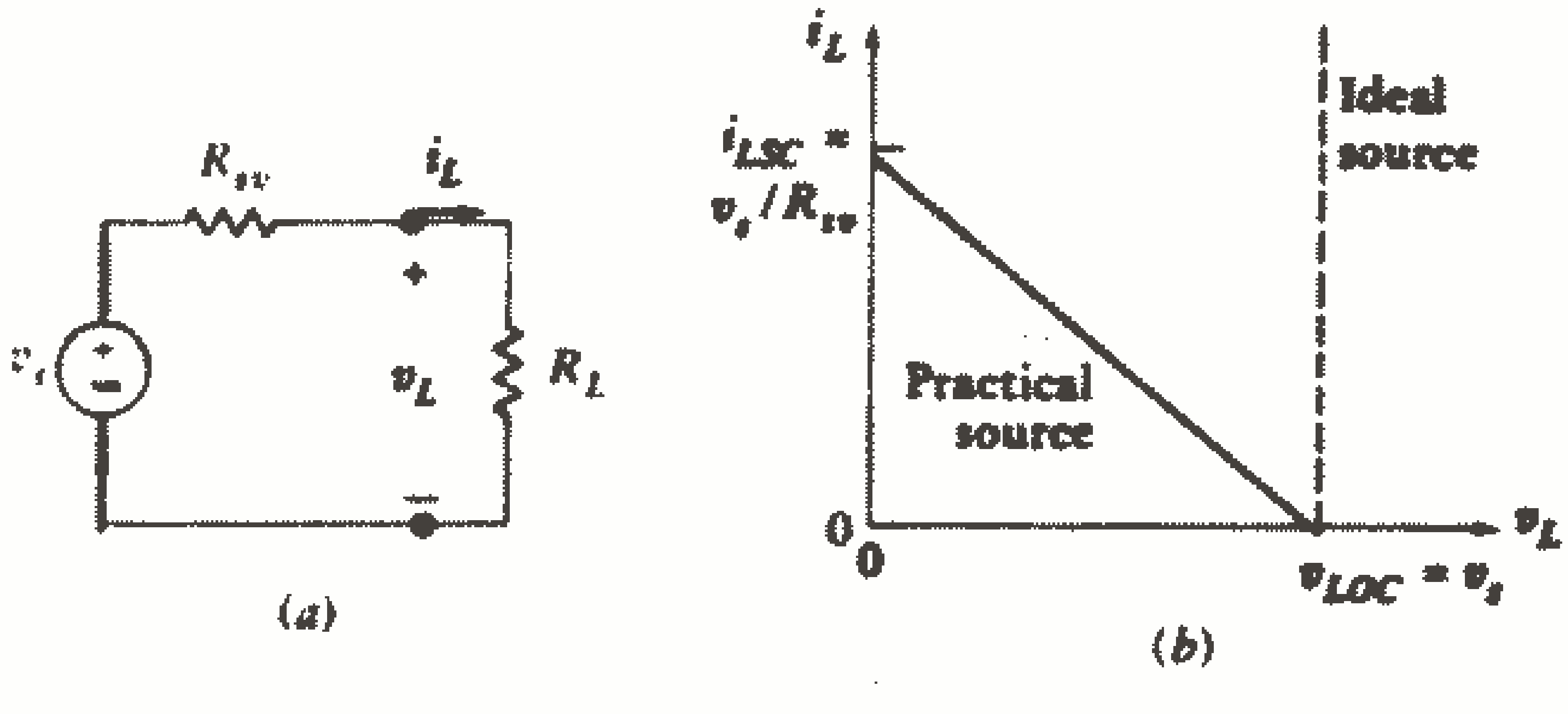
$$v_L = v_s - R_{sv} i_L \qquad (۲۰)$$

که این رابطه در شکل b ۲۰ - ۳ رسم شده است. ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه عبارتند از:

$$v_{Loc} = v_s \qquad (21)$$

$$i_{Lsc} = \frac{v_s}{R_{sv}} \qquad (22)$$

و باز هم این مقادیر نقاط تقاطع خط راست در شکل b ۲۰ - ۳ می‌باشند و آن را به طور کامل تعریف می‌کنند.



شکل ۲۰ - ۳: (a) یک منبع ولتاژ عملی کلی که به مقاومت بار R_L وصل شده است.
(b) ولتاژ ترمینال با افزایش i_L و کاهش $R_L = v_L/i_L$ ، کاهش می‌یابد.

یک منبع جریان ایده‌آل هم در دنیای واقعی وجود ندارد و هیچ وسیله‌ای نیست که جریان ثابتی را طرفنظر از مقاومت باری که به آن وصل می‌شود و یا ولتاژ دو سر ترمینالهایش، تحویل دهد. مدارهای ترانزیستوری خاصی جریان ثابتی را در محدودهٔ وسیعی از مقاومتهای بار تحویل می‌دهند اما مقاومت را همیشه به اندازهٔ کافی بزرگ می‌گیرند که جریان آن بسیار کوچک باشد. واضح است که قدرت بینهایت هرگز قابل دسترس نخواهد بود.

یک منبع جریان عملی به صورت یک منبع جریان ایده‌آل موازی با یک مقاومت داخلی R_{si} تعریف می‌شود. چنین منبعی در شکل a ۲۱ - ۳ نشان داده شده است و جریان i_L و ولتاژ v_L مربوط به یک مقاومت بار R_L نشان داده شده‌اند. واضح است که:

$$i_L = i_s - \frac{v_L}{R_{si}} \qquad (۲۳)$$

که باز هم یک رابطه خطی می‌باشد ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه عبارتند از:

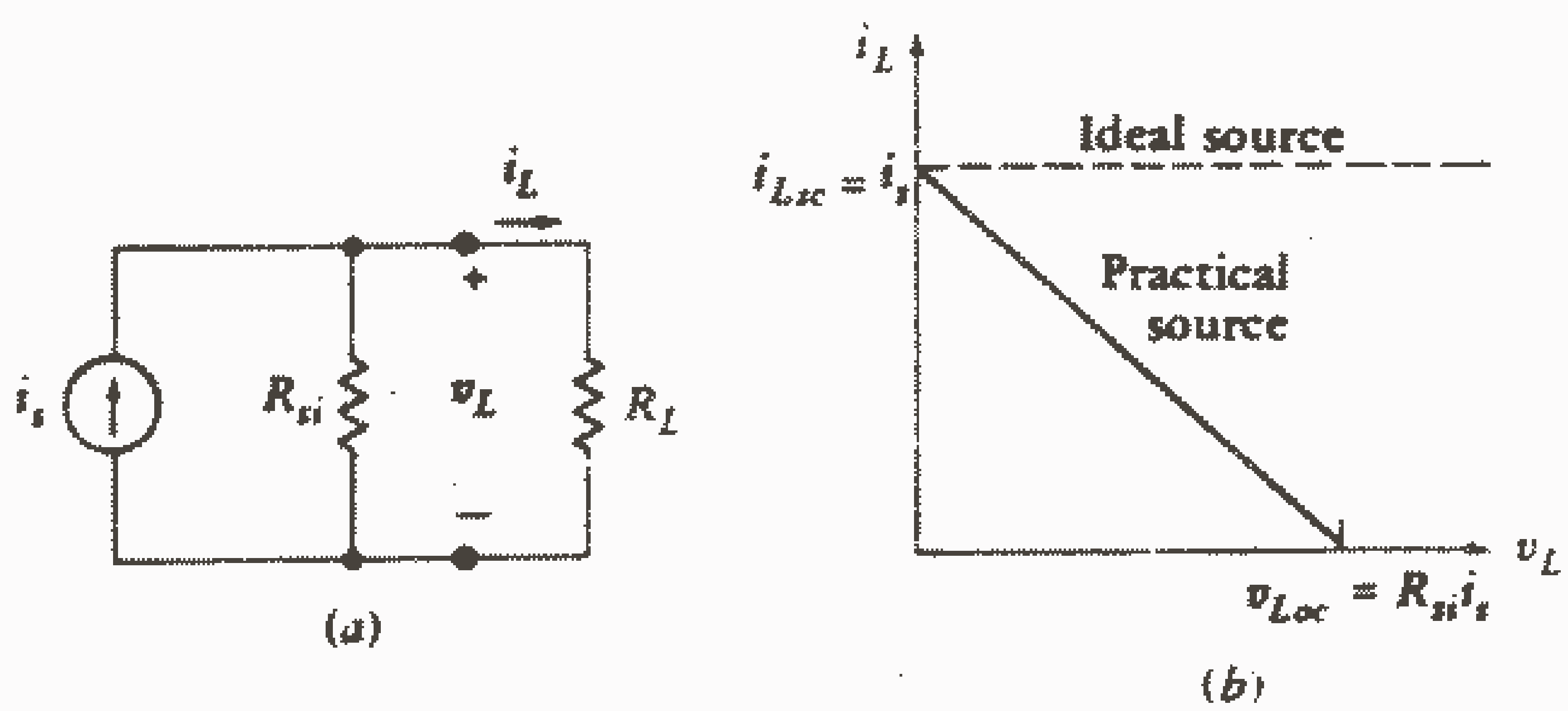
$$v_{Loc} = R_{si} i_s \qquad (۲٤)$$

$$i_{Lsc} = i_s \qquad (۲۵)$$

تغییرات جّریان بار با تغییر ولتاژ بار را می‌توان با تغییر دادن مقدار R_L مطابق شکل ۳-۲۱b مورد بررسی قرار داد. خط راست از اتصال کوتاه و یا انتهای شمال غربی به مدار باز یا جنوب شرقی با افزایش R_L از صفر تا بینهایت اهم، کشیده شده است: نقطه‌وسط در $R_L = R_{si}$ واقع می‌شود. بدیهی است که جریان i_L و جریان منبع ایده‌آل i_s فقط برای مقادیر کوچک ولتاژ بار، تقریباً مساوی هستند.

با تعریف نمودن هر دو منبع عملی اکنون آماده‌ایم که معادل بودن آنها را مورد بحث قرار دهیم.

(ما در صورتی دو منبع را معادل تعریف خواهیم کرد که مقادیر یکسان v_L , i_L را هنگام اتصال به مقادیر یکسان R_L تولید نمایند صرفنظر از اینکه مقدار R_L چقدر باشد) از آنجاییکه $R_L = 0$ $R_L=\infty$ هم دو مقدار از مقادیر R_L می‌باشند، پس منابع معادل ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه یکسانی را ارائه می‌کنند. به عبارت دیگر اگر دو منبع معادل به ما بدهند، یکی منبع



شکل ۲۱ - ۳: (a) یک منبع جریان عملی عمومی که به یک مقاومت بار R_L وصل شده است. (b) جریان بار تأمین شده به وسیله منبع جریان عملی به صورت تابعی از ولتاژ بار نشان داده شده است.

ولتاژ عملی و دیگری منبع جریان عملی، که هر یک در جعبه سیاهی محصور باشند و فقط یک جفت ترمینال آن معلوم باشدو در این صورت هیچ راهی برای اینکه بتوانیم با اندازه گیری جریان یا ولتاژ در یک بار مقاومتی آنها را از یکدیگر تمیز دهیم وجود نخواهد داشت.

حال شرایط هم ارزی هم به سرعت تعیین می‌شوند. از آنجاییکه ولتاژهای مدار باز باید مساوی باشند، از معادلات (۲۱) و (۲۴)خواهیم‌داشت:(۲۶) $v_{LOC} = v_s = R_{si} i_s$ جریانهای اتصال کوتاه هم مساویند و از معادلات (۲۲) و (۲۵) داریم:

$$i_{l\,sc} = v_s/R_{sv} = i_s \rightarrow R_{sv} = R_{si} = R_s \qquad (۲۷)$$

$$v_s = R_s i_s \qquad (۲۸)$$

که ما اکنون R_s را به عنوان مقاومت داخلی هر دو منبع عملی در نظر می‌گیریم. به عنوان مثالی برای کاربرد این ایده‌ها، منبع جریان عملی شکل a ۲۲ - ۳ را در نظر بگیرید.

از آنجاییکه مقاومت داخلی آن Ω ۲ می‌باشد، پس مقاومت داخلی منبع ولتاژ عملی معادل آن هم Ω ۲ می‌باشد و ولتاژ منبع ولتاژ ایده‌آل موجود در منبع ولتاژ عملی برابر است با ٦V = (۳) . (۲) منبع ولتاژ عملی معادل در شکل ۳-۲۲b نشان داده شده است.

برای چک کردن هم ارزی، بیایید یک مقاومت Ω ٤ در نظر بگیریم که به هر منبع وصل شده باشد. در هر دو حالت جریان A ۱، ولتاژ V ٤ و قدرت W ٤ به بار Ω ٤ مربوط می‌باشد. با وجود این باید به دقت توجه داشته باشیم که منبع جریان ایده‌آل قدرت W ۱۲ تحویل می‌دهد در حالیکه منبع ولتاژ ایده‌آل فقط W ٦ تحویل می‌دهد. به علاوه، مقاومت داخلی منبع جریان عملی W ۸ جذب می‌کند در حالیکه مقاومت داخلی منبع ولتاژ عملی فقط W ۲ جذب می‌کند. بنابراین می‌بینیم که این دو منبع عملی فقط از نظر چیزی که به بار تحویل می‌دهند معادل هستند

و از نظر داخلی معادل نیستند!

یک قضیه قدرت خیلی مفید را می‌توان با مراجعه به یک منبع جریان یا منبع ولتاژ عملی بیان نمود. برای منبع ولتاژ عملی (شکل a ۲۰ - ۳ با $R_{sv} = R_s$) قدرت تحویل داده شده به بار R_L برابر است با:

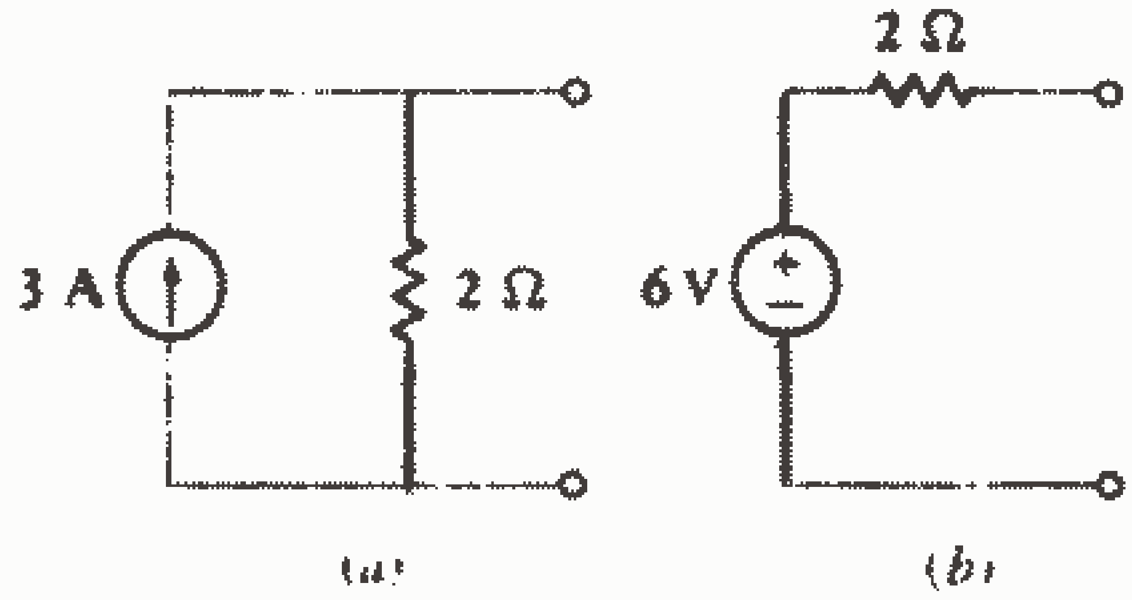
$$p_L = i_L^2 R_L = \frac{v_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2}$$

برای پیدا کردن مقداری از R_L که ماکزیمم قدرت را از منبع عملی جذب کند، نسبت به R_L مشتق می گیریم:

$$\frac{dp_L}{dR_L} = \frac{(R_s + R_L)^2 v_s^2 - v_s^2 R_L (2)(R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4}$$

حال مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$2\ R_L (R_s + R_L) = (R_s + R_L)^2 \rightarrow R_s = R_L$$



شکل ۴۲ ـ ۳: (a) یک منبع جریان عملی (b) منبع ولتاژ عملی معادل آن: $R_{sv} = R_{si} = R_s;\ v_s = R_s i_s$

چون مقادیر $R_L = 0$ ، $R_L = \infty$ هر دو مینیمم قدرت $(P_L = 0)$ را می‌دهند و چون قبلاً نشان داده‌ایم که منبع ولتاژ عملی و منبع جریان عملی معادل می‌باشند، بنابراین قضیهٔ انتقال ماکزیمم قدرت بیان شده در زیر برای ما ثابت شده است:

یک منبع ولتاژ مستقل سری با مقاومت R_s و یا یک منبع جریان مستقل موازی با مقاومت R_s، ماکزیمم قدرت را به مقاومت R_L وقتی تحویل می‌دهد که $R_L = R_s$.

بنابراین قضیه انتقال ماکزیمم قدرت به ما می گوید که یک مقاومت $2\ \Omega$ از هر یک از منابع عملی شکل ۲۲ - ۳ ماکزیمم قدرت $4{,}5\ W$ را می‌کشد، در حالیکه مقاومت 1Ω٪ ماکزیمم قدرت $3{,}6\ KW$ را در شکل ۱۹ - ۳ دریافت می کند.

تمرین

۶ - ۳ - (a) در شکل ۲۳ a - ۳ داریم $R_L = 80\ \Omega$ـ، i_L را پیدا کنید.

(b) منبع جریان عملی را به یک منبع ولتاژ عملی تبدیل کنید و دوباره i_L را اگر $R_L = 80\Omega$ پیدا کنید.

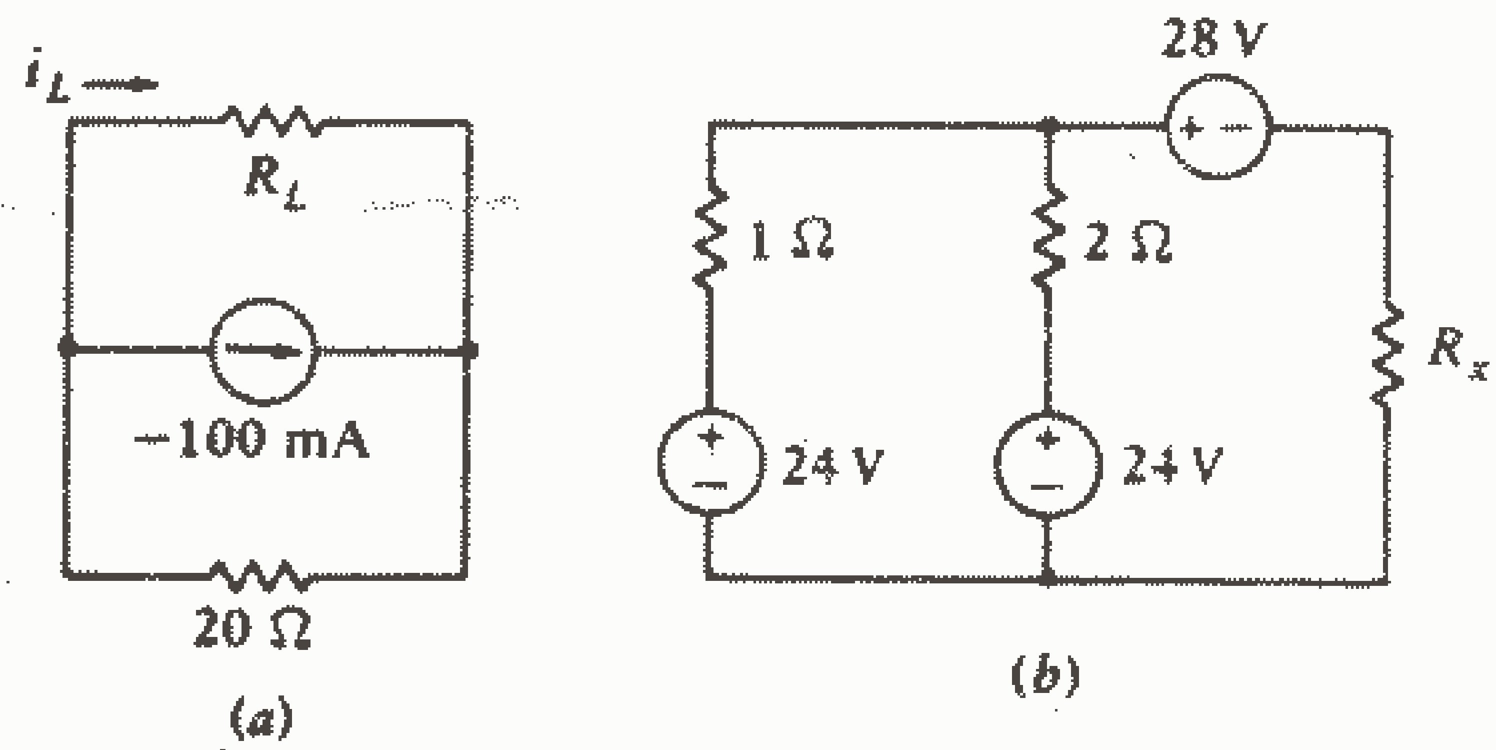
(c) قدرت تحویل داده شده به وسیله منبع ایده آل را در هر حالت پیدا کنید.

(d) چه مقدار R_L ماکزیمم قدرت را جذب می کند و مقدار این قدرت چقدر است؟

جواب: $20\ mA,\ 20\ mA,\ 160\ mW,\ 40\ mW,\ 20\ \Omega,\ 50\ mW$

۷ - ۳ - هر دو منبع 24 V را در شکل b ۲۳ - ۳ به منابع جریان عملی تبدیل کنید، مقاومتها و منابع جریان ایده‌آل را تبدیل کنید و سپس منبع جریان عملی حاصل را به منبع ولتاژ عملی تبدیل کنید و منابع ولتاژ ایده‌آل را ترکیب کنید: (a) اگر $R_x = 2\ \Omega$، قدرت تحویل داده شده به R_x را پیدا کنید. (b) ماکزیمم قدرتی که می‌تواند به هر R_x تحویل داده شود چقدر است؟ (c) به کدام دو مقدار R_x دقیقاً 5 W تحویل داده می‌شود؟

جواب: 4,5 W، 6 W، 0,280 Ω، 1,587 Ω



شکل ۲۳ - ۳: به تمرینات ۶ - ۳ و ۷ - ۳ مراجعه شود.

۶ - ۳ - قضایای تونن و نورتن

حال که اصل جمع اثرها را در اختیار داریم، می‌توانیم دو قضیه دیگر را که تحلیل بسیاری از مدارهای خطی را خیلی ساده می‌کند، ارائه دهیم. اولین قضیه به یادبود ام.ال: تونن، مهندسی فرانسوی که در زمینهٔ تلگراف کار می‌کرد و برای اولین بار در سال ۱۸۸۳ این قضیه را منتشر نمود، نامگذاری شده است و دومین قضیه به صورت مشابه قضیه اول است و به ای. ال. نورتن، یکی از دانشمندان سابق آزمایشگاههای بل، منسوب است.

فرض کنید نیاز به تحلیل جزئی یک مدار داشته باشیم، مثلاً بخواهیم جریان، ولتاژ و قدرت تحویل داده شده به یک مقاومت بار منفرد را به وسیلهٔ بقیهٔ مدار که ممکن است شامل تعداد زیادی مقاومت و منبع باشد، به دست آوریم و یا شاید بخواهیم پاسخ را به ازای مقادیر مختلف مقاومت بار به دست آوریم.

در این صورت قضیه تونن به ما می‌گوید که می‌توان کل مدار بجز مقاومت بار را به وسیله یک مدار معادل شامل فقط یک منبع ولتاژ مستقل سری با یک مقاومت جایگزین نمود.

با استفاده از قضیه نورتن، مدار معادلی مرکب از یک منبع جریان مستقل موازی با یک مقاومت به دست می آوریم.

بنابراین بدیهی است که یکی از کاربردهای عمدهٔ قضایای تونن و نورتن، جایگزینی قسمت بزرگی از یک مدار و غالباً قسمت پیچیده و نامفهوم آن، با یک معادل خیلی ساده می‌باشد. این مدار سادهٔ اخیر ما را قادر می‌سازد که محاسبات ولتاژ، جریان و قدرتی را که مدار اصلی به بار تحویل می‌دهد، سریعتر انجام دهیم. آن همچنین به ما کمک می کند که بهترین مقدار این مقاومت را انتخاب کنیم. مثلاً در یک تقویت‌کنندهٔ قدرت ترانزیستوری، مدار معادل تونن یا نورتن ما را قادر می‌سازد که ماکزیمم قدرتی را که می‌توان از تقویت‌کننده گرفت و نوع باری را که لازم است تا ماکزیمم انتقال قدرت را ارائه کند، تعیین کنیم.

به عنوان یک مثال مقدماتی مدار شکل ۲۴ ـ ۳ را در نظر بگیرید. نواحی سایه خورده مدار را به شبکه‌های A ، B تقسیم می‌کند و فرض می‌کنیم که توجه اصلی ما به شبکهٔ B که شامل مقاومت بار R_L است، معطوف باشد. شبکهٔ A را می‌توان با استفادهٔ مکرر از تبدیل منابع ساده نمود. ابتدا منبع V ۱۲ و مقاومت Ω ۳ را به عنوان یک منبع ولتاژ عملی در نظر می گیریم و آن را با یک منبع جریان عملی متشکل از یک منبع A ٤ موازی با مقاومت Ω ۳ جایگزین می کنیم.

سپس دو مقاومت موازی را ترکیب می‌کنیم که معادل آن می‌شود Ω ۲ و منبع جریان حاصل را به یک منبع ولتاژ عملی تبدیل می کنیم. این مراحل در شکل ۲۵ - ۳ و نتیجهٔ نهایی در شکل d ۲۵ - ۳ نشان داده شده است. از دید مقاومت بار R_L، این مدار (معادل تونن) معادل است با مدار اصلی و از دید ما این مدار خیلی ساده‌تر است و اکنون می‌توانیم به سادگی قدرت تحویل داده شده به بار را محاسبه کنیم، به صورت زیر:

$$P_L = \left(\frac{۸}{۹ + R_L}\right)^۲ R_L$$

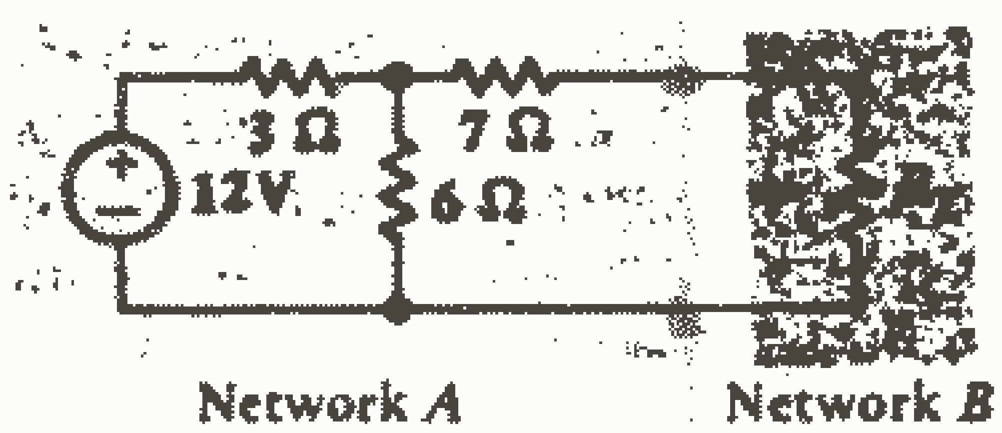
به علاوه، از مدار معادل می‌توانیم ملاحظه کنیم که ماکزیمم ولتاژی که می‌توان در دو سر R_L به دست آورد برابر V ۸ است وقتی که $R_L = \infty$ و یک تبدیل سریع شبکهٔ A به یک منبع جریان عملی (معادل نورتن) نشان می‌دهد که ماکزیمم جریانی که می‌تواند به بار تحویل داده شود برای $R_L = 0$ برابر با A $\frac{۸}{۹}$ است و قضیه انتقال ماکزیمم قدرت نشان می‌دهد که ماکزیمم قدرت وقتی که $R_L = ۹\ \Omega$ به R_L تحویل داده می‌شود. هیچیک از این واقعیتها به سادگی و به سرعت از مدار اصلی مشهود نمی‌باشد.

اگر شبکه A پیچیده‌تر می‌بود تعداد تبدیل منابع و ترکیب مقاومتهای لازم برای به دست آوردن مدار معادل تونن یا نورتن خیلی زیاد و تقریباً غیرعملی می‌شد و نیز با وجود منابع وابسته

روش تبدیل منابع معمولاً غیرعملی می‌باشد.

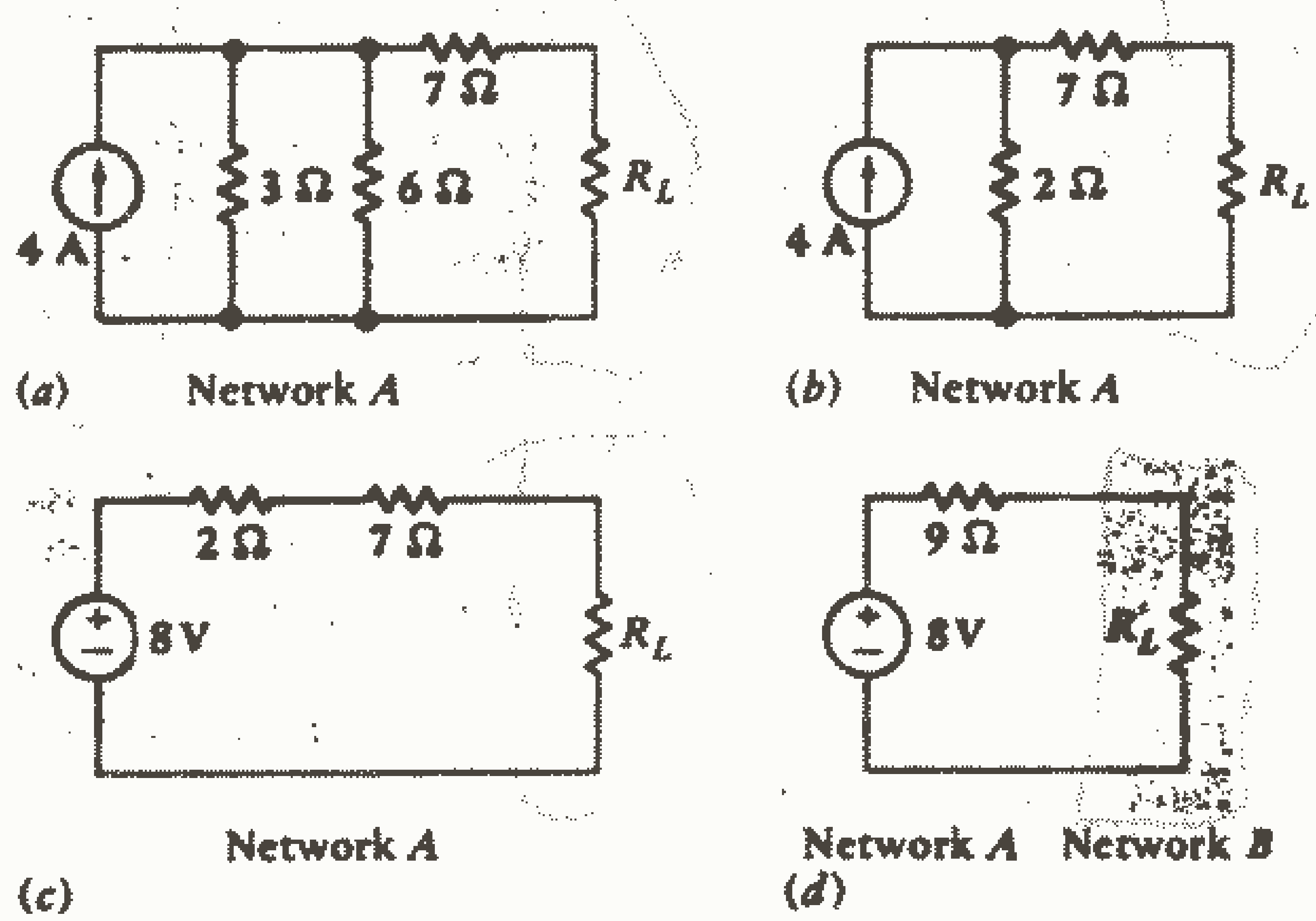
قضایای تونن و نورتن به ما اجازه می‌دهند که مدار معادل را سریعتر و ساده‌تر، حتی در مدارهای پیچیده‌تر، به دست آوریم. حالا اجازه دهید قضیه تونن را به صورت زیر بیان کنیم:

> هر مدار خطی که داده شود آن را به شکل دو شبکهٔ A , B در آورید. اگر هر کدام از این دو شبکه حاوی منبع وابسته باشد، متغیر کنترل‌کنندهٔ آن باید در همان شبکه باشد. یک ولتاژ مدار باز V_{oc} را در ترمینالهای A وقتیکه شبکه B جدا شده باشد، تعریف کنید. در این صورت اگر مدار A غیرفعال شود (یعنی همهٔ منابع ولتاژ مستقل با اتصال کوتاه و منابع جریان با مدار باز جایگزین شوند.) و به طور سری با یک منبع ولتاژ قرار گیرد. همهٔ جریانها و ولتاژهای شبکهٔ B بدون تغییر باقی خواهد ماند.



$V = iR \rightarrow 12 = 3 \times i \Rightarrow i = 4A$

شکل ۲۴ ـ ۳: یک مدار سادهٔ مقاومتی به دو شبکه A و B که جزئیات شبکه A مورد نظر ما نمی‌باشد و شبکهٔ B یک مقاومت بار مورد علاقهٔ ماست، تقسیم شده است.



$V = Ri$

$V = 4 \times ($

$i = \frac{V}{R}$

شکل ۲۵ ـ ۳: تبدیل منابع و ترکیب مقاومتهای به کار رفته در ساده کردن شبکهٔ A به ترتیب نشان داده شده است. نتیجهٔ کار که در شکل (d) نشان داده شده است، مدار معادل تونن می‌باشد.

حال بیایید ببینیم که آیا می‌توانیم قضیهٔ تونن را با موفقیت به مدار شکل ۲٤ - ۳ اعمال کنیم. با جدا کردن R_L و با استفاده از قانون تقسیم ولتاژ v_{oc} برابر با ۸ V تعیین می‌شود. با غیرفعال کردن شبکهٔ A یعنی با جایگزین کردن منبع ۱۲ V با یک اتصال کوتاه، اگر به شبکهٔ A نگاه کنیم یک مقاومت ۷ Ω به طور سری با ترکیب موازی ٦ Ω , ۳ Ω خواهیم دید. بنابراین شبکهٔ غیرفعال A را در اینجا می‌توان به طور سادهٔ با یک مقاومت ۹ Ω نمایش داد که این با نتیجهٔ قبلی موافقت دارد.

مدار معادلی را که به دست آورده‌ایم کاملاً مستقل از شبکهٔ B می‌باشد زیرا ما آموخته‌ایم که شبکهٔB را جدا کنیم و ولتاژ مدار باز تولید شده به وسیله شبکهٔ A را اندازه‌گیری کنیم که این عمل مطمئناً به هیچوجه بستگی به شبکهٔ B ندارد و سپس شبکهٔ غیرفعال A را با یک منبع ولتاژ v_{oc} به طور سری قرار دهیم. شبکهٔ B در قضیه و اثبات فقط به خاطر این ذکر شده است که نشان دهد مدار معادل شبکهٔ A را مستقل از اینکه چه آرایشی از عناصر به آن وصل شده باشد، می‌توان به دست آورد که شبکهٔ B بیانگر این شبکهٔ عمومی می‌باشد.

اثبات قضیه تونن به شکلی که ما بیان کرده‌ایم نسبتاً طولانی است، بنابراین آن را در ضمیمهٔ ۳ قرار داده‌ایم که افراد کنجکاو و سختگیر آن را به دقت مطالعه خواهند کرد.

چند نکته دربارهٔ این قضیه وجود دارد که قابل تأکید می‌باشد. اول اینکه، تنها محدودیتی که باید بر A یا B اعمال کنیم، علاوه بر لزوم خطی بودن شبکهٔ A , B، این است که همهٔ منابع وابستهٔ موجود در A متغیر کنترل‌کننده‌شان نیز در A باشد و همینطور برای B هیچ محدودیتی دربارهٔ پیچیدگی A , B وجود ندارد و هر یک از آنها می‌توانند شامل هر ترکیبی از منابع مستقل ولتاژ و جریان، منابع وابسته ولتاژ و جریان، مقاومتها و یا هر عنصر مداری خطی دیگر باشند.

ماهیت عمومی قضیه (و اثبات آن) آن را قابل اعمال به شبکه‌های حاوی سلف و خازن، که عناصر مداری غیرفعال خطی می‌باشند و در فصل بعدی تعریف شده‌اند، می‌سازد. اگر چه فعلاً مقاومتها تنها عناصر مداری غیرفعال می‌باشند که تعریف شده‌اند و اعمال قضیه تونن به شبکه‌های مقاومتی حالت خاص ساده‌ای می‌باشد. شبکهٔ غیرفعال A را می‌توان به وسیله یک مقاومت معادل منفرد R_{th} نمایش داد. بدیهی است که اگر A یک شبکهٔ فعال مقاومتی باشد آنگاه شبکهٔ غیرفعال A را می‌توان با یک مقاومت معادل منفرد، که ما آن را مقاومت تونن هم می‌نامیم، جایگزین نمود.

قضیه نورتن تشابه نزدیکی به قضیه تونن دارد و این پی‌آمد دیگری از تناظر می‌باشد. در

واقع وقتیکه اصل تناظر در فصل بعدی مورد بحث قرار گیرد، این دو بیان را می‌توان به عنوان مثالی از زبان تناظر به کار برد. قضیه نورتن را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

> در هر مدار خطی داده شده آن را به صورت شبکه‌های A , B که به وسیله دو هادی بدون مقاومت به هم وصل شده‌اند، تقسیم کنید. اگر هر یک از شبکه‌ها حاوی منبع وابسته‌ای باشد، متغیر کنترل‌کننده آن باید در همان شبکه موجود باشد. جریان i_{sc} را به عنوان جریان اتصال کوتاه تعریف کنید. سپس اگر A غیرفعال شود (یعنی منابع ولتاژ، اتصال کوتاه و منابع جریان، باز شوند) و یک منبع جریان مستقل i_{sc}، با پلاریته مناسب، موازی با شبکه غیرفعال A وصل شود، جریانها و ولتاژهای شبکهٔ B بدون تغییر باقی می‌مانند.

معادل نورتن یک شبکهٔ مقاومتی فعال عبارت از منبع جریان نورتن i_{sc} موازی با مقاومت تونن R_{th} می‌باشد.

رابطهٔ مهمی بین معادل تونن و نورتن یک شبکهٔ فعال مقاومتی وجود دارد. این رابطه را می‌توان با اعمال تبدیل منابع به هر یک از این شبکه‌ها به دست آورد. مثلاً، اگر معادل نورتن را تبدیل کنیم، منبع ولتاژ $R_{th}\ i_{sc}$ را سری با مقاومت R_{th} به دست می‌آوریم که این همان فرم مدار معادل تونن را دارد، یعنی

$$V_{oc} = R_{th}\ i_{sc} \qquad (۲۹)$$

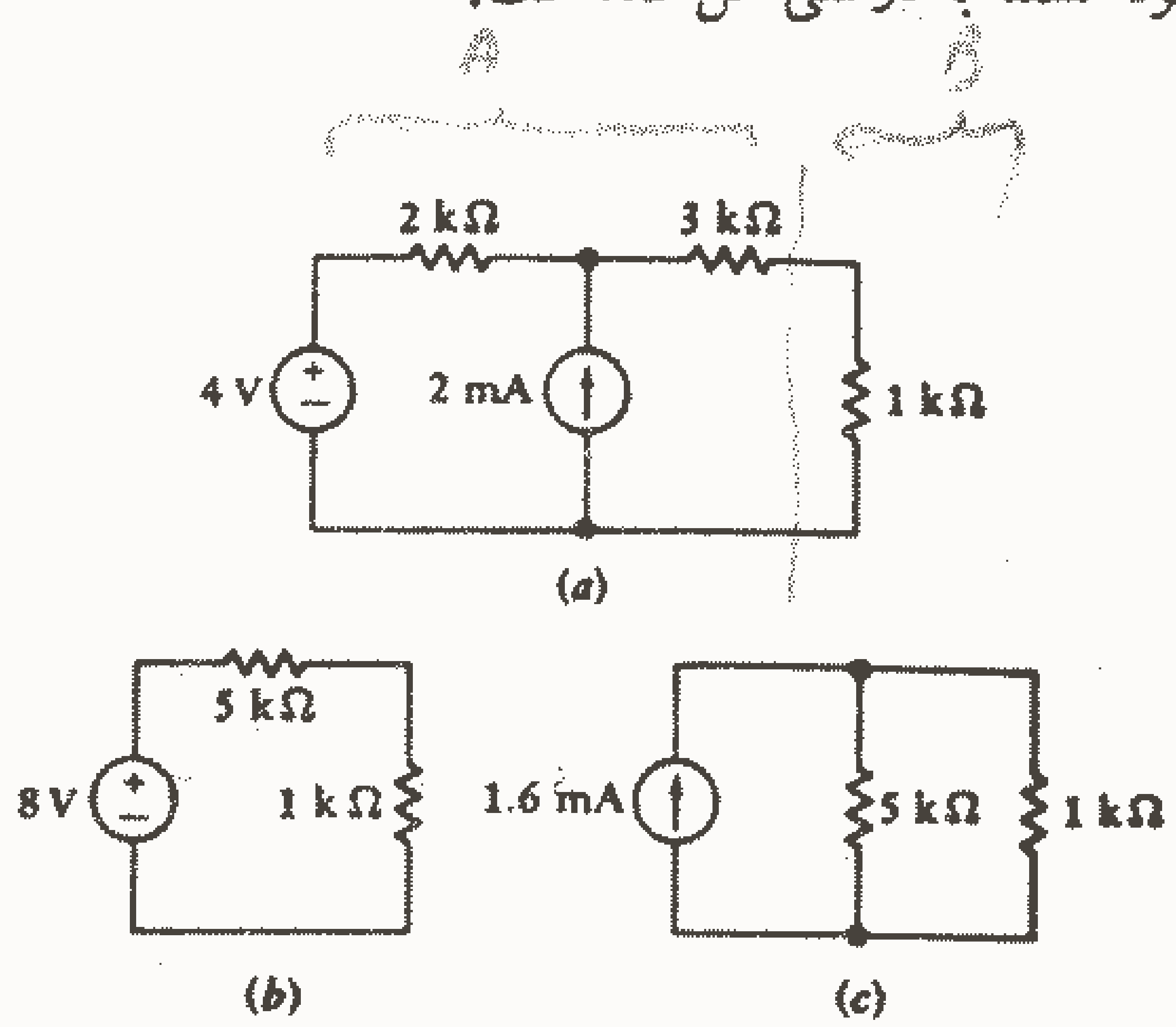
در مدارهای مقاومتی که علاوه بر منابع مستقل دارای منابع وابسته باشند، اغلب در می‌یابیم که بهتر است مدار معادل تونن و نورتن آنها را به وسیله پیدا کردن ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه تعیین کنیم. که در این صورت مقدار R_{th} برابر با نسبت ولتاژ مدار باز به جریان اتصال کوتاه خواهد بود. بنابراین صلاح در این است که در پیدا کردن ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه حتی در مسائل ساده‌ای که در پی می‌آید، تبحر پیدا کنیم. اگر مدار معادل تونن و نورتن را به طور مستقل پیدا کنیم آنگاه رابطهٔ (۲۹) یک وسیلهٔ چک مفید خواهد بود.

بیایید چهار مثال برای تعیین مدار معادل تونن و نورتن در نظر بگیریم. مثال اول در شکل ۳-۲۶ a نشان داده شده است و مدار معادل تونن و نورتن برای شبکه‌ای که در دو سر مقاومت $1 - K\ \Omega$ دیده می‌شود مطلوب است. یعنی شبکهٔ B همان مقاومت $1\ K\ \Omega$ مذکور و شبکه A بقیهٔ مدار می‌باشد.

این مدار شامل هیچ منبع وابسته‌ای نمی‌باشد و آسانترین راه برای پیدا کردن مدار معادل تونن، پیدا کردن R_{th} مستقیماً از روی شبکهٔ غیرفعال و پس از آن محاسبهٔ v_{oc} یا i_{sc} می‌باشد. ابتدا هر دو منبع مستقل را غیرفعال می‌کنیم تا شبکهٔ غیرفعال A به دست آید. اینکار را با اتصال کوتاه کردن منبع ٤ V و باز کردن منبع ٢ mA، انجام می‌دهیم حاصل اینکار ترکیب سری یک مقاومت ٢ kΩ و یک مقاومت ٣ KΩ و یا به طور معادل یک مقاومت ٥ KΩ می‌باشد. ولتاژ مدار به طور ساده به وسیله اصل جمع اثرها به دست می‌آید. وقتیکه منبع ٤ V به تنهایی فعال باشد، ولتاژ مدار باز برابر ٤ V و وقتیکه فقط منبع ٢ mA روشن باشد، باز هم ولتاژ مدار باز ٤ V می‌باشد. حال اگر هر دو منبع فعال باشند، ملاحظه می‌کنیم که V_{oc} = ٤ + ٤ = ٨ V. بدین ترتیب مدار معادل تونن به دست می‌آید که در شکل b ٢٦ - ٣ نشان داده شده است و از روی آن می‌توان به سرعت مدار معادل نورتن شکل c ٢٦ - ٣ را به دست آورد. به عنوان یک روش برای چک کردن این مسئله بیایید i_{sc} را برای این مدار به دست آوریم. با استفاده از اصل جمع اثرها و تقسیم جریان داریم:

$$i_{sc} = i_{sc}|_{4V} + i_{sc}|_{2mA} = \frac{4}{2+3} + 2\frac{2}{2+3} = 0.8 + 0.8 = 1.6 \quad \text{mA}$$

که ملاحظه می‌شود مسئله به درستی حل شده است.



شکل ٢٦ ـ ٣: (a) مداری که در آن مقاومت 1-kΩ به عنوان شبکهٔ B مشخص شده است. (b) مدار معادل تونن شبکهٔ A . (c) مدار معادل نورتن شبکهٔ A.

به عنوان مثال دوم، شبکهٔ A نشان داده شده در شکل ۲۷ - ۳ را که شامل منابع مستقل و وابسته می‌باشد در نظر می‌گیریم. وجود منبع وابسته به ما اجازه نمی‌دهد که R_{th} را مستقیماً به وسیله ترکیب مقاومتها از روی شبکهٔ غیرفعال به دست آوریم در عوض باید v_{oc} و i_{sc} را پیدا کنیم. برای پیدا کردن v_{oc} توجه می‌کنیم که $v_x = v_{oc}$ و جریان منبع وابسته باید از مقاومت ۲KΩ عبور کند زیرا سمت راست مدار باز می‌باشد. با جمع کردن ولتاژها در حلقهٔ پیرامونی داریم:

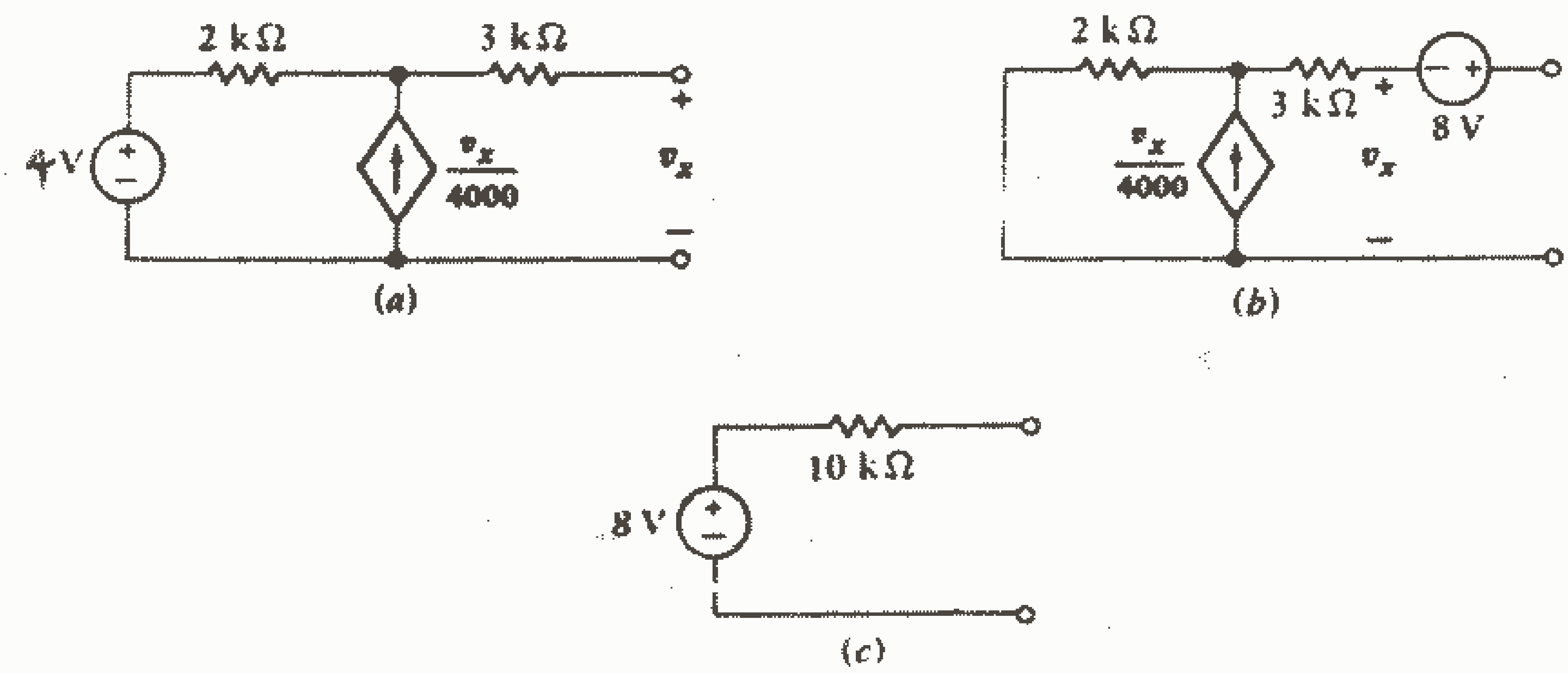
$$\text{kvl} \quad -4 + 2 \times 10^3 \left(\frac{-v_x}{4000}\right) + 3 \times 10^3(0) + v_x = 0 \quad \rightarrow \quad v_x = 8 = v_{oc}$$

بنابر قضیه تونن مدار معادل را می‌توان طبق شکل b ۲۷ - ۳ از سری نمودن منبع ۸ V با شبکهٔ غیرفعال A به دست آورد. این مدار صحیح است اما خیلی ساده و مفید نیست و در مدارهای خطی مقاومتی باید برای شبکهٔ غیرفعال A مدار معادل ساده‌تری، یعنی R_{th}، به دست آوریم. بنابراین i_{sc} را پیدا می‌کنیم. با اتصال کوتاه کردن ترمینالهای خروجی در شکل a ۲۷-۳، واضح است که $v_x = 0$ و منبع جریان وابسته هم صفر می‌شود. بنابراین، $i_{sc}=۴/۵\times۱۰^{۳}=۰,۸mA$.

در نتیجه داریم:

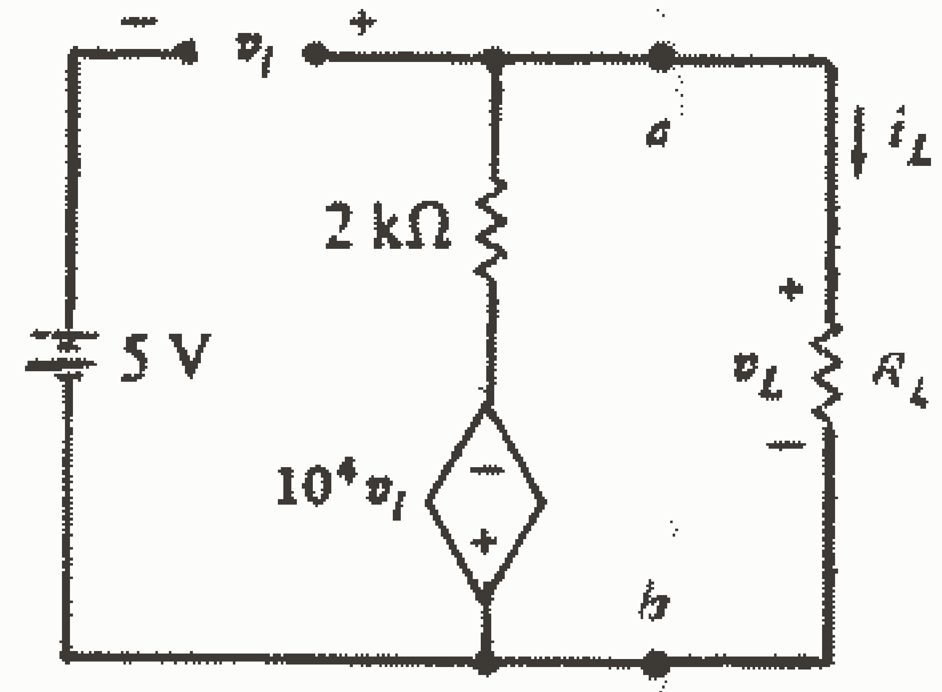
$$R_{th} = V_{oc}/i_{sc} = ۸/(۰,۸ \times ۱۰^{-۳}) = ۱۰ \ \text{K}\Omega$$

و بدین طریق مدار معادل مقبول شکل c ۲۷ - ۳ به دست می‌آید.



شکل ۲۷ ـ ۳: (a) مداری که معادل تونن آن مطلوب است. (b) یک فرم ممکن، اما نسبتاً بلااستفاده، مدار معادل تونن. (c) بهترین فرم مدار معادل تونن برای این مدار مقاومتی خطی.

مثال دیگری که برای آن باید v_{oc} ، i_{sc} را پیدا کنیم در شکل ۲۸ - ۳ آمده است.



شکل ۲۸ ـ ۳: مدار معادل تونن برای این ولتاژ فالوور در ترمینال‌های a ـ b مطلوب می‌باشد.

مدار مذکور یک op - amp می‌باشد که به صورت ولتاژ فالوور با مشخصات $v_s = ۵\ V$ ، $R_i = \infty$ ، $A = ۱۰^۴$ ، $R_o = ۲\ K\Omega$ بسته شده است. برای پیدا کردن v_{Loc} ، $R_L = \infty$ قرار می‌دهیم و یا به طور ساده‌تر در نظر می‌گیریم از مدار جدا شده باشد. بنابراین اکنون هیچ جریانی در مقاومت $۲\ K\Omega$ وجود ندارد و بنابراین داریم: $v_{Loc} = -۱۰^۴ v_i$ که در آن $v_i = v_{Loc} - ۵$ می‌باشد.

در نتیجه:

$$v_{Loc} = \frac{۱۰^۴ (۵)}{۱۰۰۰۱} = ۵\ V$$

سپس ما احتیاج به i_{Lsc} داریم، بنابراین R_L را با یک اتصال کوتاه جایگزین می‌کنیم. در حلقهٔ سمت راست با استفاده از KVL داریم: $۱۰^۴ v_i + ۲۰۰۰\, i_{Lsc} = ۰$

در ضمن، با اعمال KVL به حلقهٔ پیرامون مدار داریم: $-۵ - v_i = ۰$

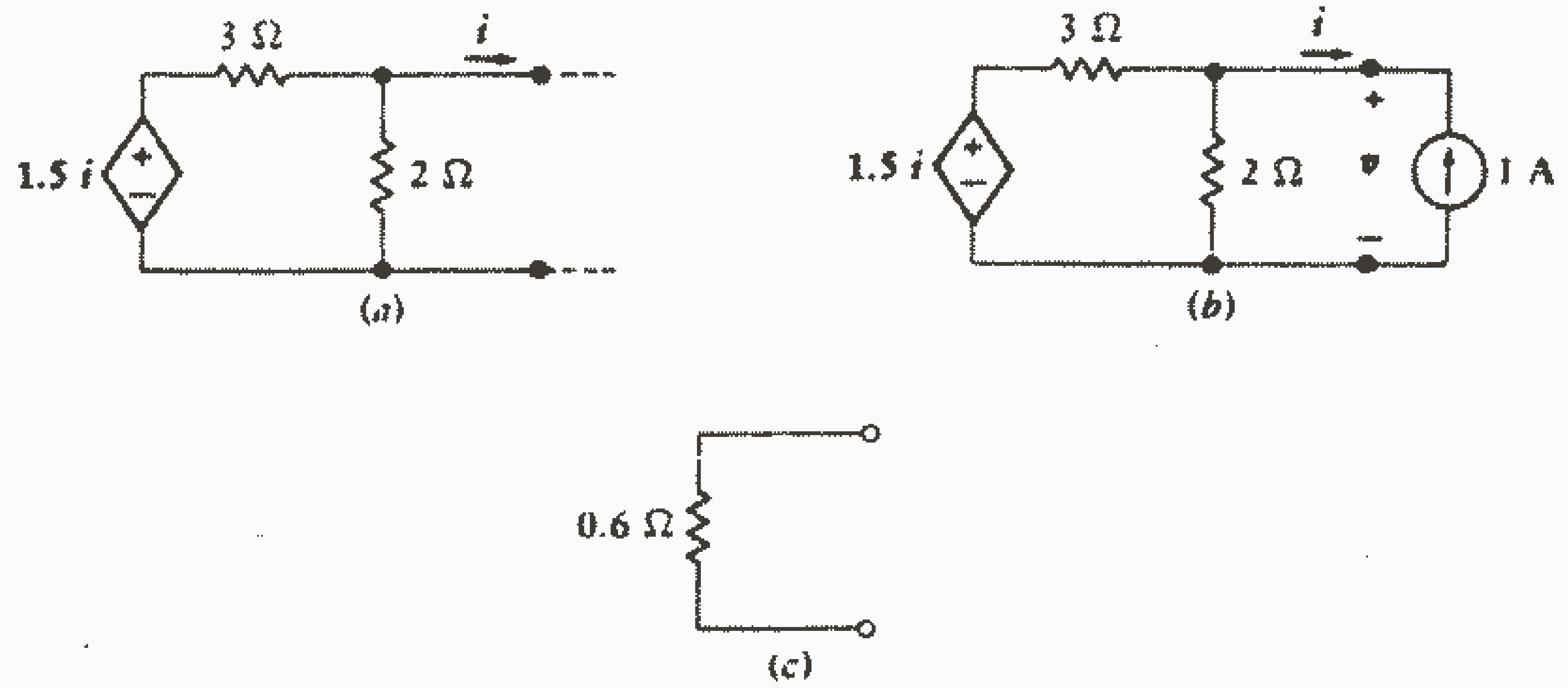
در نتیجه، خواهیم داشت: $۱۰^۴ (-۵) + ۲۰۰۰\, i_{Lsc} = ۰ \rightarrow i_{Lsc} = ۲۵\ A$

حال برای پیدا کردن R_{th} ، داریم:

$$R_{th} = \frac{v_{Loc}}{i_{Lsc}} = \frac{۵}{۲۵} = ۰/۲\ \Omega$$

بنابراین مدار معادل تونن ارائه شده به R_L در a - b توسط ولتاژ فالوور عبارت است از یک منبع ۵ V به طور سری با یک مقاومت خیلی کوچک $۰/۲\ \Omega$.

به‌عنوان آخرین مثال اجازه دهید شبکه‌ای را که فقط حاوی یک منبع وابسته می‌باشد مانند شکل ۳-۲۹a در نظر بگیریم. چون شبکهٔ A غیرفعال است پس $v_{oc} = 0$. بنابراین ما در جستجوی R_{th} ارائه شده توسط این شبکه دو ترمینالی هستیم. اگرچه، ما نمی‌توانیم i_{sc} ، v_{oc} صفر می‌باشند. بنابراین بیایید یک حیله و فن بکار بریم. یک منبع ۱A را بطور خارجی به مدار اعمال می‌کنیم و ولتاژ حاصل رال اندازه می‌گیریم و سپس $R_{th} = v/1$. با مراجعه به‌شکل ۳-۲۹b ملاحظه می‌کنیم که: $v/2 + (v - 1.5(-1))/3 = 1$ و از آنجا داریم: $R_{th} = 0.6\ \Omega$ ، $v = 0.6\ V$ مدار معادل تونن در شکل ۲۹c - ۳ نشان داده شده است.



شکل ۲۹ ـ ۳: (a) شبکه‌ای که شامل هیچ منبع مستقلی نمی‌باشد و مدار معادل تونن آن مطلوب است. R_{th} (b) به طور عددی برابر است با v . (c) مدار معادل تونن مدار (a) .

ما اکنون چهارمثالی را که مدار معادل تونن و نورتن آنها را پیدا کردیم، بررسی کرده‌ایم. مثال اول (شکل ۲۶ ـ ۳) فقط شامل منابع مستقل و مقاومت بود و می‌توانستیم روشهای مختلفی را روی آن بکار بریم. یکی از این روشها محاسبه R_{th} برای شبکهٔ غیرفعال و سگس v_{oc} برای شبکهٔ فعال. ما همچنین می‌توانستیم R_{th} ، i_{sc} و یا v_{oc} و i_{sc} را پیدا کنیم.

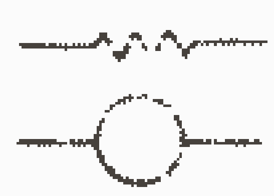
در مثالهای دوم و سوم (شکلهای ۲۷ ـ ۳ و ۲۸ ـ ۳) هر دو منبع مستقل و وابسته حضور داشتند و تنها روشی که بکار بردیم پیدا کردن v_{oc} ، i_{sc} را ایجاب می‌کرد. ما نمی‌توانستیم R_{th} را برای شبکهٔ غیرفعال به‌دست آوریم، زیرا منبع وابسته را نمی‌توان غیرفعال نمود.

مثال آخر هیچ گونه منبع مستقلی نداشت و ما R_{th} را به‌وسیله اعمال یک منبع ۱A و با

استفاده از رابطهٔ $v = 1 \times R_{th}$ به‌دست آوردیم. همچنین می‌توانستیم یک منبع ۱۷ اعمال کنیم و از رابطهٔ $i = 1/R_{th}$ مقدار R_{th} را به‌دست آوریم. این گونه مدار معادلهای تونن و نورتن منبع مستقل ندارند.

این تکنیکهای مهم و انواع مدارهایی را که می‌توان به آنها اعمال نمود در جدول ۱-۳ نشان داده شده است.

جدول ۱ ـ ۳: روشهای توصیه شده برای پیدا کردن مدار معادل تونن و نورتن.

Methods	Circuit contains		
			
R_{th} and v_{oc} or i_{sc}	✓	—	—
v_{oc} and i_{sc}	Possible	✓	—
$i = 1$ A or $v = 1$ V	—	—	✓

همهٔ روشهای ممکن در جدول ظاهر نشده است. ما از روش تبدیل منابع در شبکه‌هایی که منابع وابسته ندارند بطور مکرر استفاده کرده‌ایم و این مطمئناً یک روش ساده برای شبکه‌هایی است که حاوی عناصر زیاد نمی‌باشند. روش دیگری وجود دارد که از جاذبه خاصی برخوردار است زیرا می‌توان آن را برای هر سه نوع شبکهٔ درج شده در جدول قبل بکار برد. بطور ساده شبکهٔ B را به‌وسیله یک منبع ولتاژ v_s جایگزین می‌کنیم و جریان خروجی از ترمینال مثبت آن را به‌عنوان i تعریف می‌کنیم و سپس شبکهٔ A را تحلیل می‌کنیم و جریان i را به‌دست می آوریم و معادله‌ای به‌شکل $v_s = ai + b$ تشکیل می‌دهیم. بدیهی است که $a = R_{th}$ و $b = v_{oc}$ می‌باشد. البته می‌توانیم یک منبع جریان i_s را هم اعمال کنیم و ولتاژ دو سر آن را v بگیریم و سپس معادلهٔ $v = ai_s + b$ را تشکیل دهیم. این روش عموماً قابل کاربرد می‌باشد اما بعضی روشها گاهی اوقات آسانتر و سریعتر می‌باشند.

اگرچه ما توجه خود را تقریباً بطور کامل معطوف تحلیل مدارهای خطی کرده‌ایم ولی جالب است بدانیم که قضایای تونن و نورتن اگر شبکهٔ B غیرخطی هم باشد صادقند فقط شبکهٔ A حتماً باید خطی باشد.

تمرین

۸ ـ ۳ گ مدار معادل تونن را برای شبکه‌های زیر پیدا کنید:

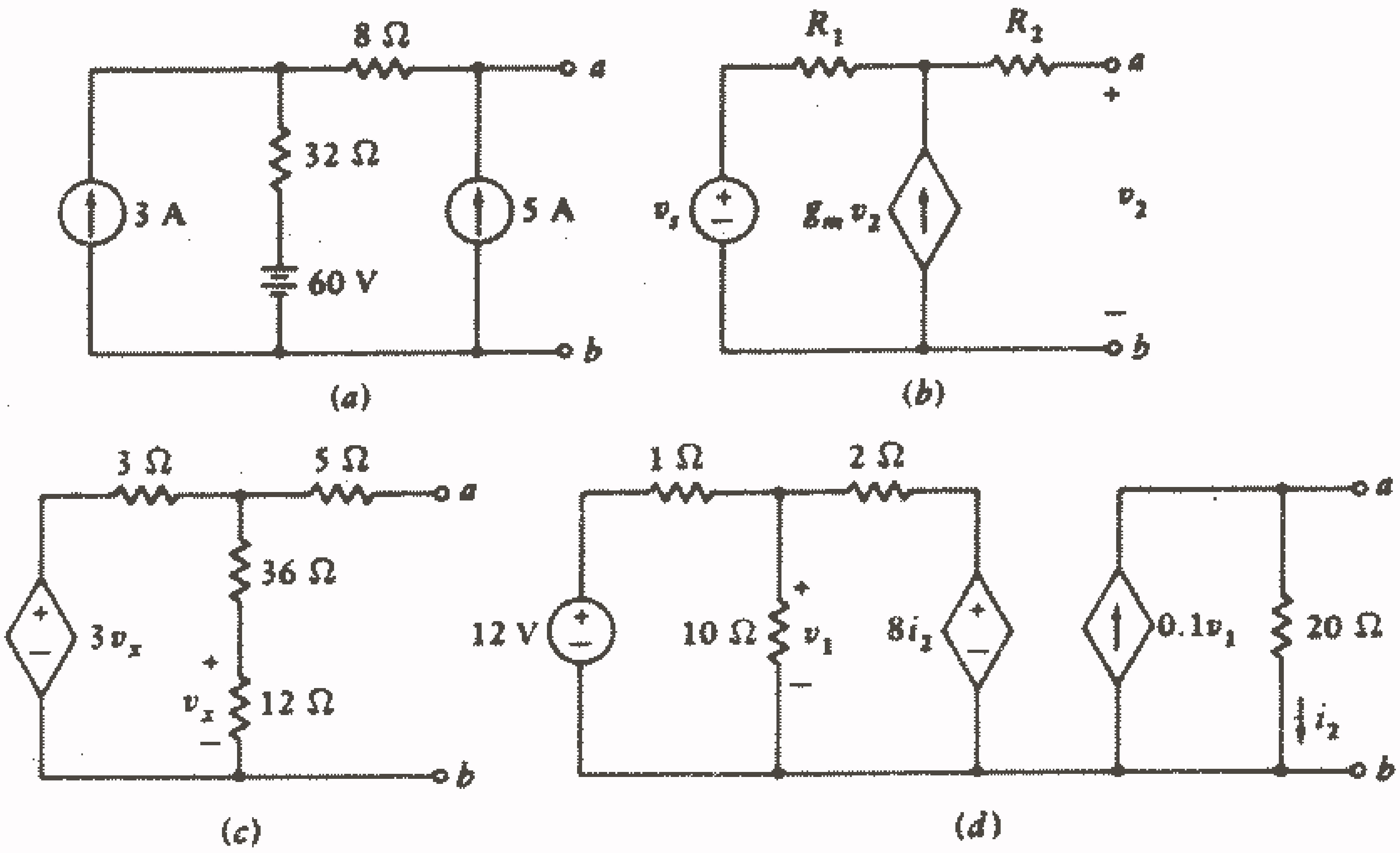
(a) شکل ۳۰a ـ ۳ (b) شکل ۳۰b - ۳

جواب: ۳۵۶ V ، ۴۰ Ω ؛ $v_s/(1 - g_m R_1)$ ، $(R_1 + R_2)/(1 - g_m R_1)$

۹ ـ ۳ گ مدار معادل نورتن را برای شبکه‌های زیر پیدا کنید:

(a) شکل ۳۰c - ۳ (b) شکل ۳۰d- ۳

جواب: ۰ A ، ۱۴٫۶ Ω ، ۰٫۷۵ A ، ۲۶٫۷ Ω



شکل ۳۰ ـ ۳: به تمرینات ۸ ـ ۳ و ۹ ـ ۳ مراجعه کنید.

۷ ـ ۳ درختها و تحلیل گرهی عمومی

در این قسمت روش تحلیل گرهی را تعمیم خواهیم داد. از آنجاییکه روش تحلیل گرهی قابل اعمال به هر مداری می‌باشد، بنابراین نمی‌توانیم قول بدهیم که خواهیم توانست دسته وسیعی از مسائل مدار را حل بکنیم. اگر چه، می‌توانیم امیدوار باشیم که بتوانیم یک روش تحلیل گرهی عمومی برای هر مسئله خاص، انتخاب بکنیم که ما را به معادلات کمتر و کار کمتر رهنمون شود.

نخست باید فهرست تعاریف مربوط به توپولوژی شبکه را توسعه دهیم. اینکار را با تعریف

خود توپولوژی بعنوان شاخه‌ای از هندسه شروع می‌کنیم. این مبحث مربوط به خواص از یک شکل هندسی می‌شود که اگر آن شکل را بتابانیم، خم کنیم، تا کنیم، منبسط کنیم، فشرده کنیم و گره بزنیم، تغییر نمی‌کند البته به‌شرطی که هیچ جزئی از شکل جدا نشود و یا بهم وصل نشود. یک گره و یک چهار وجهی و نیز یک مربع و دایره از نظر توپولوژیکی یکسان می‌باشند. بنابراین اکنون در زمینهٔ مدارهای الکتریکی با انواع خاصی از عناصری که در مدار ظاهر می‌شوند کاری نداریم، بلکه فقط به نحوهٔ آرایش شاخه‌ها و گره‌ها توجه داریم. در واقع، ما معمولاً ماهیت عناصر مداری را در نظر نمی‌گیریم و با نشان دادن عناصر به‌صورت خطوط، ترسیم مدار را آسان می‌کنیم. نمودار حاصل یک گراف خطی و یا بطور ساده «گراف» نامیده می‌شود.

یک مدار و گراف آن در شکل ۳۱-۳ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که همهٔ گره‌ها به‌وسیله نقطه‌های درشت در گراف نشان داده شده‌اند.

از آنجاییکه خواص توپولوژیکی یک مدار و یا گراف آن وقتیکه از شکل طبیعی خود خارج می‌شود، تغییر نمی‌کند، بنابراین سه گراف شکل ۳۲-۳ همگی با مدار و گراف شکل ۳۱-۳ از نظر توپولوژیکی یکسان هستند. اصطلاحات توپولوژیکی که قبلاً آموخته‌ایم و تاکنون بطور صحیحی بکار برده‌ایم، عبارتند از:

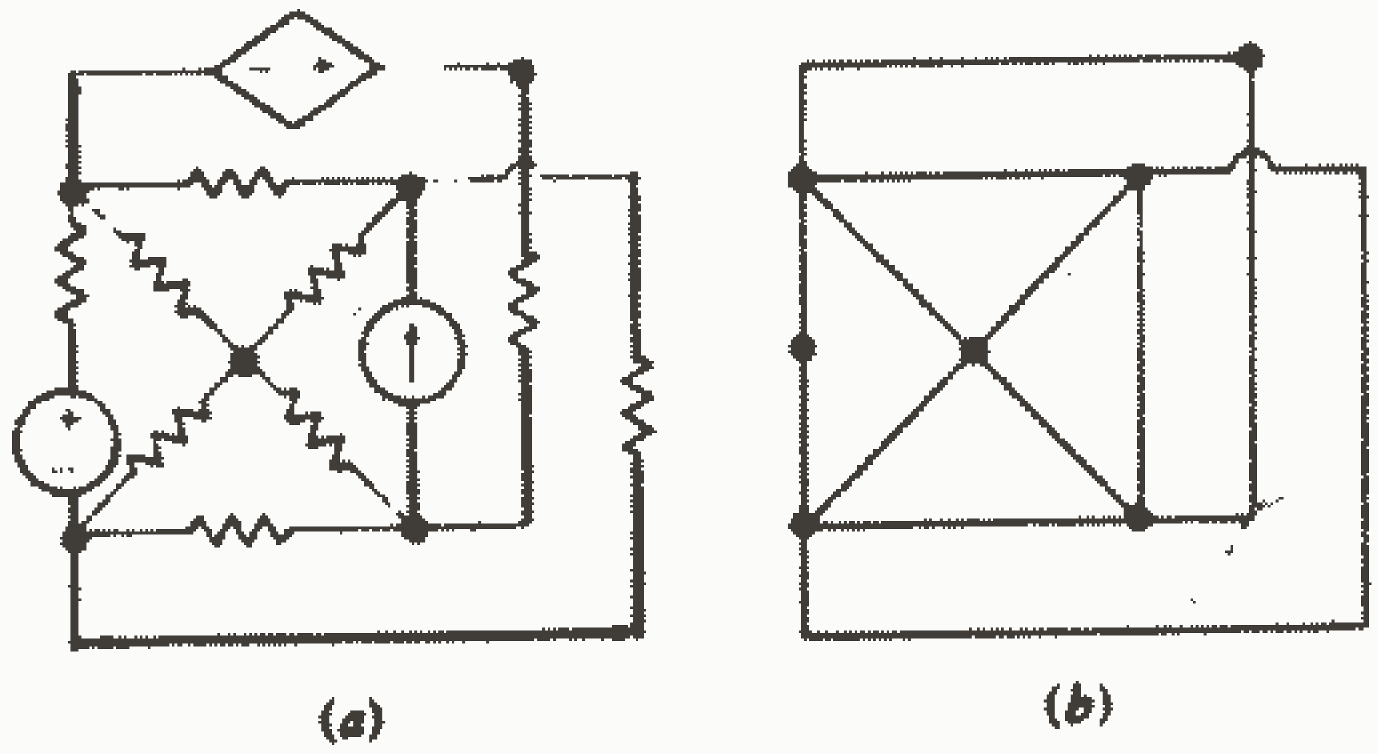
گره: نقطه‌ای است که در آن دو یا چند عنصر دارای اتصال مشترکی هستند.

مسیر: مجموعه‌ای از عناصر که هنگام عبور از آنها از هیچ گرهی بیش از یکبار عبور نکنیم.

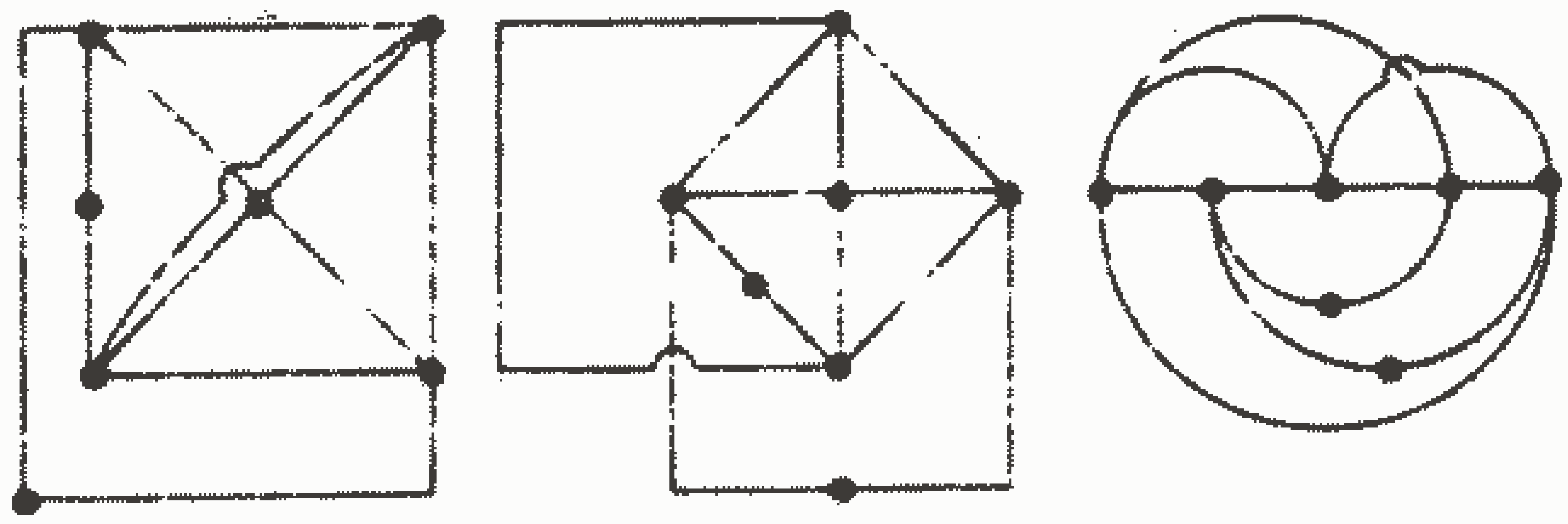
شاخه: مسیری منفرد است که شامل یک عنصر ساده است که یک گره را به گره دیگری وصل می‌کند.

حلقه: مسیر بسته را حلقه گویند.

چشمه: حلقه‌ای است که حلقهٔ دیگری را در داخل خود نداشته باشد.



شکل ۳۱ - ۳: (a) یک مدار داده شده. (b) گراف خطی آن مدار.



شکل ۳۲ ـ ۳: سه گراف نشان داده شده از نظر توپولوژیکی با یکدیگر و با گراف شکل b ۳۱ ـ ۳ یکسان می‌باشند و هر کدام یک گراف از مدار شکل a ۳۱ ـ ۳ می‌باشند.

مدار غیر مسطح: هر مداری که مسطح نباشد را غیرمسطح گویند.

مدار مسطح: مداری است که بتوان آن را در یک سطح مسطح طوری ترسیم نمود که هیچ شاخه‌ای از روی شاخهٔ دیگر عبور نکند.

گرافهای شکل ۳۲-۳ حاوی ۱۲ شاخه و ۷ گره می‌باشند.

سه خاصیت جدید یک گراف خطی یعنی درخت، مکمل درخت و لینک را اکنون باید تعریف کنیم. درخت را به‌صورت هر مجموعه‌ای از شاخه‌ها که شامل هیچ حلقه‌ای نباشند و هر گره را به سایر گره‌ها وصل کند، تعریف می‌کنیم. معمولاً برای یک شبکه درختهای مختلفی را می‌توان رسم نمود و با افزایش پیچیدگی شبکه، تعداد آنها هم به‌سرعت افزایش می‌یابد. گراف سادهٔ شکل ۳۳a-۳ دارای هشت درخت می‌باشد که چهار تای آنها به‌وسیله خطوط ضخیم در شکلهای e تا ۳۳b-۳ نشان داده شده است.

شکل ۳۳ ـ ۳: (a) گراف خطی یک شبکهٔ سه گرهی. (b) , (c) , (d) و (e) چهار درخت از هشت درخت ممکن برای این گراف هستند که با خطوط ضخیم رسم شده‌اند.

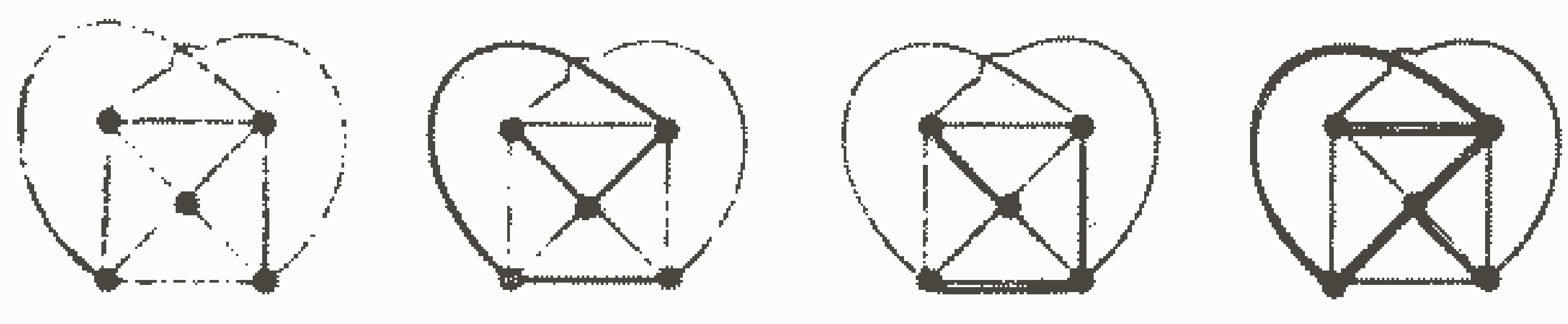
در شکل ۳-۳٤a یک گراف پیچیده‌تر نشان داده شده است. شکل ۳-۳٤b یک درخت ممکن را نشان می‌دهد و شکلهای ۳-۳٤c , d مجموعه‌هایی از شاخه‌ها را نشان می‌دهند که درخت نیستند زیرا هیچکدام در تعریف درخت صدق نمی‌کنند.

بعد از این که یک درخت مشخص شد، شاخه‌هایی که در درخت نیستند بنام «مکمل درخت» نامیده می‌شوند. شاخه‌هایی که در شکلهای e تا ۳-۳۳b با خطوط نازک رسم شده‌اند مکمل درختهای متناظر با درختهای مربوطه می‌باشند.

وقتیکه ساختن یک درخت و مکمل درخت آن را بفهمیم، مفهوم لینک خیلی ساده می‌شود زیرا لینک به هر یک از شاخه‌های مکمل درخت گفته می‌شود. بدیهی است که هر شاخهٔ بخصوصی، بسته به درختی که انتخاب می‌شود، می‌تواند یک لینک باشد و یا نباشد.

تعداد لینکهای یک گراف را می‌توان بسادگی به تعداد شاخه‌ها و گره‌ها مربوط نمود. اگر گراف دارای N گره، آنگاه (N-۱) شاخه برای ایجاد یک درخت لازم است زیرا شاخهٔ اول دو گره را بهم وصل می‌کند ولی برای شاخه‌های دیگر به ازای هر یک گره یک شاخه اضافه می‌شود. بنابراین اگر تعداد شاخه‌ها B باشد، تعداد لینکها عبارت است از:

$$L = B - (N - ۱) \quad \text{و یا} \quad L = B - N + ۱ \qquad (۳۰)$$



(a) (b) (c) (d)

شکل ۳٤ ـ ۳: (a) یک گراف خطی (b) یک درخت ممکن برای این گراف. (c) و (d) این مجموعهٔ شاخه‌ها در تعریف درخت صدق نمی‌کنند.

در مکمل درخت L شاخه و در درخت (N - ۱) شاخه وجود دارد.

در هر یک از گرافهای شکل ۳-۳۳ ملاحظه می‌کنیم که ۱ + ۳ - ۵ = ۳ و در گراف شکل ۳-۳٤b داریم ۱ + ۵ - ۱۰ = ٦. یک شبکه ممکن از چند قسمت مجزا تشکیل شده باشد و در معادله (۳۰) می‌توان برای تعمیم بیشتر آن، ۱ + را با S+ جایگزین نمود که S تعداد قسمتهای مجزا می‌باشد. البته ممکن است دو قسمت مجزا به‌وسیله هادی منفردی بهم وصل شده باشند، که در اینصورت دو گره تبدیل به یک گره می‌شوند و هیچ جریانی از این هادی منفرد

عبور نمی‌کند. این روش را می‌توان برای ملحق نمودن هر تعداد قسمتهای مجزا بکار برد و در نتیجه ما اگر توجه خود را محدود به مدارهایی که برای آنها $S = 1$ بکنیم، هیچگونه کلیتی را از دست نمی‌دهیم.

ما اکنون آماده‌ایم که دربارهٔ روشی بحث کنیم که ما را قادر به نوشتن مجموعه‌ای از معادلات گره که مستقل و کافی هستند، بکند. این روش ما را قادر خواهد ساخت که مجموعه‌های متفاوتی از معادلات برای یک شبکه به‌دست آوریم که همگی صادق باشند. اگر چه این روش همهٔ مجموعه معادلات ممکن را به ما ارائه نمی‌کند. بیایید ابتدا این روش را توصیف کنیم و سپس آن را با سه مثال توضیح دهیم و دلیل مستقل و کافی بودن معادلات را خاطر نشان سازیم.

در هر مدار داده شده باید:

۱ ـ یک گراف رسم کنیم و سپس یک درخت مشخص کنیم.

۲ ـ همهٔ منابع ولتاژ را در درخت قرار دهیم.

۳ ـ همهٔ منابع جریان را در مکمل درخت قرار دهیم.

۴ ـ در صورت امکان همهٔ شاخه‌های ولتاژ کنترل را برای منابع وابستهٔ کنترل شده به‌وسیله ولتاژ، در درخت قرار دهیم.

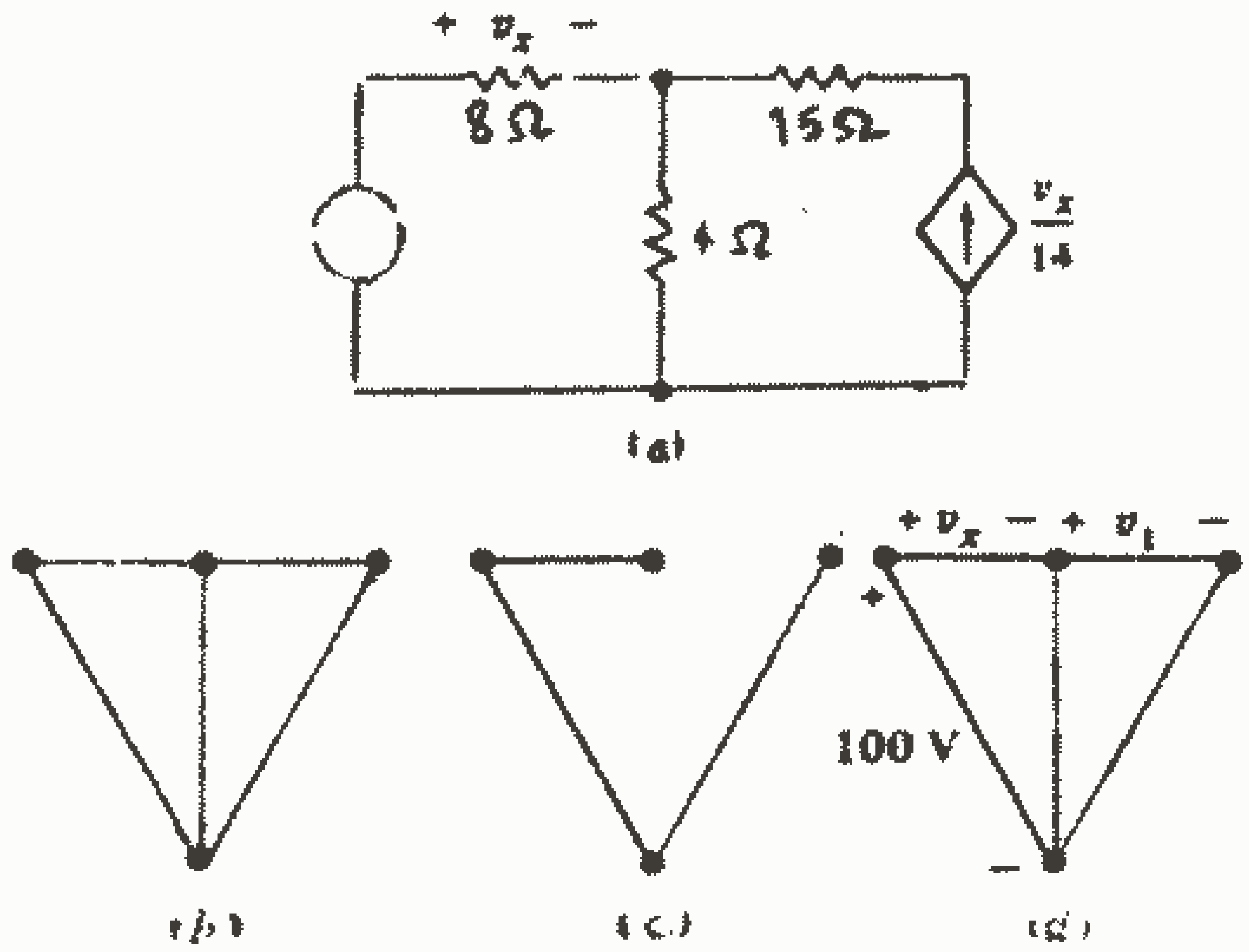
۵ ـ در صورت امکان همهٔ شاخه‌های جریان کنترل را برای منابع وابستهٔ کنترل شده به‌وسیله جریان در مکمل درخت قرار دهیم.

این چهار مرحلهٔ اخیر بطور موثری ولتاژها را به درخت و جریانها را به مکمل درخت مربوط می‌سازد. ما اکنون در دو سر هر یک از $(N - 1)$ شاخهٔ درخت یک متغیر ولتاژ نسبت می‌دهیم. به شاخه‌ای که حاوی یک منبع ولتاژ مستقل یا وابسته است باید آن ولتاژ منبع نسبت داده شود و به شاخه‌ای که حاوی یک ولتاژ کنترل کننده است، باید آن ولتاژ کنترل کننده نسبت داده شود. بنابراین تعداد متغیرهای جدید که معرفی کرده‌ایم برابر است با تعداد شاخه‌های درخت یعنی $(N - 1)$ منهای تعداد منابع ولتاژ موجود در درخت و همچنین منهای تعداد ولتاژهای کنترلی که قادر هستیم در درخت قرار دهیم. در مثال سوم که در پی می آید در می‌یابیم که تعداد متغیرهای جدید لازم، ممکن است صفر باشد.

با داشتن مجموعه‌ای از متغیرها، اکنون نیاز به نوشتن مجموعه‌ای از معادلات داریم که برای تعیین این متغیرها کافی باشند. این معادلات به‌وسیله اعمال KCL به‌دست می آیند. منابع ولتاژ به همان طریقی که در کار قبلی‌مان راجع به تحلیل گره دیدیم به کار می‌روند و هر منبع ولتاژ و

دو گره آن یک فوق نقطه و یا بخشی از یک فوق نقطه را تشکیل می‌دهند. سپس قانون جریان کیرشوف را به هر یک از گره‌ها و فوق نقطه‌ها اعمال می‌کنیم و سپس مجموع جریانهای خارج شونده از هر گره مساوی صفر قرار می‌دهیم. هر جریان بر حسب متغیرهای ولتاژی که تعیین کرده‌ایم بیان می‌شود. و بالاخره در حالتی که منابع وابستهٔ کنترل شده به‌وسیله جریان وجود داشته باشد باید برای هر جریان کنترل یک معادله بنویسیم که آن را به متغیرهای ولتاژ مربوط سازد که البته این امر با روند قبلی برای تحلیل گره منافاتی ندارد.

اجازه دهید این روش را در مدار شکل ۳-۳۵a بکار بریم.



شکل ۳۵ - ۳: (a) مداری که به عنوان مثال برای تحلیل گرهی عمومی در نظر گرفته شده است. (b) گراف مدار مذکور. (c) منبع ولتاژ و ولتاژ کنترل در درخت قرار داده شده‌اند در حالی که منبع جریان در مکمل درخت قرار داده شده است. (d) درخت تکمیل شده است و ولتاژی برای هر شاخهٔ درخت نسبت داده شده است.

این مدار شامل چهار گره و پنج شاخه می‌باشد و گراف آن در شکل ۳-۳۵b نشان داده شده است. طبق مرحلهٔ ۲ و ۳ روند ترسیم درخت، منبع ولتاژ را در درخت و منبع جریان را در مکمل درخت قرار می‌دهیم. با پیروی از مرحله ٤ ملاحظه می‌کنیم که شاخهٔ v_x را هم می‌توان در درخت قرار داد زیرا هیچ حلقه‌ای که تعریف درخت را نقض کند، ایجاد نمی‌کند.

ما اکنون به دو شاخهٔ درختی و یک لینک شکل ۳-۳۵c رسیده‌ایم و ملاحظه می‌کنیم که

هنوز یک درخت نداریم زیرا گره سمت راست به‌وسیله مسیری از طریق شاخه‌های درختی به دیگر گره‌ها وصل نشده است. تنها راه ممکن برای تکمیل درخت در شکل ۳-۳۵d نشان داده شده است. سپس منبع ولتاژ ۱۰۰V، ولتاژ کنترل v_x و یک متغیر ولتاژ v_1 هم در سه شاخهٔ درخت نشان داده شده است.

بنابراین دو مجهول داریم، v_x ، v_1، و بدیهی است که نیاز به دو معادله بر حسب آنها داریم. چهار گره وجود دارد، اما وجود منبع ولتاژ باعث می‌شود که دو تای آنها تشکیل یک فوق نقطه را بدهند. قانون جریان کیرشوف را می‌توان در دو تا از سه گره یا فوق نقطهٔ باقیمانده اعمال نمود. بیایید ابتدا گره راست را در نظر بگیریم. جریانی که به چپ می‌رود عبارت است از $-v_1/۱۵$ در حالیکه جریانی که پایین می‌رود $-v_x/۱۴$ می‌باشد. بنابراین معادلهٔ اول ما عبارت است از:

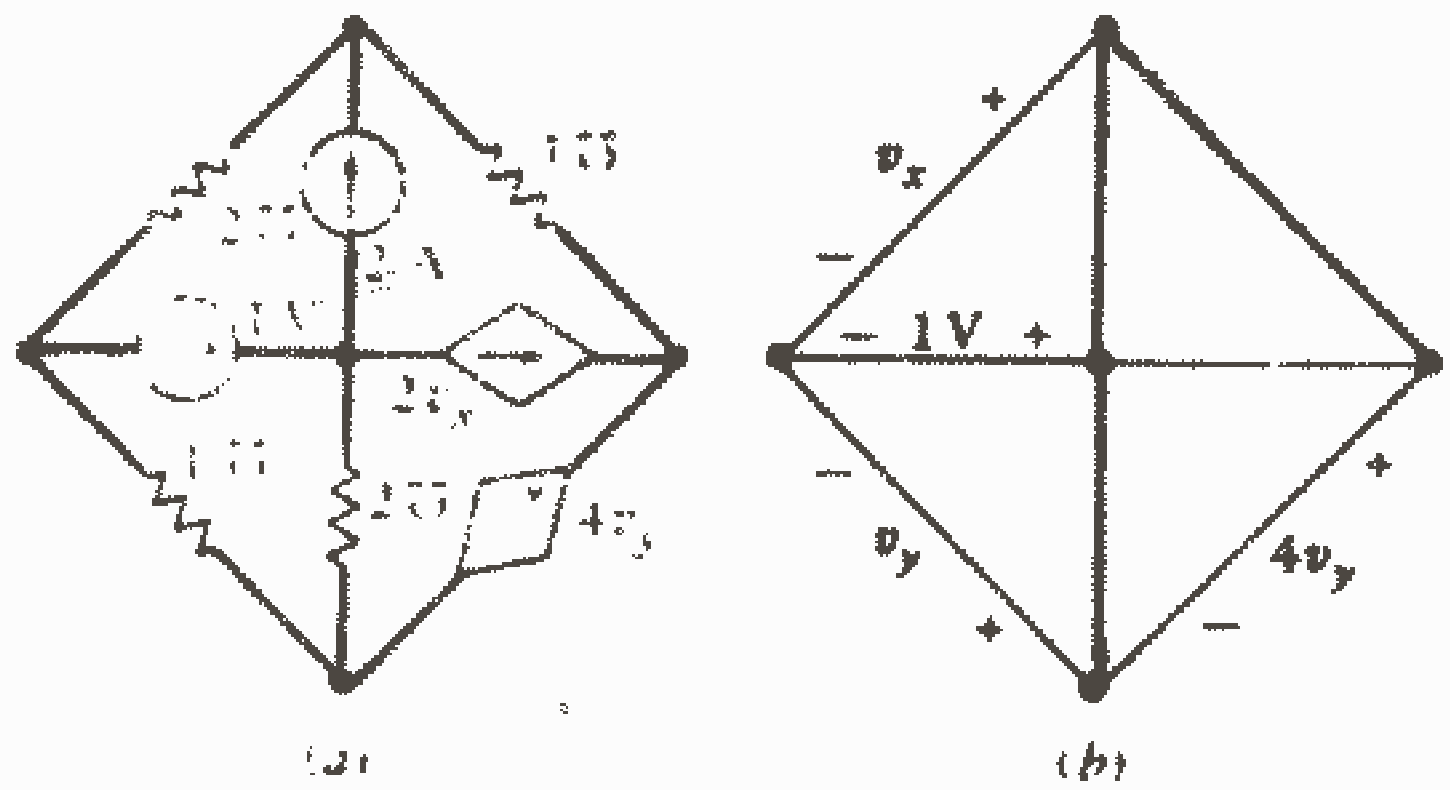
$$-v_1/۱۵ - v_x/۱٤ = 0$$

به‌نظر می‌رسد که گره وسطی در بالای مدار آسانتر از فوق نقطه باشد، بنابراین مجموع جریان رو به چپ $-v_x/۸$، جریان رو به راست $v_1/۱۵$ و جریان رو به پایین در مقاومت $٤\ \Omega$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم. این جریان اخیر عبارت است از ولتاژ دو سر مقاومت تقسیم بر $٤\ \Omega$، اما ولتاژی در دو سر این لینک مشخص نشده است. با وجود این، وقتیکه درختی ایجاد می‌شود بنابر تعریف باید یک مسیر بین هر گره با سایر گره‌ها وجود داشته باشد. پس از آنجاییکه برای هر شاخه در یک درخت ولتاژی نسبت داده شده است می‌توانی ولتاژ دو سر هر لینک را بر حسب ولتاژهای شاخه‌ای درخت بیان کنیم. بنابراین جریان رو به پایین برابر خواهد بود با $(-v_x + ۱۰۰)/٤$ و معادلهٔ دوم ما عبارت خواهد بود از:

$$-v_x/۸ + v_1/۱۵ + (-v_x + ۱۰۰)/٤ = 0$$

حل همزمان این دو معادله با هم جوابهای $v_1 = ٦۰\ V$ ، $v_x = ۵٦\ V$ را ارائه می‌کند.

بعنوان مثال دوم بیایید یک مدار پیچیده‌تر را که قبلاً با تعریف ولتاژهای گره‌ها نسبت به گره مبنا تحلیل کردیم دوباره مورد بررسی قرار دهیم. این مدار همان مدار شکل ۵-۳ می‌باشد که در شکل ۳-۳٦a تکرار شده است. ما یک درخت را بگونه‌ای رسم می‌کنیم که هر دو منبع ولتاژ و هر دو ولتاژ کنترل بعنوان ولتاژهای شاخهٔ درخت و در نتیجه بعنوان متغیرهای تعیین شده ظاهر شوند. این چهار شاخه تشکیل درخت شکل ۳-۳٦b را می‌دهند و ولتاژهای شاخهٔ درخت به‌صورت v_y ، ۱ ، v_x ، $٤v_y$ انتخاب شده‌اند که در شکل نشان داده شده است.



شکل ۳۶ ـ ۳: (a) مدار شکل ۵ ـ ۳ تکرار شده است. (b) درخت به گونه‌ای انتخاب شده است که هر دو منبع ولتاژ و هر دو ولتاژ کنترل شاخه‌های درخت می‌باشند.

دو منبع ولتاژ فوق نقطه‌هایی را تعریف می‌کنند و ما KCL را دو بار اعمال می‌کنیم، یکبار به گره بالایی:

$$۲v_x + ۱(v_x - v_y - ٤v_y) = ۲$$

و یکبار هم به فوق نقطهٔ شامل گره راست، گره پایین و منبع ولتاژ وابسته:

$$۱v_y + ۲(v_y - ۱) + ۱(٤v_y + v_y - v_x) = ۲v_x$$

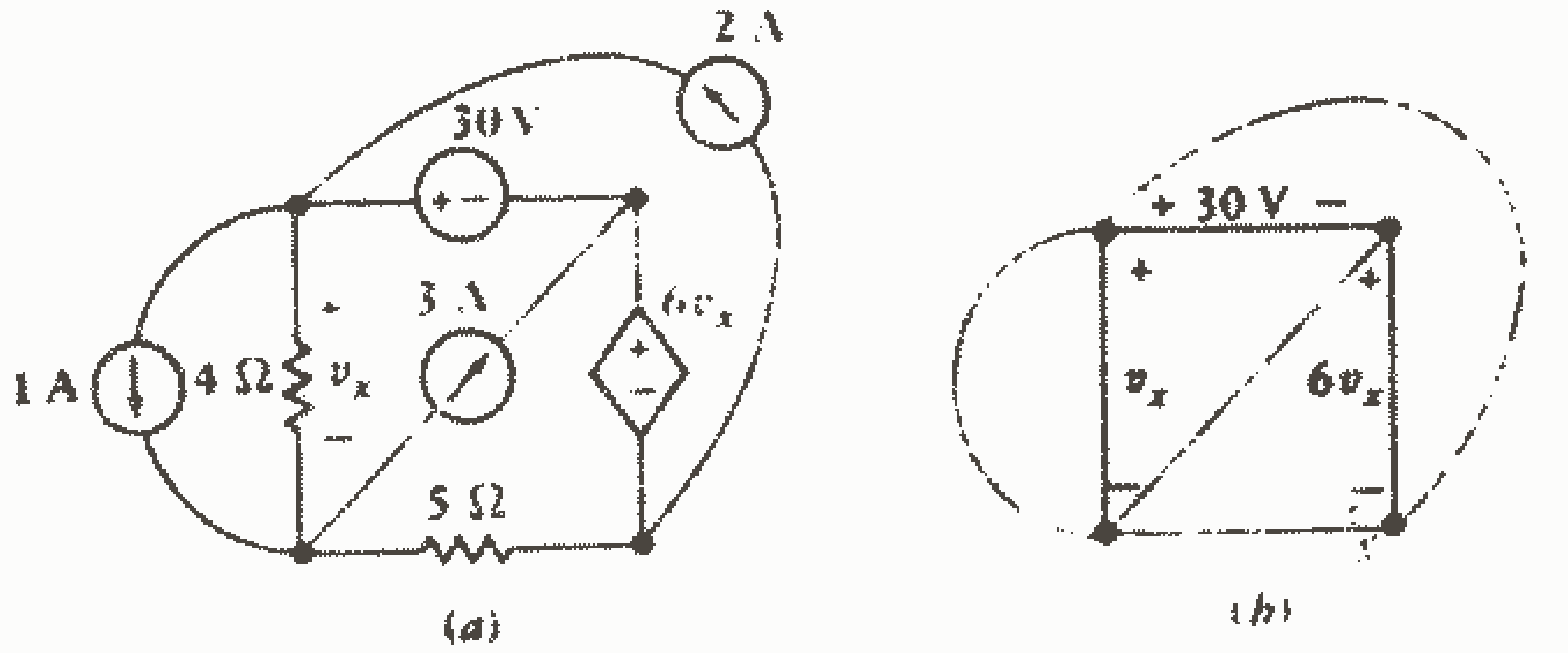
به جای چهار معادله‌ای که قبلاً داشتیم، اکنون فقط دو معادله داریم که به‌سادگی به‌دست آوریم: $v_y = \frac{٤}{۳}\ V$ ، $v_x = \frac{۲٦}{۹}\ V$ که هر دو جواب با جوابهای قبلی مطابقت دارند.

بعنوان آخرین مثال مدار شکل ۳-۳۷a را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دو منبع ولتاژ و ولتاژ کنترل درخت سه شاخه‌ای شکل ۳-۳۷a را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دو منبع ولتاژ و ولتاژ کنترل درخت سه شاخه‌ای شکل ۳-۳۷b را ایجاد می‌کنند. از آنجاییکه دو گره بالایی و گره راست همگی با هم تشکیل یک فوق نقطه را می‌دهند ما فقط احتیاج به یکبار نوشتن معادلهٔ KCL داریم. با انتخاب گره پایین سمت چپ، داریم:

$$-۱ - v_x/٤ + ۳ + (-v_x + ۳۰ + ٦v_x)\ /\ ۵ = 0$$

از معادلهٔ فوق خواهیم داشت: $v_x = -۳۲/۳۷$. علیرغم ظاهر پیچیده این مدار، استفاده از تحلیل گرهی عمومی به راه حل ساده‌ای رهنمون می‌شود. بکارگیری ولتاژهای گره به مبنا و جریانهای چشمه‌ای نیاز به معادلات بیشتر و تلاش بیشتر دارد.

مسئلهٔ پیدا کردن بهترین روشن تحلیل را در قسمت بعدی مورد بحث قرار خواهیم داد. اگر در مثال قبلی نیاز به دانستن ولتاژ، جریان و یا قدرت دیگری داشتیم فقط یک قدم اضافی جواب را به ما می‌داد. مثلاً قدرت ارائه شده به‌وسیله منبع ۳A برابر است با ۱۲۲W− = (۳/۳۲−۳۰−)۳.



شکل ۳۷ ـ ۳: (a) مداری که برای آن فقط یک ممعادله گرهی عمومی لازم است. (b) درخت و ولتاژهای شاخهٔ درختی به کار رفته.

اجازه دهید بحث را با بررسی کافی بودن مجموعهٔ ولتاژهای شاخهٔ درختی مفروض و مستقل بودن معادلات گرهی به پایان بریم. اگر این ولتاژهای شاخه درختی کافی باشند، آنگاه ولتاژ هر شاخهٔ درخت یا مکمل درخت باید از اطلاعاتی که دربارهٔ همهٔ مقادیر ولتاژهای شاخه درخت داریم، قابل دسترس باشند. این مطلب مطمئناً برای شاخه‌های درخت صادق است. برای لینکها می‌دانیم که هر لینک بین دو گره قرار دارد و بنابر تعریف، درخت هم باید آن دو گره را بهم وصل کرده باشد. بنابراین هر ولتاژ را هم می‌توان بر حسب ولتاژهای شاخه درختی بیان نمود.

وقتیکه ولتاژ دو سر هر شاخه در مدار معلوم باشد آنگاه همهٔ جریانها را می‌توان یا به‌وسیله مقادیر داده شده منابع جریان، اگر شاخه حاوی یک منبع جریان باشد و یا به‌وسیله قانون اهم، اگر شاخه مقاومتی باشد و یا با استفاده از KCL و این مقادیر جریان وقتیکه شاخه، یک منبع ولتاژ باشد، به‌دست آورد. بنابراین همه ولتاژها و جریانها تعیین می‌شوند و کافی بودن مشاهده می‌شود.

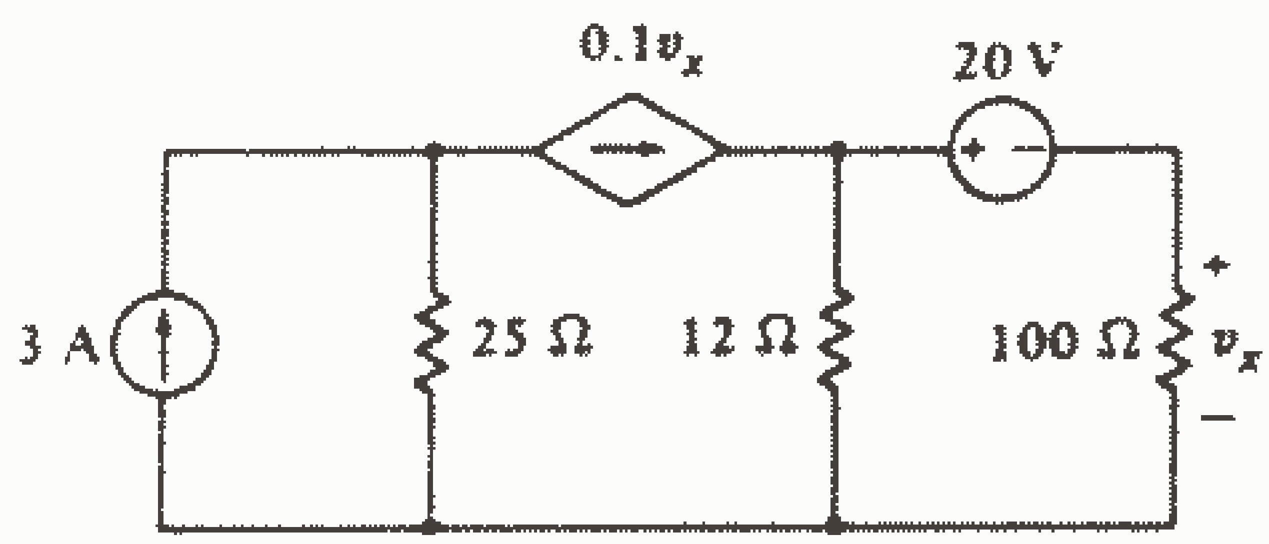
برای نشان دادن استقلال، بیایید خودمان را با فرض نمودن حالتی که فقط منابع مستقل جریان در شبکه موجود باشند ارضاء کنیم. همانگونه که قبلاً ملاحظه کرده‌ایم، منابع مستقل ولتاژ در مدار باعث کاهش تعداد معادلات می‌شوند در حالیکه منابع وابسته معمولاً تعداد معادلات بیشتری را ایجاب می‌کند. در حالتی که فقط منابع جریان مستقل موجود باشند، آنگاه دقیقاً

(۱ − N) معادلهٔ گرهی که بر حسب (۱ − N) ولتاژ شاخهٔ درختی نوشته شده باشند، لازم است. برای نشان دادن اینکه این (۱ − N) معادله مستقل می‌باشند، اعمال KCL را به (N-۱) گره مختلف تجسم کنید. هر دفعه که معادلهٔ KCL را می‌نویسیم یک شاخهٔ درختی جدیدی وجود دارد که آن گره را به بقیه درخت وصل می‌کند. این مطلب برای هر یک از (۱ − N) گره صحیح است و بنابراین ما (۱ − N) معادلهٔ مستقل خواهیم داشت.

تمرین

۱۰ ـ ۳ ـ (a) چند درخت می‌توان برای شکل ۳۸ـ۳ ایجاد نمود که تمام پنج مرحلهٔ ترسیم درخت را که قبلاً فهرست شده است، در بر داشته باشد؟ (b) یک درخت مناسب رسم کنید و دو معادله بر حسب دو مجهول بنویسید و v_x را پیدا کنید. (c) چه قدرتی به‌وسیله منبع وابسته ارائه می‌شود؟

جواب: ۱ , ۲۵۰ V , ۲۰٫۵ KW



شکل ۳۸ ـ ۳: به تمرین ۱۰ ـ ۳ مراجعه کنید.

۸ - ۳ لینکها و تحلیل حلقه

اکنون باید کاربرد یک درخت را برای به دست آوردن مجموعهٔ مناسبی از معادلات حلقه مورد توجه قرار دهیم. از بعضی جهات این مورد متناظر روش نوشتن معادلات گره می‌باشد. باز هم باید خاطر نشان کنیم که اگر چه ما قادریم تضمین کنیم که معادلاتی را که می‌نویسیم هم کافی و هم مستقل هستند ولی نباید انتظار داشته باشیم که این روش ما را مستقیماً به تمام مجموعه معادلات ممکن رهنمون خواهد شد.

ما باز هم با ایجاد یک درخت و استفاده از همان قواعدی که برای تحلیل گرهی عمومی به کار بردیم شروع می‌کنیم. در تحلیل گرهی یا حلقه‌ای هدف ما قرار دادن ولتاژها در درخت و

جریانها در مکمل درخت می‌باشد که این یک قاعده اجباری برای منابع و یک قاعدهٔ مطلوب برای کمیتهای کنترل‌کننده می‌باشد.

اگر چه، اکنون به جای نسبت دادن یک ولتاژ به هر شاخهٔ درخت، یک جریان (البته با فلش مبنا) به هر عنصر مکمل درخت و یا هر لینک نسبت می‌دهیم. اگر ده لینک وجود داشته باشد دقیقاً ده جریان لینک نسبت می‌دهیم. هر لینک که دارای یک منبع جریان باشد همان جریان منبع را به عنوان جریان لینک تعیین می‌کنیم.

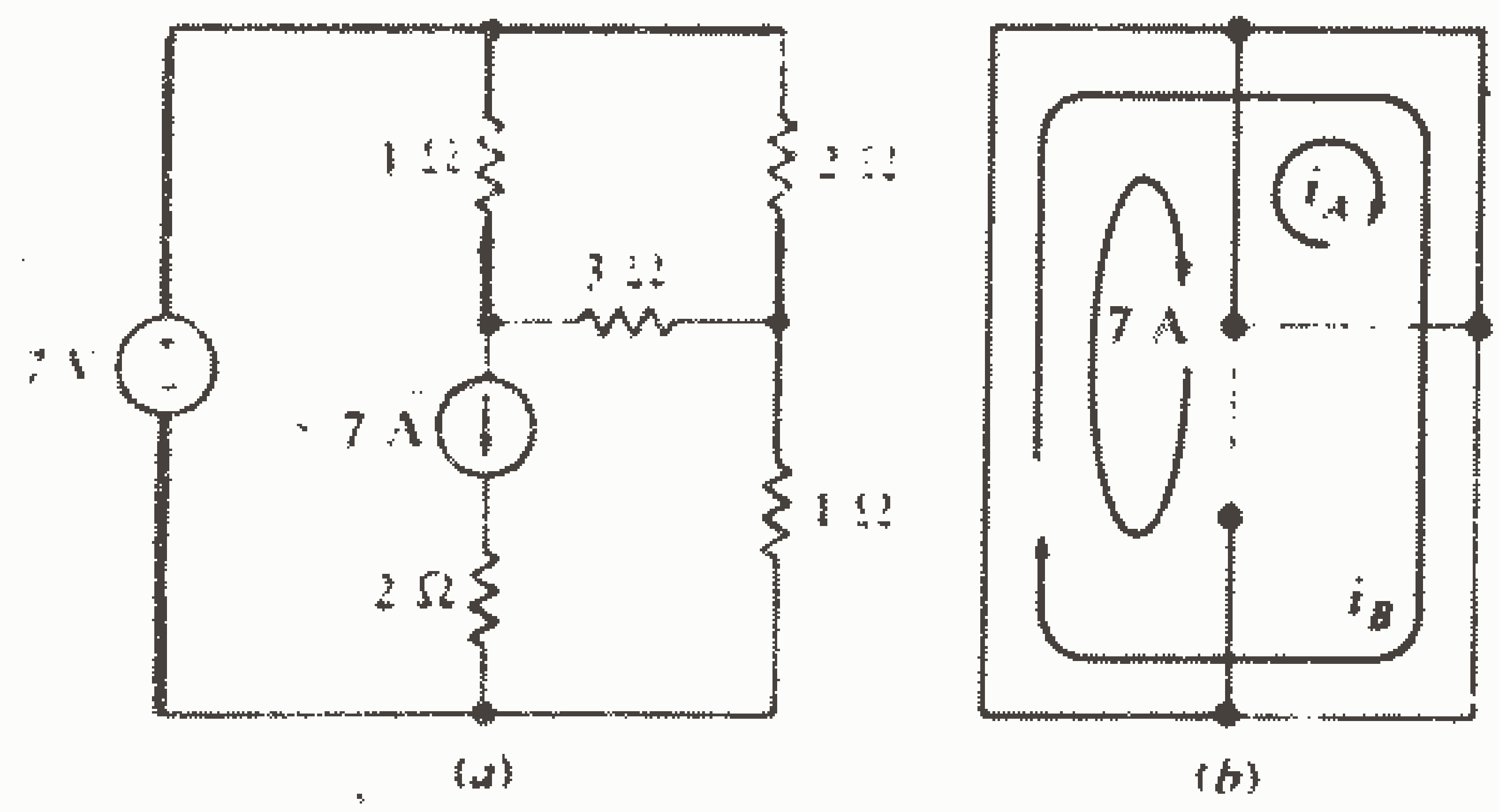
توجه داشته باشید که هر جریان لینک را می‌توان به عنوان یک جریان حلقه هم در نظر گرفت زیرا لینک باید بین دو گره مشخص کشیده شده باشد و نیز باید مسیری بین آن دو گره در درخت وجود داشته باشد. بنابراین برای هر لینک یک حلقهٔ منفردی وجود دارد که شامل آن لینک و مسیر یکتایی در درخت می‌باشد. بدیهی است که جریان نسبت داده شده را می‌توان هم به عنوان یک جریان حلقه و یا یک جریان لینک تصور نمود. مفهوم لینک هنگام تعریف نمودن جریانها خیلی مفید است و برای هر لینک یک جریان تعریف نمود و تعبیر حلقه هنگام نوشتن معادلات بسیار مناسب است زیرا ما باید KVL را در هر حلقه اعمال کنیم.

بیایید این روند تعریف جریانهای لینک را با توجه مجدد به یک مثال قبلی به کار بریم. مدار در شکل ۱۲-۳ نشان داده شده است که در شکل ۳۹a-۳ مجددا رسم شده است. درخت انتخاب شده یکی از چندین حالت ممکن است که در آن منبع ولتاژ در یک شاخهٔ درخت و منبع جریان در یک لینک قرار دارد بیایید ابتدا لینک حاوی منبع جریان را در نظر بگیریم. حلقهٔ مربوط به این لینک، چشمهٔ سمت چپ می‌باشد، بنابراین جریان لینک را در محیط این چشمه در نظر می‌گیریم (شکل b ۳۹-۳). یک انتخاب آشکار و بدیهی برای علامت این جریان لینک عبارت از «۷A» می‌باشد. به یاد داشته باشید که هیچ جریان دیگری نمی‌تواند از میان این لینک به خصوص عبور کند در نتیجه مقدار جریان آن باید دقیقاً نیروی منبع جریان باشد.

حال توجه خود را به لینک مقاومت ۳ Ω معطوف می‌کنیم. حلقهٔ مربوط به آن عبارت از چشمهٔ سمت راست بالا می‌باشد و این جریان حلقه (یا چشمه) به صورت i_A تعریف شده و در شکل b ۳۹-۳ نشان داده شده است. آخرین لینک مقاومت ۱ Ω پایین می‌باشد و تنها مسیر بین ترمینالهای آن در درخت، روی محیط مدار می‌باشد این جریان لینک را i_B می‌نامیم و فلش مسیر و جهت مبنای آن در شکل b ۳۹-۳ نشان داده شده است. آن یک جریان چشمه‌ای نمی‌باشد.

توجه داشته باشید که هر لینک فقط یک جریان در خودش دارد اما یک شاخهٔ درخت ممکن است هر تعداد از یک تا کل تعداد جریانهای لینک مشخص شده را دارا باشد. استفاده از فلش

طویل (تقریباً بسته) برای نشان دادن حلقه‌ها کمک می‌کند که مشخص کنیم کدام جریان حلقه در کدام شاخهٔ درخت جاری است و جهت مبنای آن کدام است.



شکل ۳۹ - ۳: (a) مدار شکل ۱۲ - ۳ که دوباره نشان داده شده است.
(b) یک درخت طوری انتخاب شده است که منبع جریان در یک لینک و منبع ولتاژ در یک شاخهٔ درخت باشد.

اکنون باید در هر یک از این حلقه‌ها یک معادلهٔ KVL بنویسیم. متغیرهای به کار رفته همان جریانهای لینک تعیین شده می‌باشند. از آنجاییکه ولتاژ دو سر یک منبع جریان را نمی‌توان بر حسب جریان آن بیان نمود و چون ما قبلاً مقدار جریان منبع را به عنوان جریان لینک به کار برده‌ایم، بنابراین هر حلقه‌ای را که شامل یک منبع جریان باشد کنار می‌گذاریم. برای مدار شکل ۳-۳۹، ابتدا در حلقهٔ i_A از گوشهٔ پایین سمت چپ در جهت ساعت حرکت می‌کنیم. جریانی که از مقاومت ۱ Ω عبور می‌کند عبارت از $(i_A-۷)$ و جریان عنصر ۲ Ω عبارت از (i_A+i_B) و جریان لینک i_A می‌باشد. بنابراین داریم:

$$۱(i_A - ۷) + ۲(i_A + i_B) + ۳i_A = 0$$

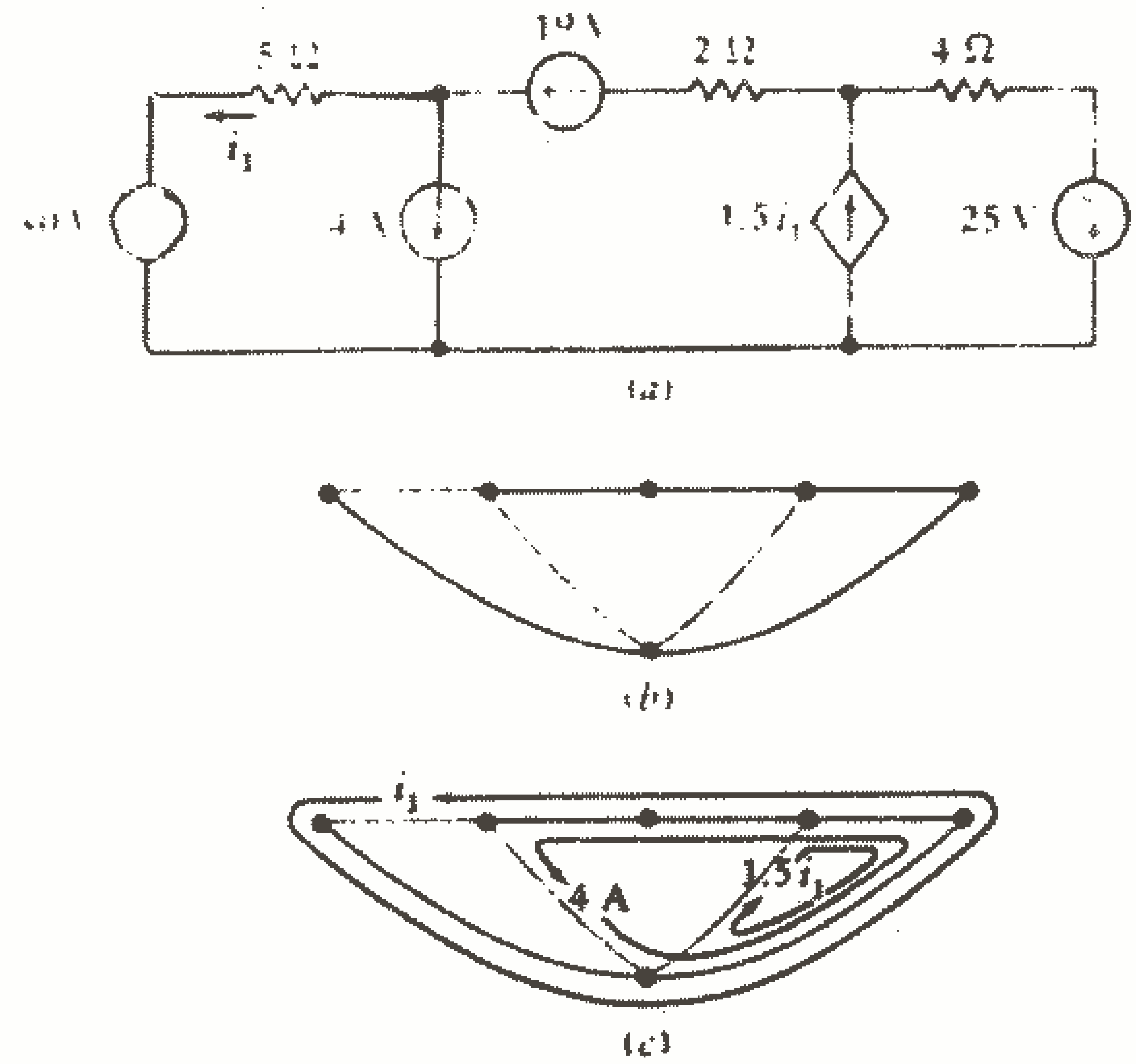
برای لینک i_B حرکت در جهت ساعت از گوشهٔ پایین سمت چپ معادلهٔ زیر را به ما می‌دهد:

$$-۷ + ۲\ (i_A + i_B) + ۱\ i_B = 0$$

حرکت در حلقهٔ ۷ آمپری لازم نیست. با حل معادلات بالا خواهیم داشت: $i_B=۲A$، $i_A=۰/۵A$ یکبار دیگر همان جوابهای قبلی را اما با یک معادلهٔ کمتر به دست آورده‌ایم.

یک مثال حاوی یک منبع وابسته در شکل a ۴۰-۳ نشان داده شده است. این مدار شامل

شش گره می‌باشد و در نتیجه درخت آن باید دارای پنج شاخه باشد. از آنجاییکه هشت عنصر در شبکه موجود است، سه لینک در مکمل درخت وجود خواهد داشت.



شکل ۴۰ ـ ۳: (a) مداری که در آن i_1 را می‌توان با یک معادله با استفاده از تحلیل حلقهٔ عمومی به دست آورد. (b) تنها درختی که قواعد ذکر شده در قسمت ۷ ـ ۳ را اقناع می‌کند. (c) سه جریان لینک با حلقه‌هایشان نشان داده شده‌اند.

اگر سه منبع ولتاژ را در درخت و دو منبع جریان و جریان کنترل را در مکمل درخت قرار دهیم، درخت شکل b ۴۰-۳ به دست می آید.

جریان منبع ۴A یک حلقه را مطابق شکل c ۴۰-۳ تعریف می‌کند. منبع وابسته، جریان حلقهٔ i_1 ۱٫۵ را در چشمه راست ایجاد می‌کند و جریان کنترل i_1 جریان حلقهٔ باقیمانده را در حول محیط مدار ارائه می‌کند. توجه داشته باشید که هر سه جریان از مقاومت ۴ Ω عبور می‌کنند.

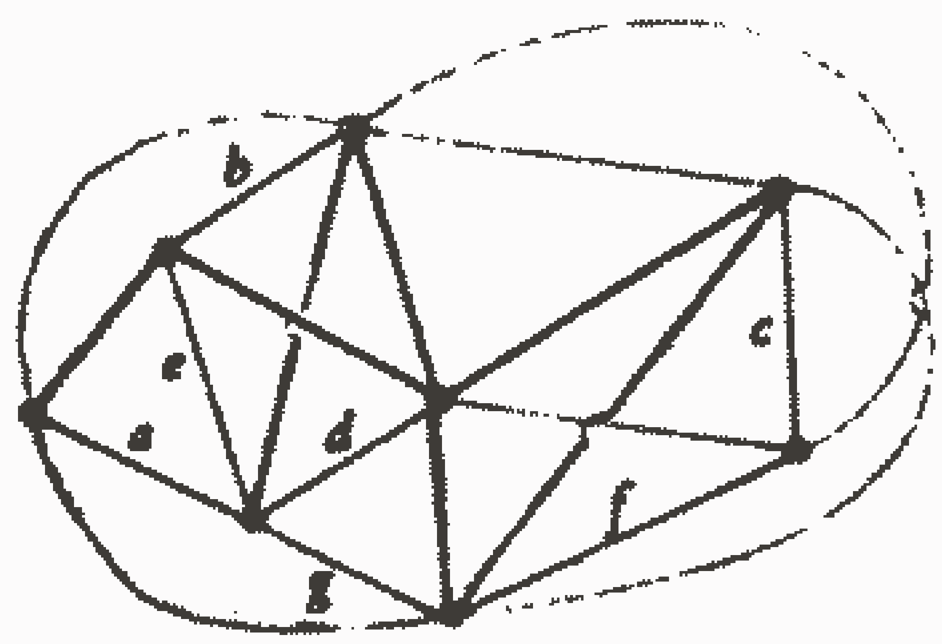
ما اکنون فقط یک کمیت مجهول به نام i_1 داریم و بعد از کنار گذاشتن دو حلقه‌ای که به وسیله دو منبع جریان تعریف شده‌اند، KVL را در حول حلقهٔ بیرونی مدار اعمال می‌کنیم:

$$-۳۰ + ۵(-i_1) + ۱۹ + ۲(-i_1 - ۴) + ۴(-i_1 - ۴ + ۱٫۵\, i_1) - ۲۵ = ۰$$

علاوه بر سه منبع ولتاژ، سه مقاومت هم در این حلقه وجود دارد. مقاومت Ω ۵ فقط یک جریان حلقه در داخل خود دارد زیرا آن یک لینک هم می‌باشد، مقاومت Ω ۲ حاوی دو جریان حلقه‌ای می‌باشد و مقاومت Ω ٤ دارای سه جریان می‌باشد. اگر بخواهیم از خطاها در جریانهای جهنده و یا خطا در تعیین جهت صحیح اجتناب کنیم یک مجموعهٔ با دقت ترسیم شده از حلقه‌ها لازم می‌باشد. اگر چه اعتبار معادلهٔ قبلی را تضمین می‌کنیم و با حل آن خواهیم داشت:

$$i_1 = -12A.$$

چگونه کافی بودن این روش را نشان دهیم؟ بیاید یک درخت را تجسم کنیم که دارای هیچ حلقه‌ای نمی‌باشد بنابراین حداقل دو گره وجود دارد که به هر کدام فقط یک شاخهٔ درخت وصل شده است. جریان هر یک از این شاخه‌ها را می‌توان به سادگی از جریانهای لینک معلوم و به وسیله KCL به دست آورد. اگر گره‌های دیگری هم وجود داشته باشند که به آنها فقط یک شاخهٔ درختی وصل شده باشد، این جریانهای شاخهٔ درختی را هم می‌توان فوراً به دست آورد. بنابراین در درخت شکل ٤١ ـ ٣ ما جریانهای شاخه‌های d,c,b,a را پیدا کرده‌ایم. اکنون در طول شاخه‌های درخت حرکت می‌کنیم و جریانهای شاخه‌های f,e را پیدا می‌کنیم، این روند را می‌توان تا پیدا کردن همه جریانهای شاخه‌ها ادامه داد. بنابراین جریانهای لینک برای تعیین تمام جریانهای شاخه کافی می‌باشند. بهتر است وضعیتی را هم در نظر بگیریم که یک درخت غلط رسم شده باشد که شامل یک حلقه باشد. حتی وقتیکه همه جریانهای لینک صفر باشند. هنوز هم باید یک جریان در این «حلقهٔ درخت» دور بزند. بنابراین، جریانهای لینک نمی‌توانند این جریان را تعیین کنند و یک مجموعهٔ کافی را ارائه نمی‌کنند. چنین درختی بنابر تعریف غیرممکن است.



شکل ٤١ ـ ٣: یک درخت که به عنوان مثال برای توضیح کافی بودن جریانهای لینک به کار رفته است.

برای نشان دادن استقلال، بیایید خود را با فرض نمودن وضعیتی که در آن فقط منابع ولتاژ مستقل در مدار موجود باشند، قانع کنیم. همانگونه که قبلاً اشاره کردیم، منابع جریان مستقل در مدار باعث کاهش معادلات می‌شوند در حالیکه منابع وابسته معمولاً تعداد معادلات بیشتری را ایجاب می‌کنند.

در حالیکه فقط منابع ولتاژ مستقل داشته باشیم، دقیقاً (B − N +۱) معادلهٔ حلقه بر حسب (B − N + ۱) جریان لینک می‌توان نوشت. برای نشان دادن اینکه این (B − N + ۱) معادله حلقه مستقل هستند، کافی است خاطر نشان کنیم که هر یک از این معادلات بیانگر اعمال KVL حول حلقه‌ای می‌باشند که شامل لینکی است که در هیچ یک از معادلات دیگر ظاهر نشده است ما می‌توانیم در هر یک از این لینکها مقاومتهای متفاوت R_1, R_2, R_{B-N+1} را در نظر بگیریم که در این صورت بدیهی است که یک معادله هرگز نمی‌تواند از سایرین به دست آید زیرا دارای ضریبی است که در هیچ یک از معادلات دیگر ظاهر نمی‌شود.

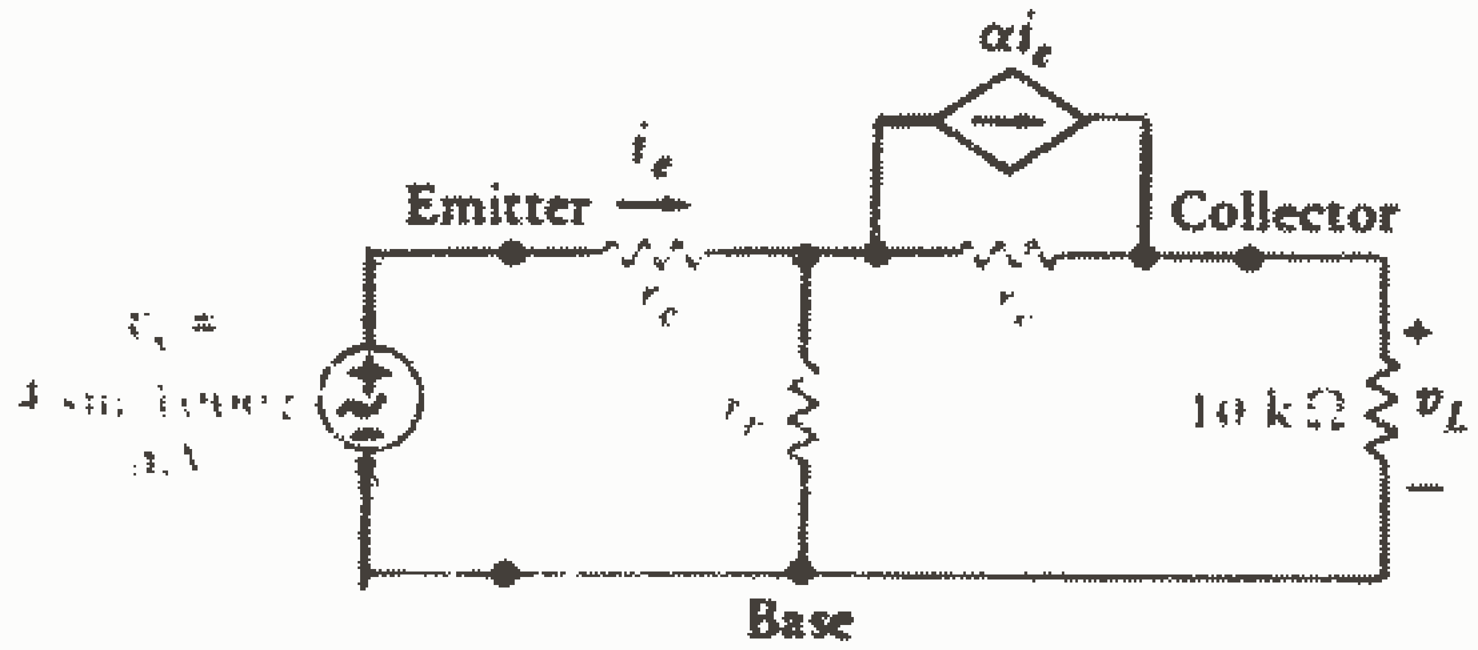
بنابراین جریانهای لینک برای به دست آوردن یک جواب کامل، کافی می‌باشند و مجموعهٔ معادلات حلقه که برای پیدا کردن جریانهای لینک به کار می‌بریم یک مجموعهٔ مستقل می‌باشند.

با بررسی روش تحلیل گرهی عمومی و تحلیل حلقه‌ای، اکنون باید مزایا و معایب هر یک را مورد توجه قرار دهیم به طوریکه انتخاب هوشیارانه‌ای برای یک راه‌حل بتوانیم انجام دهیم.

روش گرهی به طور کلی نیاز به (N − ۱) معادله دارد اما این تعداد به ازای هر منبع ولتاژ مستقل یا وابسته در یک شاخهٔ درختی یک واحد کاهش می‌یابد و به ازای هر منبع وابستهٔ کنترل‌شونده به وسیله ولتاژ لنیک و یا جریان یک واحد افزایش می‌یابد.

روش حلقه اساساً دارای (B − N + ۱) معادله می‌باشد. اگر چه، هر منبع جریان مستقل یا وابسته در یک لینک این تعداد را یک واحد کاهش می‌دهد در حالیکه هر منبع وابسته کنترل‌شونده با یک جریان شاخهٔ درخت و یا کنترل‌شونده به وسیله ولتاژ این تعداد را یک واحد افزایش می‌دهد.

به عنوان حسن ختامی برای این بحث بیایید مدار معادل T یک ترانزیستور را که در شکل ۴۲ ـ ۳ نشان داده شده است و به آن یک منبع سینوسی ٤ sim ۱۰۰۰t mv و یک بار ۱۰K Ω وصل شده است، بررسی کنیم. مقادیر معمول برای مقاومت امیتر، r_e =۵۰ Ω، و مقاومت بیس، r_b = ۵۰۰ Ω، و مقاومت کلکتور، r_c = ۲۰k Ω، و ضریب انتقال جریان مستقیم بیس مشترک، α = ۰٫۹۸، را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید که می‌خواهیم جریان ورودی (امیتر) i_e و ولتاژ بار v_L را پیدا کنیم.



شکل ٤۲ - ۳: یک منبع ولتاژ سینوسی و یک بار ۱۰kΩ به مدار معادل T یک ترانزیستور وصل شده است. اتصال مشترک ورودی و خروجی در ترمینال بیس می‌باشد و این آرایش را بیس مشترک می‌نامند.

اگر چه جزئیات در تمرینات ۱۲ - ۳ و ۱۳ - ۳ خواسته شده است ولی به سادگی مشاهده می‌کنیم که تحلیل این مدار به وسیله ترسیم درختهایی که نیاز به سه معادلهٔ گرهی عمومی (۱ + ۱ - ۱ - N) و یا دو معادله حلقه (۱ - ۱ + B - N) دارند، می‌تواند انجام شود. همچنین باید توجه داشته باشیم که سه معادله بر حسب ولتاژهای گره به مبنا و یا سه معادلهٔ چشمه‌ای مورد نیاز می‌باشند.

صرفنظر از روشی که انتخاب می‌کنیم، این نتایج برای این مدار بخصوص به دست می‌آیند:

$$i_e = ۱۸٫۱٤ \sin ۱۰۰۰t\ \mu A,\quad v_L = ۱۱۹٫٦ \sin ۱۰۰۰t\ mV$$

بنابراین در می‌یابیم که این مدار ترانزیستوری بهرهٔ ولتاژ (v_L/v_s)، ۲۹٫۹، بهرهٔ جریان ($v_L/۱۰۰۰۰\ i_e$) ۰٫٦۵۹ و بهرهٔ قدرت ۱۹٫۷۰ = (۰٫٦۵۹)۲۹٫۹ را ارائه می‌کند. گینهای بالاتر را می‌توان با آرایش امیتر مشترک ترانزیستور به دست آورد.

تمرین

۱۱ - ۳ - یک درخت مناسب رسم نموده و با استفاده از روش تحلیل حلقهٔ عمومی i_A را در مدارهای زیر به دست آورید: (a) شکل ٤۳a - ۳ را به وسیله نوشتن فقط یک معادله بر حسب متغیر i_A. (b) شکل ٤۳b - ۳ به وسیله نوشتن دو معادله بر حسب متغیرهای i_A ، i_B.

جواب: ۱٫٦A ، ۹٫۳۹

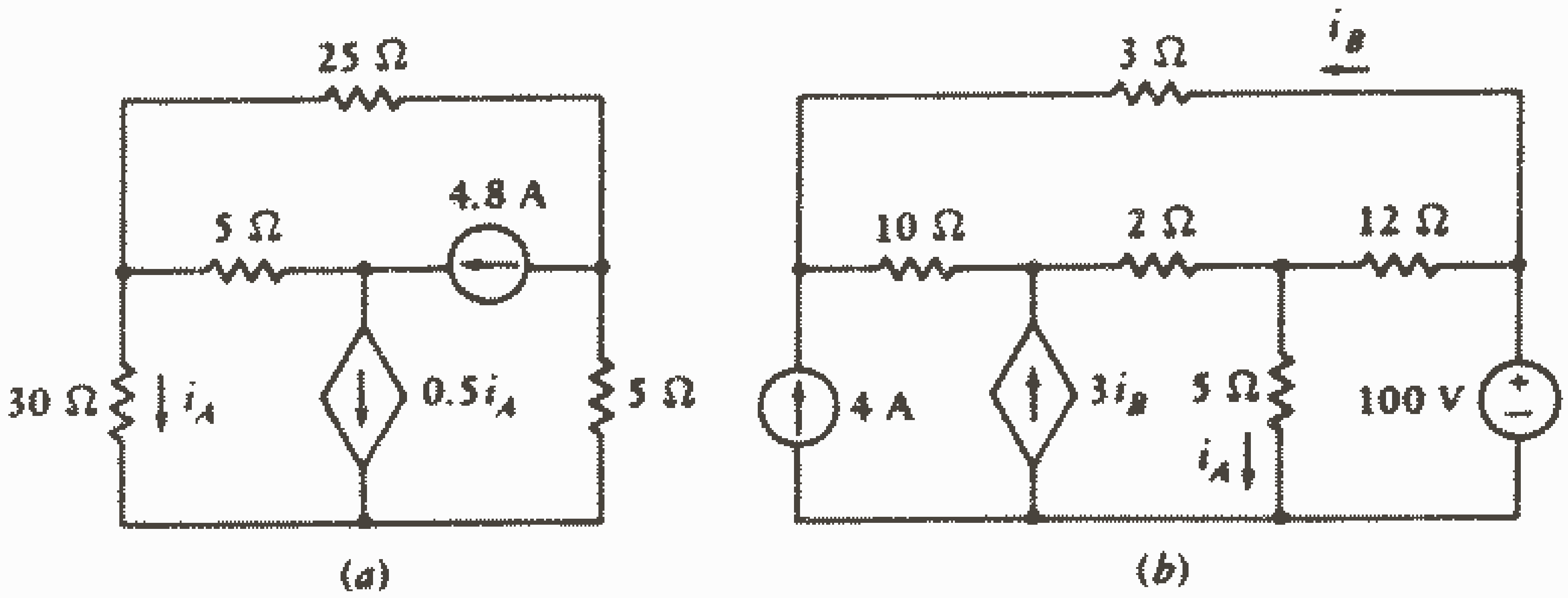
۱۲ - ۳ - برای مدار معادل تقویت‌کننده ترانزیستوری شکل ٤۲ ـ ۳ مقادیر $r_e = ۵۰\ \Omega$ و $r_b = ۵۰۰\ \Omega$ و $r_c = ۲۰K\ \Omega$ ، $\alpha = ۰٫۹۸$ را در نظر بگیرید و i_e ، v_L را با ترسیم یک درخت

مناسب و با استفاده از: (a) دو معادله حلقه. (b) سه معادله گرهی با یک گره مبنای مشترک برای ولتاژ، (c) سه معادله گرهی بدون گره مبنای مشترک، پیدا کنید.

جواب: ۱۱۹٫۶ sin ۱۰۰۰t mV , ۱۸٫۱٤ sin ۱۰۰۰t mA

۱۳ ـ ۳ ـ مدار معادل تونن و نورتن را از دید مقاومت ۱۰k Ω در شکل ٤۲-۳ در حالات زیر پیدا کنید: (a) با پیدا کردن مقدار مدار باز v_L. (b) با پیدا کردن جریان اتصال کوتاه (رو به پایین). (c) با پیدا کردن مقاومت معادل تونن.(همهٔ مقادیر مداری در تمرین ۱۲-۳ داده شده است.)

جواب: ۲٫۲۳k Ω, ٦۵٫٦ sin ۱۰۰۰t µA, ۱٤٦٫۲ sin ۱۰۰۰t mV



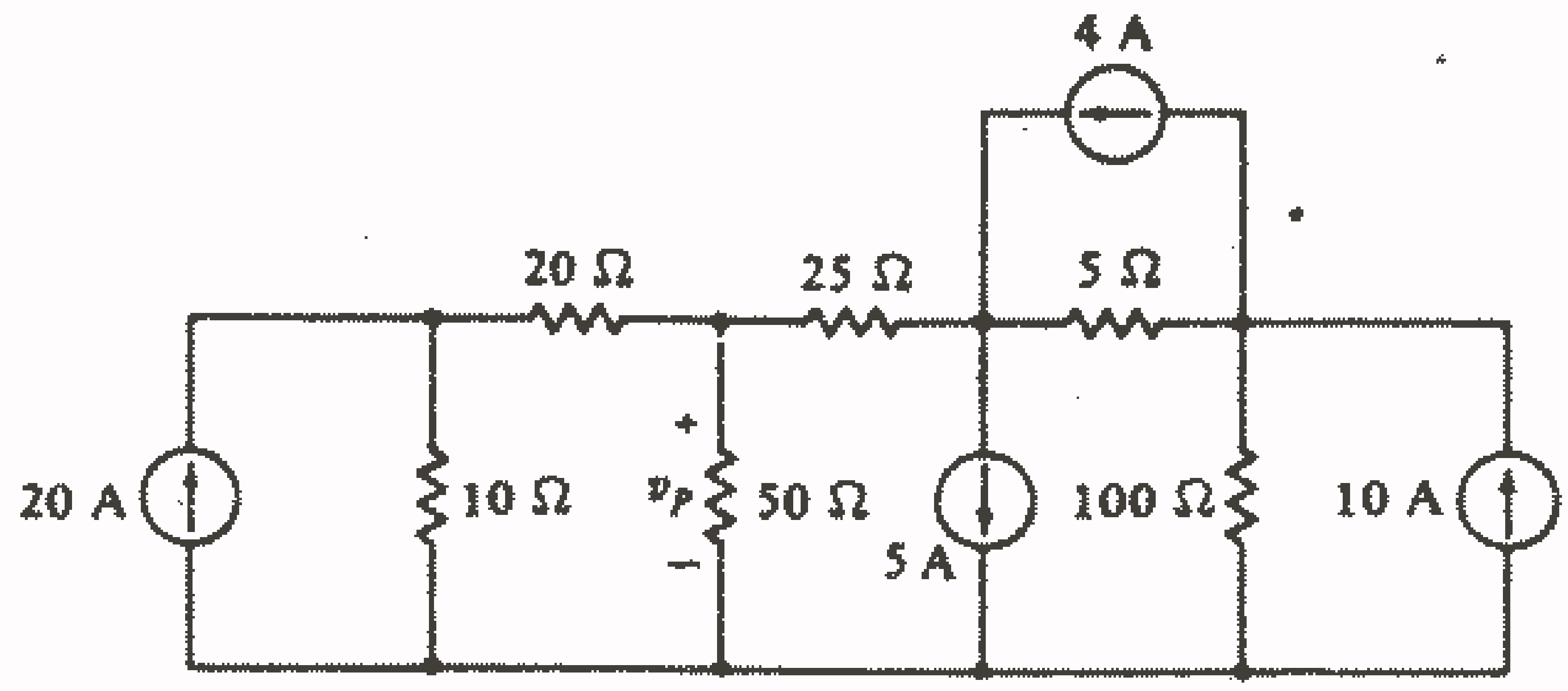
شکل ٤۳ ـ ۳: به تمرین ۱۱ ـ ۳ نگاه کنید.

مسائل

۱ - (a) اگر $v_1+2v_2+3v_3=20$ ، $v_1-7v_2-5v_3=-5$ ، $v_3+3v_2+4v_1-10=0$ آنگاه v_1 را به دست آورید. (b) دترمینان زیر را محاسبه کنید:

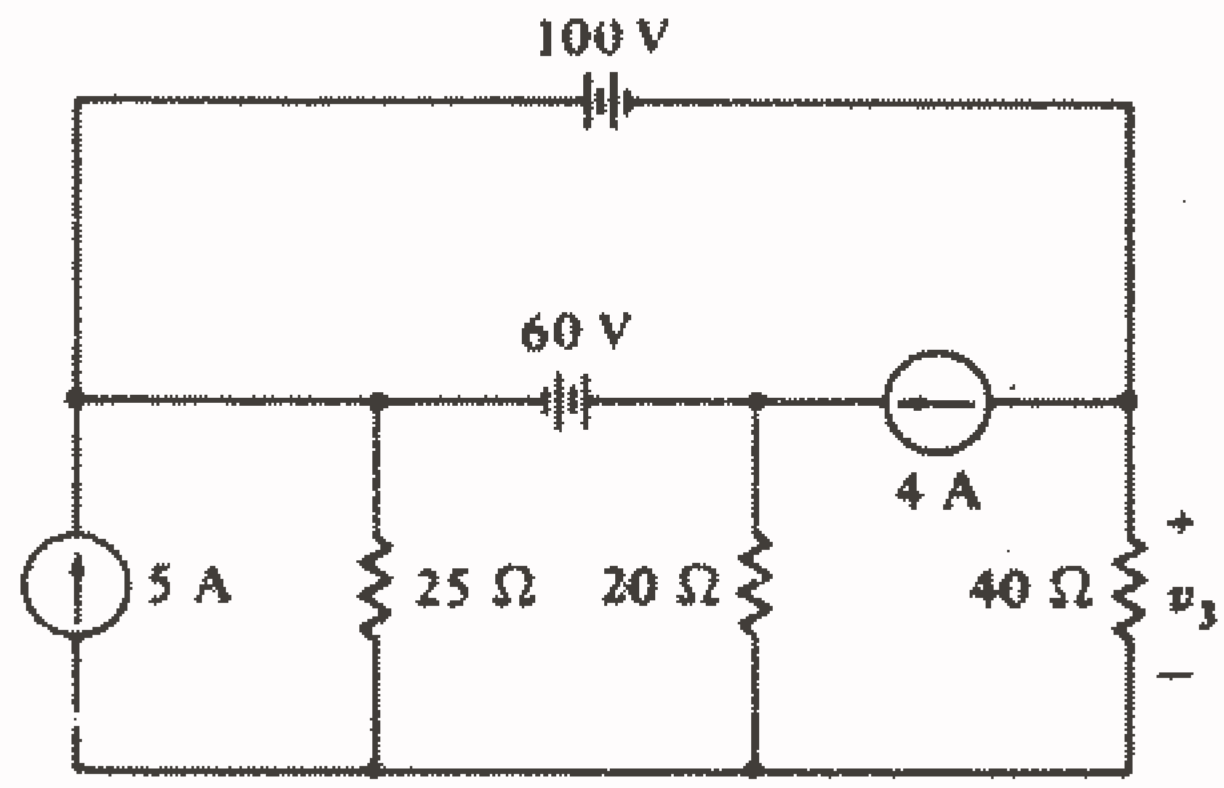
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

۲ - با استفاده از تحلیل گرهی v_p را در مدار شکل ٤٤-۳ به دست آورید.



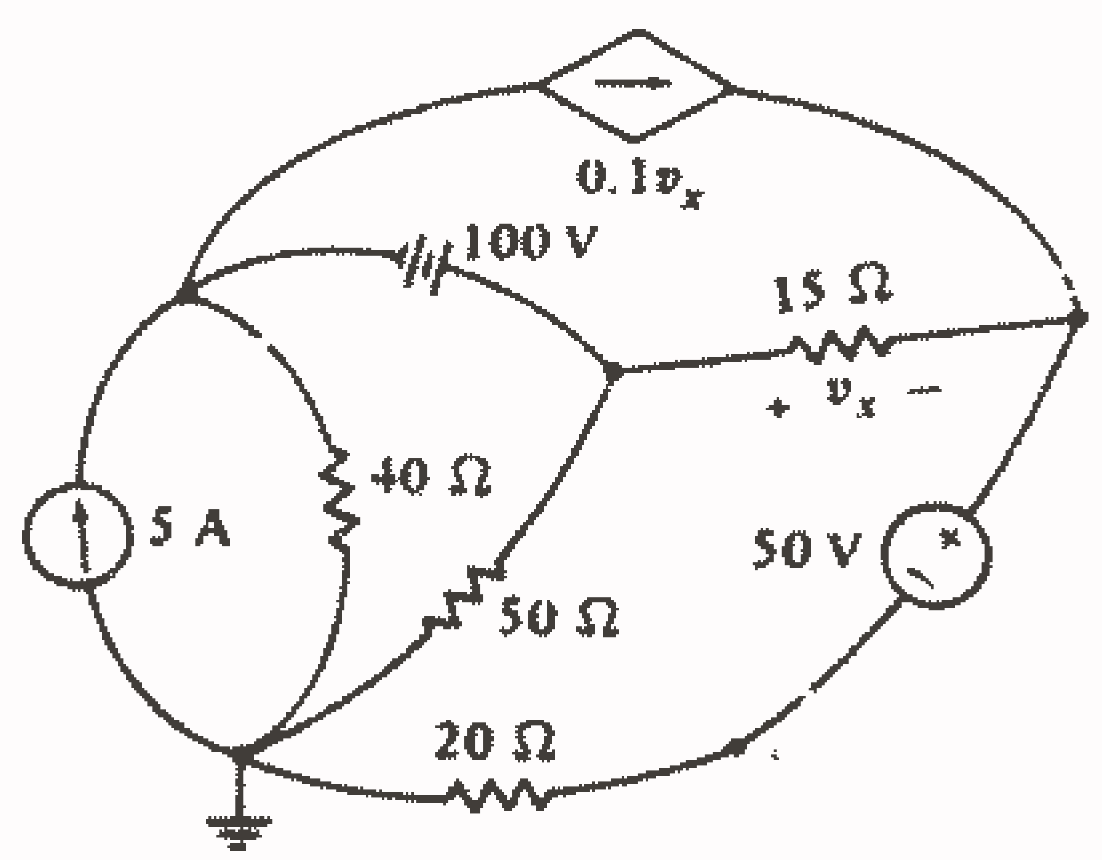
شکل ٤٤ ـ ۳: به مسئله ۲ مراجعه کنید.

۳ - با استفاده از تحلیل گرهی در مدار شکل ٤٥-۳ مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) v_3 (b) قدرت تحویل داده شده به وسیله منبع 5A.



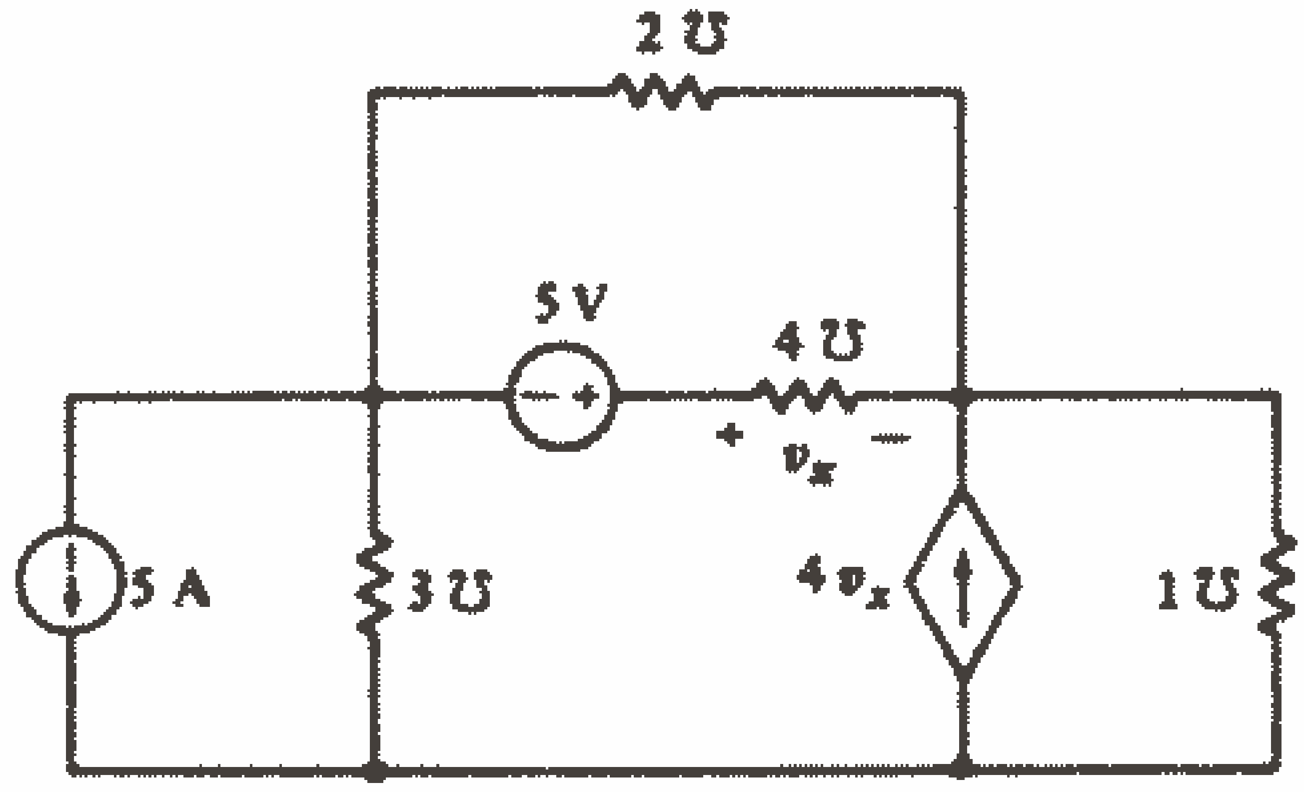
شکل ٤٥ ـ ۳: به مسئله ۳ مراجعه کنید.

٤ - با استفاده از تحلیل گرهی، v_x و قدرت تحویل داده شده به مقاومت Ω ٥٠ را در مدار شکل ٤٦-۳ پیدا کنید.



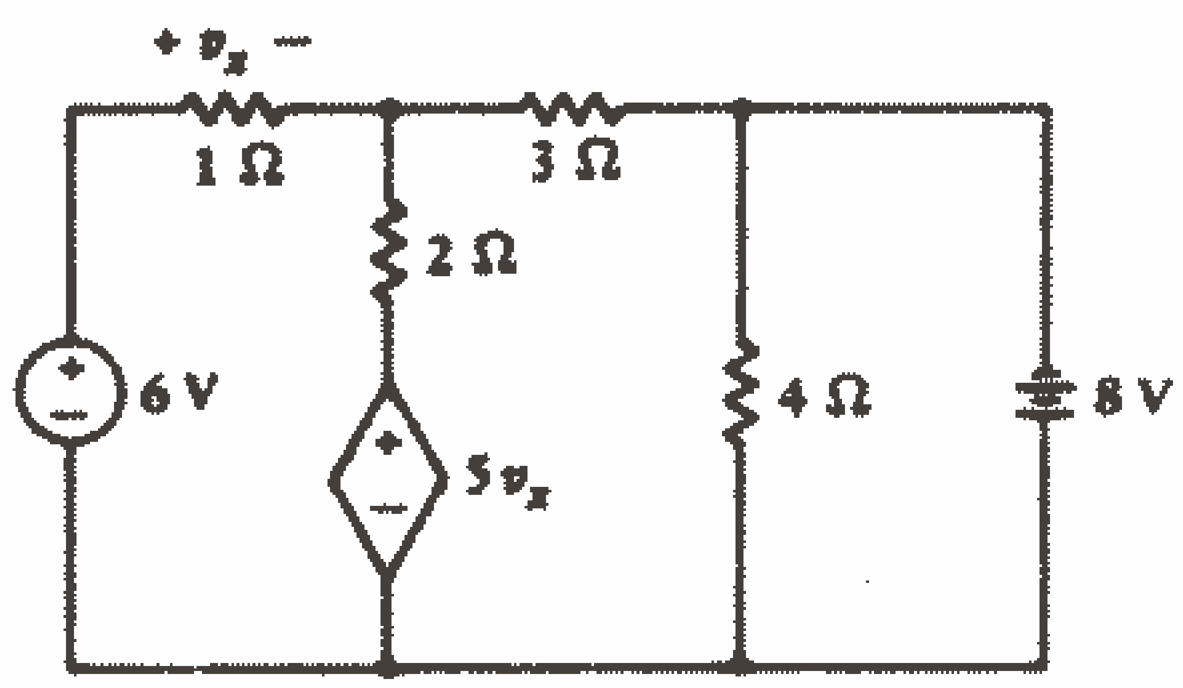
شکل ٤٦ ـ ۳: به مسئله ٤ مراجعه کنید.

۵ - معادلات گرهی را برای مدار شکل ۴۷-۳ تشکیل دهید و سپس قدرت تحویل داده شده به وسیله منبع ۵V را پیدا کنید.



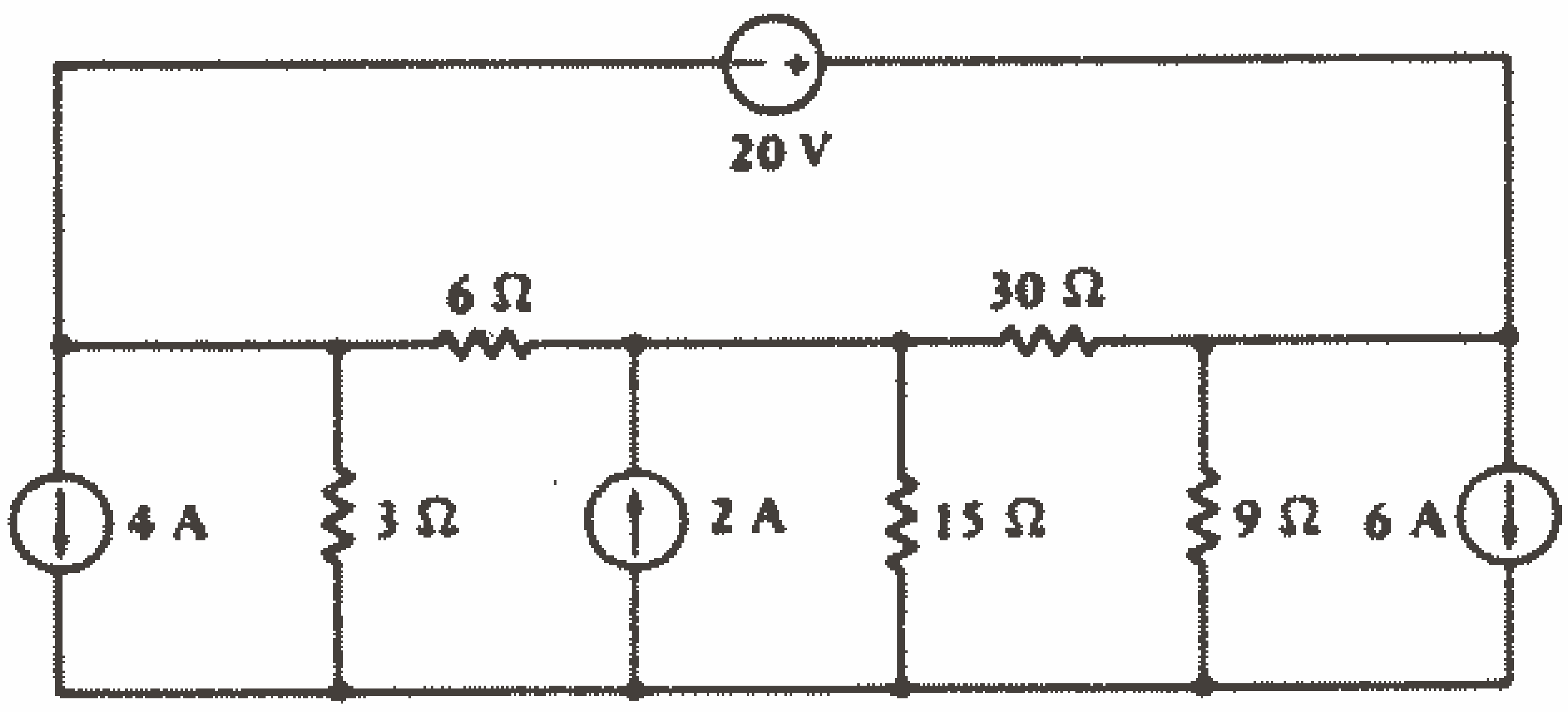
شکل ۴۷ ـ ۳: به مسئله ۵ مراجعه کنید.

۶ - با استفاده از تحلیل گرهی، v_x را در مدار شکل ۴۸-۳ پیدا کنید.



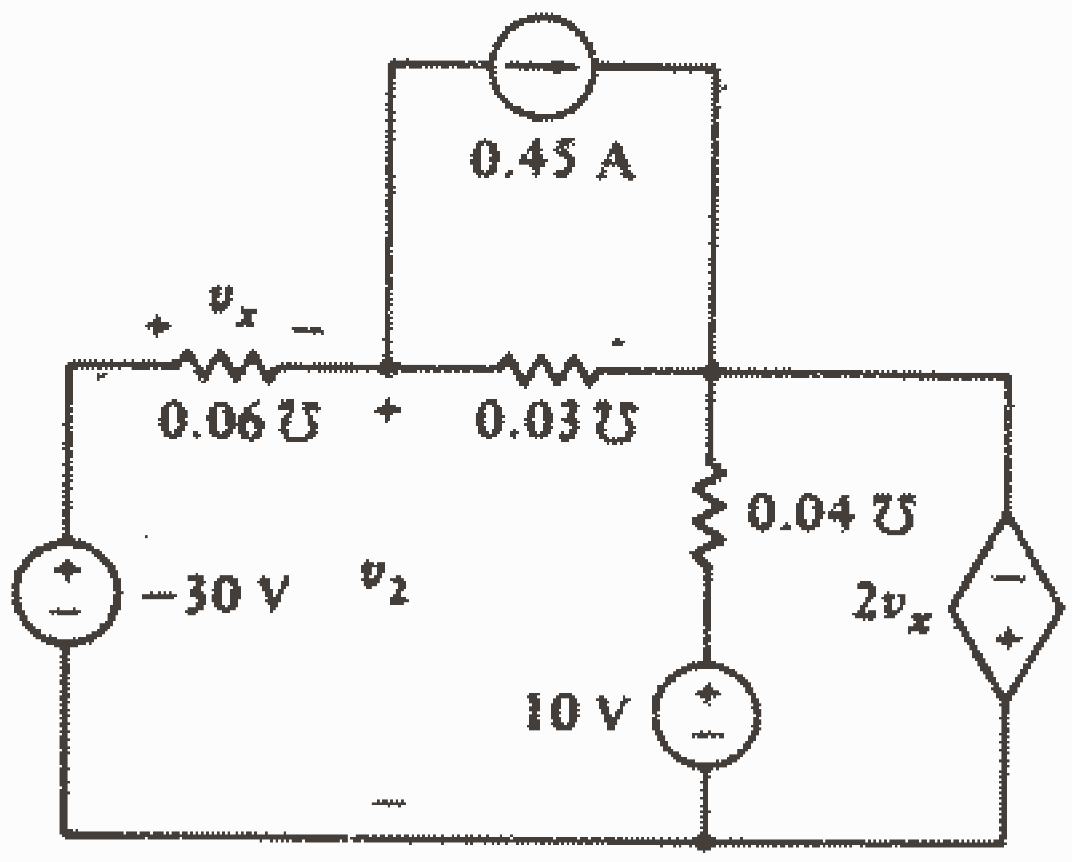
شکل ۴۸ ـ ۴: به مسئله‌های ۶، ۱۲ و ۲۸ مراجعه کنید.

۷ - با استفاده از ولتاژهای گره، مدار شکل ۴۹-۳ را تحلیل کنید و قدرت داده شده به وسیله منبع ۶A را به دست آورید.



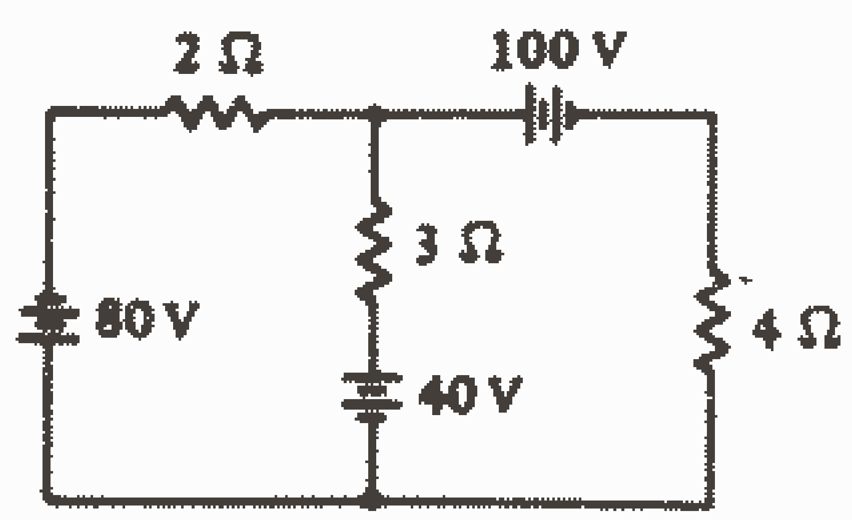
شکل ۴۹ ـ ۳: به مسئله ۷ مراجعه کنید.

۸ - در مدار شکل ۵۰-۳ با استفاده از تحلیل گرهی، v_2 را پیدا کنید.



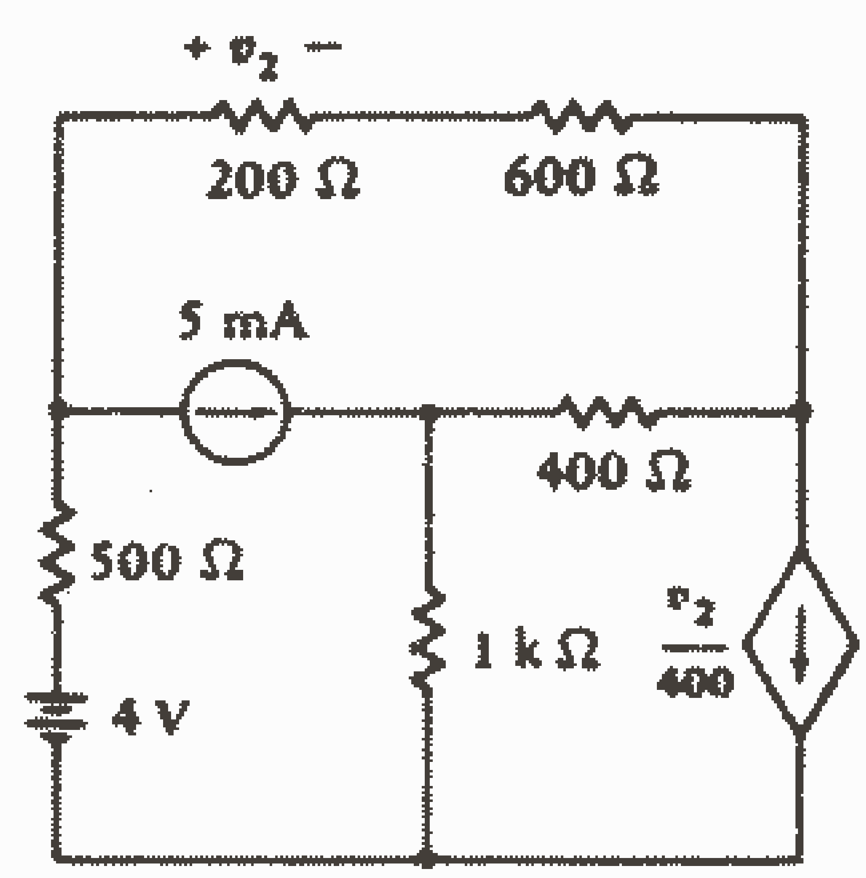
شکل ۵۰ ـ ۳: به مسئله ۸ مراجعه کنید.

۹ - در مدار شکل ۵۱-۳ با استفاده از تحلیل چشمه‌ای: (a) قدرت تحویل داده شده به مقاومت Ω ٤ را پیدا کنید. (b) باتری ۱۰۰V به چه ولتاژی باید تغییر داده شود تا هیچ قدرتی به مقاومت Ω ٤ تحویل داده نشود.



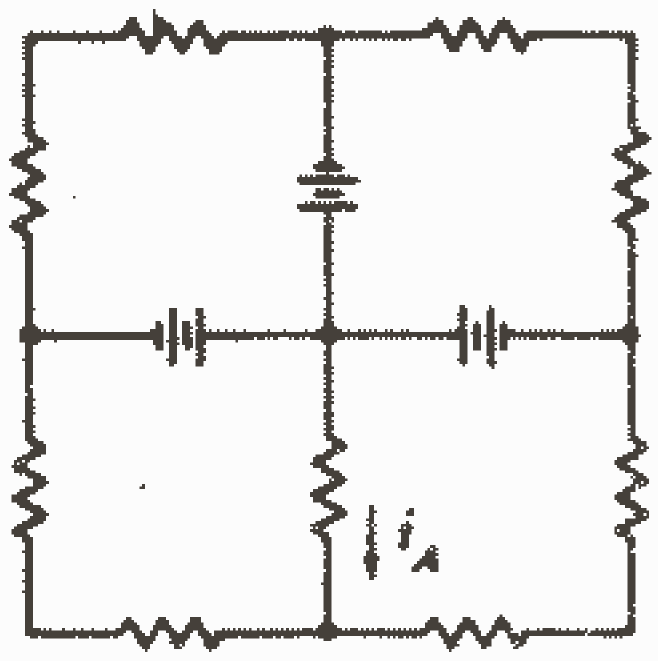
شکل ۵۱ ـ ۳: به مسئله ۹ مراجعه کنید.

۱۰ - با استفاده از تحلیل چشمه‌ای در مدار شکل ۵۲-۳، قدرت تحویل داده شده به وسیله باتری ٤V را پیدا کنید.



شکل ۵۲ ـ ۳: به مسئله ۱۰ مراجعه کنید.

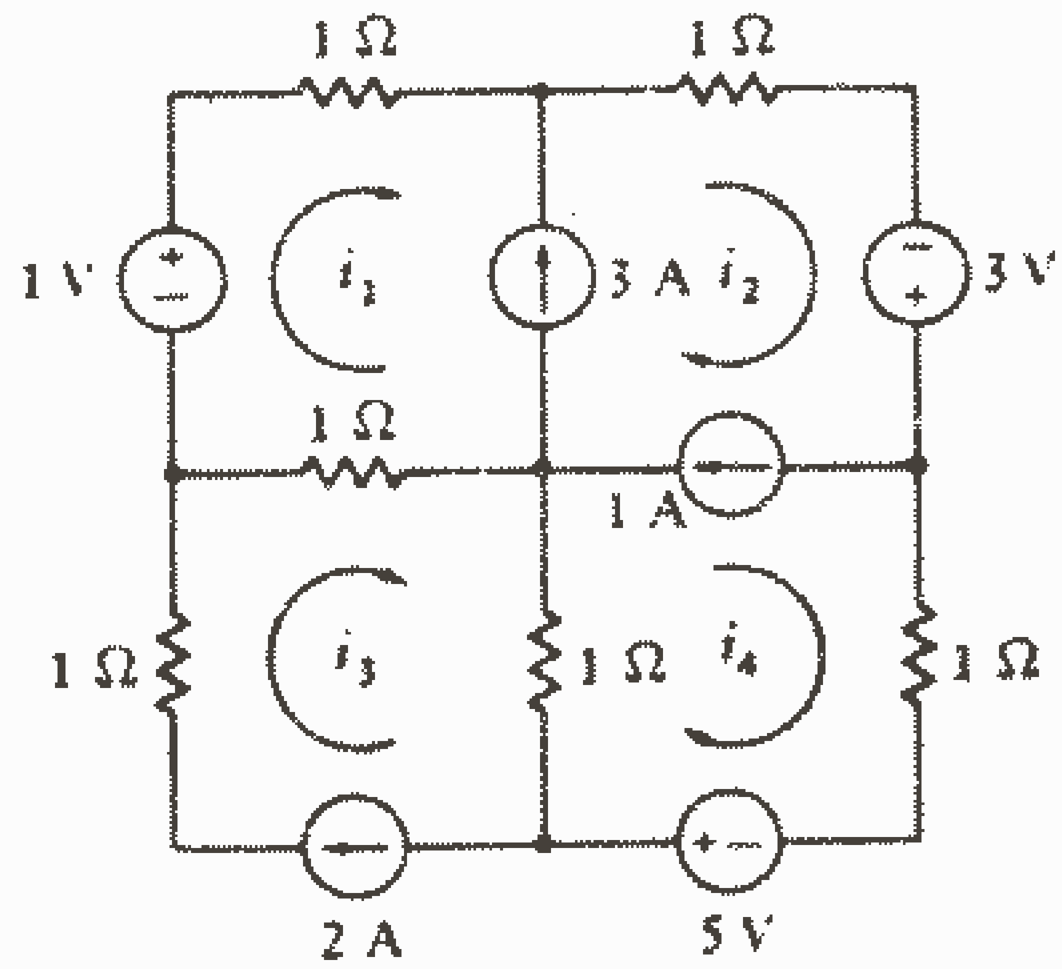
۱۱ - در شکل ۵۳-۳، هر مقاومت $6\ \Omega$ و هر باتری ۱۲V می‌باشد، i_A را پیدا کنید.



شکل ۵۳ - ۳: به مسئله ۱۱ مراجعه کنید.

۱۲ - در مدار شکل ٤۸-۳، عنصر سمت راست را به یک منبع جریان مستقل ۸A با فلش رو به بالا تغییر دهید و با استفاده از تحلیل چشمه‌ای قدرت جذب شده به وسیله مقاومت $3\ \Omega$ را پیدا کنید.

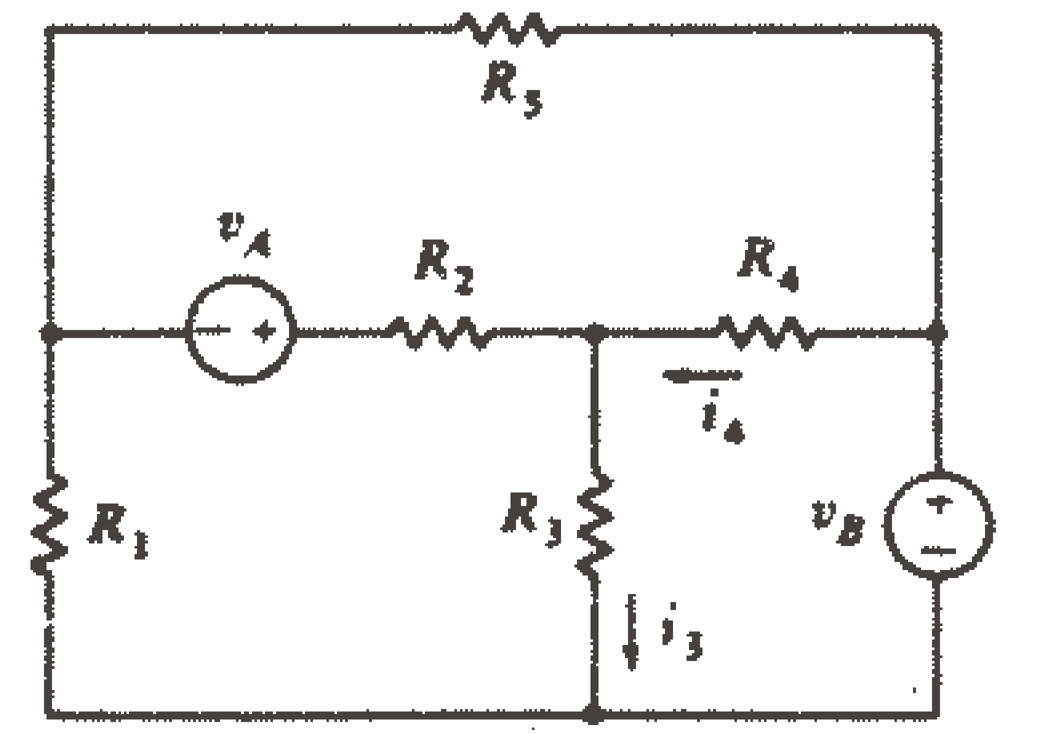
۱۳ - با استفاده از تحلیل چشمه‌ای در مدار شکل ٥٤-۳، همهٔ جریانهای چشمه‌ای را پیدا کنید.



شکل ٥٤ - ۳: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

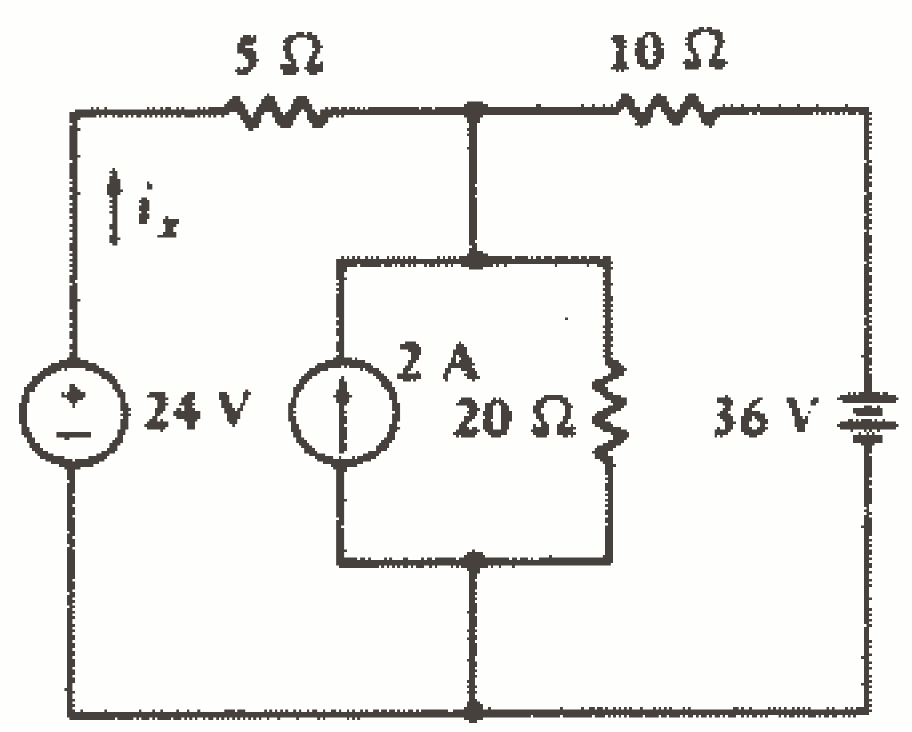
۱٤ - در مدار شکل ٤b-۳ با استفاده از تحلیل چشمه‌ای i_o و جریان رو به پایین در R_1 را اگر $v_2 = 1{,}234321V$ باشد، پیدا کنید.

۱۵ ـ درمدار شکل ۵۵-۳: (a) اگر v_A=۲۰V , v_B=۰ آنگاه $i_۳$ = ۱/۵A می‌باشد. اگر v_A=۵۰V و v_B=۰ آنگاه $i_۳$ را پیدا کنید. (b) اگر v_A=۲۰V , v_B=۵۰V آنگاه $i_۴$=۲A و اگر v_A=۵۰V و v_B=۲۰V آنگاه $i_۴$=-۱A. اگر v_A=۳۰V , v_B=۱۰۰V آنگاه $i_۴$ را پیدا کنید.



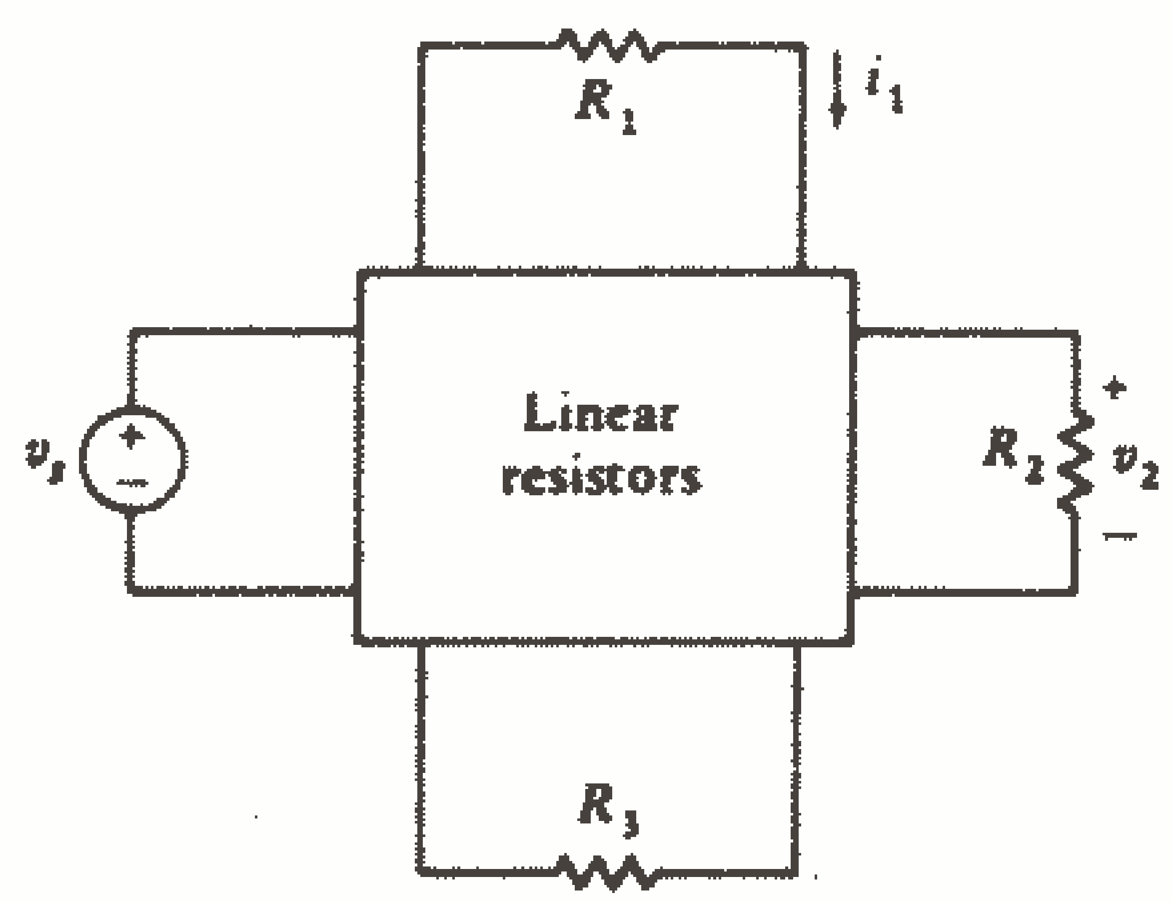
شکل ۵۵ ـ ۳: به مسئله ۱۵ مراجعه کنید.

۱۶ - با استفاده از اصل جمع اثرها در مدار شکل ۵۶-۳، i_x را پیدا کنید.



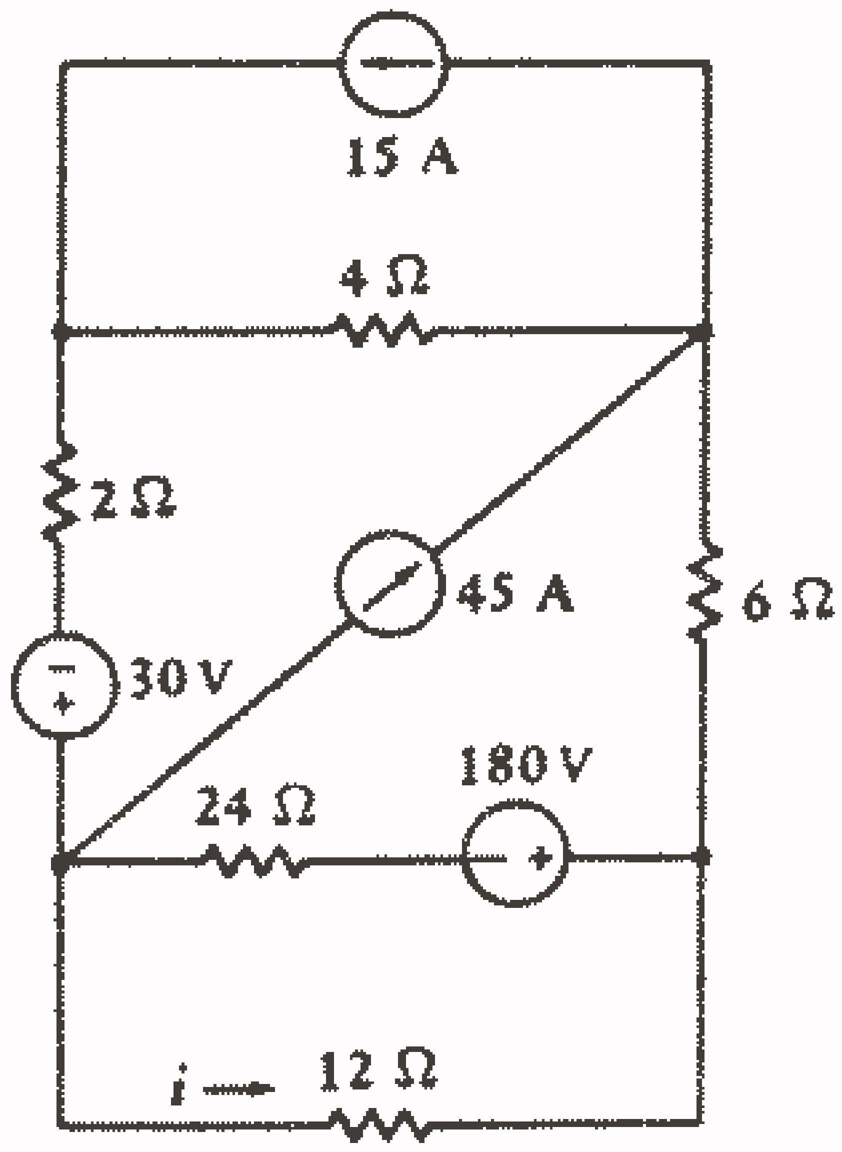
شکل ۵۶ ـ ۳: به مسئله ۱۶ مراجعه کنید.

۱۷ - با مراجعه به شکل ۵۷-۳، وقتیکه v_s=۱۲۰V آنگاه $i_۱$=۳A , $v_۲$=۵۰V و قدرت تحویل داده شده به $R_۳$ برابر ۶۰W می‌باشد. اگر v_s به ۱۰۵V کاهش یابد، مقادیر جدید , $v_۲$, $i_۱$ و قدرت تحویل داده شده به $R_۳$ را پیدا کنید.



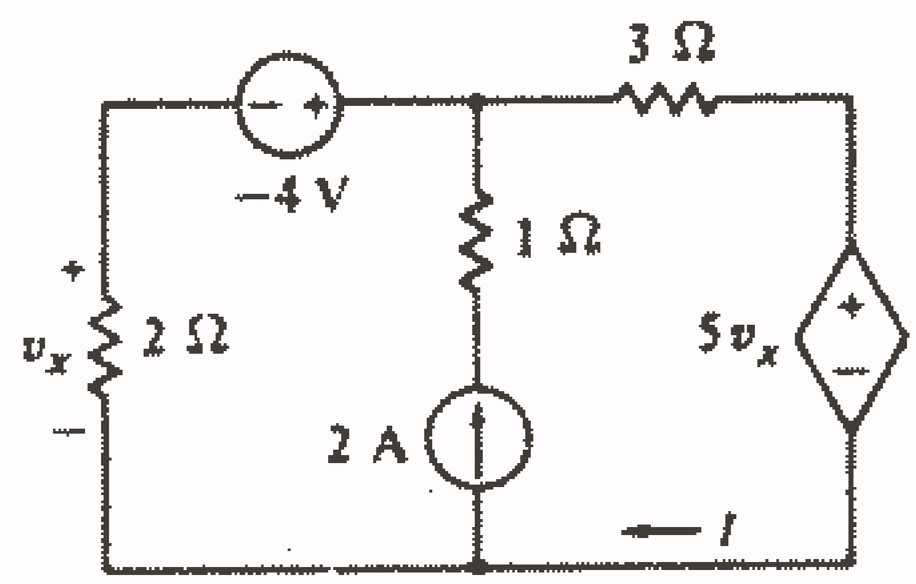
شکل ۵۷ ـ ۳: به مسئله ۱۷ مراجعه کنید.

۱۸ - با استفاده از اصل جمع اثرها در مدار شکل ۵۸-۳، i را پیدا کنید.



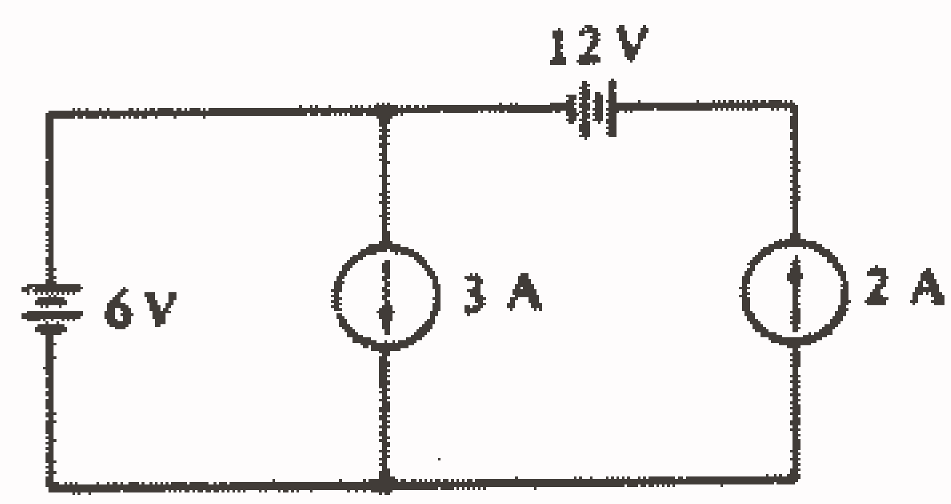
شکل ۵۸ - ۳: به مسئله ۱۸ مراجعه کنید.

۱۹ - مدار شکل ۵۹-۳ شامل یک منبع وابسته می‌باشد. با استفاده از اصل جمع اثرها جریان i را پیدا کنید.



شکل ۵۹ - ۳: به مسئله‌های ۱۹ و ۲۹ مراجعه کنید.

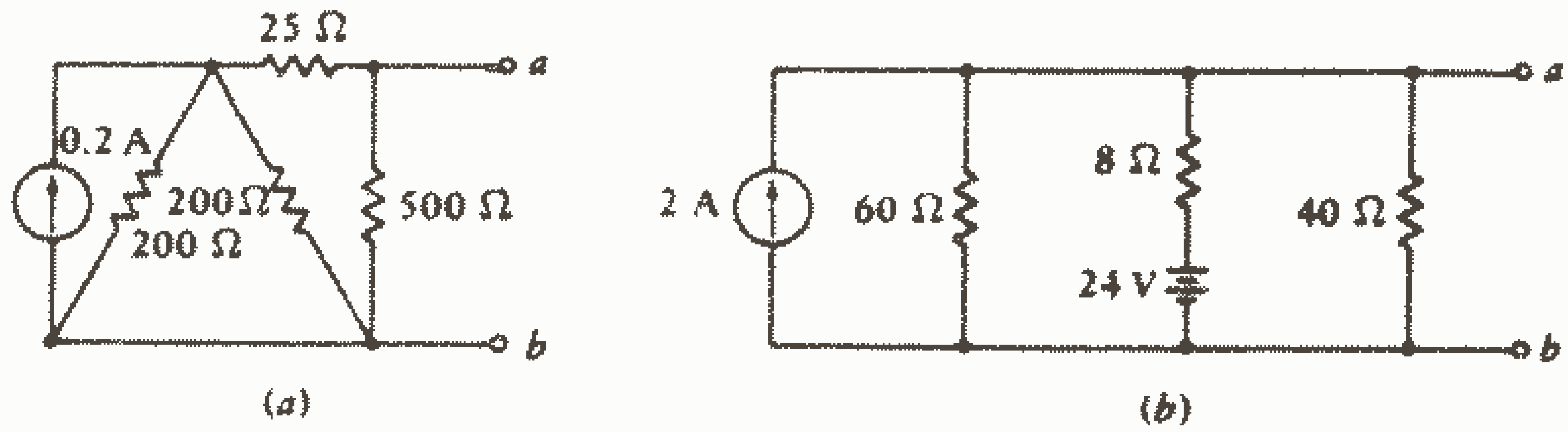
۲۰ - در مدار شکل ۶۰-۳ با استفاده از اصل حمع اثرها به عنوان یک وسیلهٔ کمکی، قدرت جذب شده به وسیله عناصر زیر را پیدا کنید: (a) منبـع ۶V (b) منبـع ۳A (c) منبـع ۱۲V (d) منبع ۲A.



شکل ۶۰ - ۳: به مسئله ۲۰ مراجعه کنید.

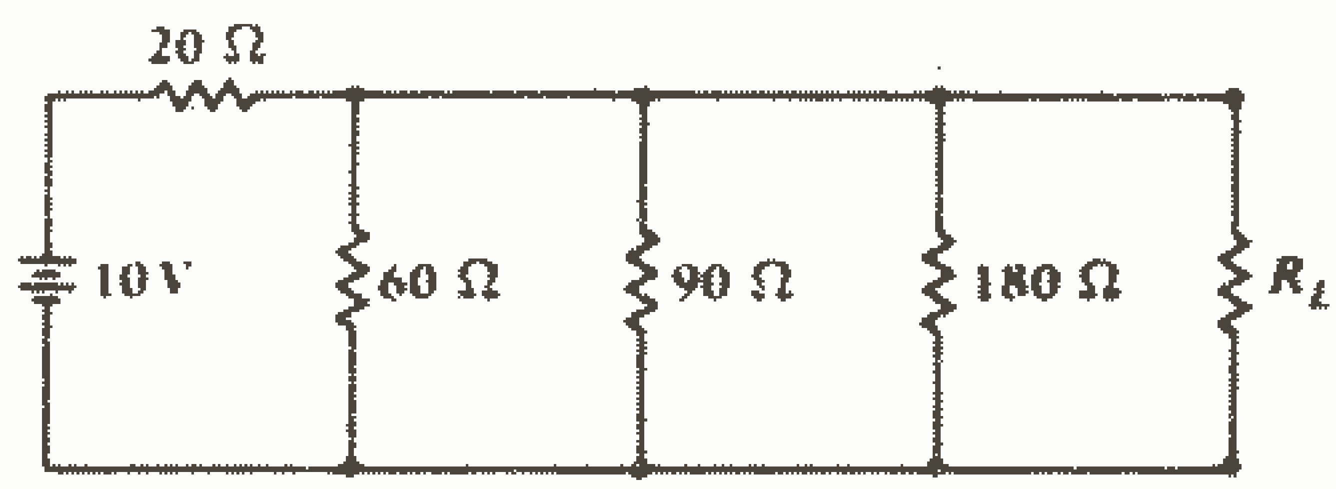
۲۱ - یک لامپ فلاش را می‌خواهیم با دو باتری قلمی (AA) ۱٫۵۵V به طور سری به کار بریم. بر روی فلاش نوشته شده است «۲٫۲۵V ، ۰٫۲۵A». با فرض اینکه همهٔ نوشته‌ها درست باشد از چه منبع ولتاژ عملی می‌توان برای مدل کردن یکی از باتریها استفاده نمود؟

۲۲ - با استفادهٔ مکرر از تبدیل منابع و ترکیب مقاومتها برای هر یک از شبکه‌های شکل ۶۱-۳، شبکهٔ سمت چپ ترمینالهای a-b را با ترکیب سری یک منبع ولتاژ مستقل و یک مقاومت جایگزین کنید.



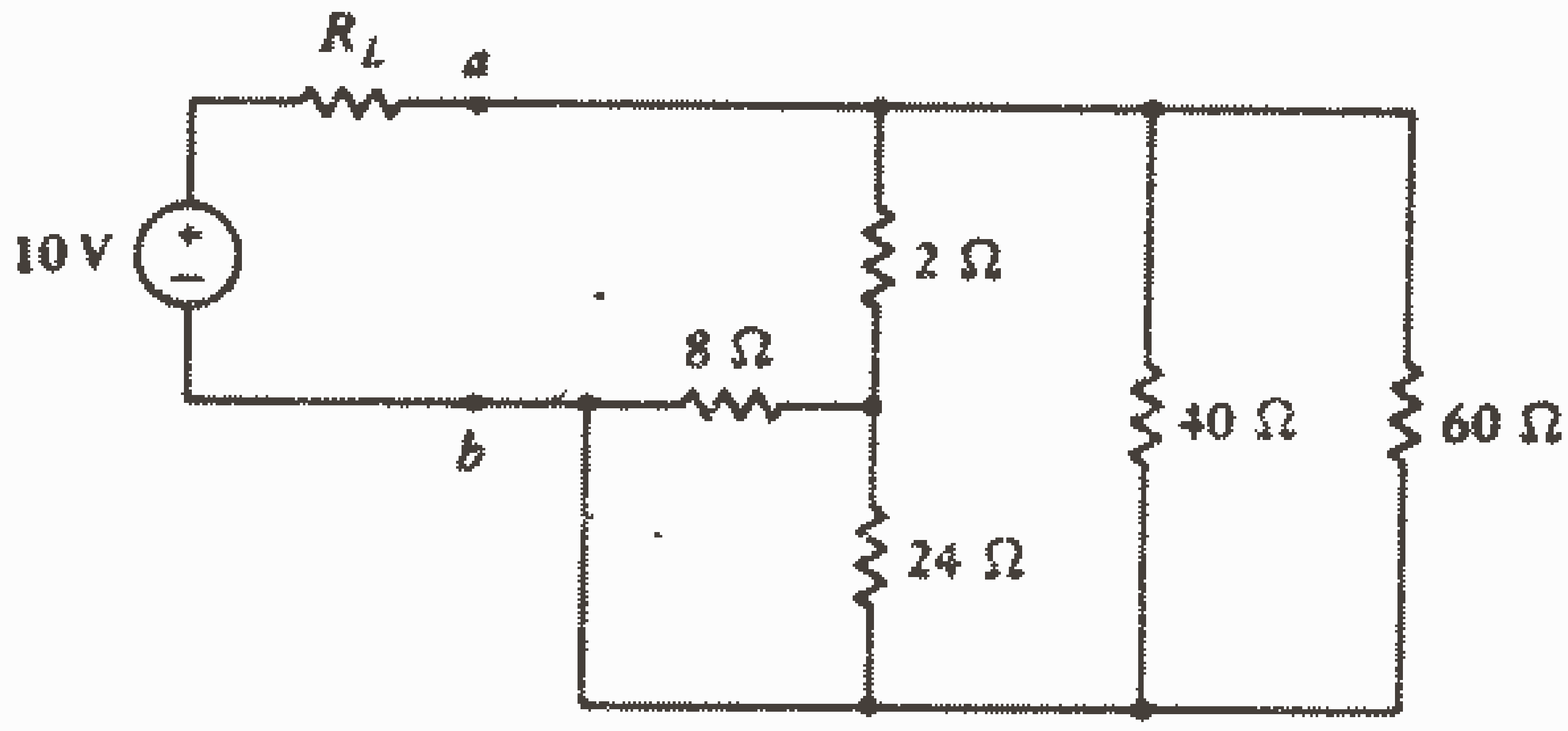
شکل ۶۱ - ۳: به مسئله ۲۲ مراجعه کنید.

۲۳ - در مدار شکل ۶۲-۳ چه مقداری از R_L: (a) ماکزیمم قدرت را از این شبکه جذب خواهد کرد و مقدار $P_{L\,max}$ چقدر است؟ (b) ماکزیمم ولتاژ را در دوسرش خواهد داشت و مقدار $v_{L\,max}$ چقدر است؟ (c) ماکزیمم جریان را خواهد داشت و مقدار $i_{L\,max}$ چقدر است؟



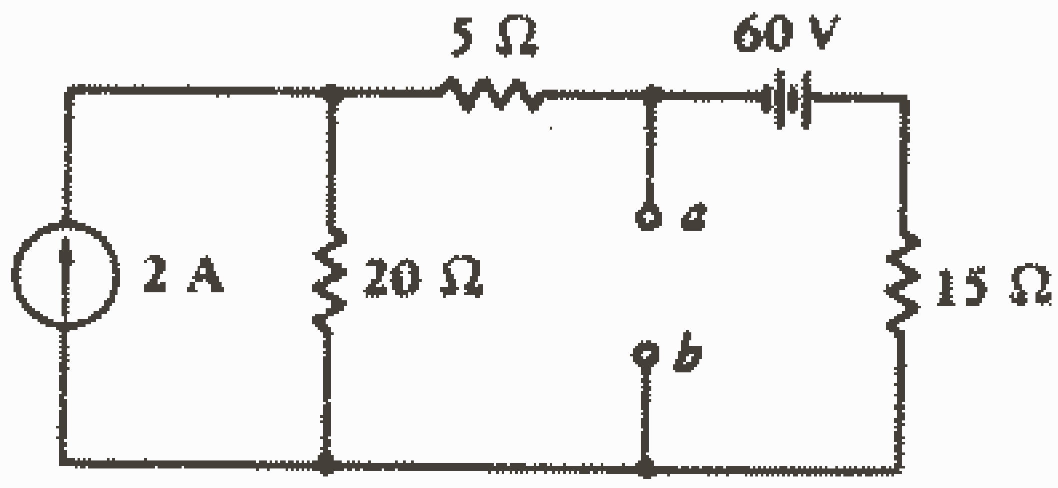
شکل ۶۲ - ۳: به مسئله ۲۳ مراجعه کنید.

۲۴ - منبع ولتاژ عملی را در سمت چپ ترمینالهای a-b در شکل ۶۳-۳ در نظر بگیرید. (a) مقدار R_L چقدر باشد تا ماکزیمم قدرت از منبع واقعی کشیده شود؟ (b) مقدار این قدرت ماکزیمم چقدر است؟



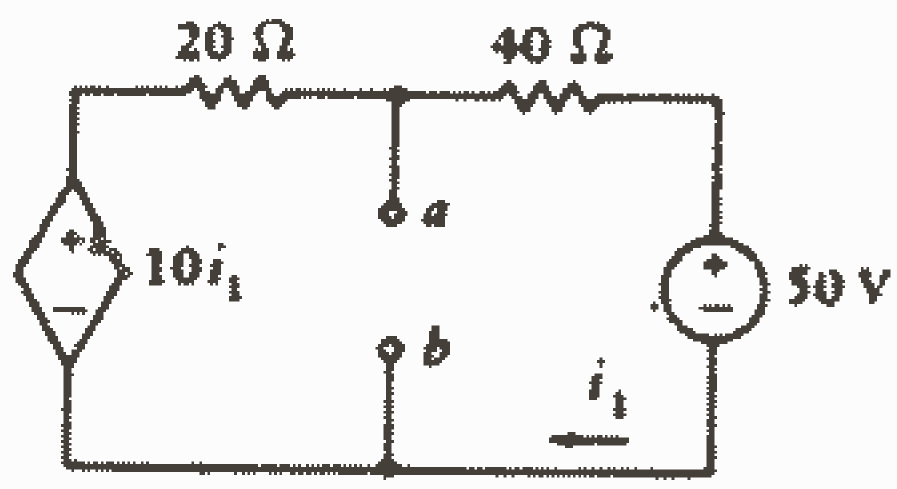
شکل ۶۳ ـ ۳: به مسئله ۲۴ مراجعه کنید.

۲۵ - (a) با استفاده از سه روش تحلیل جداگانه، v_{oc} ، i_{sc} ، R_{th} را نسبت به ترمینالهای a-b در مدار شکل ۶۴-۳ پیدا کنید. (b) مدار معادل تونن و نورتن را که در a-b دیده می‌شود رسم کنید.



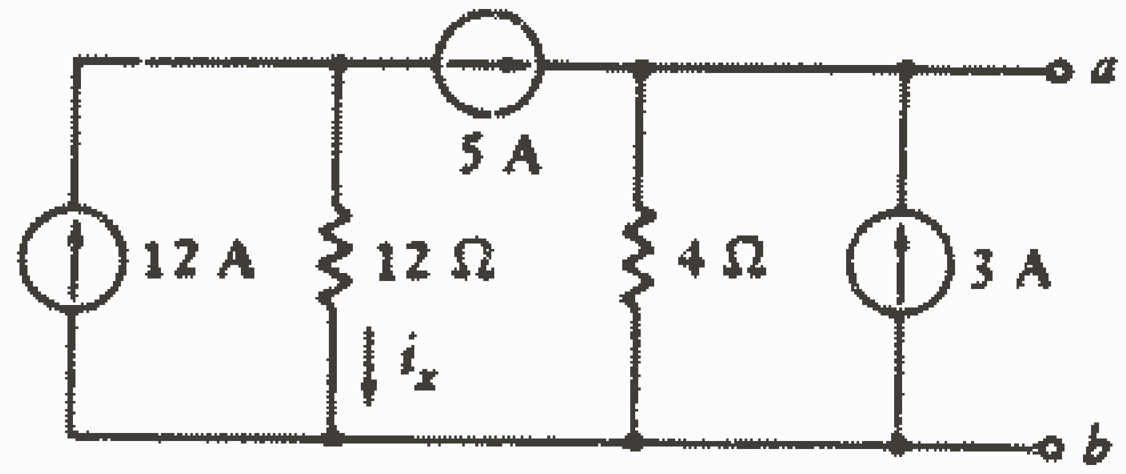
شکل ۶۴ ـ ۳: به مسئله ۲۵ مراجعه کنید.

۲۶ - مدار معادل تونن را در ترمینالهای a-b مدار شکل ۶۵-۳ پیدا کنید.



شکل ۶۵ ـ ۳: به مسائل ۲۶ و ۳۰ مراجعه کنید.

۲۷ - (a) مدار معادل تونن و نورتن را که از ترمینالهای a-b مدار شکل ۶۶ـ۳ دیده می‌شود، تعیین کنید. (b) منبع ۵A را با یک منبع ولتاژ وابستهٔ $5i_x$ (با علامت + در سمت راست) جایگزین کنید و دوباره مدار معادل تونن و نورتن را پیدا کنید.



شکل ۶۶ ـ ۳: به مسئله ۲۷ مراجعه کنید.

۲۸ ـ در مدار شکل ۴۸-۳ مدار معادل تونن را: (a) در سمت چپ منبع ۸V پیدا کنید. (b) در سمت راست منبع ۶V پیدا کنید.

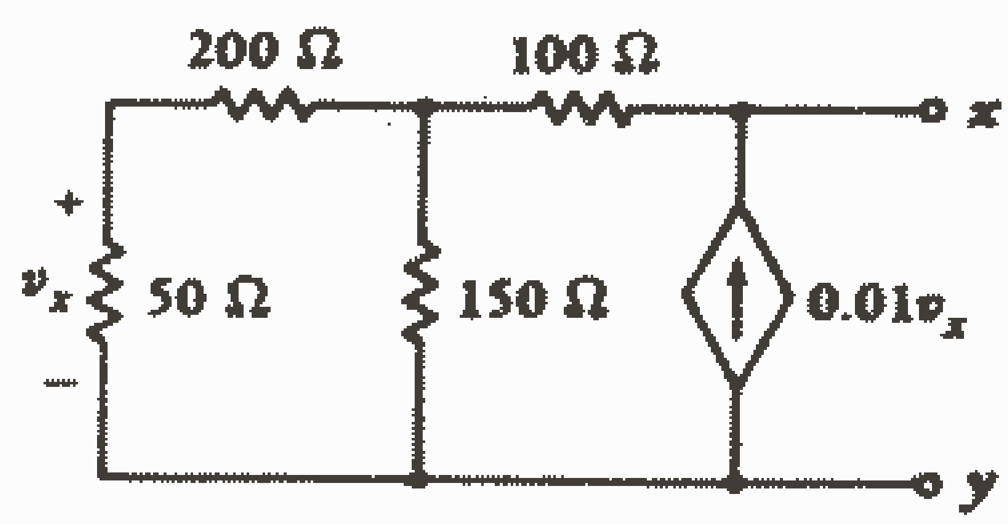
۲۹ ـ (a) با مراجعه به مدار شکل ۵۹ـ۳ مدار معادل تونن را که از نظر مقاومت ۳ Ω دیده می‌شود پیدا کنید. (b) I را پیدا کنید. (c) مقاومت ۳ Ω را به ۱۳ Ω تبدیل کنید و دوباره I را پیدا کنید.

۳۰ ـ اگر ولتاژ v_L و جریان $i_L = \frac{v_L}{R_L}$ در یک مقاومت بار کلی R_L معلوم باشد، آنگاه مدار معادل تونن یا نورتن را می‌توان به سادگی به دست آورد زیرا: $v_{oc}=\lim_{R_L\to\infty} V_1$ و $i_{sc}=\lim_{R_L\to\infty} i_L$.

(a) v_L (با علامت + در ترمینال a) را برای مدار شکل ۶۵-۳و اگر مقاومت R_L بین b,a وصل شده باشد، پیدا کنید.

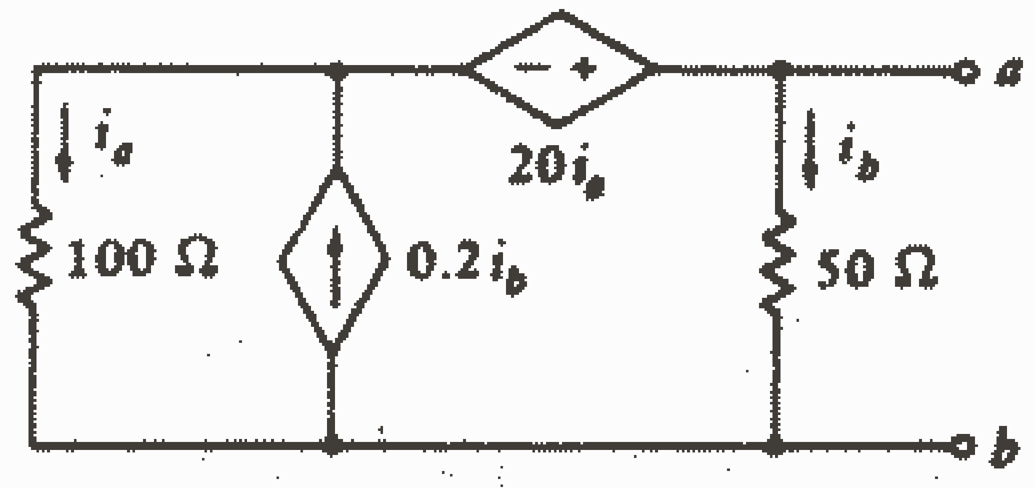
(b) روابط بالا را برای تعیین v_{oc} ، i_{sc} پیدا کنید.

۳۱ ـ مدار معادل تونن را برای شبکهٔ شکل ۶۷-۳ به دست آورید.



شکل ۶۷ ـ ۳: به مسئله ۳۱ مراجعه کنید.

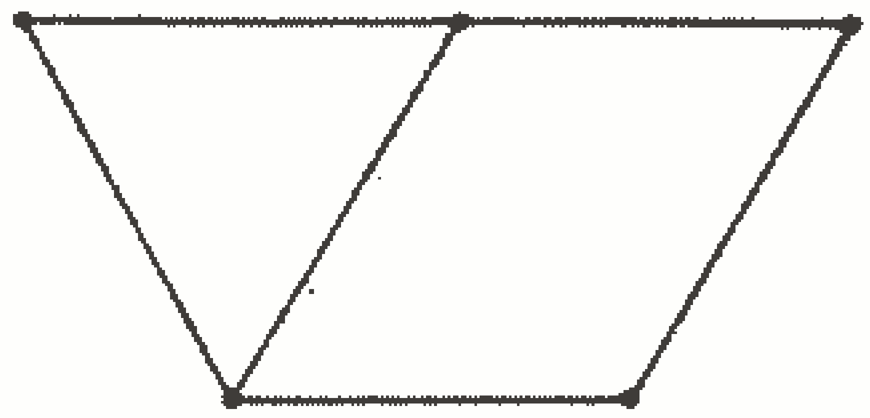
۳۲ ـ مدار معادل تونن شبکهٔ شکل ۶۸-۳ را پیدا کنید.



شکل ۶۷ ـ ۳: به مسئله ۳۲ مراجعه کنید.

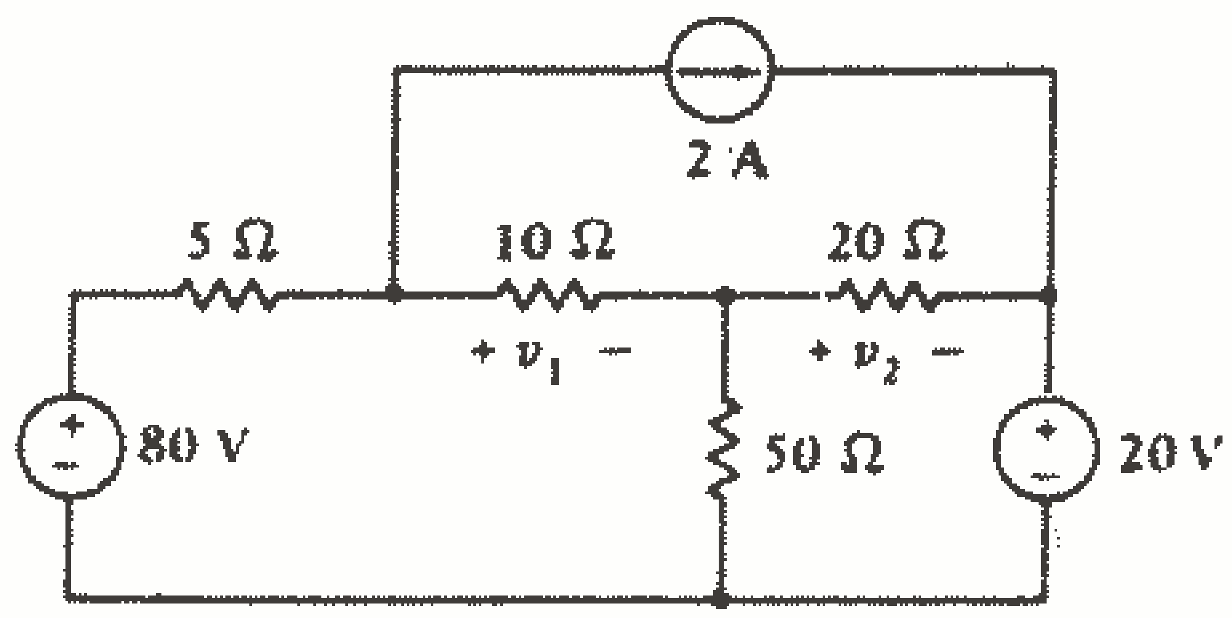
۳۳ - ولتاژ فالوور شکل ۲۸-۳ را می‌توان با وارد کردن یک مقاومت محدود R_i=۱۰K Ω بین ترمینالهایی که ولتاژ دو سرش v_i می‌باشد، اصلاح نمود. مدار معادل تونن جدید را پیدا کنید.

۳۴ - (a) همهٔ درختهای ممکن را برای گراف خطی شکل ۶۹-۳ تشکیل دهید. (b) اگر دو شاخهٔ بالایی، منبع ولتاژ و شاخهٔ سمت چپ، منبع جریان باشند، همهٔ درختهای ممکن را نشان دهید.



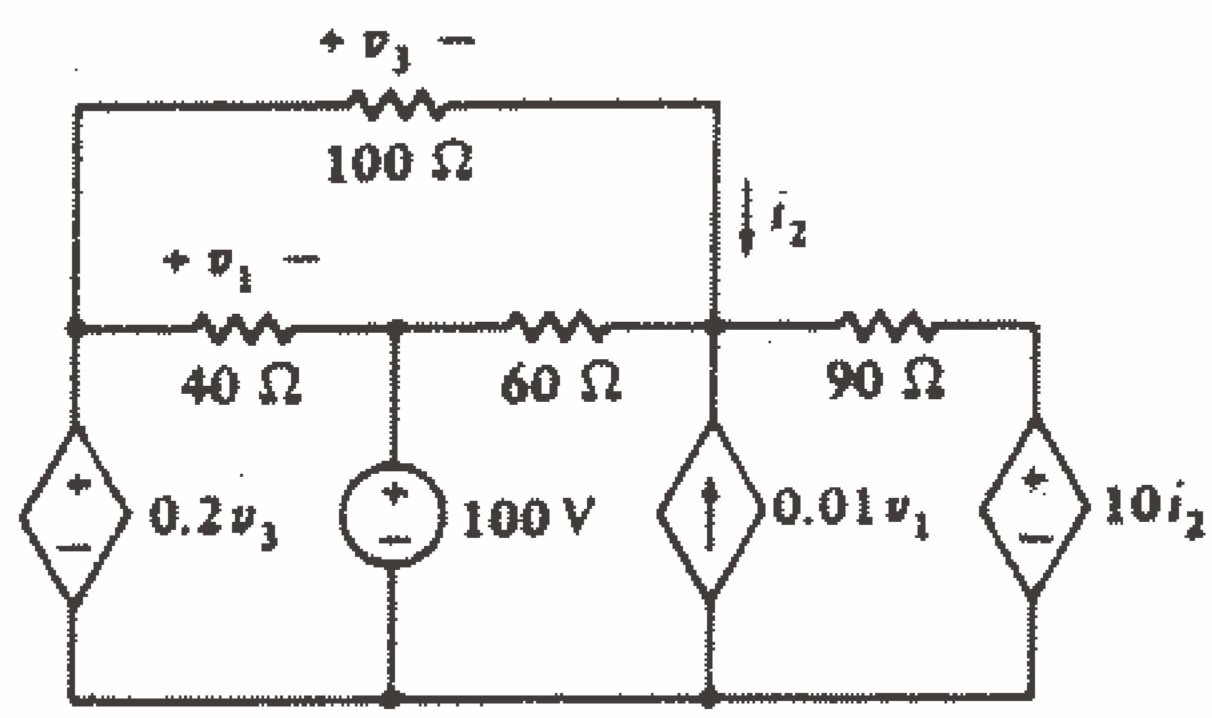
شکل ۶۹ - ۳: به مسئله ۳۴ مراجعه کنید.

۳۵ - برای مدار شکل ۷۰-۳، درختی رسم کنید که در آن v_1 ، v_2 ولتاژهای شاخهٔ درختی باشند و معادلات گرهی را بنویسید و آن را برای v_1 حل کنید.



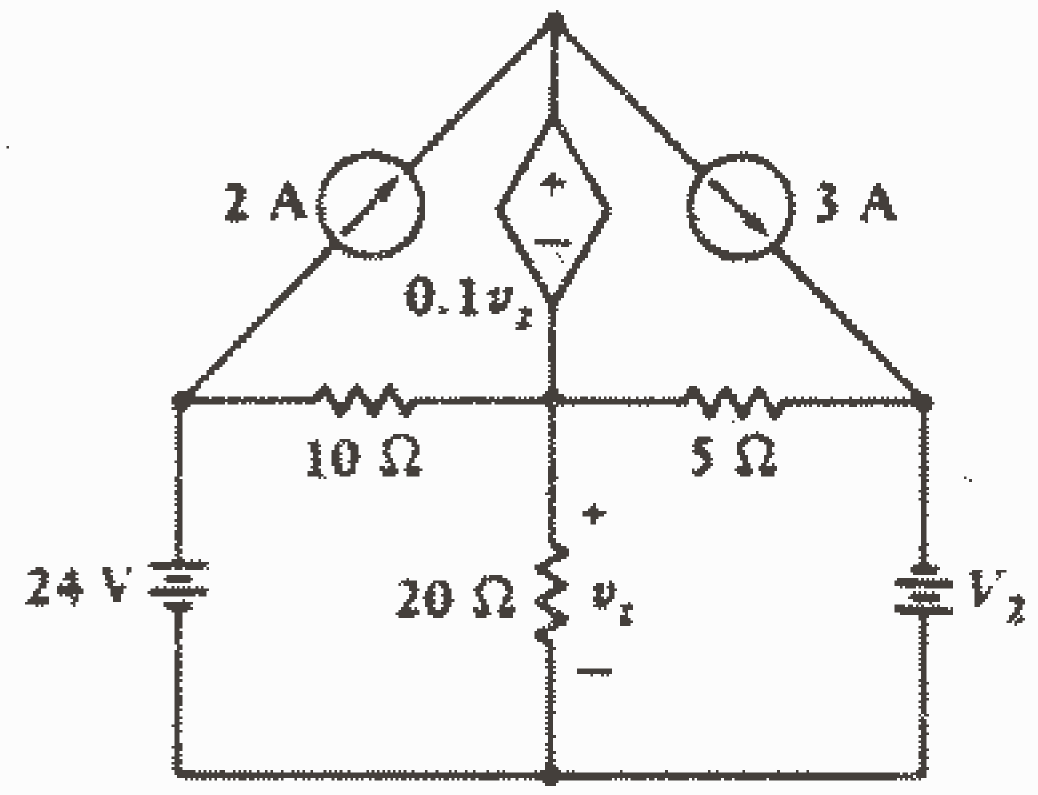
شکل ۷۰ - ۳: به مسئله ۳۵ مراجعه کنید.

۳۶ - یک درخت مناسب برای مدار شکل ۷۱-۳ تشکیل دهید و ولتاژهای شاخه درختی را مشخص کنید و معادلات کنترل و KCL را بنویسید و سپس i_2 را پیدا کنید.



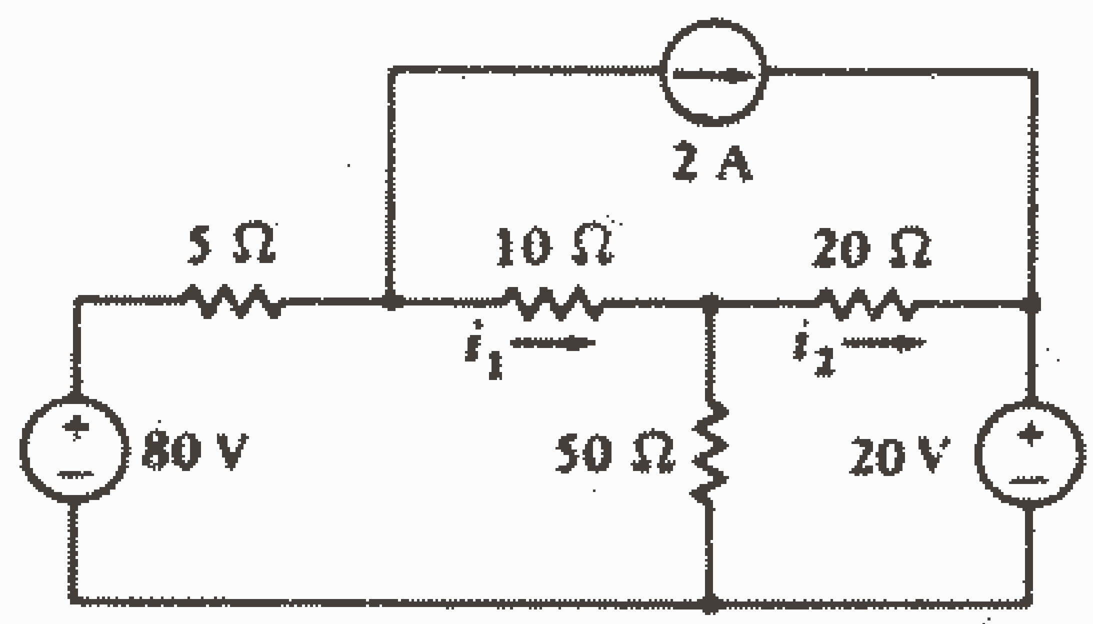
شکل ۷۱ - ۳: به مسئله ۳۶ مراجعه کنید.

۳۷ - روش تحلیل گرهی را با استفاده از ولتاژهای شاخه درختی در مدار شکل ۷۲-۳ به کار برید و تعیین کنید که به ازای چه مقداری از V_2 داریم $v_2 = 0$.



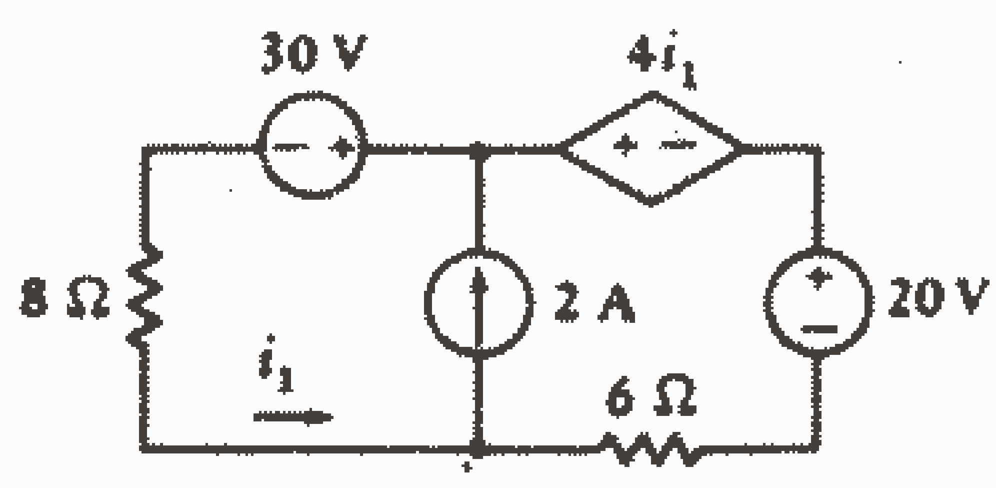
شکل ۷۲ - ۳: به مسئله ۳۷ مراجعه کنید.

۳۸ - برای مدار شکل ۷۳-۳ یک درخت تشکیل دهید که در آن i_1 ، i_2 جریانهای لینک باشند و معادلات حلقه را بنویسید و مقادیر i_1 ، i_2 را تعیین کنید.



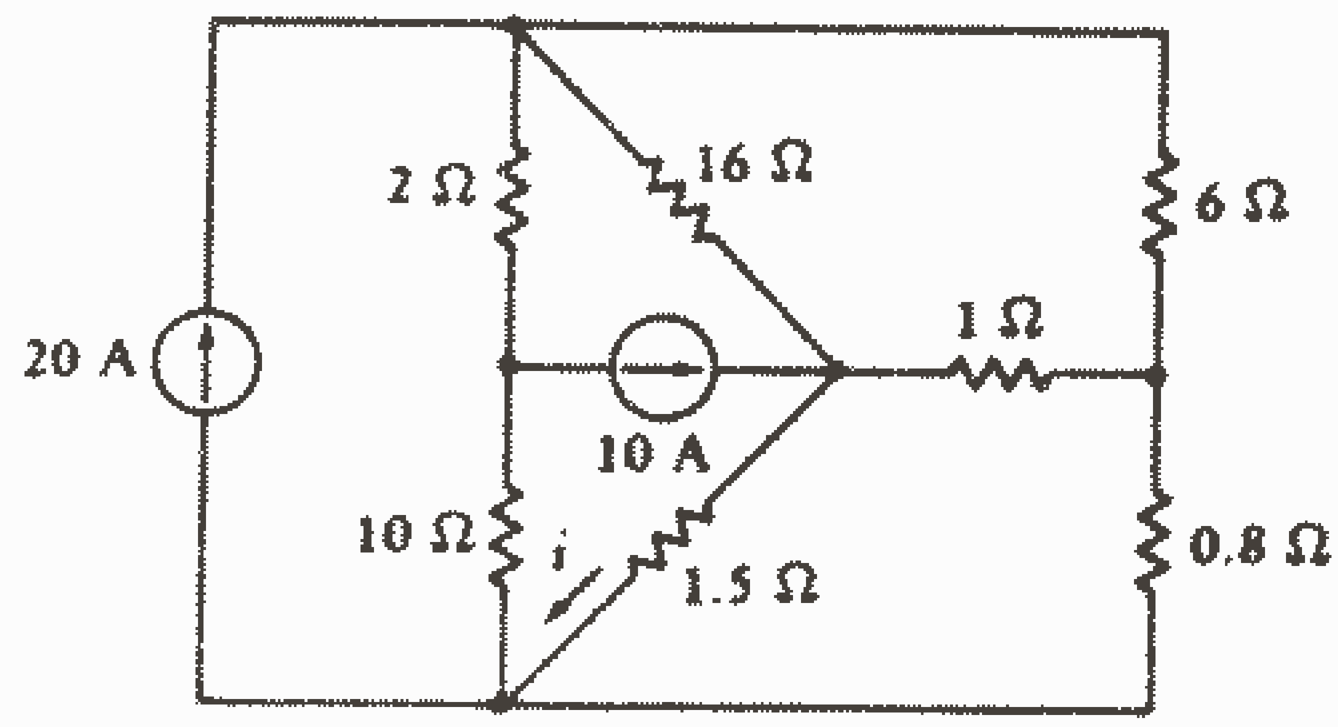
شکل ۷۳ - ۳: به مسئله ۳۸ مراجعه کنید.

۳۹ - (a) برای مدار شکل ۷۴-۳ درخت مناسبی تشکیل دهید و تنها معادله‌ای را که برای پیدا کردن i_1 لازم است بنویسید. (b) i_1 را پیدا کنید.



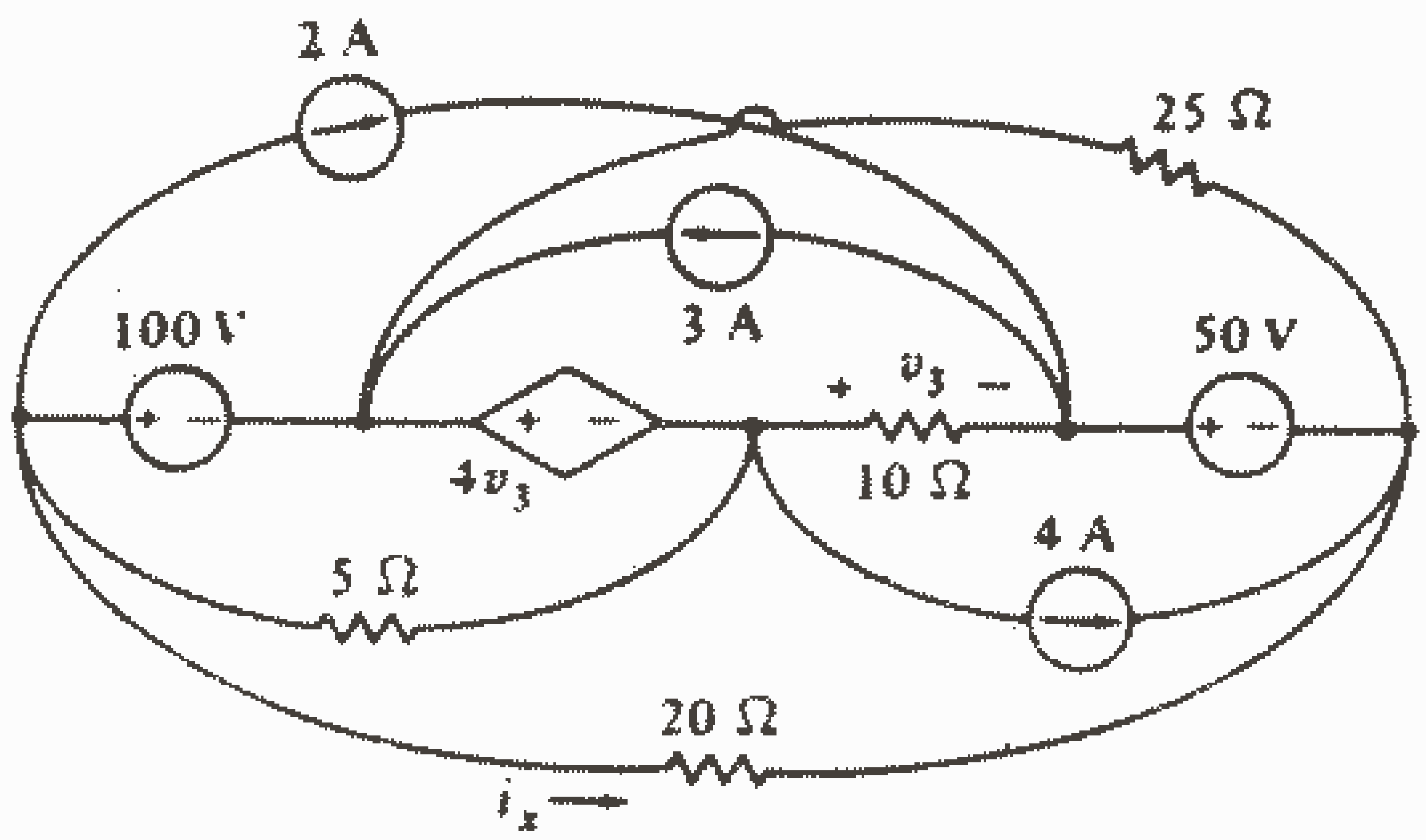
شکل ۷۴ - ۳: به مسئله ۲۹ مراجعه کنید.

۴۰ - برای مدار شکل ۷۵-۳ درختی ایجاد کنید که در آن همهٔ جریانهای حلقه از مقاومت $1\ \Omega$ عبور کنند و سپس i را پیدا کنید.



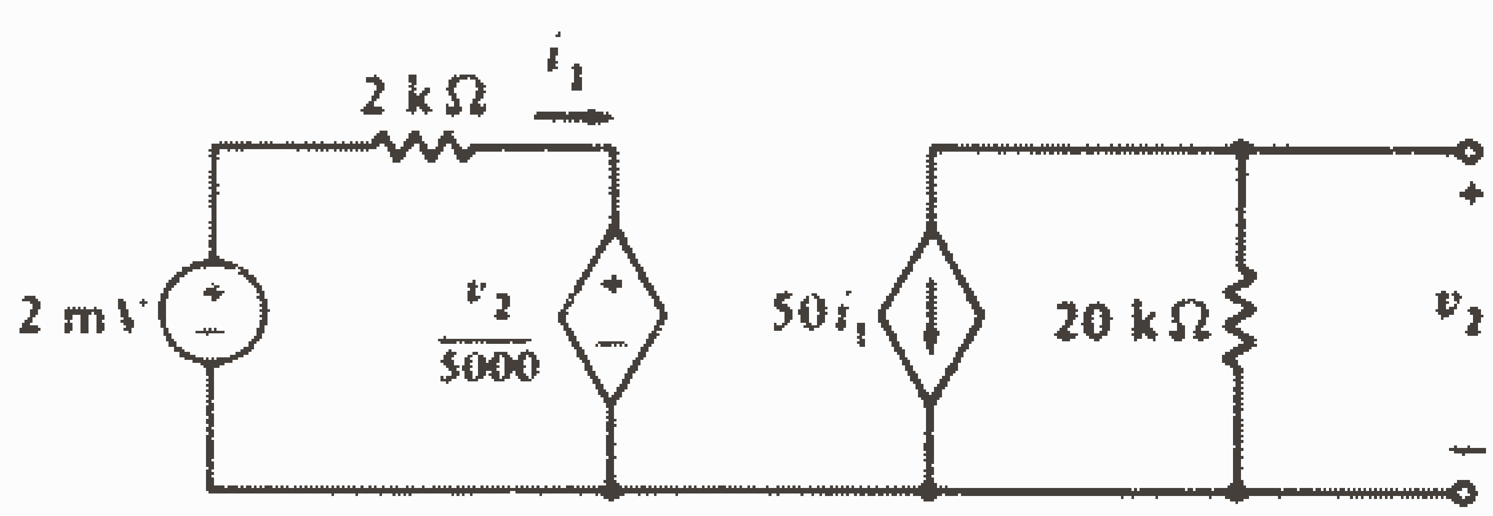
شکل ۷۵ ـ ۳: به مسئله ۴۰ مراجعه کنید.

۴۱ - با استفاده از روش تحلیل حلقهٔ عمومی در مدار غیرمسطح شکل ۷۶-۳، i_x را پیدا کنید.



شکل ۷۶ ـ ۳: به مسئله ۴۱ مراجعه کنید.

۴۲ - شکل ۷۷-۳ یک نوع مدار معادل تقویت‌کنندهٔ ترانزیستوری را نشان می‌دهد. مقدار مدار باز V_2 و مقاومت خروجی (R_{th}) این تقویت‌کننده را به دست آورید.



شکل ۷۷ ـ ۳: به مسئله ۴۲ مراجعه کنید.

بخش ۲

مدارهای گذرا

فصل ٤

سلف و خازن

۱ - ٤ - مقدمه

ما اکنون آماده‌ایم که دومین بخش عمدهٔ مطالعهٔ خود دربارهٔ مدارها را شروع کنیم. در این فصل ما دو عنصر سادهٔ مداری جدید را که رابطهٔ ولتاژ ـ جریان آنها شامل سرعت تغییر ولتاژ یا جریان می‌باشد، را معرفی خواهیم کرد. قبل از شروع این مطالعهٔ جدید، توقفی کوتاه برای یک لحظه و بازگشت به مطالعه‌مان دربارهٔ تحلیل مدارهای مقاومتی ارزشمند می‌باشد. یک مرور کوچک فلسفی به فهم مطالعهٔ آینده‌مان کمک خواهد کرد.

پس از وضع یک سیستم مقبول از آحاد، بحث دربارهٔ مدارهای الکتریکی را با تعریف جریان، ولتاژ و پنج عنصر مداری ساده شروع کردیم. منابع ولتاژ و جریان مستقل و وابسته را عناصر فعال و مقاومت خطی را عنصر غیرفعال نامیدیم. اگر چه تعریف ما از «فعال» و «غیرفعال» هنوز کمی مبهم است و لازم است که مورد توجه دقیقتر قرار گیرند. ما یک عنصر فعال را به عنوان عنصری که قادر است یک قدرت متوسط بزرگتر از صفر را به مدار خارجی بدهد تعریف می‌کنیم، که البته متوسط‌گیری در فاصلهٔ زمانی بی‌نهایت انجام می‌شود، منابع ایده‌آل عناصر فعال می‌باشند. تقویت‌کنندهٔ عملیاتی هم یک وسیلهٔ فعال است. و اما یک عنصر غیرفعال به عنوان عنصری که نمی‌تواند قدرت متوسطی بیش از صفر را در یک فاصلهٔ زمانی بی‌نهایت تحویل دهد تعریف می‌شود، مقاومت در این دسته قرار می‌گیرد. انرژیی که آن دریافت می‌کند معمولاً تبدیل به حرارت می‌شود.

هر یک از این عناصر بر حسب محدودیتهایی که در رابطهٔ ولتاژ ـ جریان آنها وجود دارد تعریف شدند. مثلاً در مورد منبع جریان مستقل ولتاژ ترمینال باید کاملاً مستقل از جریانی باشد

که از ترمینالهای آن کشیده می‌شود. سپس مدارهای مرکب از اجزاء ساختمانی مختلف را مورد توجه قرار دادیم.

به طور کلی ما فقط جریان و ولتاژ ثابت را مورد استفاده قرار دادیم اما اکنون که یک آشنایی با تکنیکهای اساسی تحلیل با توجه صرف به مدارهای مقاومتی به دست آورده‌ایم می‌توانیم بررسی مدارهای جالبتر و عملیتر را که در آن سلف و خازن موجود می‌باشد و هم توابع تحریک و هم پاسخها معمولاً متغیر با زمان می‌باشند، را شروع کنیم.

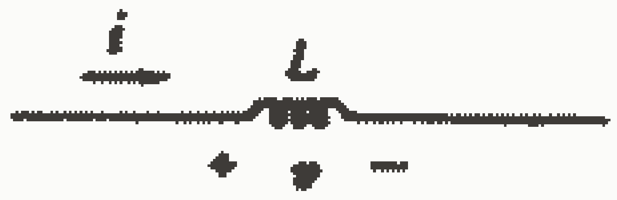
۲ ـ ۴ ـ سلف

هم سلف، که موضوع این قسمت و قسمت بعدی می‌باشد، و هم خازن که در قسمتهای بعدی این فصل مورد بحث قرار می‌گیرند عناصر غیرفعالی هستند که توانایی ذخیره و باز پس دهی مقدار محدودی انرژی رادارند. بر خلاف یک منبع ایده‌آل، آنها نمی‌توانند مقدار نامحدودی انرژی و یا قدرت متوسط محدود در یک فاصلهٔ زمانی نامحدود را ارائه کنند.

اگرچه ما یک سلف و ضریب خود القا را صرفاً از نقطه نظر مداری تعریف خواهیم کرد، یعنی با یک معادله ولتاژ ـ جریان، ولی توضیحات کمی دربارهٔ توسعهٔ تاریخی میدان مغناطیسی می‌تواند درک بهتری از این تعریف را میسر سازد. در اوایل قرن نوزدهم یک دانشمند دانمارکی به نام اورستد نشان داد که یک هادی حامل جریان یک میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند و یا اینکه عقربه قطب‌نما در مجاورت یک سیم حامل جریان تحت‌تأثیر قرار می‌گیرد. در فرانسه، اندکی بعد، آمپر اندازه گیریهای دقیقی انجام داد که نشان می‌داد این میدان مغناطیسی به طور خطی مربوط است به جریانی که آن را ایجاد کرده است. قدم بعدی در حدود بیست سال بعد وقتیکه دانشمند تجربی انگلیسی، مایکل فارادی، و مخترع آمریکایی، جوزف هنری، تقریباً به طور هم‌زمان[1] کشف کردند که یک میدان مغناطیسی متغیر می‌تواند ولتاژی در مدار مجاور خود القاء کند، برداشته شد. آنها نشان دادند که این ولتاژ متناسب است با تغییرات زمانی جریانی که میدان مغناطیسی را ایجاد کرده است. ثابت تناسب را ما اکنون ضریب خود القایی می‌نامیم و با علامت L نشان می‌دهیم و رابطه آن عبارت است از: $v = L\, di/dt$ (۱) که باید بدانیم که v , i هر دو تابعی از زمان هستند. هر وقت بخواهیم این مطلب را مورد تأکید قرار دهیم می‌توانیم از علائم $v(t)$ و $i(t)$ استفاده کنیم.

۱ ـ فارادی پیروز شد.

علامت مداری سلف در شکل ۱-۴ نشان داده شده است و باید توجه داشت که قرارداد علامت غیرفعال، درست مانند مقاومت، در اینجا هم به کار رفته است. واحدی که ضریب خودالقایی را با آن اندازه‌گیری می‌کنند هنری[1] (H) می‌باشد و معادلهٔ تعریف‌کنندهٔ آن نشان می‌دهد که هنری فقط بیان کوتاهتری برای ولت ثانیه بر آمپر می‌باشد.



شکل ۱ـ ۴: علامت مبنای ولتاژ و جریان در علامت مداری سلف نشان داده شده‌اند. $v = L\, di/dt$

سلفی که ضریب خود القایی آن طبق رابطهٔ (۱) تعریف می‌شود یک مدل ریاضی است و عنصر ایده‌آلی است که می‌توانیم برای تقریب نمودن رفتار یک وسیلهٔ واقعی به کار بریم. یک سلف واقعی را می‌توان با پیچیدن طولی از یک سیم به صورت سیم‌پیچ به‌دست آورد. این کار می‌تواند به طور موثری جریانی را که باعث میدان مغناطیسی می‌شود افزایش دهد و نیز می‌تواند «تعداد» مدارهای مجاوری را که در آنها ولتاژ فارادی القاء می‌شود، افزایش دهد. نتیجهٔ این اثر دوگانه این است که ضریب خودالقایی سلف یا کویلی که به شکل مارپیچ با حلقه‌های نزدیک به هم باشد، عبارت از $\mu N^2 A/s$ که A سطح مقطع، s طول سیم‌پیچ، N تعداد دوره‌های کامل و μ ضریب ثابت مادهٔ داخل سیم‌پیچ می‌باشد و به نام پرمابیلیته خوانده می‌شود. برای هوای آزاد و موادی که خیلی نزدیک به هوا هستند) داریم: $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m

سلفهای عملی را باید همراه با یک درس آزمایشگاه و مطالبی مربوط به شار مغناطیسی، پرمابیلیته، و روشهای استفاده از مشخصه‌های سیم‌پیچ فیزیکی برای محاسبهٔ یک ضریب خودالقایی مناسب برای مدل ریاضی در دروس فیزیک و تئوری میدان الکترومغناطیسـ رد بررسی قرار دارد.

همچنین می‌توان مدارهای الکترونیکی خاصی را مونتاژ نمود که شامل هیچ سلفی نباشد ولی رابطهٔ V-i فرمول (۱) را در ترمینالهای ورودی‌اش ارائه کند. یک مثال برای این حالت را در قسمت ۸-۷ مورد بررسی قرار خواهیم داد.

حال بیایید رابطهٔ (۱) را کمی موشکافی کنیم تا بعضی از مشخصات الکتریکی این مدل ریاضی تعیین شود. این معادله نشان می‌دهد که ولتاژ دو سر یک سلف متناسب است با سرعت

---

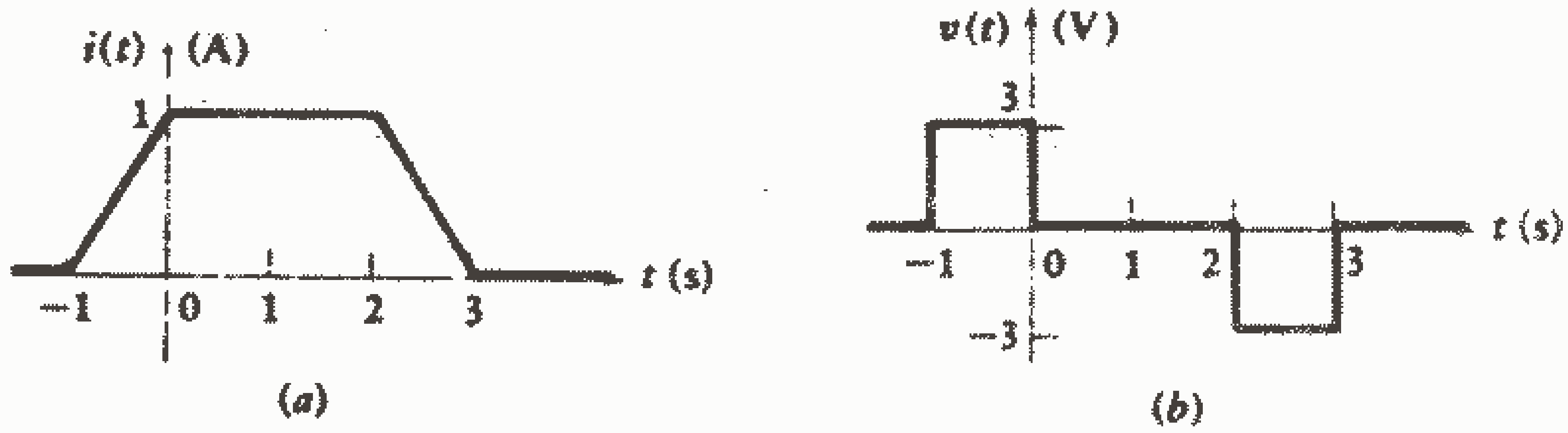
۱ - یک پیروزی توخالی

تغییرات زمانی جریان آن. بخصوص که نشان می‌دهد صرفنظر از مقدار جریان که هر چقدر باشد ، ولتاژ دو سر سلفی که حامل جریان ثابت باشد صفر می‌باشد بنابراین ما می‌توانیم سلف را برای dc اتصال کوتاه در نظر بگیریم. واقعیت دیگری که از این معادله مشهود است مربوط می‌شود به سرعت بی‌نهایت تغییر جریان سلف، مانند حالتی که به وسیله یک تغییر ناگهانی از یک مقدار محدود به مقدار محدود دیگری در مقدار جریان به وجود می آید. این تغییر ناگهانی جریان باید با ولتاژ نامحدودی در دو سر سلف همراه باشد. به عبارت دیگر اگر بخواهیم یک تغییر ناگهانی در جریان سلف ایجاد کنیم، باید ولتاژ بی‌نهایت به آن اعمال کنیم. اگر چه یک تابع تحریک ولتاژ بی‌نهایت فقط از نظر تئوری قابل قبول است و هرگز نمی‌تواند به وسیله یک وسیله فیزیکی واقعی ارائه شود. همانگونه که به طور خلاصه خواهیم دید که یک تغییر ناگهانی در جریان سلف، نیاز به یک تغییر ناگهانی در انرژی ذخیره شده در سلف دارد و این تغییر ناگهانی در انرژی نیاز به قدرت بی‌نهایت در آن لحظه دارد که باز قدرت بی‌نهایت در دنیای واقعی وجود ندارد. برای اجتناب از ولتاژ و قدرت بی‌نهایت، نباید اجازه دهیم که جریان سلف به طور لحظه‌ای از یک مقداری به مقدار دیگری جهش کند. اگر سلفی را که حامل جریان محدودی است مدار باز کنیم ممکن است یک قوس الکتریکی در دو سر سوئیچ ظاهر شود. انرژی ذخیره شده صرف یونیزه کردن هوا در مسیر قوس می‌شود. این قوس در سیستم احتراق اتومبیل مفید می‌باشد به طوریکه جریانی که از کویل شمع عبور می‌کند به وسیله مقسم قطع می‌شود و قوسی در دو سر شمع ایجاد می‌شود.

ما در حال حاضر هیچ مداری را که در آن یک سلف به طور ناگهانی مدار باز شود را مورد توجه قرار نخواهیم داد. اگر چه باید خاطر نشان ساخت که ما این محدودیت را بعداً وقتیکه وجود یک تابع تحریک ولتاژ و یا پاسخ را که به طور لحظه‌ای بی‌نهایت می‌شود، در نظر بگیریم، رفع خواهیم کرد.

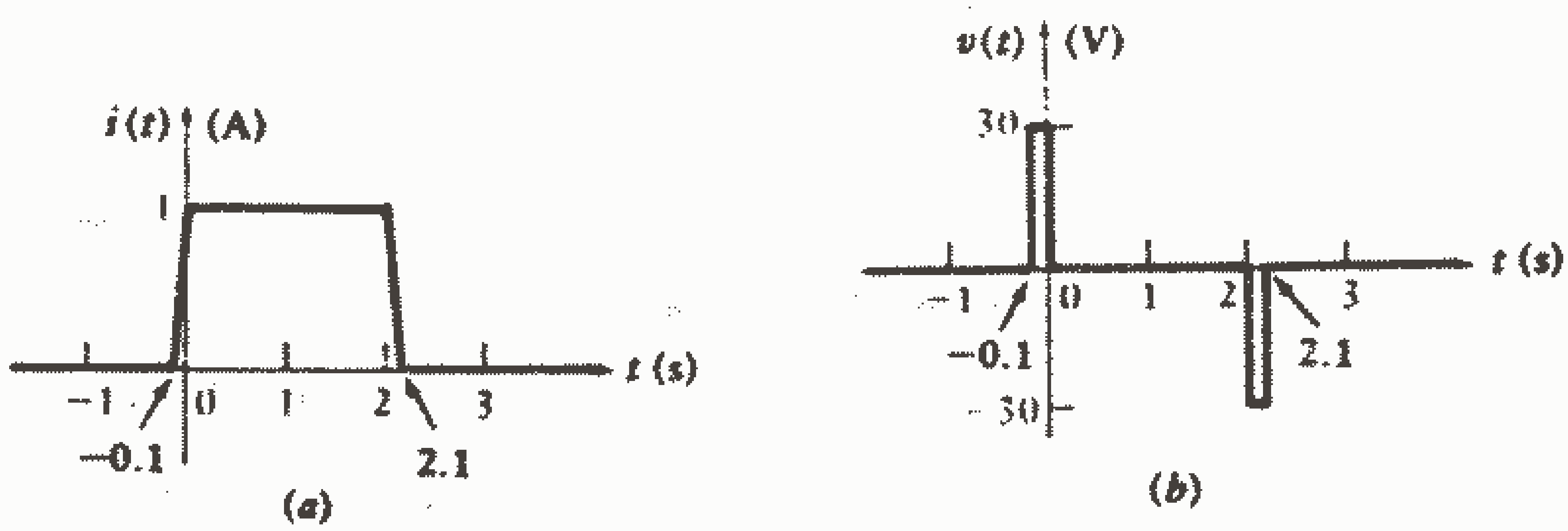
معادلهٔ (۱) را می‌توان به وسیله روشهای ترسیمی تفسیر (و یا در صورت لزوم حل) نمود. جریانی را فرض می‌کنیم (شکل ۲a-۴) که قبل از t=-1S مقدارش صفر است و سپس در ثانیهٔ بعدی مقدار آن به طور خطی به ۱ افزایش پیدا می‌کند و برای مدت 2S در مقدار 1A باقی می‌ماند و سپس در ثانیه بعدی مقدارش به صفر تنزل می‌کند و بعد از آن در مقدار صفر می‌ماند. اگر این جریان در یک سلف 3H موجود باشد و علائم ولتاژ و جریان به گونه‌ای در نظر گرفته شوند که مطابق با قرارداد علامت غیرفعال باشدو آنگاه می‌توانیم از معادلهٔ (۱) برای به دست آوردن شکل موج ولتاژ استفاده کنیم. از آنجاییکه جریان برای t<-1 صفر و ثابت می‌باشد، ولتاژ

در این فاصلهٔ زمانی صفر است سپس جریان با سرعت خطی ۱A/S شروع به افزایش می‌کند و در نتیجه ولتاژ ثابت ۳V ایجاد می‌شود. در طی فاصلهٔ ۲S بعدی، جریان ثابت است بنابراین ولتاژ صفر می‌باشد. کاهش نهایی جریان باعث ولتاژ ۳V- می‌شود و پس از آن پاسخی وجود ندارد. شکل موج ولتاژ در شکل ۲b-٤ در همان مقیاس زمانی رسم شده است.



شکل ۲ ـ ٤: (a) شکل موج جریان در یک سلف ۳. H (b) شکل موج ولتاژ متناظر با آن $v = 3\,di/dt$

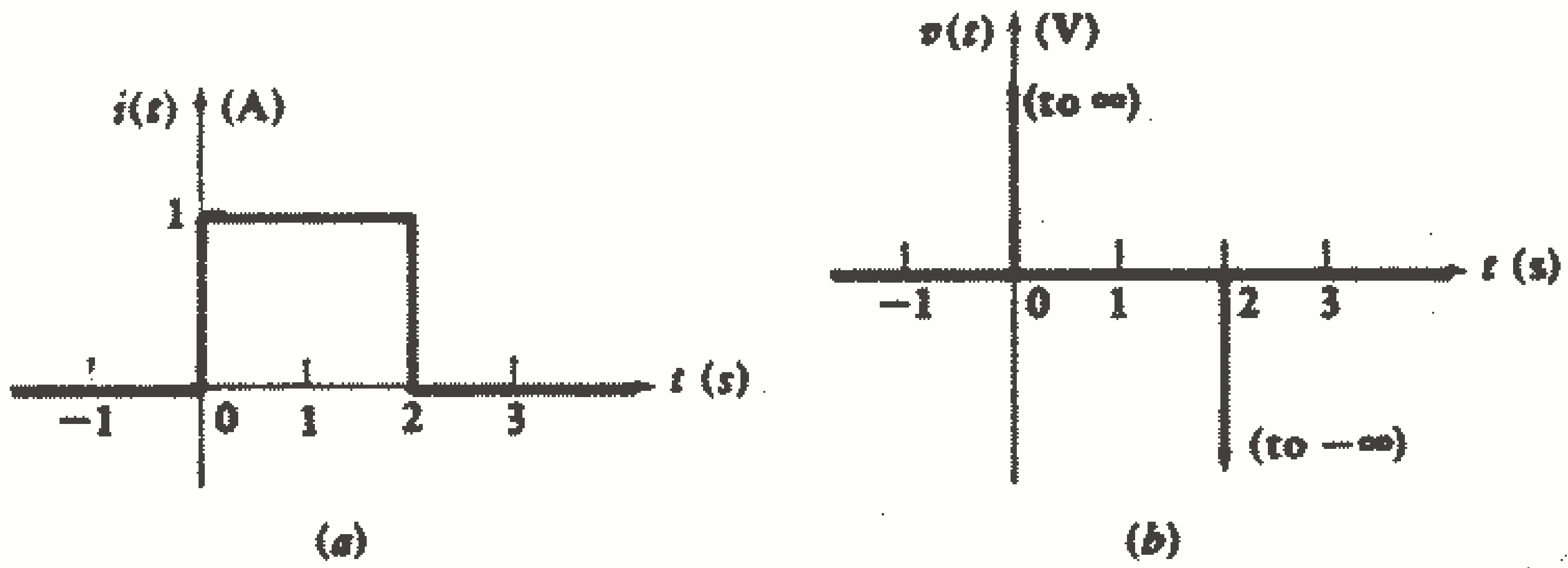
حال بیایید اثر یک افزایش و یا کاهش سریعتر جریان بین مقادیر صفر و۱A را بررسی کنیم. اگر فواصل زمانی لازم برای افزایش و کاهش به ۱S/. کاهش یابد، آنگاه باید مشتق ده برابر از نظر اندازه بزرگ‌تر شود. این وضعیت در شکل موجهای ولتاژ و جریان در شکلهای a,b ۳-٤ نشان داده‌شده‌است‌وجالب‌است‌توجه کنیم که‌سطح‌زیرهرپالس ولتاژ ۳V S می‌باشد.



شکل ۳ ـ ٤: (a) زمانی که لازم است تا جریان شکل a ۲ ـ ٤ از 0 تا ۱ و از ۱ تا 0 تغییر کند با فاکتور ۱۰ کاهش پیدا کرده است. (b) شکل موج ولتاژ حاصله.توجه کنید که عرض پالس‌ها به منظور وضوح کمی بزرگنمایی شده‌اند.

هر چه طول این دو فاصلهٔ زمانی کاهش یابد به همان نسبت اندازهٔ ولتاژ هم بزرگتر می‌شود البته فقط در فاصله‌ای که جریان صعودی و نزولی باشد یک تغییر ناگهانی در جریان باعث یک ولتاژ بی‌نهایت (Spike) خواهد شد (که هر کدام دارای سطح ۳۷.S می‌باشند) که در شکل ٤-٤a , ٤-٤b نشان داده شده‌اند.

بعدها تهیه این ولتاژهای (و جریانهای) بی‌نهایت مطلوب خواهد بود و ما آنها را ایمپالس خواهیم نامید، اگرچه در حال حاضر به حالت واقعی نزدیکتر خواهیم بود و اجازه نخواهیم داد جریان، ولتاژ و قدرت بی‌نهایت شود. بنابراین موقتاً یک تغییر ناگهانی در جریان سلف ممنوع می‌باشد.



شکل ٤ - ٤: (a) زمان لازم برای تغییر جریا شکل a ۲ - ٤ از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰ به صفر کاهش یافته است. (b) ولتاژ مربوط در دو سر سلف شامل یک ضربه بینهایت مثبت و منفی می‌باشد.

تمرین

۱ - ٤ - در مدار شکل ٤-۵a کمیتهای زیر را پیدا کنید:

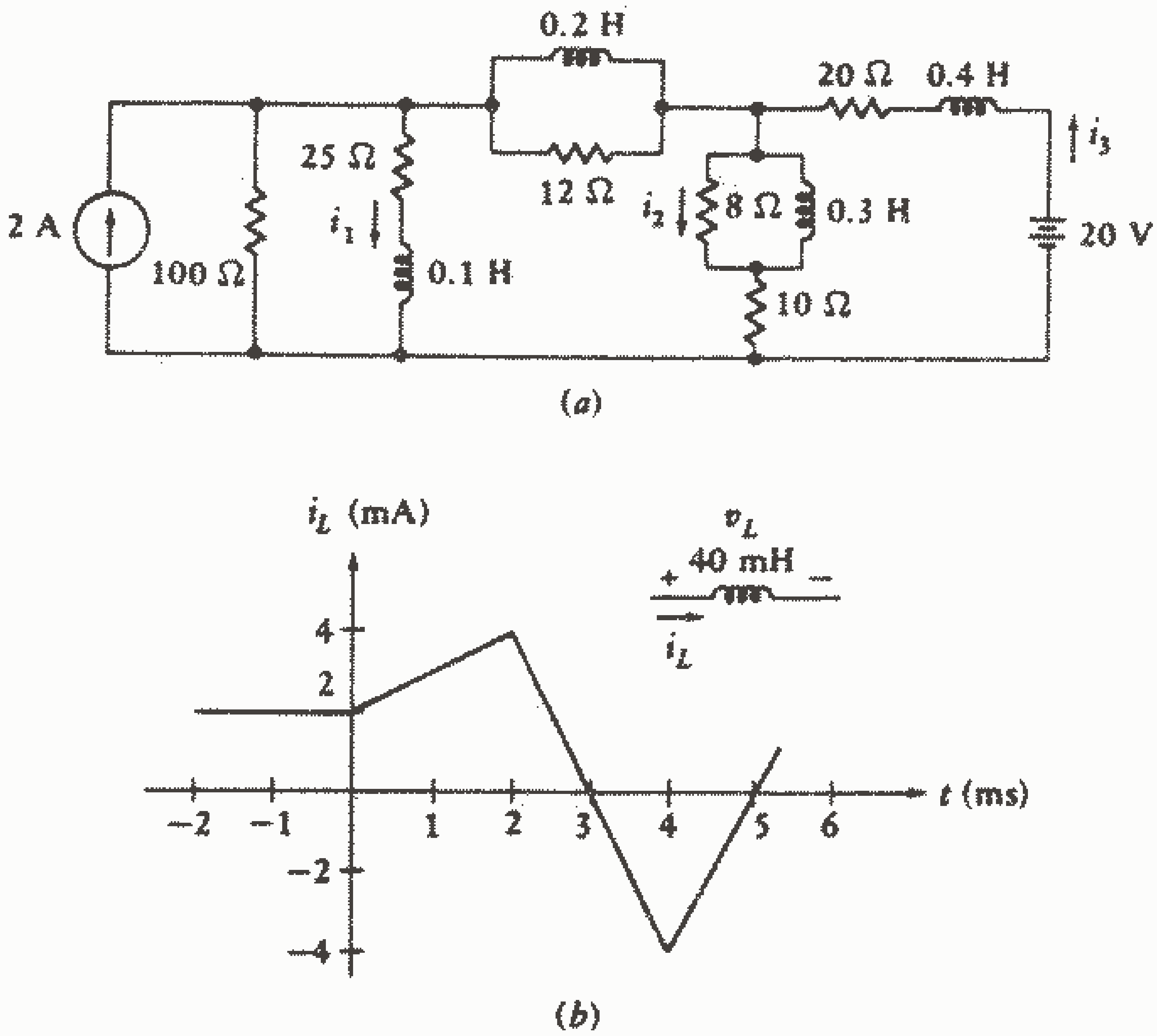
$i_3(c), i_2(b), i_1(a)$

جواب: ۰/۲۵A و ٥ و ۰/٦

۲ - ٤ - جریان یک سلف ٤۰mH به صورت تابعی از زمان در شکل ٤-۵b نشان داده شده است. مقدار $v_L(t)$ را در مورد زیر پیدا کنید:

$t=5ms(c),\ t=3ms(b),\ t=1ms(a)$

جواب: ۱٦۰, −۱٦۰, ٤۰mV



شکل ۵ ـ ٤: به تمرینات ۱ ـ ٤ و ۲ ـ ٤ مراجعه کنید.

۳ ـ ۴ ـ روابط انتگرالی برای سلف

ما ضریب خود القایی را به وسیله یک معادلهٔ دیفرانسیل ساده(۲) $v = L\frac{di}{dt}$ تعریف کرده‌ایم و قادر بوده‌ایم چند نتیجه‌گیری دربارهٔ مشخصات یک سلف از این رابطه داشته باشیم. مثلاً دریافته‌ایم که می‌توان سلف را برای جریان مستقیم، اتصال کوتاه در نظر گرفت و توافق کرده‌ایم که نمی‌توانیم اجازه دهیم جریان یک سلف به طور ناگهانی از یک مقدار به مقدار دیگری تغییر کند زیرا این امر لازمه‌اش این است که ولتاژ و قدرت سلف بی‌نهایت شود. با وجود این هنوز معادلهٔ تعریف‌کنندهٔ ضریب خودالقایی حاوی اطلاعات دیگری نیز هست. اگر معادلهٔ (۲) را با کمی تغییر به صورت $di = \frac{1}{L} v\, dt$ بنویسیم، انتگرال‌گیری را ایجاب می‌کند. اجازه دهید ابتدا حدودی را که باید در دو انتگرال قرار دهیم مورد توجه قرار دهیم. جریان i در لحظهٔ t مطلوب است پس این دو کمیت حدود بالایی انتگرالهای سمت چپ و راست می‌باشند و حدود پایینی را فقط با فرض اینکه جریان در لحظه t0 عبارت از i(t0) است، می‌توان تعیین نمود. بنابراین

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\, dt \Longrightarrow i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\, dt$$

$$\Longrightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\, dt + i(t_0) \qquad (۳)$$

معادلهٔ (۲) ولتاژ سلف را بر حسب جریان آن نشان می‌دهد در حالیکه معادلهٔ (۳) جریان را بر حسب ولتاژ می‌دهد. شکلهای دیگری هم برای این معادلهٔ اخیر ممکن می‌باشد. ما می‌توانیم انتگرال را به صورت یک انتگرال نامعین به همراه ثابت انتگراسیون K بنویسیم:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int v\,dt + k \qquad (4)$$

می‌توانیم فرض کنیم که داریم یک مسئله واقعی را که در آن اگر $t_o \to -\infty$ هیچ جریان یا انرژی در سلف وجود ندارد را حل می‌کنیم. بنابراین اگر $i(t_o)=i(-\infty)=0$ آنگاه:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,dt \qquad (۵)$$

بیایید کاربرد این انتگرالها را با حل یک مثال ساده بررسی کنیم. فرض کنید که ولتاژ دو سر یک سلف ۲H برابر با ۶cos۵t V باشد. در این صورت چه اطلاعاتی دربارهٔ جریان سلف می‌توان به دست آورد؟ از معادلهٔ (۳) داریم:

$$i(t) = \frac{1}{2}\int_{t_o}^{t} 6\cos 5t\,dt + i(t_o)$$

و یا: $i(t) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{۵}\sin ۵t - \frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{۵}\sin ۵t_o + i(t_o) = ۰{,}۶\sin ۵t - ۰{,}۶\sin ۵t_o + i(t_o)$

جملهٔ اول در رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که جریان سلف به طور سینوسی تغییر می‌کند و جملهٔ دوم و سوم فقط بیانگر یک مقدار ثابت می‌باشند که اگر مقدار عددی جریان در لحظهٔ مشخص از زمان معلوم باشد، این مقدار ثابت معلوم می‌گردد. بیایید فرض کنیم که بیان مثال ما همچنین نشان می‌دهد که جریان در لحظهٔ $t=-\pi/۲$ S برابر با ۱A می‌باشد. بنابراین t_o را برابر $-\pi/2$ و $i(t_o)$ را برابر ۱ می‌گیریم و در می‌یابیم که:

$$i(t) = ۰{,}۶\sin ۵t - ۰{,}۶\sin(-۲{,}۵\pi) + ۱ \rightarrow i(t) = ۰{,}۶\sin ۵t + ۱{,}۶$$

می‌توانستیم همین نتیجه را از رابطهٔ (۴) هم به دست آوریم. یعنی:

$$i(t) = ۰{,}۶\sin ۵t + k$$

و با در نظر گرفتن جریان ۱A در لحظهٔ $t=-\pi/2$ می‌توانیم مقدار عددی k را به دست آوریم:

$$۱ = ۰{,}۶\sin(-۲{,}۵\pi) + K \rightarrow K = ۱ + ۰{,}۶ = ۱{,}۶ \rightarrow i(t) = ۰{,}۶\sin ۵t + ۱{,}۶$$

معادلهٔ (۵) با این ولتاژ بخصوص تولید اشکال می‌کند زیرا ما این معادله را بر اساس این فرض که جریان در لحظهٔ $t=-\infty$ صفر می‌باشد بنا نهادیم. این امر باید در دنیای واقعی صادق باشد، اما در زمنیه مدل ریاضی داریم کار می‌کنیم و تمام توابع تحریک ایده‌آل هستند. این مشکل پس از انتگرال‌گیری یعنی: $i(t) = ۰{,}۶\sin ۵t \Big|_{-\infty}^{t}$

و تلاش برای محاسبهٔ انتگرال در حدود پایین آن بروز می‌کند:

$$i(t)=0{,}6\ \sin 5t-0{,}6\ \sin(-\infty)$$

سینوس $\pm\infty$ نامعین می‌باشد و ما می‌توانیم آن را با یک ثابت نامعلوم K نشان دهیم، یعنی:

$$i(t)=0{,}6\ \sin 5t+K$$

ملاحظه می‌کنیم که این نتیجه با نتیجهٔ به دست آمده وقتیکه یک ثابت انتگراسیون دلخواه در معادلهٔ (۴) فرض نمودیم یکسان می‌باشد.

ما نباید قضاوت عجولانه‌ای را بر اساس این مثال انجام دهیم زیرا بسته به اینکه کدام فرم را به کار بریم هر یک بسته به مسئله و نوع کاربرد دارای مزایایی می‌باشند. معادلهٔ (۳) بیانگر یک روش طولانی و کلی است اما به وضوح نشان می‌دهد که ثابت انتگراسیون یک جریان می‌باشد. معادله (۴) بیان خلاصه و جمع و جورتری از معادله (۳) می‌باشد اما ماهیت ثابت انتگراسیون نامشخص است. و بالاخره معادلهٔ (۵) یک بیان عالی می‌باشد زیرا هیچ مقدار ثابتی لازم ندارد اگر چه فقط وقتیکه جریان در $t=-\infty$ برابر صفر باشد و وقتیکه بیان تحلیلی جریان نامعین نباشد می‌توان آن را به کار برد.

حال بیایید توجه خود را معطوف قدرت و انرژی کنیم. قدرت جذب شده به وسیله حاصلضرب ولتاژ ـ جریان به دست می‌آید:

$$p = vi = Li\frac{di}{dt} \qquad \text{W}$$

انرژی کسب شده به وسیله سلف یعنی w_L در میدان مغناطیسی اطراف سیم‌پیچ ذخیره می‌شود و به وسیله انتگرال قدرت در فاصلهٔ زمانی مورد نظر بیان می‌شود:

$$\int_{t_0}^{t} p\,dt = L\int_{t_0}^{t} i\frac{di}{dt}\,dt = L\int_{i(t_0)}^{i(t)} i\,di = \tfrac{1}{2}L\{[i(t)]^2 - [i(t_0)]^2\}$$

و از آنجا داریم:

$$w_L(t) - w_L(t_0) = \tfrac{1}{2}L\{[i(t)]^2 - [i(t_0)]^2\} \qquad \text{J} \qquad (6)$$

که باز دوباره فرض کرده‌ایم جریان در لحظهٔ t_0 عبارت است از $i(t_0)$ هنگام استفاده از رابطهٔ انرژی مرسوم این است که فرض می‌کنند مقدار t_0 طوری انتخاب شده است که در آن، جریان و انرژی صفر می‌باشد. بنابراین به طور ساده خواهیم داشت:

$$\boxed{w_L(t) = \tfrac{1}{2}Li^2} \qquad (7)$$

که ما اکنون می‌دانیم مبنای ما برای انرژی صفر هر زمانی که در آن جریان سلف صفر است، می‌باشد. در هر زمان دیگری هم که جریان صفر باشد، هیچ انرژی ذخیره شده‌ای در

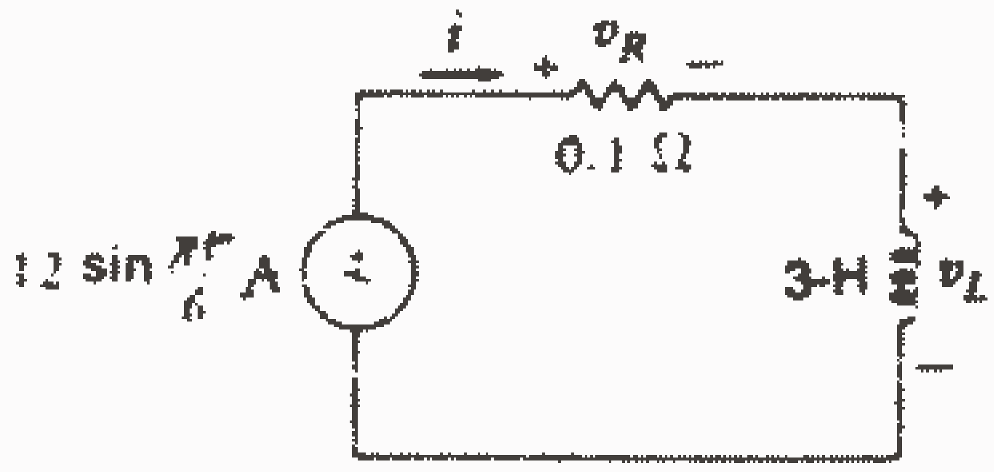
سیم‌پیچ نخواهیم داشت. هر وقت که جریان صفر نباشد صرفنظر از جهت آن، انرژی در سلف ذخیره می‌شود. بنابراین نتیجه می‌گیریم که قدرت باید در بخشی از زمان به سلف تحویل داده شود و بعداً از آن پس گرفته شود. در یک سلف ایده آل تمام انرژی جذب شده را می‌توان باز پس گرفت و هیچ بار ذخیره و یا تلفاتی در مدل ریاضی وجود ندارد. اگر چه یک سیم‌پیچ واقعی باید از سیم واقعی ساخته شود و در نتیجه همیشه مقاومتی با آن همراه می‌باشد. در این‌صورت دیگر نمی‌توان انرژی را بدون تلفات، ذخیره و بازیابی نمود.

این ایده‌ها را می‌توان با یک مثال ساده توضیح داد. در شکل ۶-۴ یک سلف 3H به طور سری با یک مقاومت ۰٫۱Ω و یک منبع جریان نشان داده شده است. می‌توانیم مقاومت را به عنوان مقاومت سیم سلف که همیشه همراه با سیم‌پیچ واقعی می‌باشد تعبیر کنیم. ولتاژ دو سر مقاومت چنین است:

$$v_R = Ri = 1.2 \sin \frac{\pi}{6} t$$

و ولتاژ دو سر سلف را با استفاده از معادلهٔ تعریف‌کنندهٔ خود القایی به دست می‌آوریم.

$$v_L = L\frac{di}{dt} = 3\frac{d}{dt}\left(12 \sin \frac{\pi}{6} t\right) = 6\pi \cos \frac{\pi}{6} t$$



شکل ۶ ـ ۴: یک جریان سینوسی به عنوان یک تابع تحریک به یک مدار RL سری اعمال شده است.

انرژی ذخیره شده در سلف عبارت است از: $w_L = \frac{1}{2} Li^2 = 216 \sin^2 \frac{\pi}{6} t$ و بدیهی است که این انرژی از مقدار صفر در t=0 به 216J در t=3S افزایش می‌یابد در طی ۳ ثانیهٔ بعدی، انرژی به طور کامل سلف را ترک می‌کند. حال بیایید ببینیم چه بهایی را برای این ذخیره و بازیابی 216J انرژی در این چند ثانیه پرداخته‌ایم. قدرت تلف شده در مقاومت به سادگی به دست می‌آید: $p_R = i^2R = 14.4 \sin^2 \frac{\pi}{6} t$ و انرژی تبدیل شده به حرارت در مقاومت در فاصله زمانی 6S عبارت است از:

$$w_R = \int_0^6 p_R\, dt = \int_0^6 14.4 \sin^2 \frac{\pi}{6} t\, dt = \int_0^6 14.4 \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \cos \frac{\pi}{3} t\right) dt = 43.2 \quad J$$

این مقدار بیانگر ۲۰ درصد ماکزیمم انرژی ذخیره شده می‌باشد و برای چنین سلفی معقول می‌باشد. برای سیم‌پیچهایی که ضریب خود القایی در حدود ۱۰۰μH دارند، باید انتظار اعدادی در حدو ۲ یا ۳ درصد را داشته باشیم. در فصل ۱۴ این مفهوم را با تعریف ضریب کیفیت Q که نسبت ماکزیمم انرژی ذخیره شده به انرژی تلف شده در هر پریود می‌باشد، فرموله خواهیم کرد.

حال بیایید مشخصات یک سلف را که از معادلهٔ تعریف‌کننده آن بر می‌آید، به صورت زیر فهرست‌وار بیان کنیم:

۱ - اگر جریان سلف با زمان تغییر نکند، ولتاژی در دو سر آن وجود نخواهد داشت، یعنی سلف برای dc اتصال کوتاه می‌باشد.

۲ - در سلف مقدار محدودی انرژی ذخیره می‌شود حتی اگر ولتاژ دو سر آن صفر باشد، مثلاً مانند موقعی که جریان آن ثابت باشد.

۳ - تغییر جریان یک سلف در زمان صفر به یک مقدار محدود غیرممکن می‌باشد و برای اینکار ولتاژ بی‌نهایت در دو سر سلف لازم است. بعدها مفید خواهد بود که چنین ولتاژی را بتوان تولید و به یک سلف اعمال نمود، اما فعلاً ما از چنین تابع تحریک یا پاسخی اجتناب می‌کنیم یک سلف در برابر تغییر ناگهانی جریان مقاومت می‌کند درست شبیه یک جرم که در برابر تغییر ناگهانی سرعت مقاومت می‌کند.

۴ - سلف هرگز انرژی را تلف نمی‌کند، بلکه فقط آن را ذخیره می‌کند. اگر چه این مطلب فقط برای مدل ریاضی صحیح است و برای یک سلف واقعی صادق نیست.

تمرین

۳ ـ ۴ ـ در شکل ۱ ـ ۴ مقدار سلف را $L=۵۰mH$ در نظر بگیرید و v را در لحظهٔ $t=۱۰mS$ در حالات زیر پیدا کنید: (a) اگر $i=۲۰(۱-e^{-۱۰۰t})$ برای $t>o$، (b) اگر انرژی ذخیره شده به وسیله سلف $۰,۴t\ J$ ، $i(\%۱)<۰$ باشد.

(c) پیدا کنید i را در $t=۱۰ms$ اگر $v=۲۰t^۲V$ برای $t>-۰,۱ms$ و $i(-\%۲)=۵mA$

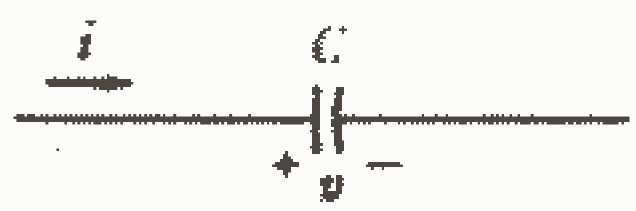
جواب: ۶,۲mA, -۱V, ۳۶,۸V

٤ ـ ٤ ـ خازن

عنصر مداری غیرفعال دیگر ما خازن می‌باشد ما ظرفیت C را به وسیله رابطهٔ ولتاژ ـ جریان $i = C\frac{dv}{dt}$ (۸) تعریف می‌کنیم. که در این رابطه i،v مطابق با قرارداد عنصر غیرفعال می‌باشند که این امر در شکل ۷ ـ ٤ نشان داده شده است. از معادلهٔ (۸) می‌توانیم واحد ظرفیت را به صورت آمپر ثانیه بر ولت و یا کولن بر ولت تعریف کنیم اما اکنون فاراد (F) را به عنوان یک کولن بر ولت تعریف می‌کنیم.

باز هم خازنی که ظرفیت آن طبق معادلهٔ (۸) تعریف شده است یک مدل ریاضی برای یک وسیلهٔ واقعی است. ساختمان این وسیلهٔ فیزیکی به وسیله علامت مداری آن که در شکل ۷ ـ ٤ نشان داده شده است به ذهن القا می‌شود درست به همان طریقی که علامت حلزونی سلف نمایانگر سیم پیچ در آن وسیلهٔ فیزیکی می‌باشد. یک خازن در عمل از دو صفحه هادی که بار می‌تواند بر روی آنها جمع شود تشکیل شده است که این دو صفحه به وسیلهٔ یک لایهٔ نازک عایق که دارای مقاومت خیلی زیاد است از هم جدا شده‌اند. اگر فرض کنیم که این مقاومت به اندازهٔ کافی بزرگ باشد که بتوان آن را بی‌نهایت در نظر گرفت، آنگاه بارهای مساوی و مخالف که بر روی صفحات خازن قرار می‌گیرند نمی‌توانند با یکدیگر ترکیب شوند (حداقل به وسیلهٔ مسیری در داخل قطعه). حال بیایید یک وسیلهٔ خارجی مانند یک منبع جریان را تصور کنیم که به این خازن وصل شده است و جریان مثبتی به یکی از صفحات آن وارد می‌شود و از صفحهٔ دیگر خارج می‌شود. جریانهای مساوی به ترمینالهای این عنصر وارد می‌شود و از آن خارج می‌شود و این همان چیزی است که از هر عنصر مداری انتظار داریم.

حال بیایید داخل خازن را مورد بررسی قرار دهیم، جریان مثبتی که وارد یکی از صفحات می‌شود بیانگر بار مثبتی است که از طریق یکی از پایه‌های آن وارد آن صفحه می‌شود، این جریان نمی‌تواند از داخل خازن عبور کند و در نتیجه بر روی آن صفحه جمع می‌شود در واقع جریان و بار طبق رابطهٔ آشنای $i = \frac{dq}{dt}$ به هم مربوط می‌شوند.



شکل ۷ ـ ٤: علائم مبنای ولتاژ و جریان بر روی علامت مداری خازن نشان داده شده است به طوری که: $i = C\,dv/dt$

حال بیایید یک مسئله پرزحمت را با در نظر گرفتن این صفحه به عنوان یک گره سر بسته و اعمال قانون جریان کیرشوف، برای خود مطرح کنیم. بدیهی است که آن برقرار نمی‌باشد زیرا جریان از مدار خارجی به صفحه نزدیک می‌شود اما از صفحه به داخل «مدار داخلی» جاری نمی‌شود این معمای پچیده دانشمند مشهور اسکاتلندی، جیمز کلارک ماکسول، را حدود یک قرن پیش به سختی به زحمت انداخت و پس از اینکه وی تئوری متحد الکترومغناطیسی را وضع نمود در این تئوری یک «جریان جابجایی» را ارائه کرد که در هر جا که یک میدان الکتریکی یا ولتاژ حضور داشته باشد این جریان وجود دارد.

جریان جابجایی که در داخل خازن بین صفحات آن جاری است دقیقاً مساوی است با جریان هدایتی که در پایه‌های خازن جاری است، بنابراین اگر ما هر دو جریان جابجایی و هدایتی را در نظر بگیریم قانون جریان کیرشوف برقرار می‌باشد اگر چه در تحلیل مدار با این جریان جابجایی داخلی سروکاری نداریم و از آنجاییکه خوشبختانه این جریان با جریان هدایتی برابر است می توانیم نظریهٔ ماکسول را به این صورت که جریان هدایتی را به ولتاژ متغیر دو سر خازن مربوط می‌سازد، در نظر بگیریم. این رابطه خطی است و ضریب تناسب، ظرفیت c می‌باشد :

$$i_{disp}=i= C\frac{dv}{dt}$$

خازنی که از دو صفحهٔ هادی موازی به سطح A و به فاصلهٔ d تشکیل شده باشدو دارای ظرفیت $c=\varepsilon A/d$ می‌باشد که در این رابطه ε ضریب نفوذ عایق بین صفحات می‌باشد و ابعاد صفحات هادی خیلی بزرگتر از d می‌باشند. برای خلاء و یا هوای آزاد داریم:

$$\varepsilon = \varepsilon_o = ۸/۸۵۴\ Pf/m$$

مفاهیم میدان الکتریکی، جریان جابجایی و فرم کلی قانون جریان کیرشوف موضوعاتی هستند که برای دروس فیزیک و تئوری الکترومغناطیسی مناسبتر می‌باشند.

بعضی از مشخصه‌های مهم مدل ریاضی جدیدمان را می‌توان از معادلهٔ تعریف کنند، (۸) به دست آورد. یک ولتاژ ثابت در دو سر خازن ایجاب می کند که جریان عبوری از آن صفر باشد، بنابراین خازن برای dc «مدار باز» می‌باشد. این واقعیت را از علامت مداری خازن هم می‌توان استنباط نمود. همچنین بدیهی است که یک جهش ناگهانی ولتاژ ایجاب می کند که جریان بینهایت باشد. همانگونه که تغییرات ناگهانی جریان در سلف را ممنوع کردیم، در خازن هم نباید اجازه دهیم ولتاژ تغییرات ناگهانی داشته باشد زیرا جریان بی‌نهایت (و در نتیجهٔ قدرت بی‌نهایت) غیرعملی می‌باشد. ما این محدودیت را هنگام در نظر گرفتن ایمپالس جریان، کنار خواهیم گذاشت.

ولتاژ خازن را می توان با انتگرال گیری از رابطه(۸) بر حسب جریان بیان نمود. ما ابتدا به دست می آوریم:

$$dv = \frac{1}{C} i \, dt$$

و سپس در حدود بین t_0 , t و ولتاژهای متناظر آنها یعنی $v(t_0)$, $v(t)$ انتگرال گیری می کنیم:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i \, dt + v(t_0) \qquad (۹)$$

رابطهٔ (۹) را می‌توانیم به صورت یک انتگرال نامعین به اضافه یک ثابت انتگراسیون هم بنویسیم:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i \, dt + k \qquad (۱۰)$$

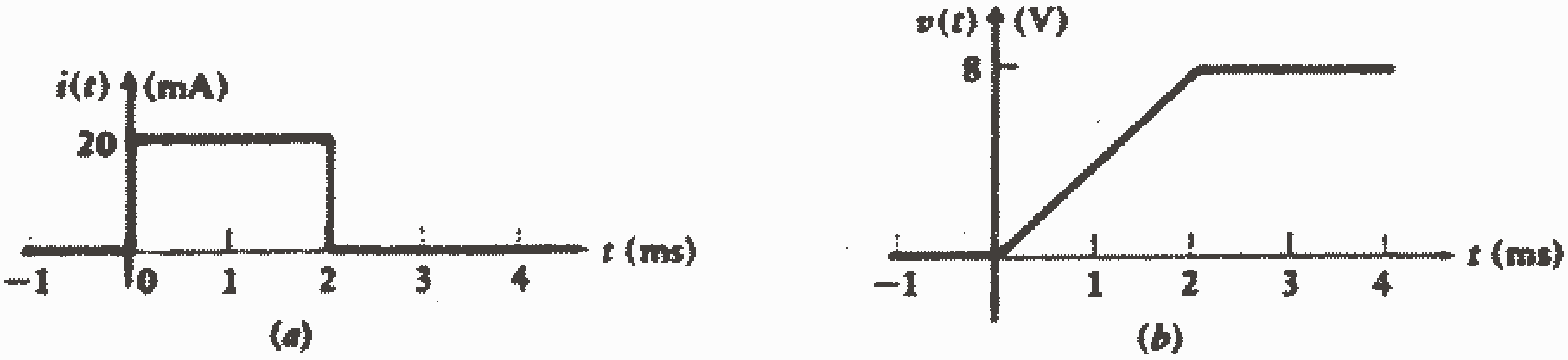
و بالاخره در بسیاری از مسائل واقعی می‌توان t_0 را $-\infty$ و $v(-\infty)$ را صفر در نظر گرفت:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i \, dt \qquad (۱۱)$$

از آنجاییکه انتگرال جریان در هر فاصلهٔ زمانی برابر با باری است که در آن پریود بر روی آن صفحه‌ای از خازن که جریان به آن جاری می‌باشد، جمع می‌شود، بدیهی است که ظرفیت را می‌توان به صورت $q = Cv$ هم تعریف نمود.

تشابه بین چند معادلهٔ انتگرالی معرفی شده در این قسمت و آنهایی که برای خود القایی به آنها اشاره شد تداعی‌کننده است و به ذهن القاء می‌کند که تناظری را که بین معادلات گره و چشمه در مدارهای مقاومتی ملاحظه کردیم می‌توان طوری تعمیم داد که خودالقایی و ظرفیت را هم در بر گیرد. اصل تناظر را بعداً در همین فصل مورد بحث قرار خواهیم داد.

به عنوان توضیحی برای کاربرد معادلات انتگرالی فوق‌الذکر، بیایید ولتاژ خازنی را که جریان نشان داده شده در شکل ۸a-۴ از آن عبور می‌کند، پیدا کنیم.



شکل ۸ ـ ٤: (a) شکل موج جریان اعمال شده به یک خازن ۵ μF. (b) شکل موج ولتاژ حاصله که به سادگی به وسیلهٔ انتگرال‌گیری ترسیمی به دست می‌آید.

فرض می‌کنیم که پالس مربعی منفرد ۲۰mA بادوام ۲ms به یک خازن 5μf اعمال شود. از تفسیر ترسیمی معادلهٔ (۹) می‌دانیم که اختلاف بین مقادیر ولتاژ در t و to متناسب است با سطح زیر منحنی جریان بین همین دو مقدار زمان ضریب تناسب ۱/c می‌باشد. این سطح را می‌توان از شکل ۸a-۴ با در نظر گرفتن مقادیر to , t به دست آورد. بنابراین اگر، $t = ۰/۵$, $t_o = -۰/۵$ (بر حسب ms) باشند، داریم: $v(۰/۵) = ۲+v(-۰/۵)$ و یا اگر $t_o = ۰$ و $t=۳$ داریم: $v(۳) = ۸+v(0)$

ما همچنین می‌توانیم نتایجمان را با تقسیم محدودهٔ زمانی مورد نظر به چندین فاصله، به طور عمومی‌تر بیان کنیم. بیایید نقطه شروع to را قبل از لحظهٔ صفر انتخاب کنیم. در این صورت اولین فاصلهٔ t را بین to و صفر انتخاب می‌کنیم:

$$v(t) = ۰+v(t_o)\ ,\ t_o \le t \le 0$$

و از آنجاییکه شکل موج ما بیان می‌دارد که هیچ جریانی قبل از لحظهٔ صفر به این خازن اعمال نشده است، پس داریم: $v(to) = 0$ و بنابراین: $v(t) = 0 \quad t\le 0$

حال اگر فاصلهٔ زمانی مشخص شده به وسیله پالس مربعی را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$v(t) = ۴۰۰۰t \quad ۰\le t \le ۲\ ms$$

و برای فاصلهٔ نیمه بی‌نهایت بعد از پالس، خواهیم داشت: $v(t)=۸ \quad t \ge ۲ms$

بنابراین نتایج به دست آمده برای این سه فاصلهٔ زمانی روابط تحلیلی ولتاژ خازن را در هر لحظه بعد از t=to به ما ارائه می‌کند و زمان to را می‌توان هر اندازه که بخواهیم زود در نظر بگیریم. این نتایج به گونه‌ای خیلی ساده‌تر از این روابط تحلیلی، به صورت نموداری در شکل ۸b-۴ نشان داده شده است.

قدرت تحویل داده شده به یک خازن عبارت است از: $p = vi = Cv\dfrac{dv}{dt}$

و انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی آن عبارت است از:

$$\int_{t_0}^{t} p\,dt = C\int_{t_0}^{t} v\frac{dv}{dt}\,dt = C\int_{v(t_0)}^{v(t)} v\,dv = \frac{1}{2}C\{[v(t)]^2 - [v(t_0)]^2\}$$

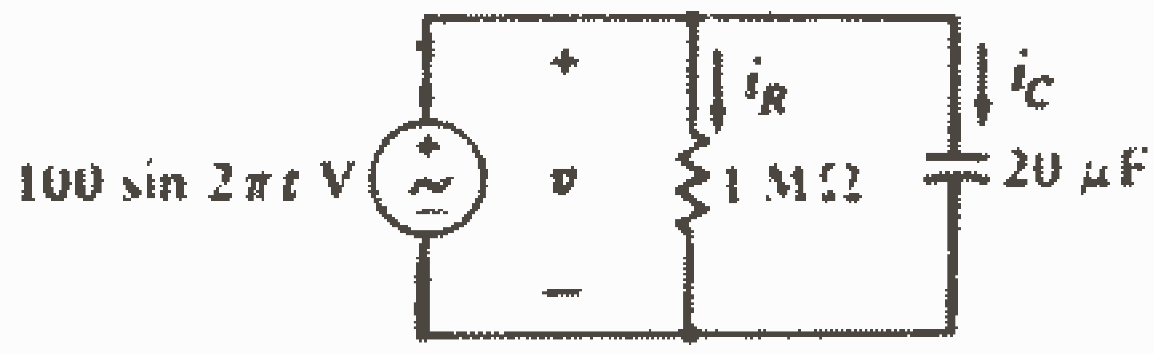
و در نتیجه داریم:

$$w_C(t) - w_C(t_0) = \tfrac{1}{2}C\{[v(t)]^2 - [v(t_0)]^2\} \qquad (۱۲)$$

که در رابطهٔ فوق ولتاژ و انرژی ذخیره شده در لحظه t_o به ترتیب عبارتند از $v(t_o)$ و $w_c(t_o)$ اگر مبنای انرژی صفر را در لحظهٔ t_o بگیریم ایجاب می‌کند که ولتاژ خازن هم در این لحظه صفر باشد، آنگاه داریم: $w_c(t) = \frac{۱}{۲}cv^۲$ (۱۳)

بیایید یک مثال عددی ساده را بررسی کنیم. به طوریکه در شکل ۹-۴ رسم شده است فرض

می‌کنیم که یک منبع ولتاژ سینوسی به طور موازی با یک مقاومت $۱M\Omega$ و خازن $۲۰\mu F$ قرار گرفته است.



شکل ۹ ـ ٤: یک منبع ولتاژ سینوسی به یک شبکهٔ موازی RC اعمال شده است.

مقاومت موازی را می‌توان به صورت مقاومت عایق و یادی الکتریک بین صفحات یک خازن واقعی در نظر گرفت. جریان مقاومت عبارت است از: $i_R = \frac{v}{R} = ۱۰^{-٤}\ \sin ۲\pi t$

و جریان خازن چنین است:

$$i_c = C\, dv/dt = ۲۰ \times ۱۰^{-٦}\ d/dt(۱۰۰\ \sin ۲\pi t) = ٤\pi \times ۱۰^{-۳}\ \cos ۲\pi t$$

سپس انرژی ذخیره شده در خازن را به دست می‌آوریم:

$$W_c = \tfrac{۱}{۲}CV^۲ = ۰{,}۱\ \text{sim}^۲ ۲\pi t$$

ملاحظه می‌کنیم که انرژی از مقدار صفر در لحظهٔ $t = o$ به مقدار ماکزیمم $۰{,}۱J$ در $t = \frac{۱}{٤}s$ افزایش می‌یابد و سپس در $\frac{۱}{٤}s$ بعدی به مقدار صفر تنزل می‌کند. در طی این فاصلهٔ زمانی $\frac{۱}{۲}s$ انرژی تلف شده در مقاومت عبارت است از:

$$W_R = \int_۰^{۰/۵} P_R dt = \int_۰^{۰/۵} ۱۰^{-۲}\ \text{sim}^۲\ ۲\pi t dt = ۲{,}۵mJ$$

بنابراین ۲٫۵ درصد ماکزیمم انرژی ذخیره شده در فرآیند ذخیره‌سازی و بازیابی انرژی در خازن ایده آل، تلف می‌شود. در خازنهای «کم‌اتلاف» مقادیر خیلی کوچکتر هم قابل دسترس می‌باشند اما این درصدهای کوچکتر معمولاً مربوط به خازنهای کوچک می‌باشند.

بعضی از مشخصات مهم خازنها به شرح زیر است:

۱ ـ اگر ولتاژ دو سر خازن متغیر با زمان نباشد، جریان آن صفر می‌باشد. بنابراین یک خازن برای dc مدار باز می‌باشد.

۲ ـ انرژی محدودی می‌تواند در خازن ذخیره شود حتی اگر جریان خازن صفر باشد، مانند وقتیکه ولتاژ دو سر آن ثابت است.

۳ ـ تغییر ولتاژ دو سر خازن در زمان صفر به مقدار محدود، غیرممکن می‌باشد زیرا در این صورت نیاز به جریان بی‌نهایت در خازن داریم. بعدها مفید خواهد بود که تصور کنیم چنین جریانی بتواند ایجاد شده و به یک خازن اعمال شود اما فعلاً از چنین تابع تحریک و پاسخی اجتناب می‌کنیم. یک خازن در برابر تغییر ناگهانی ولتاژ دو سرش مقاومت می‌کند درست شبیه فنری که در برابر تغییر جابجایی ناگهانی‌اش مقاومت می‌کند.

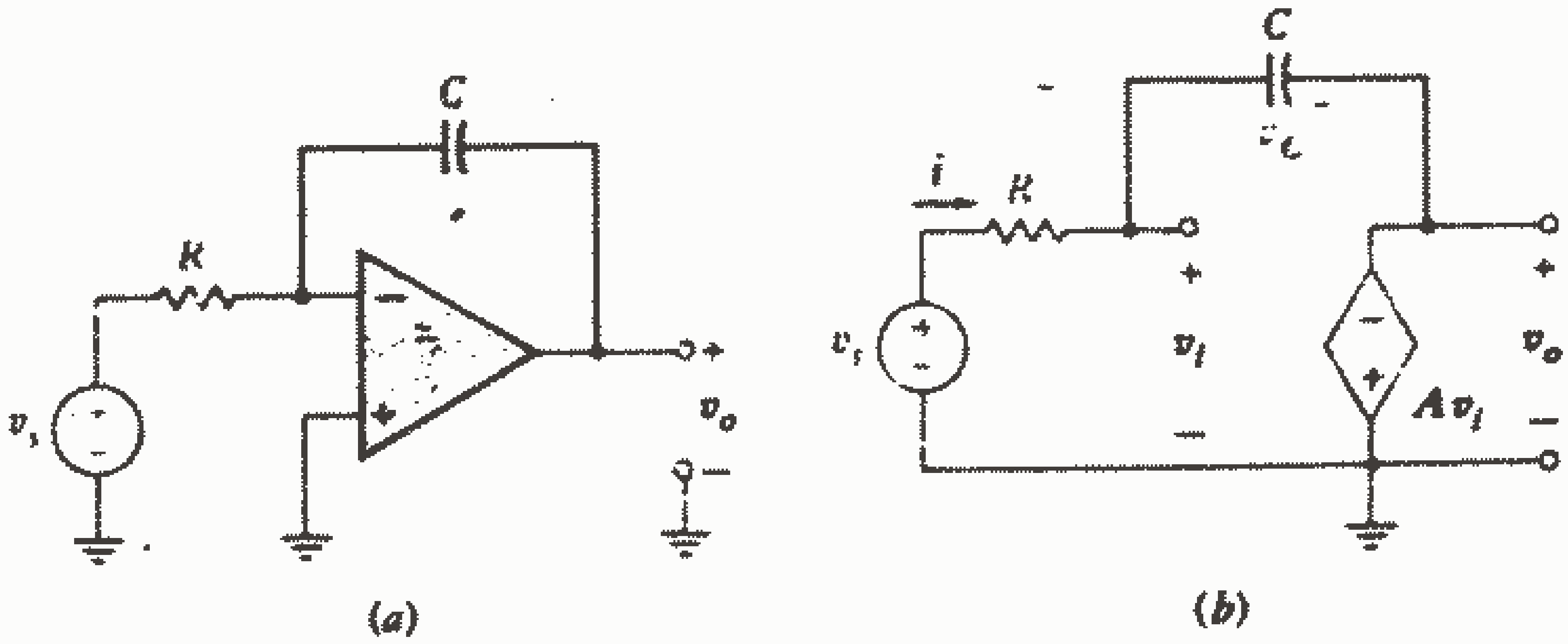
۴ ـ خازن هرگز انرژی را تلف نمی‌کند بلکه فقط آن را ذخیره می‌کند. اگر چه این مطلب فقط برای مدل ریاضی صادق است و برای یک خازن عملی صحیح نمی‌باشد.

جالب است که بحثمان دربارهٔ تناظر را با جایگزین نمودن کلمات بخصوصی، در چهار بند مربوط به مشخصات خازن، با متناظر آنها و مطالعهٔ این چهاربند، کمی جلو بیندازیم. اگر خازن و سلف، ظرفیت و ضریب خودالقایی، ولتاژ و جریان، دو سر با از میان، مدار باز با اتصال کوتاه، فنر با جرم و جابجایی و سرعت با هم عوض شوند (در هر جهت) چهار بیان قبلی مربوط به سلف بدست می‌آید. معرفی خازن ایده آل را با در نظر گرفتن اینکه چگونه می‌توان آن را همراه با یک op-amp ایده آل بکار برد، به پایان می‌بریم. تاکنون ما فقط op-amp را به عنوان یک ولتاژ فالوور یعنی وسیله‌ای که دارای مقاومت خروجی خیلی کم و ولتاژ خروجی که مجازاً مساوی با ولتاژ ورودی است، مورد بحث قرار داده‌ایم. ما اکنون نشان خواهیم داد که یک خازن ایده آل و یک مقاومت ایده آل را می‌توان با یک op-amp ترکیب نمود و وسیله‌ای ساخت که ولتاژ خروجی آن متناسب با انتگرال زمانی ورودی باشد.

برای ساختن این انتگراتور، ورودی غیرمعکوس کنندهٔ op-amp را که دارای مقاومت ورودی بی‌نهایت و مقاومت خروجی صفر است زمین می‌کنیم و یک خازن ایده آل را به عنوان فیدبک از خروجی به ورودی معکوس کننده وصل می‌کنیم و یک منبع سیگنال v_s را از طریق یک مقاومت ایده آل به ورودی معکوس کننده وصل می‌کنیم. این امر در شکل ۴=۱۰a نشان داده شده است که در آن $R_i = \infty$ ، $R_o = 0$ می‌باشد و مدار معادل هم در شکل ۴-۱۰b آمده است. رابطهٔ ولتاژ خروجی با ولتاژ ورودی به صورت $v_o = -AV_i$ می‌باشد یعنی: $v_i = -v_o/A$ (۱۴) حال بیایید v_o را با فرض اینکه A بی‌نهایت باشد به v_s مربوط کنیم. از معادلهٔ (۱۴) نتیجه می‌شود $v_i = 0$ و از شکل ۴-۱۰b ملاحظه می‌کنیم که: $i = v_s/R$ همچنین با $v_i = 0$، ولتاژ خازن v_c برابر است با $(-v_o)$ و داریم:

$$v_C = -v_o = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + v_C(0) = \frac{1}{C}\int_0^t \frac{v_s}{R}\,dt + v_C(0) \rightarrow v_o = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_s\,dt - v_C(0) \qquad (۱۵)$$

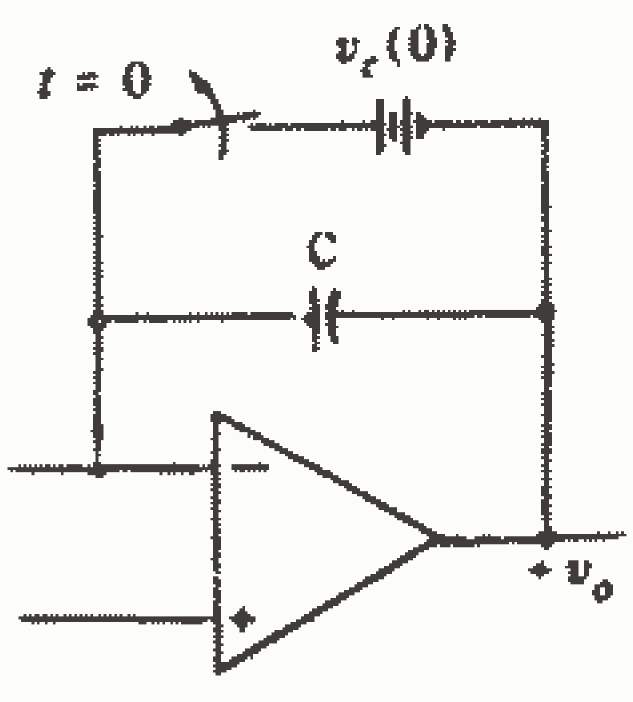
بنابراین ما یک مقاومت، خازن و یک op-amp را ترکیب کردیم و یک انتگراتور ساختیم.



شکل ۱۰ - ٤: (a) یک op - amp به صورت انتگراتور بسته شده است. (b) مدار معادل آن با فرض $R_i = \infty$ و $R_o = 0$.

توجه داشته باشید که جملهٔ اول خروجی عبارت است از ۱/RC برابر قرینهٔ انتگرال ورودی از t = ۰ تا t و جملهٔ دوم قرینهٔ مقدار اولیه v_c می‌باشد. مقدار RC را می‌توان طوری انتخاب کرد که برابر یک باشد مثلاً با انتخاب R = ۱MΩ ، C = ۱μF و یا انتخابهای دیگری را می‌توان در نظر گرفت به طوریکه ولتاژ خروجی را افزایش یا کاهش داد. وقتیکه از انتگراتور برای شبیه‌سازی سیستمهای مهندسی استفاده می‌شود، اغلب تغییر علامت مفید می‌باشد. البته علامت خروجی را می‌توان به وسیله تقویت‌کنندهٔ معکوس‌کننده هم که مدار آن در فصل ۷ آمده است، تغییر داد.

ولتاژ اولیه $v_c(0)$ در معادلهٔ (۱۵) را می‌توان با اضافه کردن یک باتری و یک سوئیچ به مدار انتگراتور اضافه نمود، که این مدار در شکل ۱۱ - ٤ نشان داده شده است. در مدارهای خاص، هم سوئیچ و هم ولتاژ اولیه معمولاً الکترونیکی می‌باشند از قبیل ترانزیستور و یا op-amp های دیگر.



شکل ۱۱ - ٤: اضافه کردن یک سوئیچ و یک منبع ولتاژ ایده‌آل این امکان را می‌دهد که مقدار $v_o(0)$ را در $-v_c(0)$ قرار دهیم.

اگر فرض نکنیم که A بی‌نهایت باشد، آنگاه می‌توانیم یک معادله KVL در محیط مدار شکل ۴-۱۰b بنویسیم:

$$-v_s + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + v_C(0) + v_o = 0$$

برای حذف i در نظر بگیرید که $i = v_s - v_i/R$ و برای حذف v_i از معادلهٔ (۱۴) استفاده کنید، حاصل عبارت خواهد بود از:

$$(۱+۱/A)v_o = -۱/RC\int_0^t (v_s + v_o/A)dt - v_c(0) \qquad (۱۶)$$

اگر $A \rightarrow \infty$ آنگاه معادلهٔ (۱۶) برابر با معادلهٔ (۱۵) خواهد شد.

قبل از اینکه از مدار انتگراتور بگذریم، یک سؤال زود هنگام را از خوانندهٔ کنجکاو می‌پرسیم: «آیا می‌توانیم به جای خازن از یک سلف استفاده کنیم و مشتق‌گیر به دست آوریم؟» در واقع می‌توانیم اما طراحان مدار معمولاً از به کار بردن سلفها حتی‌الامکان اجتناب می‌کنند زیرا دارای اندازه، وزن و قیمت زیادی هستند و نیز مقاومت و ظرفیتی هم به همراه دارند.

در عوض می‌توان جای مقاومت و خازن را در شکل ۴-۱۰a عوض نمود و مشتق‌گیر به دست آورد. تحلیل این مدار موضوع مسئله ۱۰ می‌باشد.

تمرین:

۴ ـ ۴ ـ مقدار C را در مدار شکل ۷-۴ برابر %۵μF بگیرید و i(%۲) را در حالات زیر پیدا کنید: (a) اگر $v = ۲۵e^{۴۰t}\sin(۲۰\pi t + ۰,۱\pi)V$، (b) انرژی ذخیره شده در C برابر $V(\%۲) > ۰,۱۰e^{۵۰t}j$ (C) مقدار $V(\%۲)$ را اگر $v(o) = ۱۲V,\ i = ۲t/(t^۲+۱۰^۴)\mu A$ باشد، پیدا کنید.

جواب: ۴۴,۲V, -۱۵,۱۶mA, -۲۲,۵μA

۵ - ۴ - در مدار شکل ۴-۱۰a فرض کنید که v_s یک رشتهٔ متناوب از پالسهای یک ولتی باشد که به طور لحظه‌ای در لحظات $t = ۰,۱,۲,...S$ از مقدار ۰ به ۱ صعود می‌کند و به طور لحظه‌ای در لحظات $t = ۰,۱،\ ۱,۱،\ ۲,۱,...S$ به صفر تنزل می‌کند و $C = ۱\mu F,\ R = ۲M\Omega$ و $v_c(0^-) = 0$ در کدام لحظه v_o برابر (a) $-\%۱V$ (b) $-۰,۱۲V$ (c) $-۵V$ می‌شود؟

جواب: ۹۹,۱, ۲,۰۴, %۲S

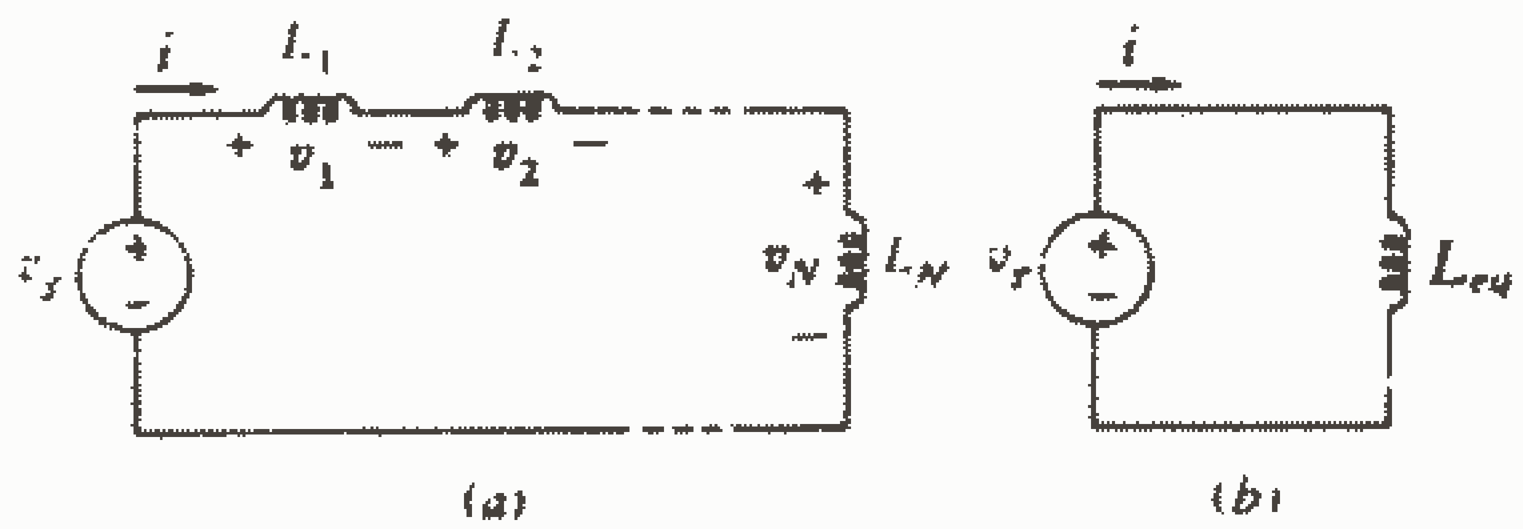
۵ - ۴ - ترکیب نمودن سلفها و خازنها

اکنون که ما سلف و خازن را هم به لیست عناصر مداری غیرفعال خود اضافه کرده‌ایم لازم است روشن کنیم که آیا روشهایی را که برای تحلیل مدارهای مقاومتی وضع نمودیم هنوز هم صادق است یا خیر. همچنین بهتر است یاد بگیریم که چگونه ترکیبات سری و موازی این عناصر

را با معادلهای ساده‌تر جایگزین کنیم درست مانند آنچه که برای مقاومتها در فصل ۲ انجام دادیم.

ابتدا دو قانون کیرشوف را که هر دو مفید و آموزنده می‌باشند مورد توجه قرار می‌دهیم. اگر چه وقتیکه ما این دو قانون را ارائه نمودیم هیچگونه محدودیتی برای نوع عناصر تشکیل دهندهٔ مدار قرار ندادیم بنابراین هر دو قانون صادق می‌باشند.

حال روشهایی را که برای کاهش ترکیبات مختلف مقاومتها به یک مقاومت معادل به دست آورده‌ایم به حالات مشابه سلفها و خازن تعمیم می‌دهیم. ابتدا یک منبع ولتاژ ایده آل را که به ترکیب سری N سلف مطابق شکل ‎4-12a‎ اعمال شده است، در نظر می‌گیریم. یک سلف معادل منفرد با ضریب خودالقایی L_{eq} مطلوب می‌باشد که بتوان جایگزین ترکیب سری سلفها نمود به طوریکه جریان منبع $i(t)$ تغییری نکند. مدار معادل در شکل ‎4-12b‎ رسم شده است.



شکل ۱۲ ـ ٤: (a) مداری که شامل N سلف سری است. (b) مدار معادل مطلوب که در آن $L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_N$

برای مدار اصلی داریم:

$$v_s = v_1 + v_2 + \cdots + v_N = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + \cdots + L_N\frac{di}{dt}$$
$$= (L_1 + L_2 + \cdots + L_N)\frac{di}{dt}$$

و یا به طور خلاصه تر می‌توان نوشت:

$$v_s = \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} L_n\frac{di}{dt} = \frac{di}{dt}\sum_{n=1}^{N} L_n$$

اما برای مدارهای بالا داریم:

$$v_s = L_{eq}\frac{di}{dt}$$

بنابراین اندوکتانس معادل عبارت است از:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n \quad \text{یا} \quad L_{eq} = \sum_{n=1}^{N} L_n$$

سلفی که معادل چند سلف سری باشد دارای اندوکتانسی برابر با مجموع اندوکتانسهای سلفهای سری می‌باشد. این دقیقاً همان نتیجه‌ای است که برای مقاومتهای سری به دست آوردیم.

ترکیب موازی سلفها را با نوشتن یک معادلهٔ گره برای مدار اصلی شکل 4-13a به دست می‌آوریم:

$$i_s = \sum_{n=1}^{N} i_n = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{L_n}\int_{t_0}^{t} v\,dt + i_n(t_0)\right] = \left[\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{L_n}\right]\int_{t_0}^{t} v\,dt + \sum_{n=1}^{N} i_n(t_0)$$

سپس این معادله را با معادلهٔ مدار معادل شکل 4-13b مقایسه می‌کنیم:

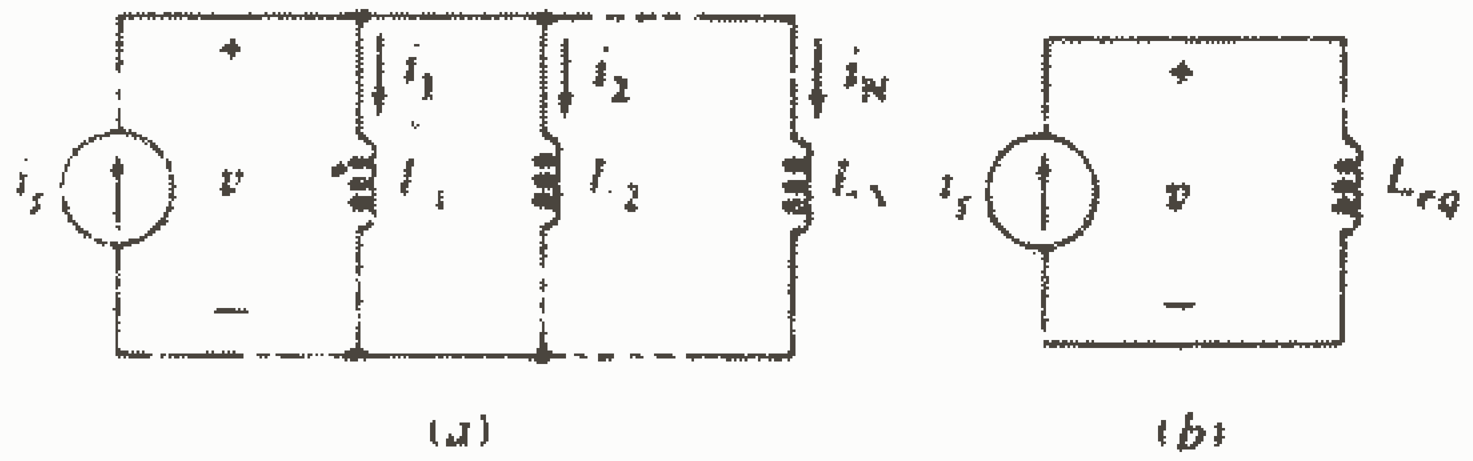
$$i_s = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v\,dt + i_s(t_0)$$

از آنجاییکه قانون جریان کیرشوف ایجاب می‌کند که $i_s(t_0)$ مساوی با مجموع جریانهای شاخه در t_0 باشد، پس دو انتگرال در دو معادلهٔ فوق باید برابر باشند، بنابراین:

$$L_{eq} = \frac{1}{\dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2} + \cdots + \dfrac{1}{L_N}}$$

در حالت خاص دو سلف موازی داریم: $L_{eq} = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$

و توجه داریم که سلفهای موازی دقیقاً مانند مقاومتهای موازی ترکیب می‌شوند.

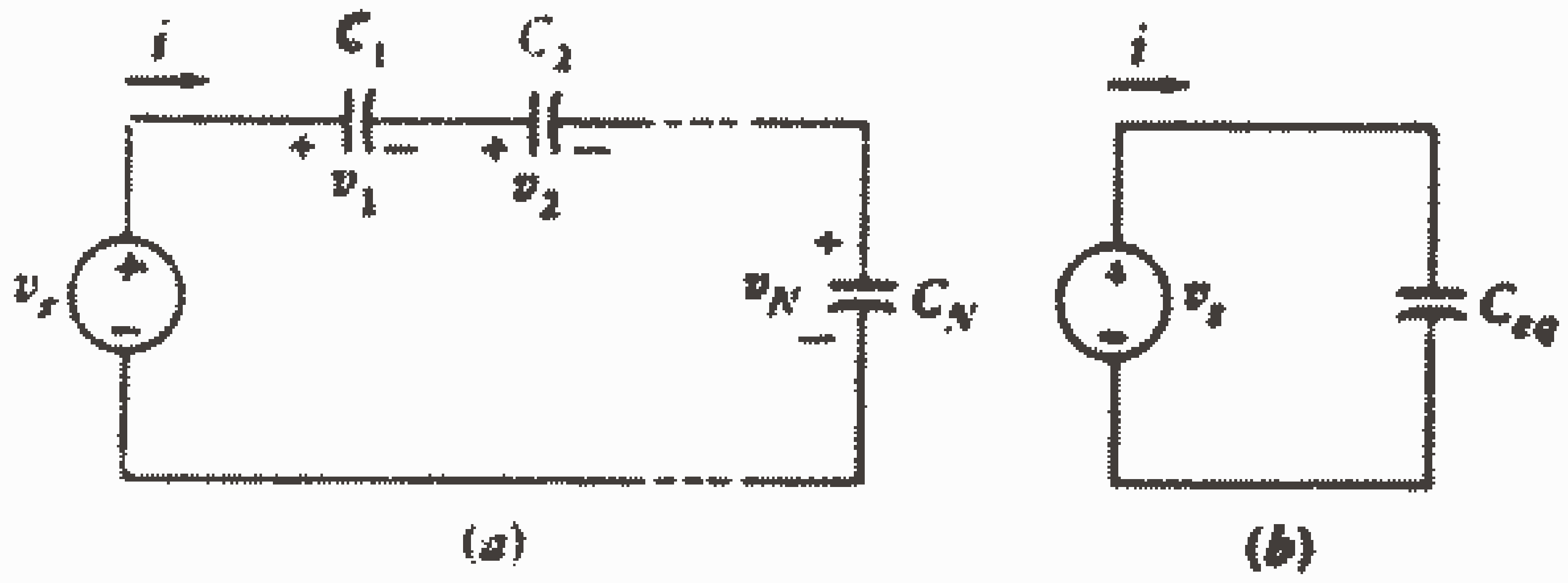


شکل ۱۳ - ٤: (a) ترکیب موازی N سلف. (b) مدار معادل

که در آن: $L_{eq} = 1/[(1/L_1) + (1/L_2) + \cdots + (1/L_N)]$

برای به دست آوردن خازنی که معادل با N خازن سری باشد، از مدار شکل 4-14a و معادل آن در شکل 4-14b استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$v_s = \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{C_n}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v_n(t_0)\right] = \left[\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{C_n}\right]\int_{t_0}^{t} i\,dt + \sum_{n=1}^{N} v_n(t_0)$$



شکل ۱۴ ـ ٤: (a) مداری شامل N خازن سری (b) خازن معادل مطلوب.

و:

$$v_s = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^{t} i\, dt + v_s(t_0)$$

البته قانون ولتاژ کیرشوف الزام می‌دارد که $v_s(t_0)$ برابر با مجموع ولتاژ خازنها در لحظهٔ t_0 باشد، بنابراین:

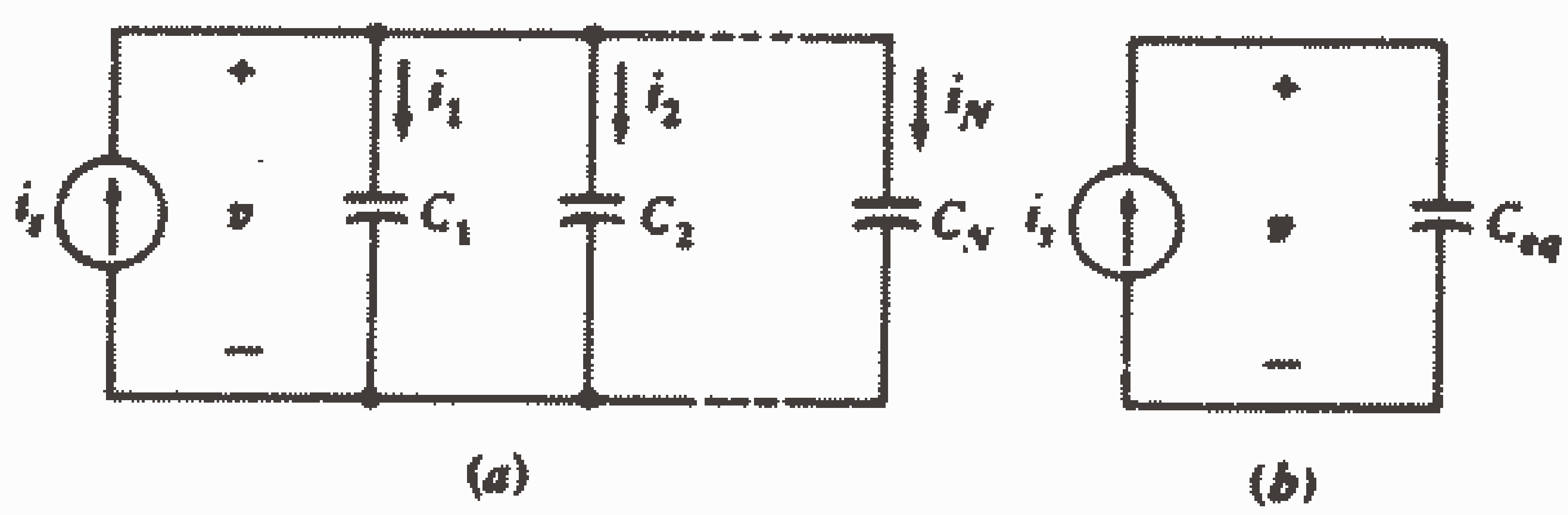
$$C_{eq} = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \cdots + \dfrac{1}{C_N}}$$

وهمانگونه که می‌بینیم خازنهای سری مانند هدایتهای سری و یا مقاومتهای موازی ترکیب می‌شوند.

و بالاخره مدارهای شکل ۱۵ ـ ٤ ما را قادر می‌سازند که مقدار خازن معادل N خازن موازی را به دست آوریم:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$$

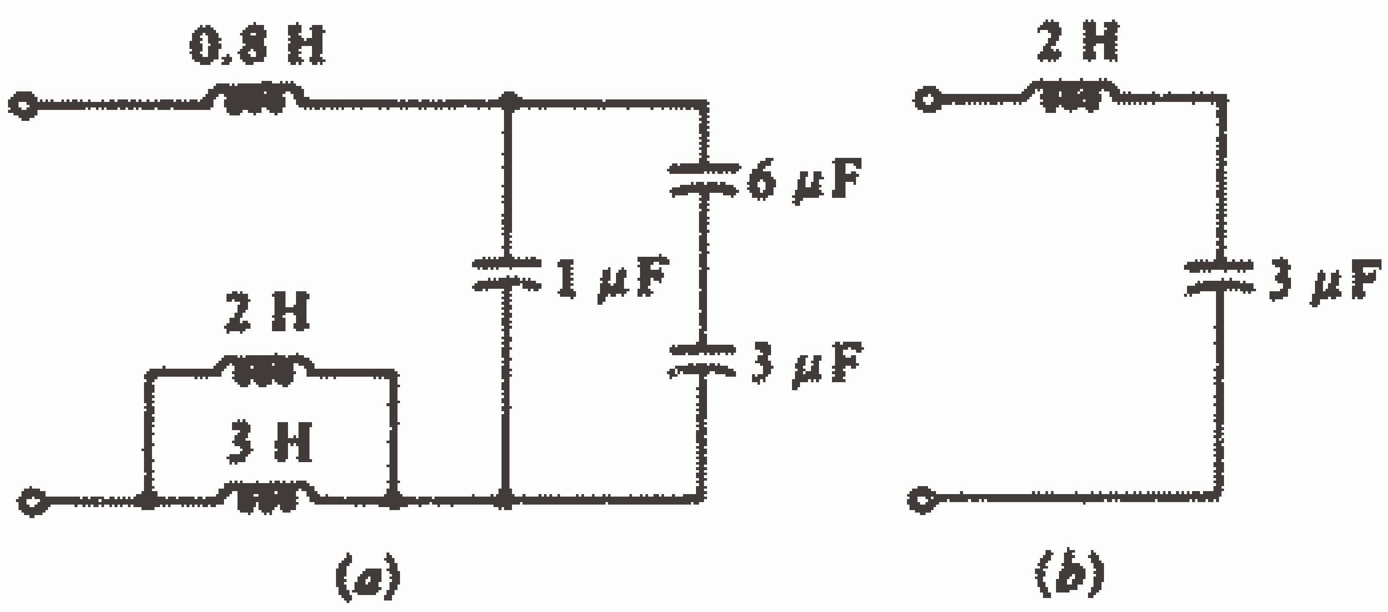
و جای شگفتی نیست که ملاحظه می‌کنیم خازنهای موازی درست شبیه مقاومتهای سری ترکیب می‌شوند یعنی به طور ساده با جمع کردن ظرفیتهای منفرد.



شکل ۱۵ ـ ٤: (a) ترکیب موازی N خازن (b) مدار معادل که در آن داریم:

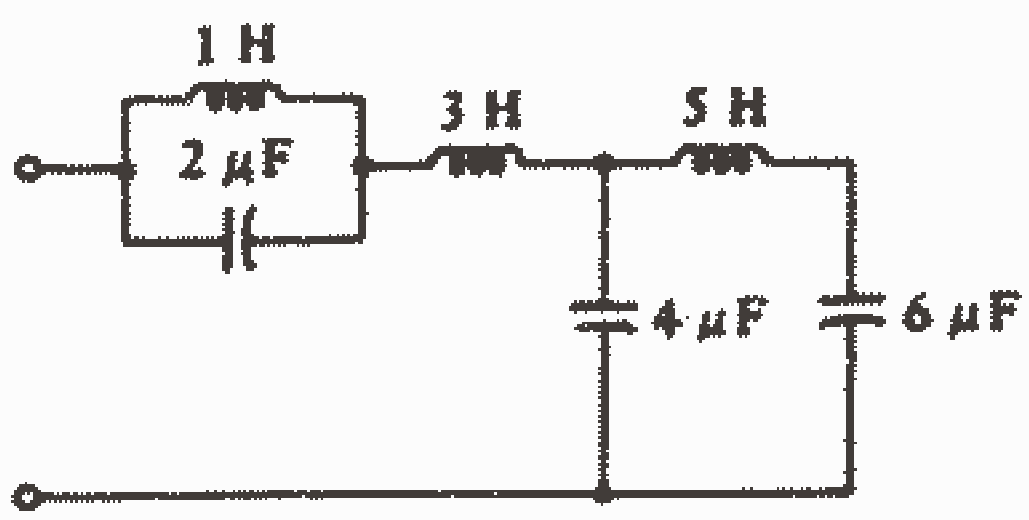
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

به عنوان مثالی که در آن به وسیله ترکیب عناصر مشابه بتوان ساده‌سازی نمود، شبکهٔ شکل ۴-۱۶a را در نظر بگیرید. ابتدا خازنهای ۳μF , ۶ را به صورت یک خازن معادل ۲μF ترکیب می‌کنیم و سپس این خازن را با خازن ۱μF که موازی است ترکیب می‌کنیم تا خازن معادل ۳μF به دست آید. به علاوه، سلفهای ۲H , ۳H را با معادل ۱٫۲H جایگزین می‌کنیم و سپس آن را به سلف ۰٫۸H می‌افزائیم تا اندوکتانس معادل ۲H به دست آید. مدار معادل ساده‌تر (و احتمالاً ارزانتر) در شکل ۴-۱۶b نشان داده شده است.



شکل ۱۶ - ۴: (a) یک شبکهٔ LC . (b) یک مدار معادل ساده.

شبکهٔ شکل ۱۷ - ۴ شامل سه سلف و سه خازن می‌باشد اما هیچ ترکیب سری یا موازی سلف یا خازن در آن وجود ندارد و فعلاً این مدار را نمی‌توانیم ساده کنیم.



شکل ۱۷ - ۴: یک شبکهٔ LC که در آن هیچ ترکیب سری یا موازی سلف و خازن نمی‌توان ایجاد نمود.

به عنوان قدم بعدی بیایید به تحلیل گره و حلقه و چشمه توجه کنیم. چون ما قبلاً دیدیم که می‌توانیم با اطمینان قوانین کیرشوف را اعمال کنیم اینک فقط کمی مشکل دربارهٔ نوشتن

معادلات کافی و مستقل خواهیم داشت زیرا آنها معادلات انتگرال دیفرانسیلی خطی با ضرایب ثابت خواهند بود. ما اکنون برای کسب آشنایی با نحوه کاربرد قوانین کیرشوف در مدارهای RLC این معادلات را خواهیم نوشت و بحث دربارهٔ حل حالتهای سادهٔ آن را در فصول بعدی ارائه خواهیم کرد.

بیایید سعی کنیم که معادلات گره را برای مدار شکل ۱۸-٤ بنویسیم. ولتاژهای گرهی در شکل مشخص شده‌اند و ما جریانهای خارج شونده از گره مرکزی را جمع می‌کنیم.

$$\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}(v_1 - v_s)\,dt + i_L(t_0) + \frac{v_1 - v_2}{R} + C_2\frac{dv_1}{dt} = 0$$

در معادلهٔ فوق $i_L(t_0)$ مقدار جریان سلف در لحظهٔ شروع انتگرال‌گیری و یا مقدار اولیه می‌باشد. در گره سمت راست داریم:

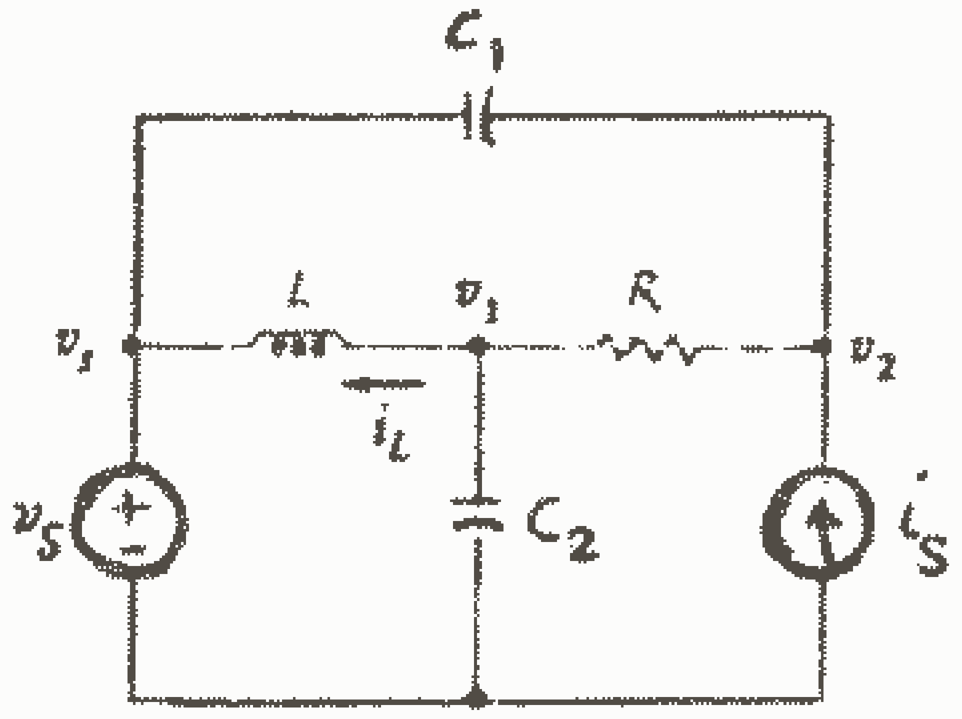
$$C_1\frac{d(v_2 - v_s)}{dt} + \frac{v_2 - v_1}{R} - i_s = 0$$

اگر دو معادلهٔ فوق را بازنویسی کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{v_1}{R} + C_2\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_1\,dt - \frac{v_2}{R} = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_s\,dt - i_L(t_0)$$

$$-\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + C_1\frac{dv_2}{dt} = C_1\frac{dv_s}{dt} + i_s$$

اینها همان معادلات انتگرال دیفرانسیلی هستند که وعدهٔ آنها را داده بودیم. در این معادلات چند نکته جالب را می‌توانیم ملاحظه کنیم. اول اینکه ولتاژ منبع v_s بصورت انتگرال و مشتق در معادلات ظاهر می‌شود، اما بصورت سادهٔ v_s ظاهر نمی‌شود. و چون هر دو منبع برای



شکل ۱۸-٤: یک مدار RLC چهار گرهی که در آن ولتاژ گرهها مشخص شده‌اند.

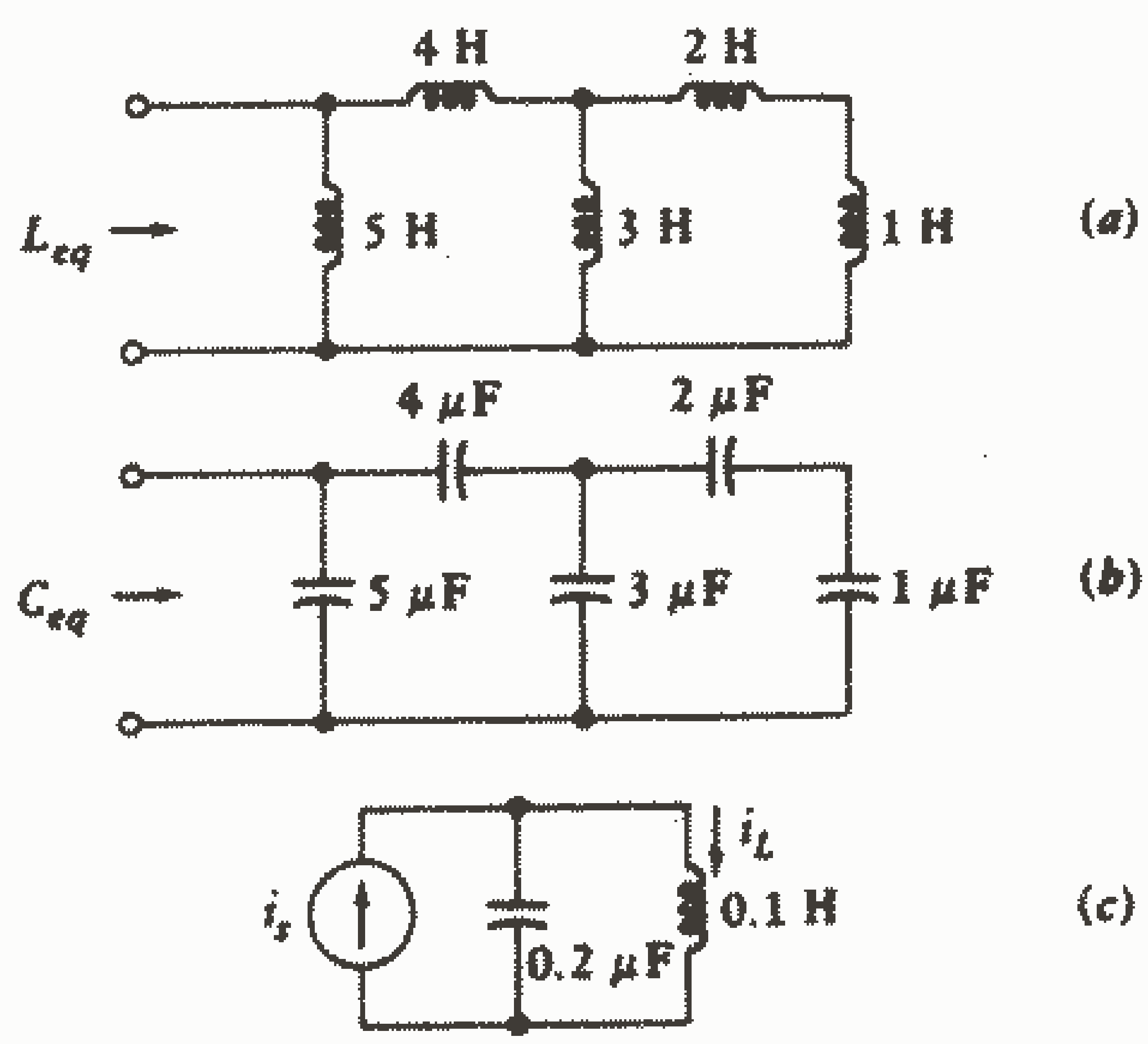
تمام زمانها مشخص هستند ما قادر به محاسبه مشتق یا انتگرال می‌باشیم. ثانیاً، مقدار اولیه جریان سلف، $i_L(t_0)$، به عنوان یک منبع جریان ثابت در گره مرکزی عمل می‌کند.

ما فعلاً این معادلات را حل نخواهیم کرد، اگر چه لازم به ذکر است که وقتیکه دو تابع تحریک ولتاژ توابع سینوسی باشند می‌توان یک نسبت ولتاژ به جریان (به نام امپدانس) و یا یک نسبت جریان به ولتاژ (به نام آدمیتانس) برای هر یک از سه عنصر غیرفعال تعریف نمود. آنگاه فاکتورهایی که بر روی دو ولتاژ گرهی در معادلات فوق عمل می‌کنند تبدیل به فاکتورهای ضرب ساده می‌شوند و معادلات تبدیل به معادلات جبری خطی می‌شوند که می‌توان آنها را به وسیله دترمینان یا حذف متغیرها، مانند قبل، حل نمود.

تمرین

۶ ـ ٤ ـ (a) L_{eq} را در شکل ‎4-19a‎ پیدا کنید. (b) C_{eq} را در شکل ‎4-19b‎ پیدا کنید. (c) i_s را در شکل ‎4-19c‎ پیدا کنید اگر $i_L = ۰{,}۰۳\ \sin ۵۰۰۰t$ A باشد.

جواب: ‎%۱۵ sin ۵۰۰۰tA, ٦,۹۱ μF, ۲,٦۲H‎



شکل ۱۹ ـ ٤: به تمرین ٦ ـ ٤ مراجعه شود.

۶ - ۴ - تناظر

تناظر را قبلاً در رابطه با مدارهای مقاومتی و اخیراً هم در بحث اندوکتانس و ظرفیت ذکر کرده‌ایم اما توضیحات داده شده مقدماتی بودند، و مانند کسی که سعی می‌کند تمساحی را اهلی کند، بدون تدارک و ناکافی بودند. اکنون تعریف دقیقی ارائه خواهیم کرد و سپس با استفاده از این تعریف مدارهای متناظر را تشکیل خواهیم داد و در نتیجه از کار تحلیل هم خود مدار و هم متناظر آن اجتناب خواهیم کرد.

ما تناظر را بر حسب معادلات مداری تعریف خواهیم کرد. دو مدار را متناظر گویند هر گاه معادلات چشمه‌ای که یکی را توصیف می‌کند از نظر ریاضی دارای همان فرم معادلات گرهی باشد که مدار دیگر را توصیف می‌کنند. دو مدار را وقتی دقیقاً متناظر می‌نامند که هر معادلهٔ چشمه‌ای از یک مدار از نظر عددی هم دقیقاً برابر با معادلهٔ گرهی متناظر از مدار دیگر باشد البته خود متغیرهای ولتاژ و جریان با هم یکی نخواهند بود. تناظر صرفاً به هر خاصیتی اطلاق می‌شود که به وسیله مدارهای متناظر بروز داده می‌شود.

اجازه دهید این تعریف را تفسیر کنیم و از آن برای ایجاد یک مدار متناظر دقیق به وسیله نوشتن دو معادلهٔ چشمه‌ای مدار شکل ۲۰-۴ استفاده کنیم. دو جریان چشمه‌ای i_1 ، i_2 مشخص شده‌اند و معادلات چشمه‌ای عبارتند از:

$$3i_1 + 4\frac{di_1}{dt} - 4\frac{di_2}{dt} = 2\cos 6t \qquad (۱۷)$$

$$-4\frac{di_1}{dt} + 4\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{8}\int_0^t i_2\,dt + 5i_2 = -10 \qquad (18)$$

باید توجه داشت ولتاژ خازن v_c در لحظهٔ $t = 0$ برابر ۱۰ فرض شده است.

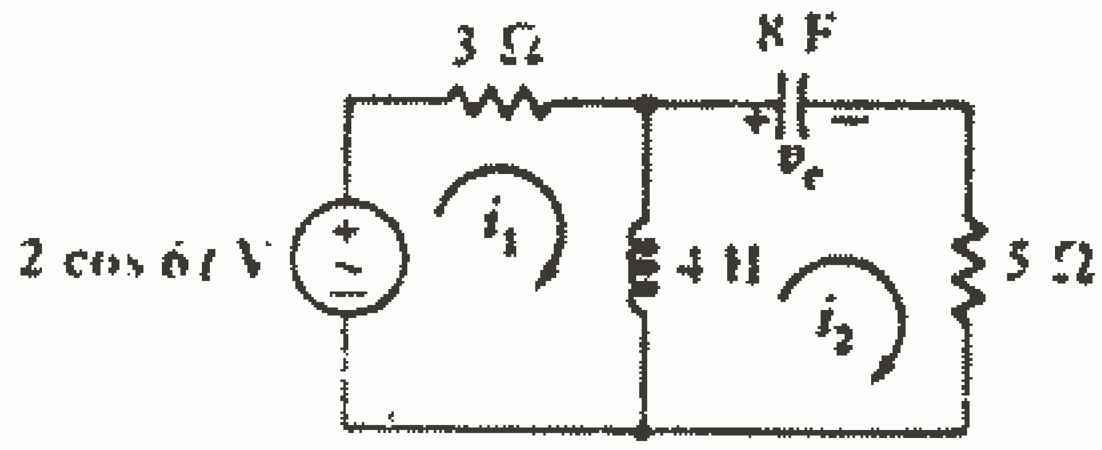
اکنون می‌توانیم دو معادله‌ای را که متناظر دقیق مدار داده شده را توصیف می‌کنند، تشکیل دهیم. ما انتظار داریم که اینها معادلات گره باشند و بنابراین با جایگزینی جریانهای چشمه‌ای i_2، i_1 در معادلات (۱۷) و (۱۸) به وسیله دو ولتاژ گرهی v_1 ، v_2 شروع می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$3v_1 + 4\frac{dv_1}{dt} - 4\frac{dv_2}{dt} = 2\cos 6t \qquad (۱۹)$$

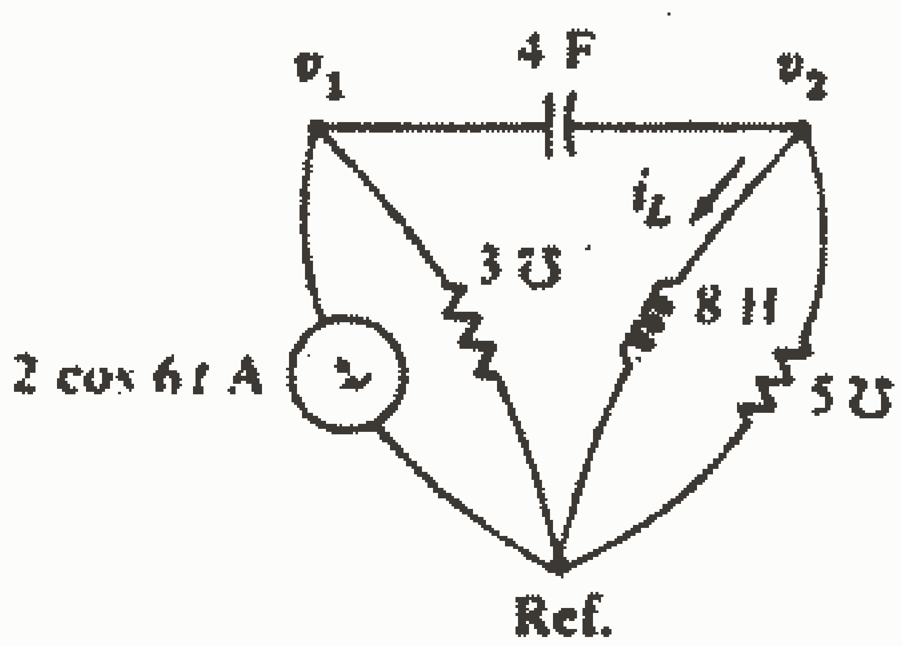
$$-4\frac{dv_1}{dt} + 4\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{8}\int_0^t v_2\,dt + 5v_2 = -10 \qquad (۲۰)$$

و اکنون به جستجوی مداری می‌پردازیم که بیانگر این دو معادلهٔ گرهی باشد.

بیایید ابتدا خطی رسم کنیم که نشان‌دهندهٔ گره مبنا باشد و سپس دو گره را که علامت مثبت v_1 ، v_2 روی آن قرار دارد ایجاد کنیم. معادلهٔ (۱۹) نشان می‌دهد که یک منبع جریان $2\cos 6t$ بین گره ۱ و گره مبنا به گونه‌ای وصل شده است که جهت جریان آن وارد گره ۱ می‌شود. این معادله همچنین نشان می‌دهد که یک هدایت ℧۳ بین گره ۱ و گره مبنا وصل می‌شود. به معادلهٔ (۲۰) توجه می‌کنیم، ابتدا جملات غیرمتقابل و یا آنهایی را که در (۱۹) ظاهر نشده‌اند در نظر می‌گیریم و آنها به ما می‌گویند که یک سلف ۸H و یک هدایت ℧۵ باید به طور موازی بین گره ۲ و گره مبنا وصل شوند. دو جملهٔ مشابه در معادلات (۱۹) ، (۲۰) بیانگر یک خازن ۴F می‌باشد که به طور متقابل بین گره‌های ۱ و ۲ وصل شده است. این مدار با وصل کردن این خازن بین این دو گره تکمیل می‌شود. جملهٔ ثابت در سمت راست معادلهٔ (۲۰) مقدار جریان سلف در $t = 0$ می‌باشد یعنی $i_L(0) = ۱۰A$ مدار متناظر در شکل ۲۱ - ۴ نشان داده شده است و چون دو دسته معادله از نظر عددی یکسان هستند این دو مدار دقیقاً متناظر هستند.



شکل ۲۰ ـ ٤: مداری که می‌توان با اعمال تعریف تناظر مدار متناظر آن را به دست آورد.



شکل ۲۱ ـ ٤: متناظر دقیق مدار شکل ۲۰ ـ ٤.

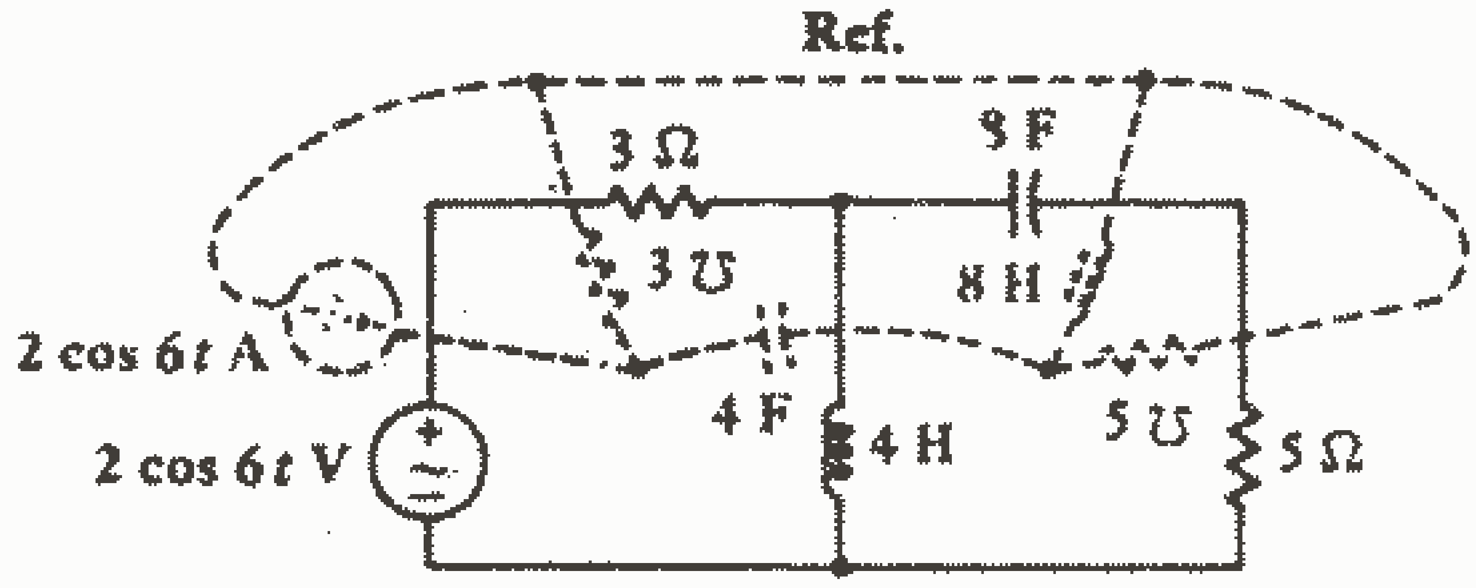
مدارهای متناظر را خیلی راحتتر از روش فوق و بدون نوشتن معادلات هم می‌توان به دست آورد. برای به دست آوردن متناظر یک مدار داده شده، آن مدار را بر حسب معادلات حلقه در نظر می‌گیریم. برای هر حلقه یک گره نسبت می‌دهیم و یک گره مبنا هم در نظر می‌گیریم. بر

روی دیاگرام مدار یک گره در مرکز هر چشمه قرار می‌دهیم و گره مبنا را به صورت یک خط در نزدیک دیاگرام مدار و یا به صورت محصور کننده آن در نظر می‌گیریم. هر عنصری که به طور مشترک در دو چشمه باشد یک عنصر متقابل می‌باشد و جملات یکسان را در معادله به وجود می‌آورد (به جز علامت). این عنصر را باید با عنصری که در دو معادلهٔ گرهی متناظر جمله‌های یکسانی ایجاد کند، جایگزین کنیم. بنابراین، این عنصر متناظر را باید مستقیماً بین دو گرهی که داخل آن چشمه‌هایی هستند که این عنصر در آن چشمه‌ها مشترک است، وصل کنیم. ماهیت عنصر متناظر خودبخود مشخص می‌شود زیرا فرم ریاضی معادلات فقط در صورتی یکسان باقی می‌ماند که ظرفیت با اندوکتانس و مقاومت با هدایت و بالعکس جایگزین شوند. بنابراین سلف ‎4H‎ که در چشمه‌های ۱ و ۲ در مدار شکل ۲۰-۴ مشترک می‌باشد به صورت یک خازن ‎4F‎ که مستقیماً بین گره‌های ۱ و ۲ در مدار متناظر وصل شده است، ظاهر می‌شود.

عناصری که فقط در یک چشمه ظاهر می‌شوند باید دارای متناظرهایی باشند که بین گره متناظر با آن چشمه و گره مبنا ظاهر می‌شوند. دوباره به شکل ۲۰-۴ مراجعه می‌کنیم، منبع ولتاژ ‎$2\cos 6t$ V‎ فقط در چشمه ۱ ظاهر می‌شود و متناظر آن یک منبع جریان ‎$2\cos 6t$ A‎ می‌باشد که فقط بین گره ۱ و گره مبنا وصل می‌شود و چون منبع ولتاژ در جهت عقربه‌های ساعت است پس منبع جریان باید در جهت رو به گره غیرمبنا باشد. و بالاخره باید فکری هم برای متناظر ولتاژ اولیهٔ دو سر خازن ‎8F‎ در مدار داده شده، کرد. معادلات نشان داده‌اند که متناظر این ولتاژ اولیه در دو سر خازن یک جریان اولیه در سلف مدار متناظر می‌باشد که مقادیر عددی آنها یکسان بوده و علامت صحیح جریان اولیه را می‌توان به سادگی با توجه به ولتاژ اولیه در مدار داده شده و جریان اولیه در مدار متناظر، تعیین نمود. بنابراین اگر ‎v_c‎ در مدار داده شده به عنوان یک منبع تلقی شود، باید به صورت ‎$-v_c$‎ در سمت راست معادله چشمه ظاهر شود و در مدار متناظر اگر ‎i_L‎ را به عنوان یک منبع تلقی کنیم یک جملهٔ ‎$-i_L$‎ را در سمت راست معادله گرهی ایجاد خواهد نمود. و چون هردوی این کمیتها اگر به صورت منبع در نظر گرفته شوند دارای علامت یکسانی می‌باشند بنابراین اگر ‎$v_c(0) = 10V$‎ آنگاه ‎$i_L(0)$‎ باید ‎10A‎ باشد.

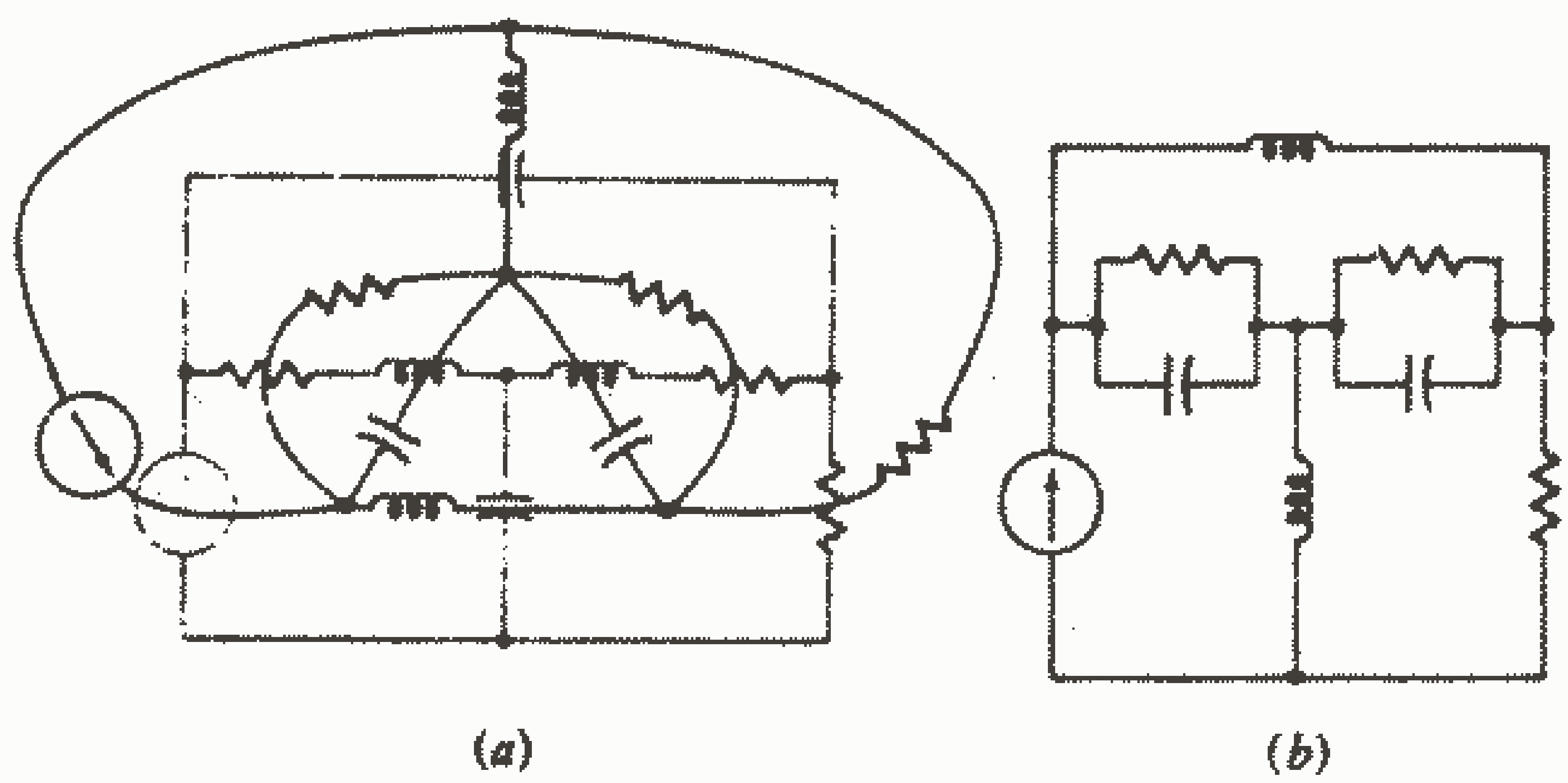
مدار شکل ۲۰-۴ در شکل ۲۲-۴ تکرار شده است و متناظر دقیق آن فقط با ترسیم متناظر هر عنصر بین دو گرهی که در وسط چشمه‌هایی که آن عنصر در آنها مشترک است، به دست آمده است.

یک گره مبنا که مدار داده شده را احاطه کند، می‌تواند مفید باشد بعد از اینکه مدار متناظر به شکل استانداردتری دوباره ترسیم شود به صورت شکل ۲۱-۴ ظاهر می‌شود.



شکل ۲۲ ـ ٤: متناظر مدار شکل ۲۰ ـ ٤ مستقیماً از روی دیاگرام مدار به دست آمده است.

مثال دیگری برای ایجاد یک مدار متناظر در شکلهای b , 4-23a نشان داده شده است. از آنجاییکه مقادیر عناصر مشخص نشده است، این دو مدار، متناظر هستند اما دقیقاً متناظر نیستند. مدار اصلی را از مدار متناظر با قرار دادن یک گره در مرکز هر یک از پنج چشمهٔ شکل 4-23b و طی مراحلی که قبلاً گفته شد، می‌توان بازیابی نمود.



شکل ۲۳ ـ ۴: (a) مدار متناظر بر روی مدار اصلی ایجاد شده است. (b) مدار متناظر بطور بهتری رسم شده است.

مفهوم تناظر را می‌توان به زبانی که به وسیلهٔ آن تحلیل مدار و عملکرد مدارها را توصیف می‌کنیم، انتقال داد. یک مثال از این مورد را قبلاً در قسمت ٤ ـ ٤ مورد بحث قرار دادیم و متناظر چند کلمه در آنجا ارائه شد. بسیاری از این جفتها بدیهی می‌باشند و هر جا که متناظر یک کلمه یا عبارت مورد تقاضا باشد، همیشه می‌توان متناظر مدار را ترسیم و یا در ذهن تجسم نمود و سپس به زبان مشابهی آن را توصیف نمود. مثلاً اگر به ما یک منبع ولتاژ به طور سری با یک خازن داده شده باشد متناظر جملهٔ «منبع ولتاژ باعث جریانی در خازن می‌شود» عبارت است از:

«منبع جریان باعث ولتاژی در دو سر سلف می‌شود». اگر جملهٔ ما کمی از نظر جمله‌بندی و ادای کلمات با بی‌دقتی بیان شده باشد، مانند «جریان در دور تا دور مدار سری جاری می‌باشد» برای بیان متناظر آن کمی باید مبتکرانه عمل کنیم.[۱]

به عنوان تمرینی برای کاربرد زبان تناظر می‌توان قضیه تونن را مطالعه نمود که متناظر آن می‌شود قضیه نورتن.

ما دربارهٔ عناصر متناظر، زبان تناظر، و مدارهای متناظر صحبت کرده‌ایم. اما دربارهٔ یک شبکهٔ متناظر چه؟ یک مقاومت R را به طور سری با یک سلف L در نظر بگیرید. متناظر این شبکهٔ دو ترمینالی وجود دارد و به سادگی با وصل کردن منبع ایده‌آلی به این شبکه به دست می‌آید. سپس مدار متناظر به صورت یک منبع متناظر موازی با یک هدایت G ,(G = R) و یک خازن C(C = L) به دست می‌آید. ما شبکهٔ متناظر را به صورت شبکهٔ دو ترمینالی که به منبع متناظر وصل شده است در نظر می‌گیریم، بنابراین یک جفت ترمینال وجود دارد که بین آنها G و c به طور موازی وصل شده‌اند.

قبل از اینکه از تعریف تناظر بگذریم، باید خاطرنشان کنیم که تناظر بر اساس معادلات چشمه و گره تعریف شده است و چون مدارهای غیرمسطح را نمی‌توان به‌وسیله دستگاه معادلات چشمه‌ای توصیف نمود، بنابراین مداری که مسطح نباشد دارای مدار متناظر نمی‌باشد.

ما از تناظر عمدتاً برای کاهش کاری که برای تحلیل مدارهای استاندارد ساده باید انجام دهیم، استفاده می‌کنیم. بعد از اینکه مدار RL سری را تحلیل نمودیم، آنگاه مدار RC موازی نیاز به توجه کمتری دارد البته نه به دلیل اینکه اهمیت آن کمتر است بلکه به‌خاطر اینکه ما قبلاً تحلیل مدار متناظر را شناخته‌ایم.

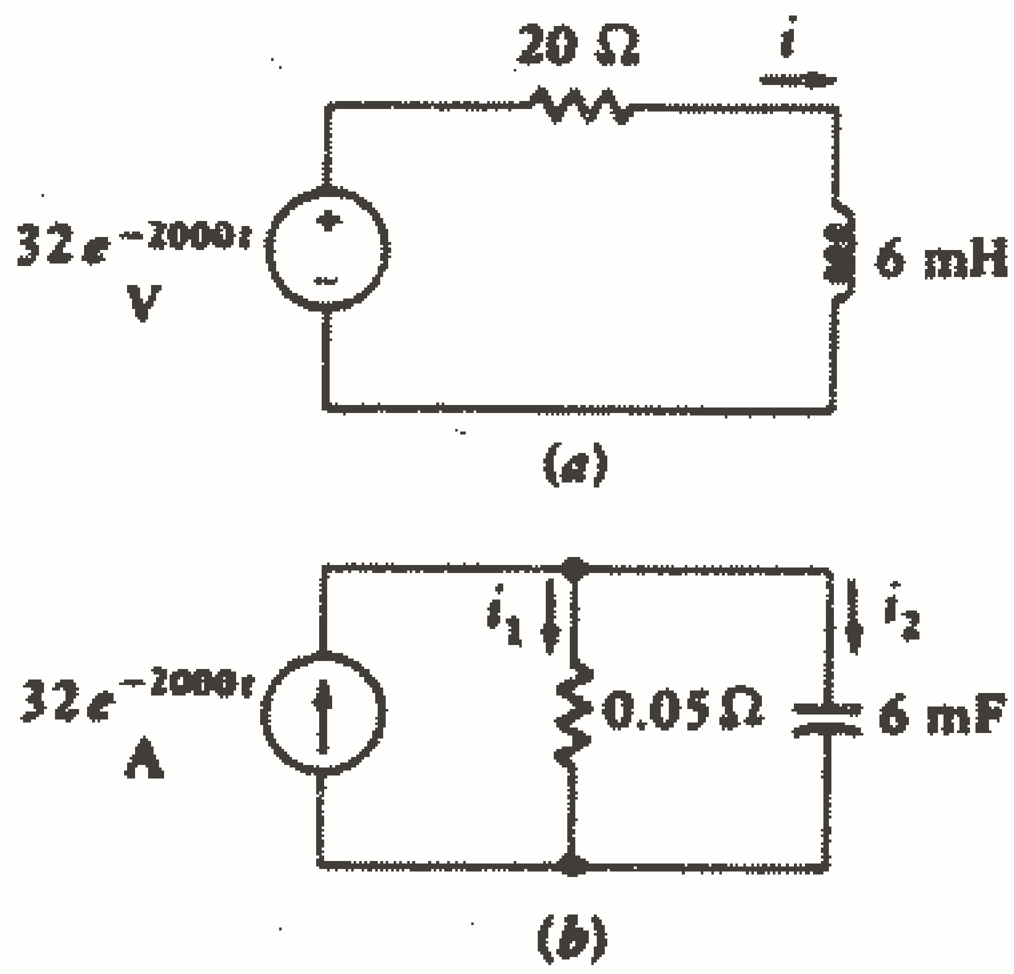
---

۱ - فردی به اینصورت به ذهنش خطور کرده است: «ولتاژ در دو سر تمامی مدار موازی می‌باشد».

تمرین

۷ ـ ٤ ـ معادله تک چشمهٔ مدار شکل 4-24a را بنویسید و نشان دهید که (با جایگزینی مستقیم) $i = 4e^{-2000t}$ A جواب مسئله می‌باشد و با توجه به آن به شکل 4-24b مراجعه کنید و کمیتهای مقابل را پیدا کنید: (a) i_1 (b) i_2.

جواب: $80e^{-2000t}$, $-48e^{-2000t}$.



شکل ۲٤ ـ ٤: به تمرین ۷ ـ ٤ مراجعه کنید.

۷ - ٤ - باز هم خطی بودن و آثار آن حذف

در فصل گذشته آموختیم که اصل جمع اثرها یک پی‌آمد الزامی مدارهای مقاومتی خطی است. مدارهای مقاومتی خطی هستند زیرا رابطهٔ ولتاژ ـ جریان آنها خطی است و قوانین کیرشوف هم خطی هستند.

ما اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که فواید خطی بودن شامل حال مدارهای RLC هم می‌شود. بنابر تعریف قبلی‌مان از یک مدار خطی، این مدارها هم خطی هستند زیرا روابط ولتاژ ـ جریان سلف و خازن روابط خطی هستند. برای سلف داریم: $v = L\frac{di}{dt}$ و اگر جریان را در مقدار ثابت K ضرب کنیم ولتاژ هم در عامل K ضرب خواهد شد. به صورت انتگرالی داریم:

$$i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt + i_L(t_0)$$

همانگونه که ملاحظه می کنیم اگر هر جمله را در عامل K ضرب کنیم مقدار اولیه جریان هم در فاکتور K ضرب خواهد شد. یعنی فاکتور K نه تنها به جریان و ولتاژ در لحظهٔ t اعمال می‌ود بلکه به مقادیر گذته آنها هم اثر می کند.

بررسی مشابهی برای خازن نشان می‌دهد که آن هم خطی است. بنابراین مداری که متشکل از منابع مستقل، منابع وابسته خطی و مقاومتهای خطی و سلف و خازن باشد یک مدار خطی می‌باشد.

در این مدار خطی باز هم پاسخ متناسب است با تابع تحریک. برای اثبات این مطلب باید ابتدا یک دستگاه کلی از معادلات انتگرال ـ دیفرانسیلی را مثلاً بر حسب جریانهای حلقه بنویسیم. و سپس جملاتی را که دارای فرم Ri ، $L\, di/dt$ ، $1/C \int idt$ هستند را به سمت چپ هر معادله می‌بریم و منابع ولتاژ مستقل را در سمت راست معادلات قرار می‌دهیم. به عنوان یک مثال ساده، یکی از معادلات ممکن است فرم زیر را داشته باشد:

$$Ri + L\, di/dt + 1/C \int_{t_0}^{t} idt + v_c(t_0) = v_s$$

حال اگر هر منبع مستقل در فاکتور K ضرب شود آنگاه طرف راست معادله هم در فاکتور K ضرب می‌شود. حال هر جملهٔ سمت چپ یا یک جمله خطی شامل یک جریان حلقه و یا یک ولتاژ اولیهٔ خازنی می‌باشد. بدیهی است که برای افزایش همهٔ پاسخها (جریانهای حلقه) با فاکتور K، باید ولتاژ اولیه خازنها را هم با فاکتور K افزایش دهیم. یعنی ما باید ولتاژ اولیهٔ خازن را هم به عنوان یک منبع ولتاژ مستقل تلقی کنیم و آن را هم در فاکتور K ضرب کنیم. به طریق مشابه، جریانهای اولیه سلفی هم باید به عنوان منابع جریان مستقل در نظر گرفته شوند.

بنابراین اصل متناسب بودن بین پاسخ و منبع قابل تعمیم به مدار کلی RLC می‌باشد و در نتیجه اصل جمع اثرها هم به این گونه مدارها قابل اعمال است. باید تأکید نمود که جریان اولیه سلفها و ولتاژ اولیه خازنها را هنگام اعمال اصل جمع اثرها باید به صورت منابع مستقل در نظر گرفت و به نوبت آنها را غیرفعال نمود.

اگر چه قبل از اینکه بتوانیم اصل جمع اثرها را به مدارهای RLC اعمال کنیم ابتدا لازم است که روشهایی برای حل معادلات این مدارها وقتیکه فقط یک منبع مستقل وجود داشته باشد، در نظر گرفته باشیم. اکنون ما باید مجاب شده باشیم که یک مدار خطی دارای پاسخی است که دامنهٔ آن متناسب است با دامنهٔ منبع.

قضایای تونن و نورتن بر اساس خطی بودن مدار اولیه، قابل اعمال بودن قوانین کیرشوف و اصل جمع اثرها می‌باشند. مدار کلی RLC هم با این اصول مطابقت دارد و بنابراین همه مدارهای خطی که شامل هر ترکیبی از منابع ولتاژ و جریان مستقل، منابع ولتاژ و جریان وابستهٔ خطی و مقاومتهای خطی و سلف و خازن باشد را می‌توان با استفاده از این دو قضیه تحلیل نمود. لازم نیست در اینجا این قضایا را تکرار کنیم زیرا آنها را قبلاً به طریقی که قابل اعمال به مدار کلی RLC هم باشد، بیان کرده‌ایم.

مسائل

۱ - فرض کنید که v_L , i_L در یک سلف $20\,mH$ طوری تعیین شده باشد که مطابق با قرارداد علامت غیرفعال باشد. (a) اگر $i_L = 12e^{-50t}\cos 10t\ A$ آنگاه v_L را در $t = 0/1S$ پیدا کنید. (b) اگر $i_L = 8(e^{-6t}-e^{-2t})$ آنگاه $v_{L\max}$ و زمانی را که این مقدار ماکزیمم حاصل می‌شود، پیدا کنید.

۲ - جریان یک سلف $2\,mH$ عبارت است از: $i_L = 0$ برای $t<0$، $500tA$ برای $0<t<10\,ms$، $10 - 500t\ A$ برای $10<t<30\ ms$، $-5\cos^2[50\pi(t - \%4)]\ A$ برای $10<t<30\,ms$، $-5A$ برای $30<t<40\,ms$ و $-5\cos^2[5\pi(t - \%4)]$ برای $40<t<50\,ms$ برای فاصلهٔ زمانی $0<t<50\,ms$: (a) i_L را نسبت به t رسم کنید. (b) v_L را نسبت به t با فرض قرارداد علامت غیر فعال رسم کنید.

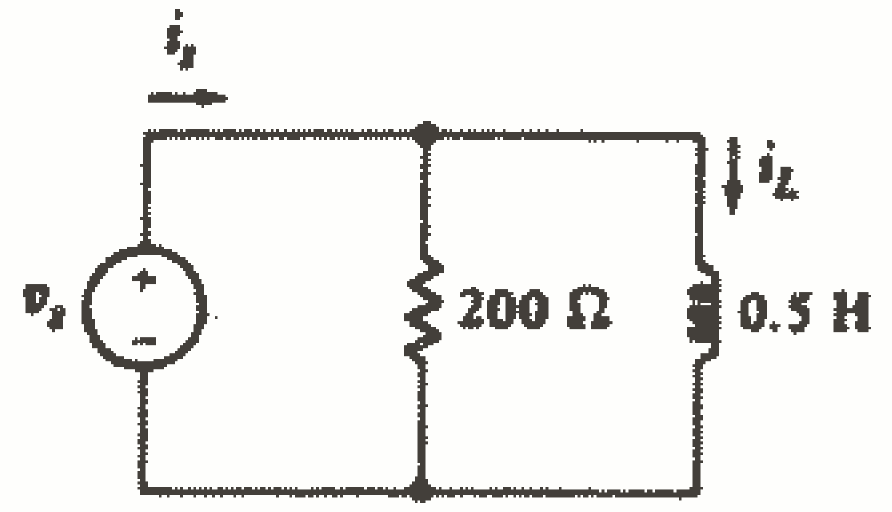
۳ - در شکل ۲۵-۴، فرض کنید: $v_s(t) = 20t\ V$ برای $0<t<3S$ ، $v_s = 0$ برای $t>3$ و $t<0$. مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) مقدار i در لحظهٔ $t = 4S$ (b) انرژی ذخیره شده در سلف در $t = 2S$ (c) قدرتی که در لحظه $t = 2S$ وارد سلف می‌شود.

شکل ۲۵ - ۴: به مسئله ۳ مراجعه کنید.

۴ - جریان در یک سلف $0/4\,H$ برای $t<0$ برابر صفر و برای $t>0$ برابر $3te^{-0/1t}$ می‌باشد. (a) در چه لحظه‌ای ماکزیمم قدرت به سلف داده می‌شود؟ (b) در چه

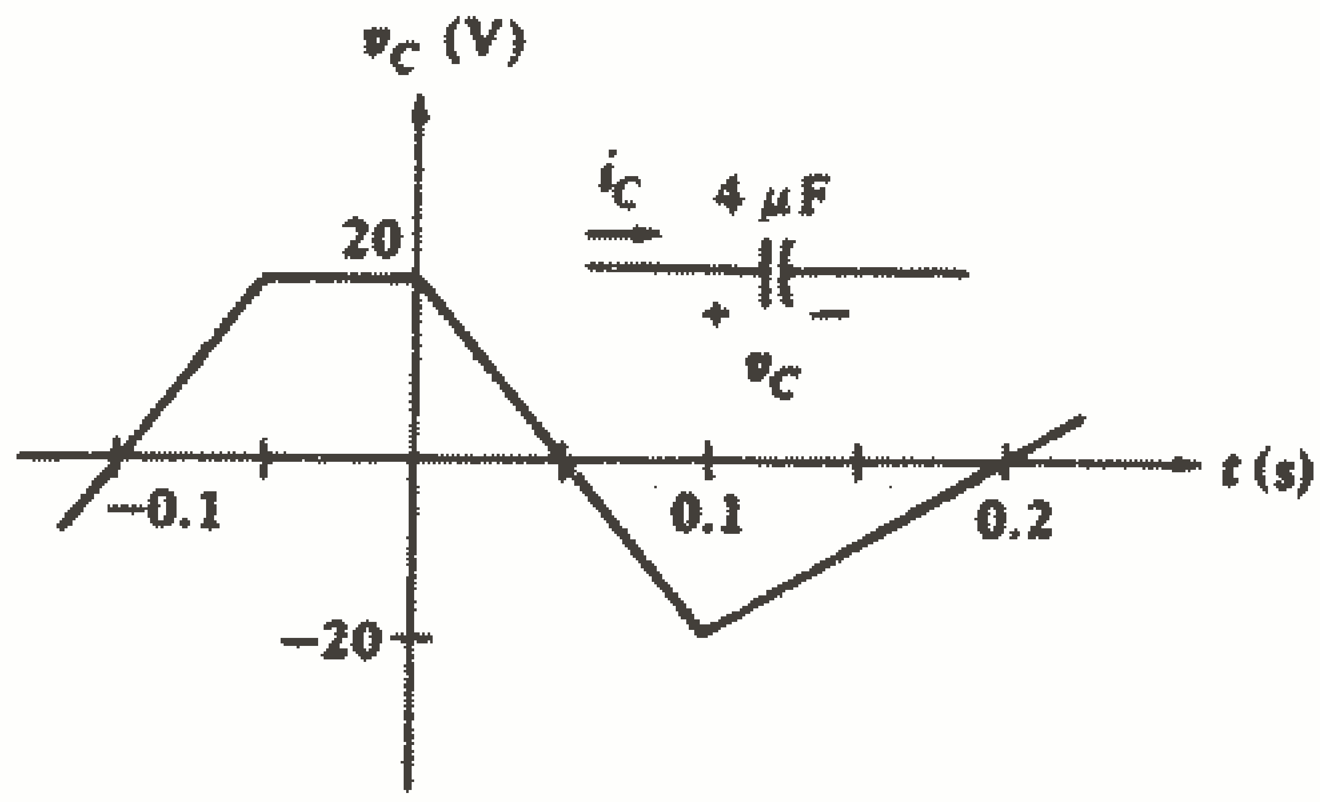
لحظه‌ای انرژی ذخیره شده در سلف ماکزیمم می‌باشد؟

۵ ـ در مدار شکل ۲۶-۴ فرض کنید $v_s = ۱۰۰ \cos ۵۰۰t$ V برای $t > -۰/۵S$، $i_L(0) = -۱A$ باشد. (a) $i_s(t)$ را پیدا کنید. (b) $w_L(t)$ را در $t=۱ms$ پیدا کنید.



شکل ۲۶ ـ ۴: به مسئله ۵ مراجعه کنید.

۶ ـ (a) اگر $v_c(t)$ به صورت شکل موج شکل ۲۷-۴ داده شده باشد، $i_c(t)$ را برای $-۰/۱<t<۰/۲S$ رسم کنید. (b) قدرتی را که درهمان فاصلهٔ زمانی وارد خازن می‌شود رسم کنید.



شکل ۲۷ ـ ۴: به مسئله ۶ مراجعه کنید.

۷ ـ جریان یک خازن $۰/۲\mu F$ برابر است با $۶۰\cos(۱۰^۴t+۳۶^\circ)mA$ برای تمام زمانها و ولتاژ متوسط دو سر خازن صفر می‌باشد. (a) ماکزیمم انرژی ذخیره شده در خازن چقدر است؟ (b) اولین مقدار غیر منفی t که به ازای آن انرژی ذخیره شده ماکزیمم می‌شود چقدر است؟

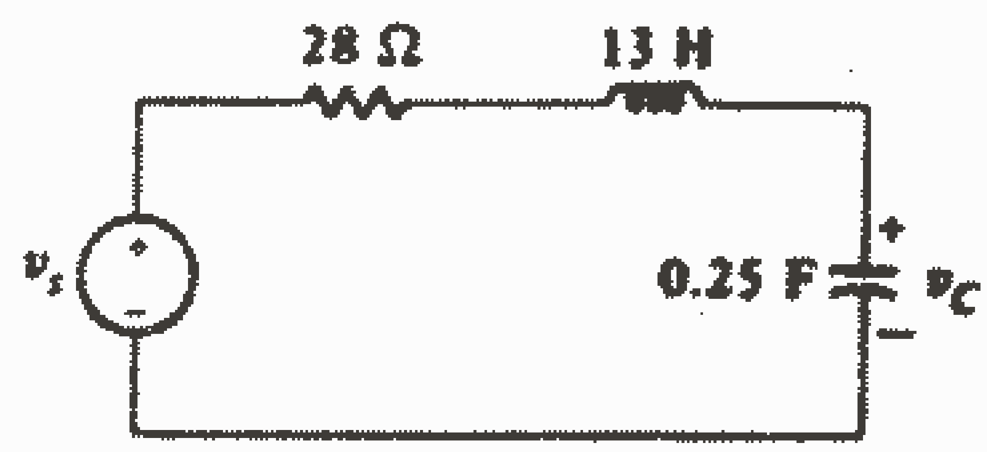
۸ ـ انرژی ذخیره شده در یک خازن $۵۰\mu F$ به صورت $W_c(t) = ۲e^{-۵۰t}$ J برای $t>۰$ داده شده است. جریان و ولتاژ خازن و قدرت جذب شده در $t = ۳۰ms$ را پیدا کنید.

۹ ـ در مدار شکل ۱۰a-۴، فرض کنید $R_o = 0$، $R_i = \infty$، $C = ۱\mu F$، $R = ۱M\Omega$. فرض کنید که می‌خواهیم خروجی برابر $v_o(t) = e^{-۱۰t}-۱$ V باشد. از معادلهٔ

(۱۶) مشتق‌گیری کنید تا $v_s(t)$ لازم برای حالات زیر به دست آید: (a) اگر $A = ۱۰۰۰$ (b) اگر A بی‌نهایت باشد.

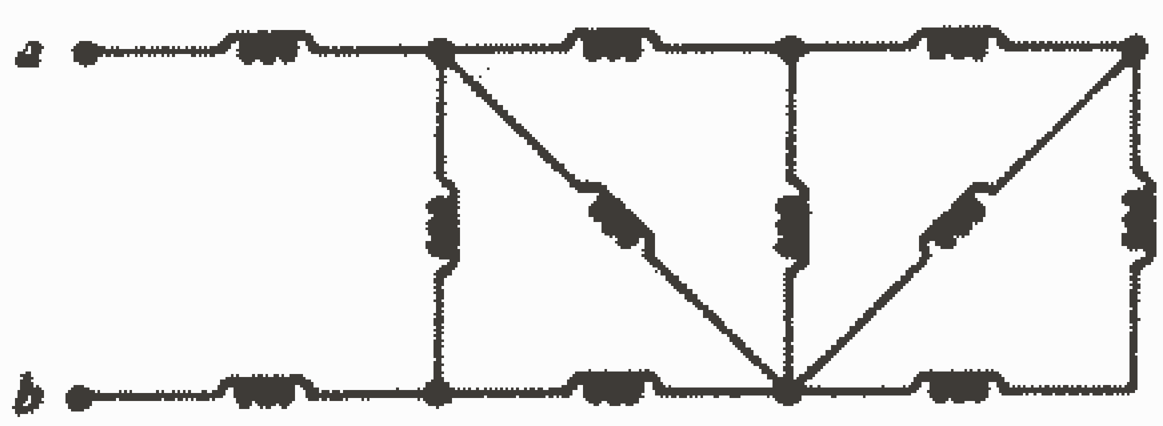
۱۰ - جای C ، R را در مدار شکل ۴-۱۰a عوض کنید و فرض کنید که برای op-amp $R_i = \infty$ و $R_o = 0$ ، A بی‌نهایت باشد. (a) $v_c(t)$ را به صورت تابعی از $v_s(t)$ پیدا کنید. (b) اگر A بی‌نهایت فرض نشود رابطه‌ای به دست آورید که ، $v_s(t)$ و $v_o(t)$ را به هم مربوط سازد.

۱۱ - در مدار شکل ۴-۲۸ ، $v_c(t) = 4te^{-2t}$ V در لحظهٔ $t = ۰٫۵S$ می‌باشد. مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) انرژی ذخیره شده در خازن. (b) هر سلف را با یک خازن ۱F جایگزین کنید و C_{eq} را پیدا کنید.



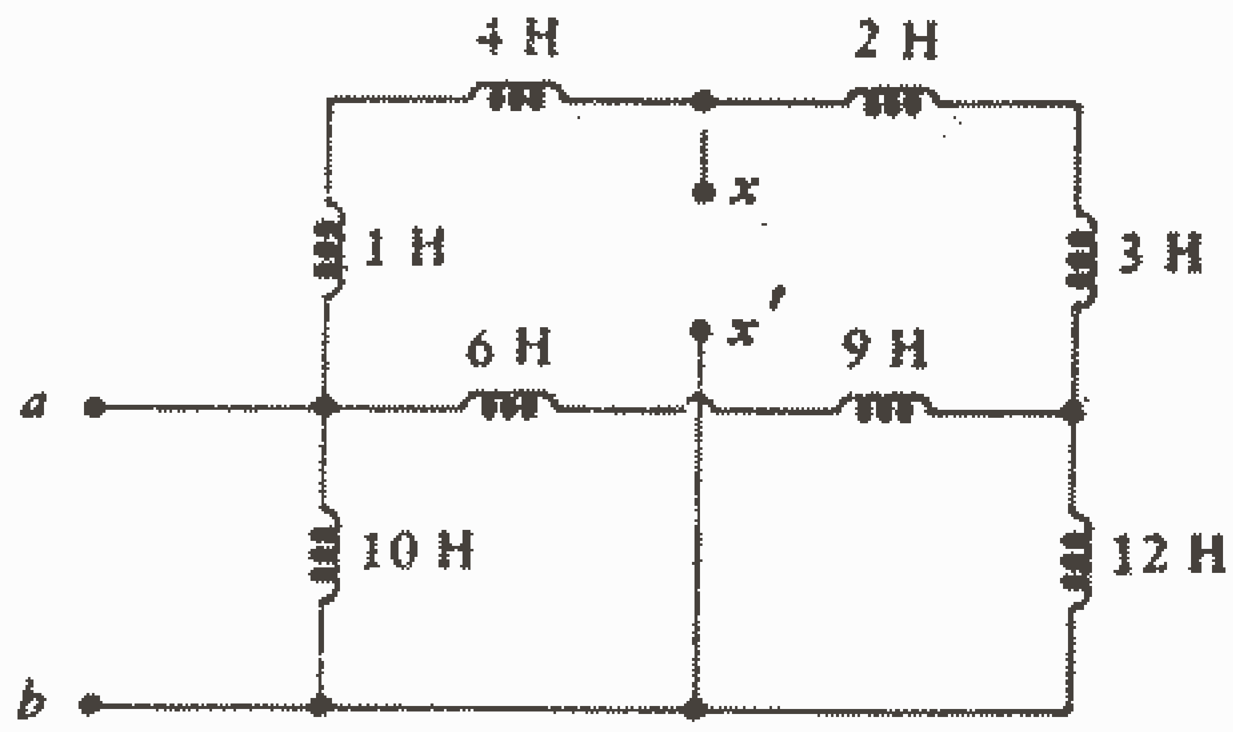
شکل ۲۸ - ۴: به مسئله ۱۱ مراجعه کنید.

۱۲ - (a) اگر هر سلف در شبکهٔ شکل ۲۹ - ۴ برابر ۱H باشد، سلف معادل را در نقاط a - b پیدا کنید. (b) هر سلف را با یک خازن ۱F جایگزین کنید و C_{eq} را پیدا کنید.



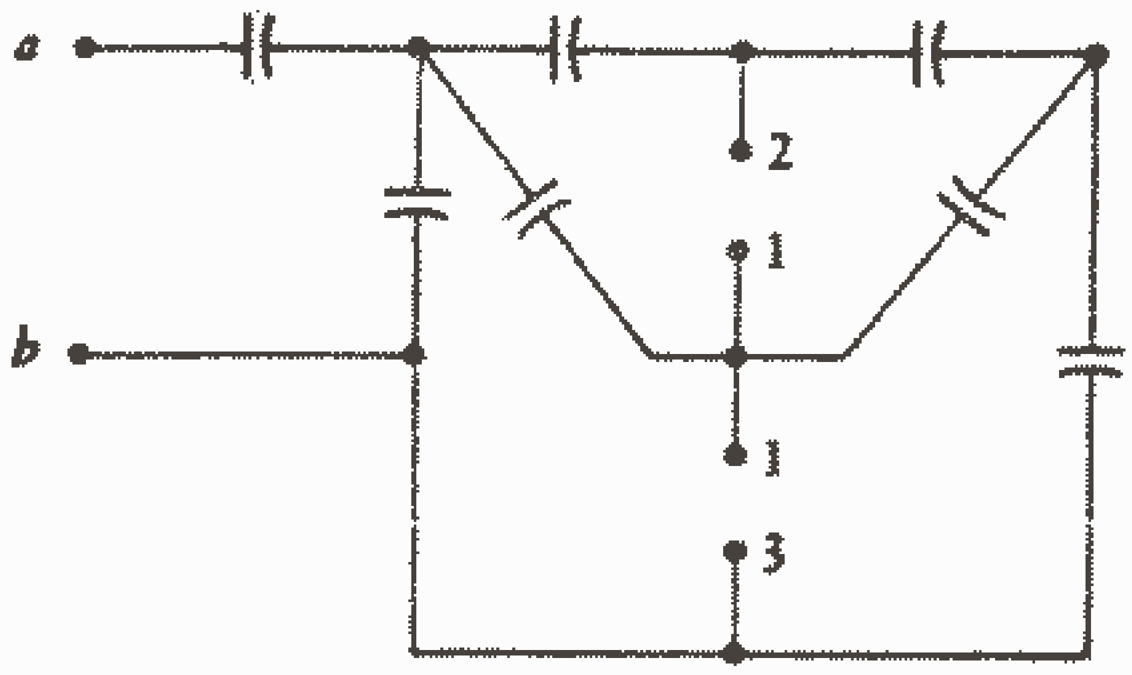
شکل ۲۹ - ۴: به مسئله ۱۲ مراجعه کنید.

۱۳ - اندوکتانس معادل را در ترمینالهای a-b در شکل ۴-۳۰ پیدا کنید، اگر ترمینالهای $x-x'$: (a) مدار باز شده باشد. (b) اتصال کوتاه شده باشد.



شکل ۳۰ - ٤: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

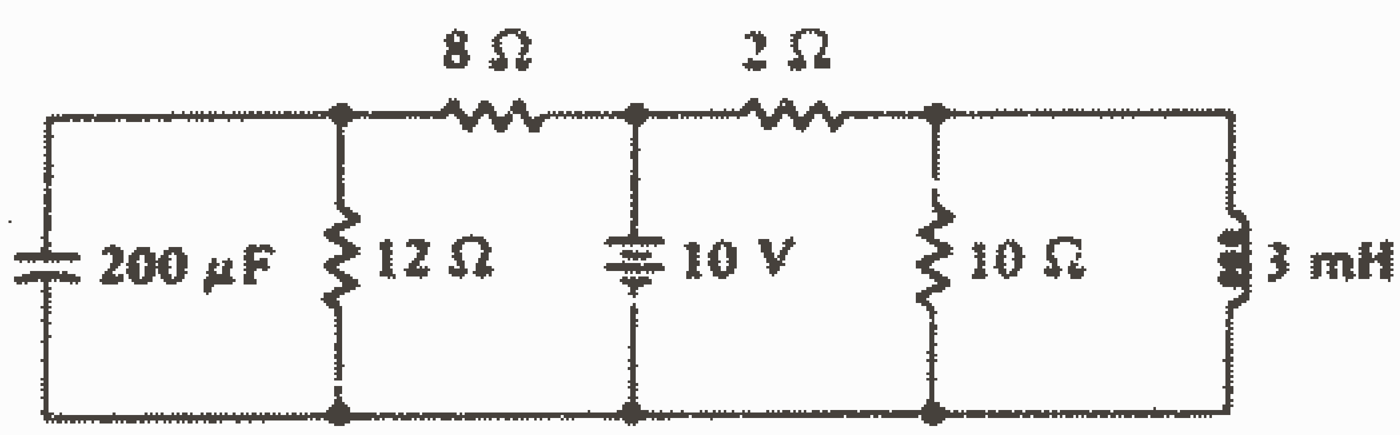
۱٤ - در شکل ۳۱-٤ هر خازن برابر $1\mu F$ می‌باشد. C_{eq} را در a-b در حالات زیر پیدا کنید: (a) اگر ۲-۱ و ۳-۱ هر دو مدار باز باشند. (b) اگر ۲-۱ و ۳-۱ هر دو اتصال کوتاه باشند. (c) اگر ۲-۱ مدار باز و ۳-۱ اتصال کوتاه باشد. (d) اگر ۲-۱ اتصال کوتاه و ۳-۱ مدار باز باشد.



شکل ۳۱ - ٤: به مسئله ۱٤ مراجعه کنید.

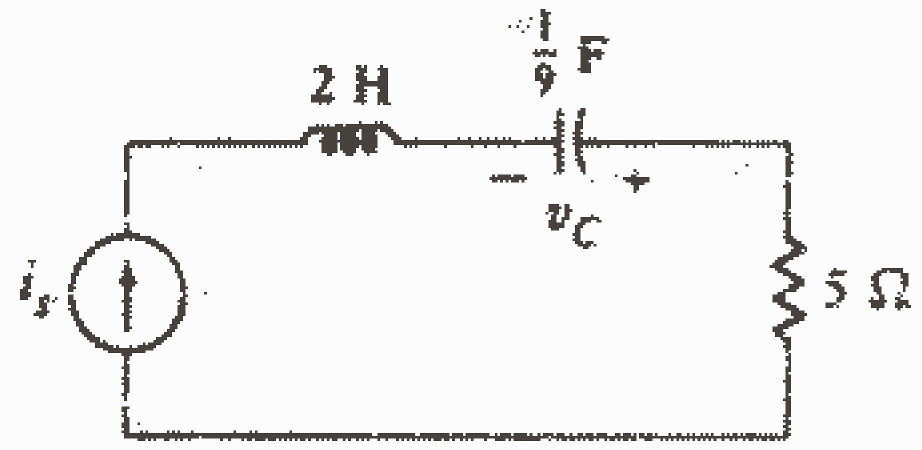
۱۵ - یک سطل کوچک پر از خازن $1nF$ داریم، نشان دهید که چگونه می‌توان یک خازن معادل $0/7nF$ را با حداقل تعداد ممکن از خازنها به دست آورد.

۱٦ - برای مدار شکل ۳۲-٤ مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) W_c ، (b) W_L (c) جریان هر یک از عناصر مدار. (d) ولتاژ دو سر هر یک از عناصر مدار.



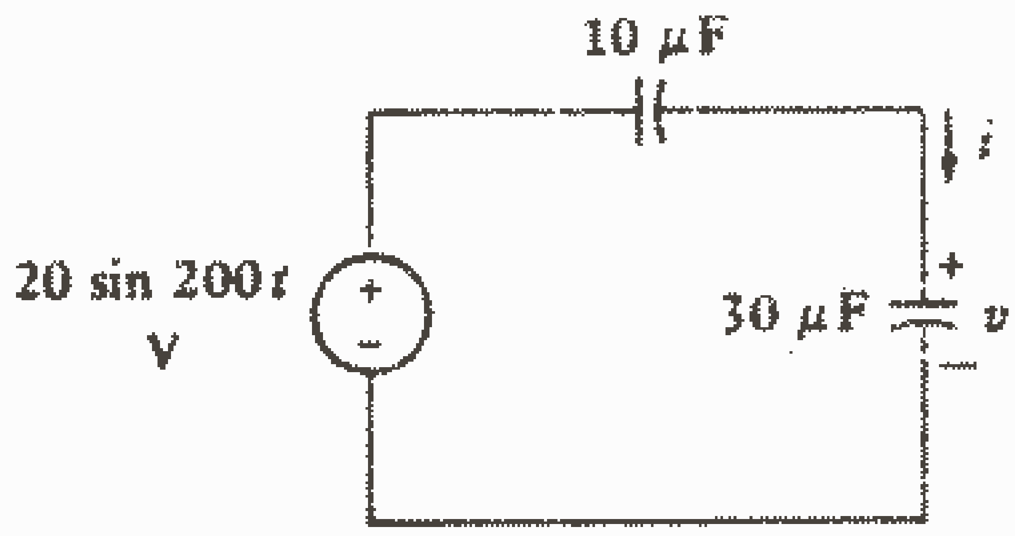
شکل ۳۲ - ٤: به مسئله ۱٦ مراجعه کنید.

۱۷ ـ در مدار شکل ۳۳-۴ فرض کنید، $i_s = 4(1-3e^{-3t})A$ برای $t>0$، $v_c(0)=20V$ باشد. در $t = 0/5S$ مقادیر خواسته شده را پیدا کنید: (a) انرژی ذخیره شده در سلف (b) انرژی ذخیره شده در خازن (c) انرژی تلف شده در هر مقاومت از لحظهٔ $t = 0$.



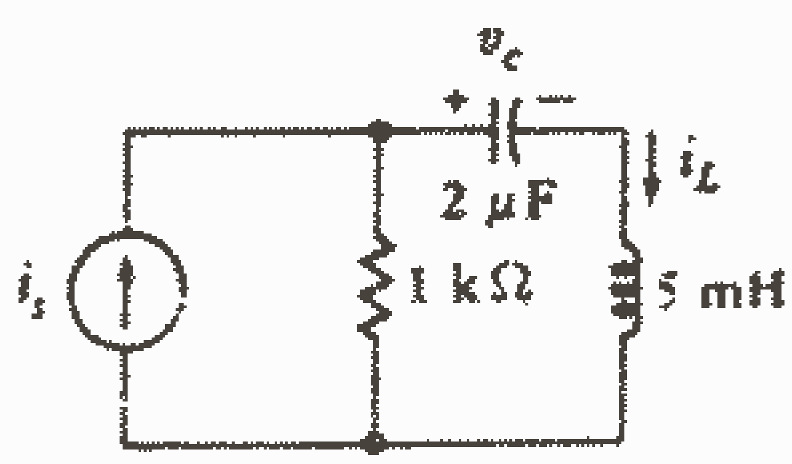
شکل ۳۳ ـ ۴: به مسئله ۱۷ مراجعه کنید.

۱۸ ـ فرض کنید که در مدار شکل ۳۴-۴، $v(0) = 10V$ باشد. (a) $i(t)$ را برای تمام مقادیر t به دست آورید. (b) $v(t)$ را به ازای $t \geq 0$ پیدا کنید.



شکل ۳۴ ـ ۴: به مسئله ۱۸ مراجعه کنید.

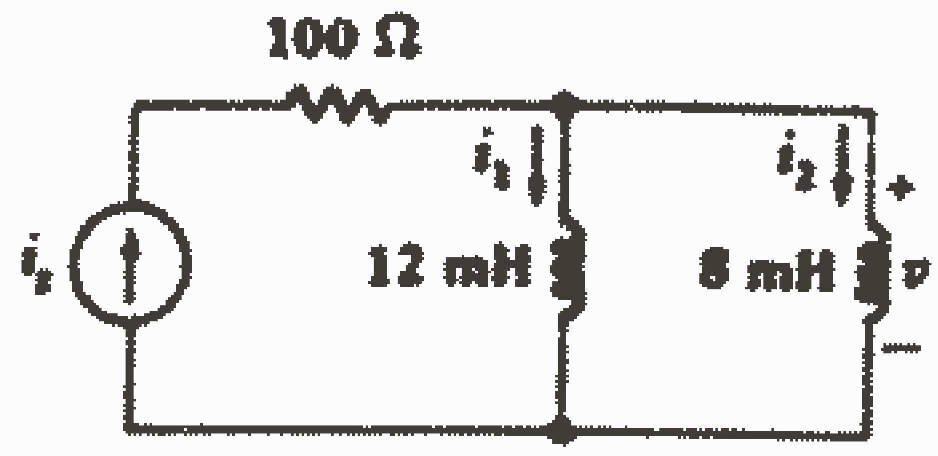
۱۹ ـ (a) معادلات گرهی را برای مدار شکل ۳۵-۴ بنویسید: (b) معادلات چشمه‌ای را برای همان مدار بنویسید.



$v_c(0) = 8$ V, $i_L(0) = 3$ A

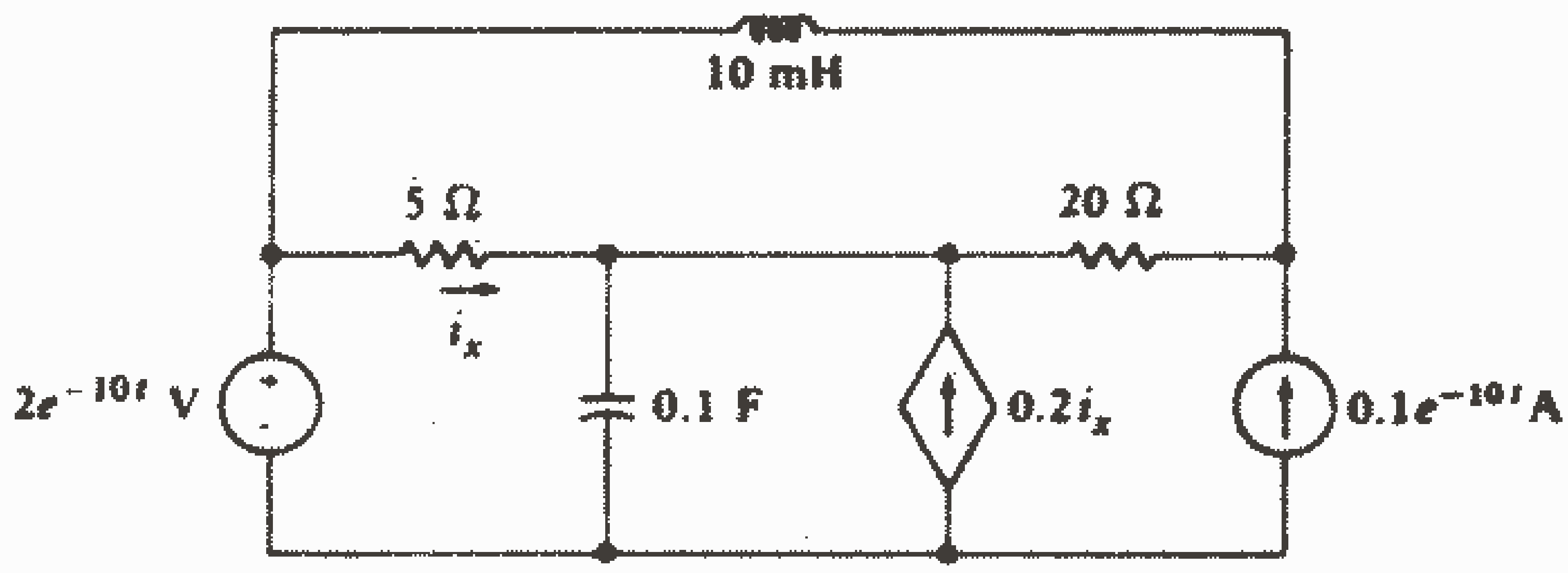
شکل ۳۵ ـ ۴: به مسئله ۱۹ مراجعه کنید.

۲۰ - در مدار شکل ۳۶-۴ فرض کنید $i_s = 0/1e^{-400t}A$ ، $i_2(0) = ٪3A$ باشد.
(a) $v(t)$ را برای تمام مقادیر t پیدا کنید. (b) $i_2(t)$ را برای $t \geq 0$ پیدا کنید. (c) $i_1(t)$ را به ازای $t \geq 0$ پیدا کنید.



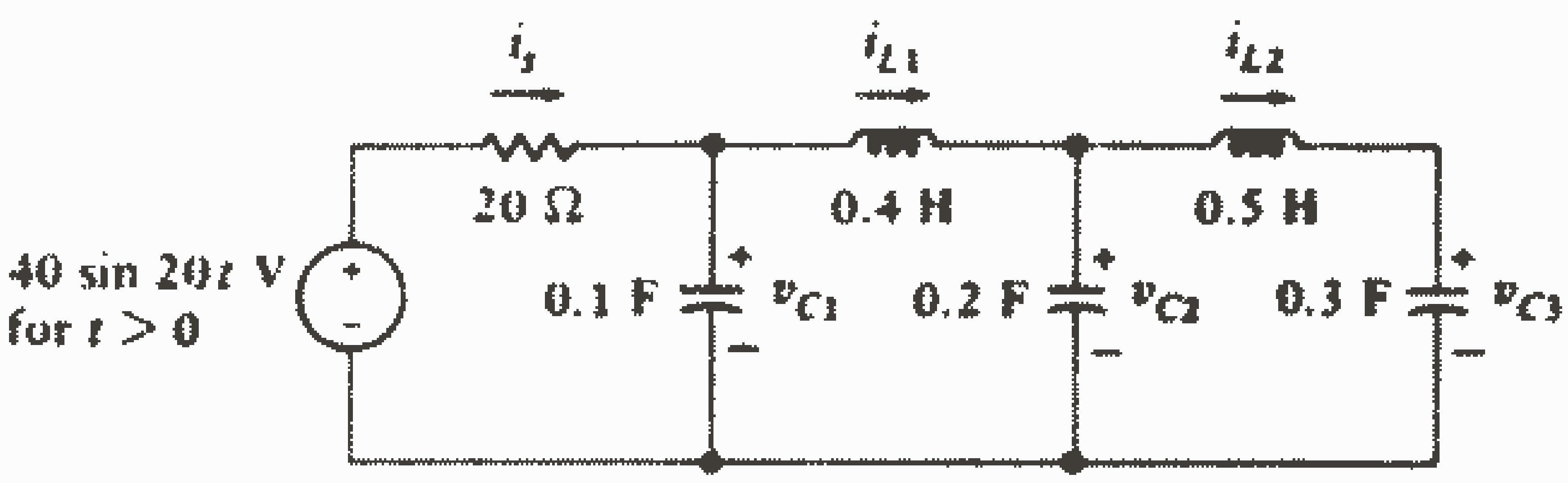
شکل ۳۶ ـ ۴: به مسئله ۲۰ مراجعه کنید.

۲۱ ـ برای مدار شکل ۳۷-۴ درختی رسم کنید که نه تنها روش ارائه شده در قسمت ۷-۳ و ۸-۳ را برآورده سازد بلکه همهٔ خازنها در درخت و همهٔ سلفها در مکمل درخت قرار گیرند. (a) ولتاژهای شاخه درختی را مشخص کنید و یک دسته معادلهٔ گرهی بنویسید و فرض کنید که هیچ ذخیره انرژی در $t = 0$ وجود نداشته باشد. (b) جریانهای لینک را مشخص کنید و یک دسته معادلهٔ حلقه بنویسید و باز دوباره فرض کنید که در لحظهٔ $t = 0$ هیچ ذخیره انرژی وجود نداشته باشد.



شکل ۳۷ ـ ۴: به مسائل ۲۱ و ۲۴ مراجعه کنید.

۲۲ ـ در مدار شکل ۳۸-۴، فرض کنید $v_{c1}(0)=5V$ ، $v_{c2}(0) = 6V$ ، $v_{c3}(0) = 7V$ ، $i_{L1}(0) = 8A$، $i_{L2}(0) = -4A$ باشد. (a) یک دسته معادلهٔ گرهی برحسب متغیرهای v_{c1} ، v_{c2} و v_{c3} بنویسید. (b) یک دسته معادلهٔ چشمه‌ای بر حسب متغیرهای i_s، i_{L1}، i_{L2} بنویسید.

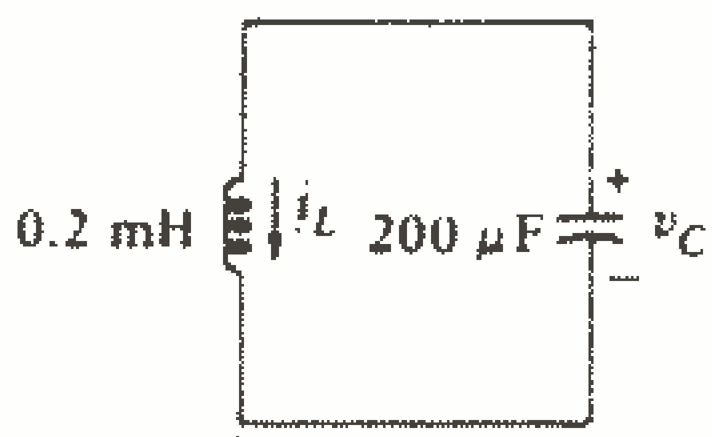


شکل ۳۸ ـ ۴: به مسایل ۲۲ و ۲۳ مراجعه کنید.

۲۳ ـ متناظر دقیق مدار شکل ۳۸-٤ را ایجاد کنید و جریانهای سلفها و ولتاژ خازنها را مشخص کنید و مقادیر اولیه آنها را مشخص کنید.

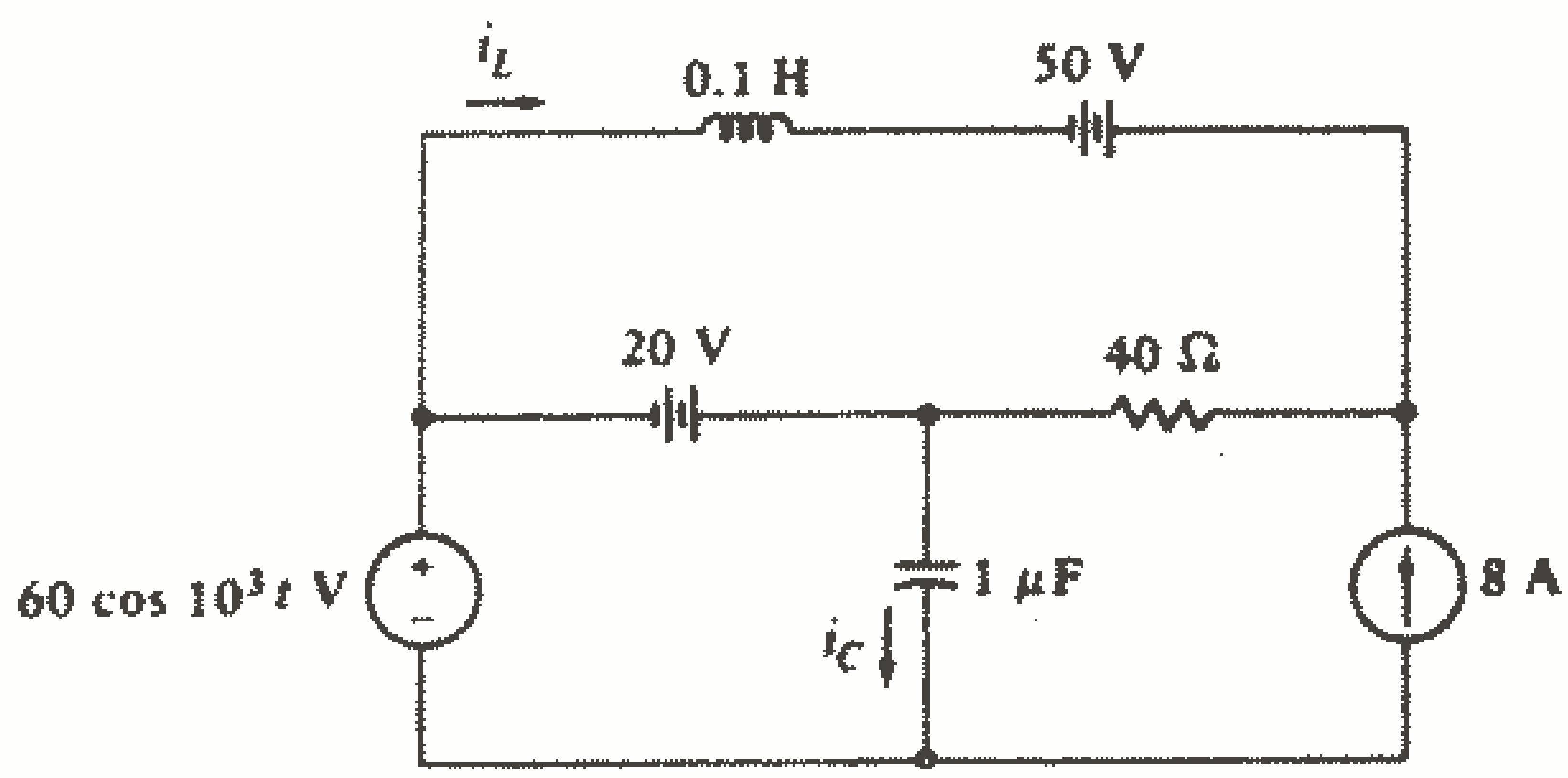
۲٤ ـ متناظر دقیق مدار شکل ۳۷-٤ را رسم کنید.

۲۵ ـ اگر در مدار شکل ۳۹-٤، $i_L(0) = 10\,A$, $v_c(0) = 4V$ باشد، یک معادله گرهی بنویسید و (a) نشان دهید که $v_c = -10\sin 5000t + 4\cos 5000t\ V$ در معادلهٔ شما صدق می‌کند. (b) مدار متناظر دقیق را به دست آورید و رابطه‌ای برای ولتاژ خازن به دست آورید. (c) مدار اصلی و مدار متناظر را از نظر توپولوژیکی چگونه مقایسه می‌کنید؟



شکل ۳۹ ـ ٤: به مسئله ۲۵ مراجعه کنید.

۲٦ ـ در مدار شکل ٤۰-٤ با استفاده از اصل جمع اثرها مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) $i_L(t)$ (b) $i_c(t)$.



شکل ٤۰ ـ ٤: به مسئله ۲٦ مراجعه کنید.

فصل ۵

مدارهای RL , RC بدون منبع

۱ ـ ۵ ـ مقدمه

در فصل گذشته معادلاتی را که پاسخ مدارهای شامل سلف و خازن را تعیین می‌نمودند، نوشتیم اما هیچیک از آنها را حل نکردیم. اکنون آماده‌ایم که اقدام به حل مدارهای ساده بنمایيم. ما توجه خود را معطوف به مدارهایی که فقط شامل مقاومت و سلف و یا مقاومت خازن بوده و فاقد منبع می‌باشند، خواهیم کرد. اگر چه، اجازه خواهیم داد که انرژی ذخیره شده در سلف یا خازن در مدار حضور داشته باشد زیرا بدون این انرژی هر پاسخی صفر خواهد بود.

اگر چه مدارهایی را که ما در شرف بررسی آنها هستیم ظاهری مقدماتی دارند، اما از نظر عملی دارای اهمیت می‌باشند. آنها کاربردهایی از قبیل شبکه‌های کوپلینگ در تقویت‌کننده‌های الکترونیکی، شبکه‌های جبران‌سازی در سیستمهای کنترل اتوماتیک، شبکه‌های متعادل‌کننده در کانالهای مخابراتی و بسیاری موارد دیگر دارند. آشنایی با این مدارهای ساده ما را قادر می‌سازد که میزان دقتی را که خروجی یک تقویت‌کننده می‌تواند ورودی متغیر با زمان را تعقیب کند و یا اینکه چقدر سریع سرعت یک موتور در پاسخ به یک تغییر در جریان میدان آن تغییر می‌کند، را پیشگویی کنیم. اطلاعات ما درباره عملکرد مدارهای RL , RC ساده همچنین ما را قادر می‌سازد که اصلاحاتی را در تقویت‌کننده‌ها و موتورها برای حصول یک پاسخ مطلوب ارائه کنیم.

تحلیل چنین مدارهایی بستگی به فرموله کردن و حل نمودن معادلات دیفرانسیلی دارد که مدار را مشخص می‌سازند. نوع خاصی از این معادلات را که به دست می آوریم معادلهٔ دیفرانسیل خطی خواهیم نامید که به طور ساده معادلهٔ دیفرانسیلی است که تمام جملات آن معادله وقتی به دست می آید که مقداری برای متغیر مستقل پیدا کنیم (به صورت تابعی از زمان) که در معادلهٔ

دیفرانسیل صدق کند و نیز در توزیع انرژی مشخصی در سلف و خازن در یک لحظهٔ مشخص (معمولاً $t = 0$) صدق کند.

جواب این معادلهٔ دیفرانسیل پاسخی از مدار را ارائه می‌کند که به نامهای مختلفی نامیده می‌شود. از آنجاییکه این پاسخ بستگی به «طبیعت» عمومی مدار (نوع عناصر، اندازهٔ آنها و اتصالات عناصر) دارد، آن را اغلب پاسخ طبیعی می‌نامند. همچنین بدیهی است که یک مدار حقیقی نمی‌تواند انرژی را برای همیشه ذخیره کند و مقاومتهایی که ضرورتاً به همراه سلف و خازن می‌باشند سرانجام تمام انرژی ذخیره شده را به گرما تبدیل خواهند کرد. در نهایت پاسخ میرا خواهد شد و به همین دلیل پاسخ را پاسخ‌گذرا هم می‌نامند. و بالاخره باید کمی هم با فهرست واژه‌هایی که ریاضیدانان به کار می‌برند آشنا باشیم، آنها پاسخ یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن را تابع عمومی می‌نامند. وقتیکه ما منابع مستقل را هم در مدار در نظر بگیریم، قسمتی از پاسخ ناشی از ماهیت منبع (تابع تحریک) خواهد بود به همین دلیل این قسمت از پاسخ را پاسخ اجباری و یا پاسخ خصوصی می‌نامند که به وسیله پاسخ عمومی ایجاد شده به وسیله مدار بدون منبع تکمیل می‌شود و مجموع پاسخ عمومی و پاسخ خصوصی، پاسخ کامل مدار را مشخص می‌کند. یعنی پاسخ کامل عبارت است از مجموع پاسخ طبیعی، که در این فصل مطالعه می‌شود، و پاسخ اجباری که در فصل ۶ مورد بررسی قرار خواهیم داد. پاسخ بدون منبع را می‌توان پاسخ طبیعی، پاسخ گذرا، پاسخ آزاد، و یا پاسخ عمومی نامید اما به علت ماهیت توصیفی‌تر نام «پاسخ طبیعی» ما همین نام را به کار خواهیم برد.

روشهای مختلفی را برای حل این معادلات دیفرانسیل در نظر خواهیم گرفت. اگر چه این موضوع مربوط به ریاضی است و تحلیل مدار نیست. بیشترین توجه ما معطوف حل آنها، مفهوم و تعبیرشان می‌باشد و سعی خواهیم کرد که به اندازهٔ کافی با فرم پاسخ آشنا شویم که بتوانیم جوابهای مدارهای جدید را با کمی فکر کردن بنویسیم، اگر چه وقتیکه روشهای ساده‌تر با شکست مواجه شوند، روشهای تحلیلی پیچیده مورد نیاز خواهد بود و یک مهندس باید همیشه به یاد داشته باشد که این روشهای پیچیده فقط ابزاری برای به دست آوردن جوابهای دقیقتر می‌باشند و نه جوابهای مهندسی.

۲ ـ ۵ ـ مدار RL ساده

ما بحث خود را دربارهٔ تحلیل گذرا با بررسی مدار RL سری سادهٔ شکل ۱-۵ شروع می‌کنیم. بیایید جریان متغیر با زمان را به صورت $i(t)$ در نظر بگیریم و جریان $i(t)$ در لحظهٔ $t=0$

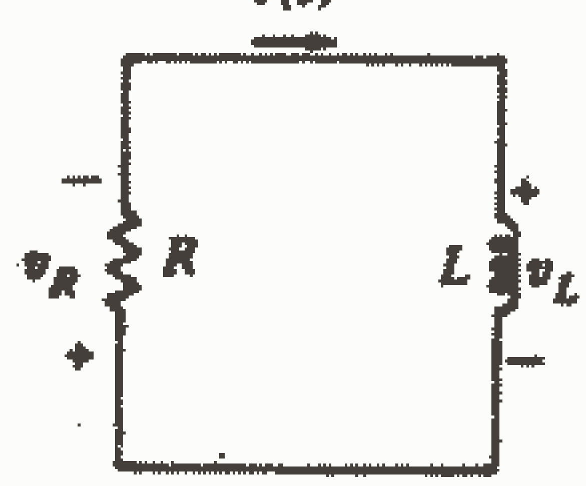
را برابر I_o بگیریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$v_R + v_L = Ri + L\, di/dt = 0 \quad \text{و یا} \quad di/dt + R/L\, i = 0 \qquad (۱)$$

باید عبارتی برای $i(t)$ پیدا کنیم که در این معادله صدق کند و دارای مقدار I_o ؛در لحظهٔ $t = 0$ باشد. جواب را می‌توان به طرق مختلفی به دست آورد.

یک روش خیلی سر راست برای حل یک معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از اینکه معادله را به گونه‌ای بنویسیم که متغیرها جدا شوند و سپس از هر طرف معادله انتگرال بگیریم. متغیرهای موجود در معادلهٔ (۱) عبارتند از i ، t و بدیهی است که معادله را می‌توان در dt ضرب و به i تقسیم نمود و به گونه‌ای مرتب نمود که متغیرها جدا شوند.

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \qquad (۲)$$



شکل ۱ ـ ۵: یک مدار RL سری که در آن $i(t)$ را باید به گونه‌ای تعیین نمود که با توجه به شرایط اولیه $i(0) = I_0$ باشد.

چون جریان در لحظهٔ $t = 0$ برابر I_0 و در لحظهٔ t برابر $i(t)$ می‌باشد، می‌توانیم دو انتگرال معین را که از انتگرال گیری معین دو طرف بین حدود مربوطه به دست می‌آید مساوی قرار دهیم:

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di}{i} = \int_0^t -\frac{R}{L}dt \;\rightarrow\; \ln i \Big|_{I_0}^{i} = -\frac{R}{L}t\Big|_0^t \;\rightarrow\; \ln i - \ln I_0 = -\frac{R}{L}(t-0)$$

و در نتیجه:

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} \qquad (۳)$$

ما می‌توانیم جواب را ابتدا با نشان دادن اینکه جایگزینی معادلهٔ (۳) در (۱) به تساوی $0 = 0$ می‌انجامد و سپس با نشان دادن اینکه قرار دادن $t = 0$ در معادلهٔ (۳) تساوی $i(0) = I_0$ را ایجاد می‌کند، چک کنیم. هر دو مرحله لازم است، یعنی پاسخ باید در معادلهٔ دیفرانسیل مدار

صدق کند و نیز شرایط اولیه و یا پاسخ در لحظهٔ صفر را هم برآورده سازد.

جواب را می‌توان با کمی تغییر در روش قبلی هم به دست آورد. بعد از تغییر متغیرها می‌توانیم انتگرال نامعین دو طرف معادلهٔ (۲) را به دست آوریم که شامل یک ثابت انتگراسیون هم خواهد بود. بنابراین:

$$\int \frac{di}{i} = -\int \frac{R}{L}\, dt + K$$

و پس از انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + K \qquad (٤)$$

ثابت k را نمی‌توان با جایگزینی معادلهٔ (٤) در معادلهٔ دیفرانسیل اصلی (۱) به دست آورد، اتحاد $0 = 0$ حاصل می‌شود، زیرا معادلهٔ (٤) پاسخ معادلهٔ (۱) به ازای همهٔ مقادیر K می‌باشد. ثابت انتگراسیون را باید طوری انتخاب کرد که شرایط اولیه $i(0) = I_0$ را برآورده سازد. بنابراین در لحظهٔ $t = 0$، از معادلهٔ (٤) داریم:

$$\ln I_0 = K$$

و ما این مقدار K را در معادلهٔ (٤) قرار می‌دهیم و پاسخ مطلوب را به دست می‌آوریم

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + \ln I_0 \quad \text{و یا} \quad i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

هر کدام از روشهای فوق را فقط وقتیکه متغیرها قابل تفکیک باشند می‌توان به کار برد که این حالت هم گاهگاهی پیش می‌آید. در بقیه حالات باید متوسل به یک روش خیلی موثری شویم که موفقیت آن بستگی به فراست و یا تجربهٔ ما خواهد داشت. ما به طور ساده پاسخ را حدس می‌زنیم و سپس این حدس خود را ابتدا با قرار دادن در معادلهٔ دیفرانسیل و سپس با اعمال شرایط اولیه داده شده، تست می‌کنیم. چون ما نمی‌توانیم مقادیر عددی دقیق جواب را حدس بزنیم، جوابی را که شامل چند ثابت مجهول است حدس می‌زنیم و مقادیری را برای این ثابتها انتخاب می‌کنیم که در معادله دیفرانسیل و شرایط اولیه صدق کند. اکثر معادلات دیفرانسیلی که در تحلیل مدار با آنها مواجه می‌شویم دارای جوابی هستند که می‌توان آن را با تابع نمایی و یا مجموع چند تابع نمایی نشان داد. بیایید جوابی برای معادله (۱) بفرم نمایی $i(t) = A\,e^{s_1 t}$ انتخاب کنیم که در آن A و S_1 ثابتهایی هستند که باید تعیین شوند. بعد از جایگزینی این پاسخ فرضی در معادله (۱)، خواهیم داشت:

$$(S_1 + R/L)Ae^{s_1 t} = 0 \quad \text{و یا} \quad AS_1e^{s_1 t} + R/L\ Ae^{s_1 t} = 0$$

برای اینکه این پاسخ به ازای جمیع مقادیر زمان در معادله صدق کند لازم است که یا $A = 0$ و یا $S_1 = -\infty$ و یا $S_1 = -R/L$ باشد. اما اگر $A = 0$ و یا $S_1 = -\infty$ آنگاه تمام پاسخها صفر می‌شوند و جوابی برای مسئله ما به دست نمی‌آید. بنابراین باید $S_1 = -R/L$ را انتخاب کنیم. و پاسخ فرضی ما به صورت $i(t) = Ae^{-Rt/L}$ در می‌آید. ثابت دیگر را باید با اعمال شرایط اولیهٔ $i = I_0$ در $t = 0$ به دست آوریم. بنابراین: $I_0 = A$ و به این ترتیب فرم نهایی پاسخ فرضی ما یکبار دیگر به صورت (۵) $i(t) = I_0e^{-Rt/L}$ خواهد بود.

ما روش دیگری را برای حل معادلهٔ (۱) بررسی نخواهیم کرد، اگر چه از تعدادی روش دیگر هم می‌توان استفاده نمود. آنها را می‌توانید در درس معادلات دیفرانسیل مطالعه کنید. قبل از اینکه توجه خود را معطوف تفسیر پاسخ کنیم بیایید روابط قدرت و انرژی را در این مدار بررسی کنیم. قدرت تلف شده در مقاومت عبارت است از:

توان

$$p_R = i^2R = I_0^2Re^{-2Rt/L}$$

و انرژی کل تبدیل شده به حرارت در مقاومت را می‌توان با انتگرال‌گیری از توان لحظه‌ای از لحظهٔ صفر تا بی‌نهایت پیدا کرد:

$$W_R = \int_0^\infty p_R dt = I_0^2R\int_0^\infty e^{-2Rt/L}\,dt = I_0^2R\left(-\frac{L}{2R}\right)e^{-2Rt/L}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}LI_0^2$$

و این همان نتیجه‌ای است که انتظار داشتیم، زیرا انرژی کل ذخیره شدهٔ اولیه در سلف عبارت از $\frac{1}{2}LI_0^2$ می‌باشد و هیچ انرژیی در زمان بی‌نهایت در سلف ذخیره نمی‌شود. تمام انرژی اولیه در مقاومت تلف می‌شود.

تمرین

۱ ـ ۵ ـ هر یک از مدارهای شکل ۲ ـ ۵ به مدت طولانی در حالت نشان داده شده بوده‌اند. کلیدهای حالت a , b در لحظهٔ $t = 0$ باز می‌شوند. کلید شکل C یک کلید Spdt می‌باشد و به صورتیکه کشیده شده است نشان می‌دهد که قبل از اینکه مداری را قطع کند مدار دیگر را وصل می‌کند. آن را «اتصال قبل از قطع» هم می‌نامند. بعد از اینکه مشخصات سلف را در آخر قسمت ۳-۴ مرور کردید، $i(0)$ را هر مدار پیدا کنید.

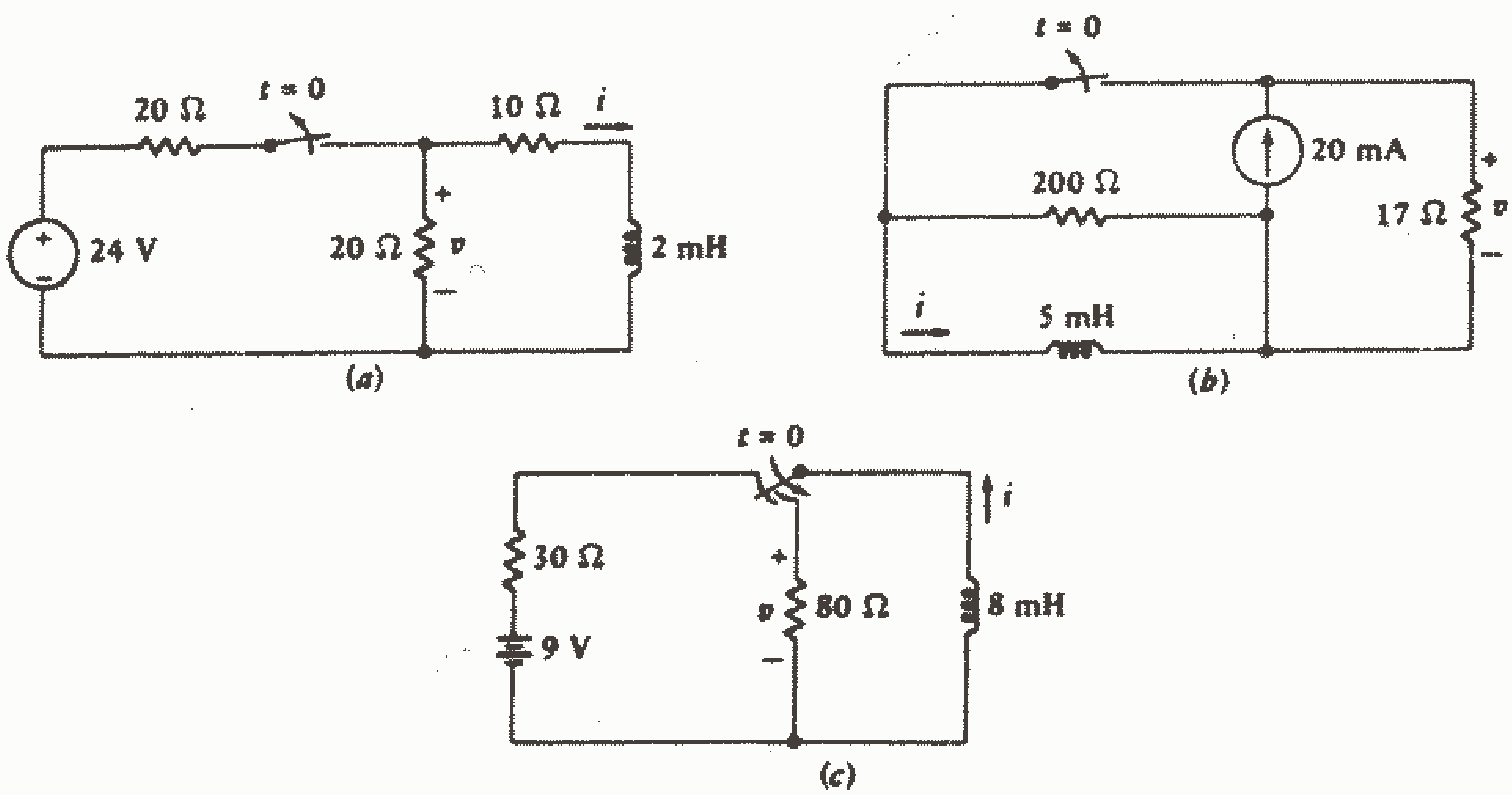
جواب: ۶۰۰mA، ۲۰، ۳۰۰-

۲ ـ ۵ ـ درست در لحظهٔ بعد از تغییر حالت کلید در مدار شکل ۲ـ۵ مقدار v را پیدا کنید.

جواب: ۱۲۷-، ۰،۳۴۰، ۲۴-

۳ ـ ۵ ـ مقادیر عناصر در شکل ۱ ـ ۵ عبارتند از: $R = ۰{,}۸\Omega$ ، $L = ۱{,}۶H$. در لحظهٔ $t = -1S$ فرض کنید $i = ۲۰A$ و مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) $i(۰)$ (b) قدرت جذب شده به وسیله سلف در $t = 1S$ ، (c) زمانی که در آن انرژی ذخیره شده در سلف $۱۰۰J$ می‌باشد.

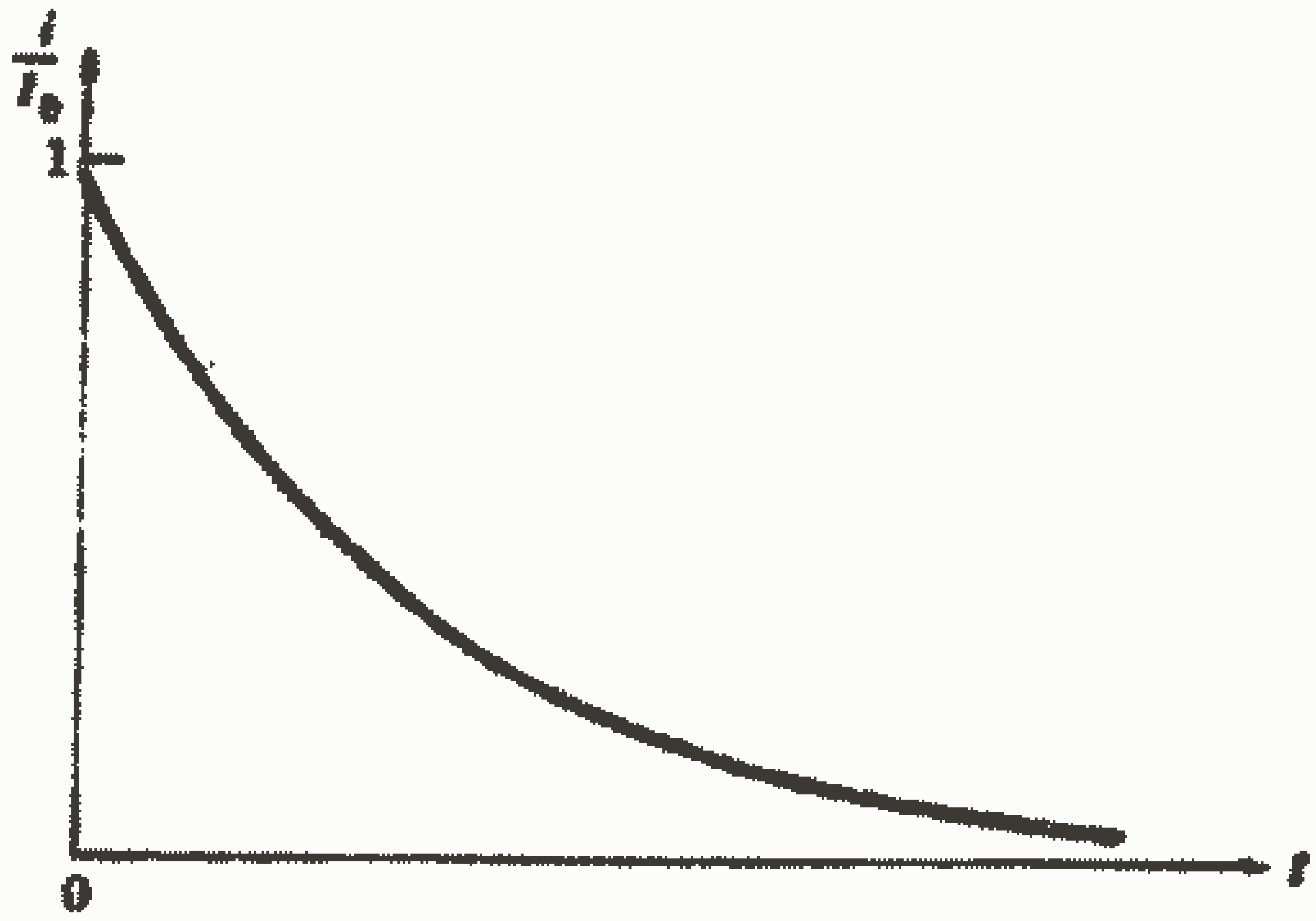
جواب: ۱۲٫۱۳A، ۴۳٫۳W-، ۰٫۱۶۳۲S



شکل ۲ ـ ۵: به تمرینات ۱ ـ ۵، ۲ ـ ۵ و ۵ ـ ۵ مراجعه کنید.

۳ ـ ۵ ـ خواص پاسخ نمایی

حال بیایید ماهیت پاسخ مدار RL سری را مورد توجه قرار دهیم. قبلاً دریافتیم که جریان با رابطهٔ (۶) $i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$ بیان می‌شود. در لحظهٔ صفر، جریان همان مقدار مفروض I_0 را دارد و با افزایش زمان، جریان کاهش می‌یابد و به صفر میل می‌کند. شکل این تابع نمایی میرا با رسم $i(t)/I_0$ نسبت به t در شکل ۳ ـ ۵ مشاهده می‌شود. چون تابعی که رسم می‌کنیم $e^{-Rt/L}$ است. اگر R/L تغییر نکند، منحنی تغییر نخواهد کرد. بنابراین، برای هر مدار سری RL که دارای نسبت R/L یا L/R یکسان باشد، منحنی یکسانی به دست می‌آید. اجازه دهید ببینیم چگونه این نسبت، شکل منحنی را تحت تاثیر قرار می‌دهد.



شکل ۳ ـ ۵: منحنی $e^{-Rt/L}$ نسبت به t .

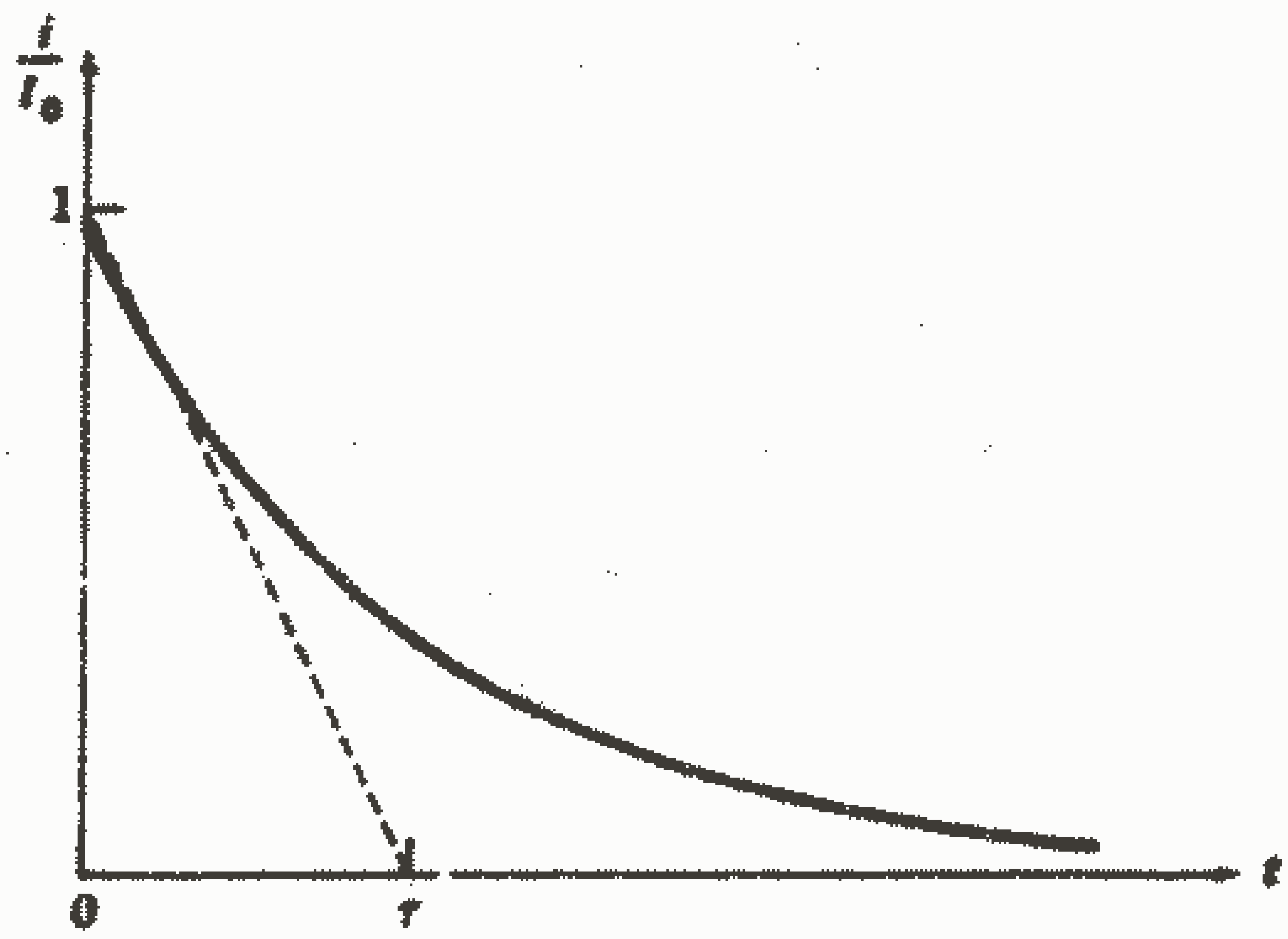
اگر نسبت L به R را دو برابر کنیم، آنگاه اگر t هم دو برابر شود نما تغییر نخواهد کرد . به عبارت دیگر، پاسخ اصلی در زمانی دیرتر روی می‌دهد و منحنی جدید به وسیله انتقال هر نقطهٔ منحنی اصلی دو برابر به راست حاصل می‌شود . با این نسبت L/R بزرگتر، زمان بیشتری طول می‌کشد تا جریان به هر کسری از مقدار اصلی‌اش برسد . ممکن است مایل باشیم که بگوییم «عرض» منحنی دو برابر شده است و یا «عرض» متناسب است با L/R. البته باید کلمهٔ «عرض» را تعریف کنیم زیرا هر منحنی بین ۰ = t تا ∞ قرار دارد . به جای این کار بیایید زمانی را که لازم است تا جریان، اگر به تنزلش با سرعت اولیه ادامه دهد، به صفر سقوط کند را مورد توجه قرار دهیم.

سرعت اولیهٔ تنزل را با محاسبهٔ مشتق در لحظهٔ صفر به دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt}\frac{i}{I_0}\bigg|_{t=0} = -\frac{R}{L}e^{-Rt/L}\bigg|_{t=0} = -\frac{R}{L}$$

مقدار زمانی را که طول می‌کشد تا i/I_0 ، با سرعت تنزل مفروضی، از یک به صفر تنزل کند با حرف یونانی τ (تاو) نشان می‌دهیم. بنابراین $\frac{R}{L}\tau = 1$ یا $\tau = \frac{L}{R}$ (۷) نسبت L/R باید دارای واحد ثانیه باشد زیرا نمای $-R/L\ t$ باید بدون واحد باشد . این مقدار زمان τ را «ثابت زمانی» می‌نامند و در شکل ٤ ـ ٥ نشان داده شده است.

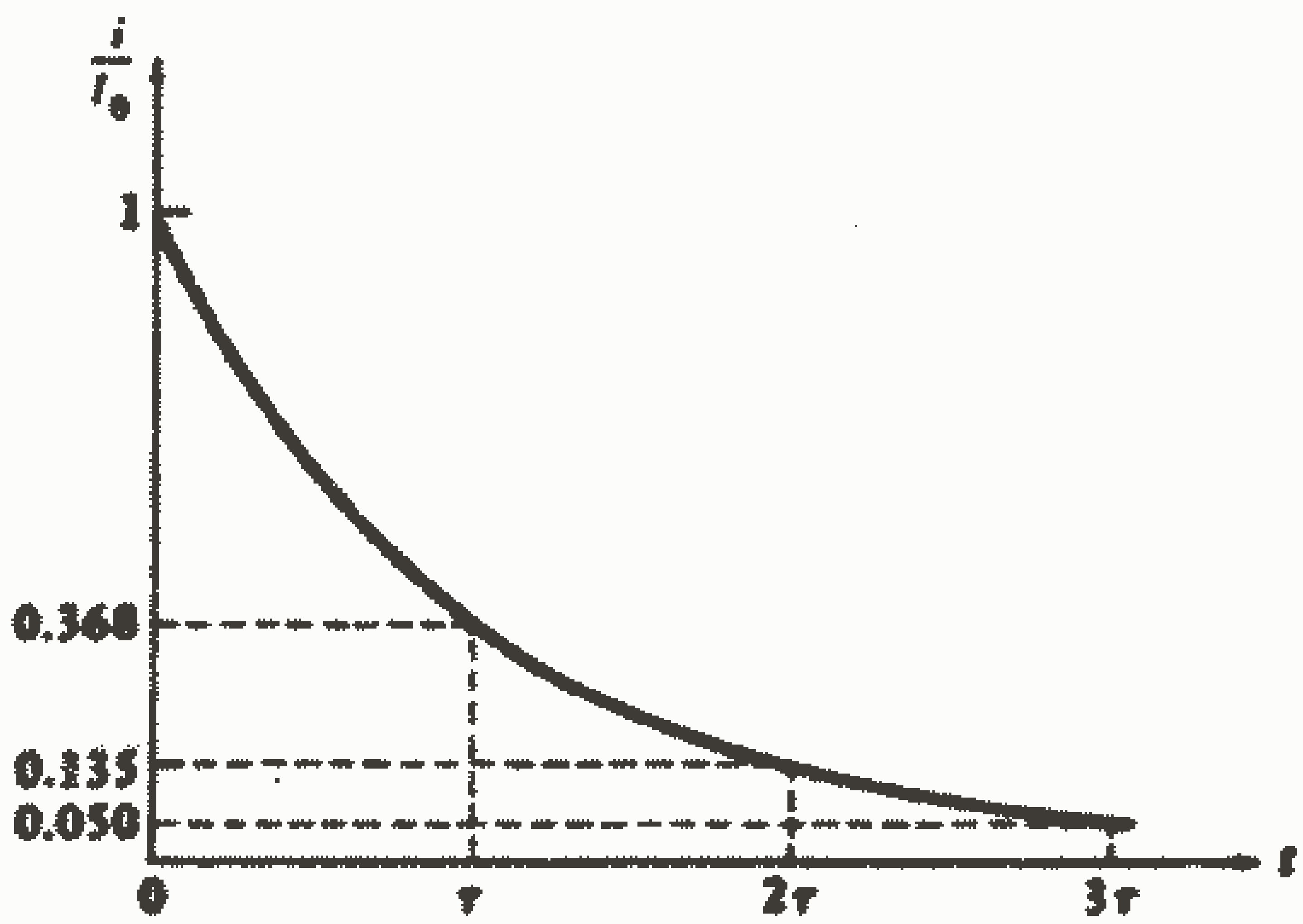
بدیهی است که ثابت زمانی یک مدار RL سری را به سادگی می‌توان از منحنی پاسخ به دست آورد و فقط کافی است که مماسی بر منحنی در ۰ = t را رسم کنیم و محل تقاطع این



شکل ٤ - ٥: ثابت زمانیτ برای یک مدار سری RL برابر است با L/R و آن زمانی است که لازم است تا منحنی پاسخ با سرعتی که برابر با سرعت اولیهٔ تنزل آن باشد، به صفر تنزل کند.

خط مماس را با محور زمان تعیین کنیم. این روش اغلب روش مناسبی برای تقریب کردن ثابت زمانی از روی اسیلوسکوپ می‌باشد.

تفسیر مهم دیگری از ثابت زمانی τ با تعیین مقدار $i(t)/I_0$ در $t = \tau$ به دست می‌آید که داریم: $i(\tau) = ۰٫۳٦۸ I_0$ یا $\frac{i(\tau)}{I_0} = e^{-1} = ۰٫۳٦۸$. بنابراین در یک ثابت زمانی پاسخ به مقدار ۳٦٫۸ درصد مقدار اولیه‌اش تنزل پیدا می کند و مقدار τ را با توجه به این واقعیت هم می‌توان تعیین نمود که این امر در شکل ٥-٥ نشان داده شده است.



شکل ٥ - ٥: جریان در یک مدار RL سری در لحظات τ و 2τ و 3τ به ترتیب ۳٦/۸ و ۱۳/٥ و ٥ درصد مقدار اولیه‌اش است.

بهتر است که افت جریان در فواصل زمانی یک ثابت زمانی را اندازه بگیریم و با استفاده از یک ماشین حساب دستی و یا جدول توابع نمایی منفی نشان دهیم که $i(t)/I_0$ در $t = \tau$ برابر ۰/۰۱۸۳ ودر $t = 5\tau$ برابر ۰٫۰۰۶۷ می‌باشد. در نقطه‌ای بین ۳ تا ۵ ثابت زمانی بعد از صفر، اکثر ما موافقیم که جریان بخش ناچیزی از مقدار اولیه‌اش می‌باشد. بنابراین اگر از ما پرسیده شود، «چقدر طول می‌کشد تا جریان به مقدار صفر تنزل کند؟» جواب ما می‌تواند این باشد: «در حدود پنج ثابت زمانی.» در پایان این زمان مقدار جریان کمتر از یک درصد مقدار اولیه‌اش می‌باشد.

چرا یک ثابت زمانی بزرگتر L/R منحنی پاسخی ایجاد می‌کند که آهسته‌تر تنزل می‌کند؟ بیایید اثر هر عنصر را بررسی کنیم. افزایش L باعث می‌شود که انرژی بیشتری به ازای جریان اولیهٔ یکسانی ذخیره شود و این انرژی بیشتر احتیاج به زمان بیشتری برای تلف شدن در مقاومت دارد. ما همچنین می‌توانیم L/R را با کاهش R افزایش دهیم. در این حالت قدرتی که در مقاومت جاری می‌شود به ازای جریان اولیهٔ یکسانی کمتر می‌باشد و باز هم زمان بیشتری لازم است تا انرژی ذخیره شده تلف شود.

بر حسب ثابت زمانی τ، پاسخ مدار RL سری را می‌توان به طور ساده به صورت زیر نوشت:

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

تمرین

۴ ـ ۵ ـ در یک مدار سری RL نسبتهای زیر را پیدا کنید:

(a) $i(2\tau)/i(0)$ (b) $i(4\tau)/i(2\tau)$ (c) t/τ اگر $i(t) = 0{,}1 i(\tau)$ (d) t/τ اگر $i(t) - i(\tau) = 0{,}1 i(0)$

جواب: ۰٫۱۳۵۳، ۰٫۱۳۵۳، ۳٫۳۰، ۰٫۷۶۰

۴ ـ ۵ مدار RL عمومی‌تر

تعمیم نتایج به دست آمده برای مدار RL سری به مداری که شامل هر تعداد مقاومت و یک سلف باشد، مشکل نیست. برای اینکار توجه خود را به دو ترمینال سلف معطوف می‌کنیم و مقاومت معادل را در این دو ترمینال به دست می‌آوریم. به این ترتیب مدار به صورت حالت سری

ساده کاهش پیدا می کند. به عنوان مثال مدار شکل ۶-۵ را در نظر بگیرید. مقاومت معادلیکه سلف می‌بیند عبارت است از:

$$R_{eq} = R_3 + R_4 + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

و در نتیجه ثاب زمانی برابر است با $\tau = L/R_{eq}$ و جریان سلف عبارت است از:

(۸) $i_L = i_L(0)e^{-t/\tau}$ و رابطه (۸) رامی توانیم جواب اساسی مسئله بنامیم.ممکن است ولتاژ یا جریانی به غیر از i_L مورد نیاز باشد، مانند جریان i_2 در مقاومت R_2. ما همیشه می‌توانیم قواین کیرشوف و قانون اهم را به قسمت مقاومتی مدار بدون هیچ مشکلی اعمال کنیم اما در این مدار تقسیم جریان، جواب سریعتری را ارائه می کند:

$$i_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} i_L(0)e^{-t/\tau}$$

همچنین ممکن است اتفاق بیفتد که ما مقدار اولیهٔ جریانی به غیر از جریان سلف را بدانیم. از آنجاییکه جریان یک مقاومت ممکن است تغییرات لحظه‌ای داشته باشد، ما لحظهٔ بعد از هر تغییری را که ممکن است در $t = 0$ روی دهد با استفاده از علامت 0^+ نشان خواهیم داد که به زبان ریاضی‌تر، $i_1(0^+)$ حد راست $i_1(t)$ است وقتیکه t به سمت صفر میل کند. بنابراین اگر مقدار اولیه i_1 را به صورت $i_1(0^+)$ به ما داده باشند، آنگاه بدیهی است که مقدار اولیهٔ i_2 عبارت خواهد بود از:

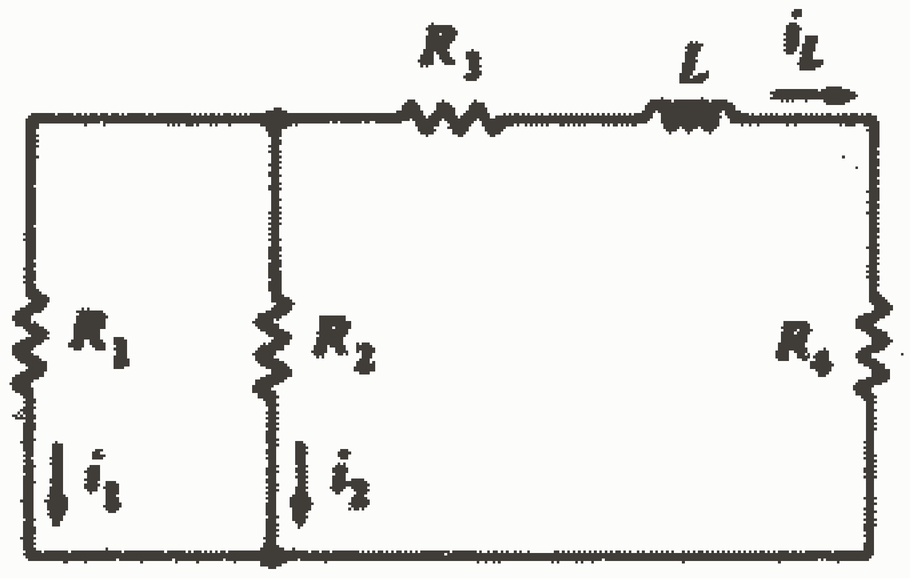
$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}$$

از این مقادیر، می‌توانیم مقدار اولیهٔ $i_L(0)$ (و یا $i_L(0^-)$, $i_L(0^+)$) را به دست آوریم:

$$i_L(0) = -[i_1(0^+) + i_2(0^+)] = -\frac{R_1 + R_2}{R_2} i_1(0^+)$$

و از آنجا برای i_2 خواهیم داشت:

$$i_2 = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}e^{-t/\tau}$$



شکل ۶ - ۵: یک مدار بدون منبع که شامل یک سلف و چند مقاومت است به وسیله تعیین ثابت زمانی $\tau = L/R_{eq}$ تحلیل شده است.

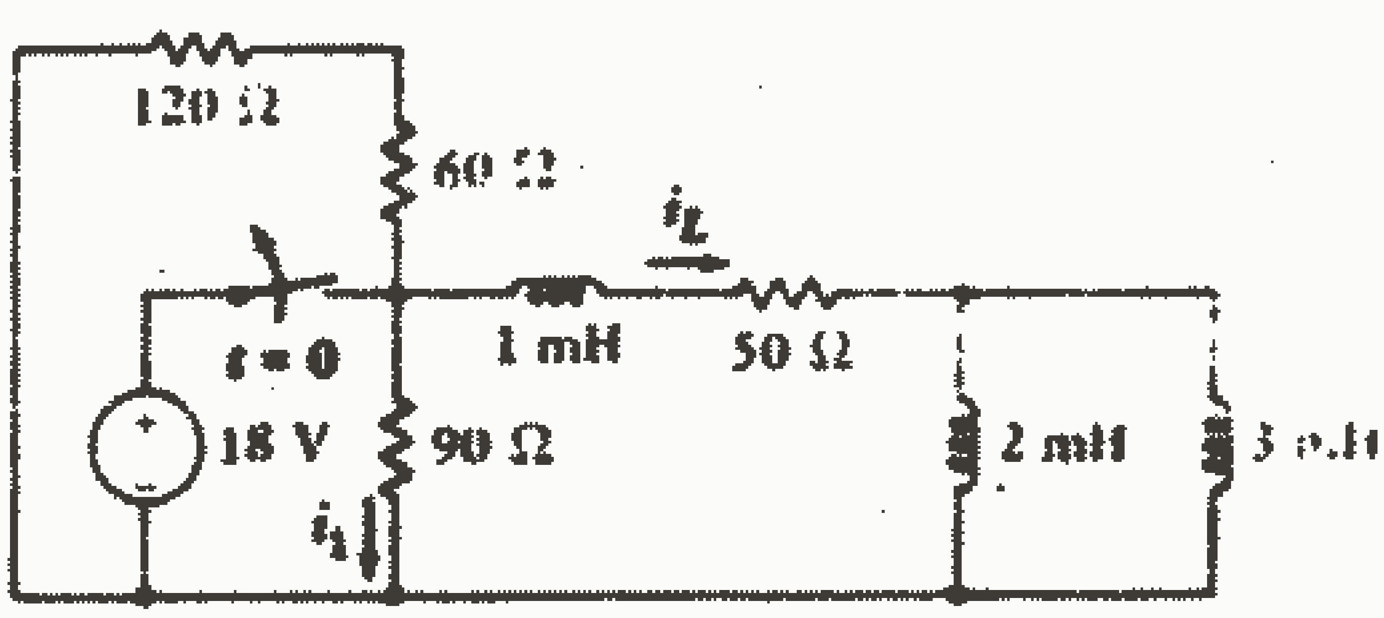
حال بیایید ببینیم که آیا می‌توانیم این رابطه را برای i_2 مستقیماً به دست آوریم یا خیر. چون جریان سلف به طور نمایی میرا می‌شود، پس هر جریانی در سرتاسر مدار همین رفتار تابعی را خواهد داشت. این امر وقتی روشن می‌شود که جریان سلف را به عنوان یک منبع جریان که به یک شبکهٔ مقاومتی اعمال شده است در نظر بگیریم. هر جریان یا ولتاژی در شبکهٔ مقاومتی باید دارای وابستگی زمانی یکسانی باشد. با استفاده از این ایده‌ها می‌توانیم i_2 را به صورت $i_2 = Ae^{-t/\tau}$ بیان کنیم که در آن $\tau = L/R_{eq}$ می‌باشد و A را باید از اطلاعاتی که از مقدار اولیهٔ i_2 داریم تعیین کنیم. چون $i_1(0^+)$ معلوم است، پس ولتاژ دو سر R_1 ، R_2 هم معلوم است و داریم:

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\, R_1/R_2 \rightarrow i_2 = i_1(0^+)\, R_1/R_2 e^{-t/\tau}$$

روشی مشابه مراحل فوق برای بسیاری از مسائل جواب سریعی را به دست می‌دهد. ابتدا یک وابستگی زمانی به صورت نمایی میرا برای پاسخ در نظر می‌گیریم و ثابت زمانی را به وسیله ترکیب مقاومتها پیدا می‌کنیم و جواب را با دامنهٔ مجهولی می‌نویسیم و سپس دامنه را از شرایط اولیهٔ معلومی که داریم تعیین می‌کنیم.

این روش را می‌توانیم برای مدارهایی که شامل یک مقاومت و چند سلف و یا مدارهای که شامل چند مقاومت و چند سلف می‌باشند هم اعمال کنیم زیرا با استفاده از ترکیب مقاومتها و سلفها می‌توانیم اینگونه مدارها را به صورت مدارهای ساده‌ای که فقط شامل یک سلف و یک مقاومت هستند تبدیل کنیم. به عنوان مثالی از اینگونه مدارها شکل ۷-۵ را در نظر می‌گیریم. بعد از $t = 0$، وقتیکه منبع ولتاژ قطع می‌شود، به سادگی می‌توان سلف و مقاومت معادل را محاسبه نمود:

$$L_{eq} = ۲×۳/۲+۳ +۱ = ۲{,}۲\text{mH} \;,\; R_{eq} = ۹۰(۶۰+۱۲۰)/(۹۰+۱۸۰) + ۵۰ = ۱۱۰\Omega$$



شکل ۷ - ۵: بعد از $t = 0$ این مدار به صورت یک مقاومت معادل ۱۱۰Ω سری با سلف $L_{eq} = ۲{,}۲\text{mH}$ درمی‌آید.

و ثابت زمانی هم عبارت است از:

$$\tau = L_{eq}/R_{eq} = 2.2\times10^{-3}/110 = 20\mu S$$

بنابراین فرم پاسخ طبیعی به صورت $Ae^{-50000t}$ می باشد. وقتیکه منبع مستقل وصل باشد i_L، $(t<0)$ برابر با $\frac{18}{50}$ و یا $0.36A$ می‌باشد در حالیکه i_1 برابر $\frac{18}{90}$ و یا $0.2A$ می‌باشد. در $t = 0^+$ جریان i_L هنوز هم باید $0.36A$ باشد اما i_1 به مقدار جدیدی که به وسیله $i_L(0^+)$ تعیین می‌شود، جهش خواهد کرد. بنابراین:

$$i_1(0^+) = -i_L(0^+)\frac{180}{270} = -0.24A$$

و در نتیجه داریم:

$$i_1 = -0.24e^{-50000t}(t>0)\ ,i_1 = 0.2(t<0)\ ,i_L = 0.36(t<0)\ ,i_L = 0.36e^{-50000t}(t>0)$$

در مدارهای ایده آل که در آنها یک حلقهٔ سلفی خالص، مانند سلفهای $2.3mH$ در شکل ۷-۵، وجود دارد، جریان ثابتی وقتیکه $t \to \infty$ در حلقه دور خواهد زد. جریان هر یک از این سلفها دیگر الزاماً به شکل $Ae^{-t/\tau}$ نیست، بلکه به فرم کلی‌تر $A_1+A_2e^{-t/\tau}$ می‌باشد. این حالت خاص نه چندان مهم در مسئله ۱۴ آخر همین فصل ارائه شده است.

ما تاکنون روش پیدا کردن پاسخ طبیعی هر مداری را که بتوان به وسیله یک مقاومت معادل سری با یک سلف معادل نشان داد، مورد توجه قرار داده‌ایم. مداری که شامل چند مقاومت و چند سلف باشد به طور کلی دارای فرمی نیست که بتوان مقاومتها و سلفها را به صورت عناصر معادل ترکیب نمود و در این صورت جمله‌ای به صورت تابع نمایی منفی منفرد و یا ثابت زمانی منفردی برای مدار وجود نخواهد داشت. در عوض به طور کلی چندین جملهٔ نمایی منفی وجود خواهد داشت که تعداد این جملات برابر با تعداد سلفهایی است که بعد از اینکه کلیهٔ ترکیبهای ممکنه برای سلفها انجام شد، در مدار باقی می‌مانند. پاسخ طبیعی این مدارهای پیچیده را بعداً مطالعه خواهیم کرد. یکی از روشهایی که در اواخر فصل ۱۳ خواهد آمد، بر اساس مفهوم فرکانس مختلط می‌باشد. موثرترین و کارآمدترین روشها بر اساس تبدیل لاپلاس و فوریه می‌باشد که در فصل ۱۸ و ۱۹ خواهد آمد.

تمرین

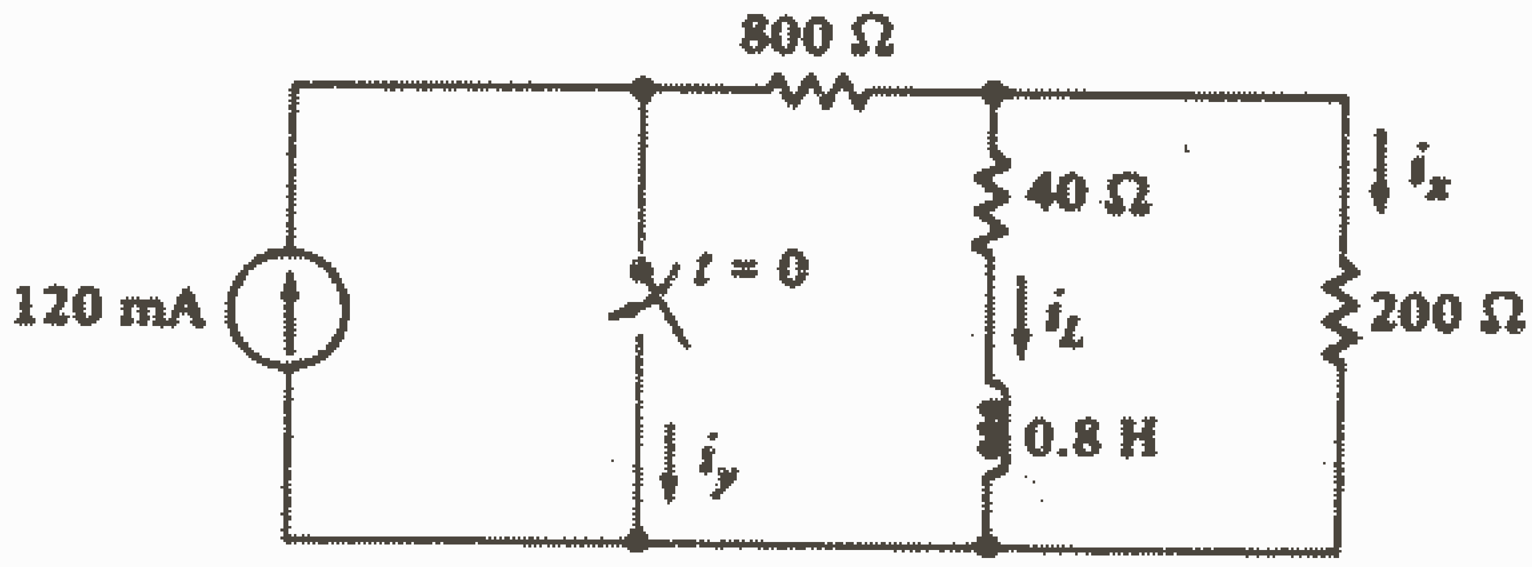
۵ ـ ۵ بعد از $t = 0$ هر یک از مدارهای شکل ۲-۵ بدون منبع می‌شوند. مقادیر i, v را در $t = 50\mu S$ در حالات زیر پیدا کنید: (a) در شکل 5-2a (b) در شکل 5-2b (c) در شکل 5-2c

جواب: ۲۸۳mA، ‎-۵٫۶۷V، ۲٫۷۱mA، ۰٫۳٤۰V، ‎-۱۸۲mA، ‎-۱٤٫۵٦V

٦ ـ ۵ ـ مقدار جریانهای زیر را در مدار شکل ۸-۵ در لحظهٔ $t = 5ms$ پیدا کنید:

(a) i_L (b) i_x (c) i_y

جواب: ۲۸٫۷mA، ‎-۲۲٫۹ ، ۱۱٤٫۳

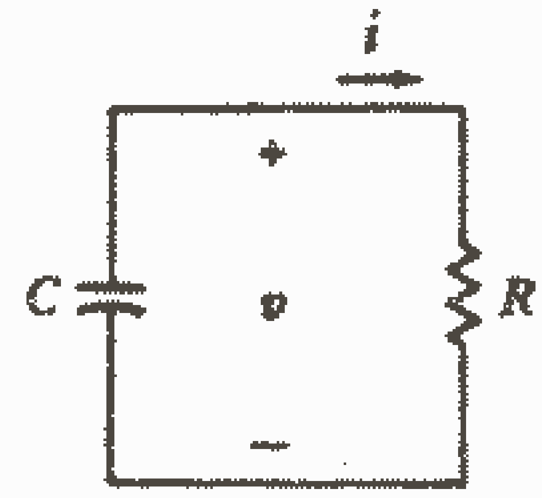


شکل ۸ ـ ۵: به تمرین ٦ ـ ۵ مراجعه کنید.

۵ ـ ۵ ـ مدار RC ساده

ترکیب سری یک مقاومت و خازن اهمیت عملی بیشتری نسبت به ترکیب سری سلف و مقاومت دارد. وقتیکه مهندسین در مورد استفاده از خازن و سلف کاملاً آزادی انتخاب داشته باشند مثلاً در شبکهٔ کوپلینگ یک تقویت‌کنندهٔ الکترونیکی و یا شبکه‌های جبران‌سازی سیستمهای کنترل اتوماتیک و یا سنتز یک شبکهٔ متعادل‌کنندهٔ مخابراتی، آنها حتی‌الامکان RC را به جای RL انتخاب می‌کنند. دلیل این انتخاب افت کمتر خازنهای واقعی، قیمت کمتر آنها، تقریب بهتری که مدل ریاضی آنها نسبت به عنصر واقعی ارائه می‌کند و اندازهٔ کوچکتر و وزن سبکتری است که خازنها در مدارهای مجتمع و هیبرید از خود نشان می‌دهند.

حال بیایید ببینیم تحلیل مدار RC موازی (و یا سری) چقدر به تحلیل مدار RL متناظر آن نزدیک است. این مدار RC در شکل ۹-۵ نشان داده شده است.



شکل ۹ ـ ۵: یک مدار RC موازی که در آن باید $v(t)$ را با توجه به اینکه $v(0) = V_0$ می‌باشد، تعیین کنیم.

با فرض $v(0) = V_0$ فرض می‌کنیم که انرژی اولیه‌ای در خازن ذخیره شده باشد. جریان کلی که از گره بالایی مدار خارج می‌شود باید مساوی صفر باشد، بنابراین:

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

که اگر طرفین را بر C تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \qquad (۹)$$

معادلهٔ (۹) فرم آشنایی دارد که معادلهٔ (۱) هم به همین فرم بود:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad (۱)$$

و نشان می‌دهد که اگر i را با v و L/R را با RC جایگزین کنیم همان معادله‌ای به دست می‌آید که قبلاً بررسی کردیم. این امر به خاطر این است که مدار RC که اکنون تحلیل می‌کنیم متناظر مدار RL است که قبلاً بررسی کردیم. این تناظر الزام می‌دارد که اگر مقاومت یک مدار با معکوس مقاومت مدار دیگر برابر باشد و L از نظر عددی برابر C باشد، $v(t)$ ، $i(t)$ دارای تابع یکسانی باشند بنابراین پاسخ مدار RL یعنی $i(t) = i(0)e^{-Rt/L} = I_0e^{-Rt/L}$ ما را قادر می‌سازد که بلافاصله بنویسیم:

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} = V_0e^{-t/RC} \qquad (۱۰)$$

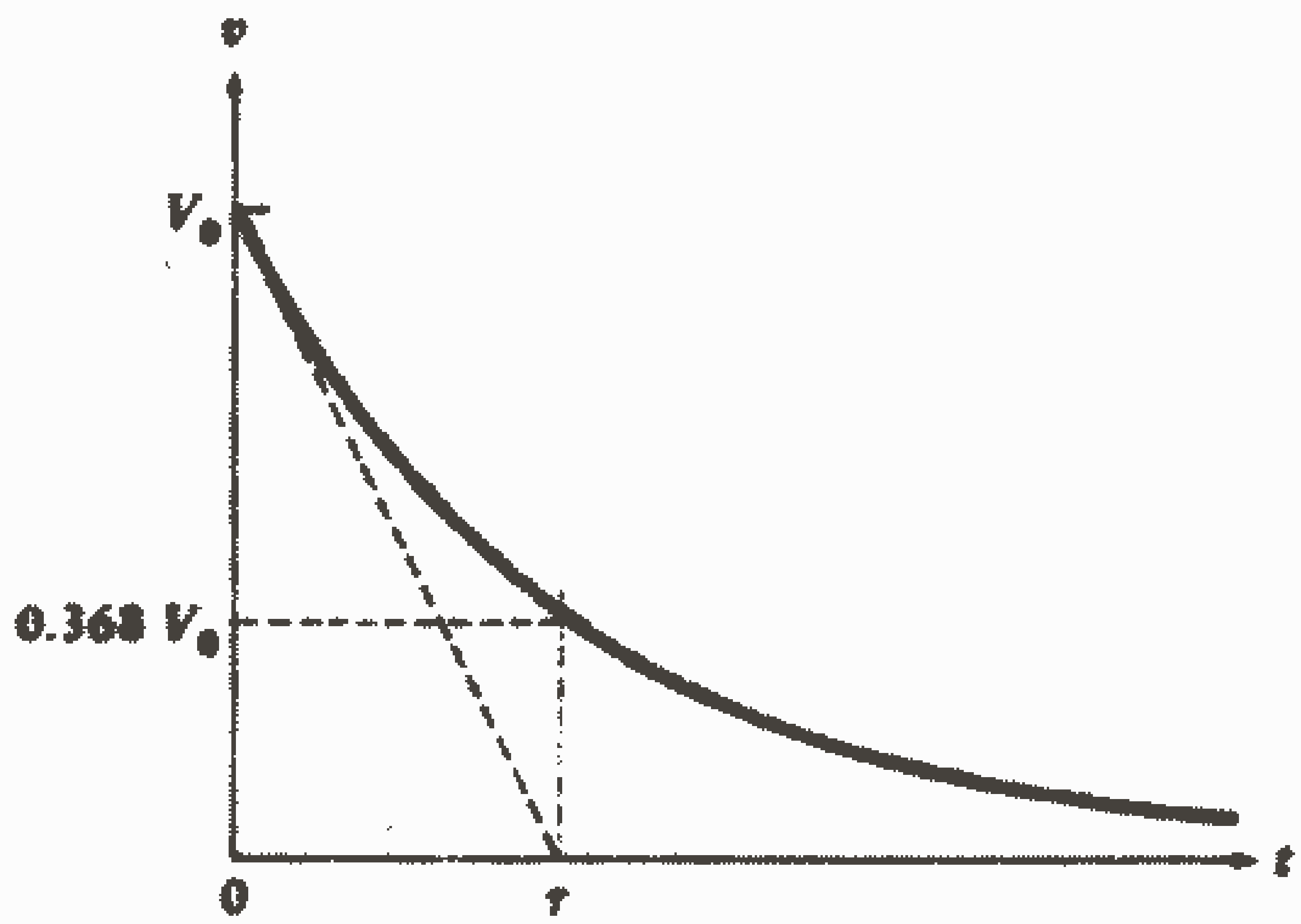
حال بیایید فرض کنیم که در مدار RC مان جریان i را به جای ولتاژ v به عنوان متغیر انتخاب می‌کردیم. در این صورت با اعمال قانون ولتاژ کیرشوف یک معادلهٔ انتگرالی به جای یک معادلهٔ دیفرانسیل به دست می‌آوریم یعنی: $\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt - v(t_0) + Ri = 0$ اگر چه با مشتق گیری از دو طرف این معادله به دست می‌آوریم: $\frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} = 0$ (۱۱) که با جایگزینی i به وسیله v/R خواهیم داشت: $\frac{v}{RC} + \frac{dv}{dt} = 0$ که این همان معادله (۹) می‌باشد. معادله (۱۱) را

می‌توانستیم به عنوان نقطهٔ شروعی به کار بریم اما در این صورت تناظربه طور طبیعی مشهود نمی‌شد.

حال بیایید ماهیت فیزیکی پاسخ ولتاژ مدار RC را که به وسیلهٔ معادلهٔ (۱۰) بیان شده است، مورد بحث قرار دهیم. در لحظهٔ $t = 0$ شرایط اولیه به دست می‌آید و وقتیکه t بی‌نهایت می‌شود ولتاژ به سمت صفر میل می‌کند. این نتیجهٔ اخیر با این تصور ما که اگر ولتاژی دو سر خازن باقی بماند آنگاه جریان انرژی به داخل مقاومت و اتلاف آن به صورت حرارت ادامه پیدا می‌کند، توافق دارد. بنابراین ولتاژ نهایی صفر الزامی است. ثابت زمانی مدار RC را می‌توان با استفاده از تناظر از رابطهٔ ثابت زمانی مدار RL به دست آورد و یا اینکه آن را به سادگی با توجه به زمانیکه پاسخ به ۳۶٫۸ درصد مقدار اولیه‌اش افت می‌کند به دست آورد. یعنی:

$$\tau/Rc = 1 \rightarrow \tau = RC \qquad (12)$$

آشنایی ما با تابع‌نمایی منفی و مفهوم ثابت زمانی τ ما را قادر می‌سازد که منحنی پاسخ شکل ۱۰ - ۵ را به راحتی رسم کنیم. مقادیر بزرگتر R یا C ثابت زمانی بزرگتر و اتلاف انرژی کندتر را ارائه می‌کند. مقاومت بزرگتر قدرت کوچکتری را به ازای ولتاژ معلومی در دو سرش تلف می‌کند و در نتیجه نیاز به زمان بزرگتری برای تبدیل انرژی ذخیره شده به حرارت دارد و خازن بزرگتر انرژی بیشتری را به ازای ولتاژ معلومی در دو سرش ذخیره می‌کند و باز هم نیاز به زمان بزرگتر برای اتلاف این انرژی اولیه دارد.



شکل ۱۰ - ۵: ولتاژ خازن $v(t)$ در مدار RC موازی به صورت تابعی از زمان رسم شده است. مقدار اولیهٔ $v(t)$ برابر V_0 فرض شده است.

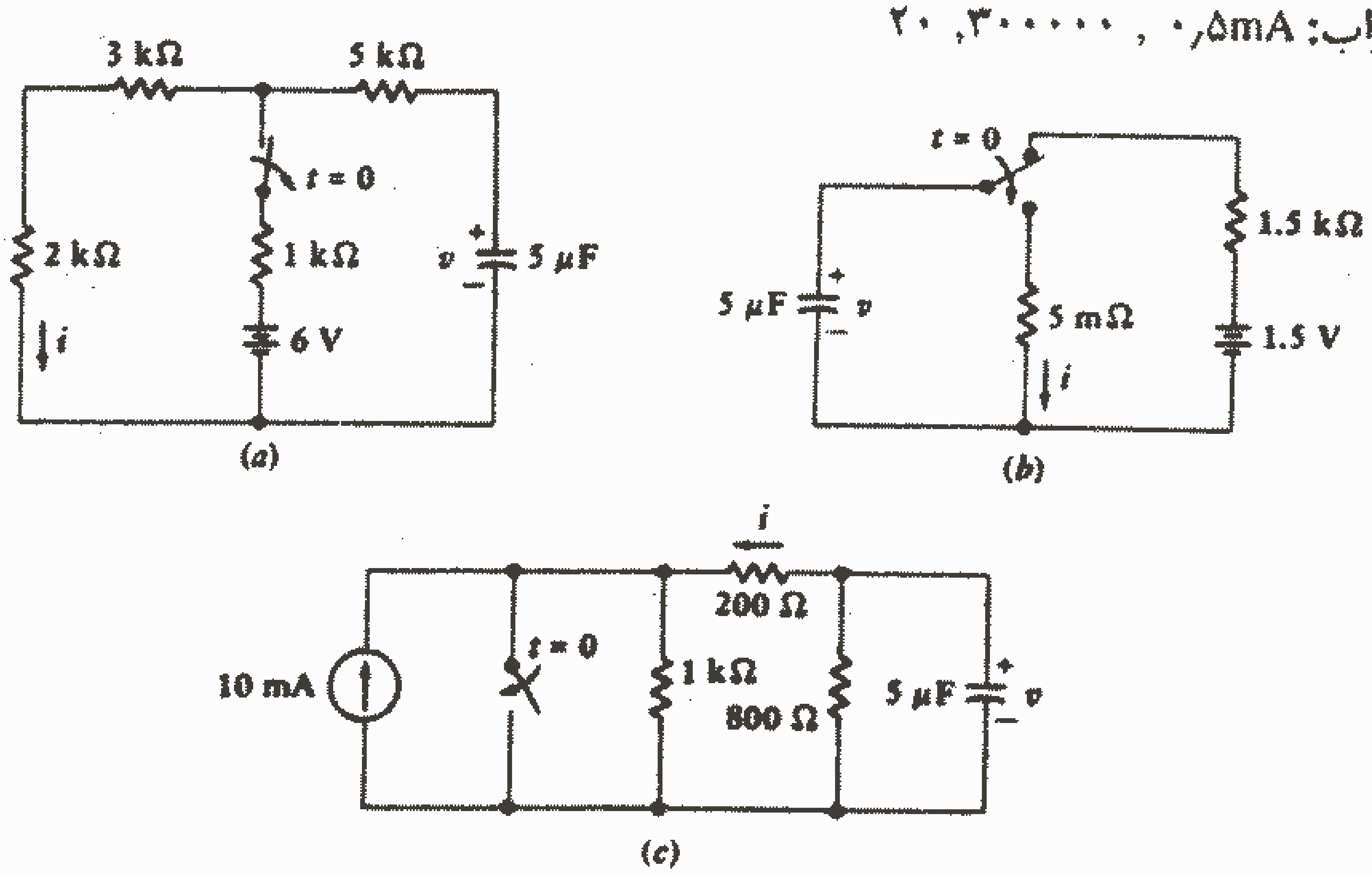
تمرین

۷ ـ ۵ ـ $v(0^+)$ را برای هر یک از مدارهای شکل ۱۱-۵ تعیین کنید.

جواب: ۵V ، ۱٫۵ ، ٤

۸ ـ ۵ ـ $i(0^+)$ را برای هر یک از مدارهای شکل ۱۱-۵ پیدا کنید.

جواب: ۰٫۵mA ، ۳۰۰۰۰۰، ۲۰



شکل ۱۱ - ۵: به تمرینات ۷-۵ و ۸-۵ مراجعه کنید.

۹ ـ ۵ ـ مقادیر عناصر در شکل ۹-۵ عبارتند از: $R = ۵۰۰\Omega$، $C = \%۲\mu F$. اگر در لحظهٔ $t = ۵\mu S$، $v = ۲۰V$ باشد، پیدا کنید: (a) $v(۱۰\mu S)$، (b) قدرتی که به وسیله خازن در $t = ۱۲\mu S$ تحویل داده می‌شود. (c) زمانی که در آن انرژی ذخیره شده در خازن برابر با ۱٫۵ μJ می‌شود.

جواب: ۱۲٫۱۳V ، ۱۹۷٫۳mW، ۹٫۹۰µS

۶ ـ ۵ ـ مدار RC کلی‌تر

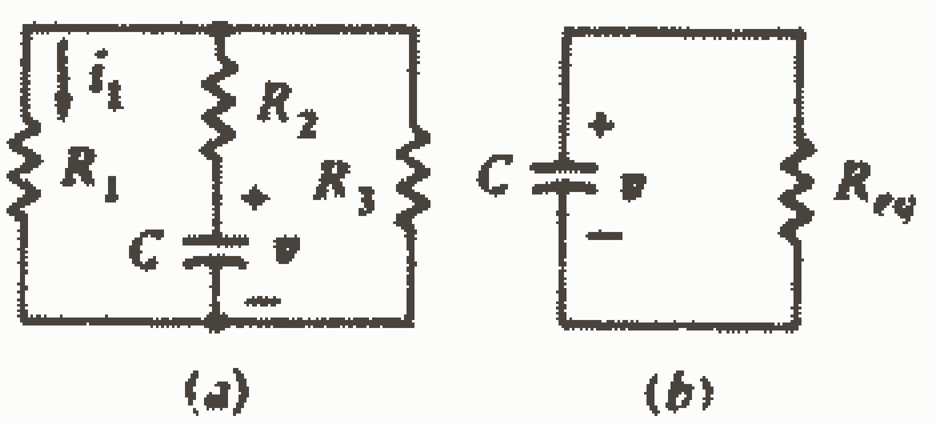
اکثر مدارهای RC که ما مایلیم پاسخ طبیعی آنها را پیدا کنیم حاوی بیش از یک مقاومت منفرد و خازن منفرد می‌باشند. درست مانند کاری که برای مدارهای RL انجام دادیم، ابتدا

حالاتی را که در آن می‌توان مدار داده شده را به مداری شامل یک مقاومت معادل و یک خازن معادل تقلیل داد، بررسی می‌کنیم.

بیایید فرض کنیم که با مداری که حاوی فقط یک خازن و تعداد زیادی مقاومت باشد، مواجهیم. می‌توان شبکهٔ مقاومتی دو ترمینالی را که در دو سر خازن می‌باشد با یک مقاومت معادل جایگزین نمود و فوراً رابطهٔ ولتاژ دو سر خازن را نوشت. به عنوان مثال، مدار شکل ۵-۱۲a را می‌توان به صورت مدار شکل ۵-۱۲b ساده نمود، که با استفاده از آن می‌توان نوشت: $v = V_0e^{-t/R_{eq}C}$ که در آن داریم: $v(0) = V_o$. $R_{eq} = R_2 + R_1R_3/R_1+R_3$ هر جریان و ولتاژی در قسمت مقاومتی مدار باید دارای فرم $Ae^{-t/R_{eq}C}$ باشد که در آن A مقدار اولیهٔ آن ولتاژ یا جریان می‌باشد بنابراین جریان R_1 را به عنوان مثال می‌توان به صورت $i_1 = i_1(0^+)e^{-t/\tau}$ بیان نمود که در آن داریم: $\tau = (R_2+R_1R_3/R_1+R_3)C$ و $i_1(0^+)$ را هم می‌توان از شرایط اولیه تعیین نمود. می‌توانیم تصور کنیم که خازن به وسیله یک منبع مستقل dc، $v(0)$، جایگزین شود، بنابراین داریم:

$$i_1(0^+) = \frac{v(0)}{R_2 + R_1R_3/(R_1 + R_3)} \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

که با ترکیب نمودن این نتایج، پاسخ به دست می‌آید.



شکل ۱۲ ـ ۵: (a) مداری که شامل یک خازن و چند مقاومت می‌باشد. (b) مقاومت‌ها به وسیله یک مقاومت معادل منفرد جایگزین شده‌اند که به صورت ثابت زمانی مدار آشکار می‌باشد.

حالت خاص دیگر مدارهایی هستند که شامل یک مقاومت و چندین خازن می‌باشند. ولتاژ مقاومت را می‌توان به سادگی با تعیین مقدار خازن معادل و تعیین ثابت زمانی به دست آورد. یک بار دیگر عناصر کامل از نظر ریاضی، ممکن است ما را به پدیده‌ای رهنمون شوند که در یک

مدار فیزیکی وجود ندارد. در اینجا دو خازن سری ممکن است دارای ولتاژهای مساوی و مختلف العلامه باشند ولی هنوز هم ولتاژ دو سر ترکیب، صفر باشد. بنابراین فرم کلی ولتاژ دو سر هر یک عبارت است از $A_1+A_2e^{-t/\tau}$ در حالیکه ولتاژ دو سر ترکیب سری $Ae^{-t/\tau}$ می‌باشد. مثالی برای این وضعیت در مسئله ۲۷ آخر همین فصل ارائه شده است.

بعضی از مدارهای حاوی تعدادی مقاومت و تعدادی خازن را می‌توان با یک مدار معادل که فقط حاوی یک مقاومت و یک خازن باشد جایگزین نمود و لازم است که مدار اصلی به گونه‌ای باشد که بتوان آن را به دو قسمت تقسیم نمود که یک قسمت شامل مقاومتها و قسمت دیگر شامل خازنها باشد و دو قسمت فقط به وسیله دو هادی ایده آل به هم وصل شده باشند. این امر به طور عمومی امکان ندارد.

مدارهای پیچیده‌تر را که نتوان به مدارهای RC سری ساده تقلیل داد، در فصول ۱۳ و ۱۸ و ۱۹ مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

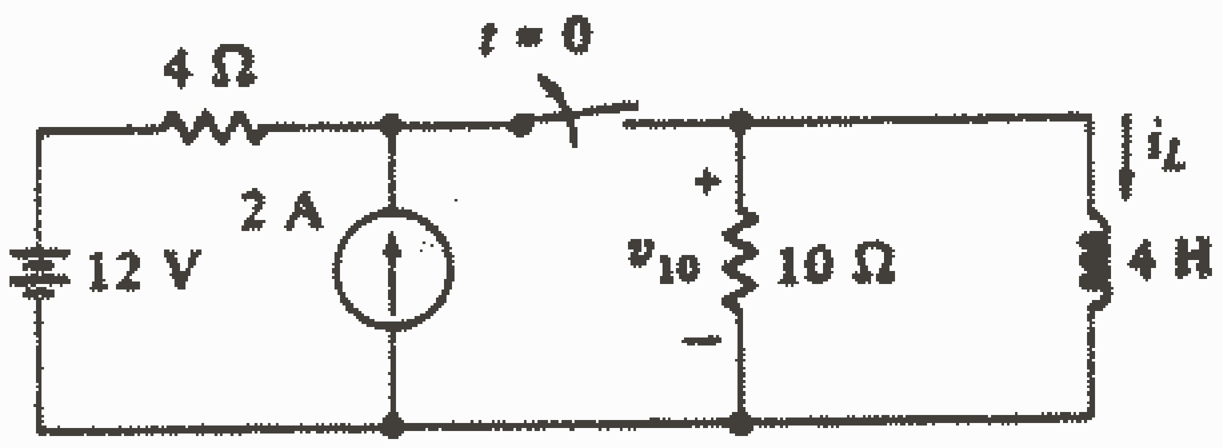
تمرین

۱۰ ـ ۵ ـ در مدارهای زیر مقادیر i, v را پیدا کنید: (a) شکل 5-11a در $t = \%3S$ (b) شکل 5-11b در $t = 0{,}1\mu S$ (C) شکل 5-11c در $t = 1mS$

جواب: 2,47V, 0,274mA, 0,0275V, 5,49A, 1,146V, 5,73mA

مسائل

۱ ـ در شکل ۱۳-۵ کلید پس از مدت طولانی بسته بودن، در لحظهٔ $t = 0$ باز می‌شود: (a) $i_L(0^+)$, $w_L(0^+)$ را پیدا کنید. (b) $i_L(t)$ را پیدا کنید. (c) $v_{10}(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۱۳ ـ ۵: به مسئله ۱ و ۱۸ مراجعه کنید.

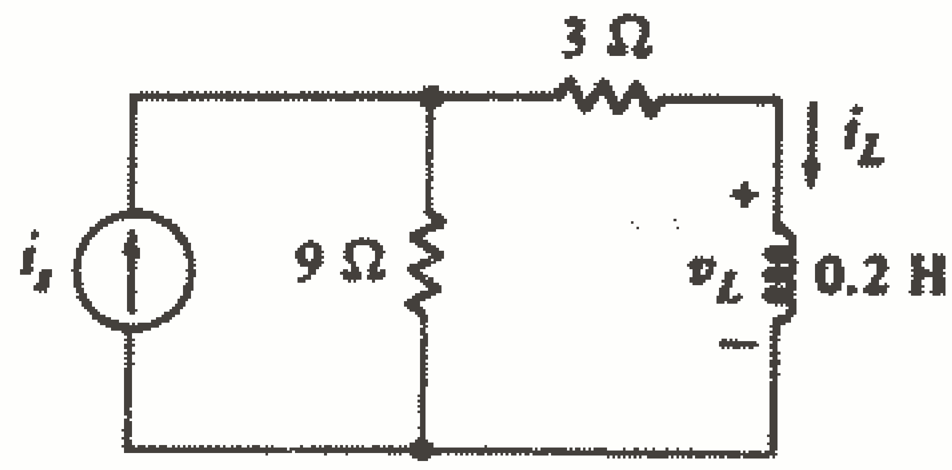
۲ ـ در شکل ۱۴-۵ فرض کنید $i_s = 12A$ برای $t<0$ و صفر باشد برای $t>0$.

(a) $i_L(t)$ را پیدا کنید و آن را برای $-\%1<t<\%5S$ رسم کنید.

(b) $v_L(t)$ را پیدا کنید و آن را برای همان فاصلهٔ زمانی رسم کنید.

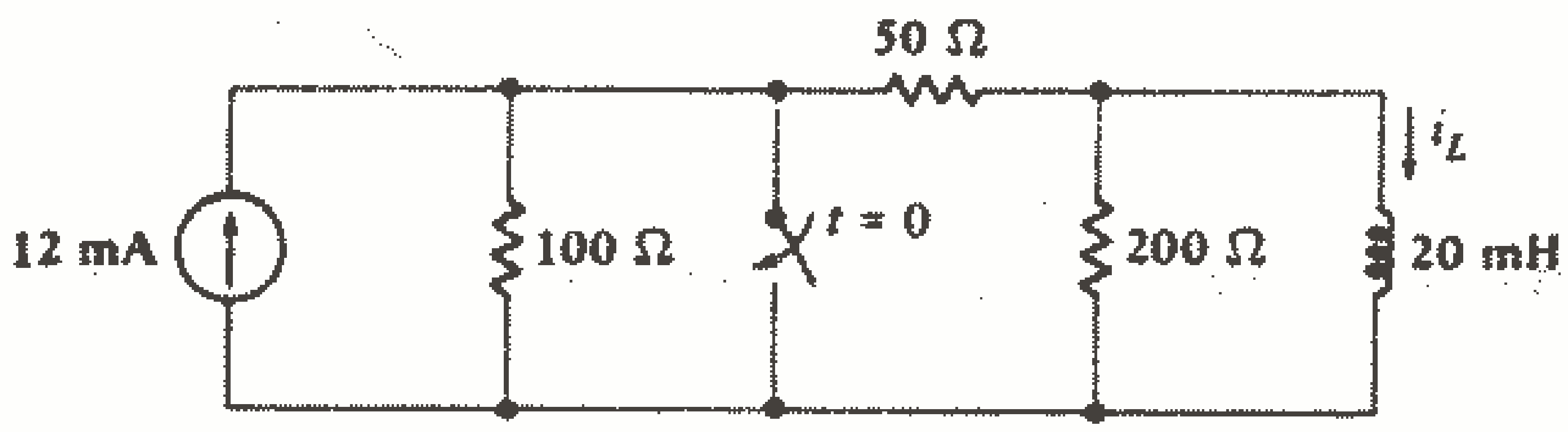
۳ ـ (a) یک سلف ۰٫۲H با یک مقاومت ۲۵Ω موازی می‌باشد. اگر $i_L(0)$ = ۵A آنگاه $i_L(t)$ را پیدا کنید و همچنین مقدار t ، $t = t_1$ را که به ازای آن i_L = ۱A می‌شود، پیدا کنید.

(b) در این لحظه یک مقاومت ۵Ω به طور موازی با مقاومت ۲۵Ω وصل می‌شود. رابطهٔ $i_L(t)$ را برای $t<t_1$ بنویسید و مقدار t ، $t = t_2$، را که در آن i_L = ۱mA را پیدا کنید.



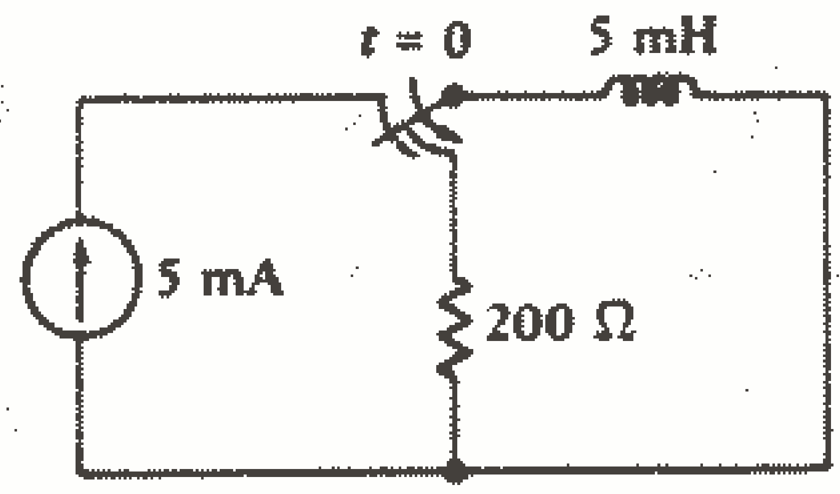
شکل ۱٤ ـ ۵: به مسئله ۲ مراجعه کنید.

٤ ـ برای مدار شکل ۱۵ـ۵، $i_L(t)$ را پیدا کنید و آن را برای $t>$۰ رسم کنید.



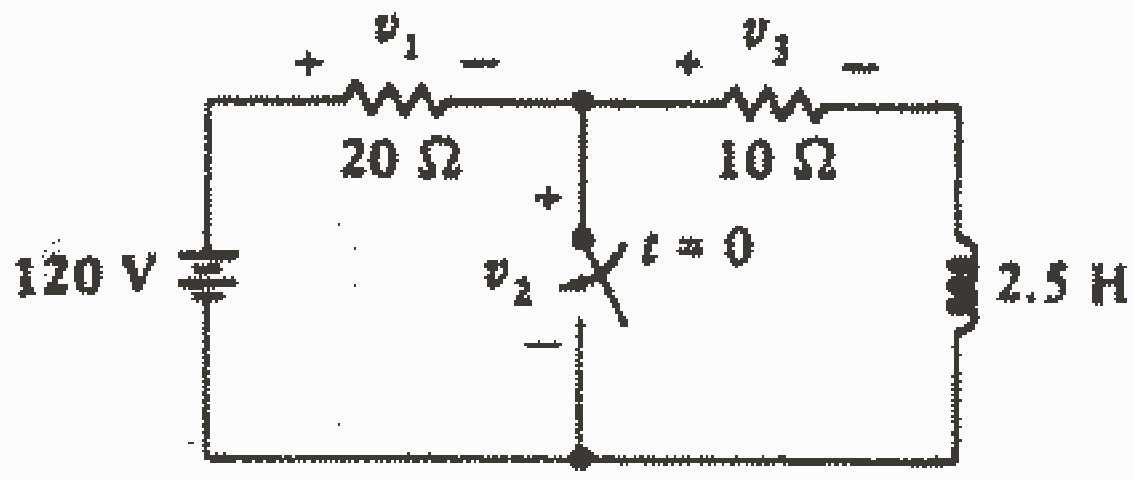
شکل ۱۵ ـ ۵: به مسئله ٤ مراجعه کنید.

۵ ـ انرژی ذخیره شده در سلف شکل ۱٦ـ۵ را بیست میکروثانیه بعد از تغییر وضعیت کلید پیدا کنید.



شکل ۱٦ ـ ۵: به مسئله ۵ مراجعه کنید.

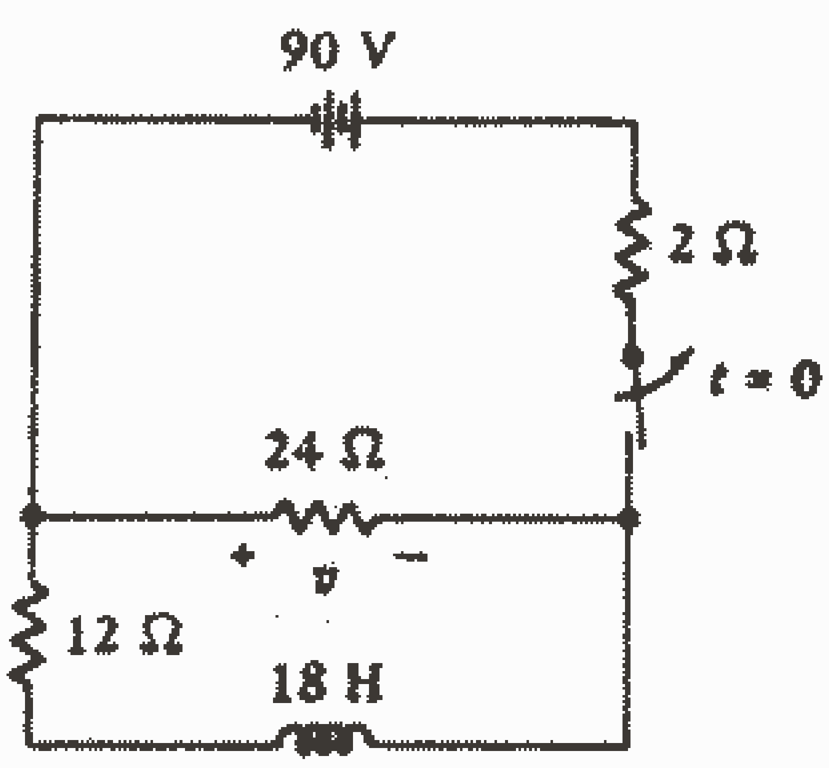
۶ ـ (a) در شکل ۱۷ـ۵ جریان سلف را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید و منحنی‌های v_1 و v_2 و v_3 را نسبت به زمان برای $-1<t<1S$ رسم کنید، اگر کلید دیگری یک مقاومت ۱۰Ω دیگر را با مقاومت ۱۰Ω اولیه در لحظهٔ $t = 0{,}25S$ موازی کند.



شکل ۱۷ ـ ۵: به مسئله ۶ مراجعه کنید.

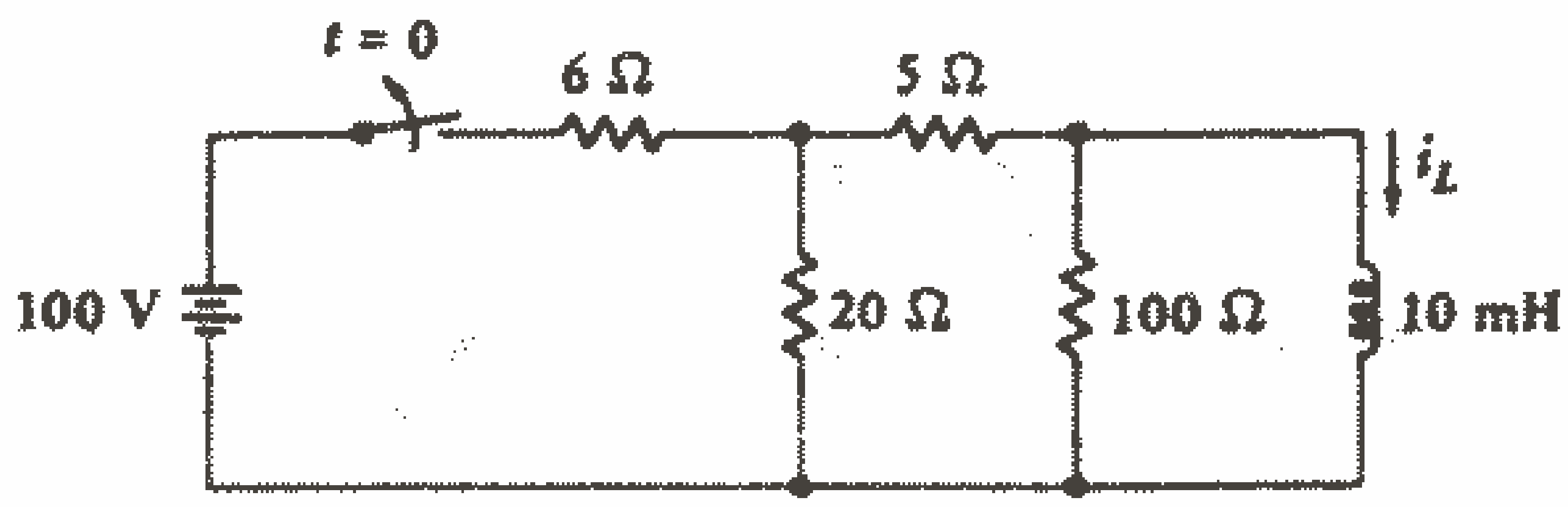
۷ ـ یک مدار RL بدون منبع شامل یک سلف ۵۰H می‌باشد که در یک مقاومت ۲۰Ω تخلیه می‌شود. دامنه جریان سلف در $t = 2S$ برابر ۱۸A می‌باشد. (a) چه زمانی انرژی ذخیره شده در سلف دو برابر مقدار آن در $t = 2S$ می‌باشد؟ (b) در چه لحظه‌ای قدرت تلف شده در مقاومت برابر ۱KW می‌باشد؟

۸ ـ کلید مدار شکل ۱۸ـ۵ در لحظهٔ $t = 0$ باز می‌شود. (a) $v(t)$ را برای $t>0$ پیدا کنید (b) $v(t)$ را برای $-1<t<1S$ رسم کنید.



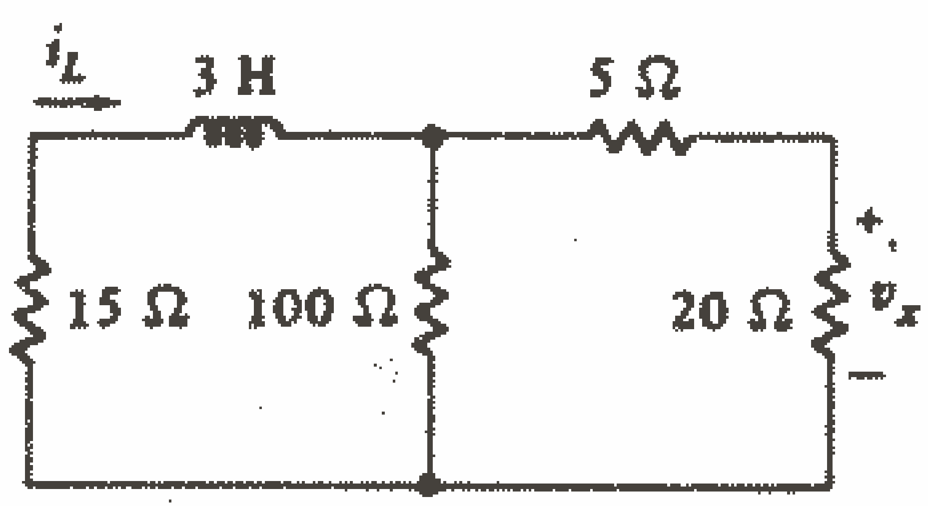
شکل ۱۸ ـ ۵: به مسئله ۸ مراجعه کنید.

۹ ـ در شکل ۱۹-۵ باتری در $t = 0$ قطع می‌شود. (a) $i_L(0^-)$ را پیدا کنید. (b) $i_L(0^+)$ را پیدا کنید. (c) مقاومت معادل تونن را که به وسیلهٔ سلف در زمان $t>0$ دیده می‌شود پیدا کنید. (d) τ را پیدا کنید. (e) $i_L(t)$ را برای $t>0$ پیدا کنید.



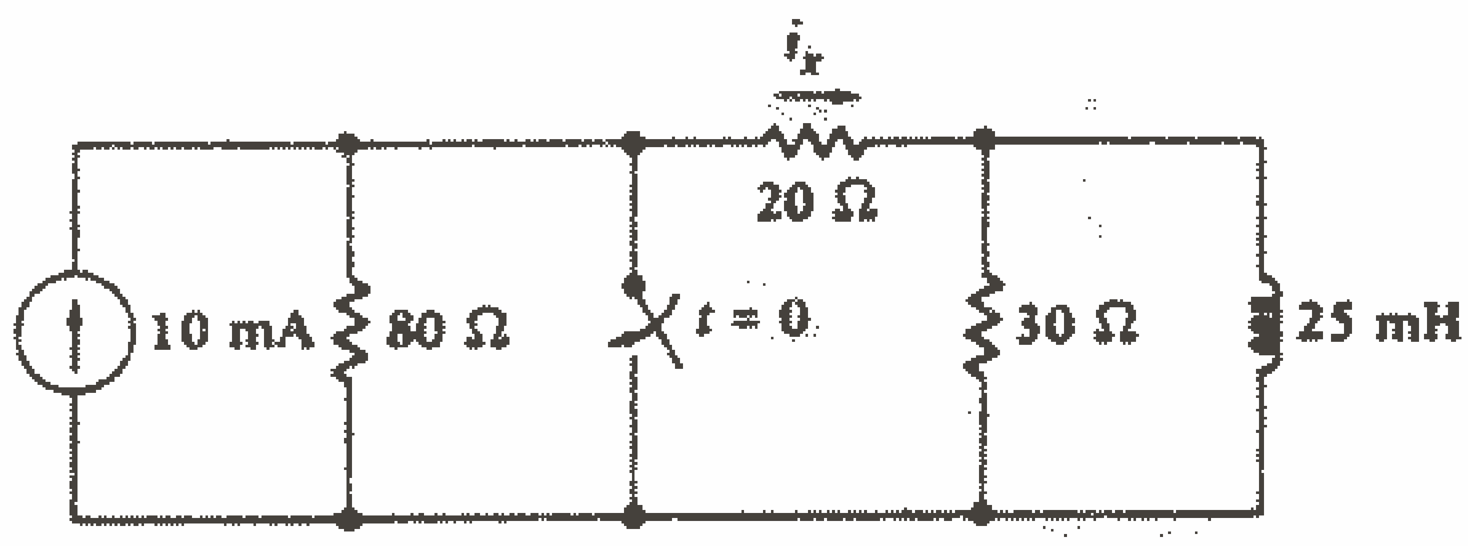
شکل ۱۹ ـ ۵: به مسئله ۹ مراجعه کنید.

۱۰ ـ در شکل ۲۰-۵ فرض کنید $i_L(0) = ۱۰A$. $v_x(t)$ را برای $t>0$ پیدا کنید و آن را در فاصلهٔ زمانی سه ثابت زمانی رسم کنید.



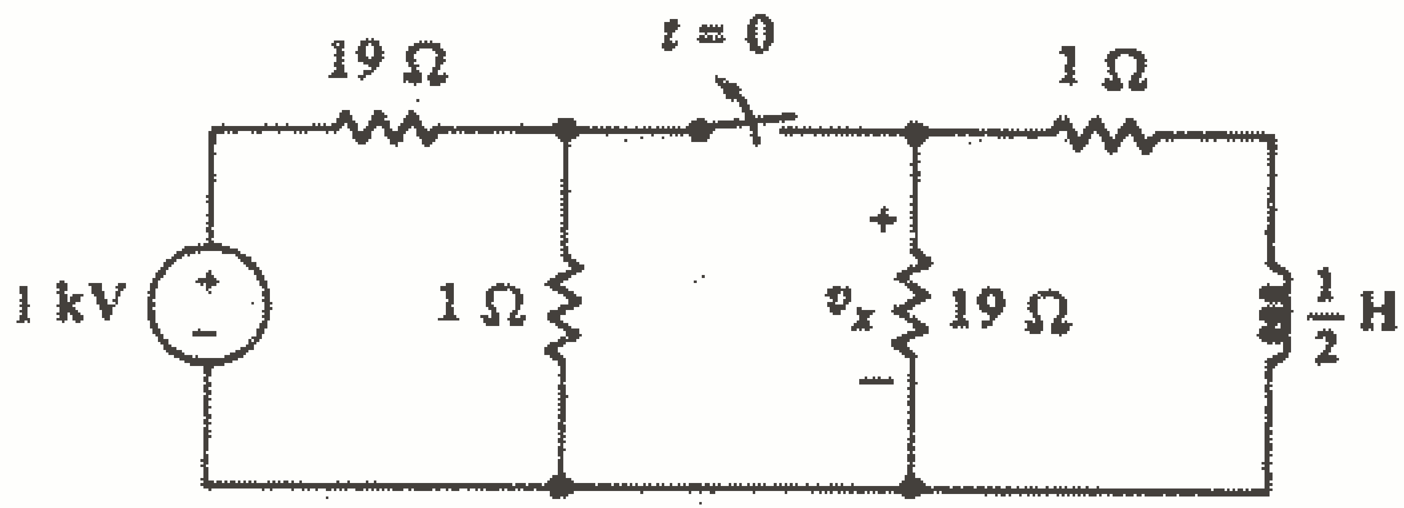
شکل ۲۰ ـ ۵: به مسئله ۱۰ مراجعه کنید.

۱۱ ـ به شکل ۲۱-۵ مراجعه کنید و $i_x(t)$ را برای همهٔ زمانها پیدا کنید. مقدار عددی آن را در لحظات $t = -2,\ 0^-,\ 0^+,\ 2,\ 4\ ms$ پیدا کنید.



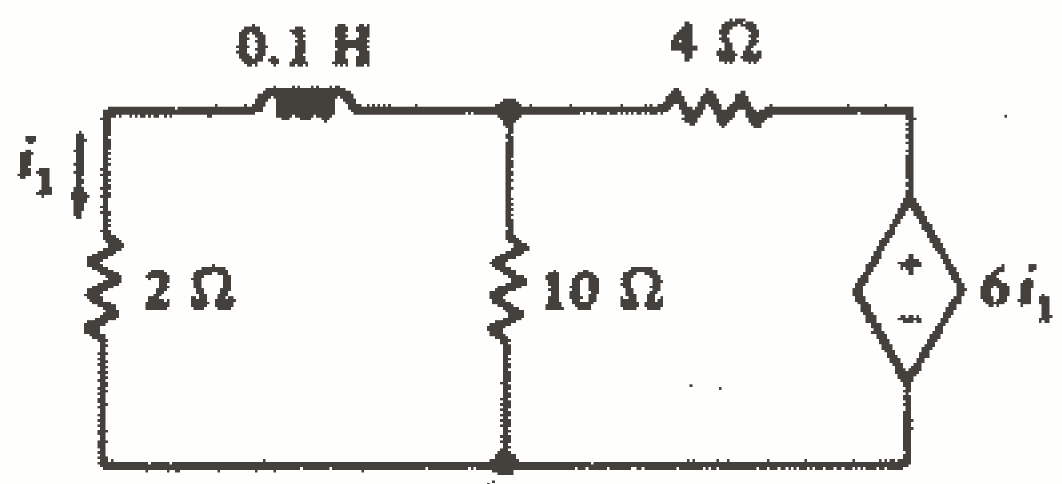
شکل ۲۱ ـ ۵: به مسئله ۱۱ مراجعه کنید.

۱۲ ـ کلید شکل ۲۲ ـ ۵ در ۰ = t بعد از مدت طولانی بسته بودن، باز می‌شود. v_x را در $t = -10, 0^-, 0^+, 10, 20\,ms$ پیدا کنید.



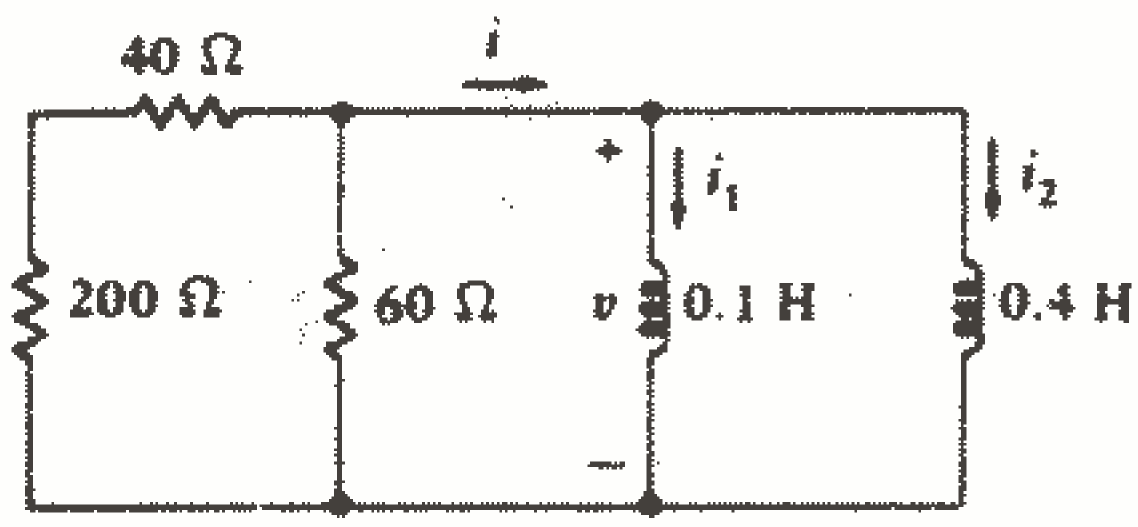
شکل ۲۲ ـ ۵: به مسئله ۱۲ مراجعه کنید.

۱۳ ـ $i_1(t)$ را برای $t > 0$ در شکل ۲۳-۵ پیدا کنید، به شرط اینکه $i_1(0) = 5A$.



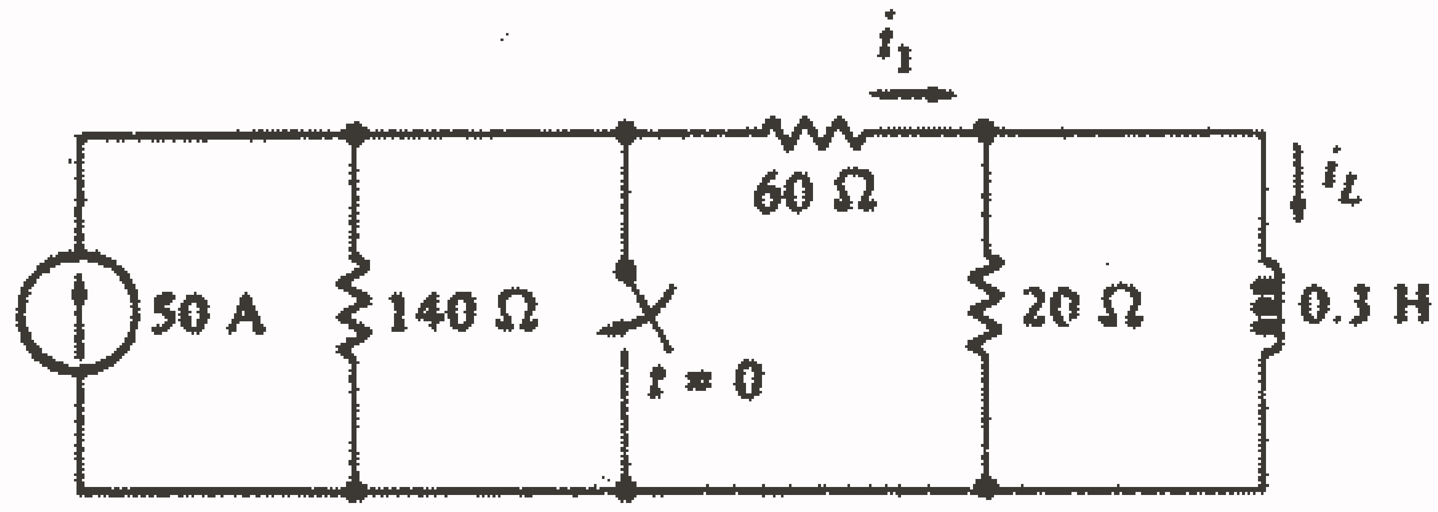
شکل ۲۳ ـ ۵: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

۱٤ ـ مدار شکل ۲٤-۵ شامل دو سلف موازی است بنابراین فرصتی برای یک جریان به دام افتاده وجود دارد که در حلقهٔ سلفی دور بزنند. فرض کنید $i_2(0^-) = 10A$ و $i_1(0^-) = 20A$ باشد. (a) $i_1(0^+)$ ، $i_2(0^+)$ ، $i(0^+)$ را پیدا کنید. (b) ثابت زمانی τ را برای $i(t)$ پیدا کنید. (c) $i(t)$ را به ازای $t > 0$ پیدا کنید. (d) $v(t)$ را پیدا کنید. (e) $i_1(t)$ ، $i_2(t)$ را از $v(t)$ و مقادیر اولیه به دست آورید. (f) نشان دهید که انرژی ذخیره شده در $t = 0$ برابر است با مجموع انرژی تلف شده در شبکهٔ مقاومتی بین $t = 0$ ، $t = \infty$ و انرژی ذخیره شده در سلفها در $t = \infty$.



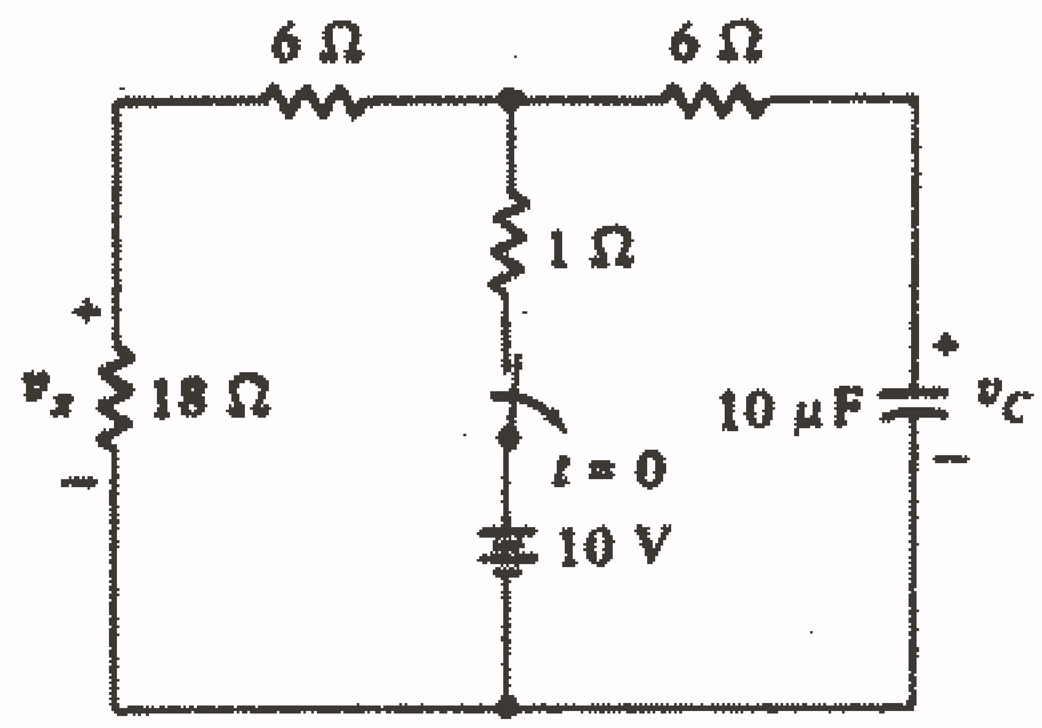
شکل ۲٤ ـ ۵: به مسئله ۱٤ مراجعه کنید.

۱۵ - i_L، i_1 را در مدار شکل ۲۵-۵ در لحظات $t = -10\ ,\ 0^-\ ,\ 0^+\ ,\ 10,\ 20ms$ محاسبه کنید.



شکل ۲۵ - ۵: به مسئله ۱۵ مراجعه کنید.

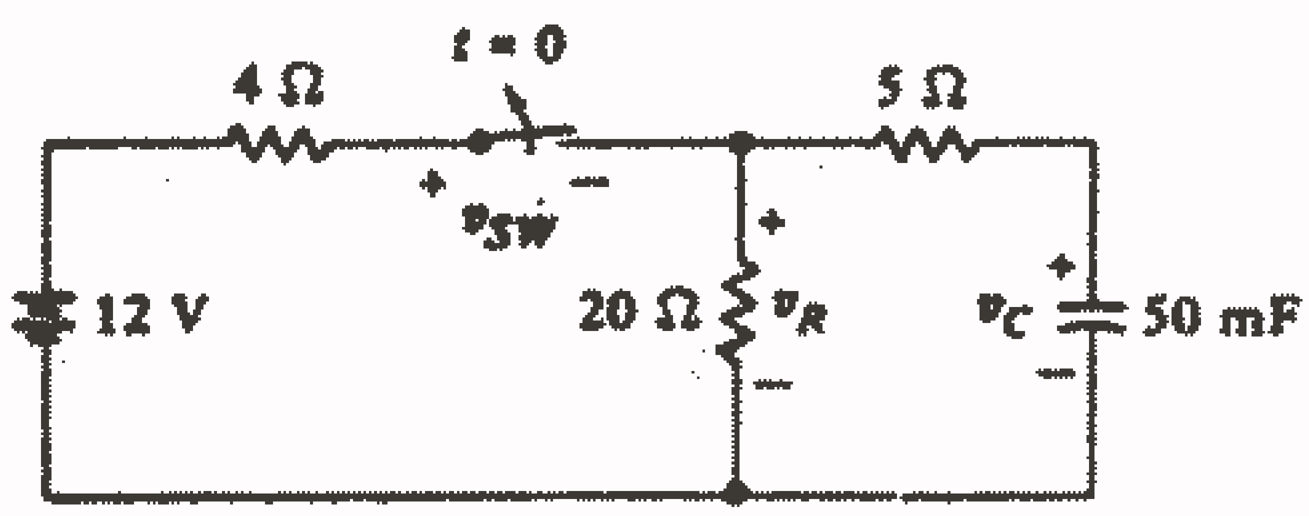
۱۶ - کلید شکل ۲۶-۵ در لحظهٔ $t = 0$ بعد از مدت طولانی بسته بودن، باز می‌شود. $v_C(t)$ و $v_x(t)$ را در فاصله زمانی $-0/5 < t < 1mS$ در یک دستگاه مختصات رسم کنید.



شکل ۲۶ - ۵: به مسئله ۱۶ مراجعه کنید.

۱۷ - با مراجعه به مدار شکل ۲۷-۵ مقادیر زیر را در لحظهٔ $t = 1S$ تعیین کنید:

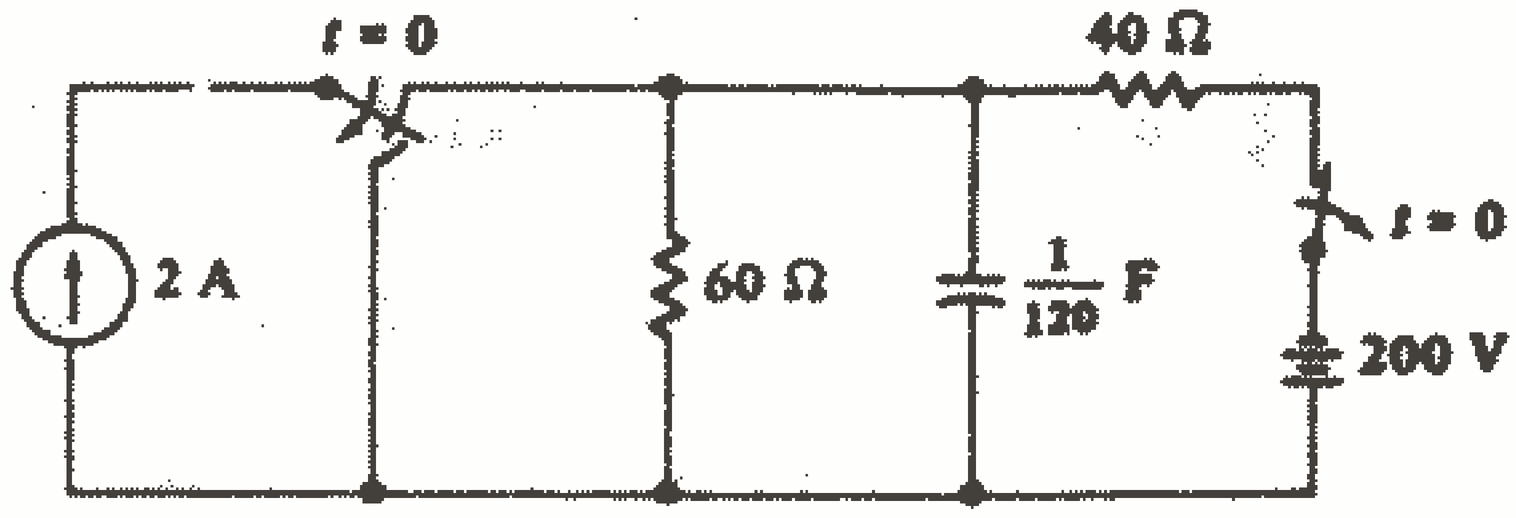
(a) v_c، (b) v_R (c) v_{sw}



شکل ۲۷ - ۵: به مسئله ۱۷ مراجعه کنید.

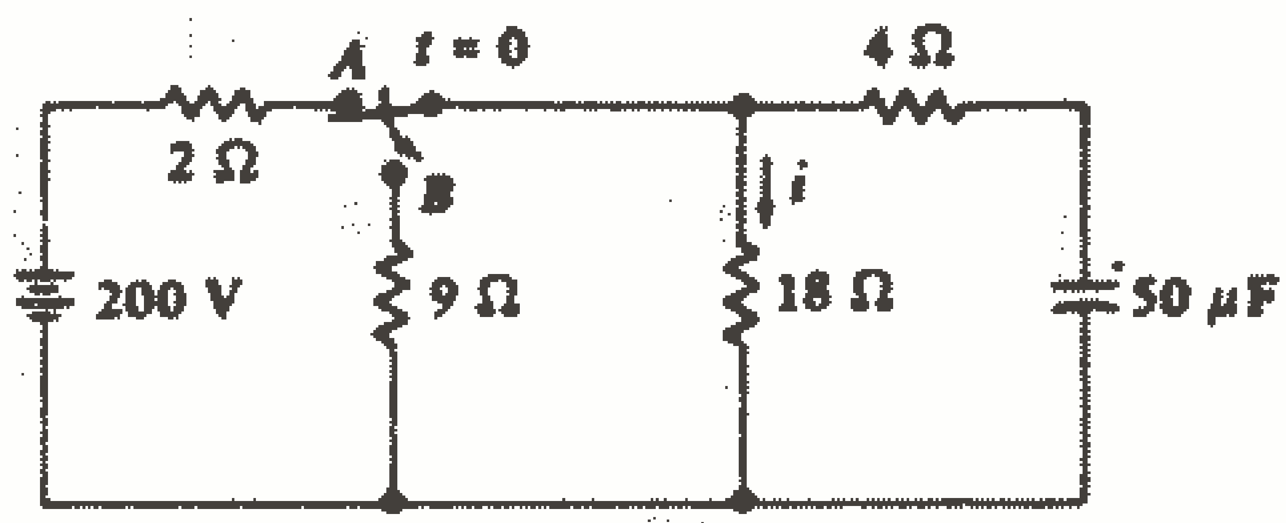
۱۸ ـ متناظر دقیق مدار مسئله ۱ را ایجاد کنید و متناظر دقیق صورت مسئله را بنویسید و سپس مسئله جدید را حل کنید.

۱۹ ـ در لحظهٔ ۰ = t، کلید سمت چپ مدار شکل ۲۸-۵ پایین می‌افتد و به طور هم‌زمان کلید سمت راست باز می‌شود. کل باری را که از ترمینال پایین خازن در فاصلهٔ زمانی ۱S > t > ۰٫۳ خارج می‌شود، پیدا کنید.



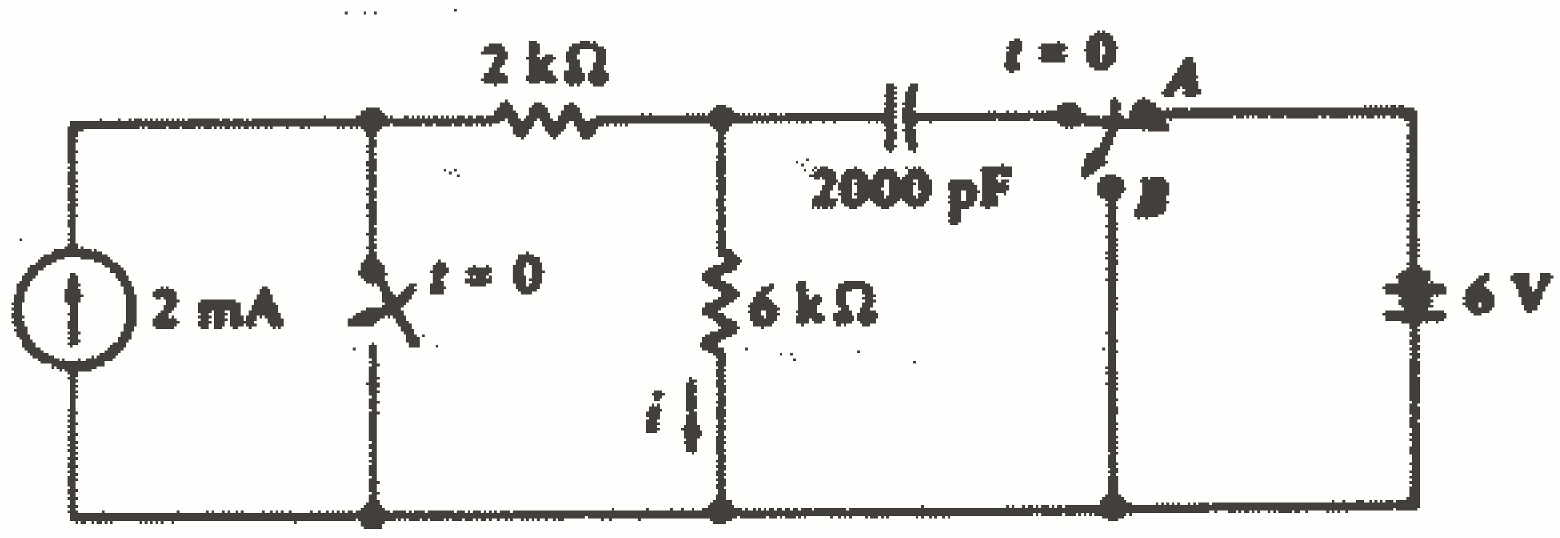
شکل ۲۸ ـ ۵: به مسئله ۱۹ مراجعه کنید.

۲۰ ـ در مدار شکل ۲۹-۵ کلید در لحظهٔ ۰ = t از A به B می‌رود. رابطهٔ i(t) را پیدا کنید و آن را در فاصلهٔ زمانی ۲ms > t > ۲- رسم کنید.



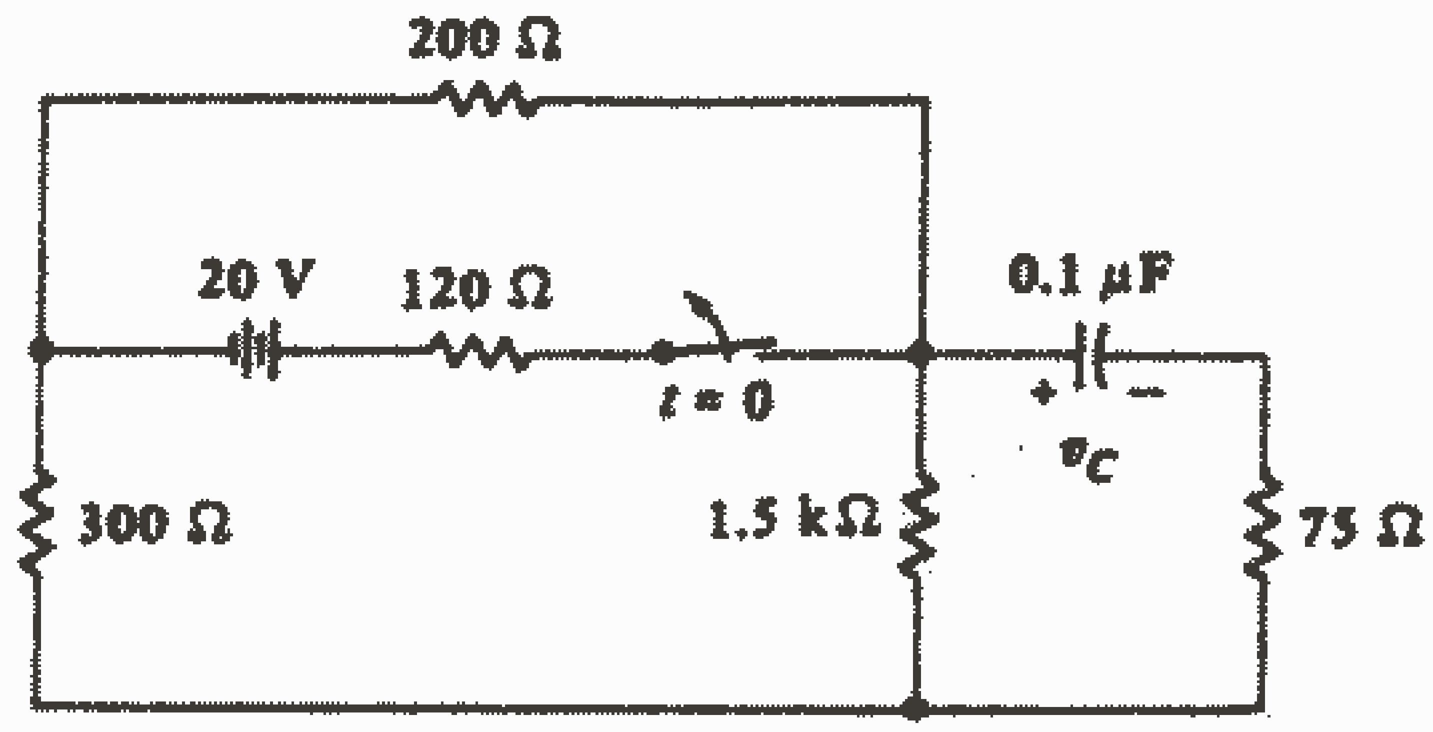
شکل ۲۹ ـ ۵: به مسئله ۲۰ مراجعه کنید.

۲۱ ـ در لحظهٔ ۰ = t، کلید سمت چپ در شکل ۳۰-۵ بسته می‌شود در حالیکه کلید سمت راست از A به B انتقال می‌یابد. در لحظات ۲μS+ , ۲μS- = t پیدا کنید: (a)i (b) سرعت خروج انرژی از خازن.



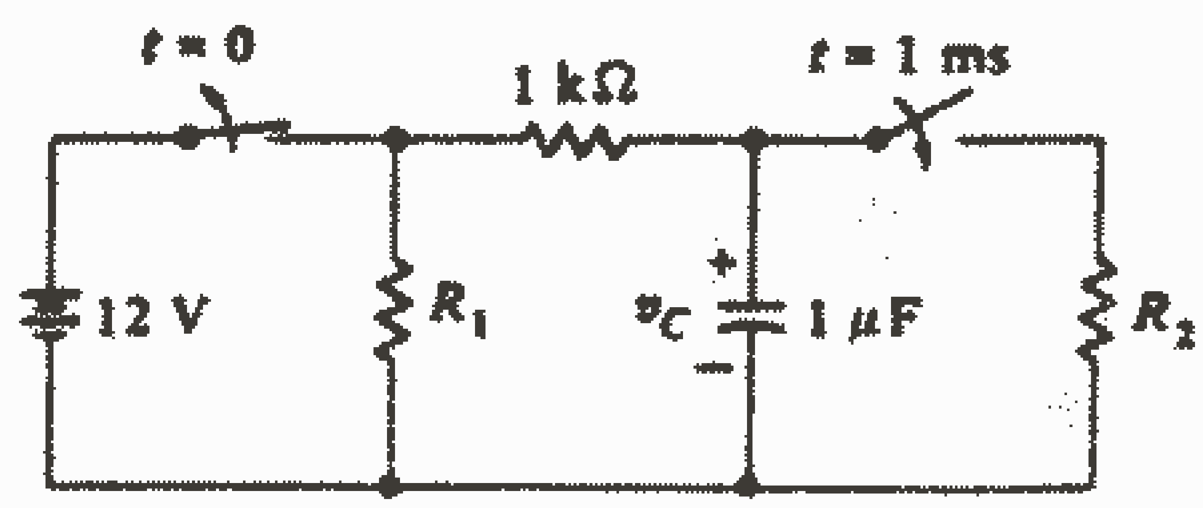
شکل ۳۰ ـ ۵: به مسئله ۲۱ مراجعه کنید.

۲۲ ـ در مدار شکل ۳۱-۵: (a) $v_C(0)$ را پیدا کنید. (b) τ را محاسبه کنید. (c) رابطه‌ای برای $v_C(t)$ به دست آورید.



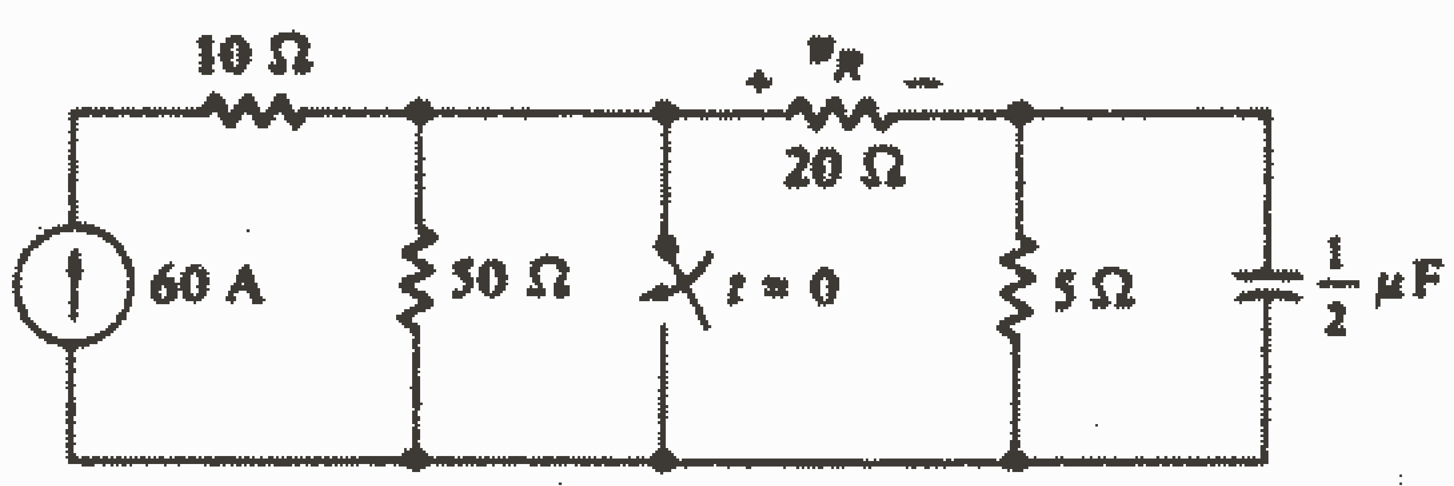
شکل ۳۱ ـ ۵: به مسئله ۲۲ مراجعه کنید.

۲۳ ـ مقادیر R_1، R_2 را در شکل ۳۲-۵ طوری انتخاب کنید که $v_c = ۱۰V$ در $t = ۰٫۵mS$ و $v_c = ۱V$ در $t = ۲mS$ باشد.



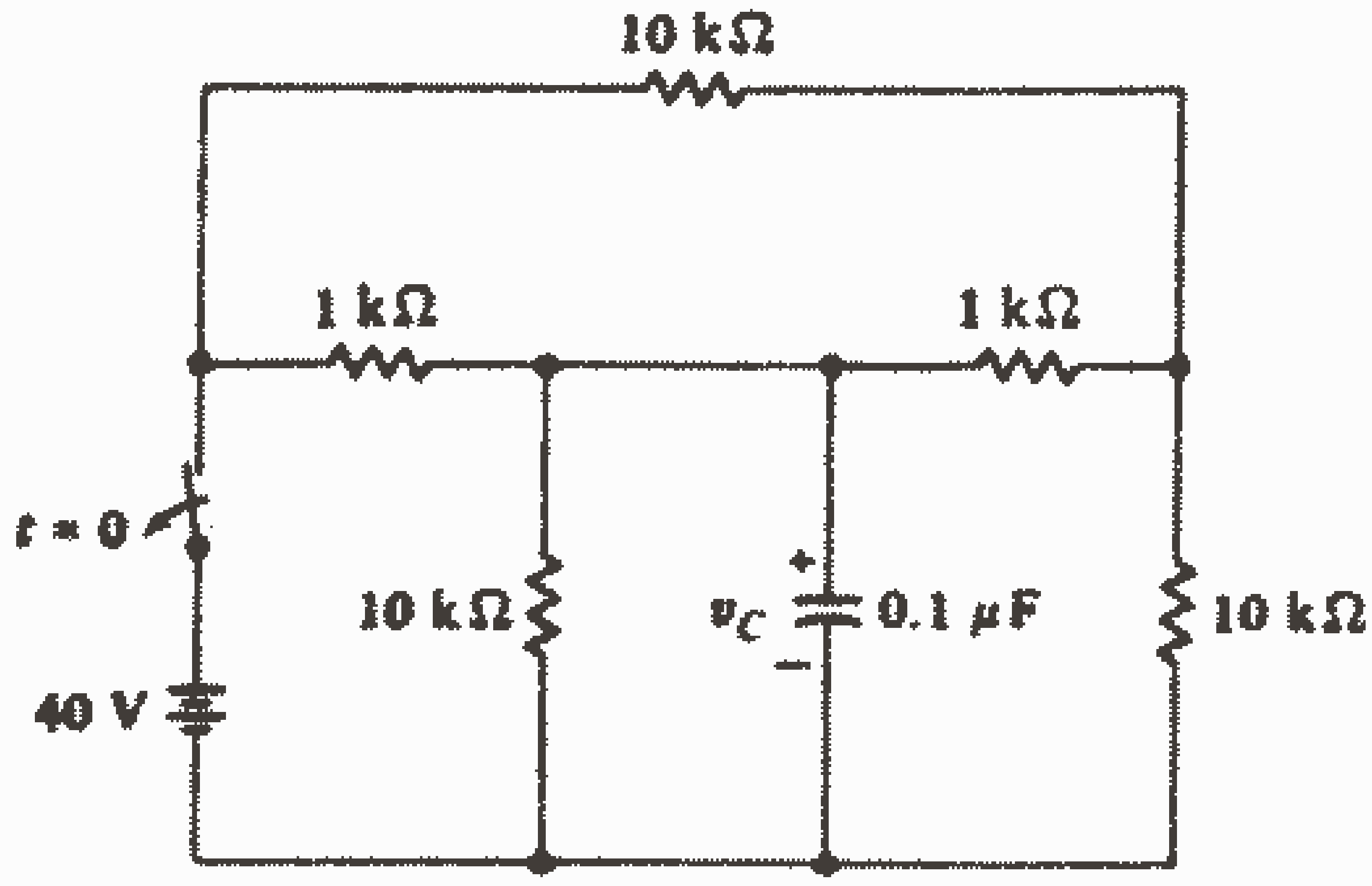
شکل ۳۲ ـ ۵: به مسئله ۲۳ مراجعه کنید.

۲۴ ـ در مدار شکل ۳۳-۵، v_R را نسبت به t در فاصلهٔ $-۱ < t < ۴\mu S$ رسم کنید.



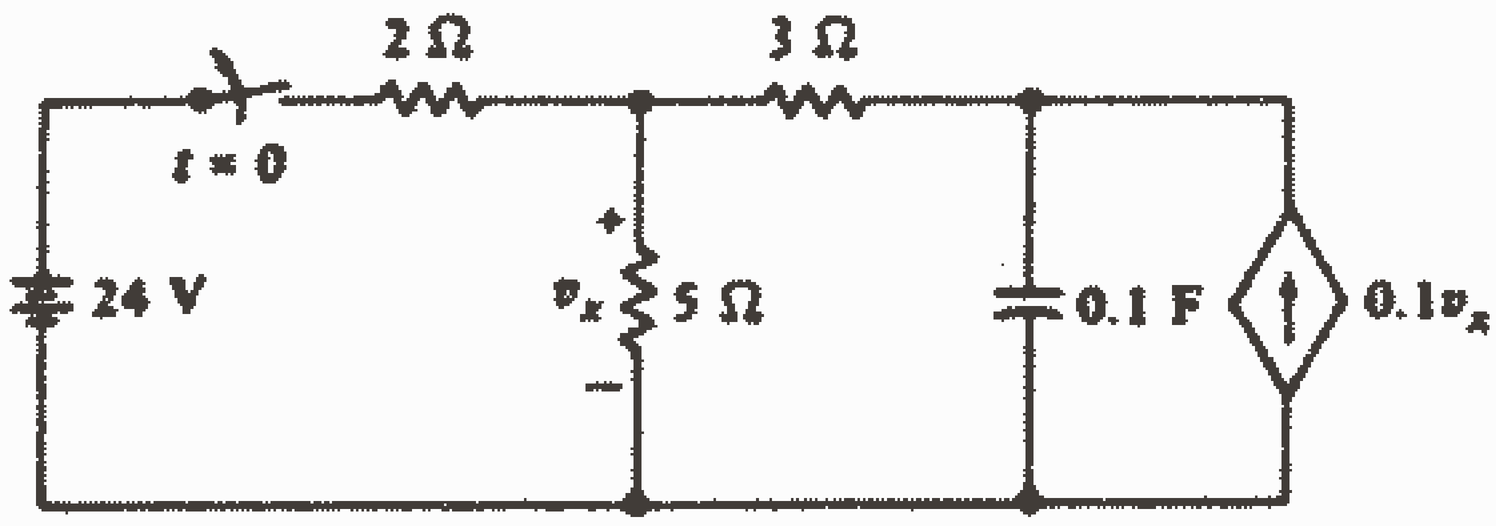
شکل ۳۳ ـ ۵: به مسئله ۲۴ مراجعه کنید.

۲۵ ـ رابطه‌ای برای $v_C(t)$ در شکل ۳۴-۵ پیدا کنید که برای موارد زیر صادق باشد:
(a) $t < 0$ (b) $t > 0$.



شکل ۳۴ ـ ۵: به مسئله ۲۵ مراجعه کنید.

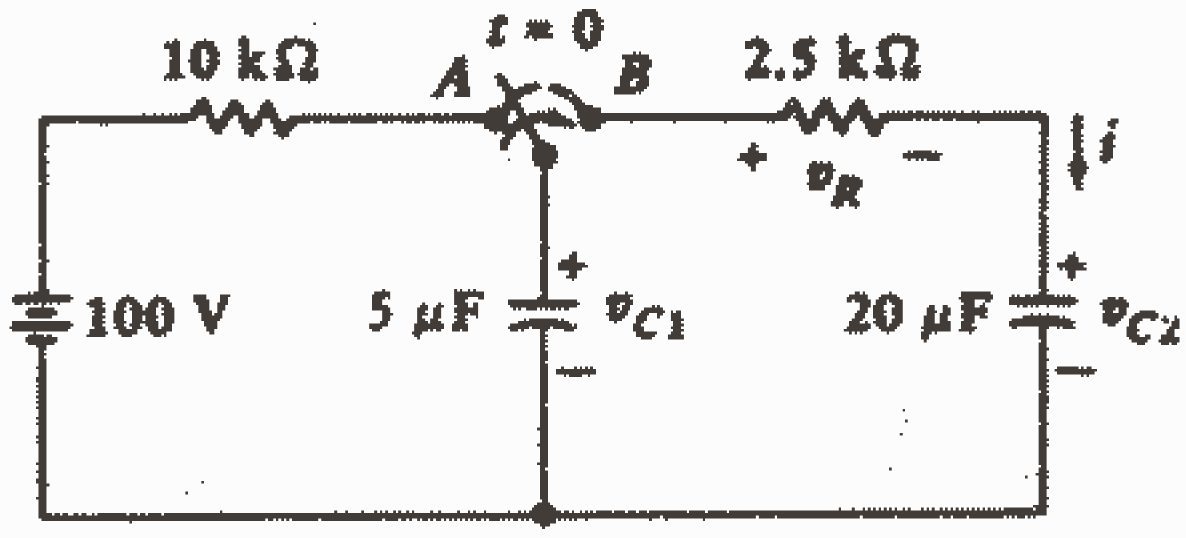
۲۶ ـ کلید شکل ۳۵-۵ برای مدت طولانی بسته بوده است. v_x را نسبت به t برای فاصلهٔ $-1 < t < 3S$ رسم کنید.



شکل ۳۵ ـ ۵: به مسئله ۲۶ مراجعه کنید.

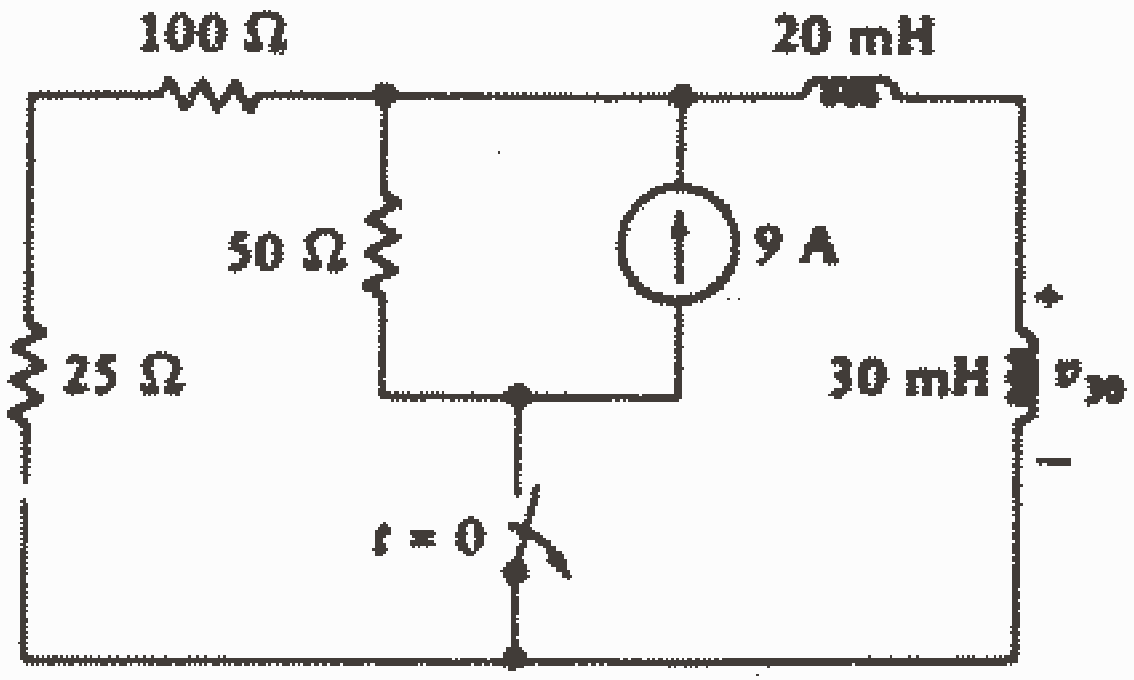
۲۷ ـ کلید در شکل ۳۶-۵ بعد از مدت طولانی که در وضعیت A بوده است در لحظهٔ $t = 0$ به وضعیت B می‌رود. این کار دو خازن را به طور سری قرار می‌دهد و امکان وجود ولتاژهای dc مساوی و مختلف‌العلامه را در خازنها ایجاد می‌کند. (a) $v_{C1}(0^-)$ و $v_{C2}(0^-)$ را پیدا کنید. (b) $v_{C1}(0^+)$ ، $v_{C2}(0^+)$ ، $v_R(0^+)$ را پیدا کنید. (c) ثابت زمانی $v_R(t)$ را پیدا کنید. (d) $v_R(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید. (e) $i(t)$ را پیدا کنید. (f) $v_{C1}(t)$ و $v_{C2}(t)$ را از $i(t)$ و مقادیر اولیه به دست آورید. (g) نشان دهید که انرژی ذخیره شده در $t = \infty$ به اضافهٔ

انرژی کل تلف شده در مقاومت ۲,۵KΩ برابر است با انرژی ذخیره شده در خازن در $t = 0$.



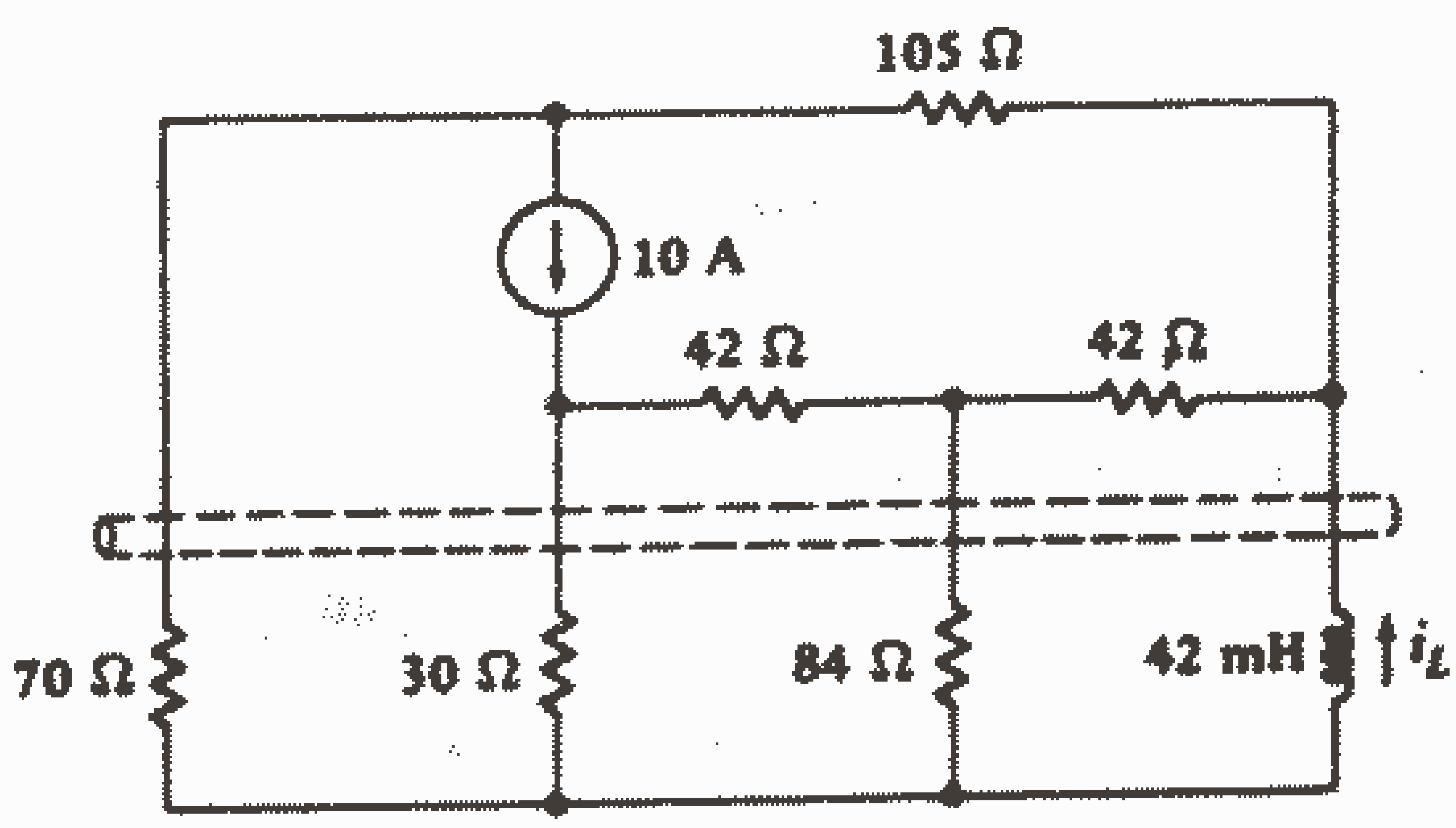
شکل ۳۶ ـ ۵: به مسئله ۲۷ مراجعه کنید.

۲۸ ـ در شکل ۳۷-۵ کلید پس از مدت طولانی بسته بودن در لحظهٔ $t = 0$ باز می‌شود. $v_{30}(t)$ را برای $t>0$ پیدا کنید.



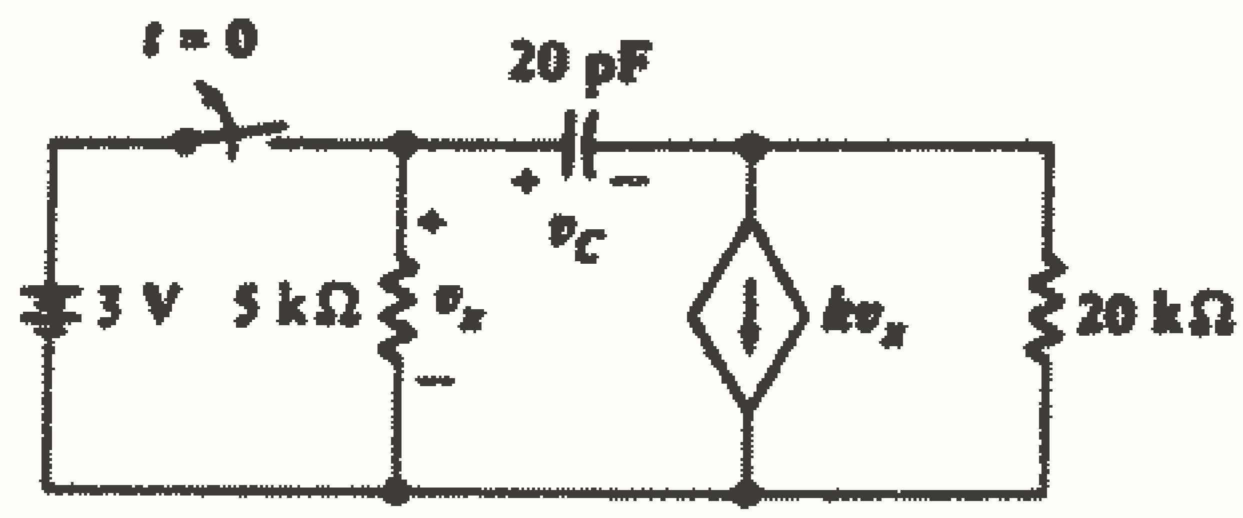
شکل ۳۷ ـ ۵: به مسئله ۲۸ مراجعه کنید.

۲۹ ـ مدار شکل ۳۸-۵ برای مدت طولانی در وضعیت نشان داده شده عمل کرده است. در لحظهٔ $t = 0$ یک قطعه سیم مسی می‌افتد روی مدار و ترمینالهای بالایی چهار عنصر را به طوریکه نشان داده شده است، اتصال کوتاه می‌کند. $i_L(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید.



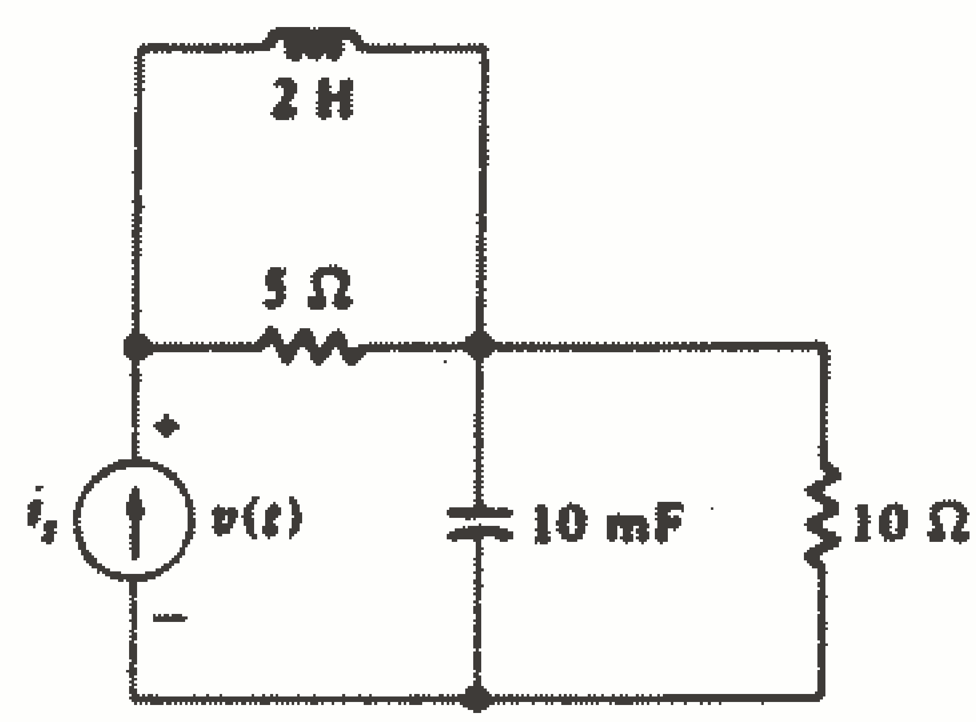
شکل ۳۸ ـ ۵: به مسئله ۲۹ مراجعه کنید.

۳۰ ـ (a) $v_C(0^-)$ را به صورت تابعی از K برای مدار شکل ۳۹-۵ پیدا کنید. (b) $v_C(t)$ را به صورت تابعی از K برای $t > 0$ پیدا کنید. (C) روابط به دست آمده را به ازای $K = 0$, $K = 10^{-3}$ محاسبه کنید.



شکل ۳۹ ـ ۵: به مسئله ۳۰ مراجعه کنید.

۳۱ ـ در مدار شکل ۴۰-۵ فرض کنید $i_s = 50A$ برای $t<0$ و صفر برای $t > 0$ باشد. $v(t)$ را به ازای جمیع مقادیر t پیدا کنید.



شکل ۴۰ ـ ۵: به مسئله ۳۱ مراجعه کنید.

فصل ۶

اعمال تابع تحریک پلهٔ واحد

۱ ـ ۶ ـ مقدمه

ما قبلاً به اندازهٔ یک فصل وقت خود را صرف مطالعهٔ پاسخ مدارهای RC و RL بدون منبع کرده‌ایم، که این پاسخ را به دلیل اینکه فقط بستگی به طبیعت مدار داشت، پاسخ طبیعی نامیدیم. دلیل وجود هر گونه پاسخی ناشی از یک انرژی اولیهٔ ذخیره شده در عناصر سلفی و خازنی مدار می باشد. در بسیاری از مسائل و مثالها، با مدارهایی که شامل منابع و کلیدهایی بودند مواجه شدیم و اطلاع یافتیم که عملیات کلید زنی خاص در لحظه $t = 0$ انجام می‌شوند و مقدار معلومی انرژی ذخیره شده در مدار باقی می گذارند. به عبارت دیگر ما تاکنون مسائلی را حل کرده‌ایم که در آنها منابع انرژی به طور ناگهانی از مدار «قطع» می‌شدند و اکنون باید پاسخی را که ناشی از «اعمال» ناگهانی منابع انرژی می‌باشد، مورد توجه قرار دهیم.

ما این فصل را به مطالعهٔ پاسخی که ناشی از اعمال ناگهانی منابع dc می‌باشد اختصاص خواهیم داد. پس از آنکه منابع سینوسی و نمایی را مطالعه کردیم، می‌توانیم مسئله کلی اعمال یک منبع کلی‌تر را مورد بررسی قرار دهیم. از آنجاییکه هر قطعهٔ الکتریکی حداقل برای یک بار می‌تواند انرژی‌دار شود و چون اغلب وسایل در طول دورهٔ کارشان به دفعات زیادی روشن و خاموش می‌شوند، بدیهی است که مطالعهٔ ما قابل استفاده برای بسیاری از حالات عملی می‌باشد. با وجود اینکه ما اکنون خودمان را محدود به منابع dc کرده‌ایم هنوز هم حالات بی‌شماری وجود دارد که در آنها این مثالهای ساده متناظر با عملکرد یک وسیلهٔ فیزیکی می‌باشد. مثلاً، اولین مداری را که تحلیل خواهیم کرد می‌تواند بیانگر ایجاد جریان میدان هنگام استارت کردن یک موتور dc باشد. تولید و کاربرد پالسهای ولتاژ مربعی لازم برای بیان یک عدد یا یک فرمان

در یک کامپیوتر مثالهای زیادی را در زمینه الکترونیک و مدارهای ترانزیستوری ارائه می کند. به عنوان چند مثال دیگر می‌توان از مدارهای مشابهی که در مدارهای همزمانی و جاروب درگیرنده‌های تلویزیون و یا در سیستمهای مخابراتی با مدولاسیون پالس و سیستمهای رادار یافت می‌شوند، نام برد. به علاوه، بخش مهمی از تحلیل اکثر سر و مکانیسمها عبارت است از تعیین پاسخ آنها به اعمال ناگهانی ورودیهای ثابت.

۲ ـ ۶ تابع تحریک پلهٔ واحد

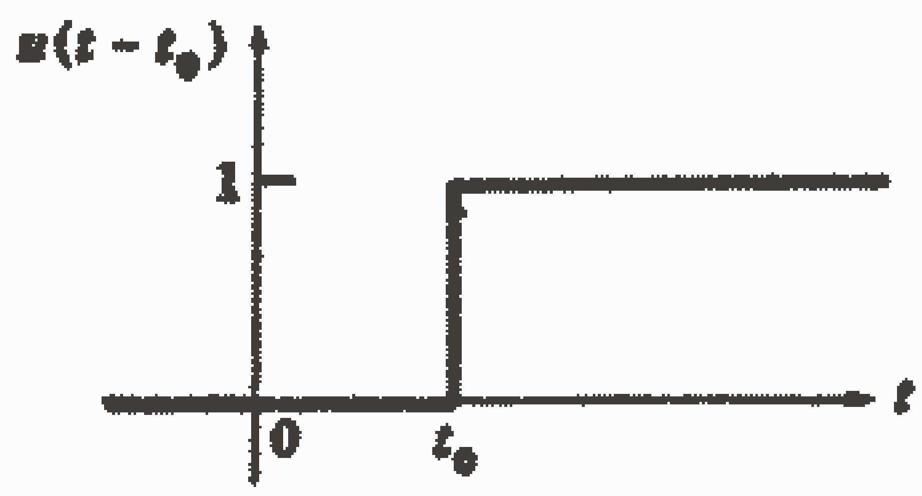
ما تاکنون از «اعمال ناگهانی» یک منبع انرژی صحبت کرده‌ایم و با این عبارت دلالت بر اعمال آن در زمان صفر داشته‌ایم. بنابراین عملکرد یک کلید به طور سری با یک باتری معادل است با تابع تحریکی که تا لحظهٔ بسته شدن کلید صفر است و بعد از آن برابر با ولتاژ باتری می‌شود. این تابع تحریک دارای یک شکستگی و یا گسستگی در لحظهٔ بسته شدن کلید می‌باشد. توابع تحریک خاصی که پیوسته نیستند و یا دارای مشتقات گسسته می‌باشند، توابع گسسته نامیده می‌شوند. دو تا از مهمترین این توابع گسسته عبارتند از تابع پله واحد و تابع ضربهٔ واحد تابع پله واحد موضوع این فصل می‌باشد و تابع ضربه واحد در فصلهای ۱۸ و ۱۹ بحث خواهد شد.

ما تابع تحریک پلهٔ واحد را به عنوان تابعی که به ازای همهٔ مقادیر کوچکتر از صفر برای آرگومانش، مقدار آن صفر است و به ازای همه مقادیر بزرگتر از صفر آرگومانش، مقدار آن یک است، تعریف می‌کنیم. اگر فرض کنیم که $(t-t_0)$، آرگومان باشد و تابع پلهٔ واحد را با u نشان دهیم، آنگاه $u(t-t_0)$ برای همه مقادیر t کوچکتر از t_0 باید صفر باشد و به ازای همهٔ مقادیر $t>t_0$ باید یک باشد. در $t = t_0$، $u(t-t_0)$ به طور ناگهانی از صفر به یک تغییر می‌کند. مقدار آن در $t = t_0$ تعریف نشده است ولی مقدار آن برای همهٔ لحظه‌ها هر قدر هم که به $t = t_0$ نزدیک باشند معلوم است. ما اغلب این مطلب را به صورت $u(t_0^+) = ۱$ ، $u(t_0^-) = 0$ نشان می‌دهیم. تعریف جمع و جور ریاضی برای تابع تحریک پلهٔ واحد عبارت است از:

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

که به صورت نمودار در کل ۱ ـ ۶ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که یک خط عمودی به طول یک، در $t = t_0$ نشان داده شده است اگرچه این «خیز پله» الزاما جزئی از تعریف پلهٔ واحد نیست ولی معمولا در نمودارها نشان داده می‌شود.

ما همچنین ملاحظه می‌کنیم که پلهٔ واحد الزاماً تابعی از زمان نیست، اگر چه توجه ما در این فصل فقط معطوف به توابع زمانی خواهد بود. مثلاً، $u(x-x_0)$ می‌تواند برای بیان یک تابع پلهٔ واحد به کار رود ولی نمی‌تواند یک تابع تحریک پلهٔ واحد باشد زیرا تابع زمان t نمی‌باشد در عوض تابعی است از x، که x می‌تواند مثلاً فاصله‌ای بر حسب متر و یا یک فرکانس باشد که در فصل ۱۸ مشاهده خواهیم کرد.

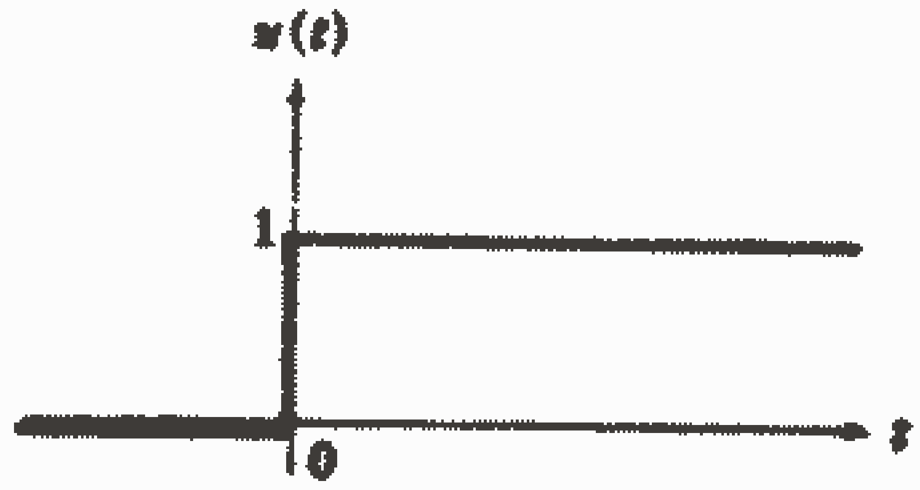


شکل ۱ ـ ۶: تابع تحریک پلهٔ واحد، $u(t-t_0)$

اغلب در تحلیل مدار، گسستگی و یا عمل سوئیچینگ در لحظه‌ای که به صورت $t = 0$ تعریف می‌شود، روی می‌دهد. در این صورت $t_0 = 0$ می‌باشد و ما تابع تحریک پلهٔ واحد را به صورت $u(t-0)$ و یا به طور ساده‌تر به صورت $u(t)$ نشان می‌دهیم. این تابع در شکل ۲ ـ ۶ نشان داده شده است و رابطهٔ تحلیلی آن به صورت مقابل می‌باشد:

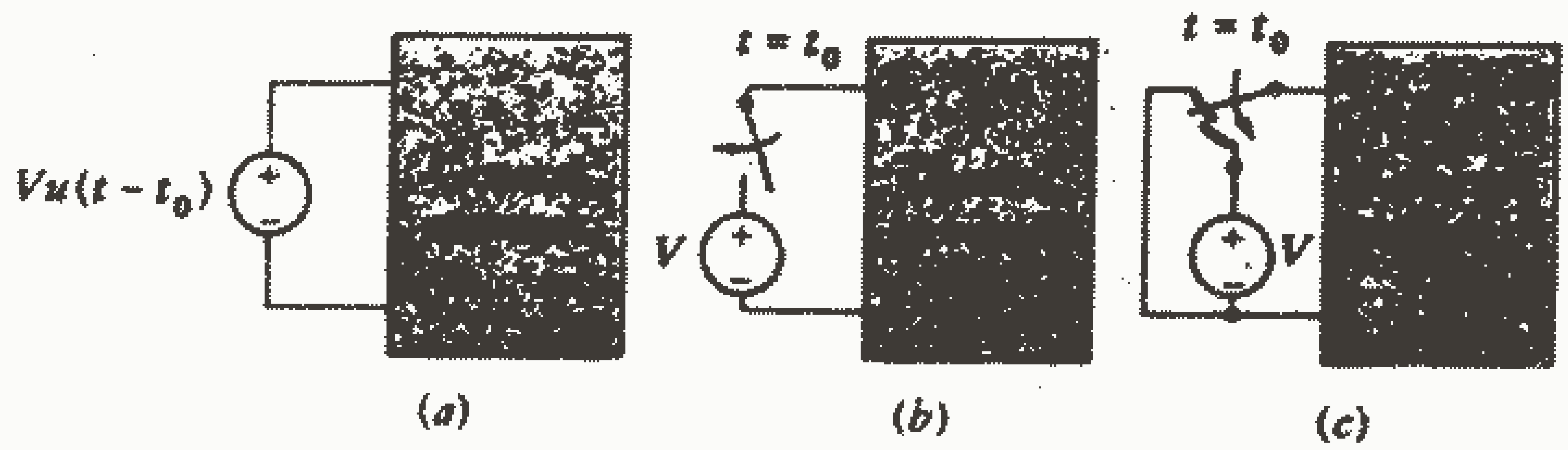
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

تابع تحریک پلهٔ واحد به خودی خود بدون واحد می‌باشد و اگر بخواهیم از آن برای نمایش یک ولتاژ استفاده کنیم، باید $u(t-t_0)$ را در ولتاژ ثابتی مانند V ضرب کنیم. بنابراین، $v(t) = Vu(t-t_0)$ یک منبع ولتاژ ایده‌آل است که قبل از $t = t_0$ مقدار آن صفر و بعد از $t = t_0$ مقدار آن برابر V می‌باشد.



شکل ۲ ـ ۶: تابع تحریک پلهٔ واحد $u(t)$ به صورت تابعی از t نمایش داده شده است.

این تابع تحریک در شکل ۶-۳a به یک شبکهٔ کلی وصل شده است.



شکل ۳ ـ ۶: (a) یک تابع تحریک ولتاژ پله‌ای به صورت منبع تحریک یک شبکهٔ کلی به کار رفته است. (b) یک مدار ساده که اگرچه معادل دقیق (a) نیست ولی در بسیاری از حالات می‌تواند به عنوان معادل آن به کار رود. (c) معادل دقیق مدار a .

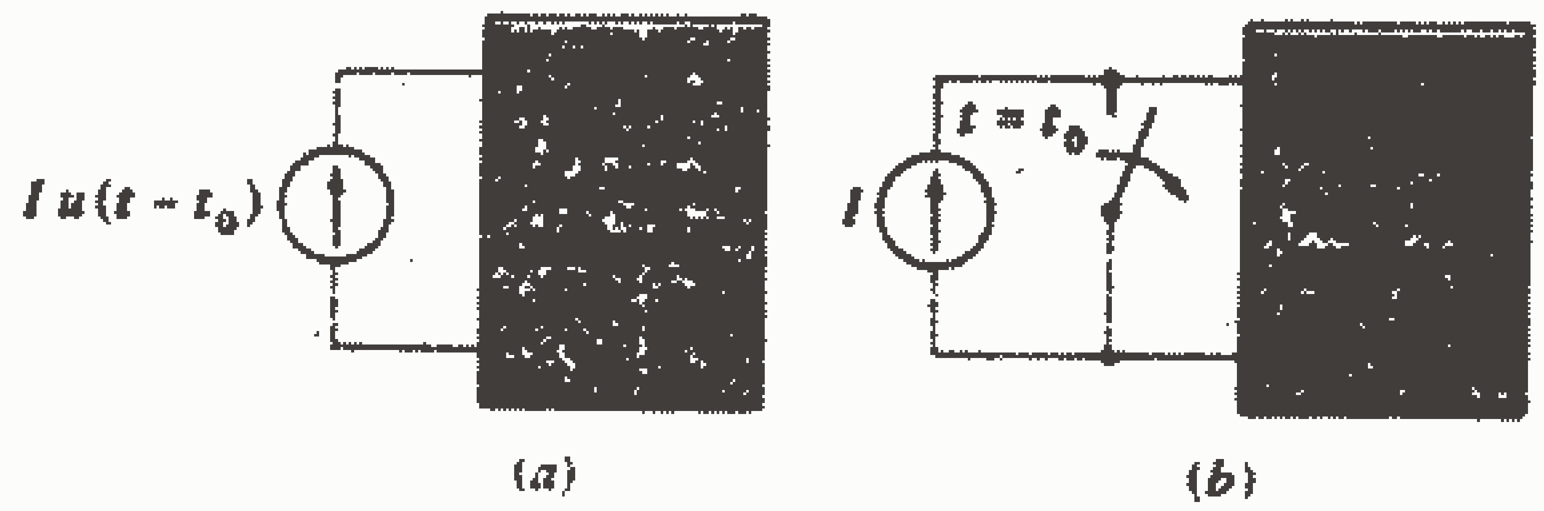
اکنون باید به طور منطقی بپرسیم که کدام منبع فیزیکی با این تابع تحریک گسسته، معادل است. و یا به عبارت دیگر منظور ما به طور ساده این است که مشخصهٔ ولتاژ ـ جریان این دو شبکه یکسان می‌باشد.

برای منبع ولتاژ پله‌ای شکل ۶-۳a ، مشخصهٔ ولتاژ ـ جریان کاملاً ساده است، ولتاژ قبل از $t = t_0$ برابر صفر و بعد از $t = t_0$ برابر V می‌باشد و جریان هر مقدار محدودی را در هر یک از دو فاصلهٔ زمانی می‌تواند دارا باشد. اولین حالتی که به ذهن ما خطور می‌کند مدار معادل شکل ۶-۳b می‌باشد که یک منبع dc به مقدار V سری با یک کلید که در لحظهٔ $t = t_0$ بسته می‌شود، می‌باشد. اگر چه این مدار برای $t<t_0$ معادل با مدار ۶-۳a نمی‌باشد زیرا ولتاژ دو سر باتری و کلید کاملاً نامشخص است. این منبع «معادل» یک مدار باز است و ولتاژ دو سر آن هر مقداری می‌تواند باشد. بعد از $t = t_0$، شبکه‌ها معادل هستند و اگر این تنها فاصلهٔ زمانی باشد که مورد توجه ماست و اگر جریانهای اولیهٔ هر دو شبکه در $t = t_0$ یکسان باشند، آنگاه شکل ۶-۳b معادل خوبی برای شکل ۶-۳a می‌باشد.

برای به دست آوردن یک معادل دقیق برای تابع تحریک ولتاژ پله‌ای، می‌توانیم یک کلید Spdt به مدار اضافه کنیم. قبل از $t = t_0$ کلید، ولتاژ صفر را در دو سر ترمینالهای ورودی شبکهٔ کلی ما ایجاد می‌کند و بعد از $t = t_0$، کلید طوری تغییر حالت می‌دهد که یک ولتاژ ورودی

ثابت V را تأمین می‌کند. در لحظهٔ $t = t_0$، ولتاژ نامعین است (همانگونه که در تابع تحریک پله‌ای می‌باشد) و باتری به طور لحظه‌ای اتصال کوتاه می‌شود و جای خوشبختی اینجاست که ما با مدلهای ریاضی سر و کار داریم. این معادل دقیق شکل ۶-۳a درشکل ۶-۳c نشان‌داده‌شده‌است.

قبل از خاتمهٔ بحثمان دربارهٔ معادل بودن مدارها، بهتر است معادل دقیق یک باتری و یک کلید را مورد توجه قرار دهیم. تابع تحریک ولتاژ پله‌ای معادل با شکل ۶-۳b، کدام است؟ ما به دنبال آرایشی هستیم که به طور ناگهانی از مدار باز به یک ولتاژ ثابت تغییر حالت دهد، در اینجا تغییری در مقاومت وجود دارد و نقطهٔ پیچیدهٔ مسئله ما همین جاست. تابع پله‌ای ما را قادر می‌سازد که یک ولتاژ (یا یک جریان) را به طور ناپیوسته تغییر دهیم، اما در اینجا ما نیاز به یک مقاومت متغیر هم داریم. بنابراین، معادل مورد نظر ما باید شامل یک تابع پله‌ای مقاومت یا هدایت هم باشد، یعنی عنصر غیرفعالی که متغیر با زمان باشد. با وجود اینکه می‌توانیم چنین عنصری را با تابع پلهٔ واحد بسازیم، باید توجه داشت که محصول نهایی یک کلید است و یک کلید صرفاً مقاومتی است که به طور لحظه‌ای از صفر به بی‌نهایت اهم و یا برعکس تغییر می‌کند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که معادل دقیق یک باتری و کلید سری با آن باید یک باتری سری با یک مقاومت متغیر با زمان باشد و هیچ ترکیبی از تابع تحریک ولتاژ و جریان نمی‌تواند معادل دقیقی را به ما ارائه دهد.۱ شکل ۶-٤a یک تابع تحریک جریان پله‌ای را نشان می‌دهد که یک شبکهٔ کلی را تحریک می‌کند.



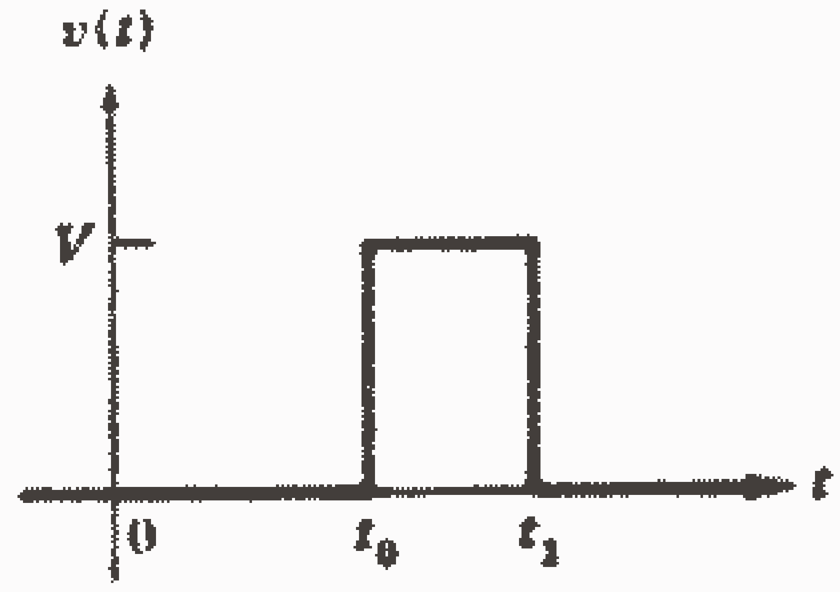
شکل ٤ - ٦: (a) یک تابع تحریک جریان پله‌ای به یک شبکهٔ کلی اعمال شده است. (b) مدار ساده‌ای که اگرچه معادل دقیق (a) نیست اما در بسیاری از موارد می‌تواند به عنوان معادل آن به کار رود.

۱ - اگر اطلاعاتی دربارهٔ شبکهٔ کلی داشته باشیم (ولتاژ دو سر کلید در $t<t_0$) همیشه می‌توان یک معادل را تعیین نمود، ولی ما فرض می‌کنیم که هیچ اطلاعات قبلی دربارهٔ شبکهٔ کلی نداریم.

اگر بخواهیم این مدار را با یک منبع dc موازی با یک کلید (که در لحظهٔ $t = t_0$ باز می‌شود) جایگزین کنیم، باید بدانیم که این مدارها بعد از $t = t_0$ معادل می‌باشند و پاسخها بعد از $t = t_0$ فقط به شرطی که شرایط اولیه یکسان باشد، مشابه می‌باشند. پس به طور منطقی اغلب می‌توانیم مدارهای ٦-٤a ، ٦-٤b را به جای یکدیگر به کار بریم. معادل دقیق شکل ٦-٤a عبارت است از متناظر مدار شکل ٦-٣c و معادل دقیق ٦-٤b را نمی‌توان با توابع تحریک پله‌ای ولتاژ یا جریان به تنهایی ایجاد نمود.[1] اگر با مهارت بر روی تابع تحریک پلهٔ واحد کار کنیم. می‌توان توابع تحریک مفیدی را ایجاد نمود یک پالس ولتاژ مربعی را طبق شرایط زیر تعریف می‌کنیم:

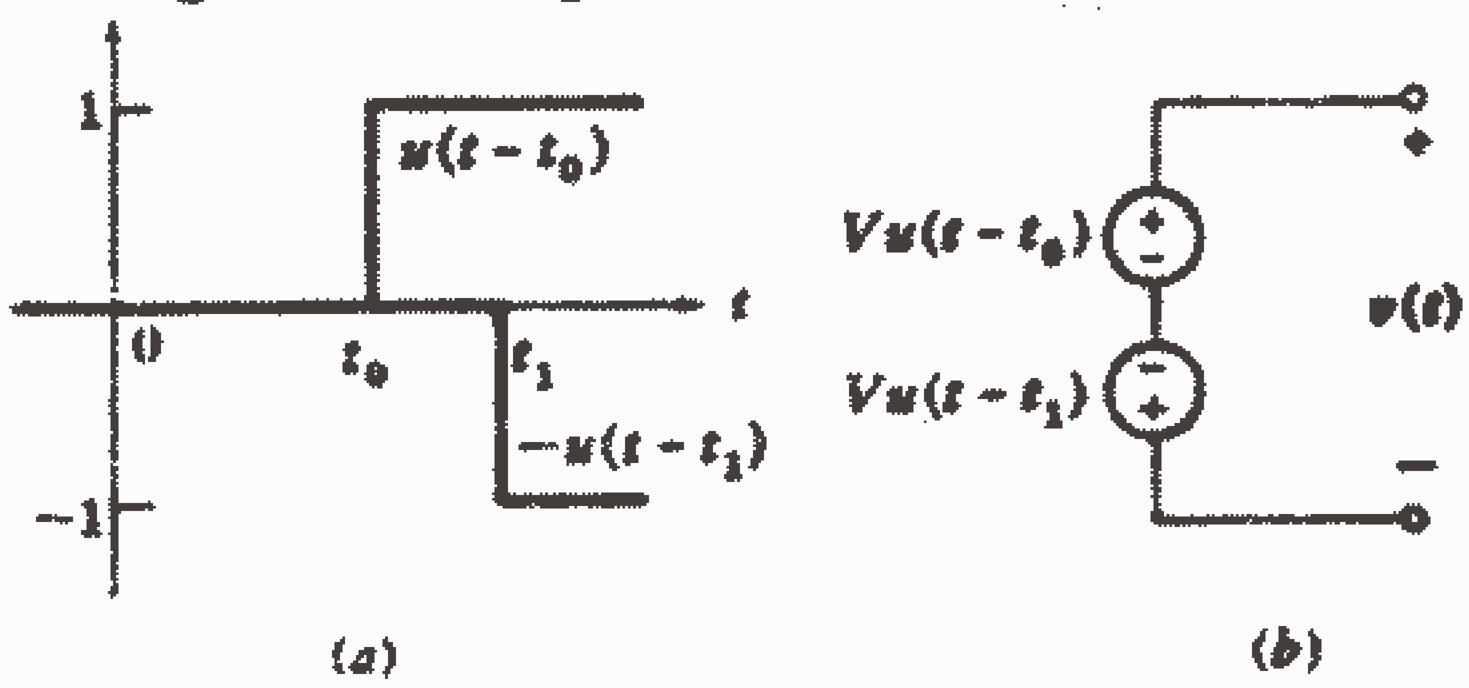
$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ V & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t_1 < t \end{cases}$$

این پالس در شکل ٥-٦ نشان داده شده است. آیا می‌توان این پالس را بر حسب تابع تحریک پله واحد بیان نمود؟



شکل ٥ ـ ٦: پالس ولتاژ مربعی، یک تابع تحریک مفید.

حال تفاضل دو پلهٔ واحد $u(t - t_0) - u(t - t_1)$ را در نظر می‌گیریم. این دو پله واحد در شکل ٦-٦a نشان داده شده است و بدیهی است که تفاضل آنها یک پالس مربعی می‌باشد. منبع $Vu(t - t_0) - Vu(t - t_1)$ که ولتاژ مطلوب را به ما می‌دهد در شکل ٦-٦b نشان داده شده است.

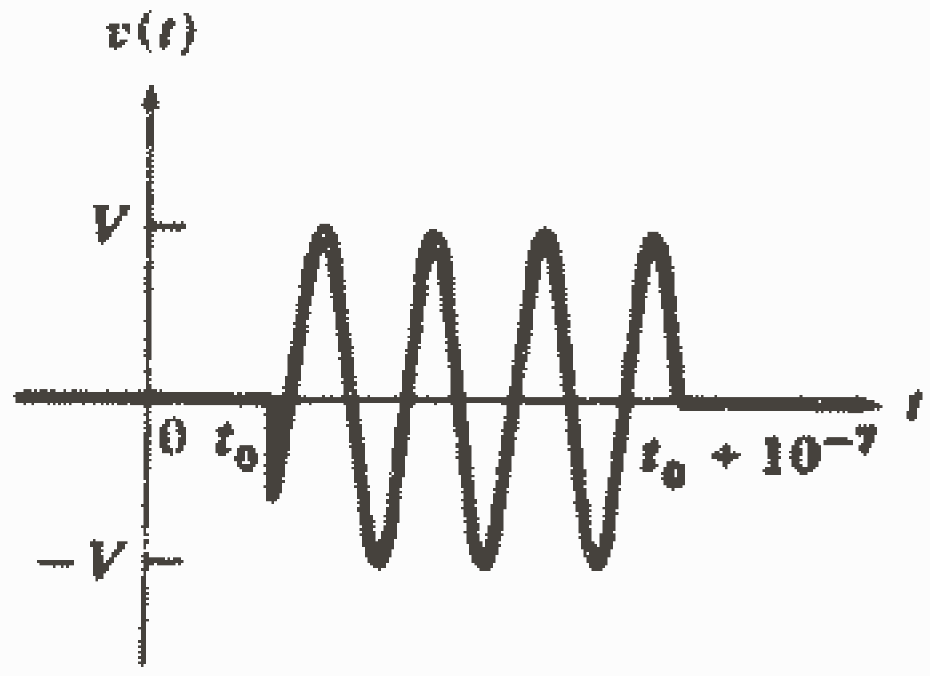


شکل ٦ ـ ٦: (a) پله‌های واحد $u(t - t_0)$, $u(t - t_1)$ (b) منبعی که پالس ولتاژ مربعی شکل ٥ ـ ٦ را ارائه می‌کند.

---

[1] ـ مدار معادل را اگر جریان کلید قبل از $t = t_0$ معلوم باشد، می‌توان رسم نمود.

اگر یک منبع ولتاژ سینوسی $V \sin \omega t$ داشته باشیم که به طور ناگهانی در لحظهٔ $t = t_0$ به یک شبکه وصل شود، آنگاه یک تابع تحریک ولتاژ مناسب برای آن به صورت $v(t) = Vu(t-t_0)\sin \omega t$ خواهد بود. اگر بخواهیم یک شلیک انرژی از فرستندهٔ رادار را نشان دهیم، می‌توانیم منبع سینوسی را بعد از $\frac{1}{10}\mu S$ به وسیله یک تابع تحریک پلهٔ واحد دیگری خاموش کنیم. در این صورت پالس ولتاژ به صورت $v(t) = V[u(t-t_0) - u(t-t_0-10^{-7})] \sin \omega t$ خواهد بود. این تابع تحریک در شکل ۷-۶ رسم شده است.



شکل ۷ ـ ۶: یک پالس فرکانس رادیویی که به صورت $v(t) = V[u(t-t_0) - u(t-t_0-10^{-7})] \sin \omega t$ توصیف شده است. فرکانس سینوسی پالس در حدود ۳۶ MHz می‌باشد که برای رادار خیلی کم است ولی برای ایجاد شکل موجی خوانا و واضح مناسب است.

به عنوان آخرین نکتهٔ مقدماتی باید تذکر دهیم که تابع تحریک پلهٔ واحد را باید فقط به عنوان مدل ریاضی یک وسیلهٔ سوئیچینگ عملی به کار برد. هیچ مقاومت و سلف و خازن عملی دقیقاً مانند عنصر مداری ایده‌آلش کار نمی‌کند و همچنین ما نمی‌توانیم یک عمل کلیدزنی را در زمان صفر انجام دهیم. اگر چه، زمانهای سوئیچینگ کمتر از ۱ns در بسیاری از مدارات رایج می‌باشند و این زمان اغلب در مقایسه با ثابت زمانی بقیه مدار به اندازه کافی کوتاه است که بتوان از آن صرفنظر کرد.

تمرین

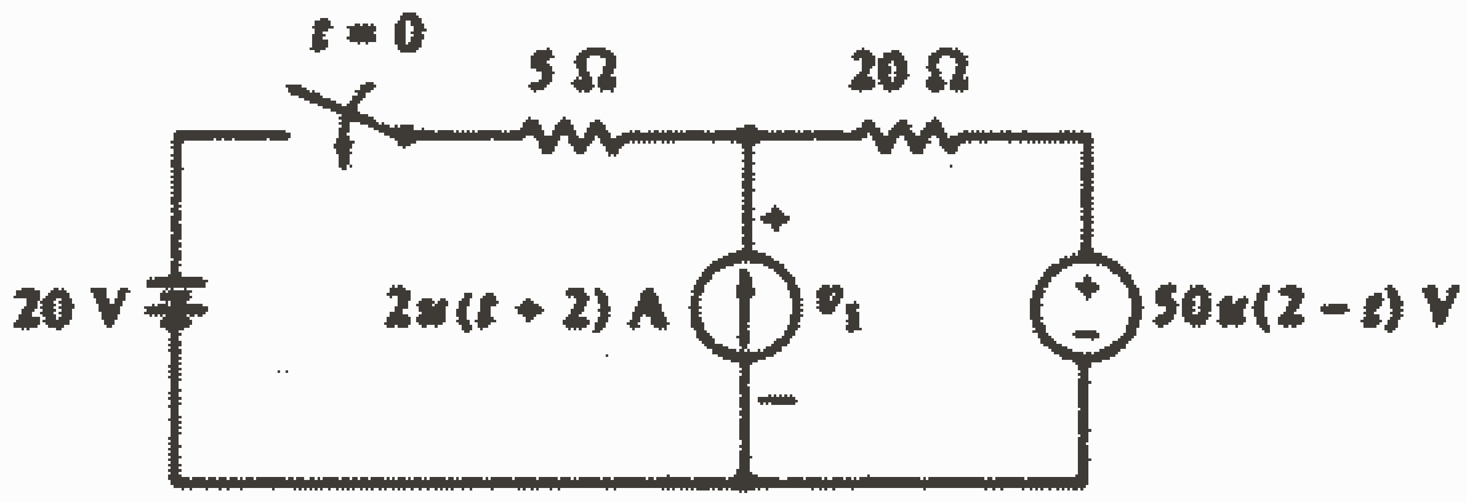
۱ ـ ۶ ـ هر یک از مقادیر زیر را به ازای $t = 1/5$ حساب کنید:

(a) $2u(t-2)+u(t+1)+u(t-1)$، (b) $[u(t-1)-u(1-t)]u(t+1)$ (c) $u(\sin \pi t)-u(t+4)+u(t)$

جواب: ۰ ، ۱ ، ۲

۲ ـ ۶ ـ در مدار شکل ۸ـ۶، v_1 را به ازای: (a) $t = -5$، (b) $t = -1$، (C) $t = 1$، (d) $t = 3s$ پیدا کنید.

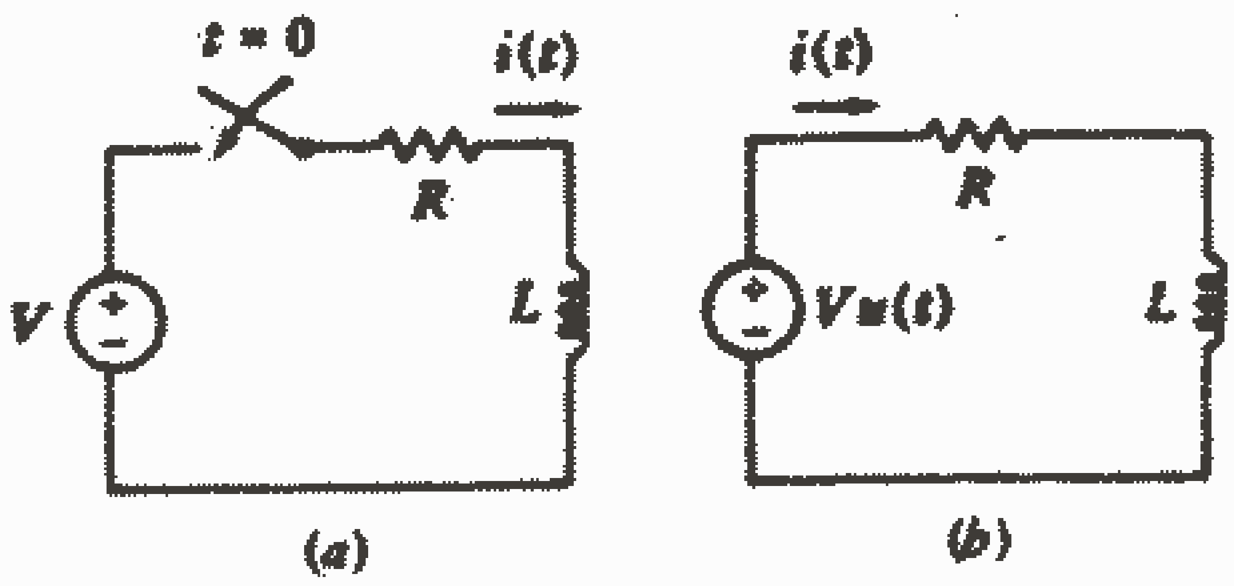
جواب: ۵۰V، ۹۰، ۳۴، ۲۴



شکل ۸ ـ ۶: به مسئله ۲ ـ ۶ مراجعه کنید.

۴ ـ ۶ ـ نظری بر مدار RL تحریک شده

ما اکنون آماده‌ایم که یک شبکهٔ ساده را در معرض اعمال ناگهانی یک منبع dc قرار دهیم. این مدار شامل یک باتری به ولتاژ V به طور سری با یک کلید، یک مقاومت R و یک سلف می‌باشد. کلید در لحظهٔ $t = 0$ بسته می‌شود که در شکل ۹a-۶ نشان داده شده است. واضح است که جریان $i(t)$ قبل از $t = 0$ صفر می‌باشد و می‌توانیم باتری و کلید را با یک تابع تحریک ولتاژ پله‌ای $Vu(t)$ که آن هم قبل از $t = 0$ هیچ پاسخی را ایجاد نمی‌کند، جایگزین کنیم. بعد از $t = 0$ هر دو مدار یکسان می‌باشند. بنابراین ما جریان $i(t)$ را در مدار شکل ۹a-۶ و یا مدار معادل آن یعنی شکل ۹b-۶ جستجو می‌کنیم.



شکل ۹ ـ ۶: (a) یک مدار مفروض. (b) مدار معادلیکه دارای همان پاسخ $i(t)$ برای همهٔ زمانها می‌باشد.

ما فعلاً $i(t)$ را به وسیله نوشتن معادلهٔ مداری مناسب و سپس حل کردن آن به وسیله تفکیک متغیر و سپس انتگرال‌گیری، پیدا خواهیم کرد. بعد از اینکه جواب را به دست آوردیم و دو قسمت تشکیل‌دهندهٔ آن را بررسی کردیم، مقداری وقت (بخش بعدی را) صرف یادگیری مفهوم کلی این دو جمله خواهیم کرد. ما سپس می‌توانیم جوالب این مسئله را خیلی به آسانی پیدا کنیم و به علاوه قادر خواهیم بود اصول کلی نهفته در این روش ساده را برای کسب جوابهای سریعتر برای هر مسئله‌ای که شامل اعمال ناگهانی هر منبعی باشد، به کار بریم، حال بیایید با روش حل رسمی‌تری مسئله را دنبال کنیم.

با اعمال قانون ولتاژ کیرشوف به مدار شکل ۶-۹b، خواهیم داشت:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = Vu(t)$$

چون تابع تحریک پلهٔ واحد در $t = 0$ گسسته می‌باشد، ابتدا جواب را برای $t<0$ و سپس برای $t>0$ بررسی خواهیم کرد. بدیهی است که اعمال ولتاژ صفر از $t = -\infty$ هیچ پاسخی را ایجاد نکرده است، بنابراین: $t<0 \quad i(t) = 0$ اگر چه برای زمانهای مثبت، $u(t)$ برابر یک بوده و ما باید معادلهٔ $t>0 \quad Ri + L\frac{di}{dt} = V$ را حل کنیم. با چند مرحله عملیات جبری ساده می‌توان متغیرها را جدا نمود، که به دست می‌آوریم: $\frac{L\,di}{V - Ri} = dt$ و از هر طرف می‌توان مستقیماً انتگرال گرفت: $-\frac{L}{R}\ln(V - Ri) = t + k$ برای محاسبهٔ K باید از شرایط اولیه کمک گرفت. قبل از $t = 0$، $i(t)$ برابر صفر است و در نتیجه $i(0^-) = 0$ و چون جریان در سلف در زمان صفر نمی‌تواند بدون ایجاد ولتاژ بی‌نهایت به مقدار محدودی تغییر یابد، پس $i(0^+) = 0$. اگر در $t = 0$ مقدار i را مساوی صفر بگیریم خواهیم داشت:

$$-\frac{L}{R}\ln V = k \quad \rightarrow -\frac{L}{R}[\ln(V - Ri) - \ln V] = t \;\rightarrow\; \frac{V - Ri}{V} = e^{-Rt/L} \rightarrow$$

$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-Rt/L} \qquad t > 0$$

بنابراین رابطه‌ای که برای همهٔ مقادیر t برای پاسخ صادق باشد عبارت است از:

$$i = \left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-Rt/L}\right)u(t) \qquad (1)$$

این پاسخ مطلوب ماست اما به ساده‌ترین روش به دست نیامده است. برای به دست آوردن یک روش مستقیم‌تر، بیایید دو جملهٔ ظاهر شده در معادلهٔ (۱) را تفسیر کنیم. جملهٔ نمایی دارای فرم تابعی پاسخ طبیعی مدار RL می‌باشد که یک تابع نمایی منفی است و با افزایش زمان به سمت صفر میل می‌کند و به وسیلهٔ ثابت زمانی L/R مشخص می‌شود. بنابراین فرم تابعی این قسمت از پاسخ با آنچه که برای مدار بدون منبع به دست می‌آید، یکسان است. اگر چه، دامنهٔ این جملهٔ نمایی بستگی به V دارد. پس باید به طور کلی بیان کنیم که پاسخ عبارت است از

مجموع دو جمله که یکی دارای فرم تابعی یکسان با پاسخ مدار بدون منبع می‌باشد منتها دامنهٔ آن بستگی به تابع تحریک دارد. حال بیایید ماهیت قسمت دوم پاسخ را مورد بررسی قرار دهیم.

معادلهٔ (۱) دارای یک جملهٔ ثابت V/R هم می‌باشد. راستی چرا این جمله وجود دارد؟ جواب ساده است: پاسخ طبیعی به تدریج که انرژی تلف می‌شود به سمت صفر میل می‌کند اما پاسخ کلی نباید به سمت صفر میل کند. نهایتاً مدار به صورت یک مقاومت و سلف سری با یک باتری رفتار می‌کند و جریان مستقیم V/R در آن جاری می‌باشد. این جریان قسمتی از پاسخ است که می‌توان مستقیماً آن را به تابع تحریک نسبت داد و ما آن را پاسخ اجباری (یا پاسخ تحریکی forced response) می‌نامیم. این پاسخ، پاسخی است که پس از مدت طولانی بسته بودن کلید حاصل می‌شود.

پاسخ کامل از دو قسمت تشکیل می‌شود، پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری. پاسخ طبیعی مشخصه‌ای از مدار است و نه از منابع و فرم آن را می‌توان با توجه به مدار بدون منبع به دست آورد و دامنه آن بستگی به دامنهٔ اولیه منبع و انرژی اولیهٔ ذخیره شده دارد. پاسخ اجباری مشخصهٔ تابع تحریک را دارد و آن را می‌توان با در نظر گرفتن اینکه از تغییر وضعیت همهٔ کلیدهای مدار مدت طولانی می‌گذرد، به دست آورد. از آنجاییکه ما فعلاً با کلیدها و منابع dc سر و کار داریم، پاسخ اجباری صرفاً حل یک مسئله سادهٔ مدار dc می‌باشد.

دلیل وجود دو پاسخ، طبیعی و اجباری رامی‌توان از بحث‌های فیزیکی هم ملاحظه نمود. می‌دانیم که مدار ما نهایتا پاسخ اجباری اختیار خواهد نمود. با وجود این در لحظه‌ای که کلیدها تغییر وضعیت می‌دهد جریان اولیه سلف (و یا ولتاژ اولیه خازن در سایر مدارها) دارای مقداری خواهد بود که فقط بستگی به انرژی ذخیره شده‌در این عناصر دارد. نمی‌توان انتظار داشت که این جریانها و ولتاژها همانهایی باشند که به وسیله پاسخ اجباری تقاضا می‌شود. بنابراین باید یک پریود گذرایی وجود داشته باشد که جریانها و ولتاژها از مقادیر اولیه‌شان به مقادیر نهایی لازم تغییر یابند. بخشی ازپاسخ که گذر از مقدار اولیه به مقدار نهایی را ارائه می‌کند، پاسخ طبیعی می‌باشد (که همانگونه که قبلاً دیدیم پاسخ گذرا هم نامیده می‌شود). اگر بخواهیم پاسخ مدار سادهٔ RL بدون منبع را بر حسب بحث فوق توصیف کنیم، آنگاه باید بگوییم که پاسخ اجباری صفر است و پاسخ طبیعی سعی می‌کند پاسخ اولیهٔ تولید شده به وسیلهٔ انرژی ذخیره شده را به مقدار پاسخ اجباری صفر، وصل کند. این توصیف فقط برای مدارهایی که در آنها پاسخ طبیعی نهایتاً میرا می‌شود، مناسب است. این امر همیشه در مدارهای فیزیکی که مقداری مقاومت با عناصر همراه است روی می‌دهد اما تعدادی مدارهای پاتولوژیک وجود دارند که در آنها پاسخ طبیعی

وقتیکه زمان بی‌نهایت می‌شود ناپدید نمی‌شود، مدارهاییکه در آنها جریانهای به دام افتاده در حلقه‌های سلفی دور می‌زنند و یا ولتاژهای به دام افتاده در رشته‌های سری خازنها مثالهایی از مورد فوق می‌باشند.

حال بیایید اساس ریاضی تقسیم پاسخ به دو قسمت پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری را بررسی کنیم.

تمرین

۳ـ۶ـ یک سلف ۴۰ mH، یک مقاومت ۸۰Ω و یک منبع ولتاژ $v_s = ۲۰+۴۰u(t)V$ به طور سری می‌باشند. با استفاده از اصل جمع اثرها دامنهٔ جریان سلف را در حالات زیر پیدا کنید: (a) در $t = ۰$، (b) در $t = ۰^+$، (c) وقتیکه $t \to \infty$، (d) در $t = ۱mS$.

جواب: ۰٫۲۵۰A، ۰٫۲۵۰، ۰٫۷۵۰، ۰٫۶۸۲

۴ـ۶ـ پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری

دلیل ریاضی خوبی هم نیز برای این مطلب که پاسخ کامل ترکیبی از دو قسمت است، وجود دارد. این دلیل بر اساس این حقیقت است که جواب هر معادلهٔ دیفرانسیل خطی را می‌توان به صورت مجموع دو قسمت، یکی جواب عمومی (پاسخ طبیعی) و دیگری پاسخ خصوصی (پاسخ اجباری)، بیان نمود. بدون اینکه عمیقاً در تئوری معادلات دیفرانسیل وارد شویم، بیایید یک معادلهٔ عمومی از نوعی که در قسمت قبل دیدیم، را بررسی کنیم:

$$di+Pidt = Qdt \quad \text{و یا} \quad di/dt+Pi = Q \qquad (۲)$$

می‌توانیم Q را به عنوان تابع تحریک در نظر بگیریم و برای اینکه وابستگی کلی آن را به زمان مورد تأکید قرار داده باشیم، آن را به صورت $Q(t)$ نشان می‌دهیم. در تمام مدارهای ما، P یک ثابت مثبت خواهد بود اما توضیحاتی که برای حل معادلهٔ (۲) درپی می‌آید برای حالاتی که P یک تابع کلی از زمان باشد، هم صادق است. بیایید با فرض اینکه P یک ثابت مثبت باشد، بحث را ساده کنیم. بعداً، همچنین فرض خواهیم کرد که Q هم ثابت است، یعنی خودمان را به توابع تحریک dc محدود خواهیم کرد.

در تمام کتب مربوط به معادلات دیفرانسیل نشان داده شده است که اگر هر دو طرف معادلهٔ (۲) را در یک فاکتور انتگرال‌گیری مجازی ضرب کنیم، آنگاه هر طرف معادله یک دیفرانسیل دقیق می‌شود که می‌توان برای به دست آوردن جواب از آن مستقیماً انتگرال‌گیری کرد. ما

متغیرها را جدا نمی‌کنیم فقط آنها را طوری مرتب می‌کنیم که انتگرال گیری ممکن گردد. برای این معادله فاکتور انتگرال گیری عبارت از $e^{\int Pdt}$ می‌باشد و چون P ثابت است می‌توان آن را به صورت e^{Pt} در نظر گرفت. هر دو طرف معادله را در این فاکتور انتگرال گیری ضرب می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$e^{Pt}di+iPe^{Pt}dt = Qe^{Pt}dt$$

حال اگر سمت چپ معادلهٔ فوق را به صورت دیفرانسیل دقیق ie^{Pt} در نظر بگیریم می‌توانیم فرم آن را اصلاح کنیم:

$$d(ie^{Pt}) = e^{Pt}di+iPe^{Pt}dt$$

و از آنجا داریم: $d(ie^{Pt}) = Qe^{Pt}dt$، حال می‌توانیم از هر طرف انتگرال بگیریم که خواهیم داشت: $ie^{Pt} = \int Qe^{Pt}dt+A$ در این رابطه A ثابت انتگراسیون می‌باشد. از آنجاییکه این ثابت به وضوح نشان داده شده است وقتیکه آن را محاسبه کنیم دیگر نیازی به اضافه کردن هیچ ثابت انتگراسیون به انتگرال باقیمانده نخواهد بود. اگر طرفین را در e^{-Pt} ضرب کنیم، جواب i به دست می‌آید: (۳) $i = e^{-Pt}\int Qe^{Pt}dt+Ae^{-Pt}$ اگر تابع تحریک، یعنی $Q(t)$، معلوم باشد، در این صورت فقط با محاسبهٔ انتگرال فرم دقیق تابعی $i(t)$ به دست می‌آید. البته ما نباید برای هر مسئله‌ای چنین انتگرالی را محاسبه کنیم بلکه ما از آن فقط به عنوان یک راه‌حل نمونه استفاده نموده و چند نتیجهٔ کلی از آن استخراج خواهیم کرد.

ابتدا باید توجه کنیم که برای یک مدار بدون منبع، Q باید صفر باشد و جواب مسئله همان پاسخ طبیعی می‌باشد: $i_n = Ae^{-Pt}$ (٤)

ملاحظه خواهیم کرد که ثابت P هرگز منفی نمی‌شود و مقدار آن فقط بستگی به عناصر مداری غیرفعال و اتصال آنها در مدار دارد[1] بنابراین پاسخ طبیعی وقتیکه زمان بی‌نهایت افزایش یابد به سمت صفر میل می‌کند. البته در مدار RL سری ساده باید هم همینطور باشد زیرا انرژی اولیه به تدریج در مقاومت تلف می‌شود. همچنین مدارهای ایده آل غیرفیزیکی هم وجود دارند که در آنها P صفر می‌باشد، در این مدارها پاسخ طبیعی میرا نمی‌شود بلکه به سمت مقدار ثابتی میل می‌کند که مثالهایی از این مورد، ولتاژها و جریانهای به دام افتاده هستند.

بنابراین دریافتیم که یکی از دو جملهٔ تشکیل دهندهٔ پاسخ کامل، شکل پاسخ طبیعی را دارد و دامنهٔ آن بستگی به مقدار اولیهٔ پاسخ کامل و در نتیجه بستگی به مقدار اولیه تابع تحریک دارد

---

۱ - اگر مدار شامل یک منبع وابسته و یا مقاومت منفی باشد، آنگاه P می‌تواند منفی هم باشد.

(اما معمولاً مساوی با آن نیست).

به علاوه ملاحظه می‌کنیم که جملهٔ اول معادلهٔ (۳) بستگی به فرم تابعی $Q(t)$، یعنی تابع تحریک، دارد. هر جا که مداری داشته باشیم که در آن پاسخ طبیعی وقتیکه t بی‌نهایت می‌شود، به صفر میل کند، آنگاه همین جملهٔ اول فرم پاسخ را پس از محو کامل پاسخ طبیعی، توصیف خواهد کرد. ما این جمله را پاسخ اجباری می‌نامیم که پاسخ حالت ماندگاری، پاسخ خصوصی و یا انتگرال خصوصی هم نامیده می‌شود.

در حال حاضر فقط مسائلی را که شامل اعمال ناگهانی منابع dc هستند در نظر می‌گیریم که در این حالت $Q(t)$ به ازای جمیع مقادیر t بعد از بسته شدن کلید در شکل ۹a-۶، مقداری ثابت می‌باشد. اکنون اگر بخواهیم می‌توانیم انتگرال را در معادلهٔ (۳) محاسبه کنیم و پاسخ اجباری را به دست آوریم: $i_f = Q/p$ که پاسخ کامل می‌شود: $i(t) = Q/P+Ae^{-Pt}$ برای مدار RL سری، $\frac{Q}{P}$ عبارت از جریان ثابت V/R بوده و $1/P$ هم ثابت زمانی τ می‌باشد. ملاحظه می‌کنیم که پاسخ طبیعی را می‌توانستیم بدون محاسبهٔ انتگرال هم به دست آوریم، زیرا آن عبارت است از پاسخ کامل در زمان بی‌نهایت و فقط با تقسیم ولتاژ منبع بر مقاومت سری به دست می‌آید. بنابراین پاسخ اجباری را می‌توانیم به طور نظری به دست آوریم.

در بخش بعدی سعی خواهیم کرد پاسخ کامل چند مدار RL را با به دست آوردن پاسخهای طبیعی و اجباری و سپس جمع کردن آنها، پیدا کنیم.

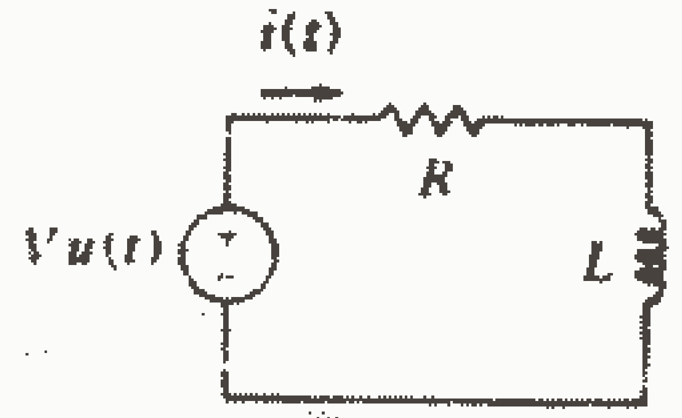
تمرین

۴ـ۶ـ فرض کنید که منبع ولتاژ $v_s = 10e^{-20t}u(t)V$ به طور سری با یک مقاومت ۲۵Ω و سلف ۱۰۰mH می‌باشد. مقادیر مربوطه را در معادلهٔ (۳) قرار دهید و اندازهٔ جریان را در لحظات: (a) $t = 0^+$ (b) $t = 3ms$، (c) $t = 10ms$، (d) $t = 50ms$ به دست آورید.

جواب: ۰mA، ۲۰۴، ۳۲۰، ۱۵۹٫۹

۵ـ۶ـ مدارهای RL

بیایید از مدار RL سری ساده برای نشان دادن اینکه چگونه پاسخ کامل با جمع کردن پاسخهای طبیعی و اجباری به دست می‌آید، استفاده کنیم. این مدار که در شکل ۱۰-۶ نشان داده شده است قبلاً تحلیل شده است منتها با یک روش طولانی‌تر. پاسخ مطلوب $i(t)$ می‌باشد و ما ابتدا این جریان را به صورت مجموع جریان طبیعی و اجباری بیان می‌کنیم: $i = i_n + i_f$

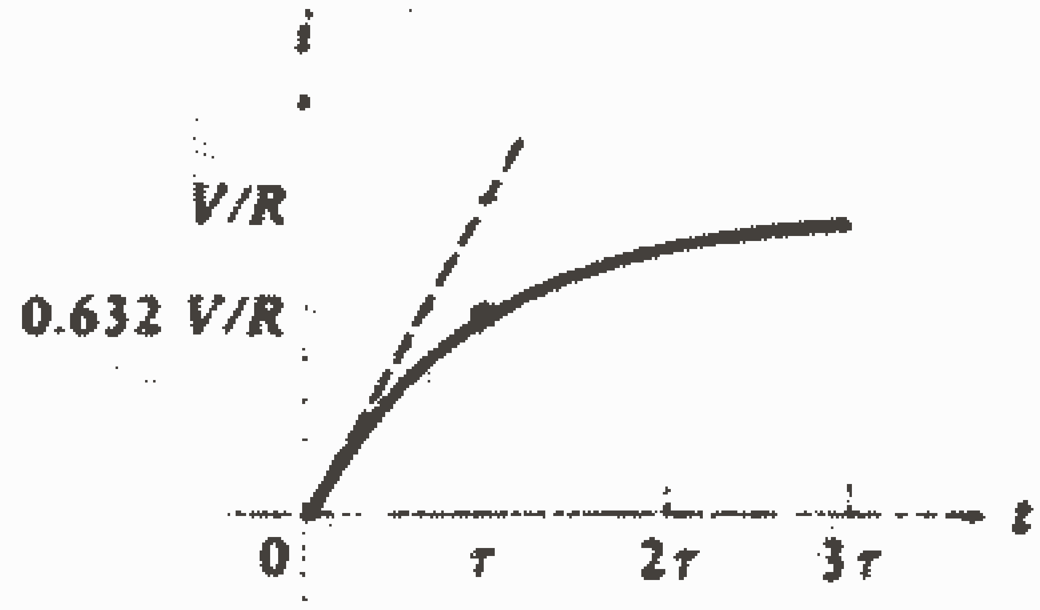


شکل ۱۰ ـ ۶: یک مدار RL سری که برای نشان دادن این که پاسخ کامل برابر است با مجموع پاسخ طبیعی و اجباری، به کار می‌رود.

فرم تابعی پاسخ طبیعی باید همانی باشد که برای مدارهای بدون منبع به دست آوردیم. بنابراین منبع ولتاژ پله‌ای را با یک اتصال کوتاه جایگزین می‌کنیم و حلقهٔ سری RL قدیمی‌مان را به دست می‌آوریم. بنابراین: $i_n = Ae^{-Rt/L}$ ، که در آن دامنهٔ A را باید تعیین کنیم سپس پاسخ اجباری، یعنی آن قسمتی از پاسخ را که بستگی به طبیعت تابع تحریک دارد، مورد توجه قرار می‌دهیم. در این مسئله بخصوص، پاسخ اجباری باید مقداری ثابت باشد زیرا منبع عبارت است از مقدار ثابت V برای تمام زمانها. بنابراین پس از اینکه پاسخ طبیعی از بین رفت، هیچ ولتاژی در دو سر سلف وجود نخواهد داشت در نتیجه ولتاژ V در دو سر R ظاهر می‌شود و به طور ساده پاسخ اجباری عبارت خواهد بود از: $i_f = V/R$ توجه داشته باشید که پاسخ اجباری کاملاً تعیین شده است و هیچ دامنهٔ مجهولی وجود ندارد. حال دو پاسخ را ترکیب می‌کنیم: $i = Ae^{-Rt/L} + \frac{V}{R}$ و شرایط اولیه را برای محاسبهٔ A اعمال می‌کنیم. جریان قبل از $t = 0$ برابر صفر است و تغییر لحظه‌ای نمی‌تواند داشته باشد زیرا این جریان در یک سلف جاری می‌باشد. بنابراین، جریان بلافاصله بعد از $t = 0$ برابر صفر می‌باشد و داریم: $0 = A + \frac{V}{R}$ و در نتیجه داریم: (۵) $i = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L})$ دقیقاً توجه داشته باشید که A مقدار اولیهٔ i نیست زیرا $A = -V/R$ در حالیکه $i(0) = 0$. در فصل ۵ که مدارها بدون منبع بودند، A در واقع مقدار اولیهٔ پاسخ بود. البته وقتیکه توابع تحریک حضور داشته باشند باید ابتدا مقدار اولیهٔ پاسخ را پیدا کنیم و سپس آن را در معادلهٔ پاسخ کامل قرار دهیم و A را پیدا کنیم.

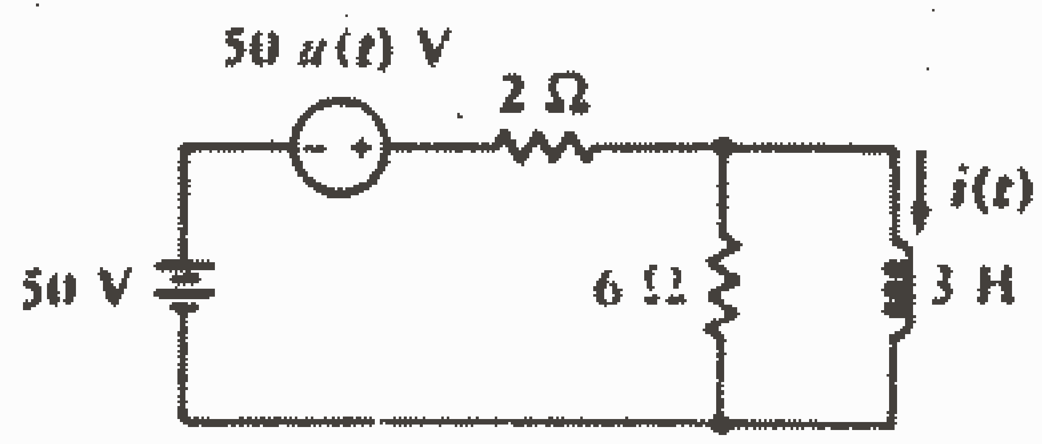
این پاسخ در شکل ۱۱ ـ ۶ رسم شده است و ما می‌توانیم ببینیم که چگونه جریان از مقدار اولیهٔ صفر به مقدار نهایی V/R می‌رسد. گذر از صفر به مقدار نهایی به طور کامل در زمان 3τ انجام می‌پذیرد. اگر این مدار ما نمایانگر سیم‌پیچ میدان یک موتور dc بزرگ باشد، می‌توانیم $L = 10H$ ، $R = 20\Omega$ در نظر بگیریم که $\tau = 0{,}5S$ به دست می‌آید. بنابراین جریان میدان در ۱٫۵s ایجاد می‌شود. در یک ثابت زمانی، جریان ۶۳٫۲ درصد مقدار

نهایی‌اش را کسب می‌کند.



شکل ۱۱ ـ ۶: جریان رابطهٔ (۵) به صورت ترسیمی نشان داده شده است.

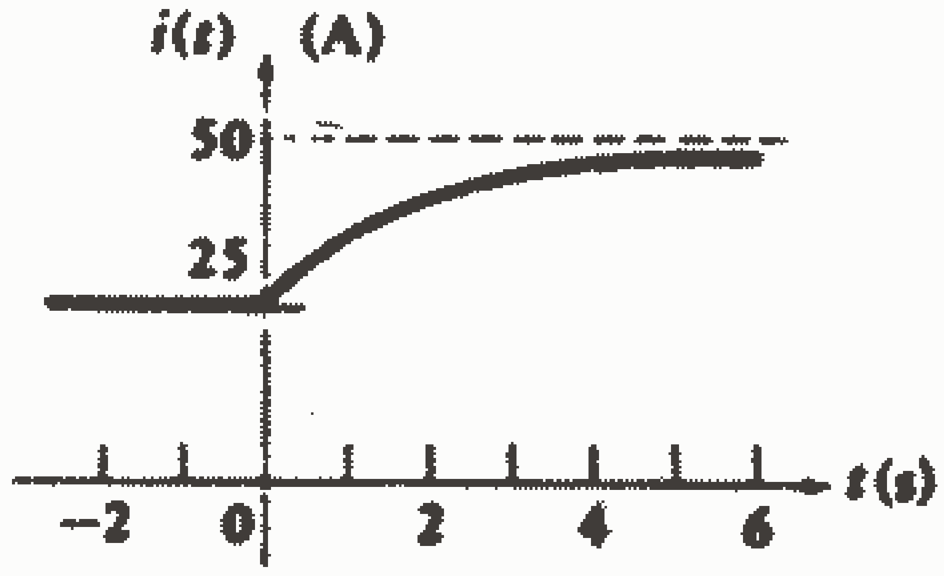
حال این روش را به یک مدار پیچیده‌تر اعمال می‌کنیم. مدار شکل ۱۲ ـ ۶ شامل یک منبع ولتاژ dc و یک منبع ولتاژ پله‌ای است.



شکل ۱۲ ـ ۶: مداری که به عنوان مثال به کار رفته است.

می‌خواهیم $i(t)$ را برای تمام زمانها تعیین کنیم. می‌توانیم هر چیزی را که در سمت چپ سلف می‌باشد با یک معادل تونن جایگزین کنیم، اما به جای این کار بیایید فقط فرم این معادل را به صورت یک مقاومت سری با منبع ولتاژ در نظر بگیریم. مدار فقط شامل یک عنصر ذخیره‌کننده انرژی، یعنی سلف، می‌باشد و در نتیجه پاسخ طبیعی مانند قبل یک تابع نمایی منفی می‌باشد، یعنی داریم: $i = i_f + i_n$ که در آن $t>۰$ $i_n = Ae^{-t/۲}$ می‌باشد و $\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{3}{1.5} = 2$. پاسخ اجباری چیزی است که به وسیله یک ولتاژ ثابت ۱۰۰V ایجاد می‌شود. پاسخ اجباری مقداری است ثابت و هیچ ولتاژی در دو سر سلف وجود ندارد و آن مانند یک اتصال کوتاه رفتار می‌کند، بنابراین داریم: $۵۰ = \frac{۱۰۰}{۲} = i_f$ و در نتیجه پاسخ کامل عبارت است از: $t>۰$ $i = ۵۰ + Ae^{-۰/۵t}$ برای محاسبهٔ A، باید مقدار اولیهٔ جریان سلف را تعیین کنیم. قبل از $t = ۰$ این جریان عبارت از ۲۵A می‌باشد و نمی‌تواند تغییر لحظه‌ای داشته باشد، بنابراین

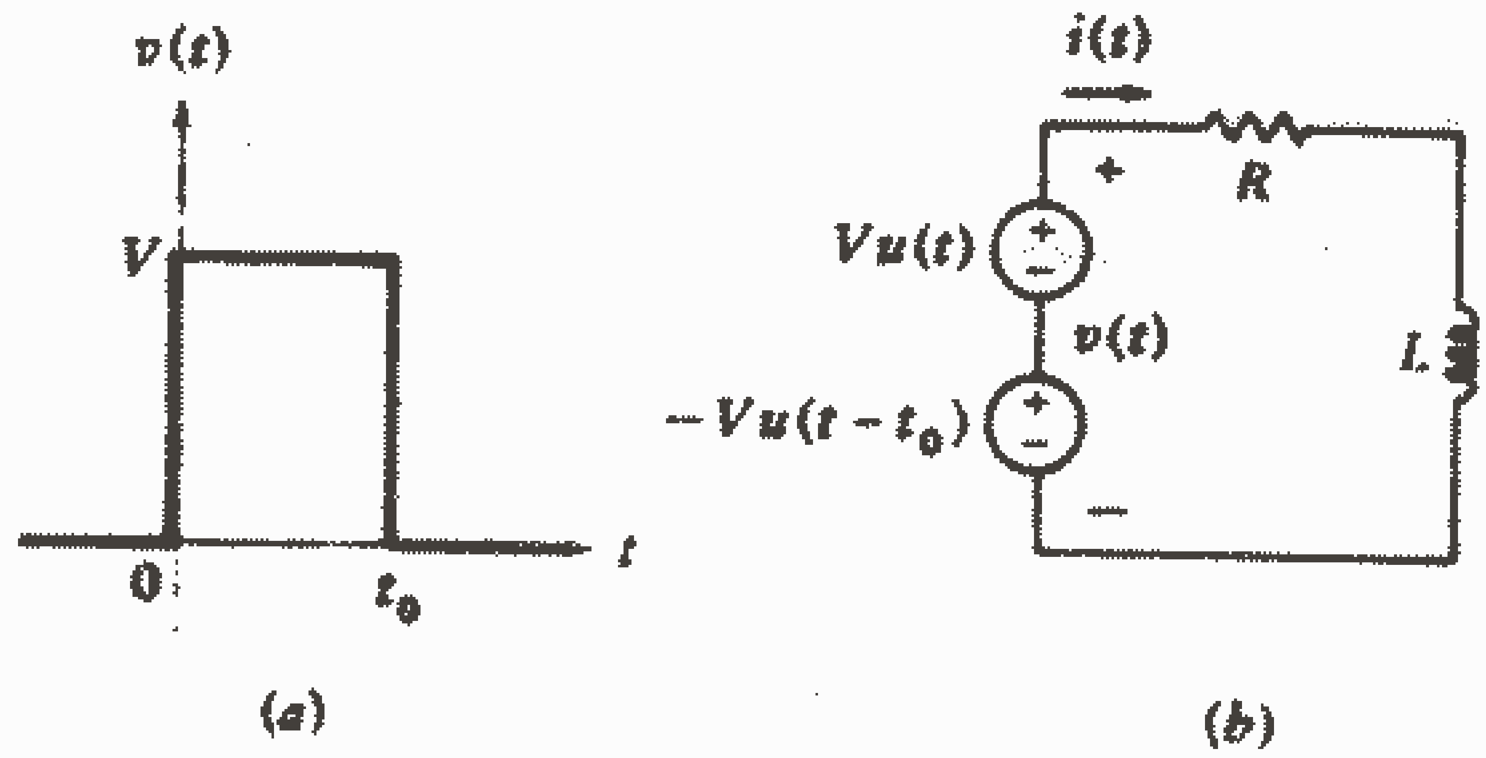
داریم: $-25 = A$ و یا $50+A = 25$ بنابراین $i = 50-25e^{-0/5t}$ $t>0$ حال جواب را با بیان $i = 25$ $t<0$ کامل می‌کنیم. و یا اینکه می‌توانیم یک رابطهٔ واحدی برای کلیهٔ مقادیر t بنویسیم: $i = 25+25(1-e^{-0/5t})u(t)$ پاسخ کامل در شکل ۱۳-۶ رسم شده است. توجه بکنید که چگونه پاسخ طبیعی، پاسخ مربوط به $t<0$ را به پاسخ اجباری ثابت وصل می‌کند.



شکل ۱۳ – ۶: پاسخ $i(t)$ مربوط به مدار کل ۱۲ – ۶ برای زمانهای بزرگتر یا مساوی صفر رسم شده است.

به عنوان آخرین مثال از این روش که به وسیله آن پاسخ کامل هر مدار گذرایی را تقریباً به طور نظری می توان نوشت، فرض کنید یک پالس ولتاژ مربعی به دامنهٔ V و دوام t_0 را به مدار RL سری ساده اعمال کنیم. تابع تحریک را به صورت مجموع دو منبع ولتاژ پله‌ای $Vu(t)$، $-Vu(t-t_0)$ که در شکل ۶-۱۴a ,b نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم پاسخ را با استفاده از اصل جمع اثرها به دست آوریم. فرض کنید آن قسمت از $i(t)$ را که ناشی از عملکرد جداگانهٔ منبع بالایی $Vu(t)$ می‌باشد با $i_1(t)$ نشان داده باشیم و $i_2(t)$ بیانگر آن قسمت از پاسخ که ناشی از عملکرد منبع $-Vu(t-t_0)$ به تنهایی است، باشد. آنگاه داریم $i(t) = i_1(t)+i_2(t)$.

حال هدف ما این است که هر یک از پاسخهای جزئی i_1، i_2 را به صورت مجموع یک پاسخ طبیعی و یک پاسخ اجباری بنویسیم. پاسخ $i_1(t)$ برایمان آشناست، این مسئله را دو سه صفحهٔ قبل حل کردیم: $i_1(t) = V/R(1-e^{-Rt/L})$ $t>0$ توجه داشته باشید که محدودهٔ t، یعنی $t>0$، که در آن این پاسخ صادق می‌باشد، نشان داده شده است.



شکل ۱۴ ـ ۶: (a) یک پالس ولتاژ مربعی که بعنوان تابع تحریک در یک مدار RL سری ساده بکار می‌رود. (b) مدار RL سری که تابع تحریک را بصورت ترکیب سری دو منبع ولتاژ پله‌ای مستقل نشان می‌دهد. جریان i(t) مطلوب می‌باشد.

حال توجه خود را معطوف منبع پایین و پاسخ آن یعنی $i_2(t)$ می‌کنیم. فقط پلاریتهٔ منبع و زمان اعمال آن فرق دارد. بنابراین نیازی به تعیین فرم پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری نیست. از روی پاسخ $i_1(t)$ می‌توانیم بنویسیم:

$$i_2(t) = -\frac{V}{R}(1 - e^{-R(t-t_0)/L}) \qquad t > t_0$$

که در آن باز هم باید محدودهٔ t، یعنی $t>t_0$، مشخص شده باشد.

حال دو جواب را با هم جمع می‌کنیم ولی باید دقت کنیم زیرا هر جواب در فاصلهٔ زمانی متفاوتی صادق است. بنابراین:

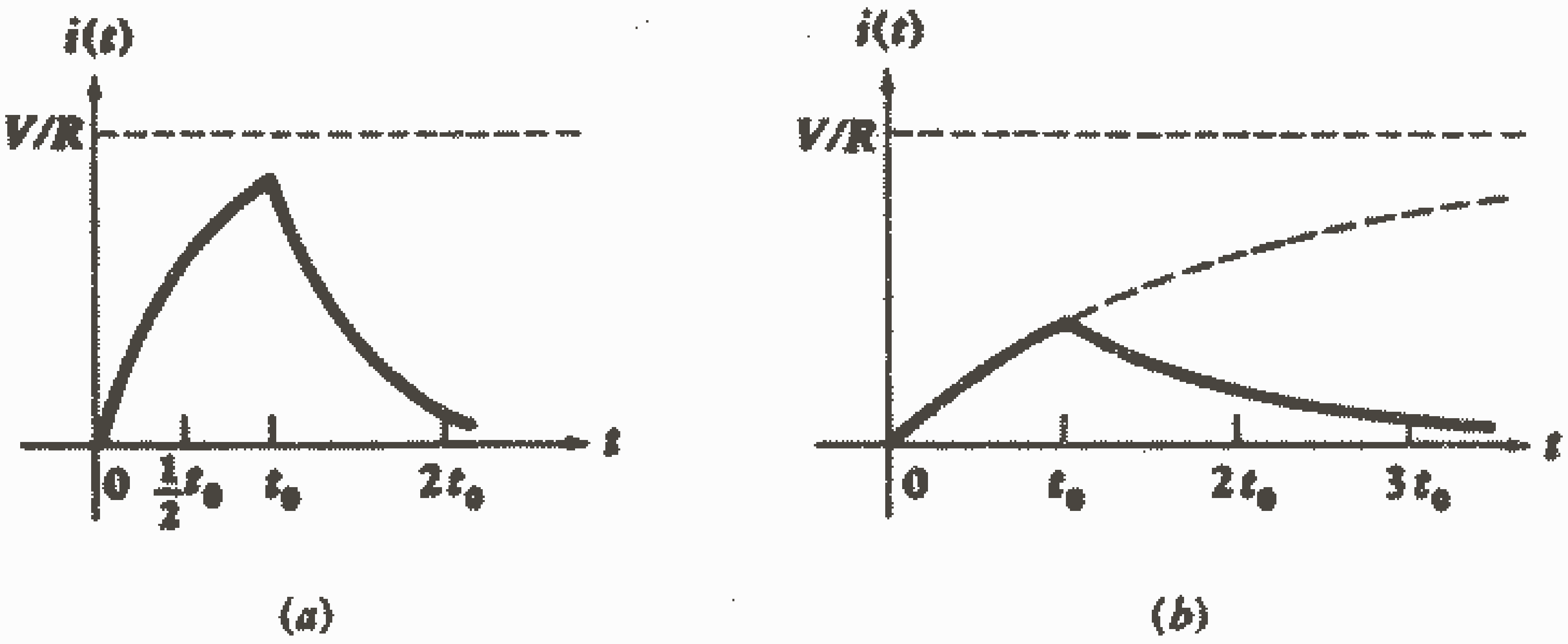
$$i(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \qquad 0 < t < t_0$$

$$i(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}) - \frac{V}{R}(1 - e^{-R(t-t_0)/L}) \qquad t > t_0$$

و یا:

$$i(t) = \frac{V}{R}e^{-Rt/L}(e^{Rt_0/L} - 1) \qquad t > t_0$$

جواب با بیان اینکه $i(t)$ برای t های منفی، صفر است و رسم پاسخ به صورت تابعی از زمان، کامل می‌شود. نوع منحنی به دست آمده بستگی به مقادیر نسبی t_0 و ثابت زمانی τ دارد. دو منحنی ممکن در شکل ۱۵ـ۶ نشان داده شده است.



شکل ۱۵ ـ ۶: دو منحنی پاسخ برای مدار شکل b ۱۴ ـ ۶ نشان داده شده است.

منحنی سمت چپ برای حالتی که ثابت زمانی نصف زمان دوام پالس باشد، رسم شده است، وضعیت متضاد حالت قبل در سمت راست نشان داده شده است که در آن ثابت زمانی دو برابر t_0 است و پاسخ هرگز فرصت پیدا نمی‌کند که به مقادیر بزرگتری از دامنه برسد.

روشی را که تا به حال برای پیدا کردن پاسخ یک مدار RL بعد از قطع یا وصل منابع dc به مدار در لحظه‌ای (مثلاً $t = 0$) به کار برده‌ایم، در زیر خلاصه کرده‌ایم فرض می‌کنیم که مدار وقتیکه همهٔ منابع مستقل مساوی صفر قرار داده شوند، قابل کاهش به یک مقاومت معادل R_{eq} به طور سری با یک سلف معادل L_{eq} باشد. پاسخی که به دنبال آن هستیم به صورت $f(t)$ بیان شده است.

۱ ـ با غیرفعال کردن همهٔ منابع، مدار را خلاصه کنید تا R_{eq} ، L_{eq} و $\tau = L_{eq}/R_{eq}$ به دست آید.

۲ ـ با در نظر گرفتن L_{eq} به صورت اتصال کوتاه، با استفاده از روشهای تحلیل dc ، $i_L(0^-)$ یعنی جریان سلف درست لحظه‌ای قبل از گسستگی، را پیدا کنید.

۳ ـ دوباره با در نظر گرفتن L_{eq} به صورت اتصال کوتاه، با استفاده از روشهای تحلیل dc، پاسخ اجباری را پیدا کنید. این مقدار چیزی است که $f(t)$ وقتیکه $t \to \infty$ به آن میل می‌کند و ما آن را به صورت $f(\infty)$ نشان می‌دهیم.

۴ ـ پاسخ کلی را به صورت مجموع پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری به صورت: $f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$ بنویسید.

۵ ـ $f(0^+)$ را با استفاده از شرایط $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ پیدا کنید. اگر بخواهیم می‌توانیم L_{eq} را، برای محاسبهٔ $f(0^+)$، با یک منبع جریان $i_L(0^+)$ [یا یک مدار باز اگر $i_L(0^+) = 0$] جایگزین کنیم. به جز جریان سلف (و ولتاژ خازن)، سایر جریانها و ولتاژهای مدار می‌توانند تغییر ناگهانی داشته باشند.

۶ ـ سپس بنویسید: $f(0^+) = f(\infty) + A$ ، $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$ و یا:

$e^{-t/\tau}$ (مقدار نهایی ـ مقدار اولیه) + مقدار نهایی = پاسخ کلی

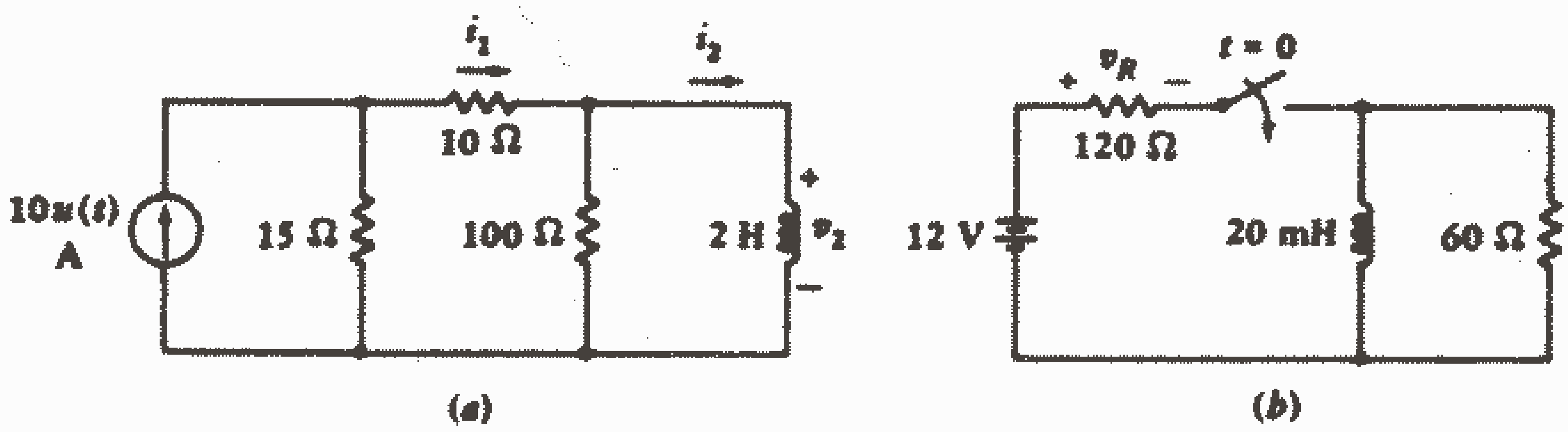
تمرین

۵ ـ ٦ ـ برای مدار شکل ٦-١٦a مقادیر مقابل را پیدا کنید: (a) $i_1(0^-)$، $i_2(0^-)$ و $v_2(0^-)$ (b) $i_1(0^+)$، $i_2(0^+)$، $v_2(0^+)$، (C) $i_1(\infty)$، $i_2(\infty)$، $v_2(\infty)$ (d) $i_1(۰/۱۵)$، $i_2(۰/۱۵)$، $v_2(۰/۱۵)$.

جواب: 0، 0، 0، ١/٢A، 0، ١٢٠V، ٦A، ٦A، ٤/٩٣A، 0، ٤/٦٦A، ٢٦/٨V

٦ ـ ٦ ـ v_R را در مدار شکل ٦-١٦b در لحظات داده شده پیدا کنید: (a) $t = -1mS$، (b) 0^-، (c) 0^+، (d) ١ms

جواب: 0V، 0، ٨، ١١/٤٦



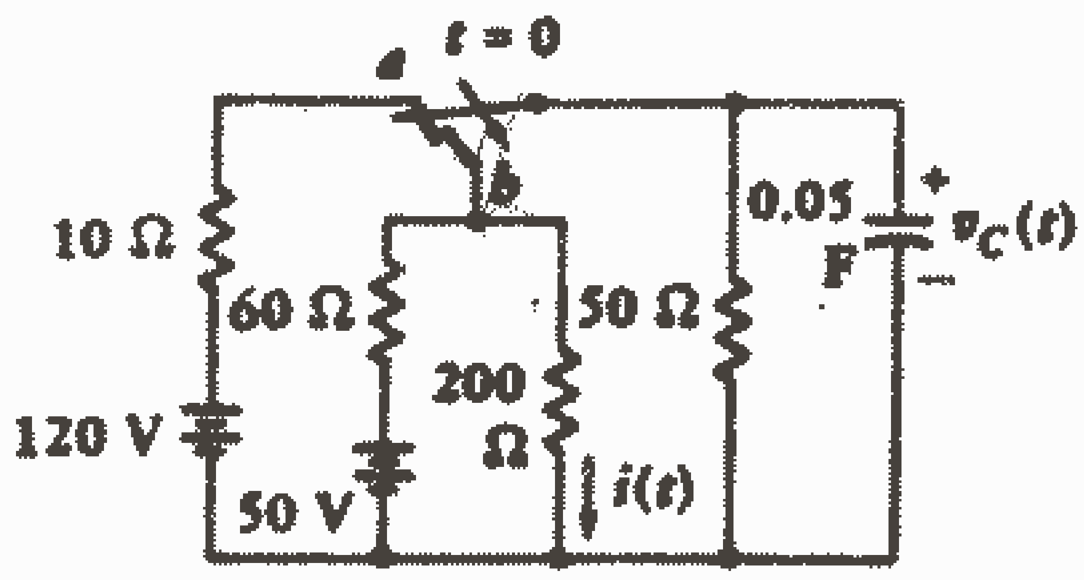
شکل ١٦ ـ ٦: به تمرینات ۵ ـ ٦ و ٦ ـ ٦ مراجعه کنید

٦ ـ ٦ ـ مدارهای RC

پاسخ کامل هر مدار RC را هم می‌توان به صورت مجموع پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری به دست آورد. شکل ٦-١٧ مداری را نشان می‌دهد که حاوی دو باتری، چهار مقاومت، یک خازن

و یک کلید است. فرض شده است که کلید برای مدت طولانی در وضعیت a بوده است و یا به صورت دیگر، پاسخ طبیعی ناشی از تحریک اولیهٔ مدار میرا شده و به مقدار ناچیزی رسیده است به طوریکه فقط یک پاسخ اجباری ناشی از منبع ۱۲۰V باقی مانده است. می‌خواهیم $v_C(t)$ را پیدا کنیم، بنابراین پاسخ اجباری را قبل از $t = 0$ وقتیکه کلید در وضعیت a باشد پیدا می‌کنیم. تمام ولتاژهایی که در سرتاسر مدار هستند ثابت می‌باشند، بنابراین جریانی در خازن جاری نمی‌باشد. با استفاده از یک تقسیم ولتاژ ساده، ولتاژ اولیه به دست می‌آید:

$$v_C(0) = \frac{50}{50 + 10}120 = 100$$



شکل ۱۷ ـ ۶: یک مدار RC که در آن پاسخ‌های کامل v_C و i به وسیله جمع کردن یک پاسخ طبیعی و یک پاسخ اجباری به دست می‌آید.

از آنجاییکه ولتاژ خازن نمی‌تواند تغییرات آنی داشته باشد، بنابراین ولتاژ فوق برای $t = 0^-$، $t = 0^+$ صادق است.

حال کلید به وضعیت b منتقل می‌شود و جواب کامل عبارت خواهد بود از: $v_C = v_{Cf} + v_{Cn}$ فرم پاسخی طبیعی با اتصال کوتاه کردن منبع ۵۰V و محاسبهٔ مقاومت معادل مشخص می‌شود:

$$v_{Cn} = Ae^{-t/R_{eq}C}$$

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{1}{200} + \frac{1}{50}} = 24$$

و یا

$$v_{Cn} = Ae^{-t/1.2}$$

برای محاسبهٔ پاسخ اجباری در حالتی که کلید در وضعیت b باشد آنقدر صبر می‌کنیم تا کلیهٔ ولتاژها و جریانها از تغییر باز ایستند به طوریکه بتوانیم خازن را مدار باز در نظر بگیریم و

یکبار دیگر با استفاده از تقسیم ولتاژ خواهیم داشت:

$$v_{Cf} = \frac{(50)(200)/(50 + 200)}{60 + (50)(200)/(50 + 200)} 50 = 20$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$v_C = 20 + Ae^{-t/1.2}$$

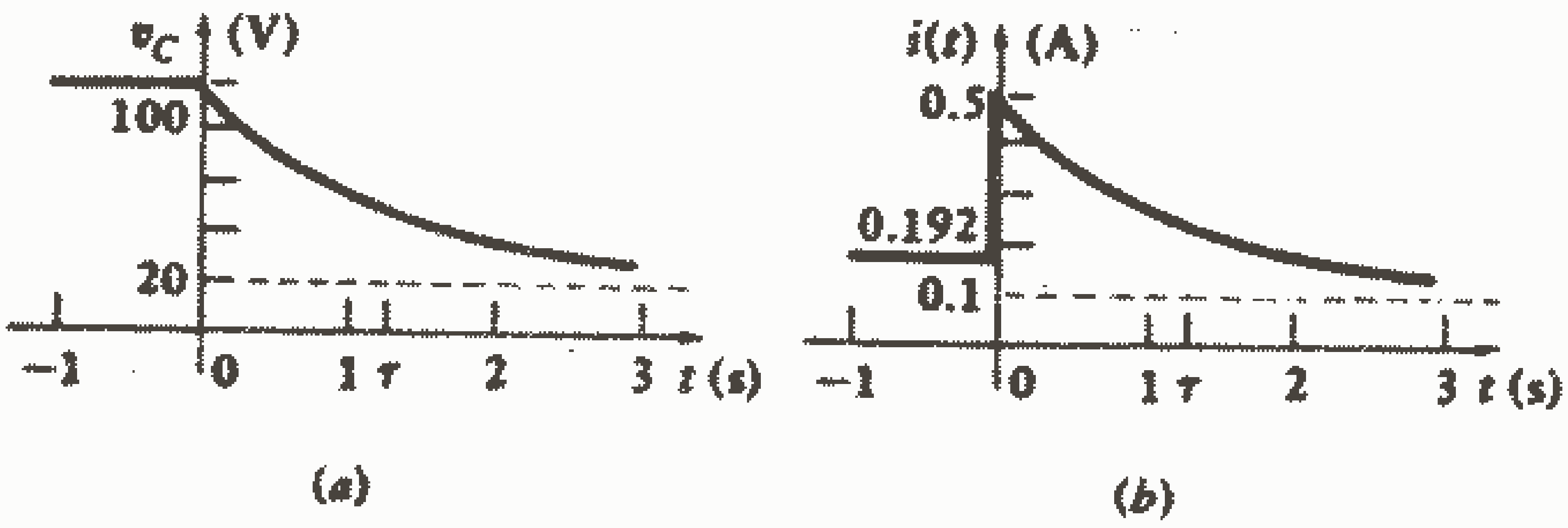
و با استفاده از شرایط اولیه‌ای که قبلاً به دست آمد، داریم:

$$100 = 20 + A \rightarrow v_C = 20 + 80e^{-t/1.2} \qquad t > 0$$

این پاسخ در شکل ۱۸a-٦ رسم شده است و باز مشاهده می‌کنیم که پاسخ طبیعی حالت گذرایی از مقدار اولیه به مقدار نهایی را نشان می‌دهد.

و بالاخره بیایید پاسخی را که لازم نیست در حین لحظهٔ سوئیچینگ ثابت باقی بماند (مانند $i(t)$ در شکل ۱۷-٦) محاسبه کنیم. وقتیکه کلید در وضعیت a باشد، واضح است که $i = ۵۰/۲٦۰ = ۰٫۱۹۲A$، وقتیکه کلید به وضعیت b منتقل می‌شود، پاسخ اجباری برای این جریان عبارت است از:

$$i_f = \frac{50}{60 + (50)(200)/(50 + 200)} \frac{50}{50 + 200} = 0.1$$



شکل ۱۸ - ٦: پاسخ‌های (a) v_C و (b) i به صورت تابعی از زمان برای مدار شکل ۱۷ - ٦ رسم شده‌اند.

فرم پاسخی طبیعی همانی است که قبلاً برای ولتاژ خازن تعیین کردیم: $i_n = Ae^{-t/1.2}$

با ترکیب نمودن پاسخهای طبیعی و اجباری خواهیم داشت: $i = 0.1 + Ae^{-t/1.2}$

برای محاسبهٔ A، لازم است که $i(0^+)$ را بدانیم، و برای اینکه آن را پیدا کنیم توجه خود را معطوف عنصر ذخیره کنندهٔ انرژی (در اینجا خازن) می‌کنیم و این واقعیت را در نظر می‌گیریم که v_C، که باید در حین فاصلهٔ زمانی کلیدزنی در مقدار ۱۰۰V باقی بماند، عامل

کنترل‌کننده‌ای است که سایر جریانها و ولتاژها را در لحظهٔ $t = 0^+$ ایجاد می‌کند. از آنجاییکه $v_C(0^+) = ۱۰۰V$ ، و چون خازن موازی با مقاومت ۲۰۰Ω می‌باشد، در می‌یابیم که:

$$i(0^+) = ۰,۵A\ ,\ A = ۰,۴ \rightarrow i(t) = ۰,۱۹۲\ \ t<۰$$

$$i(t) = ۰,۱+۰,۴e^{-t/۱,۲}\ \ t>۰$$

$$i(t) = ۰,۱۹۲+(-\%۹۲+۰,۴e^{-t/۱,۲})u(t)\ A$$

که رابطهٔ آخر برای همهٔ مقادیر t صحیح می‌باشد. پاسخ کامل برای همهٔ مقادیر t را می‌توانیم به طور خلاصه‌تر با استفاده از $u(-t)$، که به ازای $t<۰$ برابر یک و به ازای $t>۰$ برابر صفر است، هم بنویسیم: $i(t) = ۰,۱۹۲u(-t)+(۰,۱+۰,۴e^{-t/۱,۲})u(t)\ A$ این پاسخ در شکل ۶-۱۸b رسم شده است. توجه داشته باشید که فقط چهار عدد برای نوشتن فرم تابعی پاسخ این مدار که دارای یک عنصر ذخیره‌کنندهٔ انرژی می‌باشد و یا برای رسم این پاسخ، کافی می‌باشد: مقدار ثابت قبل از کلیدزنی $(۰,۱۹۲A)$، مقدار لحظه‌ای درست در لحظهٔ بعد از کلیدزنی $(۰,۵A)$، پاسخ اجباری ثابت $(۰,۱A)$ و ثابت زمانی $(۱,۲S)$. سپس تابع‌نمایی منفی مربوطه را به سادگی می‌توانیم بنویسیم و یا ترسیم کنیم.

بحث خود را با درج فهرست‌وار متناظر عباراتی که در انتهای بخش ۵-۶ آمده است، به پایان می‌بریم.

روشی را که ما تا به حال برای پیدا کردن پاسخ یک مدار RC بعد از وصل یا قطع منابع dc در لحظه‌ای مانند $t = 0$، به کار برده‌ایم در زیر خلاصه شده است. فرض می‌کنیم که مدار وقتیکه همهٔ منابع مستقل برابر صفر قرار داده شوند قابل کاهش به یک مقاومت معادل R_{eq} موازی با یک خازن معادل C_{eq} باشد. پاسخی را که در جستجوی آن هستیم با $f(t)$ نشان داده‌ایم.

۱ ـ با غیرفعال نمودن همهٔ منابع مستقل مدار را ساده کنید و R_{eq}، C_{eq} و ثابت زمانی $\tau = R_{eq}C_{eq}$ را تعیین کنید.

۲ ـ با در نظر گرفتن C_{eq} به عنوان مدار باز و با استفاده از روشهای تحلیل dc مقدار $v_C(0^-)$ را پیدا کنید.

۳ ـ دوباره با در نظر گرفتن C_{eq} به عنوان مدار باز و با استفاده از روشهای تحلیل dc، پاسخ اجباری را پیدا کنید. این مقدار چیزی است که وقتیکه $t \rightarrow \infty$، $f(t)$ به آن میل می‌کند و ما آن را با $f(\infty)$ نشان می‌دهیم.

۴ ـ پاسخ کلی را به صورت مجموع پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری بنویسید:

$$f(t) = f(\infty)+Ae^{-t/\tau}$$

۵ ـ $f(0^+)$ را با استفاده از شرایط $v_C(0^+) = v_C(0^-)$ پیدا کنید. برای انجام این محاسبه اگر بخواهید می‌توانید C_{eq} را با یک منبع ولتاژ $v_C(0^+)$ [و اگر $v_C(0^+) = 0$ با یک اتصال کوتاه] جایگزین کنید. به جز ولتاژهای خازنی (و جریان سلفها)، سایر ولتاژها و جریانهای مدار می‌توانند تغییرات ناگهانی داشته باشند.

۶ ـ سپس خواهیم داشت:

$$f(t) = f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-t/\tau} \quad , \quad f(0^+) = f(\infty)+A$$

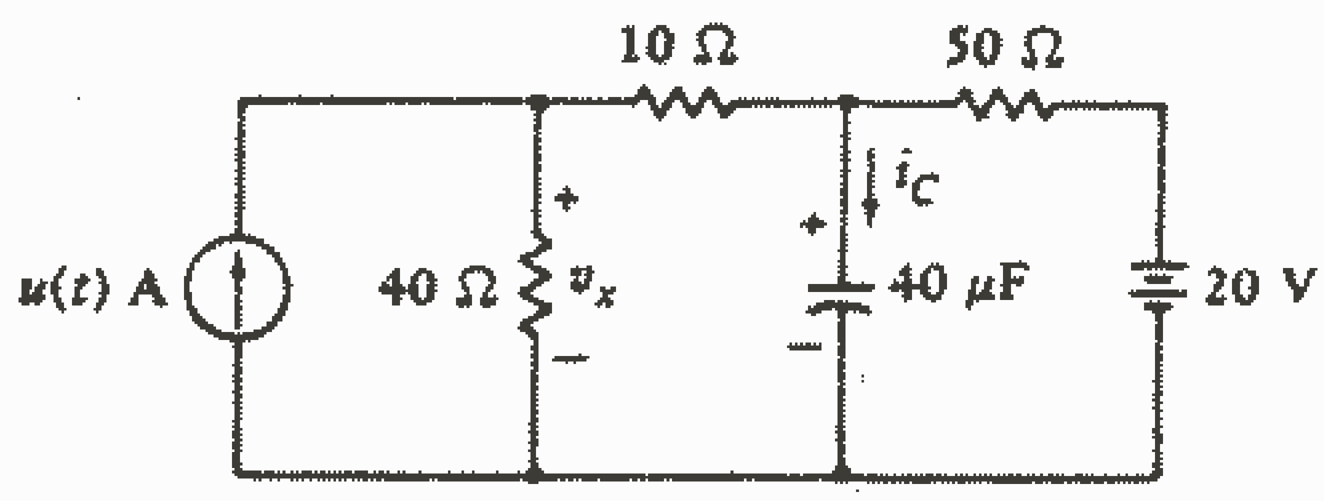
و یا اینکه: $e^{-t/\tau}$(مقدار نهایی ـ مقدار اولیه) + مقدار نهایی = پاسخ کلی

تمرین

۷ ـ ۶ ـ در لحظهٔ $t = ۱mS$ در مدار شکل ۱۹ ـ ۶ مقادیر زیر را پیدا کنید:

(a) v_C ، (b) i_C ، (c) v_x

جواب: ۲۲,۶V ، ۰,۲۹۴A ، ۲۶,۱V



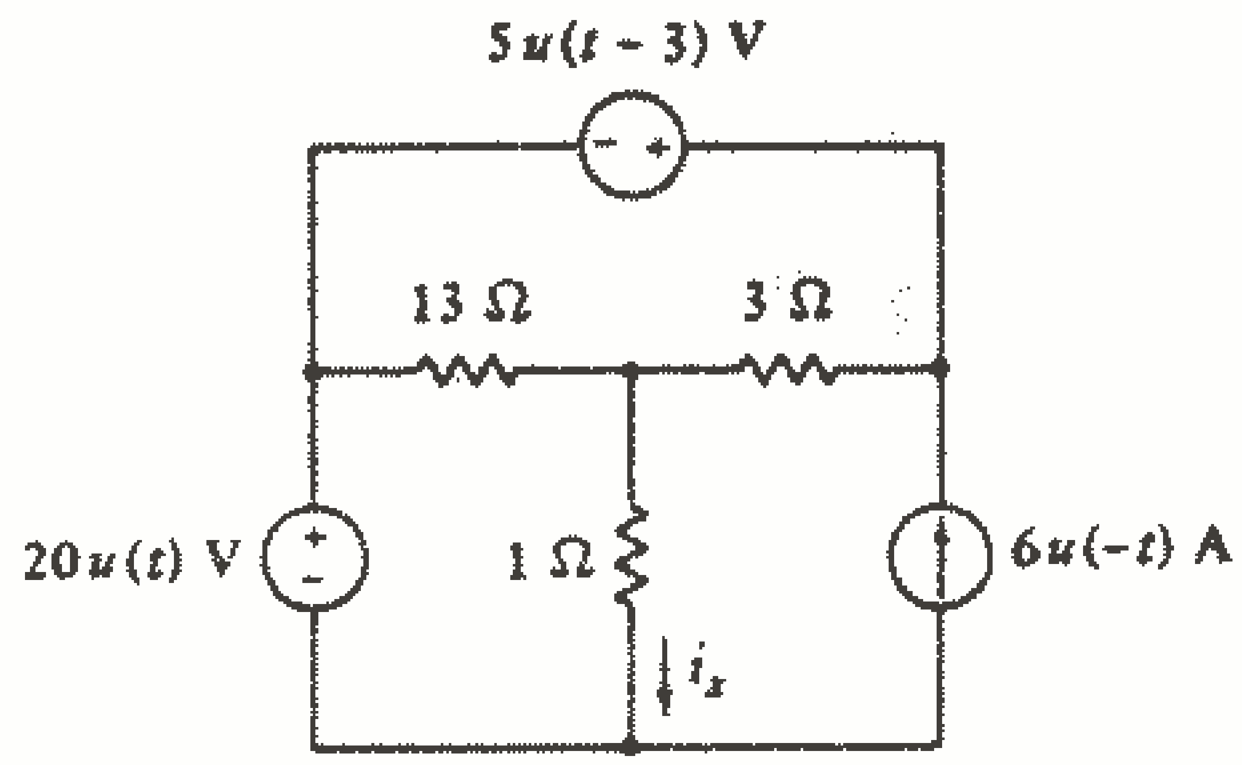
شکل ۱۹ ـ ۶: به تمرین ۷ ـ ۶ مراجعه کنید.

مسائل

۱ ـ در لحظهٔ $t = 5S$ مقادیر زیر را در شکل ۲۰-۶ تعیین کنید:

$u(t-6)$ (a)، $u(6-t)$ (b)، $2-u(t^2-10t+24)$ (c)، $(t-2)u(t-2)$ (d)،

$2^{t-3}(-1)^{10u(t-3)}$(e)، $-tu(-t)+tu(t)$(f)، i_x (g)



شکل ۲۰ ـ ۶: به مسئله ۱ مراجعه کنید.

۲ ـ تابع زمانی $f(t) = [u(t+5)-u(t-5)]\,[u(\cos\frac{1}{2}\pi t)+u(\sin\pi t)]$ را رسم کنید.

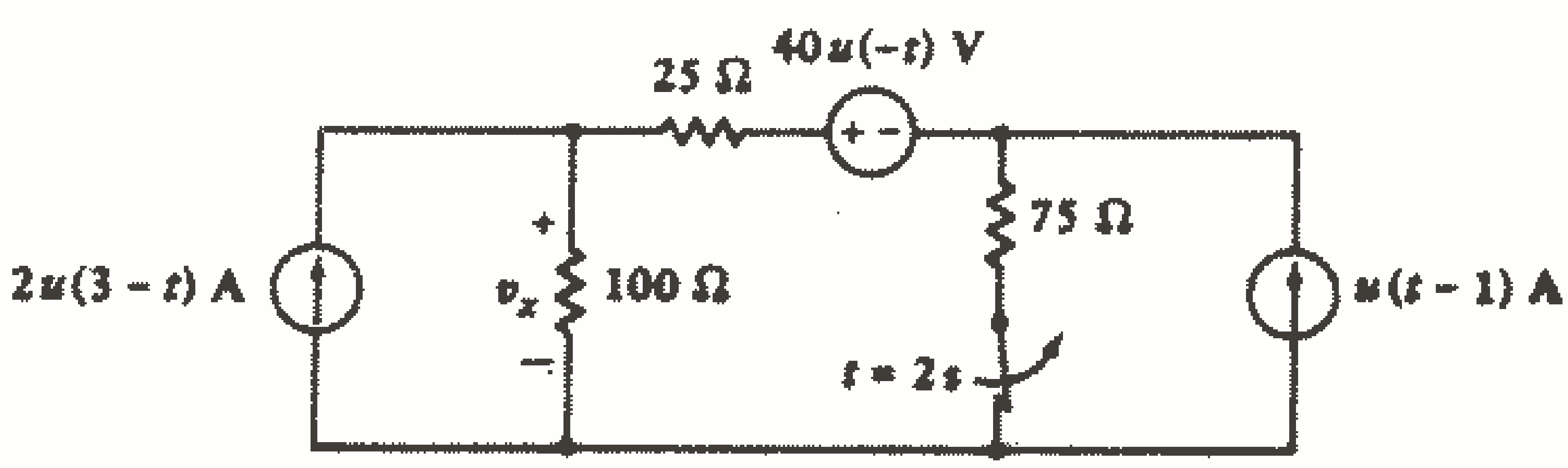
۳ ـ مقدار هر یک از توابع زمانی زیر را به ازای $t = 1{,}5S$ محاسبه کنید:

$2u(t+1)-3u(t+2)+4u(t-3)$ (a)، $2u(t-1)+5[u(t)]^2$ (b)، $4u(\cos 3t)$ (C)، $4\cos[3u(t)]$ (d)

(e) ولتاژی به ازای $t<0$ برابر $10V$ و به ازای $0<t<5S$ برابر $2e^{-0{,}4t}$ و به ازای $t>5S$ برابر صفر است، آن را به صورت یک تابع زمان با استفاده از توابع تحریک پلهٔ واحد بیان کنید.

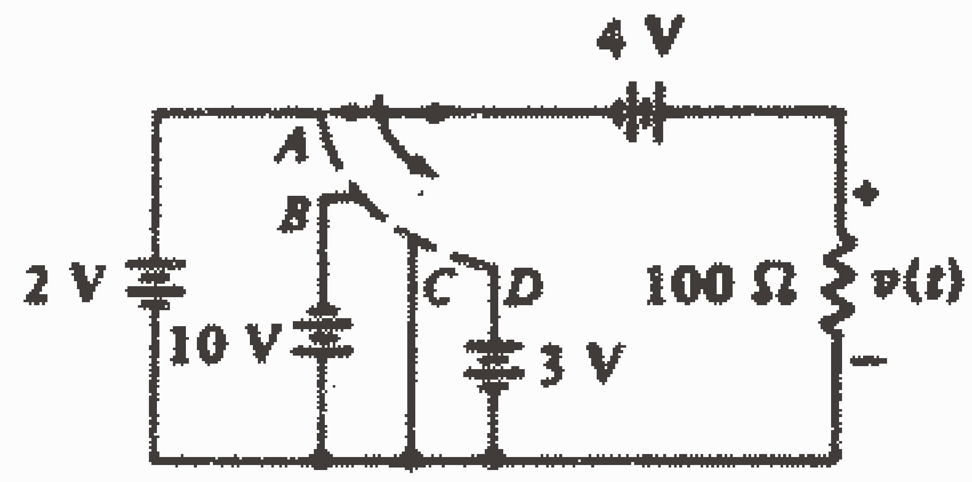
۴ ـ «شبکه عمومی» در هر قسمت شکل ۳-۶ شامل یک منبع ولتاژ $10u(2-t)V$، با علامت + در ترمینال بالایی، به طور سری با یک مقاومت 5Ω می‌باشد. اگر در مدار خارجی $V = 5V$ و $t_0 = -1s$ باشد، جریان ورودی به شبکه در ترمینال بالایی در هر حالت را رسم کنید.

۵ ـ v_x را در شبکهٔ شکل ۲۱-۶ در فواصل زمانی $1S$ از $t = 0{,}5S$ تا $t = 3{,}5S$ پیدا کنید.



شکل ۲۱ ـ ۶: به مسئله ۵ مراجعه کنید.

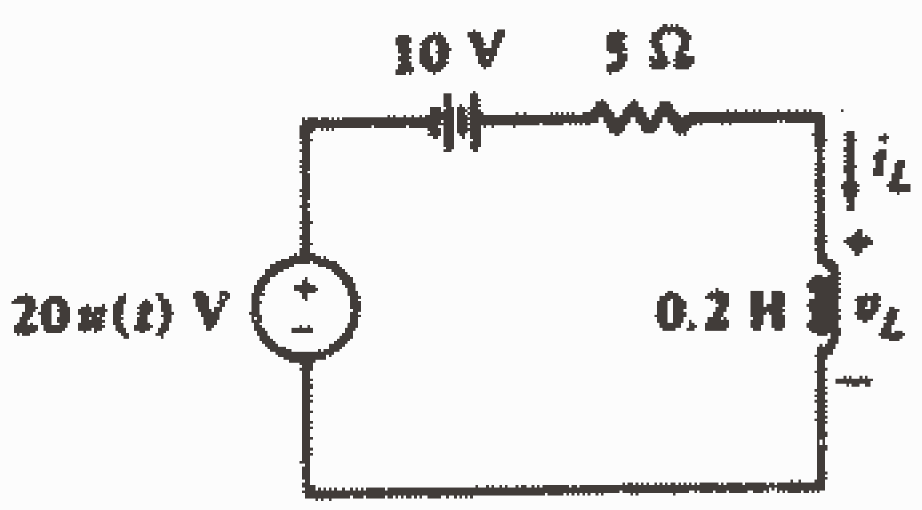
۶ - کلید شکل ۲۲-۶ در $t<0$ در وضعیت A بوده و در $t = 0$ به وضعیت B می‌رود و سپس در $t = 4S$ به وضعیت C و در $t = 6S$ به وضعیت D منتقل می‌شود و در همانجا می‌ماند. $v(t)$ را به صورت تابعی از زمان رسم کنید و آن را به صورت مجموعی از توابع تحریک پله‌ای بیان کنید.



شکل ۲۲ - ۶: به مسئله ۶ مراجعه کنید.

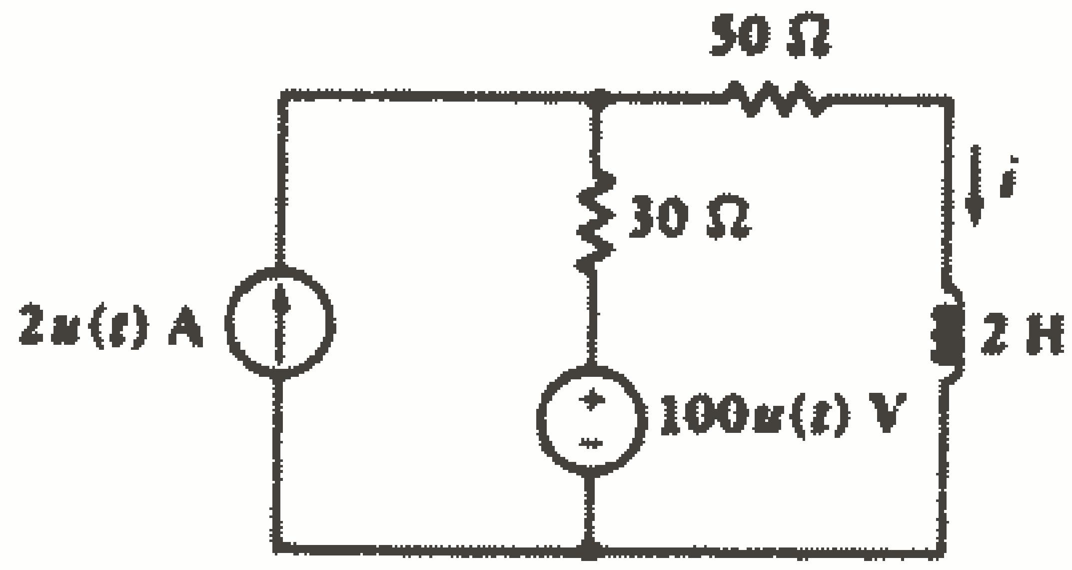
۷ - تحریک اعمال شده به مدار RL در شکل ۹b-۶ را می‌توان به دو قسمت به صورت زیر: $Vu(t) = V-Vu(-t)$ تقسیم نمود. مؤلفهٔ اول یک منبع dc به مقدار V ولت است در حالیکه دومی بعد از $t = 0$ یک پاسخ بدون منبع از نوعی که در فصل ۵ توصیف شد، تولید می‌کند. نشان دهید که جمع آثار این دو پاسخ، یک جریان کلی مساوی با معادلهٔ (۱) قسمت ۳-۶ ارائه می‌کند.

۸ - در مدار شکل ۲۳-۶، $i_L(t)$ ، $v_L(t)$ را نسبت به t در فاصلهٔ $-3\tau < t < 3\tau$ رسم کنید.



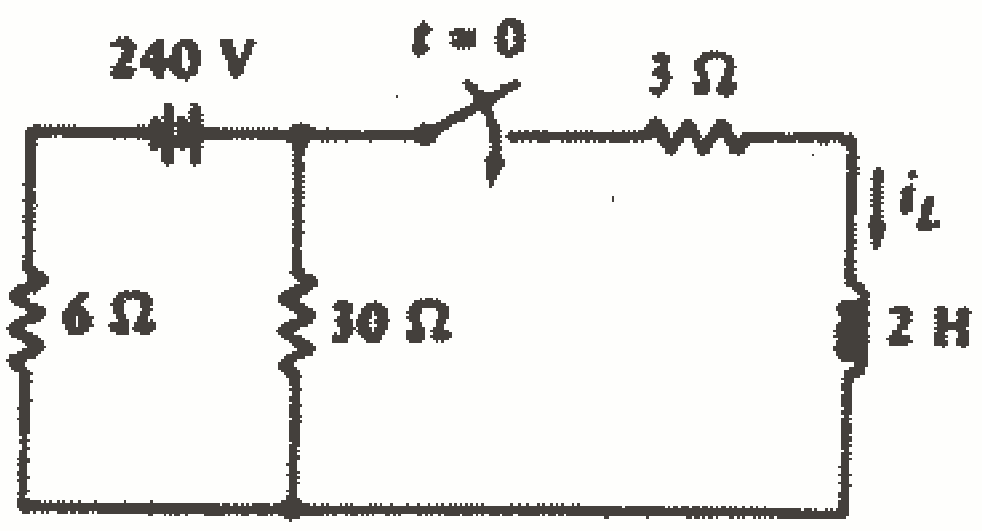
شکل ۲۳ - ۶: به مسئله ۸ مراجعه کنید.

۹ - شبکهٔ سمت چپ سلف را در شکل ۲۴-۶ با معادل تونن آن جایگزین کنید و سپس $i(t)$ را برای $t>0$ تعین کنید.



شکل ۲۴ ـ ۶: به مسئله ۹ مراجعه کنید.

۱۰ ـ کلید شکل ۲۵-۶ برای مدت طولانی باز بوده است و در لحظهٔ $t = 0$ بسته می‌شود. (a) بعد از جایگزین کردن هر چه که در سمت چپ سلف است با معادل تونن آن، $i_L(t)$ را پیدا کنید و آن را برای $t>0$ رسم کنید. (b) رابطه‌ای برای $i_L(t)$ پیدا کنید که برای همهٔ مقادیر t صادق باشد.

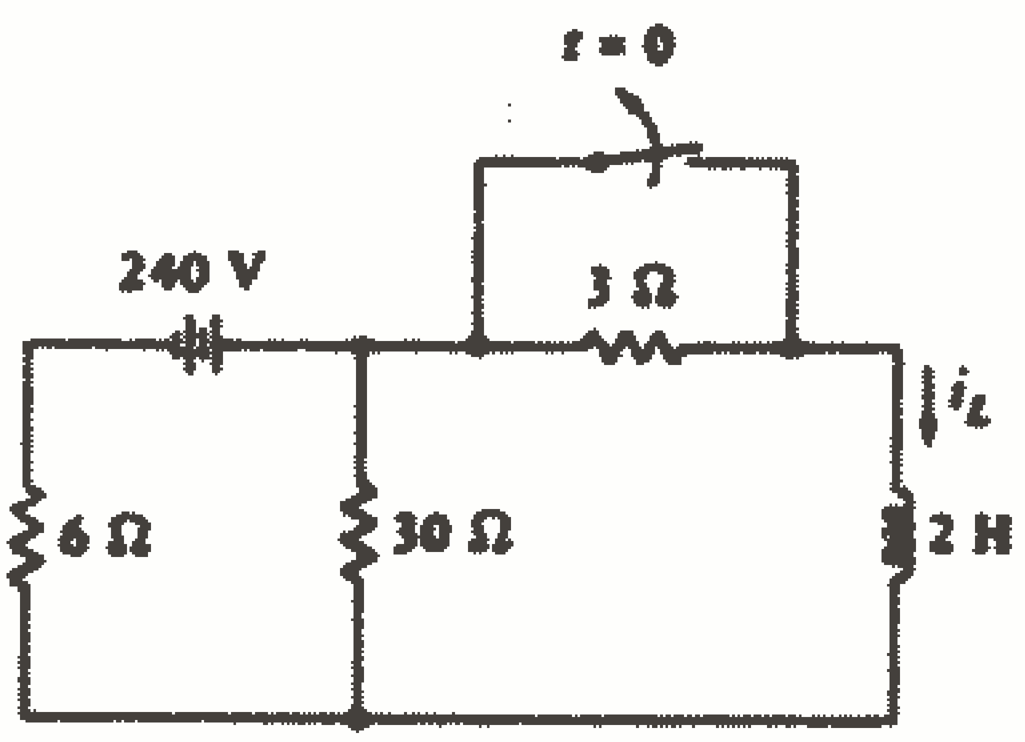


شکل ۲۵ ـ ۶: به مسئله ۱۰ مراجعه کنید.

۱۱ ـ معادلهٔ (۳) از بخش ۴-۶ بیانگر جواب کلی یک مدار RL سری تحریک شده می‌باشد که در آن Q تابعی است از زمان و A , P مقادیر ثابت هستند. فرض کنید $R = 200\Omega$ و $L = 5H$ آنگاه $i(t)$ را پیدا کنید به شرطی که تابع تحریک ولتاژ $LQ(t)$ مقادیر زیر را داشته باشد:

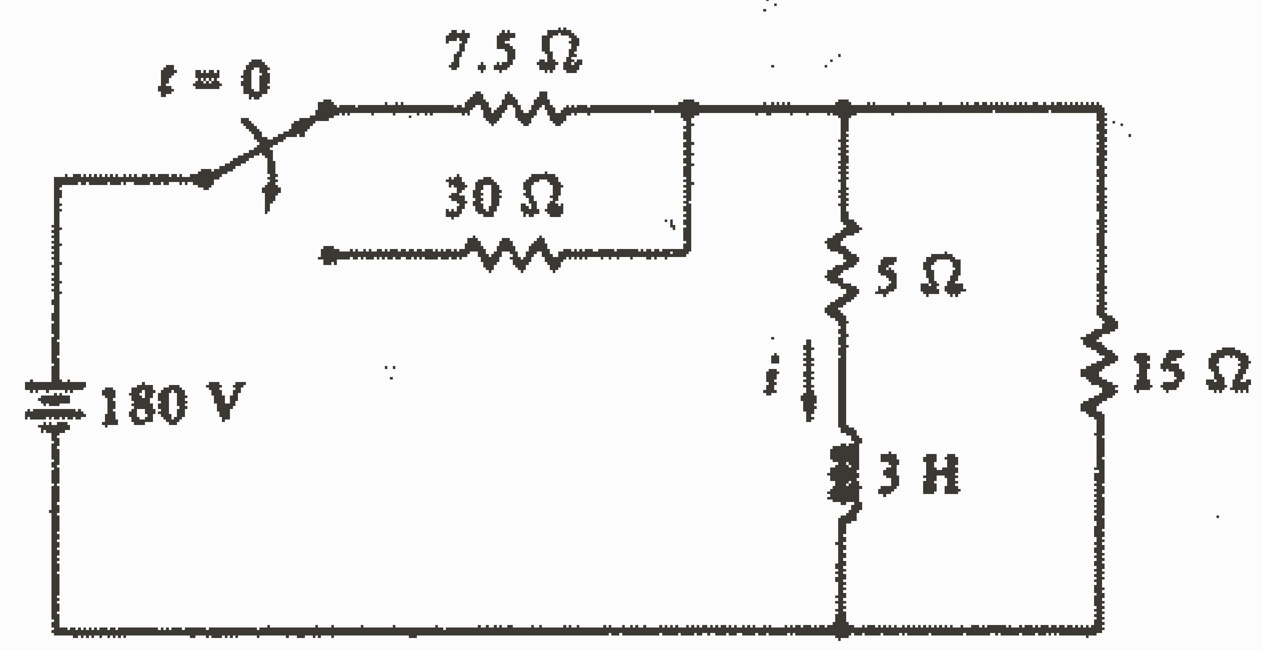
(a) $5u(t)$ V، (b) $5+5u(t)$ V، (c) $5u(t)\sin 40t$ V

۱۲ ـ در شکل ۲۶-۶ کلید برای مدت طولانی بسته بوده است و در لحظهٔ $t = 0$ باز می‌شود. رابطه‌ای برای $i_L(t)$ به ازای $t<0$ یا $t>0$ پیدا کنید و آن را در فاصلهٔ زمانی $-1<t<1S$ رسم کنید.



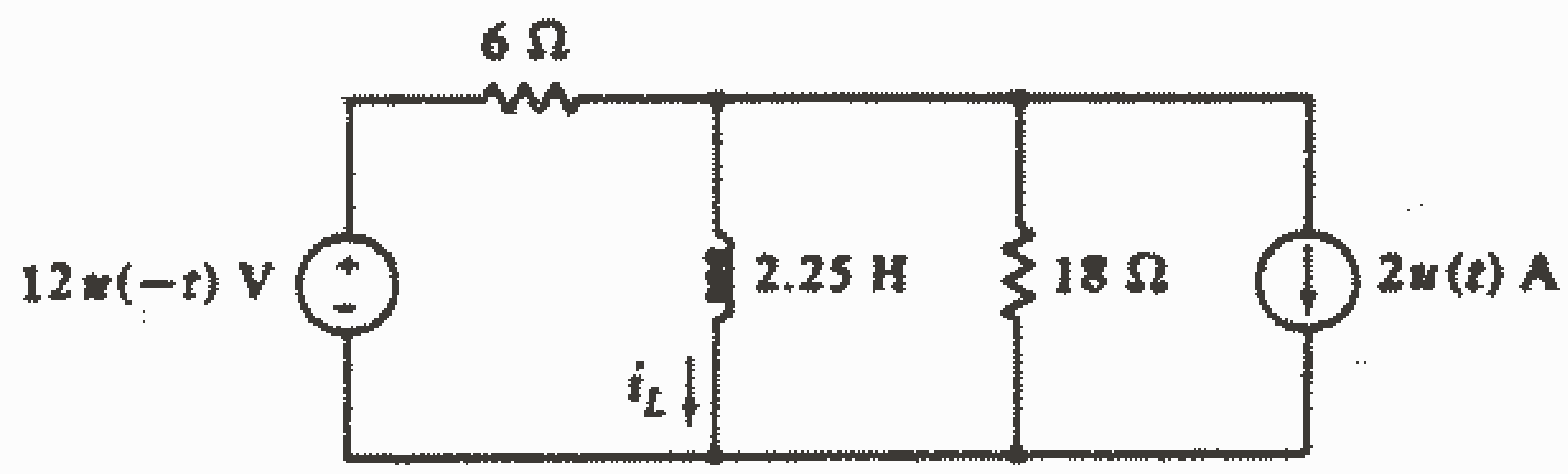
شکل ۲۶ ـ ۶: به مسئله ۱۲ مراجعه کنید.

۱۳ - کلید در شکل ۲۷-٦ در لحظهٔ $t = 0$ پایین می‌افتد. مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) i در لحظهٔ $t = 0/1S$، (b) ماکزیمم دامنهٔ ولتاژی که در دو سر سلف ظاهر می‌شود.



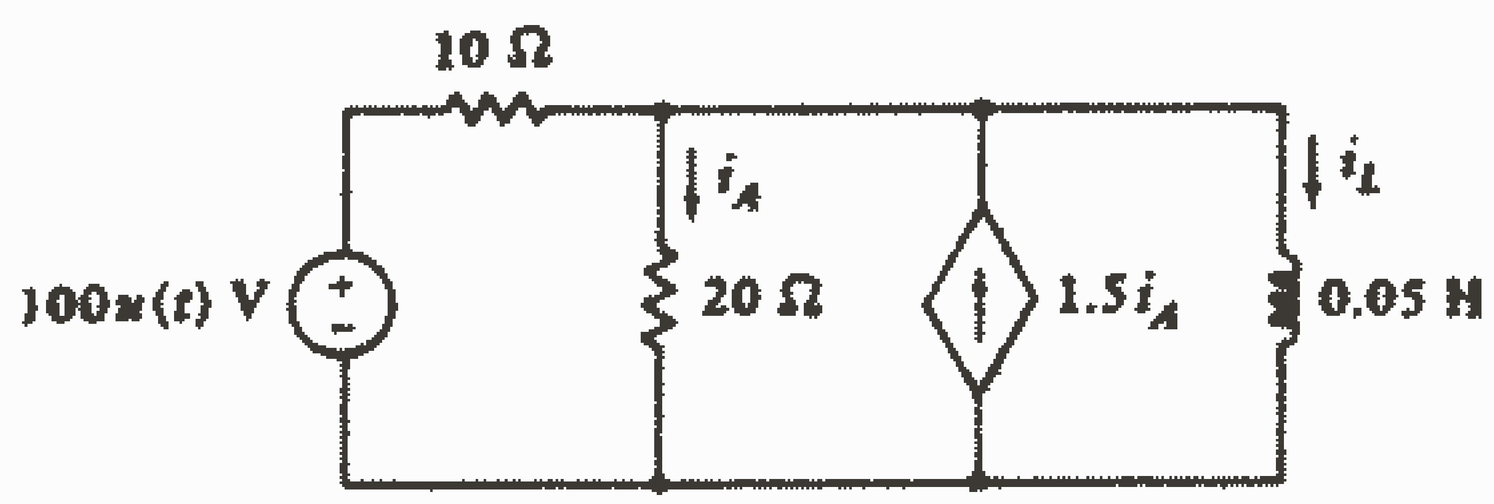
شکل ۲۷ - ٦: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

۱٤ - رابطه‌ای برای i_L در شکل ۲۸-٦ به ازای همهٔ مقادیر غیرمنفی t به دست آورید و سپس آن را به طور دقیق نسبت به t رسم کنید (مقادیر مقیاس را روی هر دو محور نشان دهید).



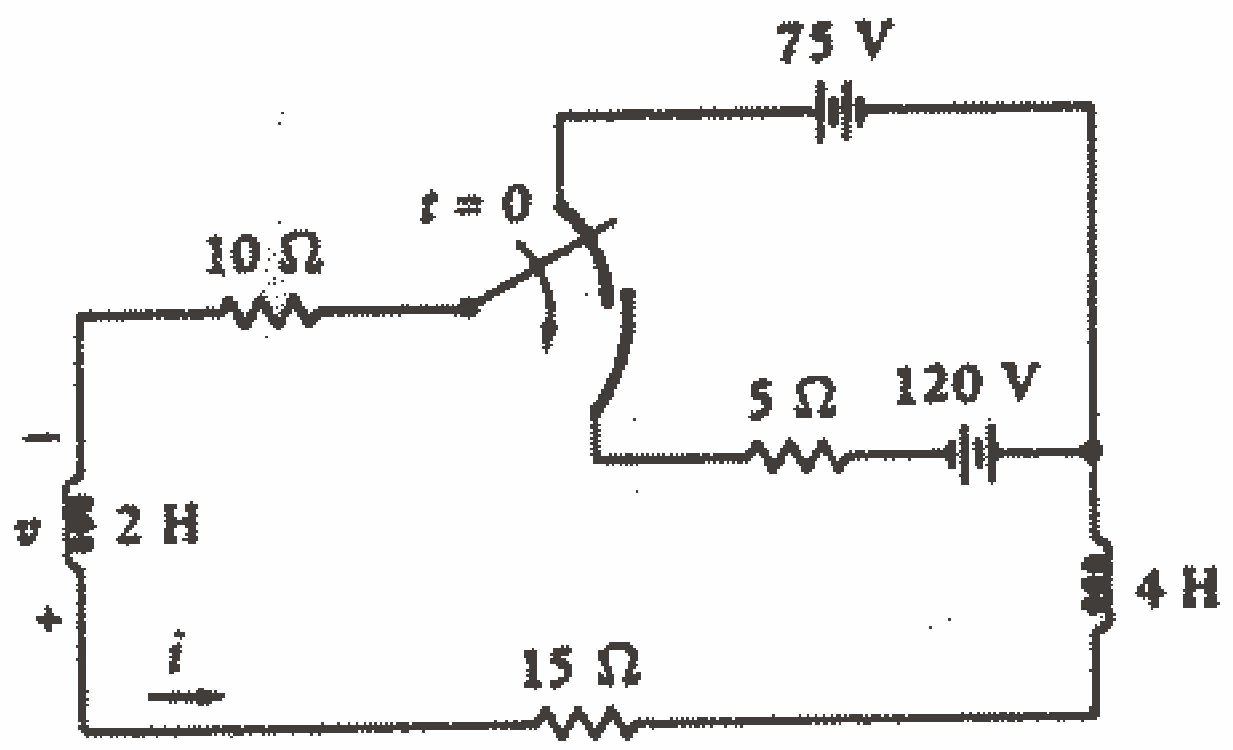
شکل ۲۸ - ٦: به مسئله ۱٤ مراجعه کنید.

۱۵ - $i_L(t)$ را به ازای $t>0$ در مدار شکل ۲۹-٦ پیدا کنید.



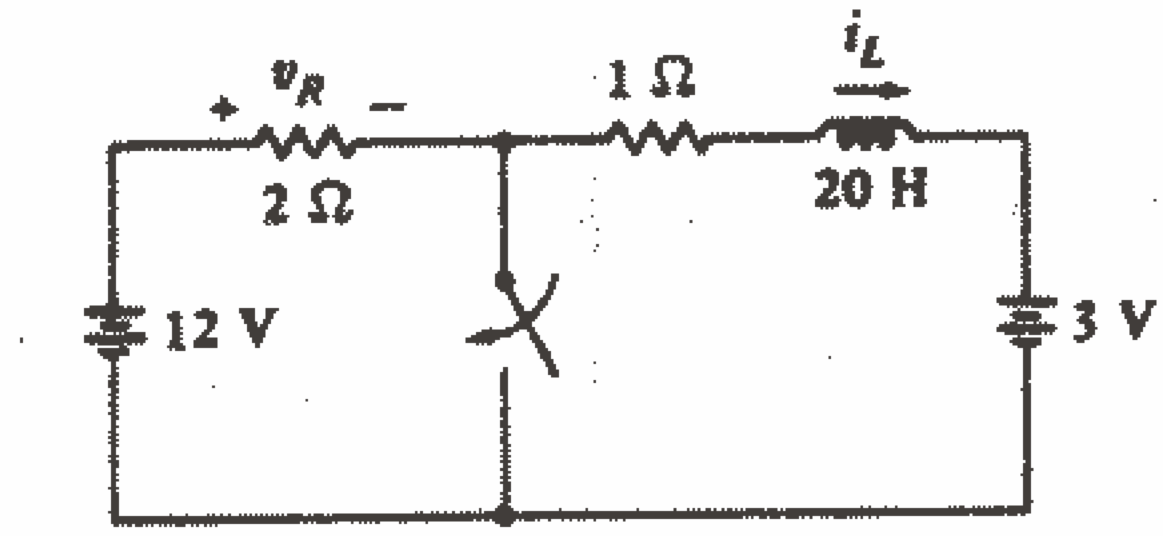
شکل ۲۹ - ٦: به مسئله ۱۵ مراجعه کنید.

۱۶ ـ اگر در شکل ۳۰-۶ کلید در لحظهٔ $t = 0$ پایین افتد، آنگاه: (a) به ازای چه مقداری از t مقدار i صفر می‌شود. (b) به ازای $i = 0$ مقدار v چقدر خواهد بود؟



شکل ۳۰ ـ ۶: به مسئله ۱۶ مراجعه کنید.

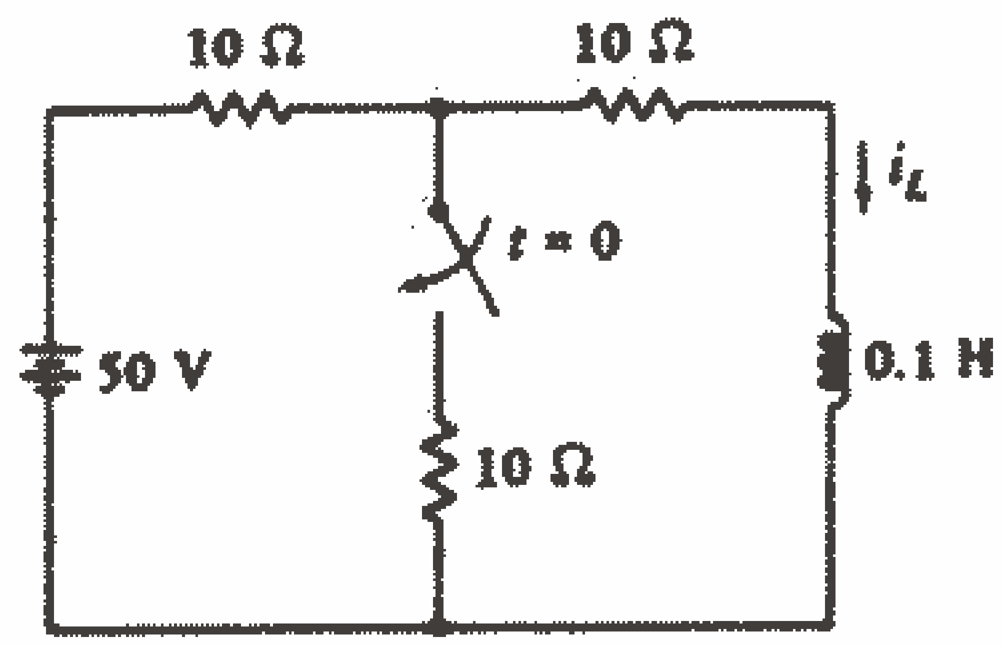
۱۷ ـ در شکل ۳۱-۶، ۱۶S قبل و ۱۶S بعد از بسته شدن کلید مقادیر i_L ، v_R را به دست آورید.



شکل ۳۱ ـ ۶: به مسئله ۱۷ مراجعه کنید.

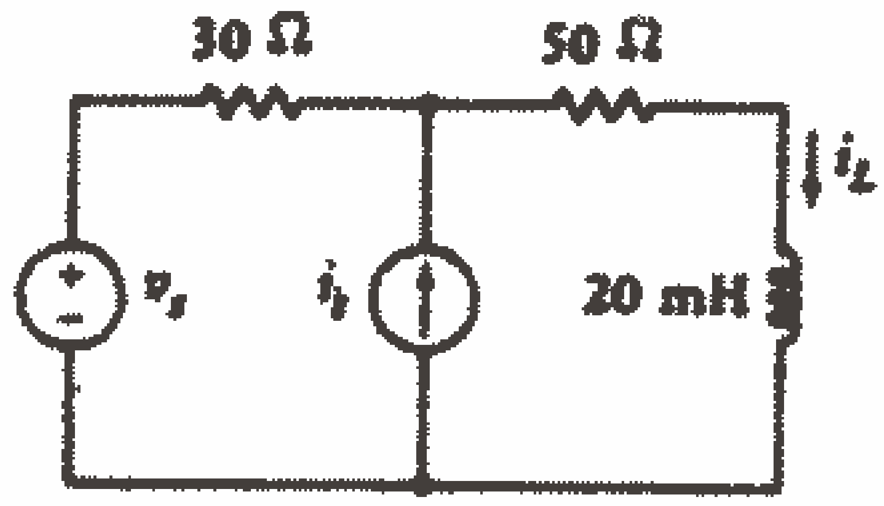
۱۸ - در شکل ۳۲-۶ مقدار i_L را در لحظات زیر پیدا کنید:

(a) $t = -5\,mS$ ، (b) $t = 5\,mS$ ، (c) $t = 10\,mS$



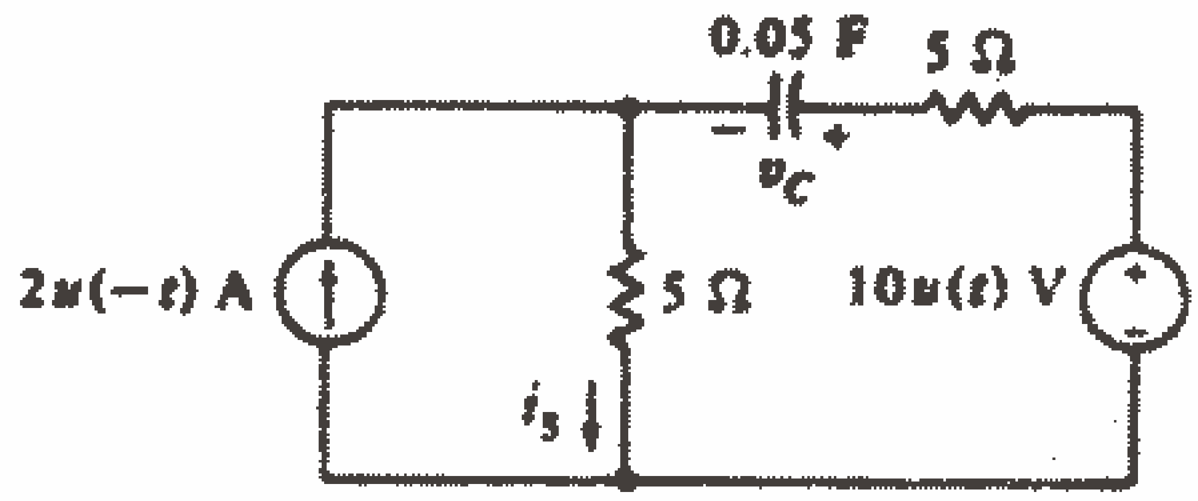
شکل ۳۲ ـ ۶: به مسئله ۱۸ مراجعه کنید.

۱۹ ـ در شکل ۳۳-۶ فرض کنید، $v_s = 2u(t)$ V ، $i_s =$ ۸۰u(t − ۰/۰۰۰۲) mA,
آنگاه $i_L(t)$ را به ازای همهٔ مقادیر t پیدا کنید.



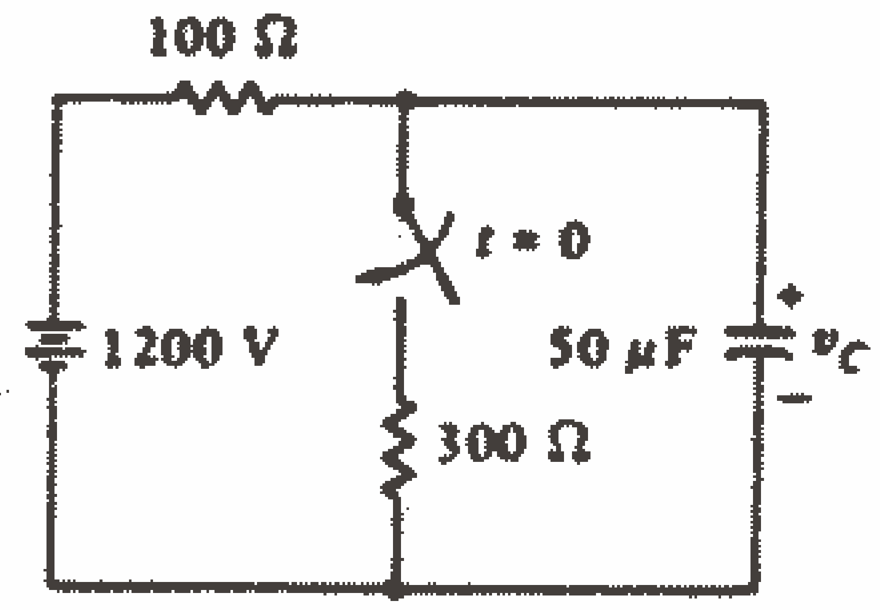
شکل ۳۳ ـ ۶: به مسئله ۱۹ مراجعه کنید.

۲۰ ـ (a) رابطه‌ای برای $v_C(t)$ در مدار شکل ۳۴-۶ به دست آورید و آن را به صورت تابعی از زمان به ازای مقادیر مثبت و منفی t رسم کنید. (b) اینکار را برای $i_5(t)$ هم تکرار کنید.



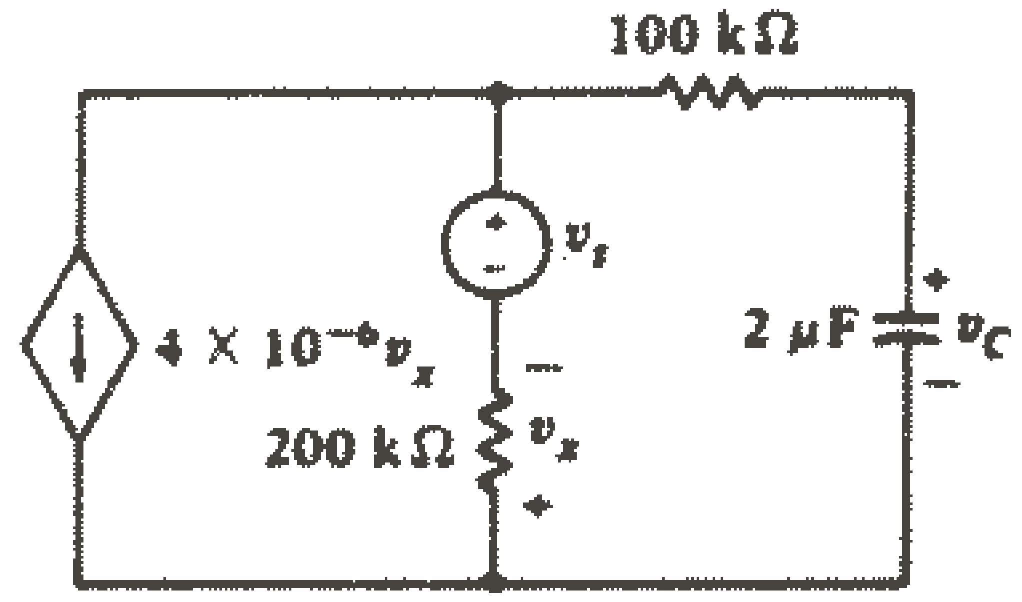
شکل ۳۴ ـ ۶: به مسئله ۲۰ مراجعه کنید.

۲۱ ـ در مدار شکل ۳۵-۶، کلید برای مدت طولانی باز بوده است. (a) مقدار v_C(۲mS) ، v_C(−۲mS) را حساب کنید. (b) حال اگر کلید برای مدت طولانی بسته بوده باشد، مقدار v_C را دو میلی ثانیه بعد از باز شدن ناگهانی آن پیدا کنید.



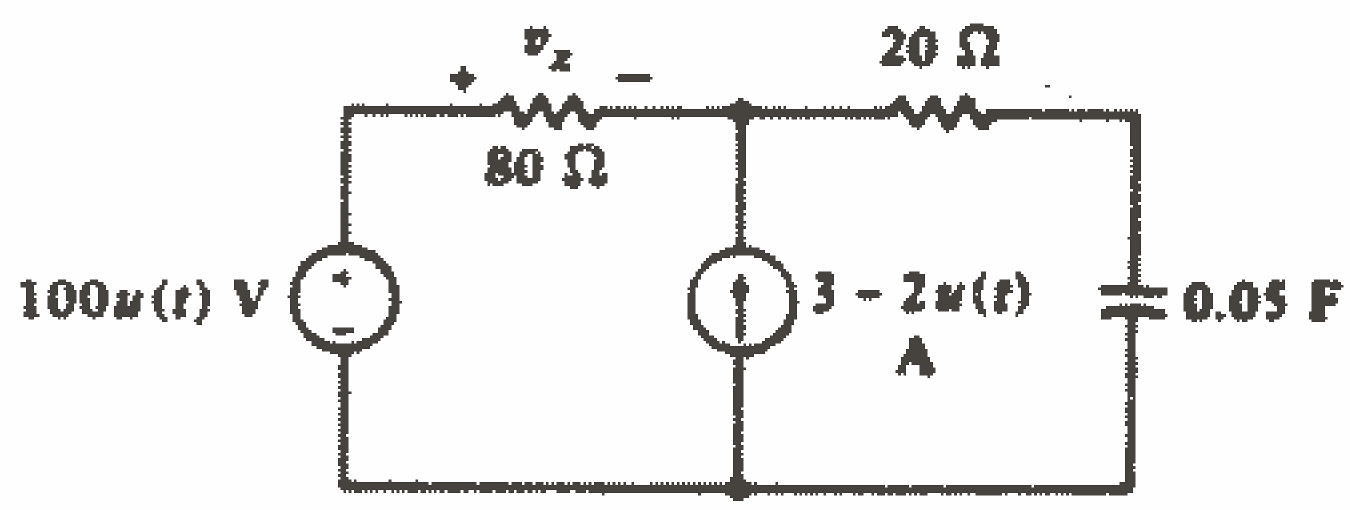
شکل ۳۵ ـ ۶: به مسئله ۲۱ مراجعه کنید.

۲۲ ـ فرض کنید که در مدار شکل ۳۶-۶ داشته باشیم: $v_s = 9-12u(t)$ V (a) $v_C(t)$ را به ازای جمیع مقادیر t پیدا کنید. (b) v_C را نسبت به t رسم کنید. (c) به ازای چه مقدار t خواهیم داشت: $v_C = 0$ ؟



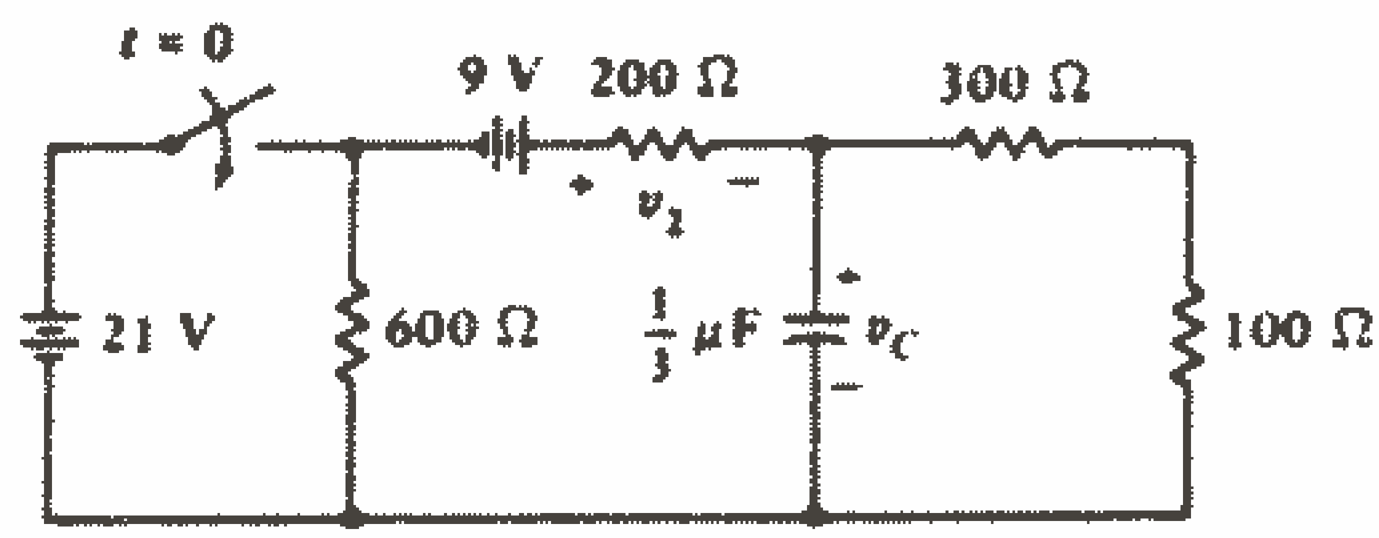
شکل ۳۶ ـ ۶: به مسئله ۲۲ مراجعه کنید.

۲۳ ـ در مدار شکل ۳۷-۶، رابطه‌ای برای $v_x(t)$ پیدا کنید که برای جمیع مقادیر t صادق باشد.



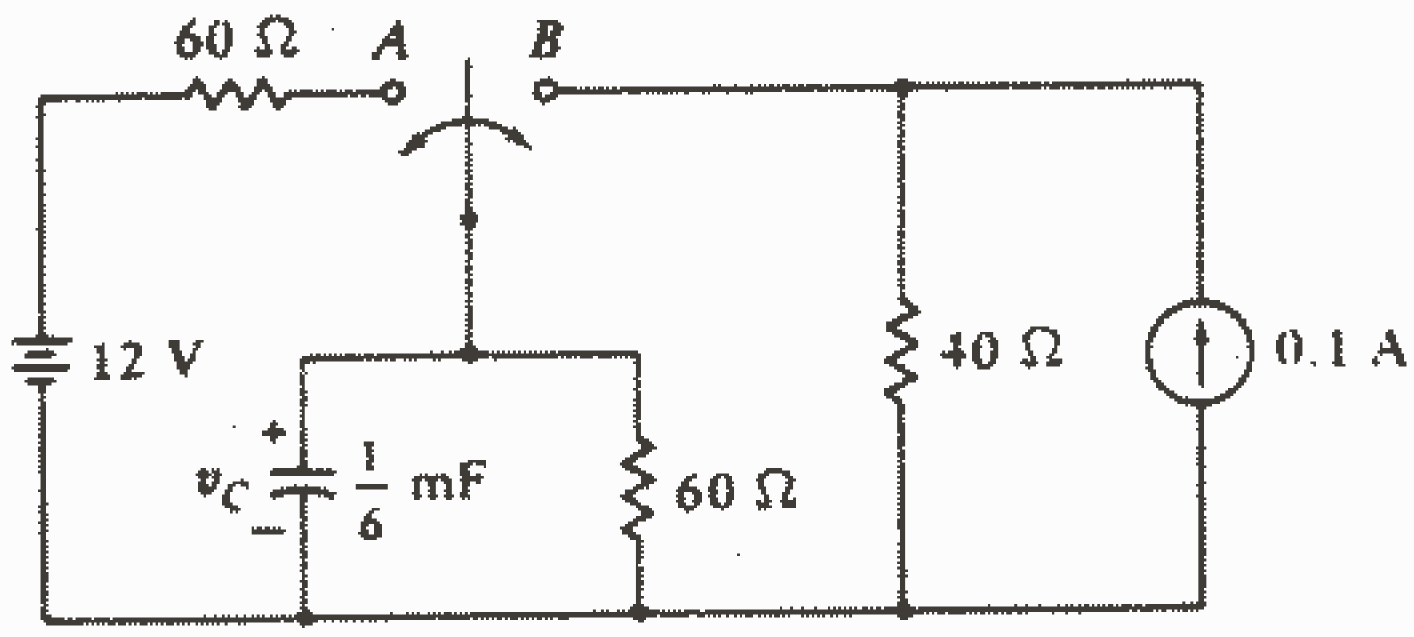
شکل ۳۷ ـ ۶: به مسئله ۲۳ مراجعه کنید.

۲۴ ـ در مدار شکل ۳۸-۶، کلید برای مدت طولانی باز بوده است و در لحظهٔ $t = 0$ بسته می‌شود. برای کمیتهای زیر روابطی پیدا کنید که به ازای جمیع مقادیر t صادق باشد:
$v_C(t)$ (a)، $v_2(t)$ (b)



شکل ۳۸ ـ ۶: به مسئله ۲۴ مراجعه کنید.

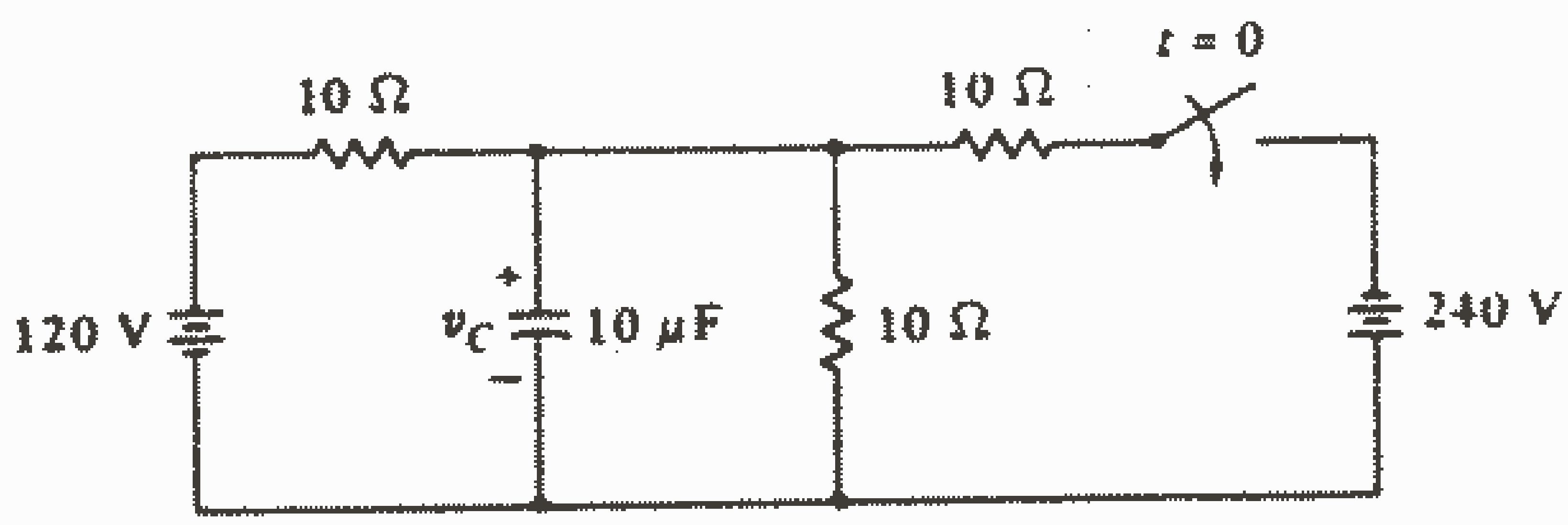
۲۵ - در شکل ۳۹-۶، کلید برای مدت طولانی در وضعیت A بوده است و در لحظهٔ $t = 0$ به وضعیت B منتقل می‌شود. $v_c(t)$ را به ازای $t<0$, $t>0$ پیدا کنید.



شکل ۳۹ - ۶: به مسائل ۲۵ و ۲۶ مراجعه کنید.

۲۶ - در شکل ۳۹-۶، کلید برای مدت طولانی در وضعیت B بوده است و در لحظهٔ $t = 0$ به وضعیت A منتقل می‌شود. $v_c(t)$ را به ازای $t<0$, $t>0$ پیدا کنید.

۲۷ - در شکل ۴۰-۶، کلید برای مدت طولانی باز بوده است. (a) رابطه‌ای برای $v_c(t)$ به صورت تابعی از t به ازای $t>0$ به دست آورید. (b) در چه زمانی داریم: $v_c(t) = 0$؟

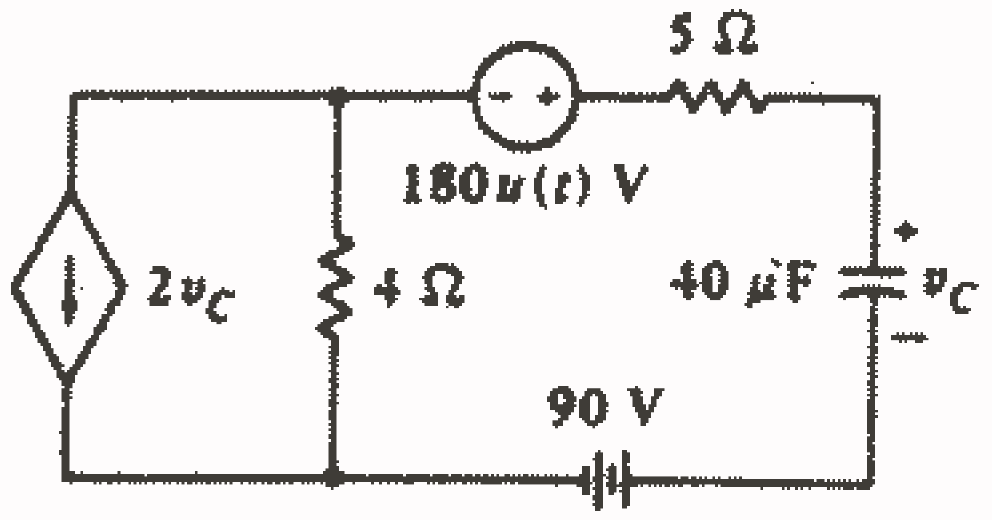


شکل ۴۰ - ۶: به مسئله ۲۷ مراجعه کنید.

۲۸ - یک منبع جریان $5u(t)$A و اتصال موازی مقاومت ۲۰Ω با سلف ۰٫۸H و اتصال موازی مقاومت ۲۰Ω با خازن C همگی با هم سری می‌باشند. اگر C مقادیر زیر را داشته باشد، اندازه ولتاژ دو سر منبع جریان را به صورت تابعی از زمان رسم کنید:

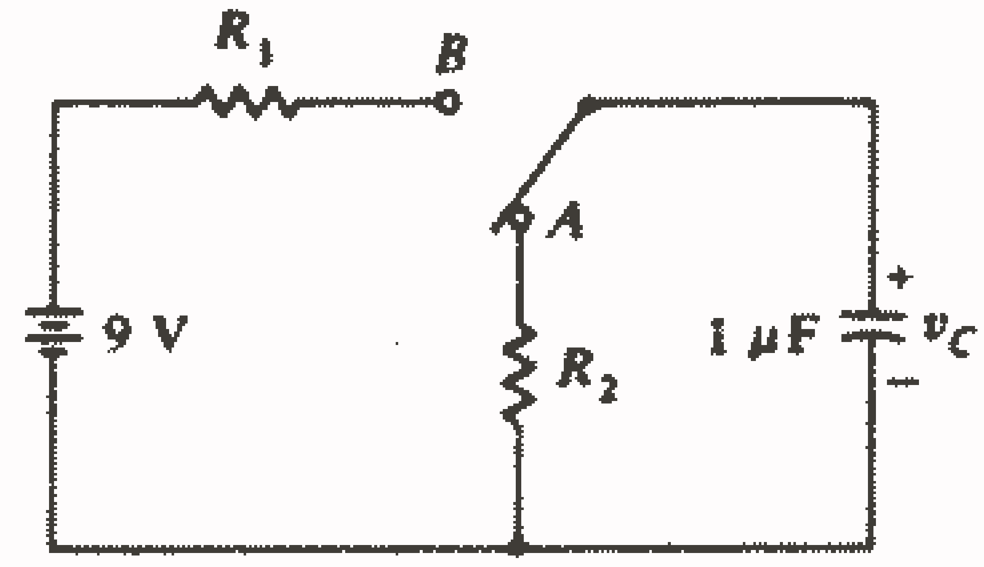
۲mF (b) , ۵mF (a)

۲۹ - زمانی را که در آن ولتاژ خازن در مدار شکل ۴۱-۶ برابر صفر می‌شود، پیدا کنید.



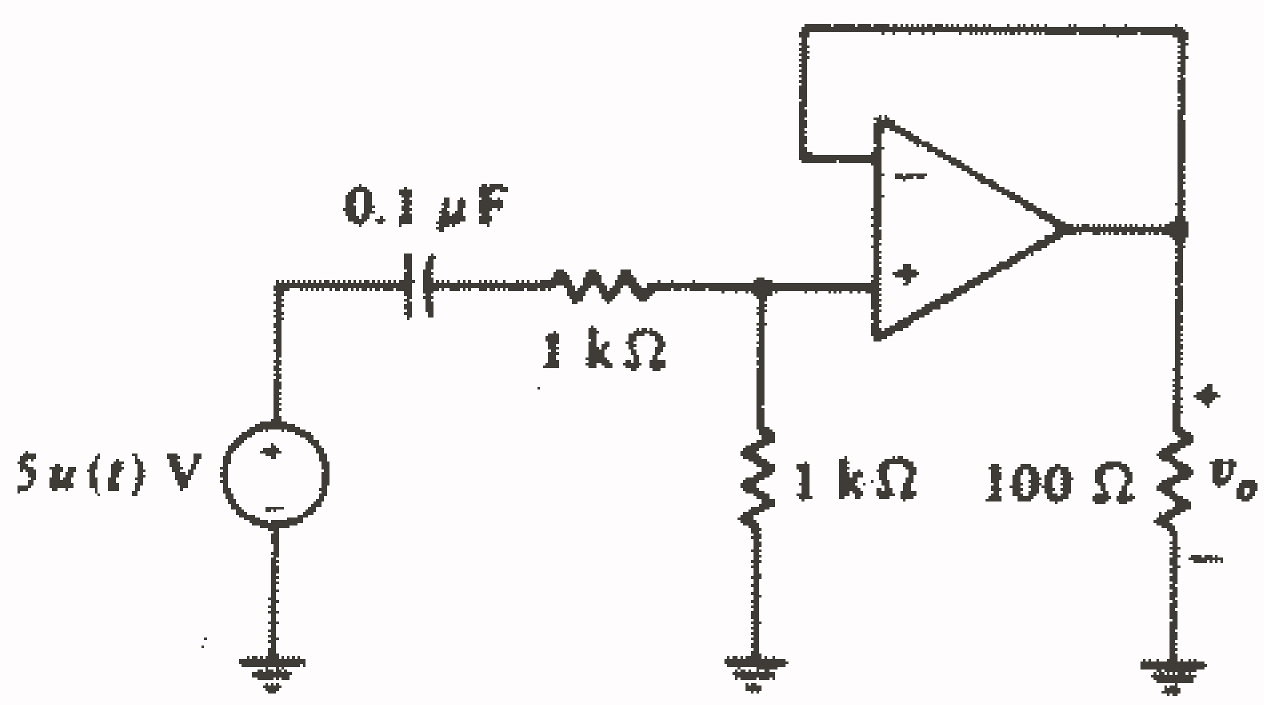
شکل ۴۱ ـ ۶: به مسئله ۲۹ مراجعه کنید.

۳۰ ـ در شکل ۴۲-۶، کلید برای مدت طولانی در وضعیت A بوده است و در لحظهٔ $t = 0$ به وضعیت B منتقل می‌شود و در لحظهٔ $t = 1S$ به وضعیت A بر می‌گردد. R_1 ، R_2 را طوری پیدا کنید که $v_C = 7{,}5\ V$ در $t = 1$ ، $v_C = 1V$ در $t = 1{,}001S$ باشد.



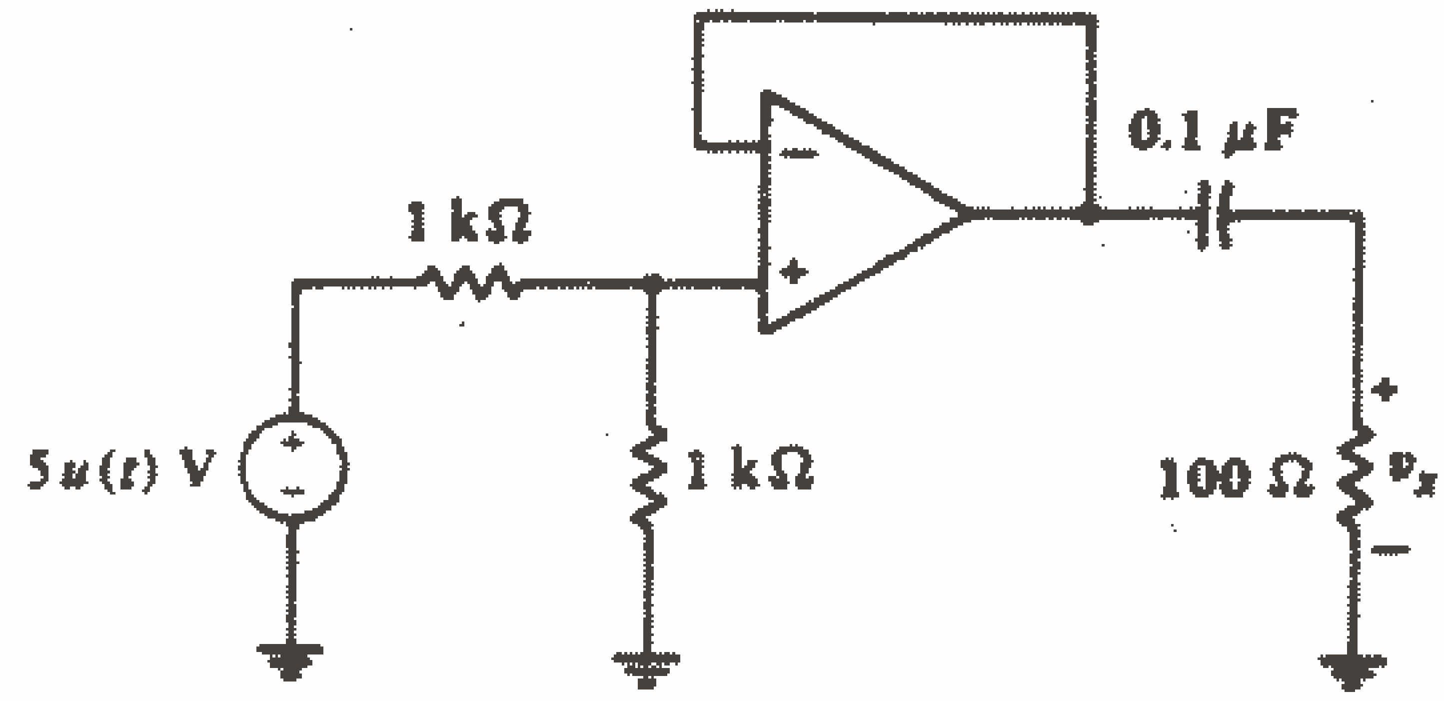
شکل ۴۲ ـ ۶: به مسئله ۳۰ مراجعه کنید.

۳۱ ـ اگر در شکل ۴۳-۶، op - amp را ایده‌آل فرض کنیم مقدار $v_o(t)$ را به ازای جمیع مقادیر t به دست آورید.



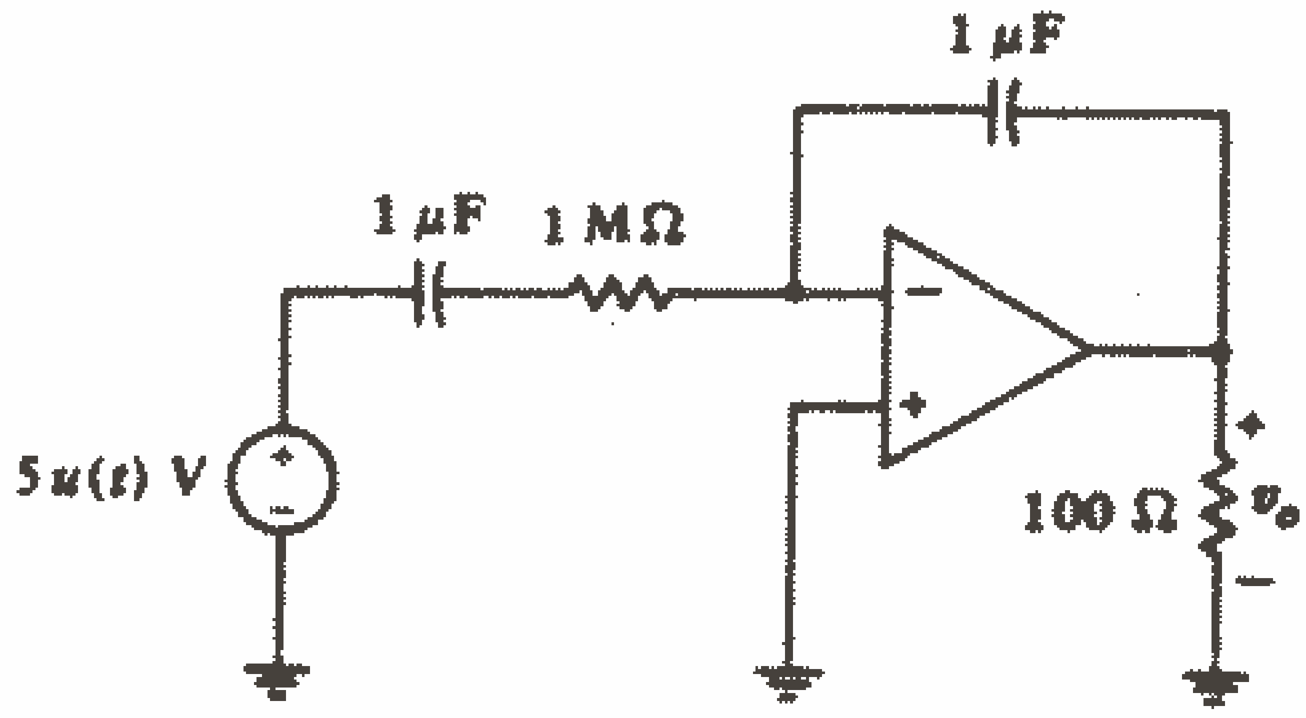
شکل ۴۳ ـ ۶: به مسئله ۳۱ مراجعه کنید.

۳۲ ـ در شکل ۴۴-۶، op - amp ایده‌آل فرض شده است. $v_o(t)$ را پیدا کنید.



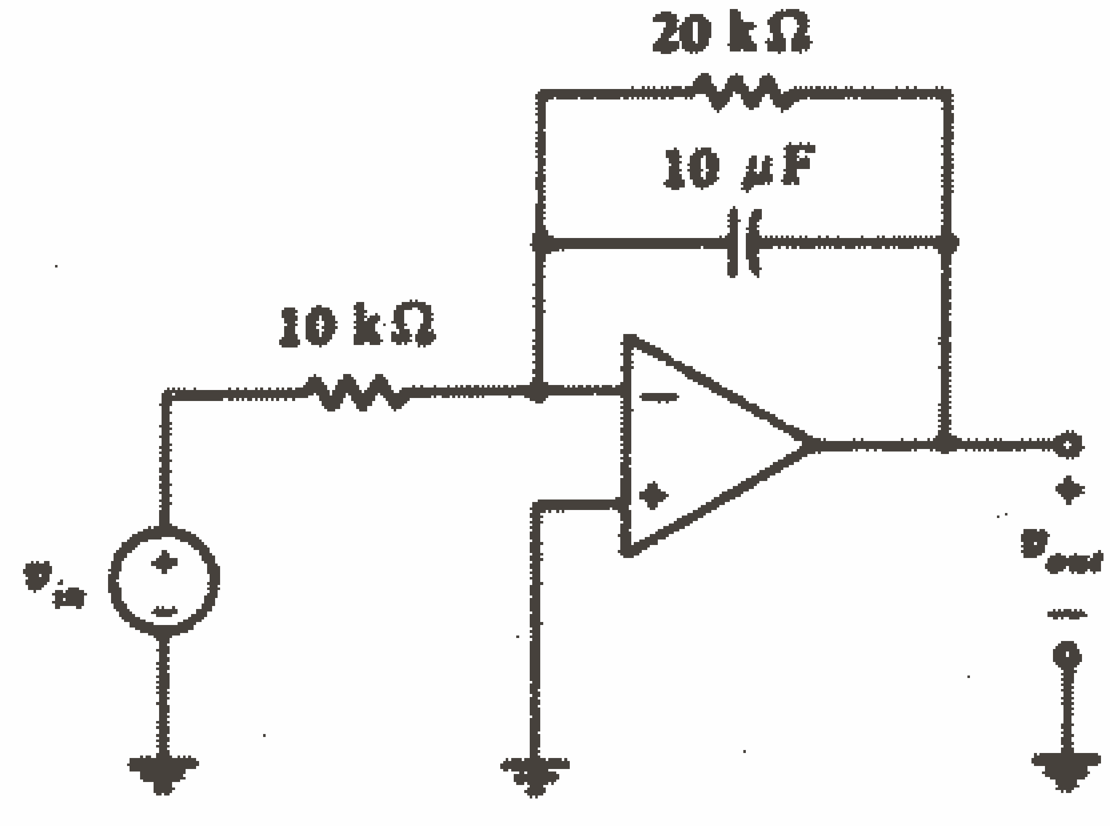
شکل ٤٤ ـ ٦: به مسئله ۳۲ مراجعه کنید.

۳۳ ـ اگر op - amp شکل ٤٥-٦ ایده آل فرض شود، رابطه‌ای برای $v_o(t)$ پیدا کنید که به ازای جمیع مقادیر t صادق باشد.



شکل ٤٥ ـ ٦: به مسئله ۳۳ مراجعه کنید.

۳٤ ـ فرض کنید که op - amp شکل ٤٦-٦ ایده آل باشد و v_{out} را به ازای $v_{in}(t) = u(t)$ V ، $v_{out}(0) = 0$ پیدا کنید.



شکل ٤٦ ـ ٦: به مسئله ۳٤ مراجعه کنید.

فصل ۷

مدار RLC

۱ - ۷ مقدمه

خیلی خوشایند می بود اگر در می یافتیم که مطالعهٔ مفصلی را که تاکنون برای مدارهای RL و RC ، کامل کرده‌ایم، تحلیل مدار RLC را کار ساده‌ای خواهد کرد اما متأسفانه این تحلیل به صورت مشکلی باقی است. وجود سلف و خازن هر دو در یک مدار حداقل یک سیستم مرتبه دوم ایجاد می کند که به وسیله یک معادله دیفرانسیل خطی شامل یک مشتق مرتبهٔ دوم و یا به وسیله دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه اول همزمان، مشخص می‌شود. این افزایش مرتبه لازم می‌دارد که دو ثابت دلخواه را محاسبه کنیم به علاوه لازم است که شرایط اولیهٔ مشتقات را هم تعیین کنیم. و بالاخره خواهیم دید که وجود سلف و خازن هر دو در یک مدار ما را به پاسخی رهنمون می‌سازد که فرمهای تابعی مختلفی را برای مدارهایی که دارای آرایش یکسان ولی مقادیر عناصر مختلف هستند، دارا می باشند. با این اخبار خوشحال‌کننده بیایید روشها و نتایجی را که برای دستگاههای مرتبه اول مفید یافتیم به منظور تعمیم هر چه هوشیارانه‌تر آنها به دستگاه مرتبه دوم، به سرعت مرور کنیم.

ابتدا دستگاه مرتبه اول بدون منبع را بررسی کردیم و پاسخ را پاسخ طبیعی نامیدیم که کاملاً به وسیله نوع عناصر غیرفعال در شبکه و نحوهٔ اتصال آنها و به وسیله شرایط اولیه‌ای که به وسیله انرژی ذخیره شده، ایجاد می‌شد، مشخص می گردید. این پاسخ طبیعی همیشه یک تابع نمایی نزولی از زمان بود که با میل زمان به سمت بی‌نهایت، مقدار آن به سمت مقدار ثابتی میل می‌کرد. این مقدار ثابت معمولاً صفر بود، به جز در مدارهایی که در آنها در سلفهای موازی و یا خازنهای سری و جریانها و ولتاژهای در دام افتاده ظاهر می گردد.

افزودن منبع به دستگاه مرتبهٔ اول نتیجه‌اش یک پاسخ دو قسمتی بود، یکی پاسخ آشنای طبیعی و دیگری جمله‌ای که پاسخ اجباری نامیده شد. این جملهٔ اخیر از نظر مفهوم مربوط به تابع تحریک بود که فرم تابعی آن همان فرم تابعی تابع تحریک بود به علاوهٔ انتگرال و مشتق اول تابع تحریک[1]. از آنجاییکه ما فقط با یک تابع تحریک ثابت سر و کار داشتیم، احتیاج نداشته‌ایم که به فرم خاصی از تابع تحریک توجه کنیم و این مسئله را تا وقتیکه با توابع تحریک سینوسی در فصل بعدی مواجه شویم، حل نخواهیم کرد. ما به این پاسخ اجباری شناخته شده یک عبارتی به عنوان پاسخ طبیعی اضافه کردیم که پاسخ ما کامل شد البته به جز یک ضریب ثابتی که باید تعیین می کردیم. این ضریب ثابت را طوری محاسبه کردیم که پاسخ کامل مطابق با شرایط اولیهٔ تعیین شده باشد.

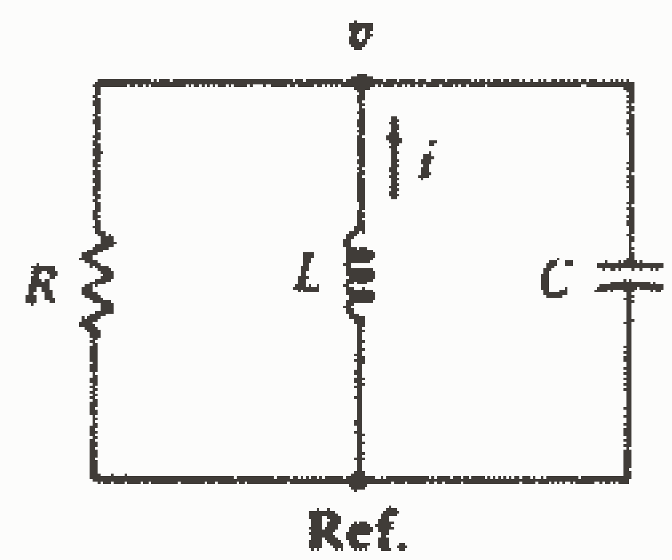
اکنون توجه خود را معطوف مداراتی می کنیم که به وسیله معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم مشخص می شوند. اولین کار ما تعیین پاسخ طبیعی است. بهترین راه انجام این کار در نظر گرفتن مدار بدون منبع می‌باشد. سپس می‌توانیم منابع dc کلید و یا منابع پله‌ای را هم در مدار وارد کنیم و پاسخ کلی را یک‌بار دیگر به صورت مجموع پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری (که معمولاً ثابت است) بیان کنیم. سیستم مرتبه دوم که ما در شرف تحلیل آن هستیم اساساً با هر سیستم مربته دوم مکانیکی با ثابتهای فشرده (lumped - constant) یکسان است. مثلاً نتایج ما می تواند مستقیماً مورد استفادهٔ یک مهندس مکانیک که علاقمند به جایگزینی یک جرم متصل به فنر میراشونده در داخل یک ویسکوز می‌باشدو قرار گیرد و یا مورد استفاده برای سیستمی که بتواند حرکت عمودی یک اتومبیل با ضربه‌گیرهای میراکننده را تقریب کند قرار گیرد. نتایج ما همچنین، اگر چه نه به صورت کاملاً مستقیم، قابل اعمال به هر سیستم مرتبهٔ دوم با پارامترهای توزیع شده (distributed - parameter)، مانند یک خط انتقال اتصال کوتاه شده، یک تخته شیرجه، یک فلوت و یا اکولوژی موش صحرایی قطبی می باشد.

۱- مشتقات مرتبه بالاتر در سیستم‌های مرتبهٔ بالاتر ظاهر می‌شوند و اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم باید بگوییم که همهٔ مشتقات حضور دارند ولو با دامنهٔ صفر. توابع تحریکی که دارای تعداد محدودی مشتقات مختلف نیستند، مستثنی هستند که ما آنها را بررسی نمی کنیم، البته بجز توابع گسسته.

۲ ـ ۷ ـ مدار موازی بدون منبع

اولین هدف ما تعیین پاسخ طبیعی یک مدار سادهٔ متشکل از اتصال موازی C,L,R می باشد. این ترکیب خاص از عناصر ایده آل مدل مناسبی برای اجزاء بسیاری از مدارهای مخابراتی می باشد. مثلاً آن نماینده قسمت مهمی از برخی تقویت کننده های الکترونیکی است که در هر گیرندهٔ رادیویی یافت می شود که تقویت کننده را قادر می سازد تقویت ولتاژ زیادی را در یک باند باریک فرکانسی ایجاد کند و در بیرون این باند تقریباً تقویت صفر باشد. سلکتیوتیهٔ فرکانسی این نوع مدار ما را قادر می سازد که به یک پخش ایستگاه گوش دهیم در حالیکه پخش سایر ایستگاهها حذف می شود. سایر کاربردهای این مدار عبارتند از استفادهٔ مدارات RLC موازی در فیلترهای مولتی پلکس، فیلترهای فرونشانی هارمونیک و غیره. اما حتی بحث ساده‌ای دربارهٔ این اصول نیاز به درکی از عباراتی مانند رزونانس، پاسخ فرکانسی و امپدانس دارد که ما هنوز دربارهٔ آنها بحثی نکرده‌ایم. بنابراین بیایید به گفتن این مطلب بسنده کنیم که درکی از رفتار طبیعی مدار RLC موازی دارای اهمیت اساسی در مطالعات آیندهٔ ما دربارهٔ مدارهای مخابراتی و طراحی فیلتر خواهد بود.

وقتیکه یک سلف واقعی به طور موازی با یک خازن بسته شود و سلف دارای یک مقاومت اهمی به همراه خود باشد مدار معادل این اتصال به صورت شکل ۱ ـ ۷ می باشد.



شکل ۱ ـ ۷: مدار RLC موازی بدون منبع.

اتلاف انرژی در سلف واقعی را به وسیله وجود مقاومت ایده آل R که وابسته به مقاومت اهمی سلف (و نه مساوی با آن) می باشد منظور می کنیم.

در تحلیلی که در پی می آید فرض خواهیم کرد که انرژی به صورت اولیه بتواند در سلف و خازن ذخیره شود و در نتیجه مقادیر اولیهٔ جریان سلف و ولتاژ خازن غیر صفر می باشند. با مراجعه

به مدار شکل ۱-۷ می‌توانیم تک معادلهٔ گرهی مدار را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt - i(t_0) + C\frac{dv}{dt} = 0 \qquad (1)$$

توجه داشته باشید که علامت منفی نتیجهٔ جهت فرضی i می‌باشد. ما باید معادلهٔ (۱) را با توجه به شرایط اولیه زیر حل کنیم:

$$i(0^+) = I_0 \qquad (2)$$

$$v(0^+) = V_0 \qquad (3)$$

اگر از هر دو طرف معادلهٔ (۱) یک بار نسبت به زمان مشتق بگیریم نتیجهٔ حاصل یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن خطی مرتبهٔ دوم خواهد بود:

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = 0 \qquad (4)$$

که جواب $v(t)$ آن، پاسخ طبیعی مطلوب ما می‌باشد.

روشهای جالبی برای حل معادلهٔ (۴) موجود است. ما این روشها را به درس معادلات دیفرانسیل واگذار می‌کنیم و فقط سریعترین و ساده‌ترین روش را اکنون مورد استفاده قرار می‌دهیم. ما پاسخی را بسته به تبحر و تجربه‌مان در انتخاب فرم مناسبی از چندین فرم ممکن، فرض خواهیم نمود. تجربهٔ ما دربارهٔ معادله مرتبهٔ اول به ما القاء می‌کند که حداقل یک‌بار دیگر فرم‌نمایی را محک بزنیم. به‌علاوه، فرم معادلهٔ (۴) نشان می‌دهد که این کار را می‌توان کرد زیرا ما باید سه جمله را با هم جمع کنیم یعنی مشتق دوم، مشتق اول و خود تابع که هر یک در عامل ثابتی ضرب شده‌اند و حاصل جمع صفر می‌باشد. بدیهی است که تابعی که مشتقاتش فرم خود تابع را داشته باشند یک انتخاب معقول می‌باشد با امید موفقیت فرض می‌کنیم:

$$v = Ae^{st} \qquad (5)$$

که در حالت کلی‌تر در صورت لزوم می‌توانیم S,A را اعداد مختلط در نظر بگیریم[1]. با قرار دادن معادلهٔ (۵) در معادلهٔ (۴) خواهیم داشت:

۱- البته دلیلی برای ترس وجود ندارد زیرا اعداد مختلط در این فصل فقط بصورت مقدماتی در مشتقات ظاهر می‌شوند و کاربرد آنها بعنوان یک ابزار اصلی در فصل ۹ ضروری خواهد بود.

$$CAs^2e^{st} + \frac{1}{R}Ase^{st} + \frac{1}{L}Ae^{st} = 0$$

و یا:

$$Ae^{st}\left(Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L}\right) = 0$$

برای اینکه این معادلهٔ به ازای جمیع زمانها صادق باشد باید حداقل یکی از سه عامل ضرب مساوی صفر باشد. اگر هر یک از دو عامل اول مساوی صفر باشند آنگاه $v(t) = 0$ این جواب یک جواب کم‌ارزشی برای معادلهٔ دیفرانسیل می‌باشد که نمی‌تواند شرایط اولیهٔ مفروض ما را برآورده سازد. بنابراین ما عامل باقی‌ماندهٔ دیگر را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$Cs^2 + \frac{s}{R} + \frac{1}{L} = 0 \qquad (٦)$$

این معادله معمولاً توسط ریاضیدانان، معادلهٔ کمکی و یا معادلهٔ مشخصه نامیده می‌شود. اگر این معادله برقرار باشد آنگاه جواب مفروض ما صحیح است. از آنجاییکه معادلهٔ (٦) یک معادلهٔ درجهٔ دوم است، دو جواب برای آن موجود است که با S_1, S_2 آنها را نشان می‌دهیم:

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (٧)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (٨)$$

اگر هر کدام از این دو مقدار را برای S در پاسخ مفروض به کار بریم، آن پاسخ در معادلهٔ دیفرانسیل مفروض صدق می‌کند و در نتیجه یک پاسخ قطعی برای معادلهٔ دیفرانسیل می‌باشد.

بیایید فرض کنیم که در معادلهٔ (۵)، به جای S قرار دهیم S_1، خواهیم داشت:

$$v_1 = A_1e^{s_1t}$$

و به طریق مشابه:

$$v_2 = A_2e^{s_2t}$$

متغیر قبلی در معادلهٔ دیفرانسیل صدق می‌کند:

$$C\frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L}v_1 = 0$$

و متغیر دوم هم در معادله صدق می‌کند:

$$C\frac{d^2v_2}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{L}v_2 = 0$$

با جمع کردن این دو معادله دیفرانسیل و ترکیب کردن جملات مشابه داریم:

$$C\frac{d^2(v_1 + v_2)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d(v_1 + v_2)}{dt} + \frac{1}{L}(v_1 + v_2) = 0$$

و باز هم خطی بودن پیروز می‌شود و مشاهده می‌کنیم که مجموع دو پاسخ نیز یک پاسخ

می باشد . بنابراین فرم پاسخ طبیعی عبارت است از :

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \qquad (۹)$$

که در آن s_2, s_1 به وسیله معادلهٔ (۷) و (۸) داده شده‌اند و A_2, A_1 دو ثابت دلخواه می باشند که باید طوری انتخاب شوند که دو شرط اولیه را برآورده سازند . فرم پاسخ طبیعی به‌صورتیکه در فوق آمده است به سختی می‌توان انتظار داشت که حالت شگفت‌انگیز مطلوب ما را متجلی سازد زیرا در شکل موجود ، آن معادله دید باطنی محدودی را نسبت به طبیعت منحنی $v(t)$ ارائه می کند . مثلاً دامنه‌های نسبی A_2, A_1 مطمئناً در تعیین شکل منحنی پاسخ حائز اهمیت خواهند بود . به علاوه، ثابتهای s_2, s_1 بسته به مقادیر C, L, R در شبکهٔ داده شده می‌توانند اعداد حقیقی و یا اعداد مزدوج مختلط باشند . این دو حالت پاسخهایی را که در اساس با یکدیگر متفاوتند ، تولید می کنند . بنابراین انجام کمی ساده‌سازی در رابطهٔ (۹) به منظور وضوح در تجسم و درک مطلب مفید خواهد بود .

از آنجاییکه نماهای $S_2 t, S_1 t$ باید بدون واحد باشند ، بنابراین S_2, S_1 باید دارای دیمانسیون S^{-1} باشند . از روابط (۷) و (۸) پیداست که‌واحد $1/2RC$ ، $1/\sqrt{LC}$ هم باید s^{-1} باشد . واحدهایی از این نوع، «فرکانس» نامیده می‌شوند . با وجود اینکه ما این مفهوم را با جزئیات بیشتر در فصل ۱۳ بسط خواهیم داد ، ولی اکنون چند اصطلاح را در اینجا معرفی می کنیم. بیایید $1/\sqrt{LC}$ را با ω_0 نشان دهیم:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (۱۰)$$

و عبارت «فرکانس تشدید» را به آن اختصاص دهیم.[1] از طرف دیگر، $1/2RC$ را «فرکانس نپر» و یا «ضریب میرایی نمایی» می‌نامیم و آن را به وسیله علامت α (آلفا) نشان می‌دهیم:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad (۱۱)$$

این عبارت توصیفی اخیر را به این دلیل به کار می‌بریم که α معیاری است از اینکه با چه سرعتی پاسخ طبیعی میرا می‌شود و به مقدار پایدار نهایی‌اش (معمولاً صفر) می‌رسد .[2] و بالاخره S_2, S_1, S که کمیتهایی هستند که اساس برخی کارهای بعدی ما را تشکیل می‌دهند ، فرکانس

---

۱ - به طور دقیق باید بگوییم: فرکانس رادیویی تشدید .

۲ - نسبت α به ω_0 را مهندسین سیستمهای کنترل، نسبت میرایی می‌نامند و با ζ (ز تا) نشان می‌دهند که ما در فصل ۱۴ دوباره با آن مواجه خواهیم شد .

مختلط نامیده می‌شوند.

باید تذکر دهیم که $\omega_0, \alpha, S_2, S_1$ صرفاً علائمی هستند که برای ساده کردن بحث مدارات RLC به کار می‌روند و خواص جدید عجیبی نیستند. مثلاً گفتن «آلفا» آسانتر از گفتن «معکوس ۲RC» می‌باشد.

بیایید این نتایج را جمع‌بندی کنیم. پاسخ طبیعی مدار RLC موازی عبارت است از:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \qquad (9)$$

که داریم:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad (12)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad (13)$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad (11)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (10)$$

و A_2, A_1 را باید با اعمال شرایط اولیهٔ داده شده پیدا کنیم.

پاسخ توصیف شده به وسیلهٔ معادلات فوق نه تنها برای ولتاژ $v(t)$، بلکه برای جریانی که در هر یک از سه عنصر مداری جاری می‌شود، به کار می‌رود. البته مقادیر ثابتهای A_2, A_1 برای $v(t)$ متفاوت از مقادیر مربوط به جریانها خواهند بود. اکنون واضح است که طبیعت پاسخ بستگی به اندازه‌های نسبی α و ω_0 دارد رادیکالهای ظاهر شده در روابط S_1 و S_2 وقتی که α بزرگتر از ω_0 باشد، حقیقی و وقتیکه α کوچکتر از ω_0 باشد، موهومی و وقتیکه α مساوی ω_0 باشد، صفر خواهند بود. هر یک از این حالات را در سه قسمت زیر به طور جداگانه مورد بررسی قرار خواهیم داد.

تمرین

۱ـ۷ـ یک مدار RLC موازی شامل یک سلف ۱۰۰mH و دارای مقادیر $\omega_0 = ۲۰۰۰\ rad/s$ و $\alpha = ۲۵۰۰\ S^{-1}$ می‌باشد. پیدا کنید: (a) C ، (b) R ، (c) S_1 ، (d) S_2

جواب: ۲٫۵μF ، ۸۰Ω ، $-۱۰۰۰S^{-1}$ ، $-۴۰۰۰S^{-1}$

۳ـ۷ـ مدار RLC موازی فوق میرایی

مقایسه رابطهٔ (۱۰) و (۱۱) در قسمت ۲ـ۷ نشان می‌دهد که اگر $LC > 4R^2C^2$ آنگاه α بزرگتر از ω_0 می‌باشد. در این حالت رادیکال به کار رفته در محاسبه S_1,S_2 حقیقی می‌باشد و S_1,S_2 هم حقیقی می‌باشند. به علاوه، می‌توانیم نامساویهای زیر را

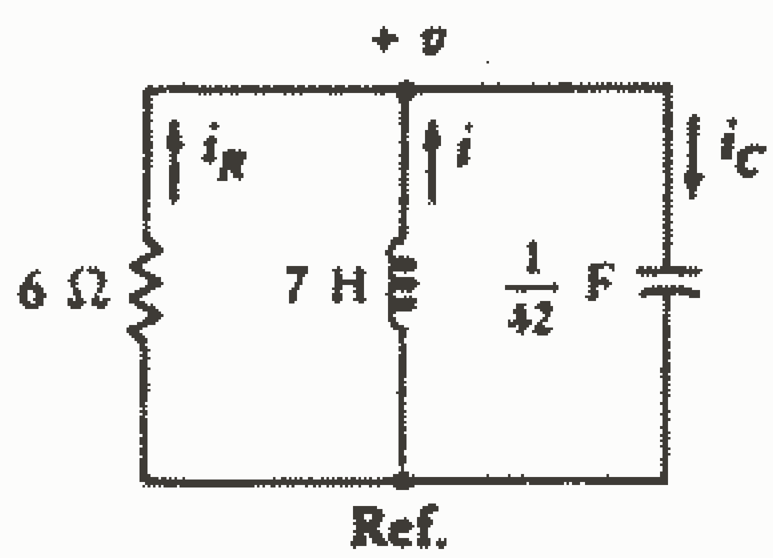
$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha \ , \ (-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) < (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}) < 0$$

به روابط (۱۲) و (۱۳) اعمال کنیم تا نشان دهیم که S_1,S_2 هر دو اعداد حقیقی منفی هستند. بنابراین پاسخ $v(t)$ را می‌توان به صورت مجموع جبری توابع نمایی نزولی، که هر دو با میل زمان به سمت بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کنند، بیان نمود.

در واقع چون قدر مطلق S_2 بزرگتر از S_1 است، جمله‌ای که شامل S_2 است دارای سرعت تنزل بیشتری است و برای مقادیر بزرگ زمان می‌توانیم روابط حدی را به صورت زیر بنویسیم:

$$v(t) \rightarrow A_1 e^{s_1 t} \rightarrow 0 \quad \text{وقتیکه} \ t \rightarrow \infty$$

به منظور بحث دربارهٔ روش انتخاب ثابتهای A_1,A_2 به طوریکه مطابق با شرایط اولیه باشند و نیز به منظور ارائه یک منحنی پاسخ نمونه، بیایید یک مثال عددی را در نظر بگیریم. ما یک مدار RLC موازی را با مقادیر $L = 7H$, $R = 6\Omega$ و برای سهولت محاسبه مقدار غیرعملی و بزرگ $C = 1/42\ F$، در نظر می‌گیریم. انرژی اولیه ذخیره شده با انتخاب ولتاژ اولیهٔ $v(0) = 0$ در دو سر مدار و جریان اولیهٔ سلف $i(0) = 10A$، مشخص می‌شود که i,v در شکل ۲ـ۷ تعریف شده‌اند.



شکل ۲ ـ ۷: یک مدار RLC موازی که به عنوان یک مثال عددی به کار رفته است. مدار در حالت فوق میرایی است.

به سادگی می‌توانیم مقادیر پارامترهای مختلف را تعیین کنیم:
(همگی بر حسب S^{-1})

$$\alpha = ۳{,}۵ \quad \omega_0 = \sqrt{۶}$$

$$S_1 = -۱ \quad S_2 = -۶$$

و بلافاصله می‌توانیم فرم کلی پاسخ طبیعی را بنویسیم:

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-۶t} \qquad (۱۴)$$

حال فقط محاسبه دو ثابت A_2, A_1 باقی می‌ماند. اگر ما پاسخ $v(t)$ را به ازای دو مقدار مختلف زمان بدانیم این مقادیر را می‌توانیم در روابط (۱۴) و (۱۵) جایگزین کنیم و A_2, A_1 را به سادگی به دست آوریم. البته ما فقط یک مقدار لحظه‌ای برای $v(t)$ می‌دانیم و آنهم $v(0) = 0$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$0 = A_1 + A_2 \qquad (۱۵)$$

رابطهٔ دیگری هم به دست خواهیم آورد که A_2, A_1 را به هم مربوط سازد که این رابطه را با مشتق‌گیری از $v(t)$ در رابطهٔ (۱۴) نسبت به زمان و تعیین مقدار اولیهٔ آن به وسیله شرایط اولیهٔ دیگری که داریم یعنی $i(0) = ۱۰$ و مساوی قرار دادن نتایج، به دست می‌آید. از دو طرف رابطهٔ (۱۴) مشتق می‌گیریم: $dv/dt = -A_1 e^{-t} - ۶A_2 e^{-۶t}$ و مقدار این مشتق را به ازای $t = 0$ محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = -A_1 - ۶A_2$$

سپس کمی مکث می‌کنیم که ببینیم چگونه می‌توانیم مقدار اولیهٔ مشتق را به طور عددی پیدا کنیم. این قدم اخیر همیشه به وسیله خود مشتق تحمیل می‌شود، dv/dt جریان خازن را به ذهن خطور می‌دهد زیرا: $i_C = C\frac{dv}{dt}$ در نتیجه:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i(0) + i_R(0)}{C} = \frac{i(0)}{C} = ۴۲۰ \ \text{V/S}$$

از آنجاییکه ولتاژ اولیهٔ صفر در دو سر مقاومت، جریان اولیه صفر را در آن ایجاب می‌کند پس معادلهٔ دوم ما عبارت خواهد بود از:

$$۴۲۰ = -A_1 - ۶A_2 \qquad (۱۶)$$

و با حل هم‌زمان معادلات (۱۵) و (۱۶) خواهیم داشت: $A_2 = -84$, $A_1 = 84$

جواب عددی نهایی برای پاسخ طبیعی عبارت است از:

$$v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t}) \qquad (17)$$

محاسبه A_2, A_1 برای سایر شرایط انرژی اولیه ذخیره شده، از قبیل انرژی اولیهٔ ذخیره شده در خازن، در اولین تمرین این قسمت مورد بررسی قرار گرفته است.

حال بیایید ببینیم که چه اطلاعاتی را می‌توانیم بدون انجام محاسبات بی‌مورد، از رابطهٔ (۱۷) استخراج کنیم. تذکر می‌دهیم که $v(t)$ در $t = 0$ برابر صفر است که این یک چک راحت برای فرض اولیه‌مان می‌باشد. همچنین می‌توانیم جملهٔ نمایی اول را به عنوان اینکه دارای ثابت زمانی $1S$ می‌باشد و جملهٔ دوم را با ثابت زمانی $1/6\ S$ تفسیر کنیم. هر یک از این جملات با دامنهٔ واحد شروع می‌شوند اما جملهٔ اخیر سریعتر میرا می‌شود و $v(t)$ هرگز منفی نمی‌شود وقتیکه زمان بی‌نهایت می‌شود، هر جمله به سمت صفر میل می‌کند و همانگونه که انتظار می‌رود پاسخ سرانجام صفر می‌شود. بنابراین ما یک منحنی پاسخ داریم که به ازای $t = 0$, $t = \infty$ برابر صفر است و هرگز منفی نمی‌شود و چون همه جا صفر نمی‌باشد باید اقلاً دارای یک ماکزیمم باشد که پیدا کردن مقدار دقیق آن مشکل نمی‌باشد. از پاسخ مشتق می‌گیریم:

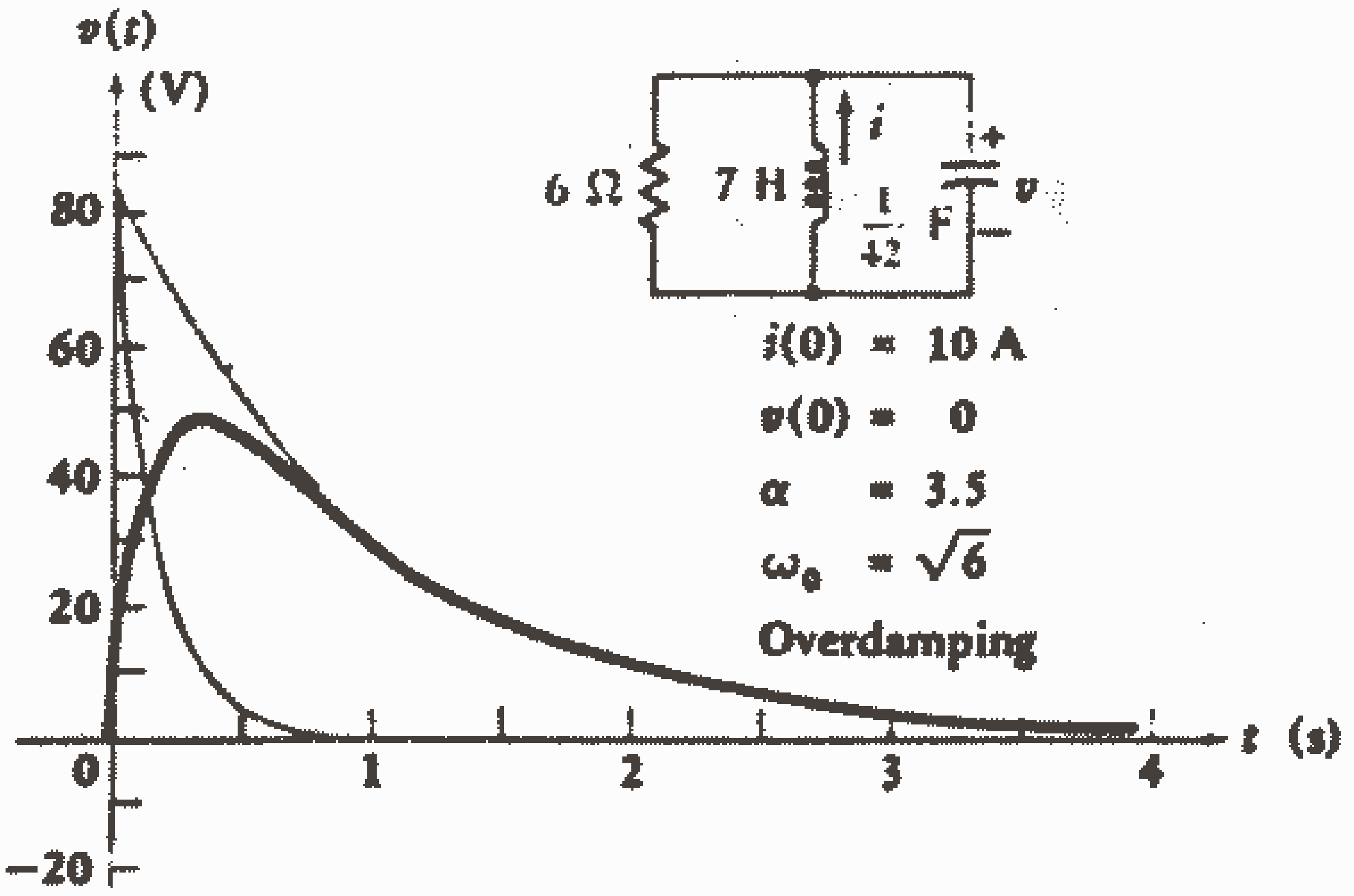
$dv/dt = 84(-e^{-t} + 6e^{-6t})$ و سپس مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا زمان tm که در آن ولتاژ ماکزیمم می‌شود تعیین شود: $0 = -e^{-tm} + 6e^{-6tm}$ پس از ساده کردن داریم: $e^{5tm} = 6$ و از آنجا به دست می‌آید: $v(t_m) = 48/97V$, $t_m = 0/358S$

یک روش معقول برای رسم پاسخ این است که دو جملهٔ نمایی $84e^{-t}$, $84e^{-6t}$ را جداگانه رسم کنیم و سپس تفاضل آنها را به دست آوریم. مفید بودن این روش به وسیله منحنی‌های شکل ۳-۷ نشان داده شده است که در آن دو تابع‌نمایی مذکور کم‌رنگ‌تر نشان داده شده‌اند.

این منحنی‌ها پیش‌بینی قبلی ما را مبنی بر اینکه رفتار تابعی $v(t)$ برای مقادیر بزرگ t عبارت از $84e^{-t}$ می‌باشد، را تأیید می‌کنند.

سؤال دیگری که اغلب در بررسی پاسخ مدار پیش می‌آید مربوط به طول مدتی است که طول می‌کشد تا قسمت گذرای پاسخ ناپدید (و یا میرا) شود در عمل، اغلب مطلوب است که بگذاریم این پاسخ گذرا هر چه سریعتر به صفر میل کند یعنی زمان فروکش t_s(settling time) را به حداقل برسانیم. البته از نظر تئوری t_s بی‌نهایت می‌باشد زیرا $V(t)$ هرگز در یک زمان محدود

به صفر نمی‌رسد. اگر چه پس از اینکه دامنهٔ $v(t)$ به مقداری کمتر از قدر مطلق ماکزیمم آن $|v_m|$ افت کند فقط پاسخ ناچیزی باقی می‌ماند. زمانی را که لازم است تا این امر اتفاق افتد به عنوان زمان فروکش[1] تعریف می‌کنیم. از آنجاییکه برای مثال ما داریم: $|v_m| = v_m = ۴۸{,}۹V$ بنابراین زمان فروکش زمانی است که لازم است تا پاسخ به مقدار $۰{,}۴۸۹V$ افت کند. اگر این مقدار $v(t)$ را در معادلهٔ (۱۷) جایگزین کنیم و از جملهٔ نمایی دوم صرفنظر کنیم (که می‌دانیم در اینجا قابل چشم‌پوشی می‌باشد)، زمان فروکش را $۵{,}۱۵S$ به دست می‌آوریم.



شکل ۳ ـ ۷: پاسخ $v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t})$ مربوط به مدار شکل ۲ ـ ۷.

در مقایسه با پاسخ‌هاییکه در دو قسمت بعدی به دست خواهیم آورد، این زمان فروکش نسبتاً بزرگ می‌باشد و زمان میرایی طولانی است و به همین دلیل این پاسخ، فوق میرایی نامیده می‌شود. حالتی را که در آن α بزرگتر از ω_0 باشد حالت «فوق میرایی» خواهیم نامید. حال بیایید ببینیم با کاهش α چه اتفاقی می‌افتد.

تمرین

۲ ـ ۷ ـ اگر ولتاژ اولیه در دو سر یک مدار RLC موازی صفر نباشد، آنگاه مقدار حاصله برای جریان اولیهٔ مقاومت باید در محاسبهٔ dv/dt در نظر گرفته شود. در مثال عددی قسمت قبل فرض کنید داشته باشیم: $i(۰) = ۱۰A$ ، $v(۰) = ۳۰V$ حال مقادیر زیر را پیدا کنید:

(a) A_1 ، (b) A_2 ، (c) v_{max}

جواب: $۷۸V$ ، -۴۸ ، $۵۰{,}۱$

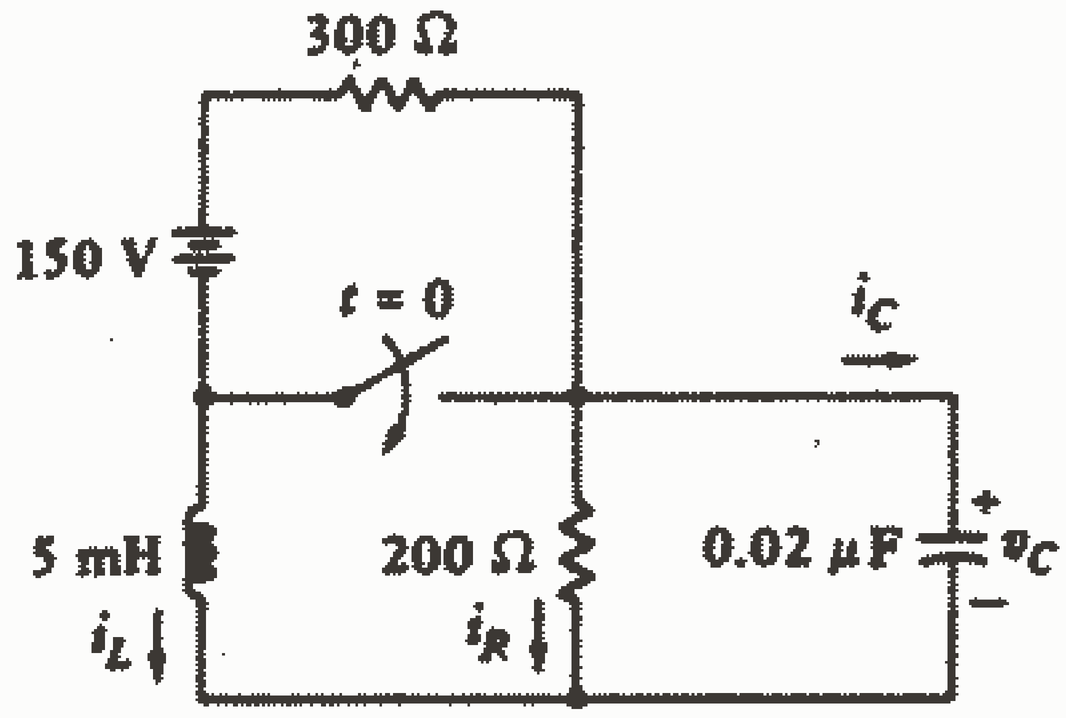
---

۱ - تراز یک درصد دلخواه می‌باشد و بعضی‌ها ۲ درصد و یا ۵ درصد را ترجیح می‌دهند.

۳ ـ ۷ ـ کلید شکل ۴-۷ پس از اینکه به مدت بیش از ۲ ساعت بسته بوده است، در لحظهٔ $t = 0$ باز می‌شود. مقادیر زیر را پیدا کنید:

(a) $v_C(0^+)$ ، (b) $i_L(0^+)$ ، (c) $i_R(0^+)$ ، (d) $i_C(0^+)$ ، (e) $v_C(10\,\mu s)$

جواب: 60V , -0,3A , 0,3A , 0 , 45,8V



شکل ۴ ـ ۷: به تمرین ۳ ـ ۷ مراجعه کنید.

۴ ـ ۷ ـ میرایی بحرانی

حالت فوق میرایی با شرط $\alpha>\omega_0$ و یا $LC>4R^2C^2$ مشخص می‌شود و مقادیر حقیقی منفی برای S_1,S_2 ایجاد می‌شود و پاسخی را به دست می‌دهد که به صورت مجموع جبری دو تابع نمایی منفی بیان می‌شود. فرم نمونهٔ پاسخ $v(t)$ در مثال عددی قسمت قبل و تمرینات متعاقب آن به دست آمده است.

حال اجازه دهید مقادیر عناصر را طوری تنظیم کنیم که α، ω_0 مساوی باشند. این یک حالت خیلی خاص می باشد که «میرایی بحرانی» نامیده می‌شود. اگر ما سعی در ایجاد یک مدار RLC موازی در حالت میرایی بحرانی داشته باشیم، سعی ما بیهوده خواهد بود زیرا ما هرگز نمی‌توانیم α را دقیقاً مساوی ω_0 ایجاد کنیم. حاصل این تلاش ما یک مدار فوق میرا یا زیر میرا (که در قسمت بعدی دربارهٔ آن بحث خواهیم کرد) خواهد بود. البته به منظور کامل بودن بحث، مدار میرایی بحرانی را در اینجا مورد بحث قرار می‌دهیم زیرا این حالت، انتقال جالبی بین حالت زیر میرایی و فوق میرایی را نشان می‌دهد.

میرایی بحرانی وقتی حاصل می‌شود که:

$$\text{میرایی بحرانی:}\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \omega_0 \\ LC &= 4R^2C^2 \\ L &= 4R^2C \end{aligned}\right.$$

واضح است که میرایی بحرانی را می‌توانیم با تغییر دادن مقدار هر یک از سه عنصر در مثال عددی قبل ایجاد کنیم. ما مقاومت R را انتخاب می‌کنیم و مقدار آن را تا حصول میرایی بحرانی افزایش می‌دهیم و بنابراین ω_0 را بدون تغییر باقی می‌گذاریم. مقدار لازم R عبارت است از $7\sqrt{6}/2\Omega$ و L هنوز 7H می‌باشد و C برابر $\frac{1}{42}$ F باقی می‌ماند. بنابراین خواهیم داشت:

$$S_1 = S_2 = -\sqrt{6}\,,\ \alpha = \omega_0 = \sqrt{6}$$

حال به صورت نه چندان واضح و روشن پاسخ را به صورت مجموع دو تابع‌نمایی بیان می‌کنیم:

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_1e^{-\sqrt{6}t} + A_2e^{-\sqrt{6}t}$$

که می‌توان آن را به صورت $v(t) = A_3e^{-\sqrt{6}t}$ نوشت.

در اینجا بعضی از ما باید احساس کنیم که‌راه‌خود را گم کرده‌ایم. ما پاسخی داریم که فقط شامل یک ثابت دلخواه است اما دو شرط اولیه $v(0) = 0$, $i(0) = 10$ را داریم که باید در این ثابت منفرد صدق کنند. این امر به طور کلی غیرممکن است. مثلاً در این حالتی که ما داریم اولین شرط اولیه الزام می‌دارد که A_3 باید صفر باشد و در این صورت غیر ممکن است که شرط اولیهٔ دوم در آن صدق کند.

اصول ریاضی و الکتریستهٔ ما بدون نقص می‌باشند، بنابراین اگر اشتباهی ما را دچار مشکل نکرده باشد، ما باید با یک فرض غلط کار را شروع کرده باشیم و ما فقط یک فرض انجام داده‌ایم. ما در ابتدا بیان کردیم که معادله دیفرانسیل را می‌توان با فرض کردن یک جواب‌نمایی حل نمود و به نظر می‌رسد که این مطلب برای این حالت خاص میرایی بحرانی غلط از آب در می‌آید. وقتیکه $\alpha = \omega_0$ باشد، معادلهٔ دیفرانسیل (۴) می‌شود:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv}{dt} + \alpha^2 v = 0$$

حل این معادله روند خیلی مشکلی نیست اما باید از بسط و توسعهٔ آن در اینجا اجتناب کنیم زیرا این معادله یک نوع استاندارد می‌باشد که در کتب رایج معادلات دیفرانسیل یافت می‌شود. جواب عبارت است از: (۱۸)

$$v = e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$$

باید یادآوری کنیم که جواب را می‌توان به صورت مجموع دو جمله که یکی همان تابع نمایی منفی آشنای ماست و دیگری t برابر یک تابع نمایی منفی می‌باشد، بیان نمود همچنین باید یادآور شویم که جواب این معادله شامل همان دو ثابتی که انتظار آن می‌رفت، می‌باشد. حال مثال عددی خود را کامل می‌کنیم. بعد از جایگذاری مقدار معلوم

α در معادلهٔ (۱۸) یعنی در معادلهٔ $v = A_1te^{-\sqrt{6}t} + A_2e^{-\sqrt{6}t}$ ، مقادیر A_2, A_1 را ابتدا با اعمال شرایط اولیه برخود $v(t)$ یعنی $v(0) = 0$ تعیین می‌کنیم. بنابراین داریم $A_2 = 0$. این نتیجهٔ ساده به این دلیل حاصل می‌شود که مقدار اولیهٔ پاسخ صفر انتخاب شده است. حالت کلی‌تر که به معادله‌ای برای تعیین A_2 منجر می‌شود در تمرینات آمده است. شرط اولیهٔ دیگر را درست مانند حالت فوق میرایی به مشتق dv/dt اعمال می‌کنیم. بنابراین با توجه به اینکه $A_2 = 0$ مشتق می‌گیریم: $\frac{dv}{dt} = A_1t(-\sqrt{6})e^{-\sqrt{6}t} + A_1e^{-\sqrt{6}t}$ و مقدار آن را در $t = 0$ محاسبه می‌کنیم: $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = A_1$ و مشتق را بر حسب جریان اولیه خازن بیان می‌کنیم:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i_R(0)}{C} + \frac{i(0)}{C}$$

که جهت مبنا برای i, i_R, i_c در شکل ۲-۷ تعریف شده است. بنابراین: $A_1 = ٤٢٠$ و در نتیجه پاسخ عبارت است از:

$$v(t) = ٤٢٠te^{-٢/٤٥t} \qquad (١٩)$$

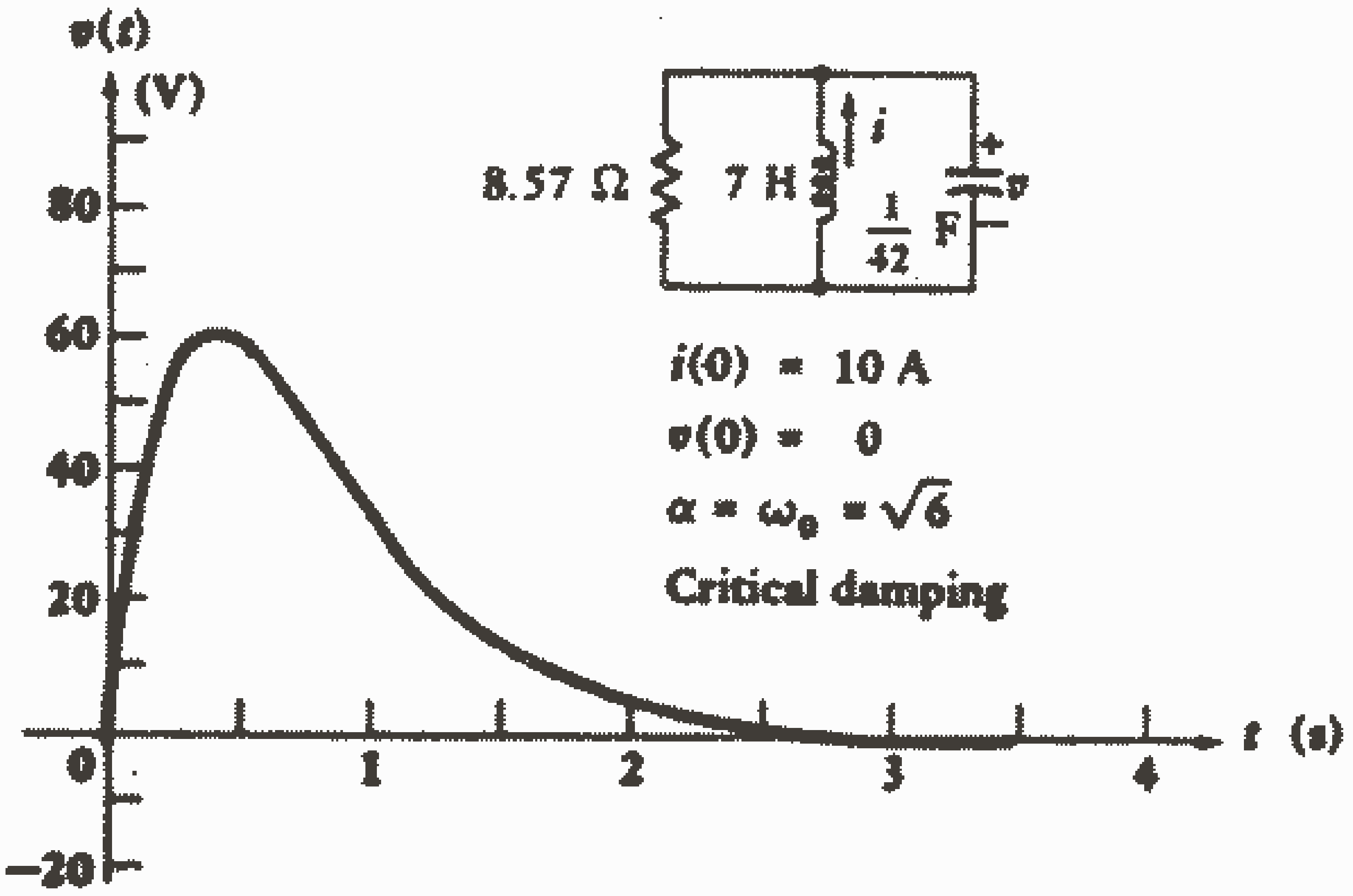
قبل از رسم مفصل این پاسخ، بیایید دوباره با یک بحث کیفی فرم آن را پیش‌بینی کنیم. شرایط اولیهٔ تعیین شده عبارت از صفر می‌باشد و با رابطهٔ (۱۹) توافق دارد. نمی‌توان فوراً مشاهده نمود که پاسخ وقتیکه t بی‌نهایت می‌شود به سمت صفر میل می‌کند، زیرا جملهٔ $te^{-٢/٤٥t}$ فرم نامعینی دارد. اگرچه این مانع جزئی را می‌توان به سادگی با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال برطرف نمود. بنابراین داریم:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 420 \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{2.45t}} = 420 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2.45e^{2.45t}} = 0$$

و یک‌بار دیگر پاسخی داریم که در صفر شروع می‌شود و خاتمه می‌یابد و به ازای کلیهٔ زمانهای دیگر دارای مقادیر مثبت می‌باشد. یک مقدار ماکزیمم v_m هم در زمان t_m روی می‌دهد که برای مثال ما داریم: $v_m = ٦٣/١V$ ، $t_m = ٠/٤٠٨S$

این ماکزیمم بزرگتر از آنی است که برای حالت فوق میرایی به دست آمد و نتیجه‌ای است از تلفات کمتری که در مقاومت بزرگتر روی می‌دهد. زمان پاسخ ماکزیمم کمی دیرتر از زمان مربوطه در حالت فوق میرایی می‌باشد. زمان فروکش را هم می‌توان با حل معادلهٔ $v_m/١٠٠ = ٤٢٠t_se^{-٢/٤٥t_s}$ نسبت به t_s (به وسیله روشهای سعی و خطا و یا با استفاده از روتین SOLVE یک ماشین حساب) تعیین نمود که برابر است با: $t_s = ٣/١٢S$ که مقدار کوچکتری نسبت به حالت فوق میرایی (۵/۱۵S) می‌باشد. در واقع می‌توان نشان داد که به ازای مقادیر معلوم C,L، انتخاب مقداری از R که میرایی بحرانی را ارائه کند همیشه زمان فروکش کمتری را نسبت

به هر انتخابی از R در حالت فوق میرایی ارائه می کند. البته می‌توان با افزایش کمی در مقاومت، اصلاح کمی (کاهش) در زمان فروکش به دست آورد منحنی پاسخ حالت میرایی بحرانی در شکل ۵-۷ رسم شده است که می‌توان آن را با حالت فوق میرایی (وزیر میرایی) با مراجعه به شکل ۸-۷ مقایسه نمود.

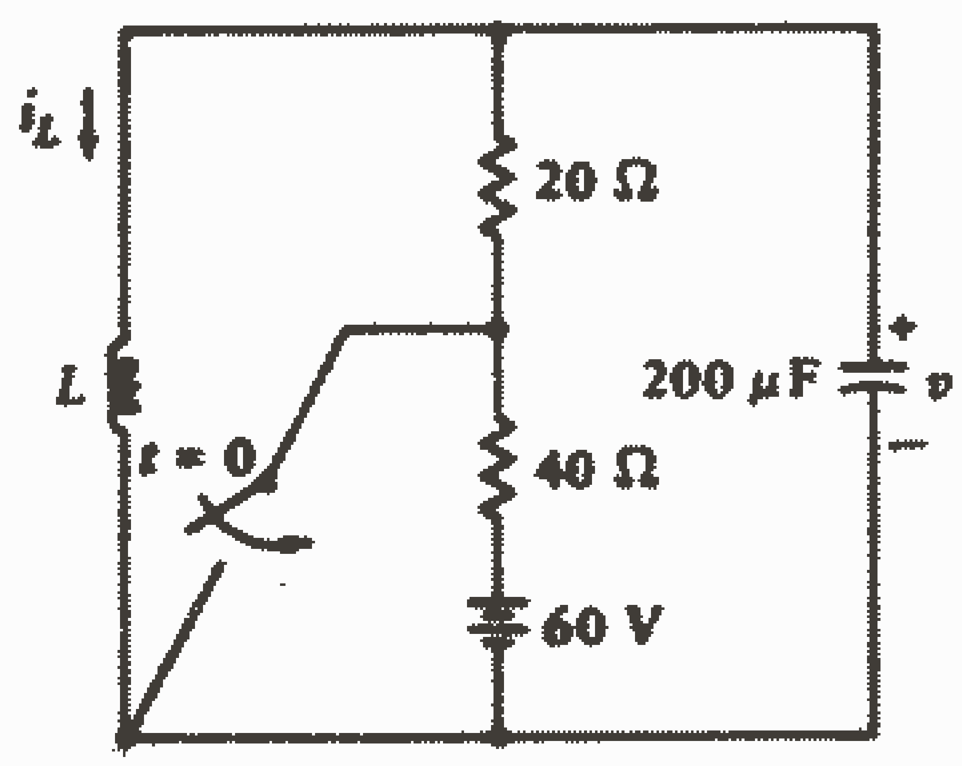


شکل ۵ ـ ۷: پاسخ $v(t) = ۴۲۰\ te^{-۲٫۴۵t}$ مربوط به شبکهٔ شکل ۲ ـ ۷ که در آن R را طوری تغییر داده‌ایم که میرایی بحرانی حاصل شود.

تمرین

۴ ـ ۷ ـ کلید شکل ۶-۷ پس از مدت طولانی باز بودن در لحظهٔ $t = 0$ بسته می‌شود. (a) L را طوری پیدا کنید که مدار در حالت میرایی بحرانی باشد. با استفاده از این مقدار L مقادیر زیر را پیدا کنید: (b) $i_L(0^+)$، (c) $v(0^+)$، (d) $i_L(۱ms)$

جواب: ۳۲۰mH ، ۱A ، 0 ، ۹۹۳mA



شکل ۶ ـ ۷: به تمرین ۴ ـ ۷ مراجعه کنید.

۵ - ۷ - مدار RLC موازی در حالت زیر میرایی

حال بیایید روندی را که در قسمت قبل آغاز کردیم با افزایش دوبارهٔ R ادامه دهیم. در این صورت ضریب میرایی α وقتیکه ω_0 ثابت بماند، کاهش می‌یابد و α^2 کمتر از ω_0^2 می‌شود و رادیکال موجود در روابط S_1, S_2 منفی می‌شود. این امر باعث می‌شود که پاسخ، ماهیت کاملاً متفاوتی داشته باشد اما خوشبختانه لازم نیست دوباره به معادلهٔ دیفرانسیل بنیادی باز گردیم. با استفاده از اعداد مختلط، پاسخ‌نمایی تبدیل به یک پاسخ سینوسی میرا می‌شود که این پاسخ کاملاً از کمیتهای حقیقی تشکیل شده است و کمیتهای مختلط فقط برای مشتق‌گیری لازم می‌شوند[1] بنابراین با فرم نمایی آغاز می‌کنیم:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

که در آن داریم:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

و سپس:

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1}\,\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

که در آن $j = \sqrt{-1}$ می‌باشد.

ما اکنون رادیکال جدیدی به دست می‌آوریم که در حالت زیر میرایی حقیقی می‌باشد و آن را با ω_d نشان می‌دهیم و فرکانس رزونانس طبیعی می‌نامیم: $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ حال با جمع‌بندی مطالب فوق می‌توانیم پاسخ را به صورت زیر بنویسیم:

$$v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t})$$

و یا به فرم طولانی‌تر می‌توان نوشت:

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left\{(A_1 + A_2)\left[\frac{e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}}{2}\right] + j(A_1 - A_2)\left[\frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{j2}\right]\right\}$$

حال می‌توان از دو تا از مهمترین اتحادهای مربوط به اعداد مختلط که بعداً در ضمیمه ٤ اثبات خواهند شد، استفاده نمود. کروشهٔ اول در معادلهٔ فوق برابر است با $\cos \omega_d t$ و کروشهٔ دوم برابر

---

۱ - مقدمه‌ای برای استفاده از اعداد مختلط در فصل ۹ و ضمیمه ٤ ظاهر می‌شود. در آن موقع ما طبیعت عمومی‌تر کمیتهای مختلط را با نشان دادن آنها به وسیله حروف درشت مورد تأکید قرار خواهیم داد و در این چند صفحه علائم خاصی را به کار نخواهیم برد.

است با $\sin \omega_d t$. بنابراین:

$$v(t) = e^{-\alpha t}[(A_1 + A_2)\cos \omega_d t + j(A_1 - A_2)\sin \omega_d t]$$

و می‌توان ضرایب را با علائم جدیدی مانند B_1, B_2 نشان داد:

$$v(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \qquad (۲۰)$$

حال که با حالت زیر میرایی سر و کار داریم، اعداد مختلط را پشت سر گذاشته‌ایم. این امر صحیح است زیرا α, ω_d, t اعداد حقیقی هستند و خود $v(t)$ هم باید یک کمیت حقیقی باشد (که می‌توان آن را بر روی یک اسیلوسکوپ و یا ولت‌متر و یا یک کاغذ گراف نمایش داد) و در نتیجه اعداد B_1, B_2 هم حقیقی می‌باشند. معادلهٔ (۲۰) دارای فرم تابعی مطلوب برای پاسخ زیر میرایی می‌باشد و درستی آن را می‌توان با جایگذاری مستقیم در معادلهٔ دیفرانسیل اولیهٔ چک نمود که این کار را به عنوان تمرین به عهدهٔ خوانندهٔ کنجکاو قرار می‌دهیم. دو مقدار ثابت B_1, B_2 را باز هم طوری انتخاب می‌کنیم که شرایط اولیهٔ داده شده را برآورده سازند. حال مقدار مقاومت را در مثال خودمان از $۷\sqrt{۶}/۲\Omega$ و یا $۸/۵۷\Omega$ به $۱۰,۵\Omega$ افزایش می‌دهیم و C, L بدون تغییر می‌مانند. بنابراین داریم:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 2 \ , \ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{6} \quad , \ \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{2} \quad (\text{rad/s})$$

به جز مقادیر ثابت دلخواه که باید محاسبه شوند، اکنون پاسخ برایمان معلوم شده است:

$$v(t) = e^{-۲t}(B_1 \cos \sqrt{۲}t + B_2 \sin \sqrt{۲}t)$$

محاسبهٔ دو مقدار ثابت مانند قبل می‌باشد. اگر دوباره فرض کنیم که $v(0) = 0$ و $i(0) = ۱۰$ آنگاه B_1 باید صفر باشد و در نتیجه داریم: $v(t) = B_2 e^{-۲t} \sin \sqrt{۲}t$ که مشتق آن می‌شود: $dv/dt = \sqrt{۲}B_2 e^{-۲t} \cos\sqrt{۲}t - ۲B_2 e^{-۲t} \sin \sqrt{۲}t$ و در لحظهٔ $t = 0$ مقدار آن عبارت است از:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \sqrt{2}B_2 = \frac{i_C(0)}{C} = 420$$

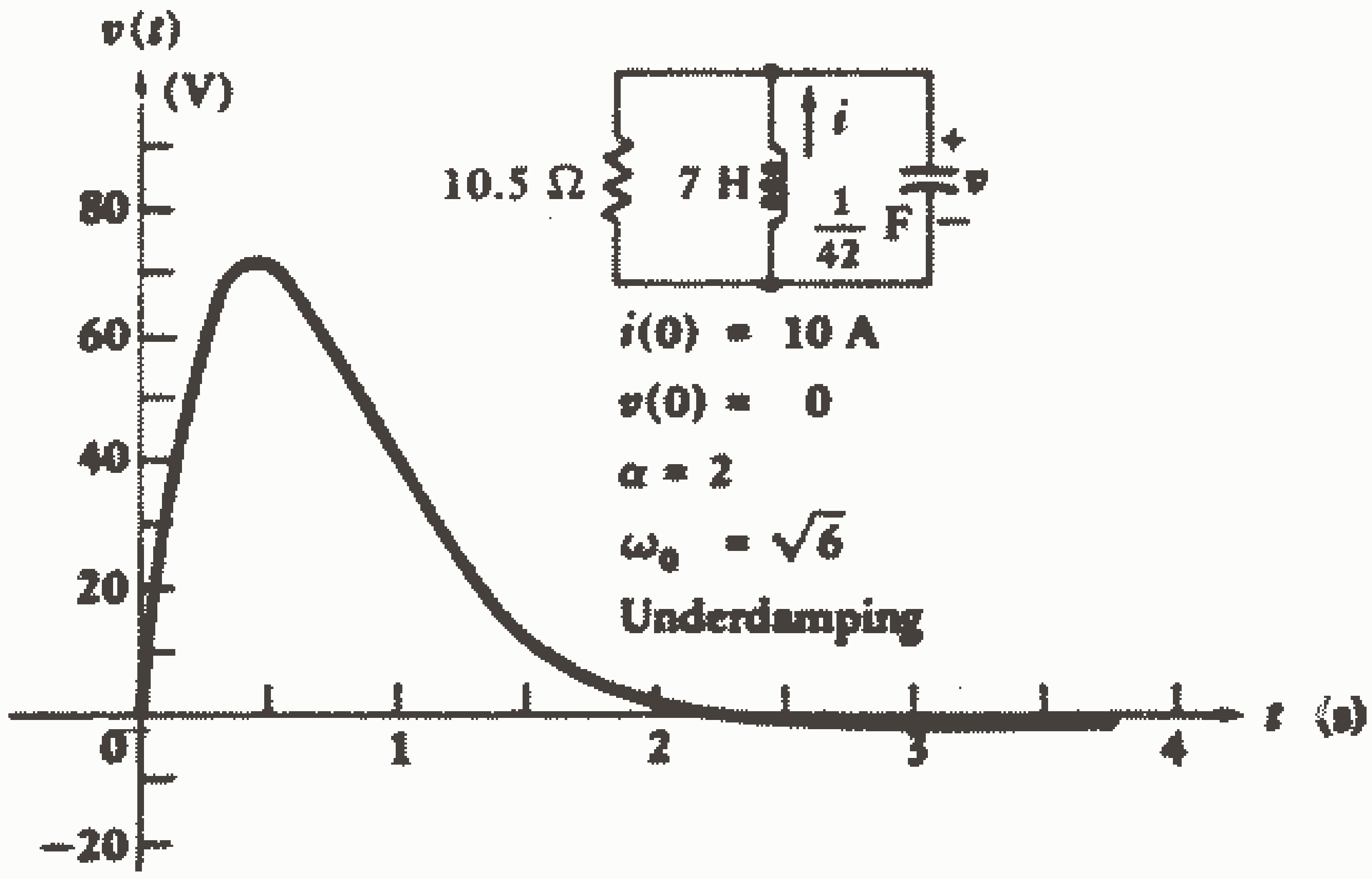
که i_c در شکل ۲-۷ تعریف شده است. بنابراین خواهیم داشت:

$$v(t) = ۲۱۰ \ \sqrt{۲} \ e^{-۲t} \sin \sqrt{۲}t$$

توجه داشته باشید که، مانند قبل، این پاسخ دارای مقدار اولیهٔ صفر می‌باشد و این به دلیل شرایط اولیهٔ ولتاژ می‌باشد که اعمال کرده‌ایم و همچنین مقدار نهایی آن هم صفر می‌باشد زیرا جملهٔ نمایی به ازای مقادیر بزرگ t ناپدید می‌شود. وقتیکه t از صفر به مقادیر مثبت کوچکی افزایش یابد، $v(t)$ به صورت $۲۱۰\sqrt{۲} \sin \sqrt{۲}t$ افزایش می‌یابد زیرا جملهٔ نمایی اساساً برابر

با یک باقی می‌ماند. اما در یک زمانی مانند t_m، تابع نمایی شروع به کاهش می‌کند که این کاهش سریعتر از افزایش $\sin \sqrt{۲}t$ می‌باشد، بنابراین $v(t)$ به مقدار ماکزیممی مانند v_m می‌رسد و سپس شروع به کاهش می‌کند. لازم به ذکر است که t_m مقداری از t نیست که به ازای آن $\sin \sqrt{۲}t$ ماکزیمم می‌شود. بلکه اندکی بعد از آن $\sin \sqrt{۲}t$ ماکزیمم می‌شود. وقتیکه $t = \pi/\sqrt{۲}$ مقدار $v(t)$ صفر است و در فاصلهٔ $\pi/\sqrt{۲} < t < \sqrt{۲}\pi$ پاسخ منفی می‌شود و دوباره در $t = \sqrt{۲}\pi$ برابر صفر می‌شود. بنابراین $v(t)$ یک تابع اسیلاتوری از زمان است و محور زمان را بی‌نهایت مرتبه در لحظات $t = n\pi/\sqrt{۲}$ قطع می‌کند (n یک عدد صحیح مثبت می‌باشد). البته در مثال ما، پاسخ فقط کمی زیر میرایی است و جملهٔ نمایی باعث می‌شود که تابع به قدری سریع میرا شود که اکثر صفر تلاقی‌ها (Zero Crossing) در نمودار مشهود نمی‌باشند.

با کاهش α طبیعت اسیلاتوری پاسخ قابل ملاحظه‌تر می‌شود. اگر α صفر باشد که متناظر با مقدار مقاومت بی‌نهایت می‌باشد، آنگاه $v(t)$ یک سینوس غیرمیرا می‌باشد که با دامنهٔ ثابتی نوسان می‌کند. هرگز زمانی وجود ندارد که در آن $v(t)$ به پایین‌تر از یک درصد مقدار ماکزیمم‌اش افت کند و در آن مقدار بماند، بنابراین زمان فروکش بی‌نهایت می‌باشد. این یک حرکت دائمی نیست و فقط فرض کرده‌ایم که یک انرژی اولیه در مدار باشد و هیچ وسیله‌ای برای اتلاف این انرژی نباشد. که این انرژی از محل اولیه‌اش در سلف به خازن منتقل می‌شود و سپس به سلف باز می‌گردد و الی آخر.



شکل ۷ ـ ۷: پاسخ $v(t) = ۲۱۰\sqrt{۲}e^{-۲t} \sin\sqrt{۲}t$ مربوط به شبکهٔ شکل ۲ ـ ۷ که در آن R بگونه‌ای افزایش یافته است که تولید پاسخ زیر میرایی کند.

یک مقدار محدود R در مدار RLC موازی مانند نوعی واسطهٔ انتقال الکتریکی عمل می‌کند. هر لحظه که انرژی از L به C و بالعکس منتقل می‌شود، این واسطه مأموریت خود را انجام می‌دهد. دیری نمی‌گذرد که این واسطه تمام انرژی را می‌گیرد و تاژول آخر آن را تلف می‌کند و حتی یک ژول انرژی هم برای C,L باقی نمی‌ماند و بدون ولتاژ و جریان باقی می‌مانند.

مدارهای RLC موازی عملی می‌توان ساخت که مقادیر موثر R آنها به‌قدری بزرگ باشد که یک پاسخ سینوسی غیرمیرا در آنها برای سالها بدون اعمال انرژی اضافی، باقی بماند. همچنین می‌توانیم شبکه‌های فعالی بسازیم که مقدار کافی انرژی در طی هر نوسان v(t) ارائه کنند به طوریکه یک پاسخ سینوسی تقریباً کامل بتواند تا هر زمانی که بخواهیم باقی بماند. این وسیله یک اسیلاتور سینوسی یا سیگنال ژنراتور است که یک وسیلهٔ مهم آزمایشگاهی می‌باشد. در قسمت ۸-۷ یک نوع op − amp ی از این اسیلاتور سینوسی ارائه شده است. با مراجعه به مثال عددی‌مان و با مشتق گیری اولین ماکزیمم v(t) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$t_{m1} = ۰/۴۳۵S \text{ در } v_{m1} = ۷۱/۸V$$

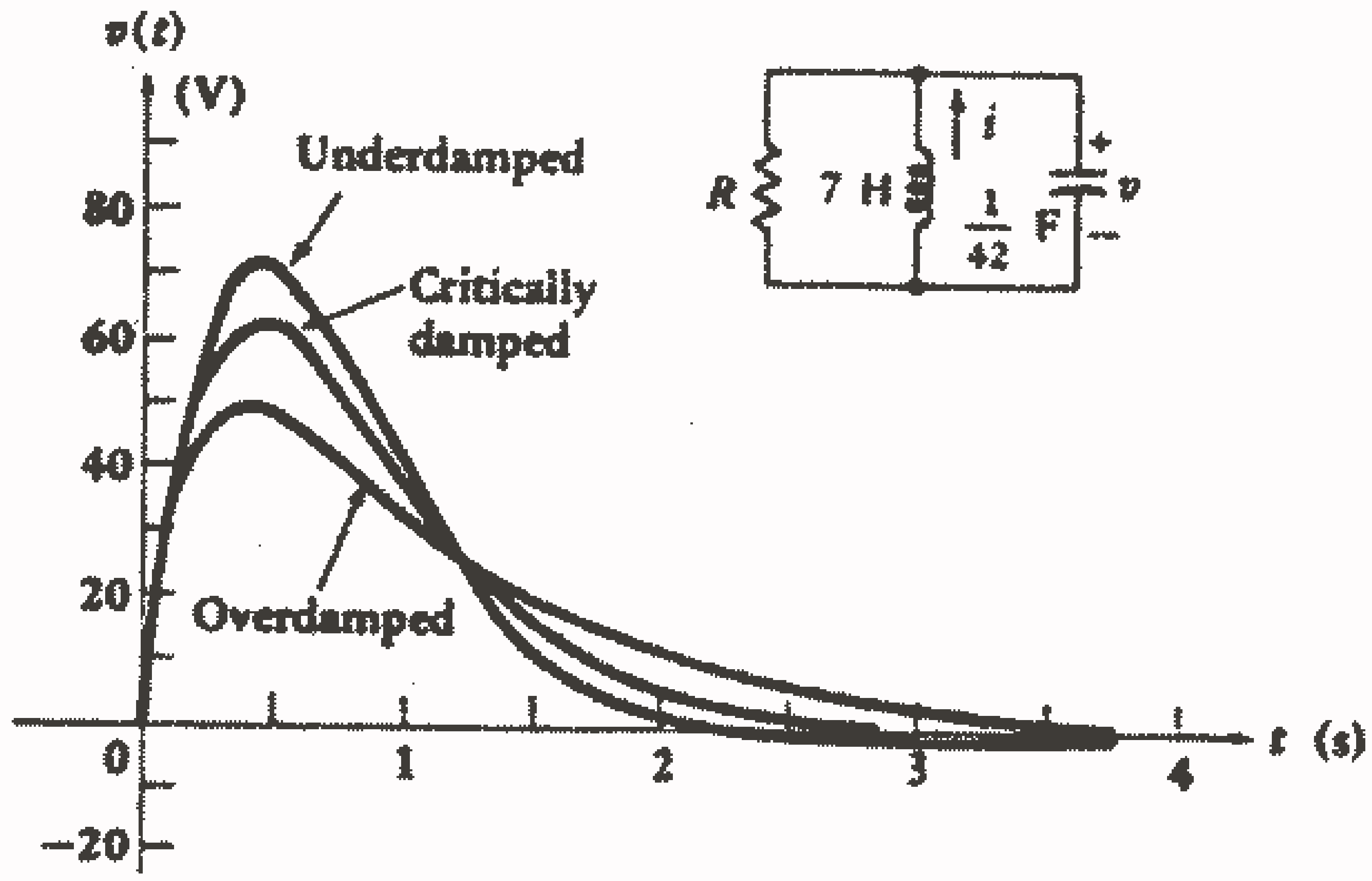
و می‌نیمم متوالی آن عبارت است از: $v_{m2} = -۰/۸۴۵V$ در $t_{m2} = ۲/۶۵۷S$ والی آخر.

زمان فروکش را می‌توان با روش سعی و خطا به دست آورد که عبارت از ۲/۹۲S می‌باشد که کوچکتر از زمان مربوطه برای حالت میرایی بحرانی می‌باشد. توجه داشته باشید که t_s بزرگتر از t_{m2} می‌باشد زیرا دامنهٔ v_{m2} بزرگتر از یک درصد دامنهٔ v_{m1} می‌باشد این امر به ذهن چنین القا می‌کند که کاهش کمی در R باعث کاهش دامنهٔ undershoot می‌شود و اجازه می‌دهد که t_s کمتر از t_{m2} باشد. مسئله ۳۰ در آخر این فصل ارائه شده است تا هر دانشجویی بتواند حس کنجکاوی اجتناب‌ناپذیر برانگیخته شده به وسیله این توضیحات را ارضاء کند و مقدار عددی می‌نیمم زمان فروکش برای این مدار را، همراه با مقدار R که آن را ایجاد می‌کند، تعیین کند.

پاسخهای فوق میرایی، میرایی بحرانی وزیر میرایی برای این مدار در یک نمودار در شکل ۸-۷ نشان داده شده است. مقایسهٔ سه منحنی نتایج کلی زیر را به دست می‌دهد:

۱ ـ وقتیکه به وسیله تنظیم اندازهٔ مقاومت موازی، میرایی عوض می‌شود ماکزیمم اندازهٔ پاسخ برای میرایی کوچکتر، بزرگتر می‌باشد.

۲ ـ در حالت زیر میرایی پاسخ نوسانی می‌شود و می‌نیمم زمان فروکش برای زیر میرایی کم، حاصل می‌شود.



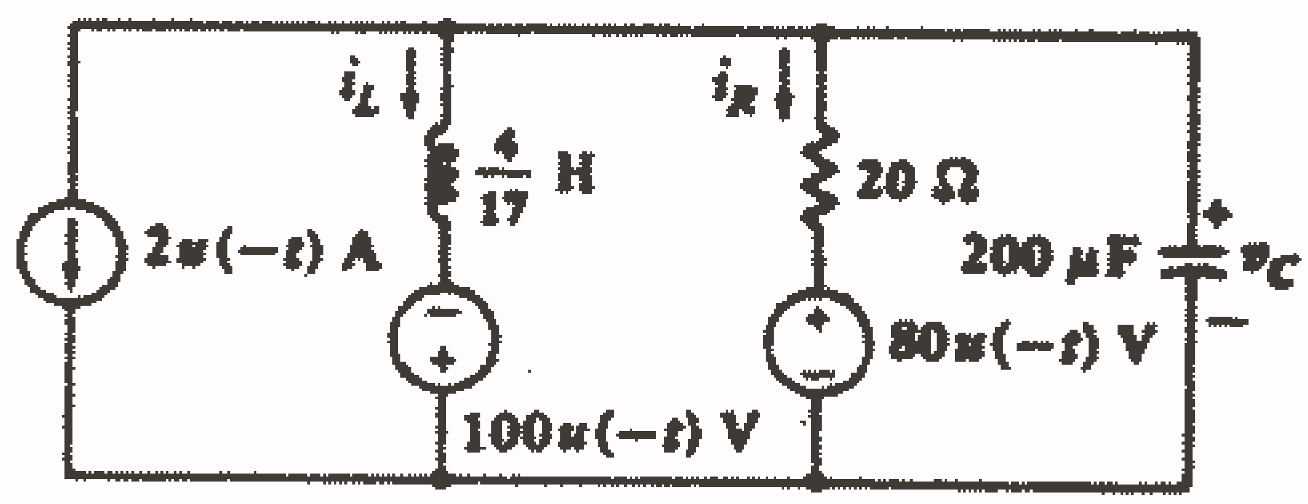
شکل ۸ ـ ۷: سه منحنی برای یک مدار RLC موازی که در آن $\omega_o = \sqrt{6}$ و $V(0) = 0$ و $i(0) = 10A$ و α برابر ۳٫۵ (برای فوق میرایی) و ۲٫۴۵ (برای میرایی بحرانی) و ۲ (برای زیر میرایی) می‌باشد.

تمرین

۵ ـ ۷: سه منبع مدار شکل ۹-۷ در لحظهٔ $t = 0$ خاموش می‌شوند. پیدا کنید:

(a) $v_c(0)$، (b) $i_L(0)$، (c) $i_R(0^+)$، (d) $i_L(10ms)$

جواب: ۱۰۰V-، ۷A، ۵A-، ۲٫۶۴A



شکل ۹ ـ ۷: به تمرین ۵ ـ ۷ مراجعه کنید.

۶ ـ ۷ مدار RLC سری بدون منبع

اکنون می‌خواهیم پاسخ طبیعی یک مدار متشکل از یک مقاومت ایده‌آل، یک سلف ایده‌آل و یک خازن ایده‌آل را که به طور سری متصل شده‌اند، تعیین کنیم. مقاومت ایده‌آل ممکن است بیانگر یک مقاومت فیزیکی باشد که به یک مدار LC یا RLC وصل شده است و یا نمایندهٔ تلفات اهمی و تلفات هستهٔ فرو مغناطیسی سلف باشد و یا اینکه برای نمایش همهٔ موارد فوق و سایر وسایل جذب‌کنندهٔ انرژی به کار رفته باشد. در حالت خاص اندازهٔ مقاومت ایده‌آل می‌تواند حتی دقیقاً مساوی با مقاومت اهمی سیمی باشد که سلف واقعی از آن ساخته می‌شود.

مدار RLC سری متناظر مدار RLC موازی می‌باشد و همین یک واقعیت کافی است که تحلیل آن را کاری ساده و کم‌زحمت سازد. شکل ۷-۱۰a این مدار سری را نشان می‌دهد. معادلهٔ انتگرال ـ دیفرانسیلی اولیهٔ به صورت زیر می‌باشد:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt - v_C(t_0) = 0$$

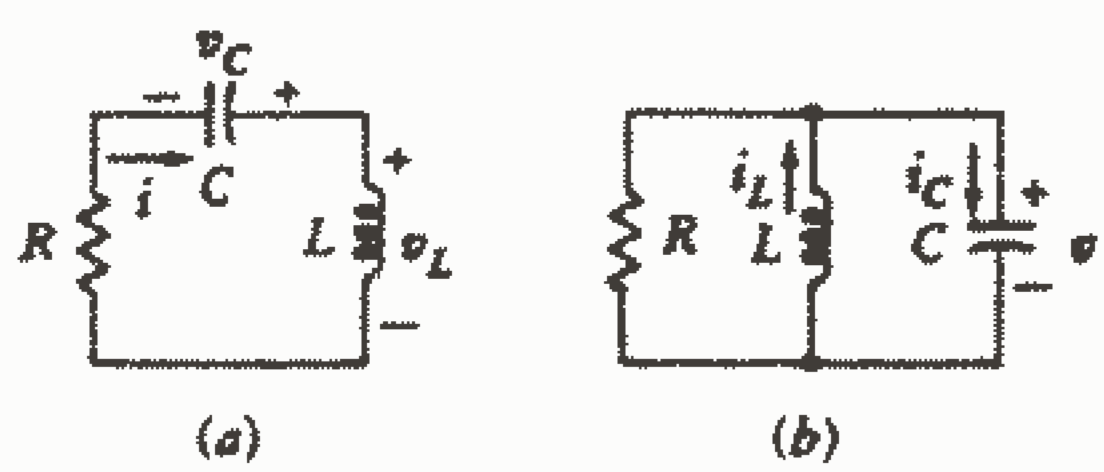
که می‌توان آن را با معادلهٔ متناظرش برای مدار RLC موازی، که مجدداً در شکل ۷-۱۰b آمده است، مقایسه نمود.

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R}v + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt - i_L(t_0) = 0$$

معادلات مرتبه دومی هم که به وسیلهٔ مشتق‌گیری از هر یک از معادلات فوق به دست می‌آیند نیز متناظر می‌باشند:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \qquad (۲۱)$$

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = 0 \qquad (۲۲)$$



شکل ۱۰ ـ ۷: (a) مدار RLC سری که متناظر مدار RLC موازی شکل (b) می‌باشد. البته مقادیر عناصر در مدارهای (a) و (b) یکسان نیستند.

بدیهی است که بحث کلی ما دربارهٔ مدار RLC موازی مستقیماً قابل اعمال به مدار RLC سری می‌باشد. البته شرایط اولیهٔ مربوط به ولتاژ خازنی و جریان سلفی معادل خواهد بود با شرایط اولیهٔ مربوط به جریان سلفی و ولتاژ خازنی و نیز پاسخ ولتاژ تبدیل به پاسخ جریان خواهد شد. این امکان وجود دارد که چهار قسمت قبلی (شامل تمرینات) را با استفاده از زبان تناظر بازخوانی نمود و به وسیلهٔ آن شرح کاملی از مدار RLC سری به دست آورد.[1] البته این کار پس از چند پاراگراف اولیهٔ ممکن است گیج کننده شود و واقعاً انجام آن ضروری به نظر نمی‌رسد.

خلاصه‌ای از پاسخ مدار سری به سادگی گردآوری می‌شود، که با توجه به مدار شکل ۷-۱۰a، پاسخ فوق میرایی عبارت است از:

$$i(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

که در آن داریم:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

و بنابراین:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

فرم پاسخ میرایی بحرانی عبارت است از:

$$i(t) = e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$$

و سرانجام پاسخ زیر میرایی را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

که در رابطهٔ فوق

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

بدیهی است که اگر برحسب پارامترهای α ، ω_0 ، ω_d عمل کنیم، فرم ریاضی پاسخ‌ها در وضعیت‌های متناظر، یکسان خواهند بود. افزایش α در مدار سری یا موازی، در حالیکه ω_0 ثابت نگهداشته شود، ما را بسوی یک پاسخ فوق میرایی رهنمون می‌شود. تنها تذکری که لازم است بدهیم درباره محاسبهٔ α می‌باشد که برای مدار موازی ۱/۲RC و در مدار سری برابر R/۲L می‌باشد، بنابراین α با افزایش مقاومت سری و با کاهش مقاومت موازی، افزایش می‌یابد. برای اینکه هرگز

۱- در واقع در حین نوشتن چاپ اول این متن، مؤلفین ابتدا این قسمتها را برای توصیف مدار RLC سری نوشتند. اما بعد از اینکه تصمیم گرفته شد که ارائه تحلیل مدار RLC موازی (که عملی‌تر است) بهتر است، بازگشت به نوشتهٔ اصلی و جایگزینی آن با متناظرش ساده گردید.

فراموشمان نشود این موضوع را در کادر قرار می‌دهیم:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \alpha = \frac{R}{2L}}$$

(موازی) (سری)

بعنوان یک مثال عددی، یک مدار *RLC* سری در نظر می گیریم که در آن $L = 1H$،
$R = 2k\Omega$ ، $C = 1/401\ \mu F$ ، $i(0) = 2mA$ ، $v_c(0) = 2V$ می‌باشد. درمی‌یابیم که
α برابر ۱۰۰۰ و ω_0 برابر ۲۰۰۲۵ می باشد و در نتیجه پاسخ، زیر میرایی می‌باشد و بنابراین
مقدار ω_d را محاسبه می کنیم که برابر ۲۰۰۰۰ می‌باشد. اکنون بجز دو مقدار ثابت دلخواه که
باید محاسبه شوند، پاسخ بطور کامل مشخص شده است:

$$i(t) = e^{-1000t}(B_1 \cos 20000t + B_2 \sin 20000t)$$

با اعمال شرایط اولیهٔ جریان، خواهیم داشت: $B_1 = 0/002$ و در نتیجه داریم:

$$i(t) = e^{-1000t}(0/002 \cos 20000t + B_2 \sin 20000t)$$

شرط اولیهٔ دیگری را که باقیمانده است به مشتق اعمال می کنیم، خواهیم داشت:

$$di/dt = e^{-1000t}(-40 \sin 20000t + 20000 B_2 \cos 20000t - 2 \cos 20000t - 1000 B_2 \sin 20000t)$$

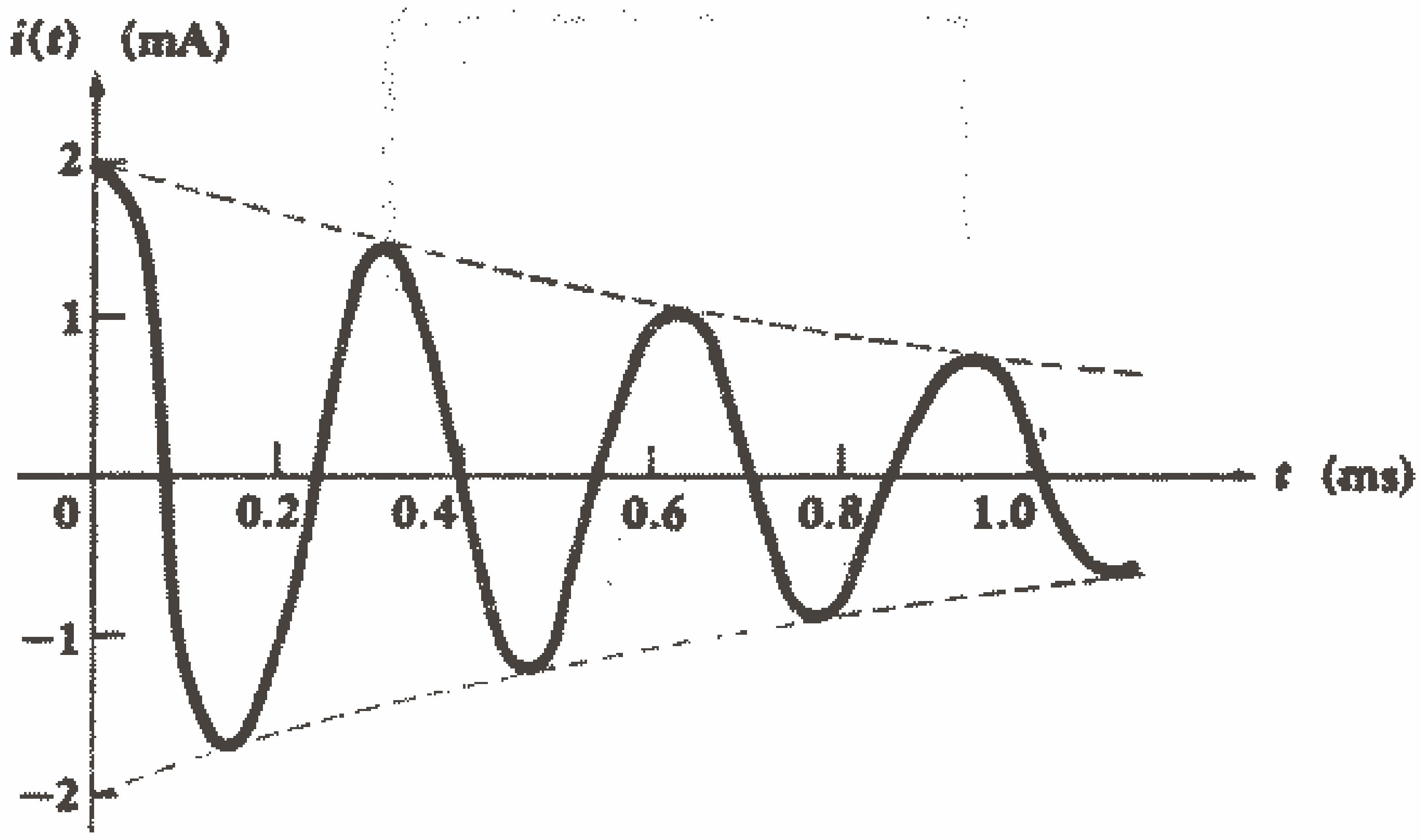
$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 20\,000B_2 - 2 = \frac{v_L(0)}{L} = \frac{v_C(0) - Ri(0)}{L} = \frac{2 - 2000(0.002)}{1} = -2$$

و از آنجا داریم: $B_2 = 0$

بنابراین پاسخ مطلوب چنین است: $i(t) = 2e^{-1000t} \cos 20000\, t\ mA$

این پاسخ از هر پاسخی که تابحال بررسی کرده‌ایم نوسانی‌تر است و محاسبهٔ مستقیم نقاط
کافی برای رسم یک پاسخ واضح، کاری است طاقت‌فرسا. ترسیم خوب را می‌توان ابتدا با رسم دو
پوش نمایی $0/002e^{-1000t}$ و $-0/002e^{-1000t}$ که در شکل ۱۱ - ۷ با خط چین نمایش داده
شده‌است بدست آورد. سپس محل نقاط ربع سیکل موج سینوسی در $20000t = 0, \pi/2, \pi, \ldots$
و یا $t = \%7854kms$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ که بوسیله علائم کم‌رنگ بر روی محور زمان
در شکل مشخص شده‌اند بما اجازه می‌دهند که منحنی نوسانی را بسرعت رسم کنیم. زمان
فروکش را در اینجا می‌توان بسادگی با استفاده از قسمت فوقانی پوش، تعیین نمود. یعنی،

$(0{,}002)\ 0{,}01 = 0{,}002e^{-1000t}$ و از آنجا بدست می آید، $t_s = 461\mu s$ که یک مقدار تقریبی است که معمولا بکار می‌رود.



شکل ۱۱ - ۷: پاسخ جریان در یک مدار RLC سری زیر میرایی، که در آن
$i(0) = 2\ mA,\ \omega_d = 20000 S^{-1},\ \alpha = 1000 S^{-1}$
و $v_c(0) = 2V$ می باشد. ترسیم منحنی به وسیلهٔ رسم آن در داخل دو پو (نقطه‌چین) ساده‌تر شده است.

تمرین

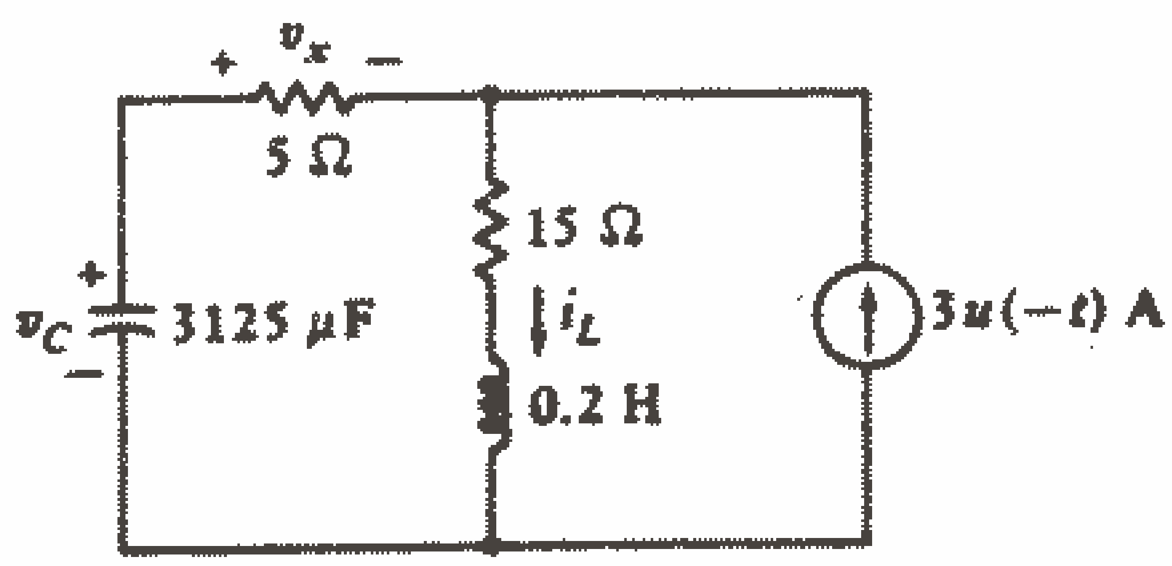
۶ - ۷ - با مراجعه به شکل ۱۲ - ۷ مقادیر زیر را تعیین کنید:

v_C (۲۰ms) (e), $v_x(0^+)$ (d), $v_x(0^-)$ (C) $i_L(0)$ (b), $v_C(0)$ (a)

جواب: ۴۵V، ۳A، 0، ۱۵V، ۲۹٫۷۷V

۷ - ۷ - مقاومت ۱۵Ω را در شکل ۱۲ - ۷ به ۴٫۶Ω تبدیل کنید و تمرین ۶ - ۷ را تکرار کنید.

جواب: ۱۳٫۸۷V، ۳A، 0، ۱۵V، ۰٫۴۱۲V-



شکل ۱۲ - ۷: به تمرینات ۶ - ۷ و ۷ - ۷ مراجعه کنید.

۷-۷ - پاسخ کامل مدار RLC

اکنون باید آن دسته از مدارهای RLC را بررسی کنیم که در آنها منابع dc به شبکه سوئیچ می‌شوند و تولید پاسخ های اجباریی می کنند که تا زمان بینهایت محو نمی‌شوند راه‌حل کلی به همان روشی که در مورد مدارهای RL و RC دنبال شد، بدست می آید یعنی: پاسخ اجباری بطور کامل تعیین می شود و پاسخ طبیعی بصورت فرم تابعی مناسبی که شامل تعداد مناسبی از ثابت‌های دلخواه است بدست می آید و پاسخ کامل بصورت مجموع پاسخ‌های طبیعی و اجباری نوشته می‌شود و سپس شرایط اولیه تعیین می‌شوند و برای پیدا کردن مقادیر ثابت‌ها به پاسخ کامل اعمال می‌شوند. همین مرحلهٔ آخر می‌باشد که معمولا پرزحمت‌ترین کار برای دانشجویان است. بنابراین، با وجود اینکه تعیین شرایط اولیه برای مدارهای شامل منابع dc اساسا فرقی با مدارهای بدون منبع که قبلا بطور مفصل بررسی کردیم ندارد، این موضوع را در مثال زیر مورد تاکید قرار خواهیم داد.

قسمت اعظم آشفتگی و دردسری که درتعیین و اعمال شرایط اولیه بروز می کند. بدلیل این علت ساده است که ما برای خود مجموعهٔ قواعد منسجم و قطعی تدوین نکرده‌ایم. در هر تحلیل در برخی نکات وضعیتی بروز می کند که در آن تدبیری وجود دارد که کم و بیش منحصر به همان مسئله بخصوص است. این ابتکار و قابلیت انعطاف در تفکر که پس از حل مسائل زیادی و در اثر تمرین حاصل می‌شود، منشاء مشکلات ما می‌باشد.

پاسخ کامل یک دستگاه مرتبهٔ دوم (که بطور دلخواه آنرا یک پاسخ ولتاژ فرض می کنیم) شامل یک پاسخ اجباری، که برای تحریک dc مقدار ثابتی است $v_f(t)=V_f$، و یک پاسخ طبیعی $v_n(t) = Ae^{s_1t} + Be^{s_2t}$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$v(t) = V_f + Ae^{s_1t} + Be^{s_2t}$$

اکنون فرض می کنیم که V_f ، S_2 ، S_1 قبلا از روی مدار و توابع تحریک داده شده، تعیین شده‌اند و فقط A و B باقی مانده‌اند که باید تعیین شوند. معادلهٔ اخیر وابستگی تابعی A، B، v و t را نشان می‌دهد و جایگذاری مقدار معلوم v در لحظهٔ $t = 0^+$ یک معادله برحسب A و B را بدست می‌دهد که این، قسمت آسان مسئله است. متاسفانه رابطهٔ دیگری بین A و B لازم است که بوسیلهٔ مشتق گیری از پاسخ و قرار دادن مقدار معلوم dv/dt در لحظهٔ $t = 0^+$ بدست می آید.

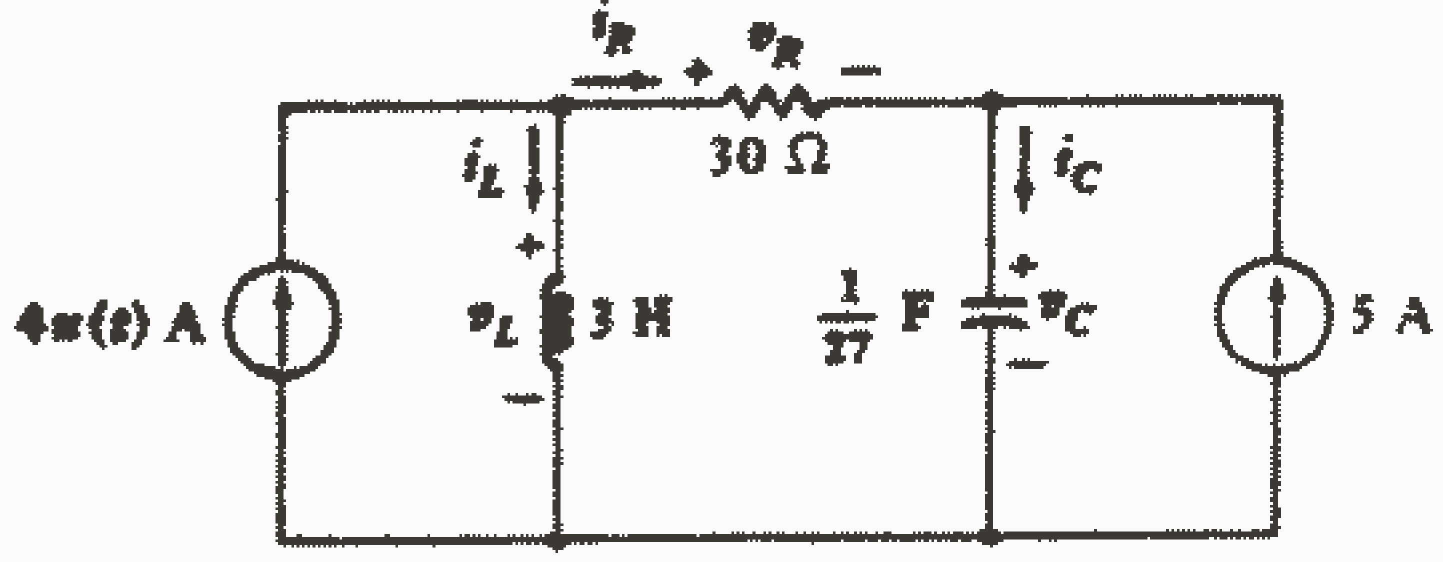
$$dv/dt= 0 + S_1 Ae^{s_1t} + S_2Be^{s_2t}$$

دلیلی وجود ندارد که نتوانیم این روند را ادامه دهیم یعنی می‌توان مشتق دوم را گرفت و

اگر مقدار d^2v/dt^2 در $t = 0^+$ بکار گرفته شود، رابطهٔ سومی هم بین A و B بدست می آید. اگرچه این مقدار در یک سیستم مرتبه دوم معمولا معلوم نیست ولی در واقع ما بیشتر تمایل داریم که از این روش برای پیدا کردن مقدار اولیهٔ مشتق دوم (در صورت نیاز) استفاده کنیم. بنابراین اکنون ما دو معادله برحسب A و B داریم که می‌توان آنها را حل نمود و دو مقدار ثابت را محاسبه نمود.

حال تنها مسئلهٔ باقی‌مانده عبارت است از تعیین مقادیر v و dv/dt درلحظهٔ $t=0^+$ فرض می کنیم که v یک ولتاژ خازنی بصورت $v_c = v$ باشد. ازآنجاییکه $i_c=C\ dvc/dt$، ما باید رابطهٔ بین مقدار اولیه dv/dt ومقدار اولیهٔ جریان خازن را تشخیص دهیم. اگر بتوانیم مقداری برای این جریان اولیهٔ خازن بدست آوریم آنگاه بطور اتوماتیک خواهیم توانست مقداری‌برای dv/dt بدست آوریم. دانشجویان معمولا می‌توانند براحتی $v(0^+)$ را بدست آورند اما در پیدا کردن مقدار اولیهٔ dv/dt کمی دچار اشتباه و گمراهی می‌شوند. اگر یک جریان سلفی را بعنوان پاسخ خودمان انتخاب کرده بودیم آنگاه مقدار اولیهٔ diL/dt با مقدار اولیهٔ یک ولتاژ سلفی ارتباط پیدا می کرد. متغیرهایی بجز ولتاژهای خازنی و جریان‌های سلفی بوسیله بیان کردن مقادیر اولیهٔ آنها و مقادیر اولیهٔ مشتقاتشان برحسب مقادیر متناظر v_c و i_L تعیین می‌شوند.

ما این روش را بوسیله تحلیل دقیق مدار شکل ۱۳ - ۷ توضیح داده و تمام مقادیر را پیدا خواهیم کرد. برای آسانی کردن تحلیل باز هم از یک ظرفیت خازنی خیلی بزرگ و غیر واقعی استفاده شده است. هدف ماپیدا کردن‌مقدارهرجریان‌وولتاژدرلحظات $t=0^-$ و $t=0^+$ می‌باشد که با معلوم بودن این مقادیر، مشتقات مورد نیاز را بسادگی می‌توان محاسبه نمود.



شکل ۱۳ - ۷: یک مدار RLC که برای توضیح روش به دست آوردن شرایط اولیه به کار رفته است. پاسخ مطلوب $v_C(t)$ می‌باشد.

در لحظهٔ $t=0^-$، فقط منبع جریان سمت راست فعال است. بعلاوه فرض شده است که مدار برای همیشه در این حالت بوده است و همهٔ ولتاژها و جریان‌ها ثابت فرض شده‌اند. بعبارت دیگر یک شرایط پایداری حاصل شده است و پاسخ اجباری حاصله دارای فرم تابع تحریک و انتگرال و مشتقات آن می‌باشد. انتگرال تابع تحریک (یک تابع صعودی خطی از زمان) در این مدار وجود ندارد زیرا آن فقط وقتیکه یک جریان ثابت به خازنی اعمال شود و یا ولتاژ ثابتی در دو سر سلف موجود باشد. واقع می‌شود. این حالت بطور طبیعی نباید موجود باشد زیرا ولتاژ خازن و یا جریان سلف در لحظهٔ $t=0^-$ مقدار بینهایت پیدا می‌کنند. بنابراین حضور یک جریان ثابت در سلف الزام می‌دارد که ولتاژ دو سر آن صفر باشد: $v_L(0^-)=0$ و یک ولتاژ ثابت در دو سر خازن ایجاب می‌کند که جریان آن صفر باشد: $i_C(0^-)=0$ سپس قانون جریان کیرشوف را به گره سمت راست اعمال می‌کنیم تا بدست آوریم $i_R(0^-)=-5A$ که از آن نتیجه می‌شود: $v_R(0^-)=-150V$ حال می‌توانیم قانون ولتاژ کیرشوف را در حلقه وسطی بکار برده و $v_C(0^-)=150V$ را بدست آوریم و د رهمین حال قانون KCL ما را قادر می‌سازد که جریان سلف را پیدا کنیم: $i_L(0^-)=5A$ با وجود اینکه مشتقات در لحظهٔ $t=0^-$ برای ما چندان مورد توجه نیستند، اما واضح است که همگی آنها برابر صفر می‌باشند.

حال اجازه دهید که زمان یک افزایش نموی پیدا کند. در طی فاصلهٔ زمانی از $t=0^-$ تا $t=0^+$ منبع جریان سمت چپ فعال می‌شود و اغلب مقادیر ولتاژها و جریان‌ها در لحظهٔ $t=0^-$ بطور ناگهانی تغییر می‌یابند. با وجود این ما باید با متمرکز نمودن توجه خود به کمیت‌هایی که نمی‌توانند تغییر کنند، یعنی جریان سلف و ولتاژ خازن، کار خود را شروع کنیم. هر دو این کمیت‌ها باید در حین کلید زنی ثابت بمانند. بنابراین:

$$i_L(0^+)=5A\ ,\quad v_C(0^+)=150\ V$$

چون اکنون دو جریان گره چپ معلوم شده‌اند، خواهیم داشت: [1]

$$i_R(0^+)=-1A\ ,\quad v_R(0^+)=-30V$$

۱- این جریان تنها کمیت، از چهار کمیت باقی مانده است که می‌توان در یک مرحله آنرا بدست آورد. در مدارهای پیچیده‌تر امکان دارد که هیچیک از مقادیر اولیهٔ باقیمانده را نتوان با یک قدم بدست آورد که در اینصورت باید یا معادلات مداری را نوشت و یا مدار معادل مقاومتی ساده‌تری را رسم نمود.

بنابراین:

$$i_C(0^+) = ٤A\ ,\quad v_L(0^+) = ١٢٠\ V$$

حال فقط شش مشتق باقی می‌مانند که باید محاسبه شوند، البته همهٔ آنها برای محاسبهٔ دو مقدار ثابت دلخواه لازم نیستند. روند را باید به وسیله اعمال مستقیم معادلات تعریف‌کننده عناصر ذخیره‌کنندهٔ انرژی شروع کنیم. برای سلف داریم:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

و به طور اخص داریم:

$$v_L(0^+) = L\frac{di_L}{dt}\bigg|_{t=0^+}$$

بنابراین:

$$\frac{di_L}{dt}\bigg|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = 40 \quad A/s$$

به طور مشابه داریم:

$$\frac{dv_C}{dt}\bigg|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = 108 \quad V/s$$

چهار مشتق دیگر را با در نظر گرفتن اینکه KVL,KCL هر دو به وسیله مشتقات هم اقناع می‌شوند، می‌توان تعیین نمود. مثلاً در گره سمت چپ داریم:

$$4 - i_L - i_R = 0 \qquad t > 0 \ \rightarrow\ 0 - \frac{di_L}{dt} - \frac{di_R}{dt} = 0 \qquad t > 0$$

و بنابراین داریم:

$$\frac{di_R}{dt}\bigg|_{t=0^+} = -40 \quad A/s$$

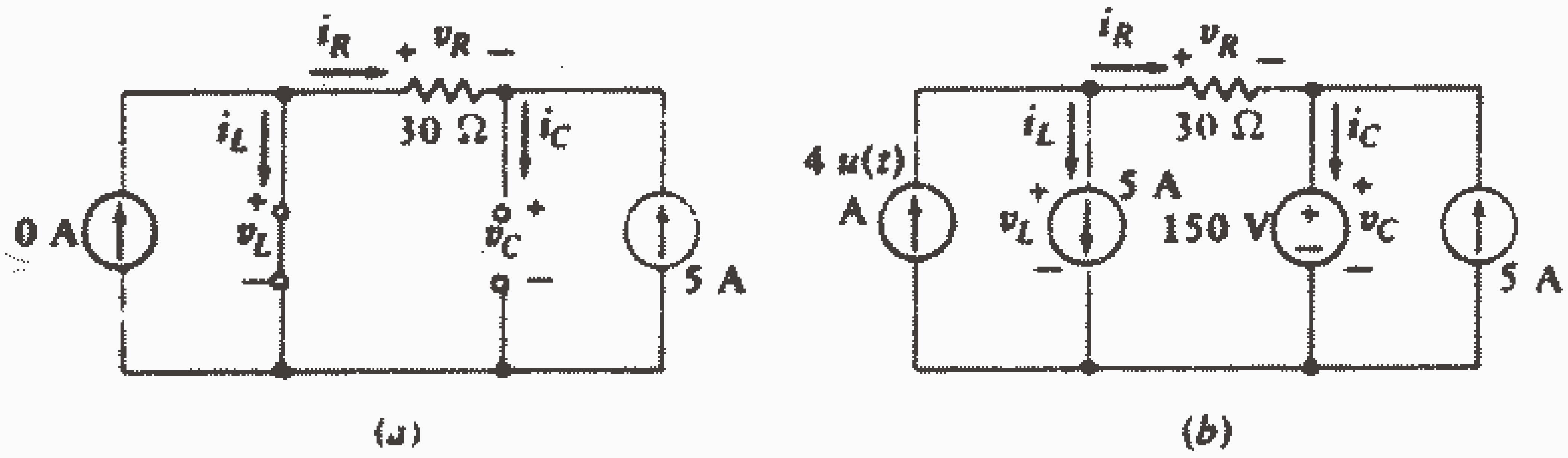
سه مقدار اولیهٔ مربوط به مشتقات دیگر را به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$\frac{dv_R}{dt}\bigg|_{t=0^+} = -1200 \quad V/s \qquad \frac{dv_L}{dt}\bigg|_{t=0^+} = -1092 \quad V/s \qquad \frac{di_C}{dt}\bigg|_{t=0^+} = -40 \quad A/s$$

حال بیایید روشی را که کمی متفاوت است و به وسیلهٔ آن می‌توان همهٔ این جریانها، ولتاژها و مشتقات را در لحظهٔ $t = 0^-$ ، $t = 0^+$ محاسبه نمود، بررسی کنیم. دو مدار معادل مختلف ایجاد خواهیم کرد که یکی برای شرایط حالت پایدار که در $t = 0^-$ برقرار است، صادق است و دیگری برای فاصلهٔ زمانی سوئیچینگ صادق می‌باشد. بحثی که در پی می‌آید براساس استدلالاتی است که قبلاً انجام داده‌ایم و به همین دلیل کوتاهتر از حالتی است که اگر این بحث را در ابتدا ارائه می‌کردیم، می‌شد.

قبل از انجام عمل سوئیچینگ، فقط جریانها و ولتاژهای مستقیم در مدار وجود دارند و بنابراین سلف را می‌توان با یک اتصال کوتاه (معادل dc آن) و خازن را با یک مدار باز جایگزین

نمود. اگر مدار شکل ۱۳-۷ را طبق این روش بخواهیم دوباره ترسیم کنیم مدار شکل 7-14a به دست می‌آید. اکنون سه جریان و سه ولتاژ به راحتی به وسیله روشهای تحلیل مدارهای مقاومتی پیدا می‌شوند که مقادیر عددی آنها همانهایی هستند که قبلا به دست آوردیم.



شکل ۱۴ - ۷: (a) مدار معادل شکل ۱۳ - ۷ در لحظهٔ $t = 0^-$
(b) مدار معادل شکل ۱۳ - ۷ در طی عمل سوئیچینگ.

اکنون مسئلهٔ ترسیم مدار معادلی را که در پیدا کردن ولتاژها و جریانها در لحظه $t = 0^+$ ما را یاری دهد، مورد توجه قرار می‌دهیم. هر ولتاژ خازنی و جریان سلفی باید در حین سوئیچینگ ثابت بماند. این شرایط را می‌توان با جایگزین نمودن سلف به وسیله یک منبع جریان و خازن به وسیله یک منبع ولتاژ مورد تأکید قرار داد. هر منبعی پاسخ مورد لزوم را در طی عمل سوئیچینگ ثابت نگه می‌دارد. به این ترتیب مدار معادل شکل 7-14b حاصل می‌شود و باید توجه داشت که این مدار یک معادل حقیقی در لحظه $t = 0^-$ می‌باشد زیرا دارای همان ولتاژها و جریانهای مدار معادل سادهٔ شکل 7-14a می‌باشد و نیز مدار معادل حقیقی در لحظهٔ $t = 0^+$ هم می‌باشد زیرا منبع جریان پله‌ای به صورت تابعی از زمان ظاهر می‌شود و نه صرفاً به صورت 0A یا 4A.

جریانها و ولتاژها را در لحظهٔ $t = 0^+$ می‌توان با فرض $4u(t) = 4A$ و حل کردن مدار dc حاصله، به دست آورد. راه حل این مسئله مشکل نیست اما حضور تعداد نسبتاً زیاد منابع در مدار، ظاهر نسبتاً غریبی را به مدار داده است. اگر چه اینگونه مسائل در فصل ۳ حل شده‌اند و مطلب جدیدی در مورد آنها وجود ندارد. شش پاسخ حاصله در لحظهٔ $t = 0^+$ باید با آنهایی که به وسیله روش قبلی به دست آمد موافقت داشته باشند.

قبل از خاتمهٔ بحث مربوط به مسئلهٔ تعیین شرایط اولیهٔ ضروری، باید خاطر نشان ساخت که حداقل یک روش قدرتمند دیگر برای تعیین شرایط اولیه از قلم افتاده است یعنی ما می‌توانستیم معادلات کلی گره و یا حلقه را برای مدار اصلی بنویسیم و سپس با جایگذاری مقادیر معلوم صفر

برای ولتاژ سلف و جریان خازن در لحظه $t = ۰^-$ سایر پاسخها را در لحظهٔ $t = ۰^-$ برایمان معلوم می‌کرد و ما را قادر می‌ساخت که بقیه مجهولات را به آسانی پیدا کنیم. سپس تحلیل مشابهی را در لحظهٔ $t = ۰^+$ باید انجام داد. این روش یک روش مهمی است و در مدارهای پیچیده‌تر که نتوان آنها را به وسیله روش قدم به قدم تحلیل نمود، استفاده از آن ضروری می‌شود.

حال اجازه دهید تعیین پاسخ $v_c(t)$ را برای مدار اصلی شکل ۱۳-۷ به طور خلاصه تکمیل نماییم. اگر هر دو منبع را غیرفعال کنیم، مدار به صورت یک مدار RLC سری ظاهر می‌شود و به سادگی می‌توان $S_۱, S_۲$ را پیدا نمود که به ترتیب برابر ۱-، ۹- می‌باشند. پاسخ اجباری را می‌توان به طور ذهنی و یا به وسیله ترسیم مدار معادل dc و با اضافه نمودن یک منبع جریان ٤A (که شبیه شکل ١٤a-۷ می‌شود) پیدا نمود که برابر ۱۵۰V می‌باشد. بنابراین داریم:

$$v_c(t) = ۱۵۰ + Ae^{-t} + Be^{-۹t}$$

و

$$v_c(۰^+) = ۱۵۰ = ۱۵۰ + A + B$$

و سپس:

$$dv_c/dt = -Ae^{-t} - ۹Be^{-۹t}$$

و از آنجا داریم:

$$dv_c/dt\Big|_{t=۰^+} = ۱۰۸ = -A - ۹B$$

و سرانجام خواهیم داشت:

$$v_c(t) = ۱۵۰ + ۱۳{,}۵\,(e^{-t} - e^{-۹t})\ ,\ B = -۱۳{,}۵\ ,\ A = ۱۳{,}۵$$

پس به طور خلاصه هر وقت که بخواهیم رفتار گذرای یک مدار RLC سادهٔ سه عنصری را تعیین کنیم، ابتدا باید مشخص کنیم که با یک مدار سری یا موازی مواجهیم، به طوریکه بتوانیم از رابطهٔ صحیحی برای α استفاده کنیم. دو معادلهٔ مربوطه برای α عبارتند از:

$$\alpha = ۱/۲RC \text{ (موازی RLC)}$$

$$\alpha = R/۲L \text{ (سری RLC)}$$

تصمیم بعدی ما بعد از مقایسه α با ω_0 (که برای هر دو مدار برابر $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ می‌باشد) گرفته می‌شود. اگر $\alpha > \omega_0$، آنگاه مدار فوق میرا می‌باشد و پاسخ طبیعی به صورت $fn(t) = A_۱e^{s۱t} + A_۲e^{s۲t}$ می‌باشد که در آن داریم:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

اگر $\alpha = \omega_0$، آنگاه مدار در حالت میرایی بحرانی است و داریم: $f_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$ و بالاخره اگر $\alpha < \omega_0$، آنگاه ما با یک پاسخ زیر میرا مواجهیم یعنی:

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$$

که در آن داریم:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

تصمیم آخر ما بستگی به منابع مستقل در مدار دارد. اگر هیچیک از آنها بعد از تکمیل عمل سونیچینگ و یا گسستگی در مدار فعال نباشند، آنگاه مدار، بدون منبع می‌باشد و پاسخ کامل را همان پاسخ طبیعی تشکیل می‌دهد و اگر منابع مستقل هنوز در مدار حضور داشته باشند آنگاه مدار، تحریک شده می‌باشد و باید پاسخ اجباری را هم تعیین نمود. در این صورت پاسخ کامل عبارت است از مجموع: $f(t) = f_f(t) + f_n(t)$ که این رابطه را می‌توان به هر جریان و یا ولتاژی در مدار اعمال نمود.

تمرین

۸ ـ ۷ ـ در مدار شکل ۱۵ ـ ۷ مقادیر زیر را در لحظات $t = 0^-, 0^+$ پیدا کنید:

i_3 (c) ، i_2 (b) ، i_1 (a)

جواب: ۰٫٦A ، ۰٫٦ ، ۰ ، ۰٫۳- ، ۰٫٦- ، ۰٫٦-

۹ ـ ۷ ـ در مدار شکل ۱۵ ـ ۷ مقادیر زیر را در لحظات $t = 0^-, 0^+$ پیدا کنید:

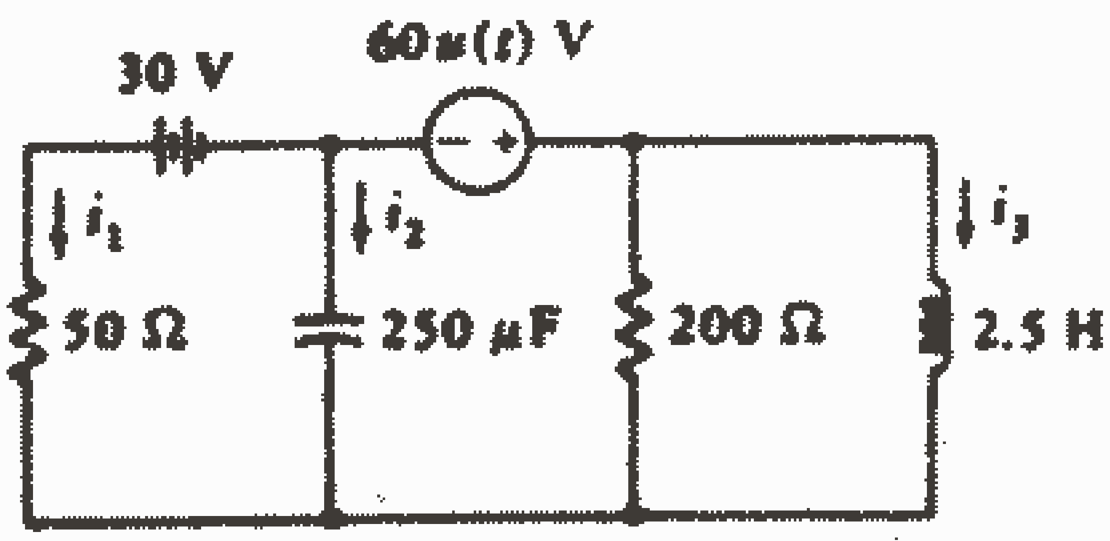
di_3/dt (c) ، di_2/dt (b) ، di_1/dt (a)

جواب: ۰A/s ، ۲٤- ، ۰ ، ٦ ، ۰ ، ۲٤

۱۰ ـ ۷ ـ در مدار شکل ۱۵ ـ ۷ مقادیر زیر را در لحظهٔ $t = 25mS$ پیدا کنید:

i_3 (c) ، i_2 (b) ، i_1 (a)

جواب: ۰٫۱۲۷۸A ، ۰٫۱۸۲۰- ، ۰٫۱۲۷۸-

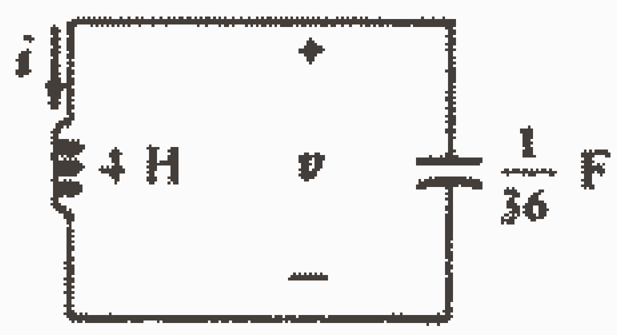


شکل ۱۵ ـ ۷: به تمرینات ۸ ـ ۷ تا ۱۰ ـ ۷ مراجعه کنید.

۸-۷- مدار LC بدون افت

اگر مقدار مقاومت در یک مدار RLC موازی بی‌نهایت شود و یا در یک مدار RLC سری صفر شود، در این صورت یک حلقهٔ سادهٔ LC خواهیم داشت که در آن یک پاسخ نوسانی می‌تواند برای همیشه وجود داشته باشد حال بیایید به طور اجمال مثالی از اینگونه مدارها را بررسی کنیم و سپس وسیلهٔ دیگری را برای به دست آوردن همین پاسخ اما بدون به کار بردن سلف، مورد بحث قرار خواهیم داد.

مدار شکل ۱۶-۷ را در نظر بگیرید که در آن مقادیر بزرگ $C = 1/36\ F$ ، $L = 4H$ فرض شده‌اند تا محاسبات ریاضی ساده باشند. فرض می‌کنیم که $v(0) = 0$ ، $i(0) = -1/6\ A$ باشد مدار بدون منبع است و $\alpha = 0$ ، $\omega_0^2 = 9$ می‌باشد، بنابراین $\omega_d = \omega_0 = 3$ و ولتاژ عبارت است از: $v = A\ \cos 3t + B\ \sin 3t$ و چون $v(0) = 0$ ، می‌بینیم که $A = 0$ سپس داریم: $dv/dt \Big|_{t=0} = 3B = \frac{-i(0)}{C}$ اما $i(0) = -1/6$ و بنابراین در لحظهٔ $t = 0$ داریم: $dv/dt = 6V/_s$ و $B = 2V$. بنابراین: $v = 2\ \sin 3t\ V$ که یک پاسخ سینوسی غیر میرا می‌باشد.



شکل ۱۶ - ۷: این مدار بدون تلفات است و یک پاسخ غیر میرا ارائه می کند و اگر $v(0) = 0$ و $i(0) = -1/6A$ باشد آنگاه: $v = 2\ \sin 3t$

حال بیایید ببینیم که چگونه می‌توانیم این ولتاژ را بدون استفاده از یک مدار LC به دست آوریم. هدف ما نوشتن معادلهٔ دیفرانسیلی است که v در آن صدق کند و سپس تشکیل آرایشی از op - amp ها که بتواند پاسخ معادله را ارائه کند. با وجودیکه بر روی یک مثال بخصوص کار می کنیم اما این تکنیک یک روش کلی است که می‌تواند برای حل هر معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن مورد استفاده قرار گیرد.

در مدار LC شکل ۱۶-۷، v را به عنوان متغیر انتخاب می کنیم و مجموع جریانهای رو

به پایین سلف و خازن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

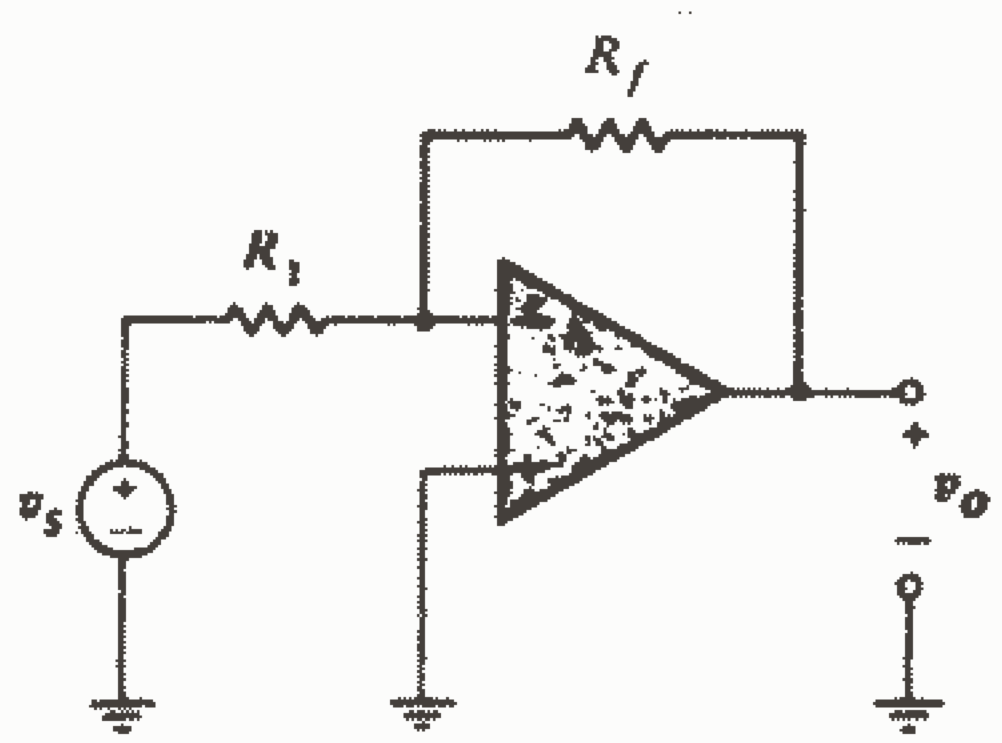
$$۱/۴\int_0^t vdt - ۱/۶ + ۱/۳۶\ dv/dt = ۰$$

اگر یک بار از طرفین معادلهٔ فوق مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$۱,۴\ v + ۱/۳۶\ d^۲v/dt^۲ = ۰ \quad \text{و یا} \quad d^۲v/dt^۲ = -۹\ v$$

برای حل این معادله دو بار از یک تقویت‌کنندهٔ عملیاتی به عنوان انتگراتور استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که بالاترین مرتبهٔ مشتق که در معادلهٔ دیفرانسیل موجود است (در اینجا $d^۲v/dt^۲$) در نقطه‌ای از آرایش op − amp های ما (مثلاً در نقطهٔ دلخواهی مانند A) قابل دسترس باشد. اکنون از انتگراتوری با RC = ۱ ، که در قسمت ۴-۴ مورد بحث قرار گرفت، استفاده می‌کنیم. ورودی عبارت از $d^۲v/dt^۲$ و خروجی عبارت از $-dv/dt$ می‌باشد که تغییر علامتی را در انتگراتور فرض کرده‌ایم. مقدار اولیهٔ dv/dt برابر $۶V/_s$ می‌باشد (به طوریکه در تحلیل اولیه‌مان در مدار نشان دادیم) و بنابراین مقدار اولیهٔ ۶v- را باید در انتگراتور ایجاد نمود. اکنون قرینهٔ مشتق اول، ورودی انتگراتور دوم را تشکیل می‌دهد. بنابراین خروجی آن عبارت از v(t) می‌باشد و مقدار اولیهٔ عبارت است از v(۰) = ۰. حال تنها کاری که باقیمانده است ضرب کردن v در ۹- برای به دست آوردن مشتق دومی است که در نقطهٔ A فرض کردیم. این امر یک تقویت با ضریب ۹ همراه با یک تغیر علامت می‌باشد و می‌توان آن را به سادگی با استفاده از op − amp به عنوان یک تقویت‌کنندهٔ معکوس‌کننده به دست آورد.

شکل ۱۷-۷ مدار یک تقویت‌کنندهٔ معکوس‌کننده را نشان می‌دهد.

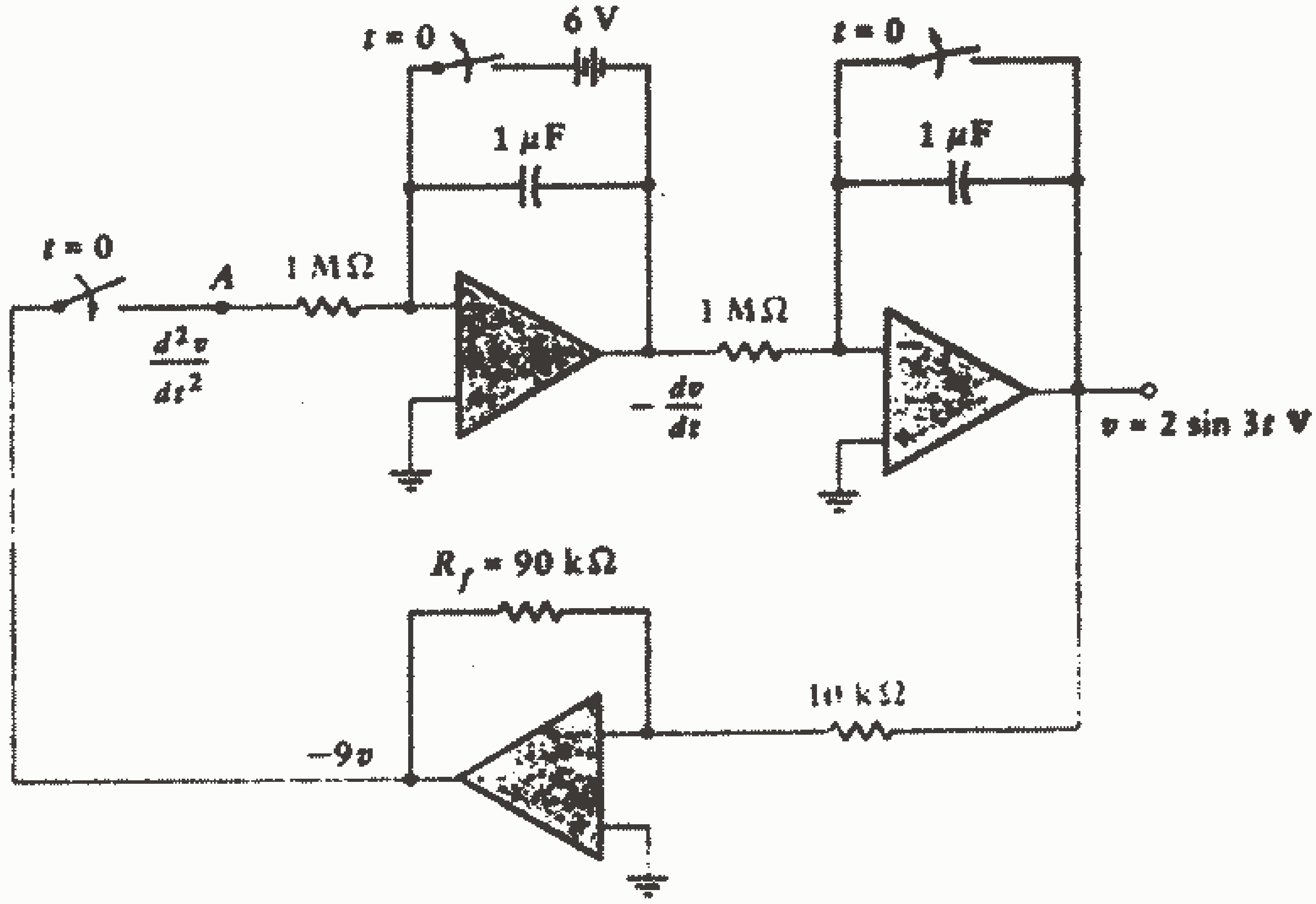


شکل ۱۷ ـ ۷: تقویت کنندهٔ عملیاتی معکوس کننده که بهرهٔ $\frac{v_o}{v_s} = \frac{-R_f}{R_1}$ را با یک op − amp ایده‌آل ارائه می‌کند.

در یک op – amp ایده‌آل هم جریان ورودی و هم ولتاژ ورودی صفر می‌باشند. بنابراین جریانی که از مقاومت R_1 به سمت شرق عبور می‌کند برابر v_s/R_1 می‌باشد در حالیکه جریان عبوری از R_f به سمت غرب برابر v_o/R_f می‌باشد. و چون مجموع آنها صفر است، خواهیم داشت: $v_o/v_s = -R_f/R_1$ بنابراین مثلاً با قرار دادن $R_1 = 10\,K\Omega$, $R_f = 90\,K\Omega$ می‌توانیم بهرهٔ ۹- را به دست آوریم.

اگر در هر یک از انتگراتورها فرض کنیم R برابر $1M\Omega$ ، c برابر $1\mu F$ باشد آنگاه در هر حالت داریم: $v_o = -\int_0^t v_s dt + v_o(0)$.

حال خروجی تقویت کنندهٔ معکوس کننده ورودی مفروض را در نقطهٔ A تشکیل می‌دهد که ما را به آرایش op – amp مطابق شکل ۱۸-۷ رهنمون می‌شود.



شکل ۱۸ ـ ۷: دو انتگراتور و یک تقویت کنندهٔ معکوس کننده طوری بسته شده‌اند که پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل $d^2v/dt^2 = -9V$ را ارائه می‌کنند.

اگر کلید سمت چپ در لحظهٔ $t = 0$ بسته شود در حالیکه دو کلید شرایط اولیه به طور هم‌زمان باز باشند، خروجی انتگراتور دوم عبارت از موج سینوسی غیرمیرا خواهد بود یعنی:

$$v = 2 \sin 3t \text{ V}$$

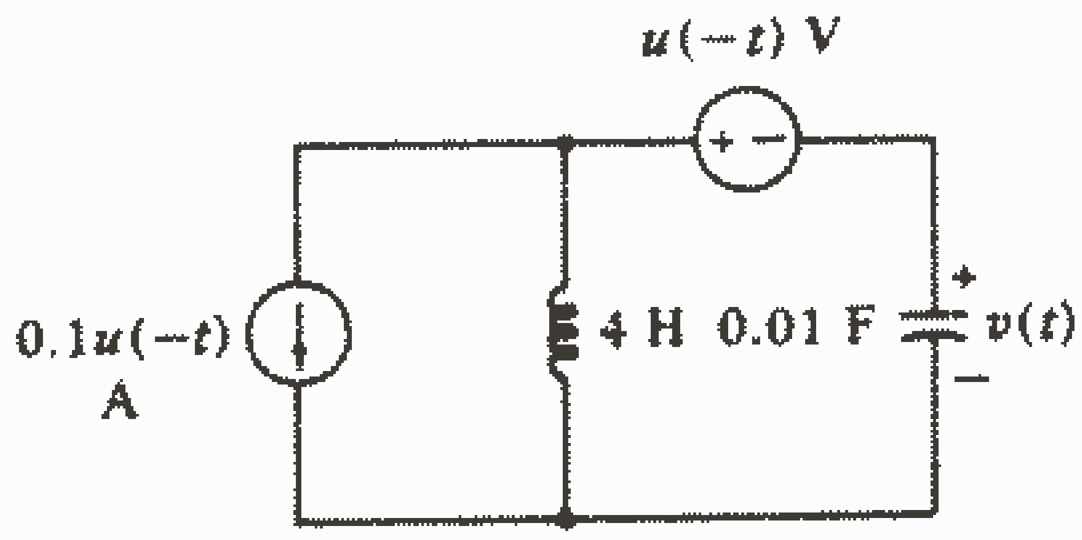
توجه داشته باشید که هم مدار LC شکل ۱۶ ـ ۷ و هم مدار op-amp شکل ۱۸-۷ دارای

خروجی یکسانی می‌باشند اما مدار op-amp شامل سلف نمی‌باشد. این مدار بطور ساده مانند حالتی که شامل سلف می‌باشد عمل می کند و این امر یک مزیت اقتصادی و عملی مهمی در طراحی مدار باشد.

تمرین

۱۱ ـ ۷ ـ مقادیر جدید را برای دو ولتاژ اولیه و R_4 در مدار شکل ۱۸-۷ پیدا کنید، اگر خروجی آن بیانگر ولتاژ $v(t)$ در مدار شکل ۱۹-۷ در زمان $t > 0$ باشد و $R_1 = 10k\Omega$ باشد.

جواب: ‎-۱۰V , -۱V , ۲۵۰KΩ



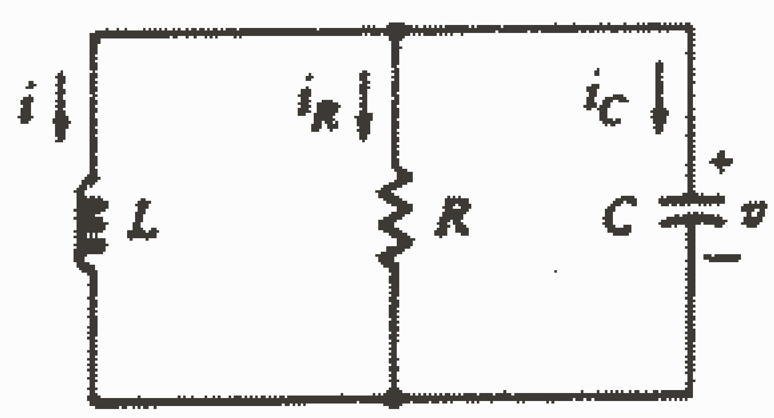
شکل ۱۹ ـ ۷: به تمرین ۱۱ ـ ۷ مراجعه کنید.

مسائل

۱ ـ مقادیر عناصر را در یک مدار RLC موازی طوری انتخاب کنید که: $S_1 = -200s^{-1}$ و $S_2 = -500s^{-1}$ باشد و جریان اولیهٔ مقاومت (بر حسب mA) از نظر مقدار عددی برابر با ولتاژ اولیهٔ خازن (بر حسب V) باشد.

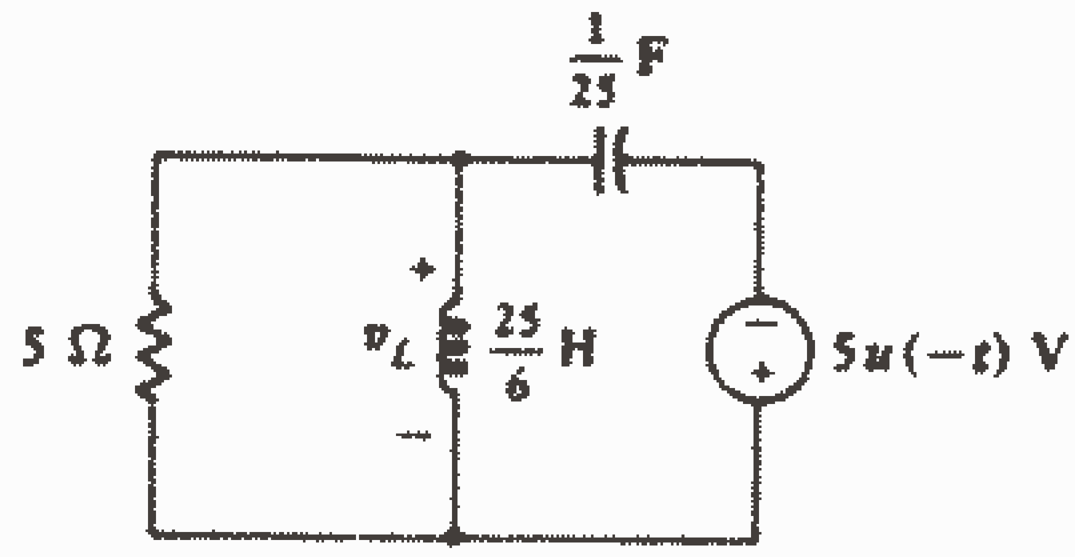
۲ ـ جریان سلف در مدار شکل ۲۰-۷ برابر با $i = 2e^{-5t} - 5e^{-10t}A$ می‌باشد. اگر $L = 0{,}2H$ باشد آنگاه مقادیر زیر را پیدا کنید:

(a) $v(t)$ ، (b) $i_R(t)$ ، (c) $i_c(t)$



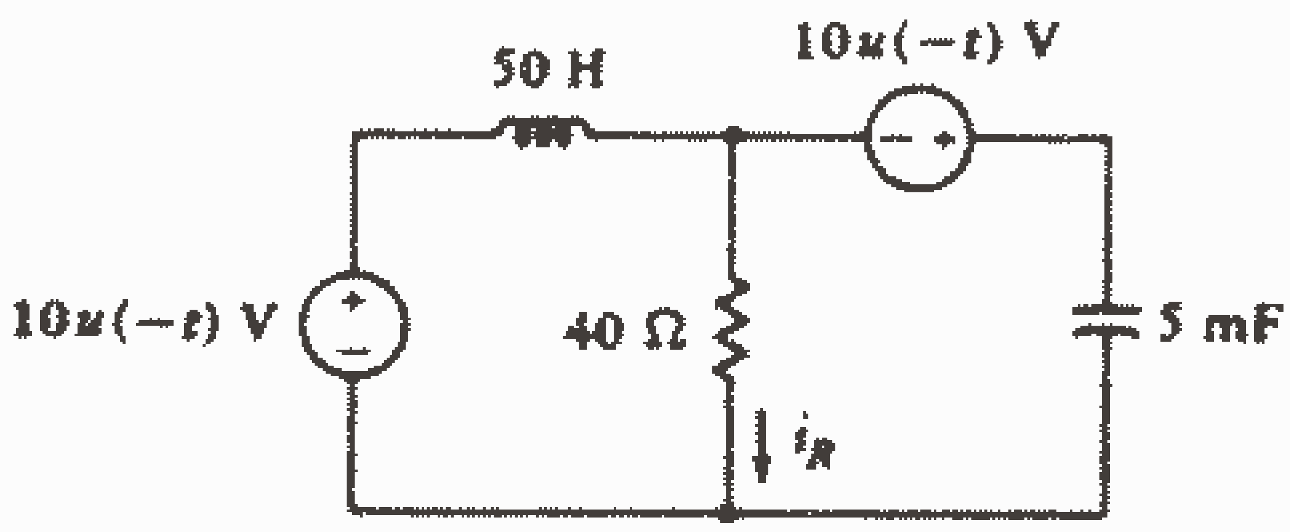
شکل ۲۰ ـ ۷: به مسائل ۲، ۳، ۸، ۱۰ و ۱۱ مراجعه کنید.

۳ ـ مقادیر عناصر در شکل ۲۰-۷ عبارتند از $R = ۱۰\Omega$, $L = ۱/۳۲H$, $C = ۵۰\mu F$.
اگر $i(0) = -۲A$, $v(0) = ۴۰V$ آنگاه $i(t)$ را به ازای $t > ۰$ پیدا کنید.
۴ ـ $v_L(t)$ را در مدار شکل ۲۱-۷ پیدا کنید.



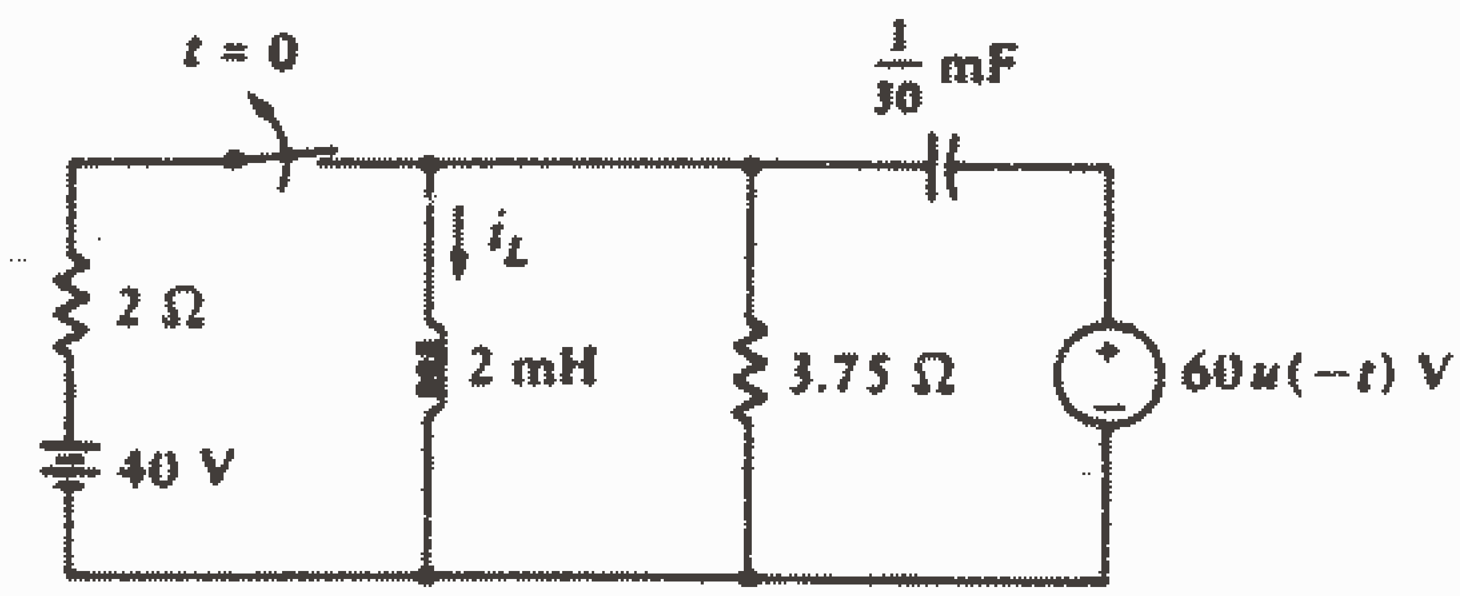
شکل ۲۱ ـ ۷: به مسئله ٤ مراجعه کنید.

۵ ـ در مدار RLC شکل ۲۲-۷: (a) $i_R(t)$ را پیدا کنید. (b) زمانی را که در آن $i_R = ۲۵۰mA$ پیدا کنید.



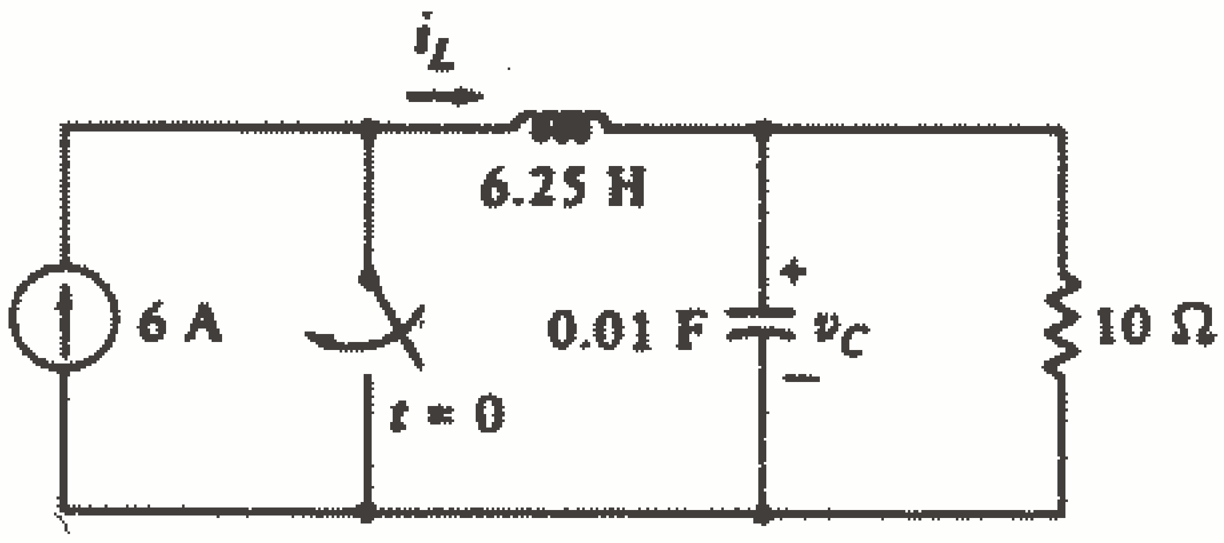
شکل ۲۲ ـ ۷: به مسئله ۵ مراجعه کنید.

٦ ـ در شکل ۲۳-۷ کلید برای مدت طولانی بسته بوده است: (a) $i_L(t)$ را به ازای همهٔ زمانها پیدا کنید. (b) $i_L(t)$ را در فاصلهٔ زمانی $-۱ < t < ۱mS$ پیدا کنید.



شکل ۲۳ ـ ۷: به مسئله ٦ مراجعه کنید.

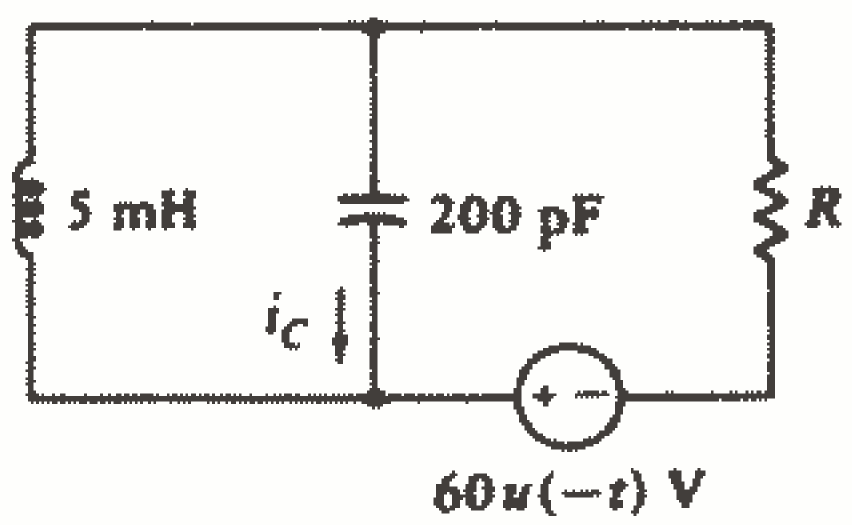
۷ ـ بعد از مدت یک ساعت که کلید شکل ۲۴-۷ باز بوده است در لحظهٔ $t = 0$ بسته می‌شود. (a) مقدار $v_c(t)$ را به‌ازای $t > 0$ پیدا کنید. (b) $i_L(t)$ را به‌ازای $t > 0$ پیدا کنید. (c) زمان فروکش t_s را برای v_c پیدا کنید. (d) t_s را برای i_L پیدا کنید.



شکل ۲۴ ـ ۷: به مسئله ۷ مراجعه کنید.

۸ ـ فرض کنید که مدار شکل ۲۰-۷ میرای بحرانی با مقادیر $i(0) = 4A$ ، $v(0) = 100V$ باشد. آنگاه اگر $R = 10\Omega$ ، $\alpha = 100 Np/s$ باشد: (a) C, L را پیدا کنید. (b) $v(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید و پاسخ را به صورت تابعی از زمان رسم کنید. (c) در چه زمانی $v = 0$ می‌باشد؟ (d) زمان فروکش t_s را پیدا کنید.

۹ ـ (a) در مدار شکل ۲۵-۷ چه مقداری از R میرایی بحرانی ایجاد می‌کند؟ (b) با استفاده از این مقدار R، مقدار $i_c(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید. (c) t_s را برای i_c پیدا کنید؟

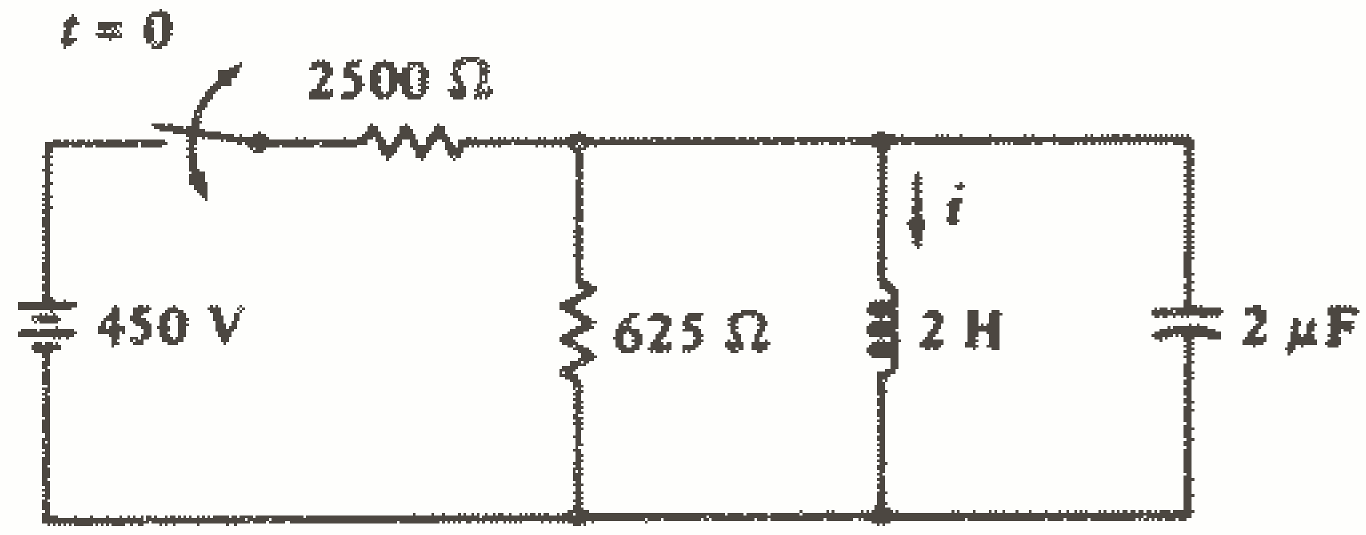


شکل ۲۵ ـ ۷: به مسئله ۹ مراجعه کنید.

۱۰ ـ فرض کنید که در مدار شکل ۲۰-۷ داشته باشیم: $v(0) = 0$ ، $i(0) = 5A$ اگر $L = 0.1H$ ، $\omega_0 = 100\ rad/s$ و مدار در حالت میرایی بحرانی باشد: (a) مقدار C, R را پیدا کنید. (b) $v(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید. (c) $|v|_{max}$ و زمان t_m را که در آن ماکزیمم مذکور حاصل می‌شود، پیدا کنید. (d) زمان فروکش t_s را پیدا کنید.

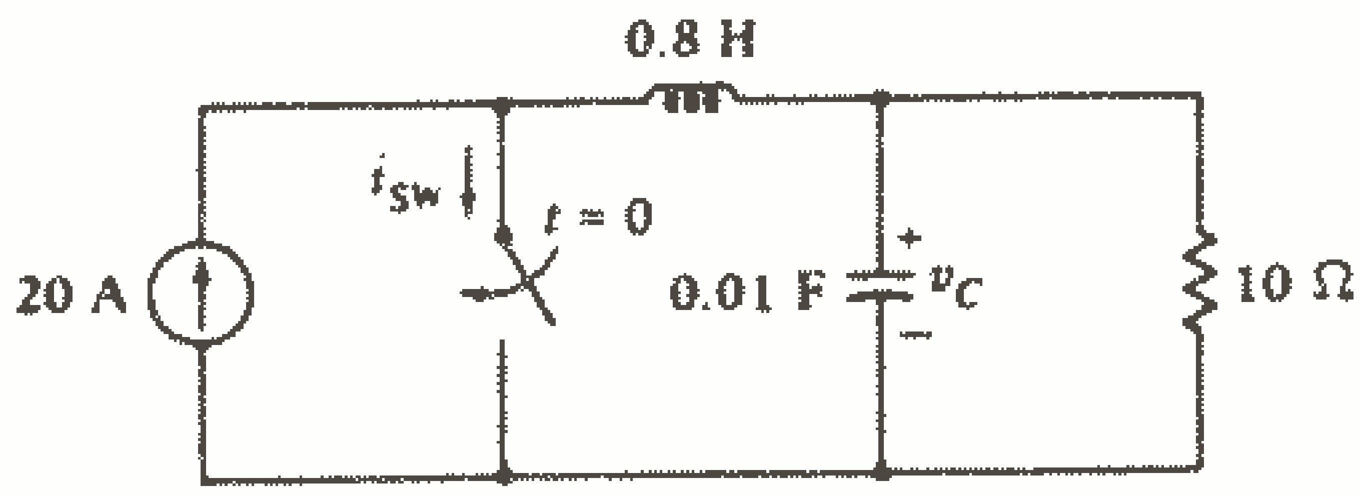
۱۱ ـ در مدار شکل ۲۰-۷ فرض کنید که $i = 10e^{-4t}\sin 28t$ اگر $R = 200\,\Omega$ آنگاه مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) $v(t)$ ، (b) $i_c(t)$ ، (c) $i_R(t)$.

۱۲ ـ در شکل ۲۶-۷ کلید برای مدت طولانی بسته بوده است. پس از اینکه در لحظهٔ $t = 0$ کلید باز شود، $i(t)$ را پیدا کنید.



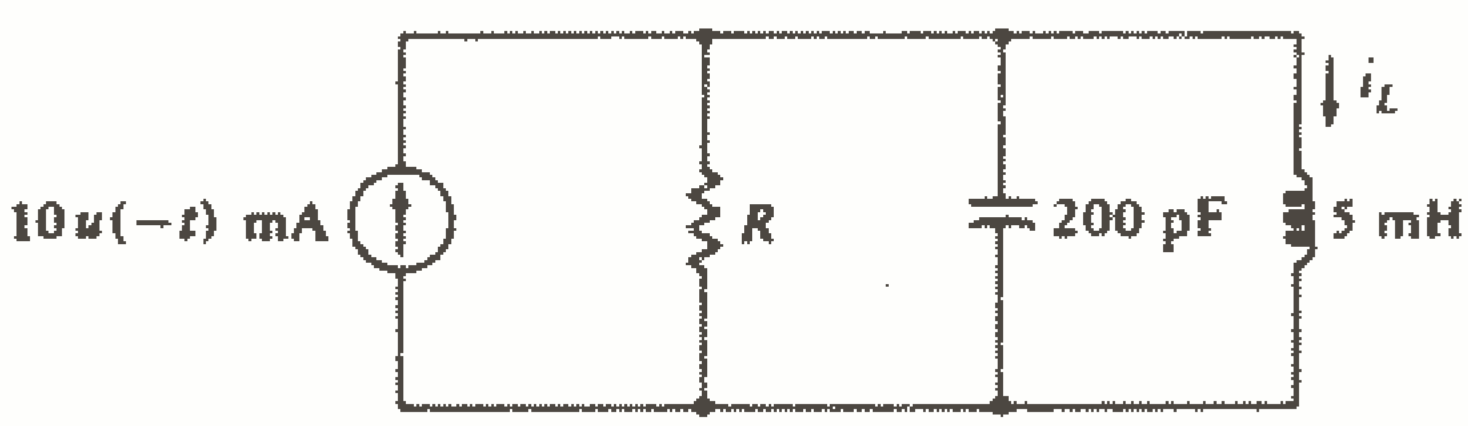
شکل ۲۶ ـ ۷: به مسائل ۱۲ و ۲۷ مراجعه کنید.

۱۳ ـ در مدار شکل ۲۷-۷ کلید قبل از اینکه در لحظهٔ $t = 0$ بسته شود، برای مدت طولانی باز بوده است. (a) $v_c(t)$ را به ازای $t > 0$ پیدا کنید. (b) i_{sw} را به ازای $t > 0$ پیدا کنید.



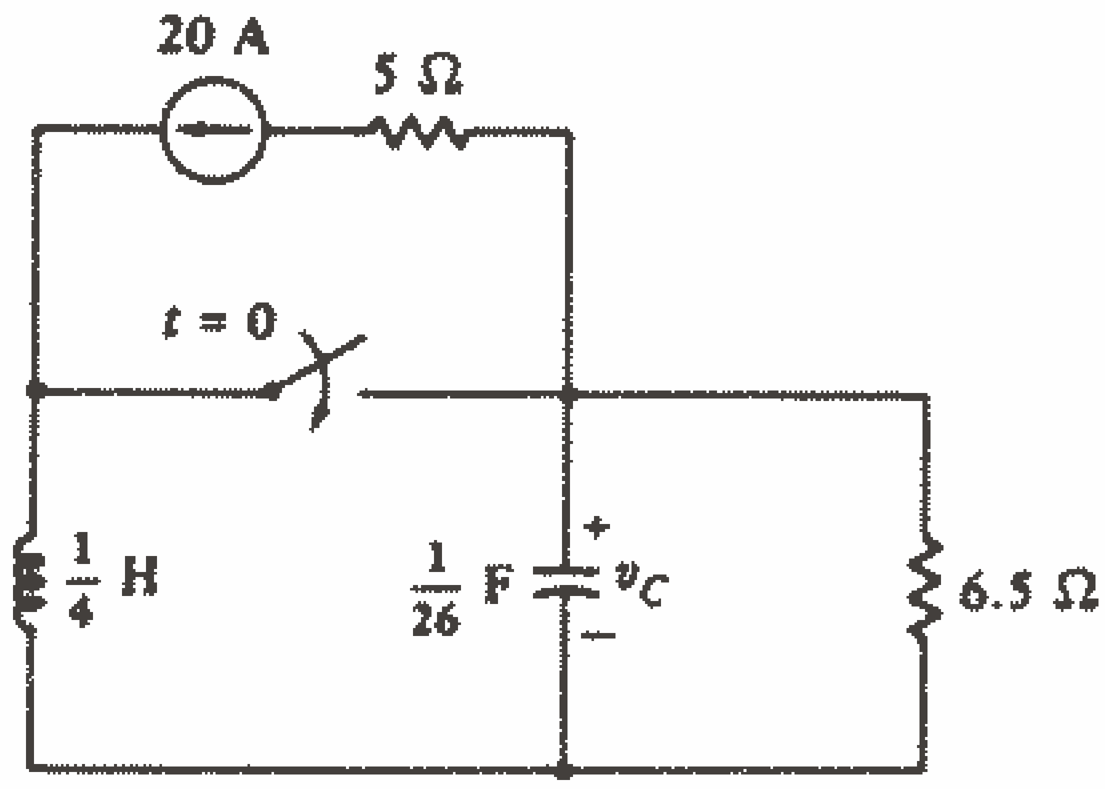
شکل ۲۷ ـ ۷: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

۱۴ ـ (a) در مدار شکل ۲۸-۷ مقدار R را طوری انتخاب کنید که داشته باشیم: $\omega_d = 800$ krad/s و سپس مقدار i_L را برای $t > 0$ پیدا کنید. (b) i_L را نسبت به t در فاصلهٔ $-1 \le t \le 7\ \mu s$ رسم کنید.



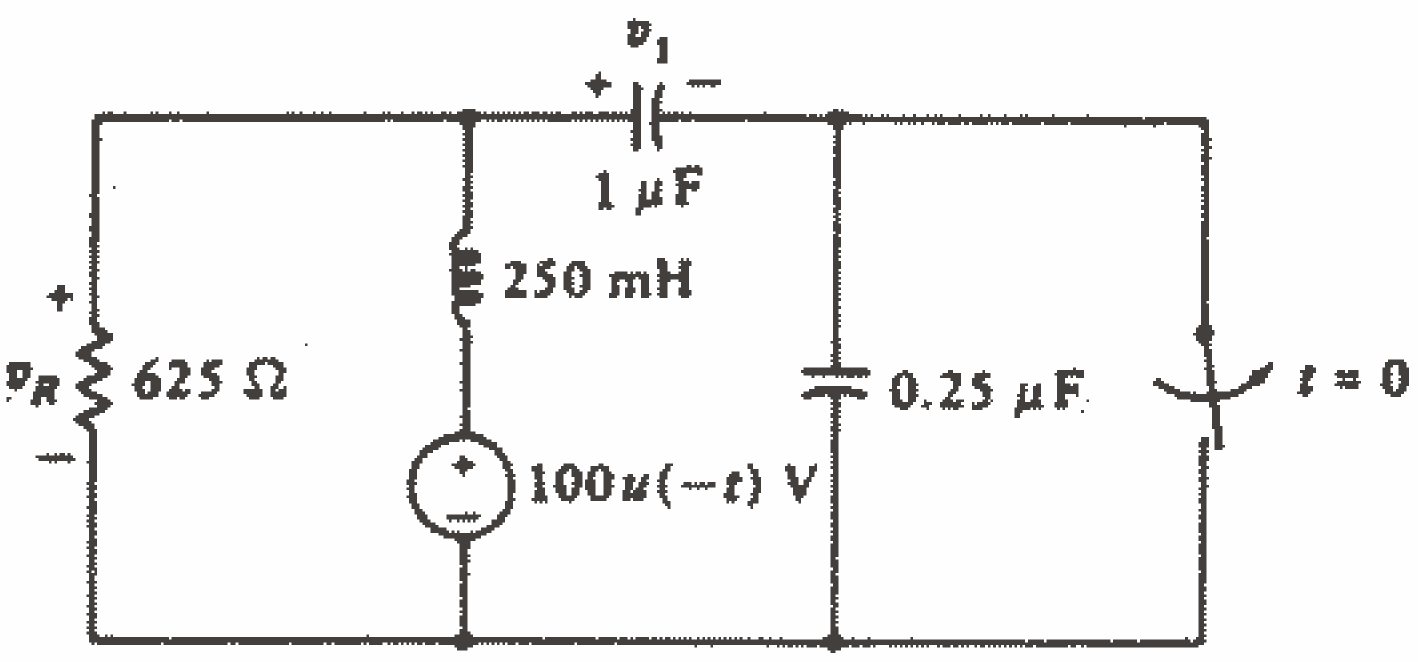
شکل ۲۸ ـ ۷: به مسئله ۱۴ مراجعه کنید.

۱۵ ـ پس از اینکه برای مدت طولانی کلید در مدار شکل ۲۹-۷ باز بوده است، در لحظهٔ $t = 0$ بسته می‌شود. (a) $v_c(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید. (b) مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم $v_c(t)$ را پیدا کنید.



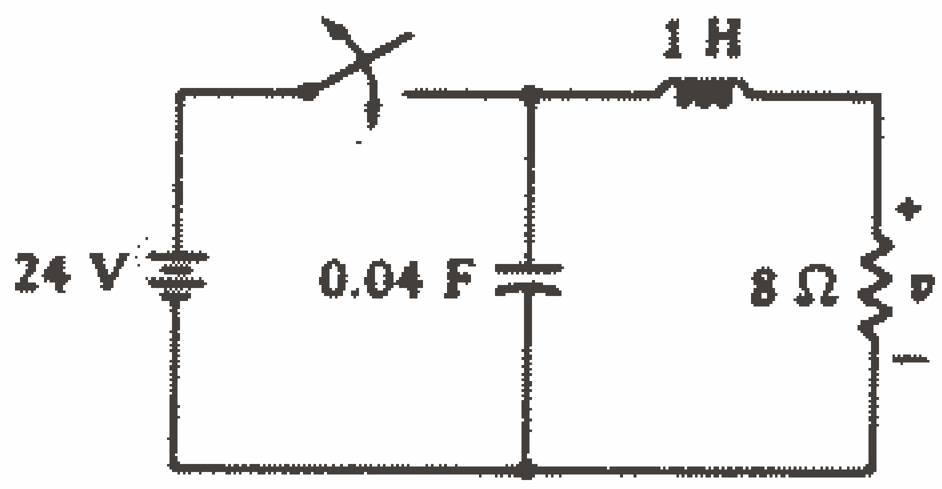
شکل ۲۹ ـ ۷: به مسئله ۱۵ مراجعه کنید.

۱۶ ـ کلید در مدار شکل ۳۰-۷ برای مدت طولانی بسته بوده است و در لحظهٔ $t = 0$ درست در لحظه‌ای که منبع خاموش می‌شود، باز می‌شود. (a) $v_R(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید. (b) $v_1(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید.



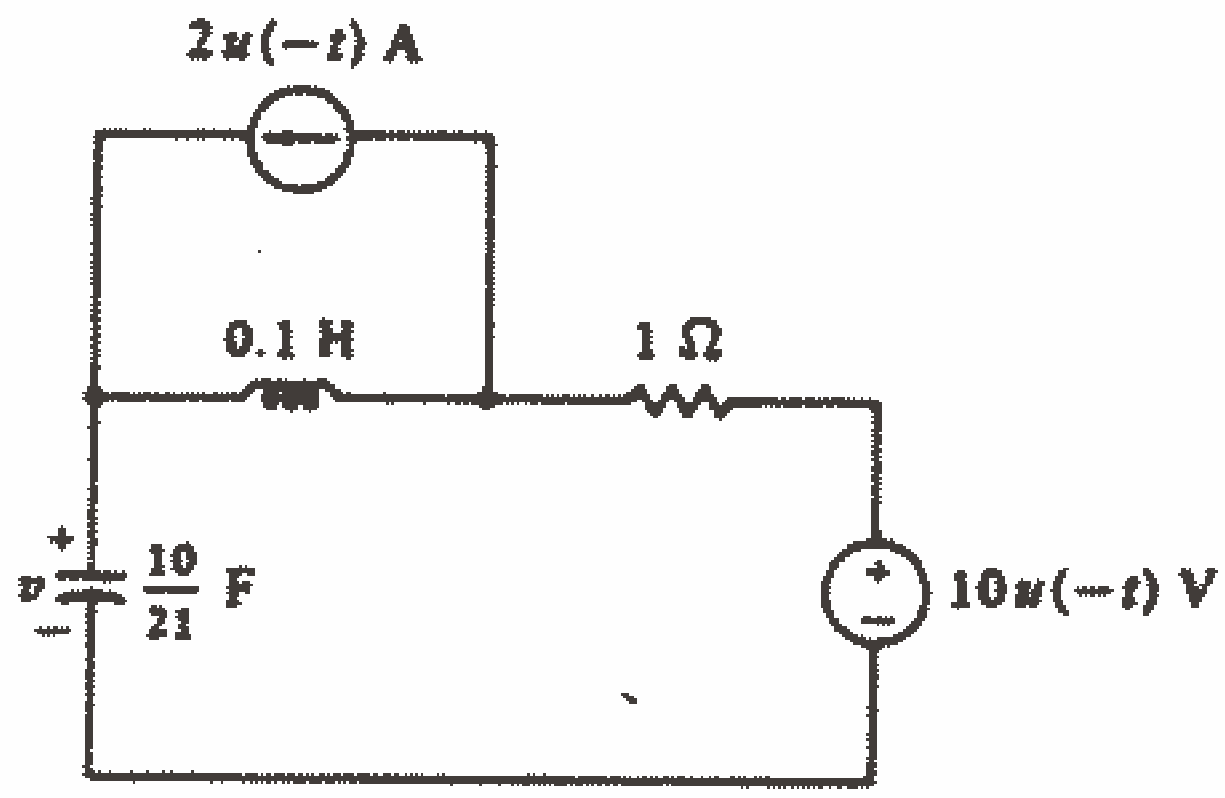
کل ۳۰ ـ ۷: به مسئله ۱۶ مراجعه کنید.

۱۷ ـ اگر کلید در مدار شکل ۳۱-۷ در لحظهٔ $t = -10^{6}S$ بسته بوده و در لحظهٔ $t = 0$ باز شود مقدار $v(t)$ را به ازای $t > 0$ پیدا کنید.



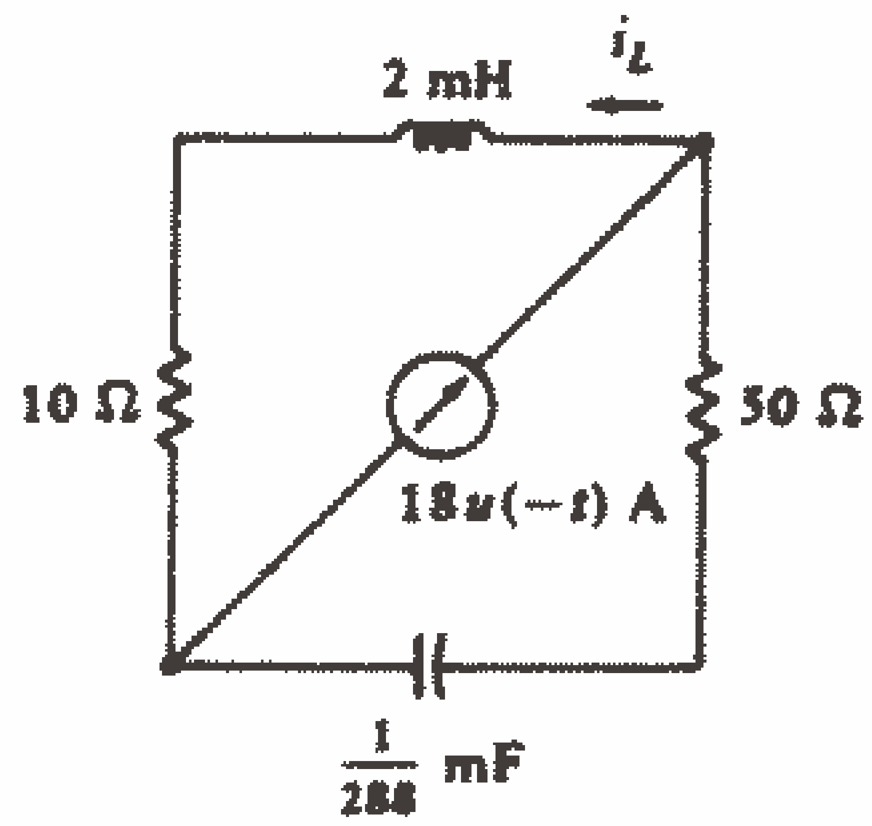
شکل ۳۱ ـ ۷: به مسئله ۱۷ مراجعه کنید.

۱۸ ـ (a) مقدار $v(t)$ را به‌ازای $t > 0$ در شکل ۳۲-۷ پیدا کنید. (b) مقدار t_s برای $v(t)$ چیست؟



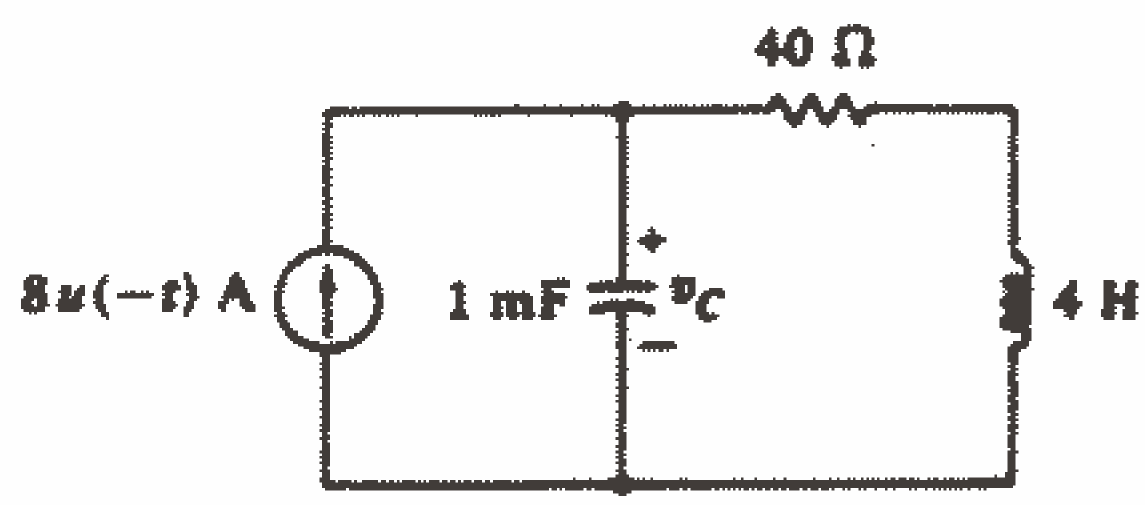
شکل ۳۲ ـ ۷: به مسئله ۱۸ مراجعه کنید.

۱۹ ـ (a) $i_L(t)$ را در مدار شکل ۳۳-۷ پیدا کنید. (b) مقدار d^2i_L/dt^2 در لحظهٔ $t = 0^+$ چقدر است؟



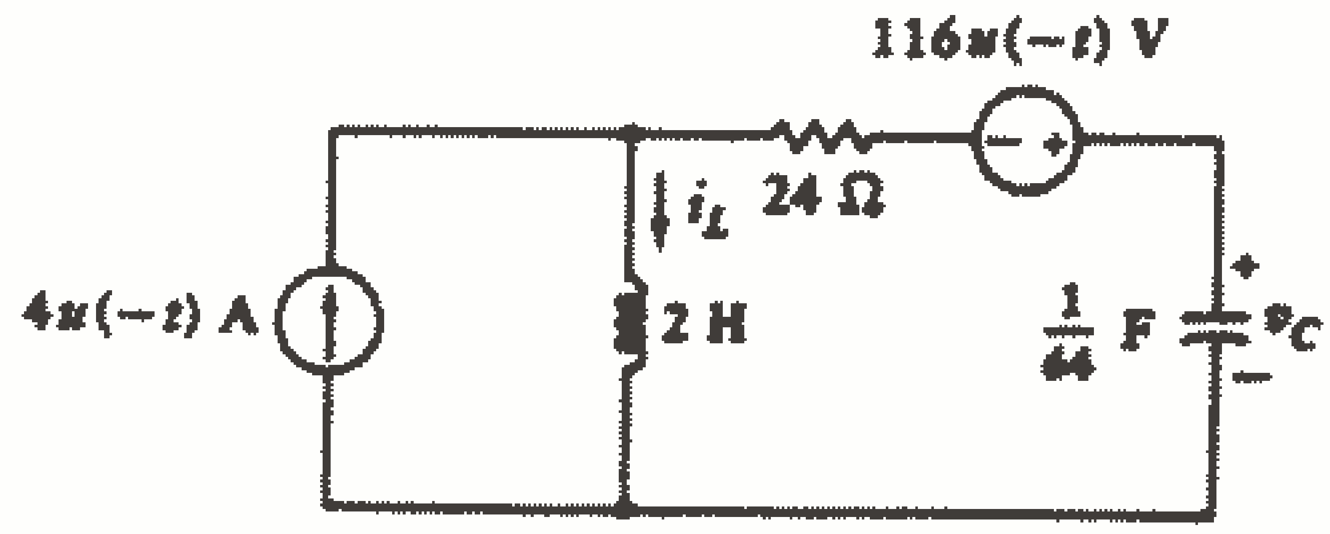
شکل ۳۳ ـ ۷: به مسئله ۱۹ مراجعه کنید.

۲۰ ـ $v_c(t)$ را در مدار شکل ۳۴-۷ پیدا کنید و پاسخ را رسم کنید.



شکل ۳۴ ـ ۷: به مسائل ۲۰ و ۲۵ مراجعه کنید.

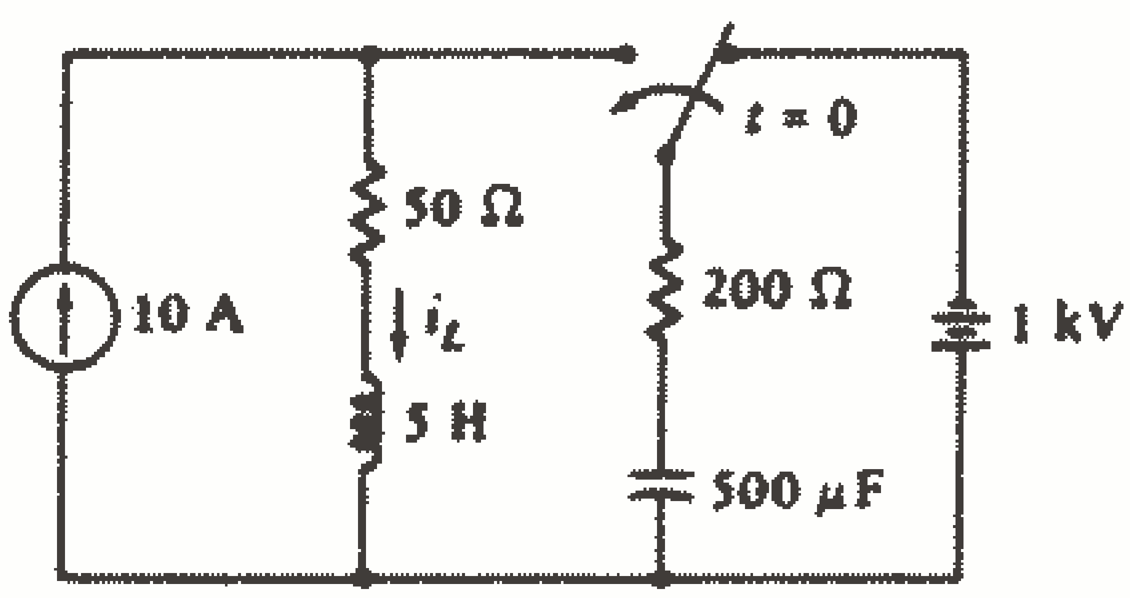
۲۱ ـ در مدار شکل ۳۵ـ۷: (a) $i_L(t)$ را به ازای جمیع مقادیر t پیدا کنید. (b) $v_c(t)$ را به ازای $t > 0$ پیدا کنید.



شکل ۳۵ ـ ۷: به مسائل ۲۱ و ۲۴ مراجعه کنید.

۲۲ ـ در یک مدار RLC سری که در آن $\omega_d = ۲۵\ rad/_s$ ، $v_C(0^+) = 0$ ، $\alpha = ۱\ Np/s$ و $v'_C(0^+) = ۱۰۰\ V/_s$ باشد، v_C را نسبت به t در فاصلهٔ $۰ < t < ۳s$ رسم کنید.

۲۳ ـ (a) در مدار شکل ۳۶ـ۷، $i_L(t)$ را به ازای $t > ۰$ پیدا کنید و (b) مقدار ماکزیمم و می‌نیمم آن را پیدا کنید.

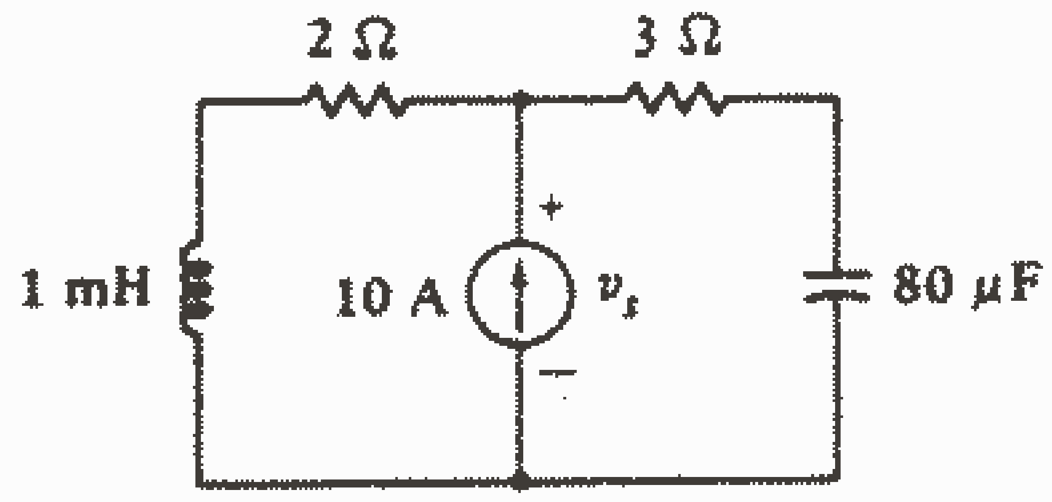


شکل ۳۶ ـ ۷: به مسئله ۲۳ مراجعه کنید.

۲۴ ـ در شکل ۳۵ـ۷، $۴u(-t)A$ را به $۴u(t)A$ تبدیل کنید و مسئله ۲۱ را یک‌بار دیگر حل کنید.

۲۵ ـ منبع در مدار شکل ۳۴ـ۷ از $۸u(-t)$ به $۴u(t) + ۴A$ تغییر می‌یابد. (a) $v_c(t)$ را به ازای $t > ۰$ پیدا کنید. (b) V_{cmax} را پیدا کنید.

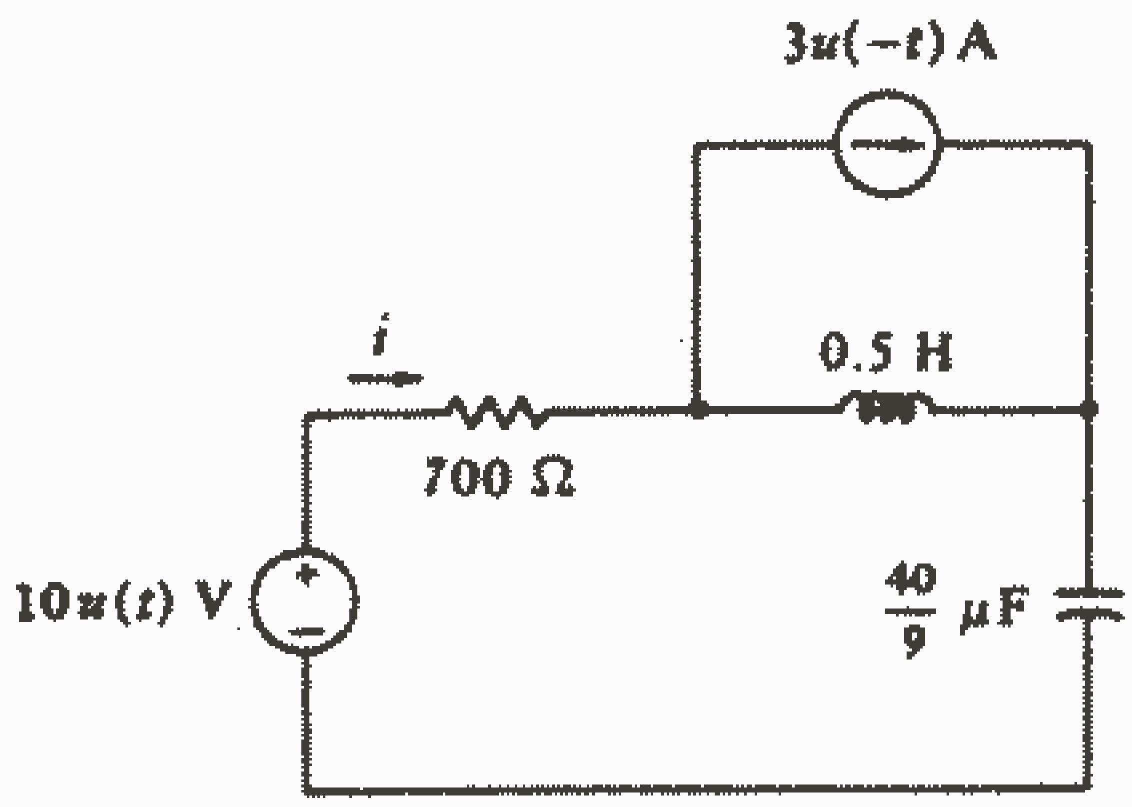
۲۶ ـ در لحظهٔ $t = ۰$ شدت جریان منبع در شکل ۳۷ـ۷ به طور ناگهانی از ۱۰ به ۲۰A افزایش می‌یابد. مقدار v_s را به ازای $t > ۰$ پیدا کنید.



شکل ۳۷ ـ ۷: به مسئله ۲٦ مراجعه کنید.

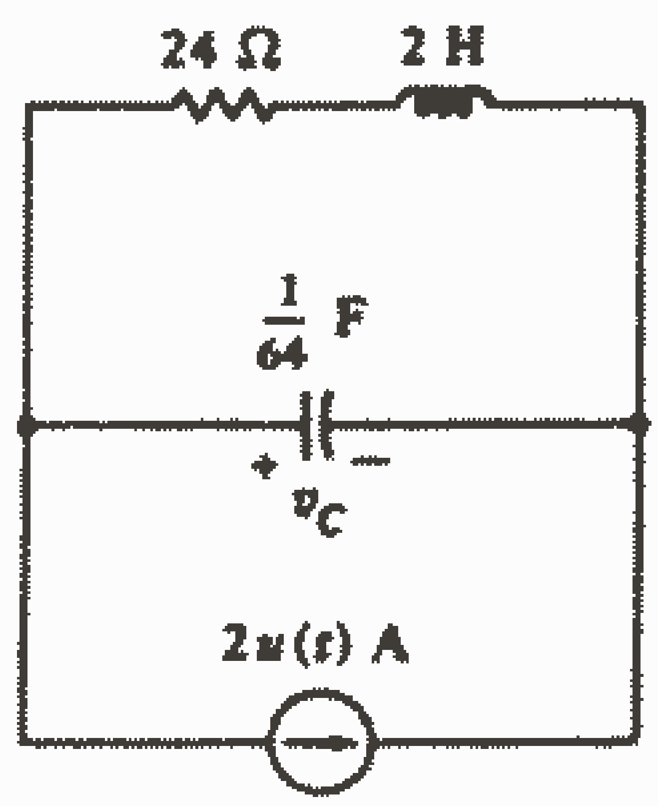
۲۷ ـ فرض کنید که کلید در شکل ۲٦-۷ برای مدت طولانی باز بوده است و در لحظهٔ $t = 0$ بسته می‌شود. مقدار $i(t)$ را به ازای $t > 0$ پیدا کنید.

۲۸ ـ (a) با مراجعه به شکل ۳۸ـ۷ مقدار $i(t)$ را به ازای $t > 0$ پیدا کنید. (b) نمودار جریان را به صورت تابعی از زمان در فاصلهٔ $-1 < t < 4mA$ رسم کنید.



شکل ۳۸ ـ ۷: به مسئله ۲۸ مراجعه کنید.

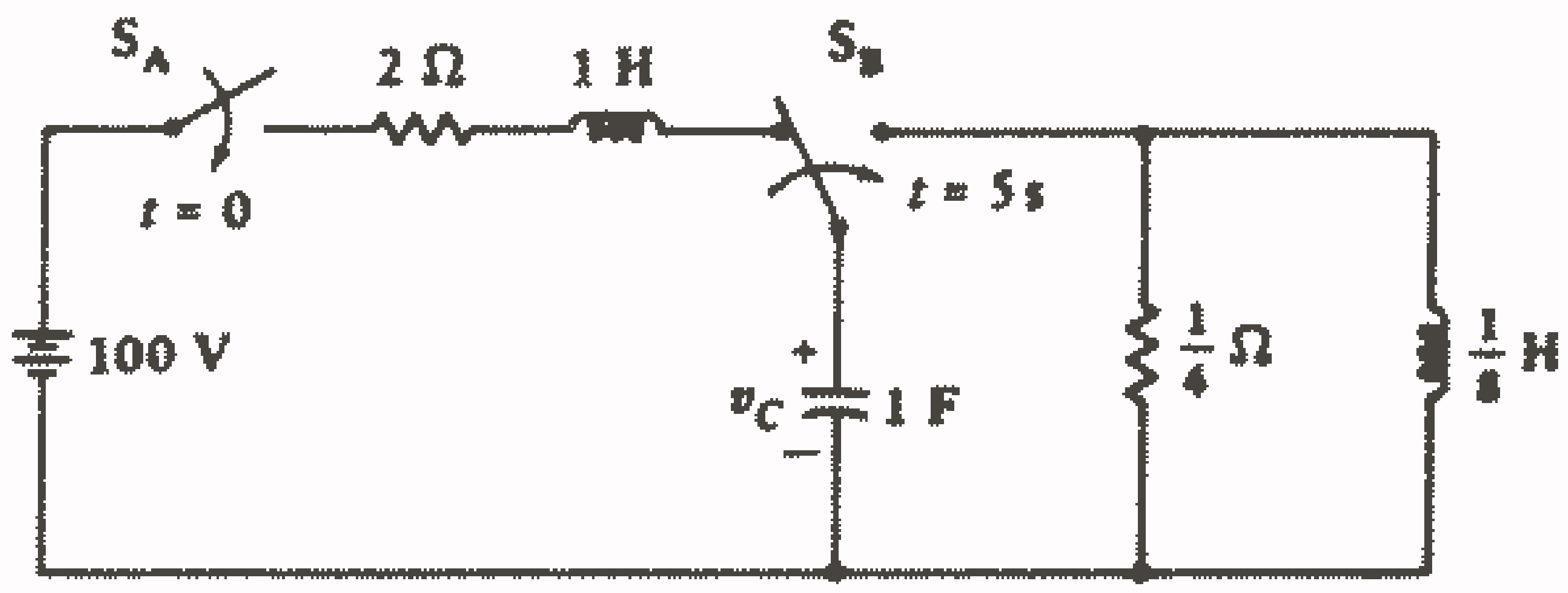
۲۹ ـ (a) در مدار شکل ۳۹-۷ رابطهٔ صحیحی برای $v_c(t)$ پیدا کنید. (b) معادلهٔ دیفرانسیل $v_c(t)$ را بنویسید و با استفاده از آن مقادیر d^2v_c/dt^2 ، d^3v_c/dt^3 را در لحظهٔ $t = 0^+$ پیدا کنید.



شکل ۳۹ ـ ۷: به مسئله ۲۹ مراجعه کنید.

۳۰ ـ مقدار R را در مدار زیر میرای قسمت ۵-۷ ($C = 1/42F$ ، $i(0) = 10A$ ، $L = 7H$ ، $v(0) = 0$) طوری پیدا کنید که مقدار زمان فروکش می‌نیمم شود. مقدار t_s چقدر است؟

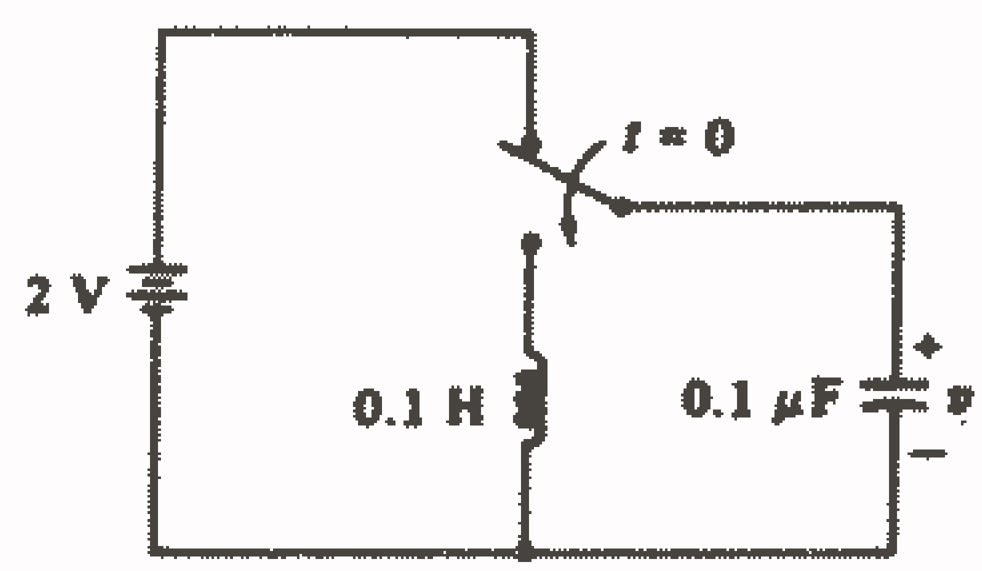
۳۱ ـ هر دو کلید در مدار شکل ۴۰-۷ برای مدت طولانی در وضعیت نشان داده شده، بوده‌اند. در لحظهٔ $t = 0$ ، S_A بسته می‌شود. (a) با فرض $v_c(0) = 0$ ، $v_c(t)$ را پیدا کنید و در فاصلهٔ $0 < t < 5S$ رسم کنید. (b) در لحظهٔ $t = 5s$ ، S_B به راست انتقال می‌یابد، $v_c(t)$ را در فاصلهٔ $5 < t < 8S$ پیدا کنید و سپس رسم کنید.



شکل ۴۰ ـ ۷: به مسئله ۳۱ مراجعه کنید.

۳۲ ـ به مدار RC موازی سادهٔ شکل ۹-۵ که در آن $v(0) = 10V, C=5\mu F, R=10K\Omega$ است مراجعه کنید. معادلهٔ دیفرانسیل v_s را به ازای $t>0$ بنویسید و مداری با استفاده از یک انتگراتور op-amp طرح کنید که $v(t)$ را در خروجی ارائه کند. ابتدا از انتگراتوری استفاده کنید که دارای $R_1 = 1m\Omega$ و $C_f = 1\mu F$ باشد و سپس با مقادیر $R_1 = 10k\Omega$ و $C_f = 5\mu F$ کار را تکرار کنید.

۳۳ ـ در مدار شکل ۴۱-۷ پس از اینکه کلید برای مدت طولانی در وضعیت نشان داده شده بوده است، در لحظهٔ $t = 0$ پایین می‌افتد. یک مدار op − amp بکشید که خروجی آن به ازای $t > 0$ عبارت از $v(t)$ باشد.



شکل ۴۱ ـ ۷: به مسئله ۳۳ مراجعه کنید.

فصل ۸

تابع تحریک سینوسی

۱ - ۸ - مقدمه

پاسخ کامل یک مدار الکتریکی خطی ترکیبی است از دو قسمت یکی پاسخ طبیعی و دیگری پاسخ اجباری. اولین قسمت مطالعهٔ ما اختصاص به مدارهای مقاومتی داشت که در آنها فقط پاسخ اجباری حضور داشت و مورد نیاز بود. به منظور سادگی، معمولاً توابع تحریک‌مان را به منابع dc محدود کردیم و بنابراین به طور فزاینده‌ای با تکنیکهای مختلف مفیدی برای پیدا کردن پاسخهای اجباری dc، آشنا شدیم. سپس به قسمت بعدی پرداختیم و پاسخ طبیعی تعدادی از مدارهای مختلف حاوی یک یا دو عنصر ذخیره‌کنندهٔ انرژی را مورد بررسی قرار دادیم. سپس بدون زحمت چندان زیادی قادر به تعیین پاسخ کامل این مدارها به وسیله جمع کردن پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری گشتیم. بنابراین اکنون در وضعیتی هستیم که تسلط‌مان در پاسخ طبیعی بیشتر از دانش ما دربارهٔ پاسخ اجباری می‌باشد.

در این بخش سوم مطالعهٔ‌مان، اطلاعات خود را دربارهٔ پاسخ اجباری با بررسی تابع تحریک سینوسی، توسعه خواهیم داد.

چرا باید تابع تحریک سینوسی را به عنوان دومین فرم تابعی برای مطالعه انتخاب کنیم؟ چرا تابع خطی، تابع‌نمایی و یا یک تابع بسل اصلاح‌شدهٔ نوع دوم را نه؟ دلایل زیادی برای انتخاب تابع سینوسی وجود دارد که هر یک از آنها به تنهایی کافی است که ما را به این مسیر هدایت کند.

یکی از این دلایل از نتایج فصل قبلی مشهود است، یعنی اینکه پاسخ طبیعی یکی سیستم مرتبهٔ دوم در حالت زیر میرایی، یک تابع سینوسی میرا می‌باشد و اگر تلفاتی وجود نداشته باشد

یک تابع سینوسی خالص خواهد بود. بنابراین تابع سینوسی به طور طبیعی ظاهر می‌شود (همانگونه که تابع‌نمایی منفی عمل می‌کند). در واقع، به طور کلی به نظر می‌رسد که طبیعت، شخصیتی سینوسی دارد، حرکت یک آونگ، جهش یک توپ، نوسان یک تار گیتار، جو سیاسی هر کشور، و کنگره‌ها و موجهای موجود بر سطح یک لیوان شیر کاکائو، همواره یک ماهیت سینوسی معقولی را به نمایش می‌گذارند.

شاید همین مشاهدات بود که ریاضیدان بزرگ فرانسوی فوریه را به کشف روش تحلیلی مهمی که در قالب قضیهٔ فوریه بیان شده است، رهنمون شد. در فصل ۱۷ خواهیم دید که این قضیه ما را قادر می‌سازد که بسیاری از توابع ریاضی مفید از زمان را که f_1 مرتبه در ثانیه عیناً تکرار می‌شوند، به صورت مجموع بی‌نهایت تابع زمانی سینوسی با فرکانس‌هایی که مضارب صحیحی از f_1 هستند نشان دهیم. تابع متناوب $f(t)$ را همچنین می‌توانیم با هر دقتی که بخواهیم به طور تقریبی به صورت مجموع تعداد محدودی از اینگونه جملات نشان دهیم، ولواینکه نمودار $f(t)$ ممکن است کاملاً غیرسینوسی به نظر برسد. دقت چنین تقریبی به وسیله تمرین ۱-۸ توضیح داده شده است.

این تجزیهٔ یک تابع تحریک متناوب به تعدادی از توابع تحریک سینوسی تقریبی، روش تحلیلی نیرومندی است زیرا ما را قادر می‌سازد که پاسخهای جزئی تولید شده در هر مدار خطی به وسیله هر مؤلفهٔ سینوسی را جمع کنیم و پاسخ مطلوب ناشی از تابع تحریک متناوب مورد نظر را به دست آوریم. بنابراین دلیل دیگر مطالعهٔ پاسخ ناشی از یک تابع تحریک سینوسی در وابستگی سایر توابع تحریک به تحلیل توابع سینوسی نهفته است.

دلیل سوم عبارت است از یک خاصیت مهم ریاضی است که تابع سینوسی دارد، یعنی مشتقات و انتگرال‌های آن هم، همگی سینوسی[1] می‌باشند. از آنجاییکه پاسخ اجباری فرم تابع تحریک، مشتقات آن و انتگرال آن را دارد بنابراین تابع تحریک سینوسی، یک پاسخ اجباری سینوسی در سرتاسر مدار ایجاد می‌کند. بنابراین تابع تحریک سینوسی تحلیل ریاضی بسیار ساده‌تری نسبت به سایر توابع تحریک ارائه می‌کند.

سرانجام، تابع تحریک سینوسی دارای کاربردهای عملی مهمی است، چرا که تابعی است که تولید آن آسان است و شکل موجی است که در سرتاسر صنعت برق به کار می‌رود و هر

۱- ما در اینجا کلمهٔ «سینوسی» را به طور مختصر به کار می‌بریم که شامل توابع کسینوسی از زمان هم می‌باشد زیرا به طور کلی یک تابع کسینوسی را هم اگر زاویه‌اش را $90°$ زیاد کنیم می‌توان به صورت یک سینوس بیان نمود.

آزمایشگاه الکتریسته دارای تعدادی مولد سینوسی می‌باشد که در رنج وسیعی از فرکانسهای مفید کار می‌کنند.

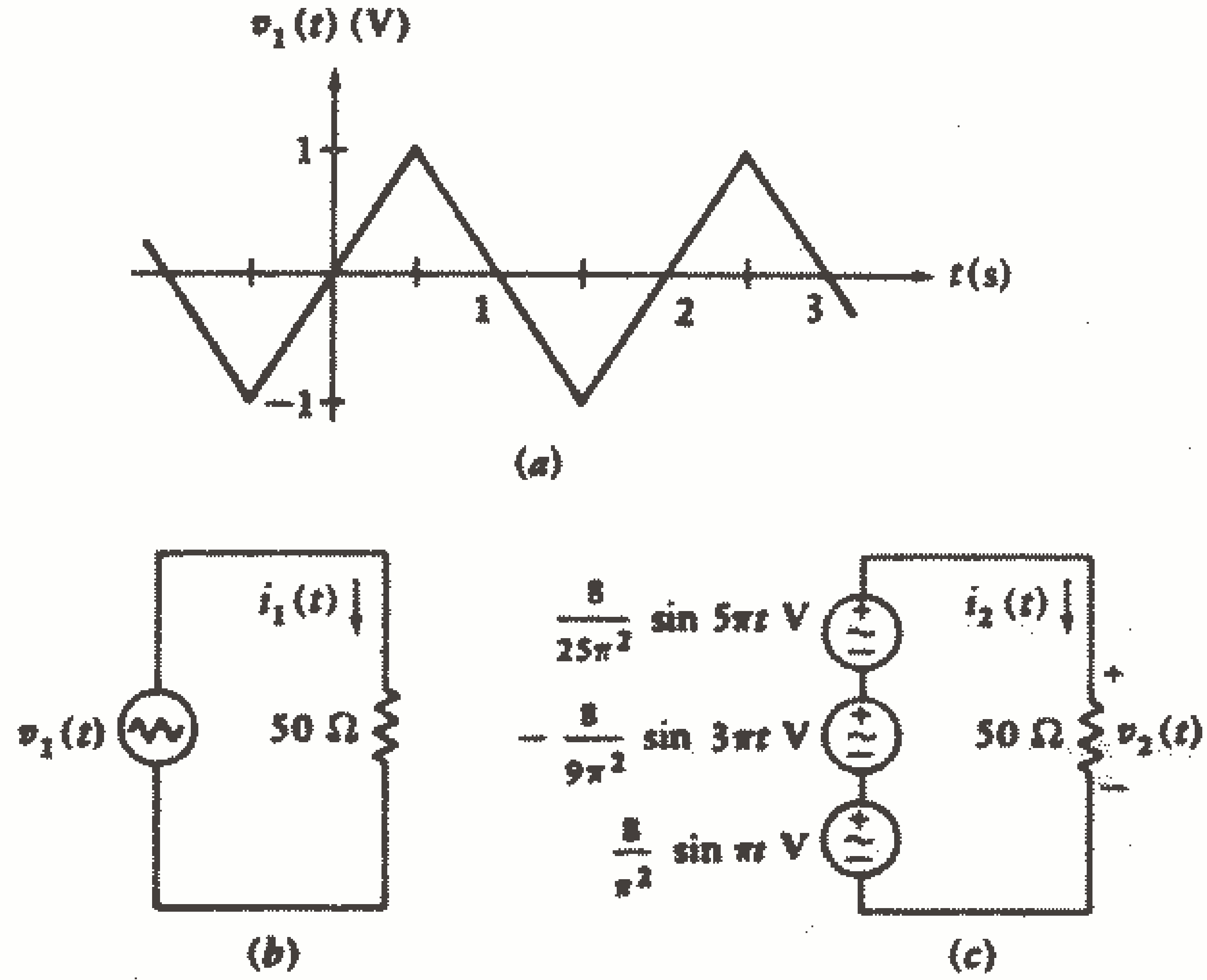
تمرین

۱ ـ ۸ قضیهٔ فوریه، که در فصل ۱۷ آن را مطالعه خواهیم کرد، نشان می‌دهد که شکل موج مثلثی متناوب $v_1(t)$ در شکل ۸-۱a و مجموع بی‌نهایت جملهٔ سینوسی به صورت:

$$v_1(t) = \frac{8}{\pi^2}\left(\sin \pi t - \frac{1}{3^2}\sin 3\pi t + \frac{1}{5^2}\sin 5\pi t - \frac{1}{7^2}\sin 7\pi t + \cdots\right)$$

مساوی می‌باشند. فرض کنید که مجموع سه جملهٔ اول این سری را $v_2(t)$ بنامیم و به عنوان تقریبی برای $v_1(t)$ به کار بریم. شکلهای ۸-۱b,c توابع $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ را به صورت منابعی در مدارهای مقاومتی یکسان نشان می‌دهند. مقادیر $i_1(t), i_2(t)$ را به ازای: (a) ۰/۳S، (b) ۱/۵۶S محاسبه کنید.

جواب: ۱۲mA ،۱۱/۹۱ ،۲۰-، ۱۸/۶۶-

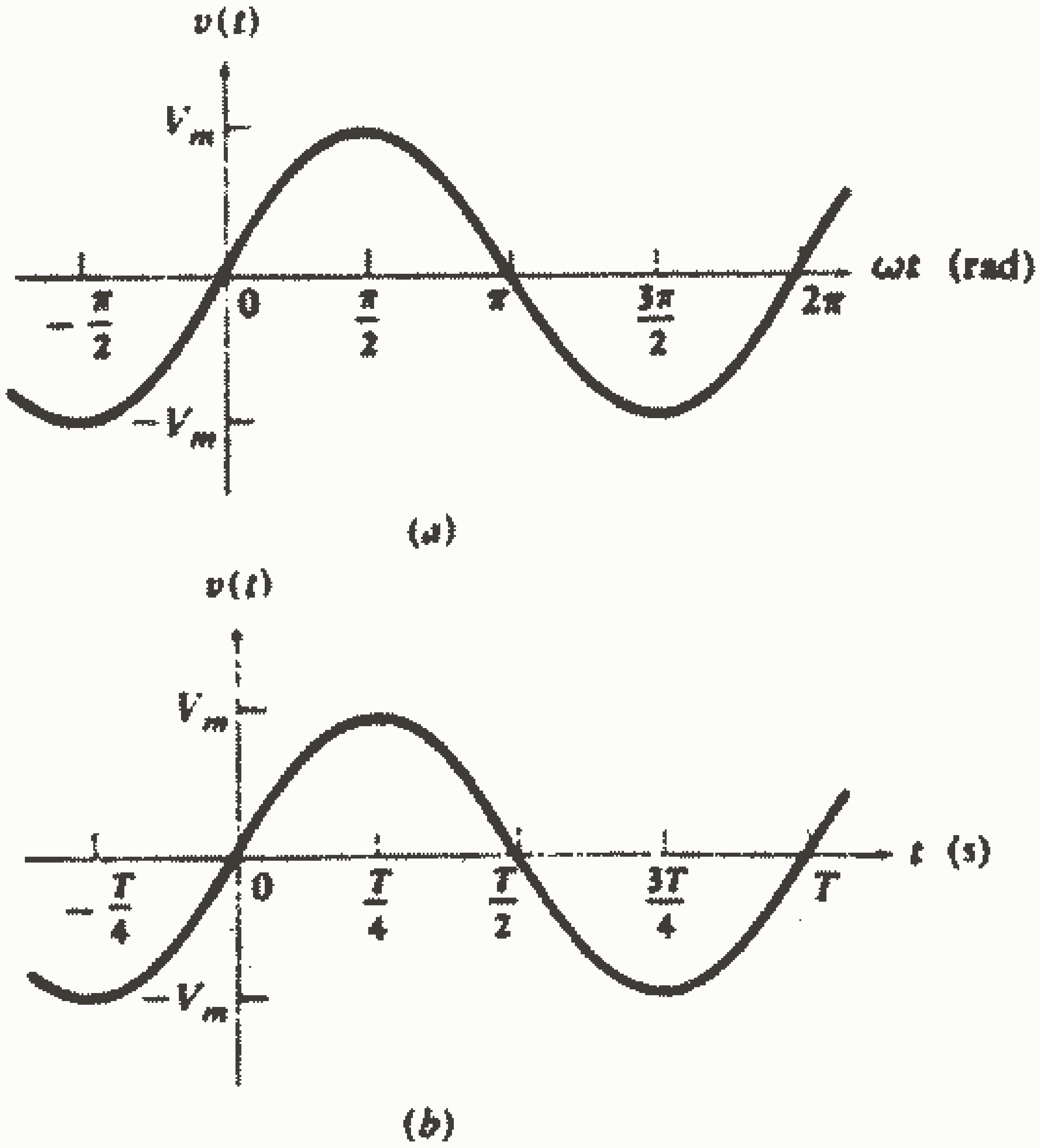


شکل ۱ ـ ۸: به تمرین ۱ ـ ۸ مراجعه کنید.

۲ ـ ۸ ـ مشخصات موج سینوسی

در این قسمت واژه‌های مثلثاتی را که برای توصیف توابع سینوسی (یا کسینوسی) مورد استفاده قرار می‌گیرد، تعریف خواهیم کرد. این تعاریف برای اکثر ما آشنا می‌باشند و اگر

اندکی از مثلثات را به یاد آوریم مطالعهٔ این قسمت به سرعت انجام خواهد گرفت. ولتاژ سینوسی $v(t) = V_m \sin \omega t$ را که در شکلهای ۸-۲a,b نشان داده شده است در نظر می گیریم. دامنهٔ موج سینوسی عبارت از V_m و آرگومان آن ωt می‌باشد که ω فرکانس زاویه‌ای نامیده می‌شود. در شکل ۸-۲a ، $V_m \sin \omega t$ به صورت تابعی از آرگومان ωt رسم شده است و طبیعت متناوب موج سینوسی مشهود است.



شکل ۲ ـ ۸: تابع سینوسی $v(t) = V_m \sin \omega t$

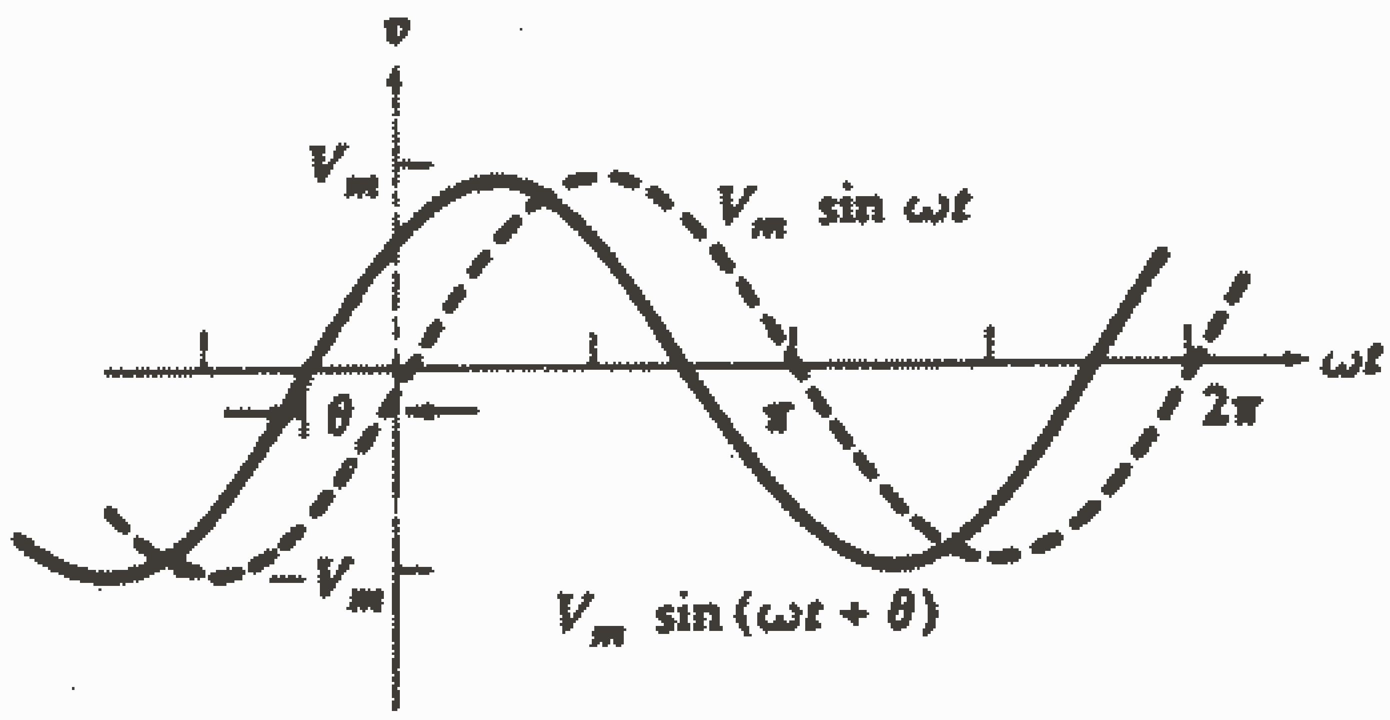
(a) نسبت به ωt (b) نسبت به t رسم شده است.

این تابع خودش را در هر 2π رادیان تکرار می کند و بنابراین پریود آن برابر با 2π رادیان می‌باشد در شکل ۸-۲b $V_m \sin \omega t$ به صورت تابعی از t رسم شده است که اکنون پریود آن T می باشد. پریود ممکن است بر حسب درجه و یا گاهی اوقات بر حسب واحدهای دیگری مانند سانتی‌متر یا اینچ هم بیان شود. یک موج سینوسی که دارای پریود T می‌باشد در هر ثانیه باید $1/T$ پریود را ایجاد کند که فرکانس آن یعنی f برابر $1/T$ هرتز (با علامت اختصاری Hz) می باشد. بنابراین یک هرتز برابر با یک «سیکل بر ثانیه» می‌باشد البته امروزه استفاده از عبارت «سیکل بر ثانیه» تقریباً منسوخ شده است زیرا اکثراً آن را به غلط «سیکل»

استعمال می‌کنند. بنابراین $f = 1/T$ و چون $\omega t = 2\pi$ رابطهٔ متداولی را بین فرکانس و فرکانس زاویه‌ای به دست می‌آوریم: $\omega = 2\pi f$ فرم کلی‌تر تابع سینوسی به صورت:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta) \qquad (1)$$

می‌باشد که حاوی یک زاویهٔ فاز θ در آرگومانش می‌باشد. معادلهٔ (۱) در شکل ۳-۸ به صورت تابعی از ωt رسم شده است و زاویهٔ فاز به صورت تعداد رادیانهایی که موج سینسوی اولیه (که به صورت نقطه‌چین نمایش داده شده است) به سمت چپ انتقال پیدا کرده و یا از نظر زمانی زودتر واقع شده است، ظاهر گردیده است. چون نقاط موجود در تابع سینوسی $V_m \sin(\omega t + \theta)$ به اندازهٔ θ رادیان و یا θ/ω s زودتر واقع می‌شوند بنابراین می گوییم $V_m \sin(\omega t + \theta)$ نسبت به $V_m \sin \omega t$ به اندازهٔ θ رادیان تقدم دارد و بالعکس صحیح است اگر بگوییم که $V_m \sin \omega t$ به اندازهٔ θ رادیان نسبت به $V_m \sin(\omega t + \theta)$ تاخیر دارد.



شکل ۳ - ۸: موج سینوسی $V_m \sin(\omega t + \theta)$ نسبت به $V_m \sin \omega t$ به اندازه θ، رادیان تقدم دارد.

در هر دو حالت تقدم یا تأخر می‌گوییم این موجهای سینوسی غیرهم فاز هستند و اگر زاویه‌های فاز مساوی باشند آنها را هم فاز می‌نامیم.

در مهندسی برق معمولاً زاویهٔ فاز را به جای رادیان بر حسب درجه بیان می‌کنند و هیچگونه اشکال و آشفتگی پیش نخواهد آمد اگر علامت درجه را همیشه بکار بریم. بنابراین به‌عوض اینکه بنویسیم $v = 100 \sin(2\pi 1000 t - \pi/6)$ معمولاً می‌نویسیم: $v = 100 \sin(2\pi 1000 t - 30°)$.

برای محاسبه عبارت فوق در لحظهٔ مشخصی از زمان، مثلاً $t = 10^{-4}$ S، مقدار

$2\pi 1000t$ می‌شود. $0{,}2\pi$ رادیان، که باید آن را قبل از اینکه 30° را از آن کم کنیم، به صورت 36° بیان کنیم.

دو موج سینوسی را که می‌خواهیم از نظر هم‌فاز بودن مقایسه کنیم باید هر دو به صورت موج سینوسی و یا هر دو به صورت کسینوسی و نیز هر دو با دامنه‌های مثبت و فرکانس یکسانی نوشته شوند. همچنین بدیهی است که اگر مضارب 360° را به آرگومان هر تابع سینوسی جمع و یا تفریق کنیم تغییری در مقدار تابع داده نمی‌شود. بنابراین می‌توانیم بگوییم که $v_1 = V_{m1} \operatorname{Sin}(5t - 30^\circ)$ نسبت به $v_2 = V_{m2} \operatorname{Cos}(5t + 10^\circ)$ به اندازهٔ 130° تاخیر دارد و یا می‌توانیم بگوییم که v_1 نسبت v_2 به اندازهٔ 230° تقدم دارد. از آنجاییکه می‌توان v_2 را به‌صورت $v_2 = V_{m2} \operatorname{Sin}(5t - 260^\circ)$ نوشت بنابراین vm_1 ، v_{m2} هر دو کمیتهای مثبتی فرض شده‌اند. معمولاً اختلاف فاز بین دو موج سینوسی با آن زاویه‌ای که کمتر از 180° باشد بیان می‌شود.

مفهوم تقدم و تاخر بین دو تابع سینوسی به‌طور گسترده‌ای استعمال خواهد شد و باید هم از نظر ریاضی و هم از نظر ترسیمی آن را درک نمود.

تمرین

۲ ـ ۸ ـ زاویه‌ای را که i_2 نسبت به i_1 تقدم دارد پیدا کنید، اگر $i_1 = 120 \operatorname{Cos}(100\pi t + 30^\circ)$ و i_2 برابر با: (a) $-0{,}1 \operatorname{Cos}(100\pi t + 100^\circ)$, (b) $20 \operatorname{Sin}(100\pi t - 50^\circ)$, (c) $-18 \operatorname{Sin}(100\pi t + 40^\circ)$ باشد.

جواب: $-110^\circ, -170^\circ, 100^\circ$

۳ ـ ۸ ـ A , B , C , φ را پیدا کنید، اگر:

$$-50 \operatorname{Cos}(120\pi t + 30^\circ) + 20 \operatorname{Sin}(120\pi t - 40^\circ) = A\cos 20\pi t + B\sin 120\pi t = C \operatorname{Cos}(120\pi t + \varphi)$$

جواب: $-144{,}3$, $69{,}1$, $40{,}3$, $-56{,}2$

۳ ـ ۸ ـ پاسخ اجباری ناشی از توابع تحریک سینوسی

اکنون که با مشخصات ریاضی توابع سینوسی آشنا شده‌ایم و می‌توانیم به طور آگاهانه آنها را توصیف و مقایسه کنیم، آماده‌ایم تا یک تابع تحریک سینوسی را به یک مدار ساده اعمال کنیم و پاسخ اجباری آن را به دست آوریم. ابتدا باید معادلهٔ دیفرانسیلی مدار مورد نظر را

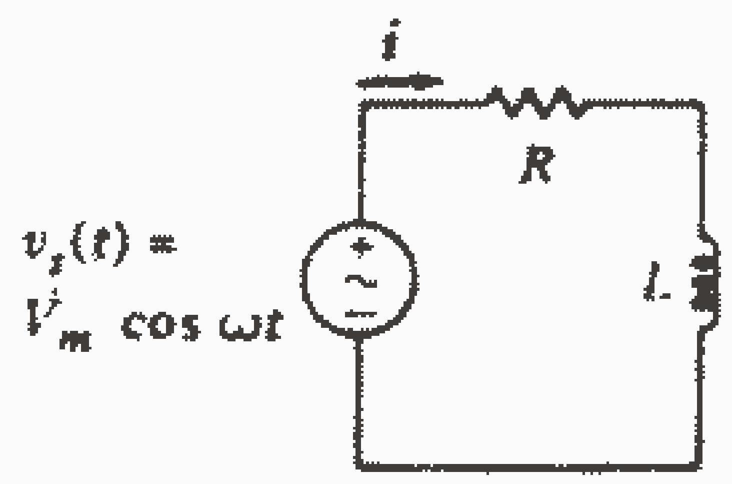
بنویسیم. پاسخ کامل این معادله از دو قسمت تشکیل شده است، پاسخ عمومی (که ما آن را پاسخ طبیعی می‌نامیم) و انتگرال خصوصی (یا پاسخ اجباری). پاسخ طبیعی مستقل از فرم ریاضی تابع تحریک می‌باشد و فقط بستگی به نوع مدار، مقادیر عناصر و شرایط اولیه دارد و ما آن را با صفر کردن همهٔ توابع تحریک و در نتیجه کاهش معادله به معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن، پیدا می‌کنیم. ما قبلاً پاسخ طبیعی بسیاری از مدارات RL ، RC ، RLC را پیدا کرده‌ایم.

پاسخ اجباری همیشه فرم ریاضی تابع تحریک به علاوهٔ مشتقات و انتگرال آن را دارا می‌باشد. با توجه به این اطلاعات، بدیهی است که یکی از روشهاییکه به وسیله آن می‌توان پاسخ اجباری را پیدا نمود این است که پاسخی متشکل از مجموع چنین توابعی را فرض کنیم که هر تابعی دارای دامنه مجهولی باشد که باید آن را به وسیله جایگزینی مستقیم در معادلهٔ دیفرانسیل پیدا کنیم.

این روش، طولانی می‌باشد اما تنها روشی است که باید در این فصل برای معرفی تحلیل سینوسی به کار بریم زیرا حداقل مفاهیم جدیدتر را در بر دارد. البته، اگر روش ساده‌تری که در فصلهای آینده توصیف شده است نمی‌بود، تحلیل مدار یک هنر غیرعملی و بلااستفاده‌ای می‌شد.

واژهٔ «پاسخ حالت پایدار» به طور مترادف برای پاسخ اجباری به کار می‌رود و مدارهایی را که در شرف تحلیل آنها هستیم معمولاً گفته می‌شود که در حالت پایدار سینوسی هستند. متأسفانه کلمهٔ حالت پایدار، مفهوم «غیرمتغیر با زمان» را به ذهن اغلب دانشجویان تداعی می‌کند. این مطلب در مورد توابع تحریک dc صادق است اما پاسخ حالت پایدار سینوسی قطعاً و به‌وضوح متغیر با زمان می‌باشد. عبارت «حالت پایدار» به‌طور ساده اشاره به وضعیتی دارد که پس از میرا شدن پاسخ طبیعی یا گذرا حاصل می‌شود.

حال بیایید مدار RL سری نشان داده شده در شکل ۴-۸ را در نظر بگیریم.



شکل ۴ - ۸: یک مدار RL سری که پاسخ اجباری آن مطلوب است.

ولتاژ سینوسی $v_s = V_m \cos \omega t$ در زمان دوری در گذشته به مدار اعمال شده است و پاسخ طبیعی کاملاً میرا شده است. ما در جستجوی پاسخ اجباری، یا پاسخ حالت پایدار، هستیم که باید در معادله دیفرانسیل $L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t$ صدق کند. سپس فرم تابعی پاسخ اجباری به‌وسیله انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری مکرر از تابع تحریک به دست می آید. فقط دو فرم مختلف به دست می آید، $\cos \omega t, \sin \omega t$. بنابراین پاسخ اجباری باید دارای فرم کلی $i(t) = I_1 \cos \omega t + i_2 \sin \omega t$ باشد، که در آن I_2 ، I_1 ثابتهای حقیقی هستند که مقدار آنها بستگی به V_m ، R ، L ، ω دارد. هیچ مقدار ثابت و یا تابع‌نمایی نمی‌تواند وجود داشته باشد. حال با جایگزینی فرم مفروض پاسخ در معادلهٔ دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$L(-I_1\omega \sin\omega t + I_2\omega \cos \omega t) + R(I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t) = V_m \cos \omega t$$

که اگر جملات سینوسی و کسینوسی را تفکیک کنیم، به دست می آید:

$$(-LI_1\omega + RI_2) \sin \omega t + (LI_2\omega + R_1 I - V_m) \cos \omega t = 0$$

این معادله باید به ازای جمیع مقادیر t صادق باشد و این حالت فقط وقتی میسر است که ضرایب $\cos \omega t, \sin \omega t$ هر کدام مساوی صفر باشند. بنابراین:

$$-\omega LI_1 + RI_2 = 0 \ , \ \omega LI_2 + RI_1 - V_m = 0$$

اگر دو معادلهٔ دو مجهولی فوق را نسبت به I_1 ، I_2 حل کنیم، خواهیم داشت:

$$I_1 = RV_m/R^2 = \omega^2L^2, \ I_2 = \omega LV_m/R^2 + \omega^2L^2 \ \circ$$

بنابراین پاسخ اجباری حاصله عبارت است از:

$$i(t) = RV_m/R^2 + \omega^2L^2 \cos \omega t + \omega LV_m/R^2 + \omega^2L^2 \sin \omega t \qquad (۲)$$

البته رابطهٔ فوق کمی پیچیده و شلوغ است و تصویر واضح‌تری از پاسخ را می‌توان با بیان پاسخ به صورت یک تابع منفرد سینوسی و یا کسینوسی با یک اختلاف فاز، به‌دست آورد. بیایید به‌عنوان پیش‌درآمدی بر روش ارائه شده در فصل بعدی، تابع کسینوسی را انتخاب کنیم:

$$i(t) = A \cos (\omega t - \theta) \qquad (۳)$$

حداقل دو روش برای به‌دست آوردن مقادیر A ، θ به ذهن خطور می کند. می‌توانیم رابطهٔ (۳) را مستقیماً در معادلهٔ دیفرانسیل اولیهٔ جایگزین کنیم و یا اینکه به‌سادگی دو پاسخ (۲) و (۳) را با هم مساوی قرار دهیم. اجازه دهید روش دوم را انتخاب کنیم زیرا روش اول تمرین خوبی برای آخر فصل می‌باشد. پس از بسط تابع $\cos(\omega t - \theta)$ و مساوی قرار دادن معادلات (۲) ، (۳) خواهیم داشت:

$$A \cos\theta \cos \omega t + A \sin\theta \sin \omega t =$$

$$= (RV_m/R^2 + \omega^2L^2) \cos \omega t + (\omega LV_m/R^2 + \omega^2L^2) \sin \omega t$$

پس از ساده کردن و قرار دادن ضرایب $\cos \omega t, \sin \omega t$ برابر با صفر، خواهیم داشت:

$$A \cos\theta = RV_m/R^2 + \omega^2 L^2 \ , \ A \sin\theta = \omega L V_m/R^2 + \omega^2 L^2$$

برای به‌دست آوردن A , θ دو طرف معادلات فوق را به‌هم تقسیم می‌کنیم:

$$A \sin\theta/A \cos\theta = tg\theta = \omega L/R$$

و نیز هر دو معادله را بتوان ۲ رسانده و با هم جمع می‌کنیم:

$$A^2 \cos^2\theta + A^2 \sin^2\theta = A^2 = R^2 V_m^2/(R^2 + \omega^2 L^2)^2 + \omega^2 L^2 V_m^2/(R^2 + \omega^2 L^2)^2 = V_m^2/R^2 + \omega^2 L^2$$

بنابراین:

$$A = V_m/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \ , \ \theta = tg^{-1}\, \omega L/R$$

و به این ترتیب فرم دیگر پاسخ اجباری به‌صورت زیر می‌باشد:

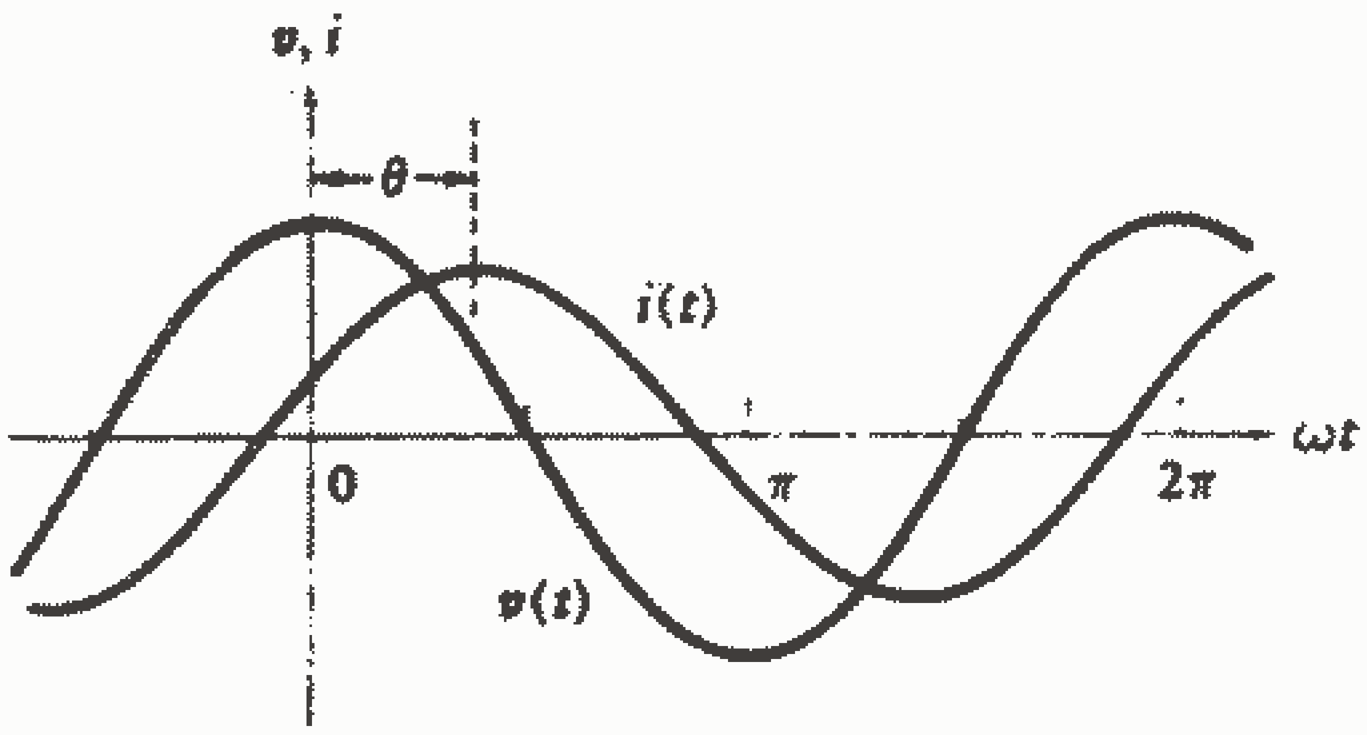
$$i(t) = V_m/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\ \cos(\omega t - tg^{-1}\, \omega L/R) \qquad (٤)$$

اکنون باید خصوصیات الکتریکی پاسخ $i(t)$ را مورد توجه قرار دهیم. دامنهٔ پاسخ متناسب است با دامنهٔ تابع تحریک و اگر چنین نباشد مفهوم خطی بودن نقض می‌شود. همچنین دامنهٔ پاسخ با افزایش R , L , ω کاهش می‌یابد (اما نه به‌طور متناسب). این مطلب به‌وسیله معادلهٔ دیفرانسیل تائید می‌شود یعنی افزایش R , L و یا di/dt کاهشی در دامنهٔ جریان را ایجاب می‌کند البته اگر دامنهٔ ولتاژ منبع تغییر نکند. مشاهده می‌شود که جریان به اندازهٔ $tg^{-1}(\omega L/R)$ نسبت به ولتاژ اعمال شده تاخیر دارد. اگر $\omega = ٠$ و یا $L = ٠$ باشد، جریان باید با ولتاژ هم‌فاز باشد و انتظار این امر را هم داریم زیرا در حالت اول جریان مستقیم و در حالت دوم مدار مقاومتی خالص خواهیم داشت. اگر $R = ٠$، جریان به اندازهٔ °۹۰ نسبت به ولتاژ تاخیر دارد و آنگاه $v_s = L\, di/dt$ و رابطهٔ مشتق ـ انتگرالی بین سینوس و کسینوس وجود اختلاف فاز °۹۰ را نشان می‌دهد. سپس در یک سلف تنها، اگر قرارداد علامت غیرفعال صادق باشد جریان نسبت به ولتاژ °۹۰ تاخیر دارد. به طور مشابه می‌توانیم نشان دهیم که جریان خازن نسبت به ولتاژ آن °۹۰ تقدم فاز دارد. ولتاژ اعمال شده و جریان حاصله هر دو در یک محور ωt در شکل ۵-۸ رسم شده‌اند. واقعیت تاخیر فاز جریان نسبت به ولتاژ در این مدار RL ساده به‌وضوح مشاهده می‌شود. بعدها قادر خواهیم بود که به‌سادگی نشان دهیم که این رابطهٔ فازی در ورودی هر مداری که فقط متشکل از سلف و خازن باشد، موجود است.

اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ بستگی به نسبت کمیت ωL به R دارد. ما ωL را راکتانس سلفی یک سلف می‌نامیم که بر حسب اهم اندازه‌گیری می‌شود و معیاری است از

مخالفت یک سلف در برابر عبور جریان سینوسی از آن. در فصل بعدی دربارهٔ راکتانس بیشتر صحبت خواهیم کرد.[۱]

روشی که به وسیله آن پاسخ حالت پایدار سینوسی را به‌دست آورده‌ایم مسئلهٔ کم‌ارزش و پیش‌پا افتاده‌ای نیست. ما باید به پیچیدگیهای تحلیلی که از حضور سلف ناشی می‌شود فکر کنیم، اگر هر دو عنصر غیرفعال مقاومت می‌بودند، تحلیل بسیار ساده می‌شد، حتی اگر تابع تحریک سینوسی می‌بود. دلیل اینکه اینقدر تحلیل ساده می‌شد از رابطهٔ سادهٔ ولتاژ ـ جریان قانون اهم بر می‌آید. رابطهٔ ولتاژ ـ جریان یک سلف به آن سادگی نیست و به جای حل کردن یک معادلهٔ جبری، با یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرهمگن مواجه می‌شویم. البته کاملاً غیرعملی است که هر مداری را با روش فوق تحلیل کنیم و در فصل بعدی مراحلی را برای ساده کردن تحلیل ارائه خواهیم کرد. نتیجهٔ حاصله، رابطه‌ای جبری بین ولتاژ و جریان سینوسی سلف و خازن مانند مقاومتها خواهد بود و قادر خواهیم بود یک دسته معادله جبری برای مداری هر قدر پیچیده بنویسیم.متغیرها و ضرایب ثابت در این معادلات جبری، به جای اعداد حقیقی اعداد مختلط خواهند بود اما در عوض تحلیل هر مداری در حالت پایدار سینوسی تقریباً به سادگی تحلیل مدار مقاومتی مشابه خواهد بود.



شکل ۵ ـ ۸: تابع تحریک سینوسی اعمال شده و پاسخ جریان سینوسی حاصله در مدار RL سری شکل ۴ ـ ۸.

---

۱ - زمانی از علامت E (نیروی الکتروموتوری) برای نشان دادن ولتاژ استفاده می‌شد. آنگاه هر دانشجویی از عبارت «ELI the ICE man» به‌عنوان یادآوری‌کنندهٔ اینکه در یک مدار سلفی ولتاژ مقدم به جریان و در یک مدار خازنی جریان مقدم بر ولتاژ است، استفاده می‌نمود.

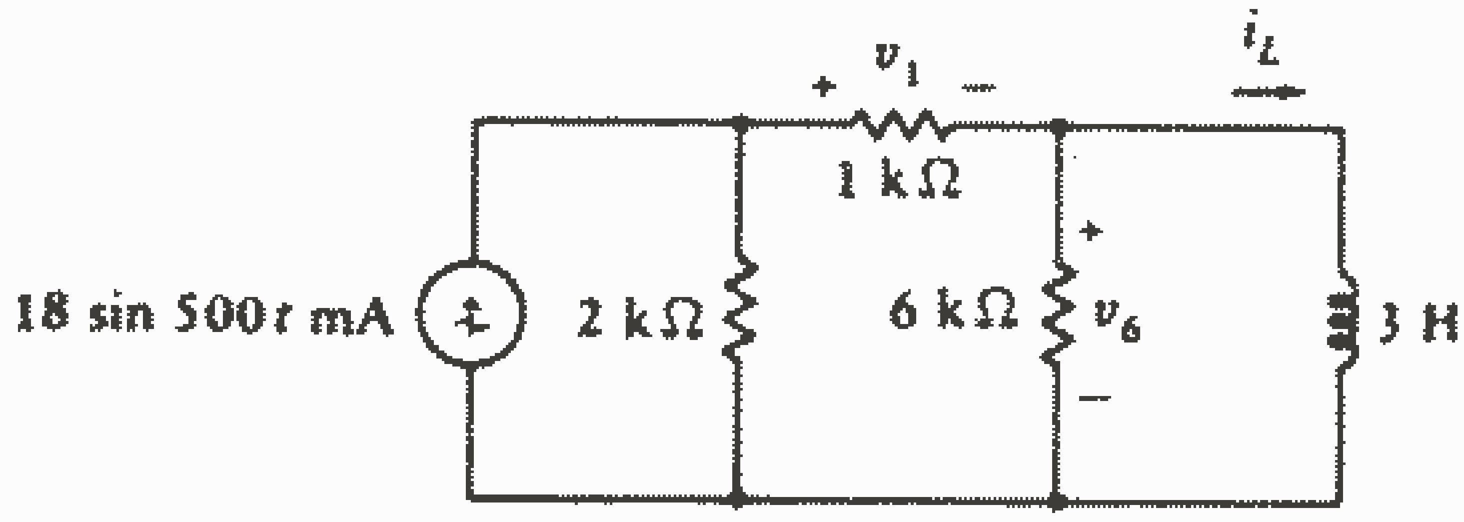
تمرین

۴ ـ ۸ ـ در مدار شکل ۴-۸، R را برابر 200Ω و L را برابر 8mH در نظر بگیرید. اگر $v_s = 40\cos 10^4 tV$، پیدا کنید: (a) $v_R(t)$، ولتاژ دو سر R با علامت + در سمت چپ. (b) $v_L(t)$، ولتاژ دو سر L، با علامت + در بالا، (c) $P_s(t)$، قدرت تحویل داده شده به وسیله منبع.

جـواب: $37{,}1\ Cos(10^4t - 21{,}8°)V$, $14{,}86\ Cos(10^4t + 68/2°)$ و $7{,}43\ Cos10^4t\ Cos(10^4t - 21{,}8°)W$

۵ ـ ۸ ـ از قضیه تونن برای ساده کردن مدار شکل ۶-۸ استفاده کنید و سپس مقادیر زیر به ازای $t = 0$ پیدا کنید: (a) i_L ، (b) v_6 ، (c) v_1

جواب: $-5{,}76mA$ ، $11{,}52V$ ، $-3{,}84V$



شکل ۶ ـ ۸: به تمری ۵ ـ ۸ مراجعه کنید.

مسائل

۱ ـ اگر $y(t) = 26\ Cos190t - 18\ Sin190t$ مقادیر زیر را برای y پیدا کنید. f(a) ، T(b) ، w(c)، (d) دامنه، (e) زاویه‌ای که $y(t)$ نسبت به $5\ Cos190t$ تقدم دارد، (f) زاویـه‌ای کـه $y(t)$ نسبت به $8\ Sin190t$ تأخیر دارد. (g) A ، θ اگر $A\ Cos(190t + \theta) = y(t) + 20\ Cos(190t + 160°)$

۲ - با دادن مقادیر به A . ∅ هر یک از ولتاژهای زیر را به صورت $v(t) = A\ Cos(\omega t + \varnothing)$ بیان کنید: (a) $6\ Sin20t$ ، (b) $4\ Sin(20t - 20°)$ ، (c) $8\ Cos5t + 3\ Sin5t$ (d) کوچکترین مقدار مثبت t که به ازای آن $5\ Cos(100t + 40°) = 0$، کدام است؟ (e) کوچکترین مقدار مثبت t که به ازای آن $-3\ Cos20t + 2\ Sin20t$ ماکزیمم می‌شود کدام است و مقدار این ماکزیمم چقدر است؟

۳ ـ (a) یک تابع سینوسی ۱۰۰HZ دارای مقدار ماکزیمم مثبت ۵۰ در لحظهٔ t = ۰٫۱۲۳٤S می‌باشد. آن را به صورت $A\cos\omega t + B\sin\omega t$ بیان کنید. (b) سینوس نشان داده شده در شکل ۸-۲b هر ۲ میلی ثانیه از صفر عبور می‌کند و دارای مقدار ۱۲- در لحظهٔ t = ۲٫٤ms می‌باشد. آن را به‌فرم $C\cos(\omega t + \varphi)$ بیان کنید.

٤ ـ تمرین ذکر شده در متن را با جایگزینی مستقیم پاسخ جریان مفروض (۳)، $i(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$، در معادلهٔ دیفرانسیل $L\,di/dt + Ri = V_m\cos\omega t$ انجام دهید و نشان دهید که مقادیر به دست آمده برای θ،A با رابطهٔ (٤) موافقت دارد.

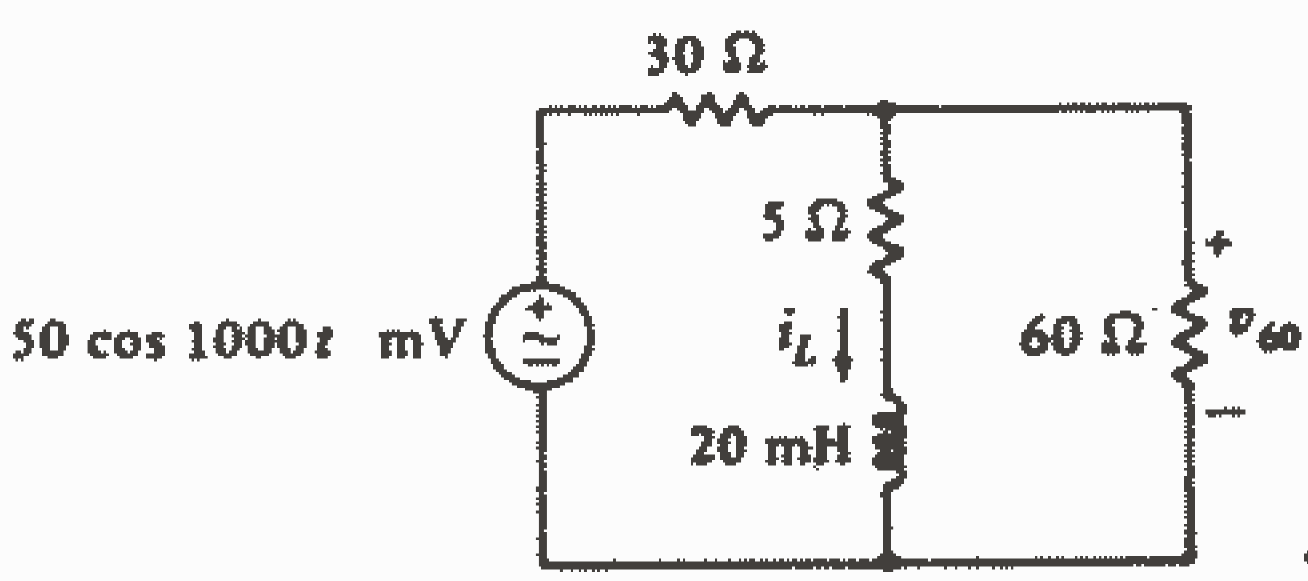
۵ ـ در شکل ٤-۸ فرض کنید.

$v_s = 20\cos(500t + 100°)V$, $v_R = k\cos(500t + 45°)$ (علامت + درچپ)

٦ ـ یک سلف ۰٫۲H با یک مقاومت ۱۰Ω و یک مقاومت ۳۰Ω و یک منبع ولتاژ $v_s = 100\cos 300t\ V$ سری می‌باشد. دامنهٔ ولتاژ دو سر اتصال سری سلف و مقاومت ۱۰Ω را تعیین کنید.

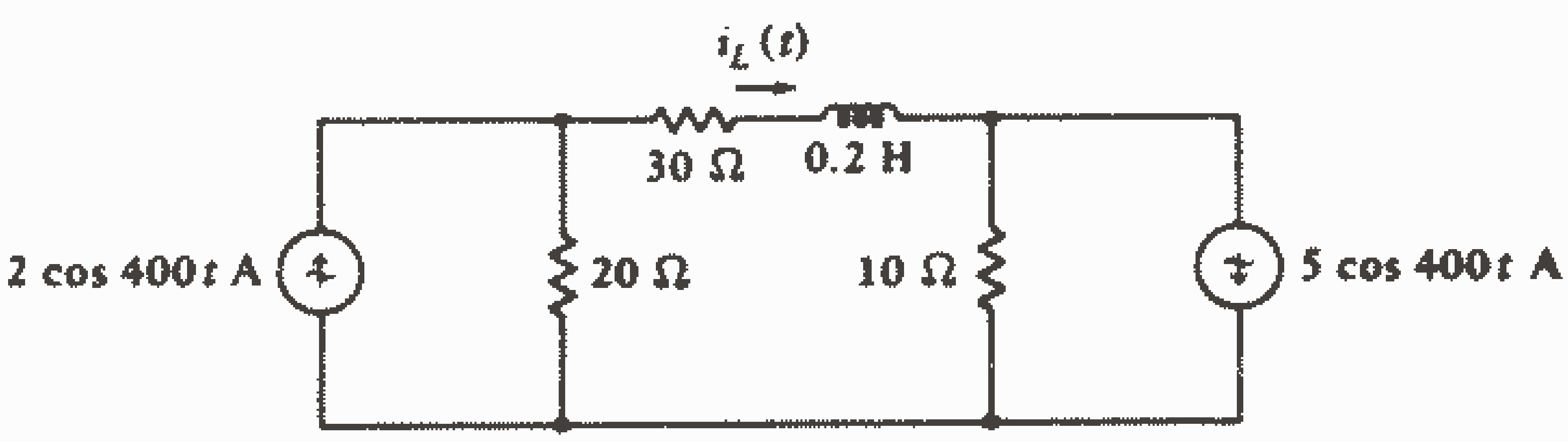
۷ ـ یک منبع ولتاژ $v_s = 10\cos(800t - 30°)$ ، یک مقاومت ۲۰Ω و یک سلف ۵۰mH به طور سری می‌باشند. دامنهٔ ماکزیمم قدرت لحظه‌ای را که: (a) به‌وسیله منبع تولید می‌شود. (b) به‌وسیله مقاومت تلف می‌شود. (c) به‌وسیلهٔ سلف جذب می‌شود، پیدا کنید.

۸ ـ در مدار شکل ۸ـ۷ با استفاده از قضیهٔ تونن: (a) i_L ، (b) v_{60} را پیدا کنید.



شکل ۷ ـ ۸: به مسئله ۸ و ۱۰ مراجعه کنید.

۹ ـ با استفادهٔ متوالی از تبدیل منابع در مدار شکل ۸-۸، $i_L(t)$ را پیدا کنید.

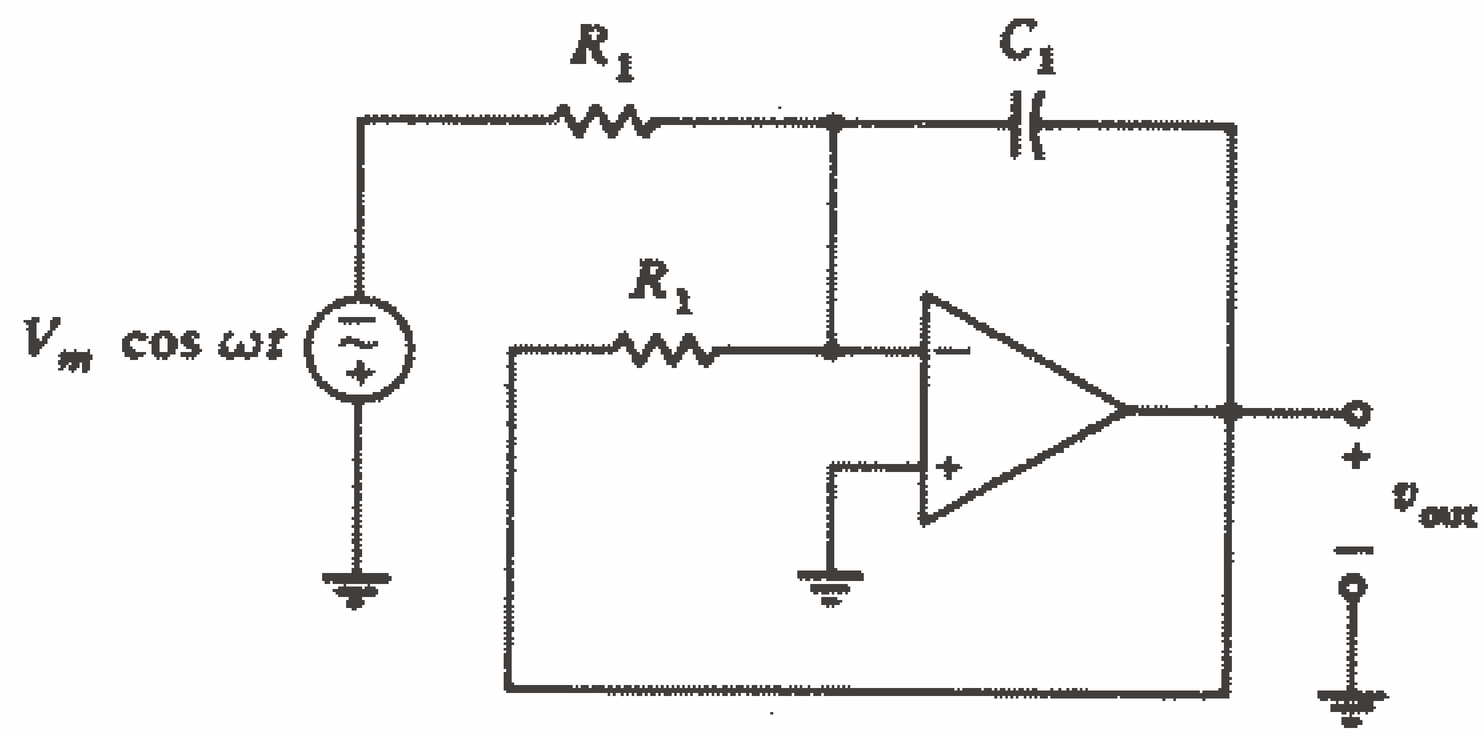


شکل ۸ ـ ۸: به مسائل ۹ و ۱۱ مراجعه کنید.

۱۰ ـ مقاومت 5Ω را در شکل ۷ـ۸ با یک منبع ولتاژ وابسته (علامت + در بالا) با مقدار $0/1v_{1}$ جایگزین کنید و مسئله 8a را تکرار کنید.

۱۱ ـ منبع جریان سمت راست در شکل ۸ـ۸ با $5\ \cos 200t$ جایگزین کنید و مسئله ۹ را تکرار کنید.

۱۲ ـ فرض کنید که op-amp در شکل ۹ـ۸ ایده آل است ($R_i=\infty$, $R_o = 0$, $A = \infty$).
همچنین توجه داشته باشید که به ورودی انتگراتور دو سیگنال اعمال می‌شود، $-V_m \cos \omega t$ و v_{out} اگر حاصلضرب R_1C_1 با نسبت L/R در مدار RL سری شکل ۴ـ۸ مساوی قرار داده شود، نشان دهید که v_{out} برابر است با ولتاژ دو سر R (علامت + در چپ) در آن مدار.



شکل ۹ ـ ۸: به مسئله ۱۲ مراجعه کنید.

۱۳ ـ یک منبع ولتاژ $V_m \cos \omega t$، یک مقاومت R و یک خازن C همه با هم‌سری می‌باشند. (a) یک معادلهٔ انتگرالی بر حسب جریان حلقهٔ i بنویسید و سپس با مشتق‌گیری از آن معادلهٔ دیفرانسیل مدار را به‌دست آورید. (b) فرم کلی مناسبی برای پاسخ اجباری $i(t)$ فرض کنید و آن را در معادلهٔ دیفرانسیل قرار دهید و فرم دقیق پاسخ اجباری را به‌دست آورید.

فصل ۹

مفهوم فیزور

۱ ـ ۹ مقدمه

در سرتاسر قسمتهای قبلی مطالعهٔمان دربارهٔ تحلیل مدار، تمام توجهمان را معطوف مدارهای مقاومتی کردیم. البته ممکن است به‌خاطر آوریم که اغلب به ما قول داده می‌شد که روشهایی که به مدارهای مقاومتی اعمال می‌کنیم بعدها در مورد مدارهای شامل سلف و خازن هم صادق خواهند بود. در این فصل شالوده‌ای را پی‌ریزی خواهیم کرد که این پیشگویی را قرین واقعیت سازد. روشی را برای بیان یک تابع تحریک سینوسی یا یک پاسخ سینوسی به‌وسیله نمادی از اعداد مختلط به‌نام تبدیل فیزور و با به‌طور مختصر «فیزور» وضع خواهیم کرد. که این چیزی نیست به جز یک عدد که با تعیین دامنه و زاویهٔ فاز یک سینوس آن تابع سینوسی را درست مانند موقعی که به‌صورت یک تابع تحلیلی از زمان بیان شده باشد، مشخص می‌کند. اگر با فیزورها به جای مشتقات و انتگرالهای سینوسها کار کنیم، کار مهمی را در جهت ساده کردن تحلیل حالت پایدار سینوسی مدارهای RLC کلی، انجام داده‌ایم. این ساده‌سازی تا پایان این فصل کاملاً روشن خواهد شد.

استفاده از یک تبدیل ریاضی برای ساده کردن یک مسئله نباید ایدهٔ جدیدی برای ما باشد مثلاً همهٔ ما با روش استفاده از لگاریتم برای ساده کردن ضرب و تقسیم در حساب آشنایی داریم. برای ضرب چند عدد در یکدیگر، ابتدا لگاریتم هر یک از این اعداد را به دست آوردیم و یا اینکه این اعداد را به فرم ریاضی دیگری «تبدیل» نمودیم که اکنون می‌توانیم آن عمل را به عنوان به‌دست آوردن «تبدیل لگاریتمی» بنامیم. سپس همهٔ لگاریتمها را با هم جمع نمودیم تا لگاریتم حاصلضرب مطلوب به‌دست آید. و سرانجام آنتی لگاریتم (عملی که می‌توان آن را «تبدیل

معکوس» نامید) را به‌دست می آوریم که جواب ما همین آنتی لگاریتم می‌باشد . این راه‌حل ما را از حوزهٔ اعداد معمولی به حوزه لگاریتمها برد و بر گرداند .

مثالهای آشنای دیگر از عملیات تبدیل را می‌توان در بیانهای مختلف یک دایره به‌صورت یک معادله ریاضی، به‌صورت یک شکل هندسی بر یک صفحهٔ مختصات و یا صرفاً به‌صورت یک مجموعهٔ سه عددی (که عدد اول مختص x مرکز و عدد دوم مختص y مرکز و عدد سوم مقدار شعاع است) مشاهده نمود . هر یک از این سه بیان دقیقاً حاوی اطلاعات یکسانی است و اگر قواعد تبدیلات در هندسهٔ تحلیلی تدوین شده باشد هیچ مشکلی در عبور از حوزهٔ جبر به حوزهٔ هندسه و یا به «حوزهٔ سه‌تایی‌های مرتب» نخواهیم داشت.

۲ ـ ۹ تابع تحریک مختلط

اکنون آماده‌ایم تا دربارهٔ اعمال یک تابع تحریک مختلط (یعنی تابعی که یک قسمت حقیقی و یک قسمت موهومی داشته باشد) به یک شبکهٔ الکتریکی فکر کنیم [1] ممکن است عجیب به‌نظر آید اما در خواهیم یافت که استفاده از کمیتهای مختلط در تحلیل حالت پایدار سینوسی ما را به روشهایی رهنمون می‌شود که خیلی ساده‌تر از آنهایی است که شامل کمیتهای حقیقی خالص هستند . ما باید انتظار داشته باشیم که یک تابع تحریک مختلط تولید یک پاسخ مختلط بنماید و حتی می‌توانیم گمان کنیم که قسمت حقیقی تابع تحریک تولید قسمت حقیقی پاسخ را نموده در حالیکه قسمت موهومی تابع تحریک هم قسمت موهومی پاسخ را ایجاد خواهد کرد . هدف ما در این قسمت این است که ثابت کنیم (و یا حداقل نشان دهیم) که این گمانها صحیح می‌باشند .

بیایید ابتدا مسئله را با عباراتی نسبتاً کلی بیان کنیم و روشی را که می‌توانیم به‌وسیله آن ادعاهایمان را برای ایجاد یک شبکهٔ کلی و تحلیل آن به‌وسیله یک دسته معادله ثابت کنیم، ارایه نمائیم . در شکل ۱ ـ ۹ یک منبع سینوسی $V_m \cos(\omega t + \theta)$ (۱) به شبکهٔ کلی وصل شده است

شکل ۱ ـ ۹: تابع تحریک سینوسی $V_m \cos(\omega t + \theta)$ پاسخ سینوسی پایدار $I_m \cos(\omega t + \phi)$ را ایجاد می‌کند.

---

۱ - در ضمیمهٔ ٤ تعریف اعداد مختلط و روابط مربوطه و نیز توصیف عملیات حسابی بر روی اعداد مختلط آمده است ضمناً اتحاد اولر و فرم‌نمایی و قطبی هم ذکر شده است.

(که به‌طور اختیاری آن را غیرفعال فرض کنیم تا بعداً استفاده از اصل جمع اثرها پیچیده نباشد).
یک پاسخ جریان را در شاخهٔ دیگری از شبکه باید تعیین کنیم.

پارامترهای ظاهر شده در معادلهٔ (۱) همگی کمیتهای حقیقی هستند.

بحثی که در فصل ۸ دربارهٔ تعیین پاسخ ناشی از یک تابع تحریک سینوسی به‌وسیلهٔ فرض نمودن یک فرم سینوسی دلخواه با دامنه و فاز اختیاری به‌عمل آمد، نشان می‌دهد که می‌توان پاسخ را به‌صورت (۲) $I_m \cos(\omega t + \varphi)$. بیان نمود. یک تابع تحریک سینوسی همواره یک پاسخ اجباری سینوسی در یک مدار خطی ایجاد می‌کند.

حال بیایید مبنای زمانی خود را با انتقال فاز تابع تحریک به اندازهٔ ۹۰°، شیفت دهیم و یا لحظهٔ $t = ۰$ را عوض کنیم. بنابراین تابع تحریک عبارت خواهد بود از:

$$V_m \cos(\omega t + \varphi - ۹۰°) = V_m \sin(\omega t + \varphi) \qquad (۳)$$

که اگر آن را به همان مدار اعمال کنیم پاسخ زیر را ایجاد خواهد کرد:

$$I_m \mathrm{Cos}(\omega t + \varphi - ۹۰°) = I_m \sin(\omega t + \varphi) \qquad (٤)$$

در مرحلهٔ بعدی باید از واقعیات فیزیکی کمی جدا شویم و یک تابع تحریک موهومی را هم به مدار اعمال کنیم (البته این تابع تحریک را در آزمایشگاه نمی‌توان ایجاد نمود ولی به‌طور ریاضی می‌توان آن را اعمال نمود.)

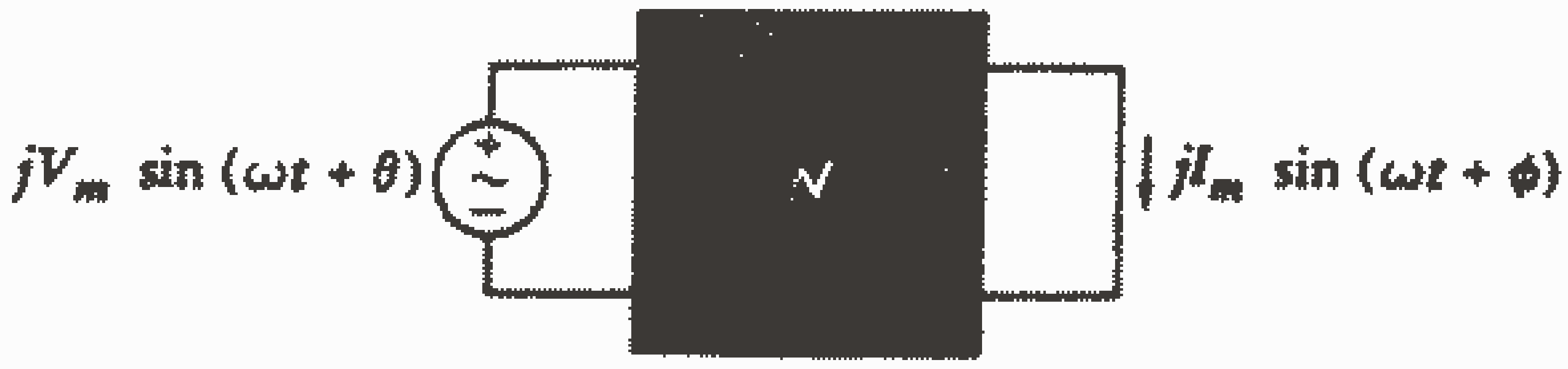
به‌طور خیلی ساده می‌توانیم یک منبع موهومی را با ضرب کردن مقدار آن منبع، که در رابطهٔ (۳) ظاهر شده است، در اپراتور موهومی ایجاد کنیم. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$jV_m \sin(\omega t + \theta) \qquad (۵)$$

پاسخ چه خواهد بود؟ اگر ما مقدار منبع را دو برابر کرده بودیم، آنگاه اصل خطی بودن ایجاب می‌کرد که پاسخ هم دو برابر شود و به‌طور کلی اگر تابع تحریک را در مقدار ثابت K ضرب کنیم پاسخ هم در ثابت K ضرب خواهد شد و این واقعیت که این مقدار ثابت، اپراتور موهومی j می‌باشد موضوع فوق را نقض نمی‌کند ولو اینکه در تعریف و بحث قبلی‌مان دربارهٔ خطی بودن به‌طور اخص ثابتهای مختلط را نگنجانده بودیم. اکنون به‌طور واقع بینانه‌تری می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که بحث ما اعداد مختلط را مستثنی نمی‌کرد و به‌طور کلی در مورد آنها هم صادق است. بنابراین پاسخ ناشی از منبع موهومی رابطه (۵) به صورت:

$$jI_m \mathrm{Sin}(\omega t + \varphi) \qquad (۶)$$

می‌باشد، منبع موهومی و پاسخ آن در شکل ۲-۹ نشان داده شده است.



شکل ۲ ـ ۹: تابع تحریک سینوسی موهومی $jV_m \sin(\omega t + \theta)$ که در شبکهٔ شکل ۱ ـ ۹ پاسخ سینوسی موهومی $jI_m \sin(\omega t + \phi)$ را ایجاد می‌کند.

همانطور که ملاحظه کردید ما یک منبع حقیقی اعمال کرده و یک پاسخ حقیقی به‌دست آورده‌ایم و همچنین یک منبع موهومی اعمال کرده و پاسخ موهومی به‌دست آورده‌ایم، حال می‌توانیم با استفاده از قضیه جمع آثار پاسخ ناشی از تابع تحریک مختلط را که مجموع توابع تحریک حقیقی و موهومی است به‌دست آوریم. البته کاربرد اصل جمع آثار به‌وسیله خطی بودن مدار کاملاً میسر است و بستگی به فرم توابع تحریک ندارد. بنابراین مجموع توابع تحریک (۱) و (۵) یعنی:

$$V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta) \qquad (۷)$$

باید تولید پاسخی بنماید که مجموع (۲) و (۶) می‌باشد، یعنی:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi) \qquad (۸)$$

منبع و پاسخی مختلط را می‌توان به طور ساده‌تر با استفاده از اتحاد اولر بیان نمود. بنابراین منبع معادلهٔ (۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} \qquad (۹)$$

و همچنین پاسخ (۸) عبارت خواهد بود از:

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)} \qquad (۱۰)$$

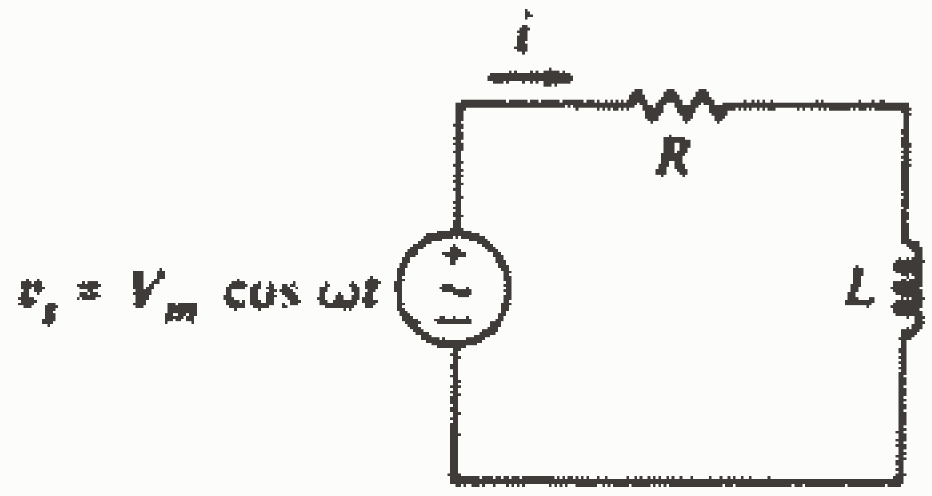
منبع و پاسخ مختلط در شکل ۳ـ۹ نشان داده شده است.

شکل ۳ ـ ۹: تابع تحریک مختلط $V_m e^{j(\omega t + \theta)}$ پاسخ مختلط $I_m e^{j(\omega t + \phi)}$ را در مدار شکل ۱ ـ ۹ تولید می‌کند.

چند نتیجهٔ مهم از مثال کلی فوق به‌دست می‌آید یک تابع تحریک حقیقی، موهومی و یا مختلط به ترتیب تولید یک پاسخ حقیقی، موهومی و یا مختلط می‌کند، به‌علاوه یک تابع تحریک مختلط را با استفاده از اتحاد اولر و قضیه جمع آثار می‌توان به‌صورت مجموع یک تابع تحریک حقیقی و موهومی دانست که قسمت حقیقی پاسخ مختلط به‌وسیله قسمت حقیقی تابع تحریک مختلط و قسمت موهومی آن هم به وسیله قسمت موهومی تابع تحریک تولید می‌شود.

به جای اینکه یک تابع تحریک حقیقی را برای به‌دست آوردن پاسخ حقیقی مطلوب اعمال کنیم، تابع تحریک مختلطی را که قسمت حقیقی آن پاسخ حقیقی مورد نظر باشد، به کار می‌بریم. به این ترتیب معادلات انتگرال دیفرانسیلی توصیف‌کنندهٔ پاسخ حالت پایدار یک مدار تبدیل به معادلات جبری ساده می‌گردند.

اجازه دهید این ایده را بر روی مدار سری RL ساده در شکل ٤-٩ پیاده کنیم. در این مدار منبع حقیقی $V_m \cos \omega t$ اعمال شده است و پاسخ حقیقی $i(t)$ مطلوب می‌باشد.



شکل ٤ ـ ٩: یک مدار ساده در حالت پایدار سینوسی که به وسیله اعمال یک تابع تحریک مختلط مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

ابتدا تابع مختلطی را که با استفاده از اتحاد اولر، تابع تحریک حقیقی را به دست می‌دهد، ایجاد می‌کنیم. چون $\cos \omega t = \mathrm{Re}\, e^{j\omega t}$ پس منبع مختلط مورد نظر عبارت است از: $V_m e^{j\omega t}$ پاسخ مختلط حاصله را بر حسب یک دامنهٔ مجهول I_m و یک زاویه فاز مجهول ϕ بیان می‌کنیم: $I_m e^{j(\omega t+\phi)}$ معادلهٔ دیفرانسیل این مدار را می‌نویسیم: $Ri + L\frac{di}{dt} = v_s$ و روابط مختلط مربوط به i, v_s را در آن داخل می‌کنیم:

$$RI_m e^{j(\omega t+\phi)} + L\frac{d}{dt}\left(I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right) = V_m e^{j\omega t}$$

پس از محاسبهٔ مشتق داریم:

$$RI_m e^{j(\omega t+\phi)} + j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)} = V_m e^{j\omega t}$$

$e^{j\omega t}$

حال برای تعیین φ, I_m طرفین معادله را بر عامل مشترک $e^{j\omega t}$ تقسیم می‌کنیم:

$$RI_m e^{j\phi} + j\omega L I_m e^{j\phi} = V_m \qquad (11)$$

از سمت چپ معادله فاکتور گیری می‌کنیم:

$$I_m e^{j\phi}(R + j\omega L) = V_m$$

و پس از مرتب کردن داریم:

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{R + j\omega L}$$

حال اگر سمت راست معادله را به صورت فرم نمایی یا قطبی نمایش دهیم می‌توانیم φ, I_m را تعیین کنیم:

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j[-\tan^{-1}(\omega L/R)]} \qquad (12)$$

$$\rightarrow \ I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad , \ \phi = -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

پاسخ مختلط به‌وسیله رابطهٔ (۱۲) به‌دست می‌آید و چون φ, I_m به‌سادگی تعیین می‌شوند، می‌توانیم رابطهٔ مربوط به $i(t)$ را فوراً بنویسیم. با استفاده از یک روش دشوار می‌توانیم پاسخ حقیقی $i(t)$ را با وارد کردن عامل $e^{j\omega t}$ در طرفین رابطهٔ (۱۲) و به دست آوردن قسمت حقیقی آن با استفاده از فرمول کارساز اولر، پیدا کنیم. بنابراین داریم:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

که با پاسخ به‌دست آمده برای همین مدار در فصل قبلی (معادلهٔ ٤-۸) موافقت دارد.

با وجوداینکه یک مسئله حالت پایدار سینوسی را با اعمال یک تابع تحریک مختلط و به‌دست آوردن یک پاسخ مختلط با موفقیت حل کرده‌ایم، اما هنوز مزیت نمایش به‌صورت مختلط را به‌طور تمام و کمال ارایه نکرده‌ایم. برای انجام این کار باید مفهوم منبع مختلط را یک مرحله فراتر ببریم و کمیتی به‌نام «فیزور» را تعریف کنیم.

تمرین

۱ ـ ۹ ـ (اگر کسی در حل این تمرین مشکل داشته باشد، باید ضمیمهٔ ٤ را مطالعه کند).

در قسمتهای (a) ، (b) محاسبات را انجام داده و نتیجه را به فرم قائم بیان کنید:

(a) $8\angle 35^\circ - 5e^{-j100}$ (b) $[4/3 - j2] + 1/j3$. در حالات (c) ، (d) محاسبات را

انجام داده و نتیجه را به فرم قطبی بیان کنید: (c) $2/5\angle{-120^\circ} - j8$ (d) $(4 + j3)\, e^{j(200t - 50^\circ)}$ در لحظهٔ $t = 4\,\text{ms}$.

جواب: $5\angle{132,7^\circ}$ ، $10,24\angle{-97^\circ}$ ، $0,923 + j0,282$ ، $7,42 + j9,51$

۲ ـ ۹ ـ با فرض اینکه از قرارداد علامت غیرفعال استفاده شده باشد در موارد زیر کمیت مختلط کل را به دست آورید: (a) جریان حاصله از اعمال ولتاژ، $60e^{j(500t - 50^\circ)}\,\text{V}$ به مدار موازی متشکل از مقاومت $20\,\Omega$ و خازن $0,1\,\text{mF}$. (b) ولتاژ حاصله از اعمال جریان مختلط $5e^{j(500t + 90^\circ)}\,\text{A}$ به اتصال سری مقاومت $3\,\Omega$ و سلف $2\,\text{mH}$.

جواب: $4/24e^{j(500t-5^\circ)}\ \text{A}$ ، $15/81e^{j(500t-108,4^\circ)}\ \text{V}$

۳ - ۹ فیزور

یک ولتاژ یا جریان سینوسی در فرکانس مشخصی را می‌توان فقط با دو پارامتر (یک دامنه و یک زاویه فاز) مشخص نمود. فرم مختلط ولتاژ یا جریان را هم با همین دو پارامتر می‌توان مشخص نمود. مثلاً فرم سینوسی فرض شده برای پاسخ جریان در مثال فوق عبارت بود از:

$$I_m \cos(\omega t + \phi)$$

و نمایش این جریان به فرم مختلط عبارت است از: $I_m e^{j(\omega t + \phi)}$

که اگر ϕ, I_m تعیین شوند، جریان دقیقاً مشخص می‌شود. در هر مدار خطی که در حالت پایدار سینوسی در فرکانس منفرد ω کار می‌کند، هر جریان یا ولتاژ را می‌توان با دانستن دامنه و زاویهٔ فاز آن، کاملاً مشخص نمود. به‌علاوه، فرم مختلط هر ولتاژ و جریان حاوی عامل $e^{j\omega t}$ یکسانی خواهد بود که این عامل زائد می‌باشد زیرا برای همهٔ کمیتها یکسان است و اطلاعات مفیدی را در بر ندارد. البته مقدار فرکانس را می‌توان با بررسی یکی از این عاملها تشخیص داد، اما بسیار ساده‌تر است که مقدار فرکانس را کنار مدار بنویسیم و برای همیشه از اطلاعات اضافی و زائد در سرتاسر مسئله اجتناب کنیم. بنابراین می‌توانیم منبع ولتاژ و پاسخ جریان این مثال را با بیان خلاصهٔ آنها به شکل زیر ساده نماییم: $I_m e^{j\phi}$ ، $V_m e^{j0}$ یا V_m

این کمیتهای مختلط را معمولاً به عوض فرم‌نمایی به‌صورت فرم قطبی می‌نویسند تا هم راحت‌تر باشد و هم در وقت صرفه‌جویی شود. بنابراین ولتاژ منبع $v(t) = V_m \cos \omega t$ را به صورت فرم مختلط $V_m\angle{0^\circ}$ و پاسخ جریان $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ به فرم $I_m\angle{\phi}$ می‌باشد.

این نمایش مختلط اختصاری را فیزور[1] می‌نامند. بیایید مراحلی را که به‌وسیلهٔ آن یک

---

۱ - بر خلاف تصور عامه، فیزور به‌وسیله کاپیتان کرک 'بدع' نشده است.

جریان یا ولتاژ سینوسی حقیقی به فرم فیزور تبدیل می‌شود، مرور کنیم و سپس قادر خواهیم بود فیزور را به طور روشن‌تری تعریف نموده و نمادی برای نمایش آن وضع کنیم.

جریان سینوسی حقیقی ($i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$) به‌صورت قسمت حقیقی یک کمیت مختلط با استفاده از اتحاد اولر تعریف می‌شود، یعنی: $i(t) = \mathrm{Re}\,(I_m e^{j(\omega t + \phi)})$ پس با حذف Re جریان مذکور به صورت یک کمیت مختلط بیان می‌شود که یک مؤلفه موهومی هم بدون اینکه بر مؤلفه حقیقی تأثیر داشته باشد به آن اضافه شده است. اختصار بیشتر با حذف عامل $e^{j\omega t}$ حاصل می‌شود: $\mathbf{I} = I_m e^{j\phi}$

که آن را هم به فرم قطبی می‌نویسیم: $\mathbf{I} = I_m \angle \phi$ این نمایش اختصاری مختلط را فیزور می‌نامیم که چون کمیتی است مختلط، با حروف چاپی ضخیم و پررنگ نمایش داده می‌شود. برای نمایش فیزوری یک کمیت الکتریکی از حروف بزرگ استفاده می‌شود زیرا فیزور یک تابع لحظه‌ای از زمان نیست و فقط حاوی اطلاعات مربوط به دامنه و فاز می‌باشد. ما این تفاوت را با نامیدن $i(t)$ به‌عنوان نمایش در حوزهٔ زمان و $\mathbf{I}$ به‌عنوان نمایش حوزهٔ فرکانس مشخص می‌کنیم. باید توجه داشت که بیان حوزهٔ فرکانسی یک ولتاژ یا جریان به‌طور صریح شامل فرکانس نمی‌باشد، البته می‌توانیم اینطور فکر کنیم که فرکانس به‌قدری در حوزه فرکانس اساسی می‌باشد که نیازی به ذکر آن نیست و به خاطر واضح و مسلم بودن این واقعیت دیگری نیازی به ذکر فرکانس نیست و از نوشتن آن به طور صریح خودداری می‌شود.[1]

روندی را که به‌وسیلهٔ آن $i(t)$ را به $\mathbf{I}$ تبدیل می‌کنیم، تبدیل فیزوری از حوزهٔ زمان به حوزهٔ فرکانس نامیده می‌شود. مراحل ریاضی تبدیل از حوزهٔ زمان به حوزهٔ فرکانس به‌شرح زیر می‌باشند:

۱ ـ تابع سینوسی $i(t)$ داده شده در حوزهٔ زمان را به‌صورت یک تابع کسینوس با یک زاویهٔ فاز بنویسید. مثلاً، $\sin \omega t$ را باید به‌صورت $\cos(\omega t - 90^\circ)$ نوشت.

۲ ـ موج کسینوسی را با استفاده از اتحاد اولر به‌صورت قسمت حقیقی یک کمیت مختلط بیان کنید.

۳ ـ Re را حذف کنید.

۴ ـ $e^{j\omega t}$ را حذف کنید.

---

۱ - همانگونه که در این کشور، پستهای محلی بسیار قلیلی وجود دارند که در آدرس خود «U.S.A» را ذکر کرده باشند.

در عمل بسیار ساده‌تر است که مستقیماً از مرحلهٔ اول به جواب جهش کنیم (با استخراج دامنه و فاز موج سینوسی از رابطهٔ حوزهٔ زمان آن). مراحل چهارگانهٔ فوق فقط به جهت تکمیل شدن بحث از نظر تکنیکی، ارائه شده است. به‌عنوان یک مثال، ولتاژ حوزهٔ زمان $v(t) = ۱۰۰ \ Cos(۴۰۰t - ۳۰^\circ)$ را به حوزهٔ فرکانس تبدیل می‌کنیم. فرم حوزهٔ زمان خودش به شکل موج کسینوسی با یک زاویهٔ فاز می‌باشد و تبدیل مفصل از حوزهٔ زمان به حوزهٔ فرکانس با گرفتن قسمت حقیقی از نمایش مختلط شروع می‌شود:

$$v(t) = Re(۱۰۰e^{j(۴۰۰t - ۳۰)})$$

و سپس Re ، $e^{j\omega t}$ را حذف می‌کنیم: $\mathbf{V} = ۱۰۰\angle -۳۰^\circ$

البته بسیار ساده‌تر است که از فرم حوزهٔ زمان مقادیر ۱۰۰ و ۳۰- را مشخص کنیم. به‌طریق مشابه، جریان حوزهٔ زمان $i(t) = ۵ \ Sin(۳۷۷t + ۱۵۰^\circ)$ به صورت فیزوری $\mathbf{I} = ۵\angle ۶۰^\circ$ در می‌آید.

قبل از اینکه تحلیل مدارهای حالت پایدار سینوسی را مورد بررسی قرار دهیم، لازم است که تبدیل معکوس از حوزهٔ فرکانس به حوزهٔ زمان را بیاموزیم. روش کار دقیقاً معکوس مراحلی است که در بالا آمده است. بنابراین مراحل دقیق تبدیل از حوزهٔ فرکانس به حوزهٔ زمان به‌شرح زیر است:

۱ - جریان فیزوری $\mathbf{I}$ را که در حوزهٔ فرکانس به‌صورت قطبی داده شده است به‌فرم مختلط نمایی بنویسید.

۲ ـ حاصل را در عامل $e^{j\omega t}$ ضرب کنید.

۳ ـ اپراتور Re را به کار برید.

۴ ـ فرم حوزهٔ زمان را با استفاده از اتحاد اولر به‌دست آورید. رابطهٔ کسینوسی به‌دست آمده را، در صورت تمایل، با اضافه نمودن ۹۰° به آرگومان می‌توان به‌صورت سینوسی در آورد.

یک بار دیگر یادآور می‌شویم که ما باید قادر باشیم بدون مراحل ریاضی، میان بر زده و با استفاده از دامنه و زاویهٔ فاز فرم قطبی، رابطهٔ حوزهٔ زمان را به‌دست آوریم. بنابراین اگر ولتاژ فیزوری $\mathbf{V} = ۱۱۵\angle -۴۵^\circ$ را داشته باشیم می‌توانیم مستقیماً معادل حوزهٔ زمان آن را به‌صورت $v(t) = ۱۱۵ \ cos(\omega t - ۴۵^\circ)$ به‌دست آوریم و همین ولتاژ به‌صورت موج سینوسی عبارت است از: $v(t) = ۱۱۵ \ sin(\omega t + ۴۵^\circ)$.

قبل از کاربرد فیزورها در تحلیل مدارهای حالت پایدار سینوسی می‌توانیم با مراجعه به مثال مدار RL سری مرور سریعی بر روشهای مذکور داشته باشیم. معادلهٔ رابطهٔ (۱۱) را یک‌بار دیگر

می‌نویسیم:

$$RI_m e^{j\theta} + j\omega L\ I_m e^{j\theta} = V_m$$

اگر برای جریانها از فیزور $\mathbf{I} = i_m \angle \theta$ و برای ولتاژ از فیزور $\mathbf{V} = v_m \angle 0^\circ$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$R\mathbf{I} + j\omega L\,\mathbf{I} = \mathbf{V}$$

و یا: (۱۳)

$$(R + j\omega L)\,\mathbf{I} = \mathbf{V}$$

که این معادله یک معادلهٔ مختلط جبری می‌باشد که در آن ولتاژ و جریان به فرم فیزوری بیان شده‌اند. این معادله فقط کمی پیچیده‌تر از قانون اهم برای یک مقاومت منفرد می‌باشد. بار دیگر که خواستیم این مدار را تحلیل کنیم، با معادلهٔ (۱۳) کارمان را آغاز خواهیم کرد.

تمرین:

۳ ـ ۹ ـ هر یک از جریانهای زیر را به‌صورت یک فیزور بیان کنید:

$8\ \sin(\omega t - 20^\circ)$ A (a) ، $6\ \sin\omega t - 2\cos\omega t$ A (b)

$4\ \cos(\omega t - 80^\circ) - 3\ \sin(\omega t + 30^\circ)$ (c)

جواب: $8\angle -110^\circ$ ، $6{,}32\angle -108{,}4^\circ$ A ، $1{,}564\angle -121{,}0^\circ$ A

۴ ـ ۹ ـ اگر $f = 60\,Hz$، مقدار لحظه‌ای ولتاژی را که به‌صورت فیزوری زیر نمایش داده شده است در لحظهٔ $t = 1ms$ پیدا کنید:

$120\angle 0^\circ$ V (a) ، $80 + j75$ V (b) ، $50 + 80\angle 70^\circ$ V (c)

جواب: ۱۱۱٫۶ V ، ۴۶٫۸ ، ۴۴٫۳

۴ – ۹ – روابط فیزوری برای C,L,R

اکنون که قادر به تبدیل از حوزهٔ زمان به حوزهٔ فرکانس و برعکس گشته‌ایم، ساده کردن تحلیل مدارات حالت پایدار سینوسی را با معرفی روابط فیزوری ولتاژ و جریان برای هر یک از سه عنصر غیرفعال شروع می‌کنیم. این کار را با معادلهٔ تعریف‌کنندهٔ هر عنصر آغاز نموده و رابطهٔ حوزهٔ زمان آن را نوشته و سپس جریان و ولتاژ را به‌صورت کمیتهای مختلط در نظر خواهیم گرفت. پس از حذف $e^{j\omega t}$ از طرفین معادله، رابطهٔ مطلوب بین فیزور جریان و فیزور ولتاژ ظاهر خواهد گشت.

ساده‌ترین حالت مربوط به مقاومت می‌باشد، که طبق شکل 5a - ۹ معادلهٔ تعریف‌کنندهٔ آن عبارت است از:

$$v(t) = Ri(t) \qquad (۱۴)$$

حال ولتاژ مختلط را به کار می‌بریم:

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta) \qquad (۱۵)$$

و فرض می‌کنیم که پاسخ جریان مختلط به‌صورت زیر باشد:

$$I_m e^{j(\omega t+\phi)} = I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi) \qquad (۱۶)$$

و سپس خواهیم داشت:

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = RI_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

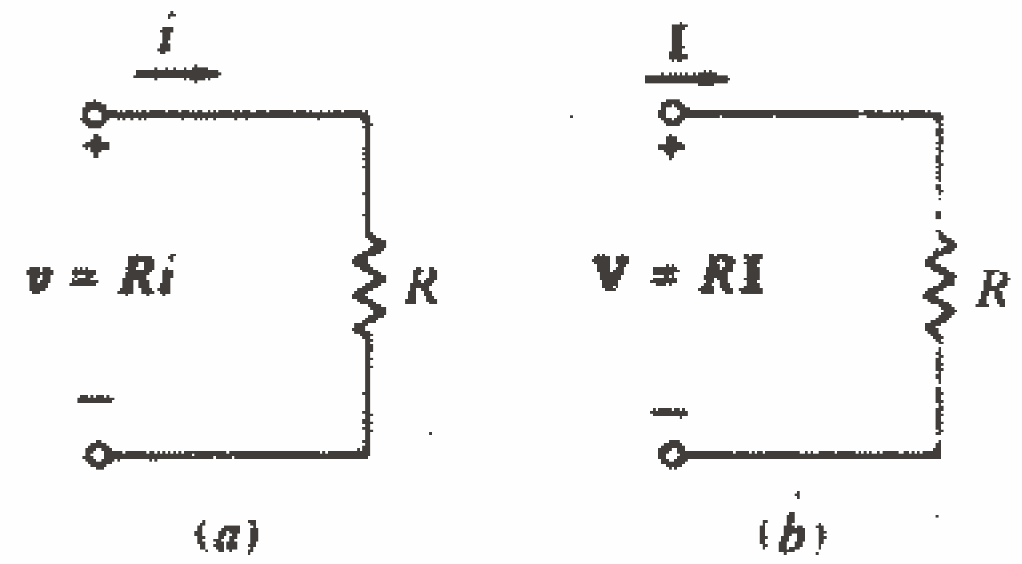
پس از تقسیم طرفین بر $e^{j\omega t}$ (و یا حذف $e^{j\omega t}$ از دو طرف)، خواهیم داشت:

$$V_m e^{j\theta} = RI_m e^{j\phi}$$

و یا به‌فرم قطبی: $V_m\underline{/\theta} = RI_m\underline{/\phi}$ اما $V_m\underline{/\theta}$, $I_m\underline{/\phi}$ صرفاً بیان‌کنندهٔ فیزورهای ولتاژ و جریان **I,V** می‌باشند، بنابراین داریم:

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \qquad (۱۷)$$

رابطه ولتاژ ـ جریان یک مقاومت در حالت فیزوری دارای همان شکل رابطهٔ ولتاژ جریان در حوزهٔ زمان می‌باشد. معادلهٔ تعریف‌کننده در حالت فیزوری در شکل 5b-۹ نشان داده شده است.



شکل ۵ ـ ۹: یک مقاومت و ولتاژ و جریان مربوطهٔ آن در: (a) حوزهٔ زمان، (b) حوزهٔ فرکانس. V = RI

تساوی زاویه‌های φ,θ مشهود است و در نتیجه جریان و ولتاژ هم فاز می‌باشند.

به‌عنوان مثالی برای کاربرد روابط حوزهٔ زمان و فرکانس، ولتاژ

$8\ \mathrm{Cos}(100t - 50°)\mathrm{V}$ را در دو سر یک مقاومت 4Ω در نظر می‌گیریم. در حوزهٔ زمان جریان عبارت است از:

$$i(t) = v(t)/R = 2\ \mathrm{Cos}(100t - 50°)$$

فرم فیزوری همان ولتاژ عبارت است از: $8\underline{/-50°}\mathrm{V}$ و بنابراین داریم:

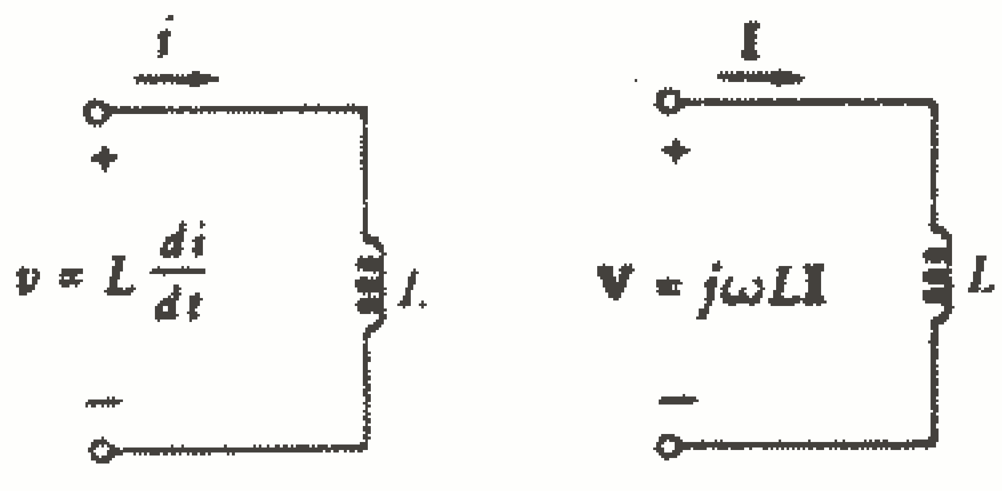
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R} = 2\underline{/-50°}\quad \mathrm{A}$$

اگر همین رابطه را به حوزهٔ زمان بر گردانیم، بدیهی است که همان رابطهٔ قبلی برای جریان به‌دست می‌آید.

بدیهی است که تحلیل یک مدار مقاومتی در حوزهٔ زمان هیچ گونه صرفه‌جویی در وقت و کار ارائه نمی‌کند و در واقع در اینگونه مدارها به جای اینکه یک بار تبدیل به حوزهٔ فرکانس انجام داده و پس از حل مسئله دوباره به حوزهٔ زمان بر گردیم، بهتر است از همان ابتدا مسئله را در حوزهٔ زمان حل کنیم. این امر در مورد مدارهایی که علاوه بر مقاومت شامل یک سلف و یا یک خازن هم هستند صادق نیست مگر اینکه پیچیدگی مسئله استفاده از یک کامپیوتر دیجیتال را ایجاب کند.

حال بیایید به سلف بپردازیم. مدار حوزهٔ زمان در شکل ۶a-۹ نشان داده شده است و معادلهٔ تعریف‌کنندهٔ آن در حوزهٔ زمان عبارت است از:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{18}$$



(a) (b)

شکل ۶ ـ ۹: یک سلف و ولتاژ جریان آن: (a) در حوزهٔ زمان $v = L\,di/dt$. (b) در حوزهٔ فرکاسن $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$.

بعد از جایگذاری معادلهٔ ولتاژ مختلط (۱۵) و معادلهٔ جریان مختلط (۱۶) در معادلهٔ (۱۸)، خواهیم داشت:

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = L\frac{d}{dt}\left(I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right)$$

و پس از محاسبهٔ مشتق داریم:

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

حال در معادلهٔ فوق عامل $e^{j\omega t}$ را حذف می‌کنیم:

$$V_m e^{j\theta} = j\omega L I_m e^{j\phi}$$

و به این ترتیب رابطهٔ فیزوری مطلوب به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \qquad (۱۹)$$

ملاحظه می‌کنیم که معادلهٔ دیفرانسیل حوزهٔ زمان یعنی معادلهٔ (۱۸) تبدیل به یک معادلهٔ جبری در حوزهٔ فرکانس شده است. رابطهٔ فیزوری در شکل 6b-۹ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که زاویهٔ عامل $j\omega L$ دقیقاً $+۹۰°$ است و در نتیجه $\mathbf{I}$ باید در یک سلف به اندازهٔ $۹۰°$ عقب‌تر از $\mathbf{V}$ باشد.

به منظور تجسم و توضیح رابطهٔ فیزوری ولتاژ $۸ \angle -۵۰° V$ رادرفرکانس $\omega = ۱۰۰ \, rad/s$ به یک سلف 4H وصل می‌کنیم. از رابطهٔ (۱۹) جریان فیزوری عبارت است از:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = \frac{8\angle -50^\circ}{j100(4)} = -j0.02\angle -50^\circ \quad \rightarrow \mathbf{I} = 0.02\angle -140^\circ \quad A$$

این پاسخ را می‌توانیم در حوزهٔ زمان هم به‌سادگی به‌دست آوریم ولی اگر یک مقاومت و یا خازن هم با سلف مورد نظر ترکیب شود مسئله در حوزهٔ زمان به‌سادگی حل نخواهد شد. آخرین عنصری که باید مورد بررسی قرار دهیم خازن می‌باشد. تعریف خازن به‌صورت رابطهٔ آشنای زیر می‌باشد:

$$i(t) = C \, dv(t)/dt \qquad (۲۰)$$

باز هم اگر بخواهیم رابطهٔ معادل رابطهٔ (۲۰) را در حوزهٔ فرکانس به‌دست آوریم، $v(t)$ و $i(t)$ را با کمیتهای مختلط (۱۵) و (۱۶) جایگزین می‌کنیم و پس از محاسبه مشتق و حذف $e^{j\omega t}$ خواهیم داشت:

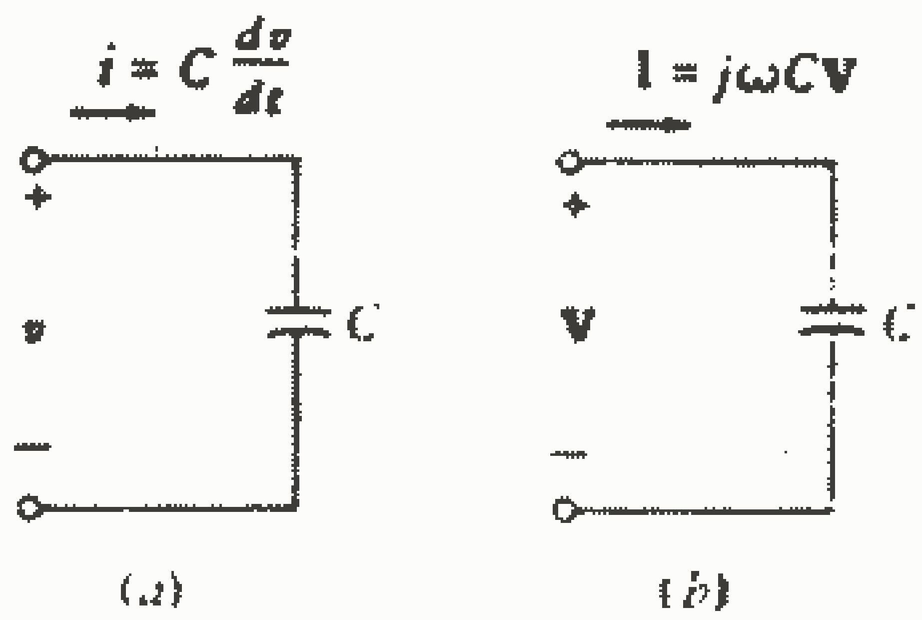
$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} \qquad (۲۱)$$

بنابراین در خازن $\mathbf{I}$ به اندازهٔ $۹۰°$ از $\mathbf{V}$ جلوتر است. البته این مطلب به معنای این نیست که پاسخ جریانی به اندازهٔ یک ربع پریود زودتر از ولتاژ ایجاد کنندهٔ آن وجود دارد! ما در حال مطالعهٔ پاسخ حالت پایدار هستیم و در می‌یابیم که ماکزیمم جریان حاصله به‌وسیلهٔ ولتاژ فزاینده $۹۰°$ زودتر از ماکزیمم ولتاژ واقع می‌شود.

اگر ولتاژ فیزوری $8\angle -50^\circ$ V به یک خازن 4F در فرکانس $\omega = ۱۰۰ \, rad/s$ اعمال

شود ، جریان فیزوری عبارت خواهد بود از: $\mathbf{I} = j100(4)(8\angle -50^\circ) = 3200\angle 40^\circ$ A دامنهٔ جریان به‌طور اغراق آمیزی بزرگ است اما باید توجه داشت که خازن مورد نظر هم دارای مقدار بزرگ و غیرواقعی می‌باشد ، به‌طوریکه اگر بخواهیم یک خازن ۴F را با دو صفحهٔ تخت که به‌فاصلهٔ ۱mm با عایق هوا مقابل هم قرار گرفته باشند بسازیم، هر صفحه باید دارای مساحتی معادل ۸۵۰۰۰ برابر یک میدان فوتبال[1] باشد.

نمایش حوزهٔ زمان و حوزهٔ فرکانس در شکلهای ۷a,b-۹ مقایسه شده‌اند.



شکل ۷ ـ ۹: (a) روابط حوزهٔ زمانی و (b) روابط حوزهٔ فرکانس بین ولتاژ و جریان خازن.

تاکنون روابط V-I را برای هر سه عنصر غیرفعال به‌دست آورده‌ایم و این نتایج را در جدول ۱ ـ ۹ خلاصه کرده‌ایم که روابط حوزهٔ زمان v-i و حوزهٔ فرکانس V-I در ستونهای مجاور درج شده‌اند. همهٔ معادلات فیزوری، جبری و خطی می‌باشند و روابط مربوط به سلف و خازن شباهت زیادی به قانون اهم دارند که ما آنها را به همان ترتیبی که قانون اهم را به کار می‌بریم، مورد استفاده قرار خواهیم داد.

جدول ۱ ـ ۹: مقایسه و خلاصه‌ای از روابط بین v و i در حوزهٔ زمان و V و I در حوزهٔ فرکانس برای R و L و C.

Time domain		Frequency domain	
	$v = Ri$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$	
	$v = L\frac{di}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$	
	$v = \frac{1}{C}\int i\,dt$	$\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}$	

[1] - با در نظر گرفتن منطقه حاشیه‌ای (زون) دو انتهای زمین

قبل از این کار باید نشان دهیم که فیزورها در دو قانون کیرشوف صدق می‌کنند. قانون ولتاژ کیرشوف در حوزهٔ زمان عبارت است از:

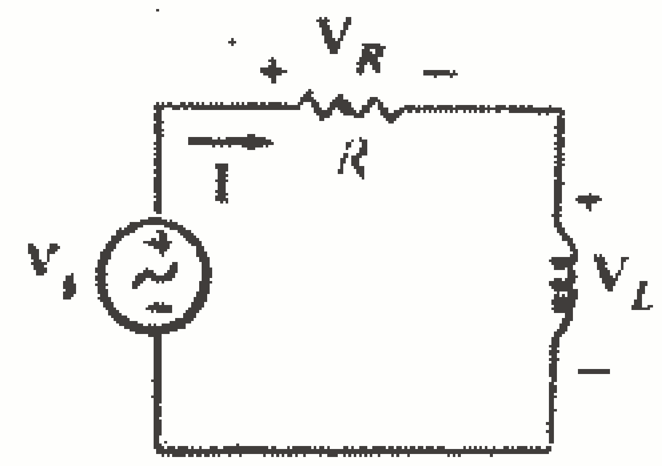
$$v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_N(t) = 0$$

حال با استفاده از اتحاد اولر هر ولتاژ حقیقی را با ولتاژ مختلطی که دارای همان قسمت حقیقی باشد جایگزین می‌کنیم و پس از حذف $e^{j\omega t}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_n = 0$$

به‌طریق مشابهی می‌توان مطلب فوق را در مورد قانون جریان کیرشوف هم نشان داد.

حال بیایید مدار سری RL را که قبلاً چندین بار مورد بررسی قرار داده‌ایم، به‌طور خلاصه مرور کنیم. این مدار در شکل ۸-۹ نشان داده شده است و یک جریان فیزوری و چند ولتاژ فیزوری مشخص شده‌اند. ما می‌توانیم پاسخ مطلوب‌مان را (یک جریان در حوزهٔ زمان) ابتدا با پیدا کردن جریان فیزوری، به‌دست آوریم. روش کار مشابه چیزی است که در تحلیل اولین مدار تک حلقه‌ای مقاومتی به کار بردیم.



شکل ۸ ـ ۹: مدار RL سری با یک منبع ولتاژ فیزوری.

با استفاده از قانون ولتاژ کیرشوف داریم:

$$\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = \mathbf{V}_s$$

و با توجه به روابط V−I که جدیداً برای عناصر به‌دست آوردیم، خواهیم داشت:

$$R\,\mathbf{I} + j\omega L\,\mathbf{I} = \mathbf{V}_s$$

سپس جریان فیزوری را بر حسب ولتاژ منبع $\mathbf{V}_s$ به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{I} = \mathbf{V}_s/R + j\omega L$$

حال دامنهٔ ولتاژ را V_m و زاویه فاز را $0°$ فرض می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$\mathbf{I} = \frac{V_m\angle 0°}{R + j\omega L}$$

سپس جریان فوق را ابتدا به‌فرم قطبی می‌نویسیم:

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

و پس از طی مراحل آشنای ذکر شده در قبل، به‌سادگی می‌توانیم همان نتایجی را که در قسمت ۳-۸ و در معادلهٔ (٤) با مراحل سخت‌تری به‌دست آمد، کسب کنیم.

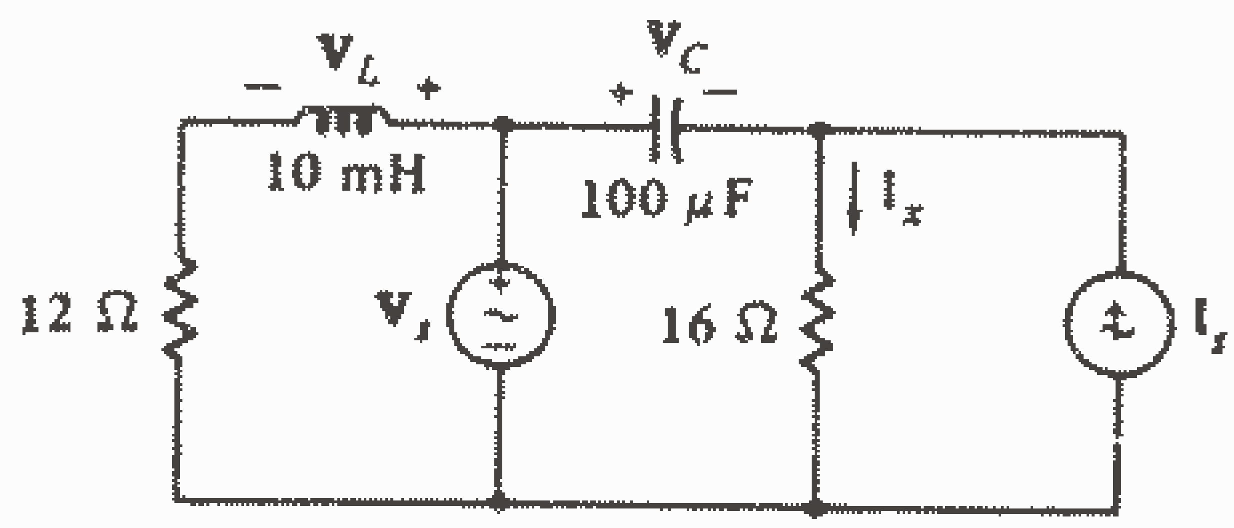
تمرین

۵ ـ ۹ ـ در شکل ۹-۹ فرض کنید،

$\omega = 800$ rad/s ، $\mathbf{V}_L = 66\angle 57^\circ$ V ، $\mathbf{V}_C = 50\angle -85^\circ$ V و سپس مقادیر زیر را پیدا کنید:

(a) $\mathbf{V}_s$ ، (b) $\mathbf{I}_s$ ، (c) $i_x(t)$

جواب: $119.0\angle 0.7^\circ$ V ، $4.27\angle 41.9^\circ$ V ، $7.85\cos(800t + 24.1^\circ)$ A



شکل ۹ ـ ۹: به تمرین ۵ ـ ۹ مراجعه کنید.

۵ ـ ۹ ـ امپدانس

روابط ولتاژ ـ جریان برای سه عنصر غیرفعال در حوزهٔ فرکانس (با فرض برقرار بودن قرارداد علامت غیرفعال) عبارتند از:

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

اگر این معادلات را به‌صورت نسبت ولتاژ به جریان فیزوری بنویسیم:

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C}$$

در می‌یابیم که این نسبتها در مورد سلف و خازن توابع ساده‌ای از مقدار عنصر و فرکانس می‌باشند. ما با این نسبتها درست مانند مقاومت رفتار می‌کنیم به‌جز اینکه آنها کمیتهای مختلط هستند و همهٔ عملیات جبری باید آنهایی باشند که مناسب برای اعداد مختلط می‌باشند.

نسبت ولتاژ فیزوری به جریان فیزوری به‌صورت امپدانس تعریف می‌کنیم و با علامت

$\mathbf{Z}$ نمایش می دهیم. امپدانس یک کمیت مختلط است و دارای دیمانسیون اهم می باشد. امپدانس یک فیزور نیست و نمی‌توان به‌وسیله ضرب کردن در عامل $e^{j\omega t}$ و گرفتن قسمت حقیقی آن را به حوزهٔ زمان تبدیل کرد. در عوض، ما یک سلف را در حوزهٔ زمان با ضریب خودالقایی L و در حوزهٔ فرکانس با امپدانس آن یعنی $j\omega L$ نمایش می‌دهیم و همچنین خازن در حوزهٔ زمان دارای ظرفیت C بوده و در حوزه فرکانس امپدانس آن $1/j\omega c$ می باشد. امپدانس متعلق به حوزه فرکانس است و مفهومی که جزئی از حوزهٔ زمان باشد، نیست.

صادق بودن قوانین کیرشوف در حوزهٔ فرکانس این امکان را می‌دهد که به‌سادگی نشان دهیم امپدانسها را دقیقاً مانند مقاومتها می‌توان به‌طور سری و موازی ترکیب نمود. مثلاً در فرکانس $\omega = 10^4\ Rad/_s$ یک سلف $5mH$ سری با یک خازن $100\mu F$ را می‌توان با یک امپدانس منفرد که عبارت از مجموع هر یک از امپدانسهای سلف و خازن می‌باشد، جایگزین نمود. امپدانس سلف عبارت است از: $\mathbf{Z}_L = j\omega L = j50\Omega$ و امپدانس خازن برابر است با: $\mathbf{Z}_c = 1/j\omega c = -j1\Omega$ بنابراین امپدانس کل ترکیب سری فوق چنین خواهد بود: $\mathbf{Z}_{eq} = j50 - j1 = j49\ \Omega$ امپدانس سلف و خازن تابعی است از فرکانس، بنابراین امپدانس معادل فوق فقط در فرکانس مورد نظر $\omega = 10000$ صادق است و در فرکانس $\omega = 5000$ مقدار آن برابر است با: $\mathbf{Z}_{eq} = j23\Omega$ ترکیب موازی دو امپدانس مذکور در فرکانس $\omega = 10^4$ برابر است با حاصلضرب آنها تقسیم بر مجموعشان، یعنی:

$$\mathbf{Z}_{eq} = (j50)(-j1)/j50-j1 = 50/j49 = -j\ 1{,}02\Omega$$

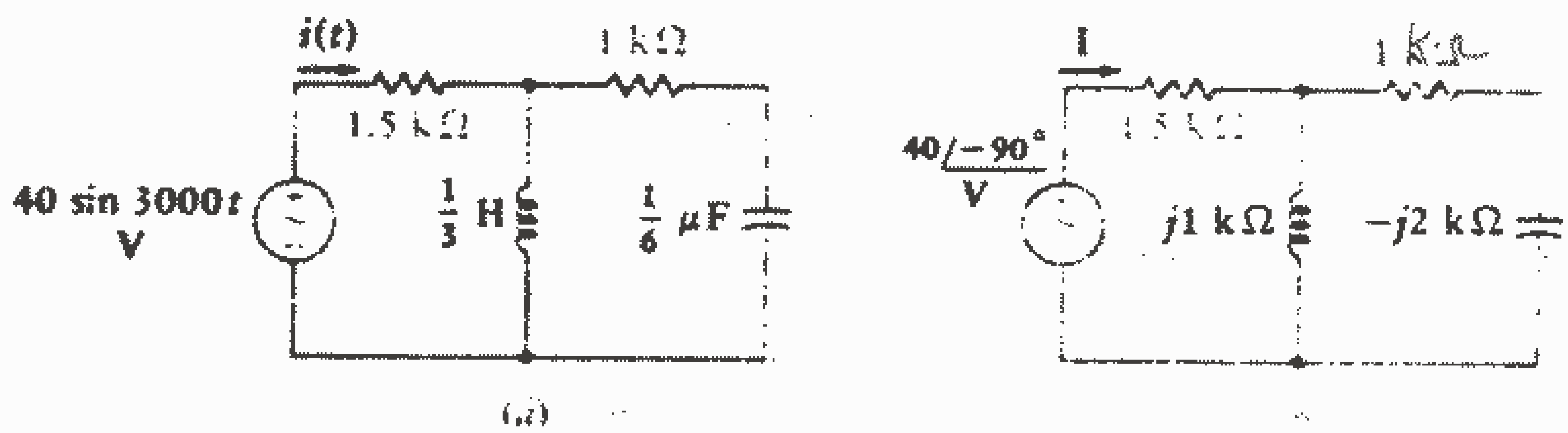
در فرکانس $\omega = 5000$ امپدانس معادل اتصال موازی برابر است با: $-j2{,}17\Omega$ عدد مختلطی را که نمایانگر امپدانس می‌باشد می‌توان به‌فرم قطبی یا قائم نمایش داد. مثلاً امپدانس $100\underline{/-60^\circ}$ در حالت قطبی را می‌توان اینگونه توصیف نمود که دارای اندازهٔ امپدانس 100Ω و زاویهٔ فاز -60° می‌باشد در حالیکه همین امپدانس در حالت قائم یعنی $50 - j86{,}6$ را می‌گوئیم که دارای مؤلفهٔ مقاومتی و یا مقاومت 50Ω و مؤلفهٔ مقاومتی عبارت است از قسمت حقیقی امپدانس و مؤلفه راکتیو همان مؤلفهٔ موهومی امپدانس می‌باشد (البته بدون اپراتور موهومی j).

باید توجه داشت که مؤلفهٔ مقاومتی امپدانس الزاماً برابر با مقاومت موجود در مدار نمی‌باشد. مثلاً یک مقاومت 20Ω سری با یک سلف $5H$ در فرکانس $\omega = 4$ دارای یک امپدانس معادل $\mathbf{Z} = 20 + j20\Omega$ می‌باشد که در فرم قطبی عبارت‌است‌از $28/3\underline{/45^\circ}$ که‌البته در این حالت مؤلفهٔ مقاومتی امپدانس، به‌دلیل اینکه شبکه مورد نظر یک اتصال سری ساده

می‌باشدو برابر است با مقاومت موجود در مدار. اما اگر همین دو عنصر را به‌طور موازی اتصال دهیم، امپدانس معادل برابر خواهد بود با $20(j20)/(20+j20) = 10 + j10\Omega$ که مؤلفهٔ مقاومتی امپدانس اکنون عبارت از 10Ω می‌باشد.

علامت اختصاری بخصوصی برای دامنهٔ امپدانس و زاویهٔ فاز اختصاص نیافته است و فرم کلی یک امپدانس را در حالت قطبی می‌توان به‌صورت $\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}|\underline{/\theta}$ نمایش داد. در حالت قائم، مؤلفهٔ مقاومتی را با R و مؤلفهٔ راکتیو را با X نمایش می‌دهند. بنابراین داریم: $\mathbf{Z} = R + jX$

حال بیایید از مفهوم امپدانس برای تحلیل مدار RLC شکل ۹-۱۰a استفاده کنیم. این مدار در حوزهٔ زمان نشان داده شده است و پاسخ جریان $i(t)$ در حوزهٔ زمان مطلوب می‌باشد. با وجود این بایستی تحلیل را در حوزهٔ فرکانس انجام داد. بنابراین مدار را در حوزهٔ فرکانس رسم می‌کنیم که منبع آن پس از تبدیل به حوزهٔ فرکانس برابر با $40\underline{/-90^\circ}$ V و پاسخ آن در حوزهٔ فرکانس عبارت از $\mathbf{I}$ و امپدانسهای سلف و خازن در فرکانس $\omega = 3000$ به ترتیب برابر با $j1$, $-j2K\Omega$ می‌باشند. مدار حوزهٔ فرکانس در شکل ۹-۱۰b نمایش داده شده است.



شکل ۱۰ ـ ۹: (a) یک مدار RLC که پاسخ اجباری سینوسی $i(t)$ در آن مطلوب می‌باشد. (b) مدار معادل حوزهٔ فرکانس برای مدار مورد نظر در فرکانس $\omega = 3000$ Rad/s

اکنون امپدانس معادلی را که منبع می‌بیند محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{Z}_{eq} = 1.5 + \frac{(j1)(1-j2)}{j1+1-j2} = 1.5 + \frac{2+j1}{1-j1}$$
$$= 1.5 + \frac{2+j1}{1-j1}\,\frac{1+j1}{1+j1} = 1.5 + \frac{1+j3}{2}$$
$$= 2 + j1.5 = 2.5\underline{/36.9^\circ}\ \ \mathrm{k}\Omega$$

بنابراین جریان فیزوری عبارت است از :

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{40\angle -90^\circ}{2.5\angle 36.9^\circ} = 16\angle -126.9^\circ \quad \text{mA}$$

پس از تبدیل جریان به حوزهٔ زمان، پاسخ مطلوب به‌دست می آید :

$$i(t) = ۱۶ \ \text{Cos}(۳۰۰۰t - ۱۲۶٫۹^\circ)\text{mA}$$

اگر جریان خازن مطلوب باشد، باید در حوزهٔ فرکانس از تقسیم جریان استفاده کنیم.

قبل از اینکه شروع به نوشتن معادلات زیاد در حوزهٔ زمان یا حوزهٔ فرکانس بکنیم، لازم است که اکیداً از نوشتن معادلاتی که قسمتی از آنها در حوزهٔ زمان و قسمتی در حوزهٔ فرکانس است اجتناب کنیم. یکی از نشانه‌های ارتکاب چنین اشتباهی، وجود یک عدد مختلط و متغیر t در یک معادله می‌باشد، البته به‌جز حالتی که $e^{j\omega t}$ وجود داشته باشد.

مثلاً در معادلهٔ

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{40\angle -90^\circ}{2.5\angle 36.9^\circ} = 16\angle -126.9^\circ \quad \text{mA}$$

هرگز معادلاتی به‌صورت زیر را ننویسید :

(هرگز! هرگز! هرگز!)

$$i(t) = \frac{40 \sin 3000t}{2.5\angle 36.9^\circ}$$

و یا

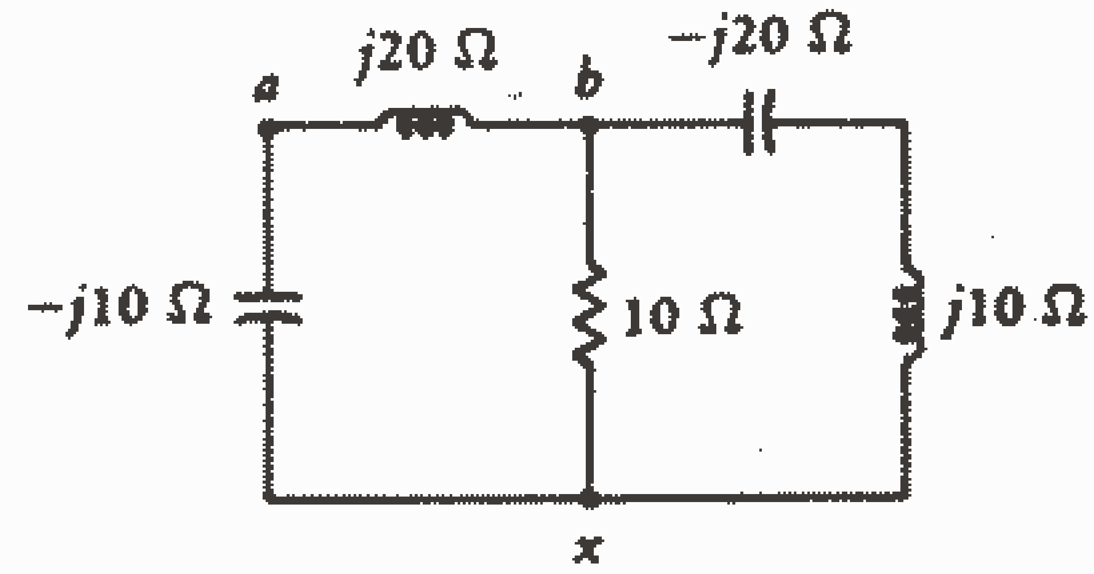
$$i(t) = \frac{40 \sin 3000t}{2 + j1.5}$$

تمرین

۶ ـ ۹ ـ در مدار شکل ۱۱-۹ امپدانس ورودی بین نقاط زیر را پیدا کنید :

a − b (c) , b − x (b) , a − x (a)

جواب: ۴۰ − j۲۰ , ۱۰ + j۰ , ۱۰ − j۲۰Ω



شکل ۱۱ ـ ۹: به تمرین ۶ ـ ۹ مراجعه کنید.

۷ ـ ۹ ـ اگر مکان سلف و خازن در مدار شکل ۱۰-۹ تعویض شود، دامنهٔ ولتاژ دو سر هر یک از چهار عنصر مداری را به‌دست آورید.

جواب: V ۱۷٫۱۴ ، ۲۲٫۹ ، ۱۶٫۱۶ ، ۱۶٫۱۶

۶-۹- آدمیتانس

درست مانند هدایت (عکس مقاومت) که کمیت مفیدی در تحلیل مدارهای مقاومتی می‌باشد، معکوس امپدانس هم در تحلیل حالت پایدار سینوسی یک مدار RLC کلی، کار را تا حدودی آسان می‌کند. آدمیتانس $\mathbf{Y}$ یک عنصر مداری را به‌صورت نسبت جریان فیزوری به ولتاژ فیزوری تعریف می‌کنیم (البته با فرض اینکه قرارداد علامت غیرفعال برقرار باشد):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{I}/\mathbf{V}$$

و در نتیجه

$$\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$$

قسمت حقیقی آدمیتانس را هدایت G و قسمت موهومی آن را سوسپتانس B، می‌نامند. بنابراین:

$$\mathbf{Y} = G + jB = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R + jX} \qquad (۲۲)$$

معادلهٔ (۲۲) را باید با دید موشکافانهٔ دقیقی مورد توجه قرار دهیم و به یاد داشته باشیم که این معادله بیان نمی‌دارد که قسمت حقیقی آدمیتانس برابر با معکوس قسمت حقیقی امپدانس و قسمت موهومی آدمیتانس برابر با معکوس قسمت موهومی امپدانس می‌باشد. آدمیتانس، هدایت و سوسپتانس همگی با مهو اندازه‌گیری می‌شوند. به‌عنوان مثال امپدانس $\mathbf{Z} = 1 - j2\Omega$ را که می‌توان به‌صورت یک مقاومت 1Ω سری با یک خازن $0/1\mu F$ در فرکانس $\omega = 5M\ rad/_s$ تصور نمود، دارای آدمیتانس زیر می‌باشد:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{1 - j2} = \frac{1}{1 - j2}\,\frac{1 + j2}{1 + j2} = 0.2 + j0.4 \quad \mho$$

بدیهی است که آدمیتانس معادل یک شبکهٔ متشکل از چند شاخهٔ موازی، برابر است با مجموع آدمیتانس‌های هر یک از شاخه‌ها. بنابراین مقدار عددی آدمیتانس فوق را می‌توان از یک هدایت $0/2\ \mho$ که موازی با یک سوسپتانس مثبت $0/4\mho$ می‌باشد به دست آورد، که اولی را می‌توان با یک مقاومت 5Ω و دومی را با یک خازن $0/08\mu F$ در فرکانس $\omega = 5M\ rad/_s$ نمایش داد (زیرا آدمیتانس یک خازن $j\omega c$ می‌باشد).

به عنوان چک کردن تحلیل فوق، امپدانس مدار اخیر (یعنی یک مقاومت ۵Ω به‌طور سری با یک خازن ۸μF% در فرکانس (ω = ۵M rad/s) را محاسبه می‌کنیم. امپدانس معادل، مانند قبل، عبارت است از:

$$\mathbf{Z} = \frac{5(1/j\omega C)}{5 + 1/j\omega C} = \frac{5(-j2.5)}{5 - j2.5} = 1 - j2 \quad \Omega$$

این دو مدار فقط ۲ تا از بی‌نهایت مداری هستند که دارای آدمیتانس و امپدانس مذکور در فرکانس مورد نظر می‌باشند. آنها همچنین تنها مدارهای دو عنصری هستند که مشخصات مذکور را دارا می‌باشند. بنابراین می‌توان آنها را ساده‌ترین مدارهایی دانست که دارای امپدانس ۱-j۲Ω و آدمیتانس ۰٫۲ + j۰٫۴℧ در فرکانس ω = ۵ × ۱۰^۶ rad/s می‌باشند. کلمهٔ «امیتانس» که ترکیبی است از کلمات «امپدانس» و «آدمیتانس» گاهی اوقات به‌عنوان یک اصطلاح کلی برای هر دو مفهوم امپدانس و آدمیتانس به کار می‌رود. مثلاً بدیهی است که اگر ولتاژ فیزوری دو سر یک امیتانس را بدانیم می‌توانیم جریان آن را محاسبه نماییم.

تمرین

۸ ـ ۹ ـ آدمیتانسهای زیر را به‌صورت قائم پیدا کنید:

(a) شبکه‌ای که امپدانس آن برابر است با ۱۰۰ − j۱۶۰Ω

(b) ترکیب سری عناصر ۵۰Ω , ۲۰mH , ۲μF اگر ω = ۴K rad/s

(c) ترکیب موازی عناصر ۵۰Ω , ۲۰mH , ۲μF در فرکانس ۴K rad/s.

جواب: ۲۰ − j۴٫۵ , ۱۱٫۰۵ + j۹٫۹۴ , ۲٫۸۱ + j۴٫۴۹m℧

۹ ـ ۹ یک سلف ۱۵mH با ترکیب موازی مقاومت R و خازن ۲۰μF در فرکانس ω = ۱۰۰۰ Rad/s سری می‌باشد. (a) آدمیتانس شبکه را اگر R = ۸۰Ω باشد، پیدا کنید. (b) اگر Y = G − j۰/۰۲ ℧، مقدار R را پیدا کنید.

جواب: ۲۱Ω , ۲۳٫۸ + j۲۲٫۲m℧

مسائل

۱ ـ مقادیر زیر را به فرم قطبی پیدا کنید:

(a) ۵∠۲۷° − ۳∠۱۱۲° , (b) ۴∠۳۰°/۱ + ۲∠-۷۰° , (c) -۴ + j۵/۱ + j۰/۴

مقادیر خواسته شده در بندهای (d) , (c) را به فرم قائم به‌دست آورید:

(d) (۲∠۳۰° + ۱∠۶۰°)^۲ , (c) ۸e^{j۰/۵}

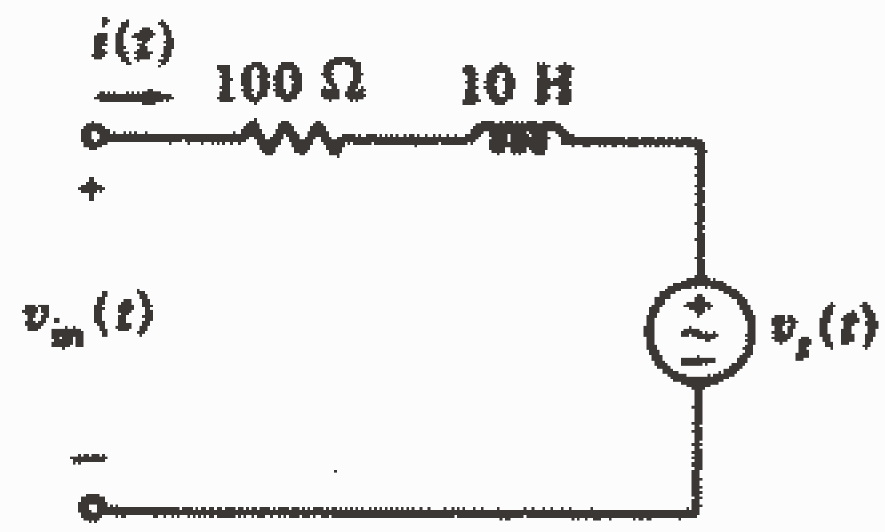
۲ ـ محاسبات (a) ، (b) را به‌فرم قطبی انجام دهید :

(a) $(۱/j)\,(۳۶\angle ۲۱^\circ) + ۱۹\angle -۱۰۸^\circ$ (b) $\sqrt{۸۰\angle ۸۳^\circ} + ۱۱j$.

محاسبات بندهای (c) ، (d) را در حالت قائم انجام دهید :

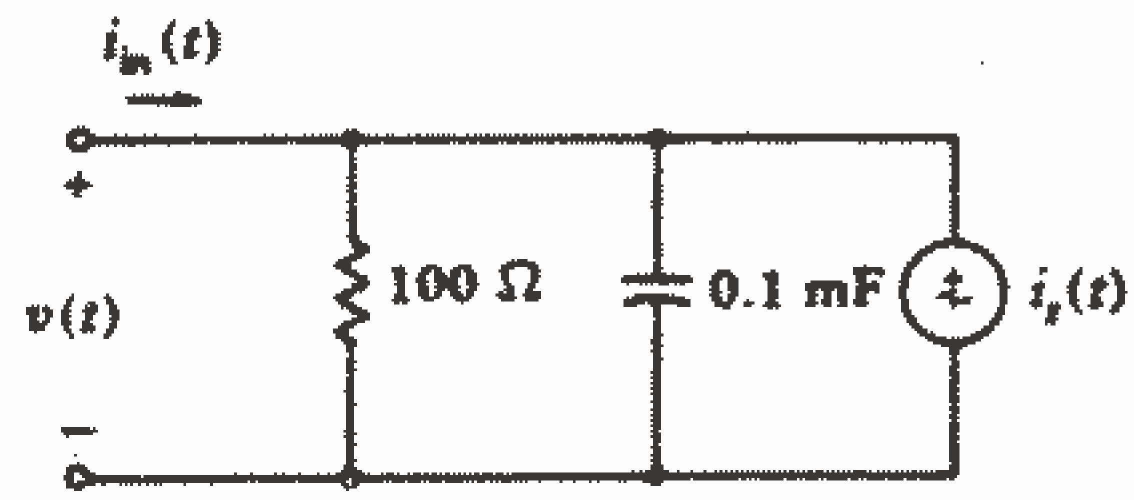
(c) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{7 - j3.1} + \dfrac{1}{4 + j9.2}}$ (d) $\mathrm{Re}[۶,۱۱\angle ۲۶^\circ] + I_m[۴,۱۸\angle -۹۹^\circ] + [۵,۵۰\angle ۴۱۲^\circ]$

۳ ـ در شکل ۱۲ـ۹ فرض کنید که $i(t)$ عبارت از جریان مختلط $۰,۸e^{j۲۰۰t}$ A و ولتاژ $v_s(t)$ برابر با $(۳۰ - j۴۰)e^{j۲۰۰t}$ V باشد و سپس ولتاژ ورودی مختلط $v_{in}(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۱۲ ـ ۹: به مسئله ۳ مراجعه کنید.

۴ ـ در مدار شکل ۱۳ـ۹ فرض کنید: $i_s(t) = j۲e^{j۵۰۰t}$ A ، $v(t) = ۲۴۰e^{j۵۰۰t}$ V و سپس $i_{in}(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۱۳ ـ ۹: به مسئله ۴ مراجعه کنید.

۵ ـ در یک شبکهٔ خطی، شبیه شکل ۱ ـ ۹، یک منبع ولتاژ سینوسی $v_s = ۴۰\ \mathrm{Cos}\,۱۰۰۰t$ V، پاسخ جریان $i_o = ۲,۵\ \mathrm{Cos}(۱۰۰۰t - ۲۴^\circ)$ A را ایجاد می‌کند. $i_o(t)$ را اگر $v_s(t)$ مقادیر زیر را داشته باشد، پیدا کنید :

(a) $۲۰\ \mathrm{Sin}\,۱۰۰۰t$ V ، (b) $۲۰\ \mathrm{Cos}(۱۰۰۰t - ۴۰^\circ)$ V ، (c) $۲۰e^{j۲۷^\circ}\,e^{j۱۰۰۰t}$ V

(d) $(۱۰ - j۶)e^{j۱۰۰۰t}$ V,

۶ ـ کمیتهای مذکور در بندهای (a) , (b) را به‌صورت یک فیزور بیان کنید:

$v(t) = ۱۶۵\ Cos(۱۲۰\pi t + ۳۰^\circ)\ V$ (a) , $i(t) = ۲\ Cos\ ۱۰^۶ t + ۳\ Sin ۱۰^۶ t\ mA$ (b)

مقادیر لحظه‌ای کمیتهای مذکور در بندهای (c) , (d) را به ازای $t = ۱ms$ پیدا کنید:

$\omega = ۴۰۰\ rad/_s$, $\mathbf{V} = ۴۰ - j۷۰\ V$, (d) $\mathbf{I} = -۸٫۱ - j۲٫۴\ A$, $f = ۶۰Hz$

۷ ـ فرض کنید $\mathbf{I} = ۱۰ \angle -۱۳۰^\circ\ A$, i را در لحظهٔ $t = ۱ms$ پیدا کنید اگر ω برابر مقادیر زیر باشد: (a) $۱۲۰۰\ rad/_s$, (b) $۶۰۰\ rad/_s$, (c) فرض کنید:

$i_۱ = ۵\ Cos(۱۰۰t + ۵۰^\circ)$, $i_۲ = ۴\ Cos۱۰۰t$, $i_۳ = ۳\ Sin(۱۰۰t + ۷۰^\circ)\ A$

$i_x = i_۱ + i_۲ + i_۳$. با تبدیل $i_۱$, $i_۲$, $i_۳$ به‌صورت فیزور، کمیتهای $\mathbf{I}_x$ و $i_x(t)$ را پیدا کنید.

۸ ـ اگر $\omega = ۲۰۰\ rad/_s$ باشد، مقدار لحظه‌ای کمیتهای زیر را در لحظهٔ $t = ۱ms$ پیدا کنید:

(a) $\mathbf{I} = ۲ \angle ۷۰^\circ\ A$, (b) $\mathbf{I} = ۴ - j۱A$.

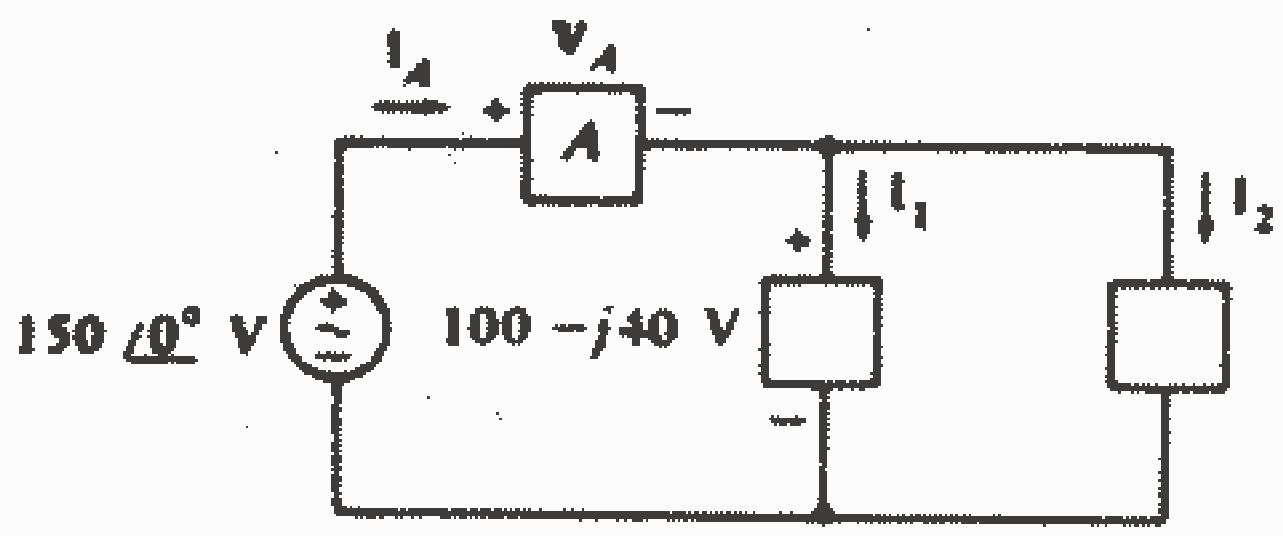
ولتاژ فیزوری متناظر با کمیتهای زیر را پیدا کنید:

(c) $v(t) = ۶\ Sin(۵۰۰t - ۵۰^\circ)\ V$, (d) $v(t) = -۳\ Cos۵۰t + ۶\ Sin۵۰t\ V$

(e) $V\ (۴۰^\circ - ۱۰۰t)Cos ۶- (۱۰۰^\circ - ۱۰۰t)Cos ۸$

۹ ـ در شکل ۱۴-۹ فرض کنید: $\mathbf{I}_۱ = ۶ + j۱\ A$, $\mathbf{I}_۲ = ۲ - j۵\ A$, $\omega = ۱K\ rad/_s$.

در لحظهٔ $t = ۲٫۵mS$ مقدار لحظه‌ای کمیتهای مذکور در بندهای (a) , (b) را پیدا کنید: (a) v_A , (b) i_A , (c) قدرتی که به‌وسیلهٔ عنصر A جذب می‌شود.



شکل ۱۴ ـ ۹: به مسئله ۹ مراجعه کنید.

۱۰ ـ یک جعبهٔ با نوار ارغوانی و زرد، حاوی یک منبع ولتاژ $\mathbf{V}_{s۱}$ و یک منبع جریان $\mathbf{I}_{s۲}$ می‌باشد. ولتاژ بین دو ترمینال قابل دسترس آن، $\mathbf{V}_{AB}$ می‌باشد. اگر $\mathbf{V}_{s۱} = ۱۰ \angle ۲۰^\circ\ V$ و

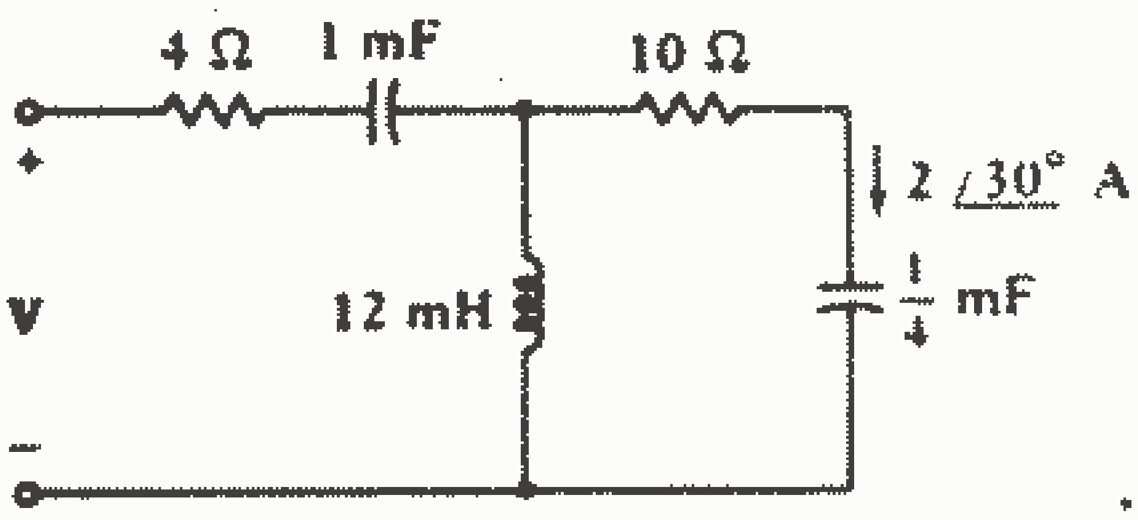
I_{s2} = ۰٫۲ ∠−۳۰° A آنگاه V_{AB} = −۵۰ + j۸۰ V.

و اگر V_{s1} = ۲۰ ∠−۸۰° V , I_{s2} = ۰٫۵ ∠۳۰° A آنگاه V_{AB} = ٤۰ + j٦۰ V.

حال اگر V_{s1} = ۱۰ − j۳۰ V , I_{s2} = ۰٫۳ − j۰٫۱A، مقدار V_{AB} را پیدا کنید.

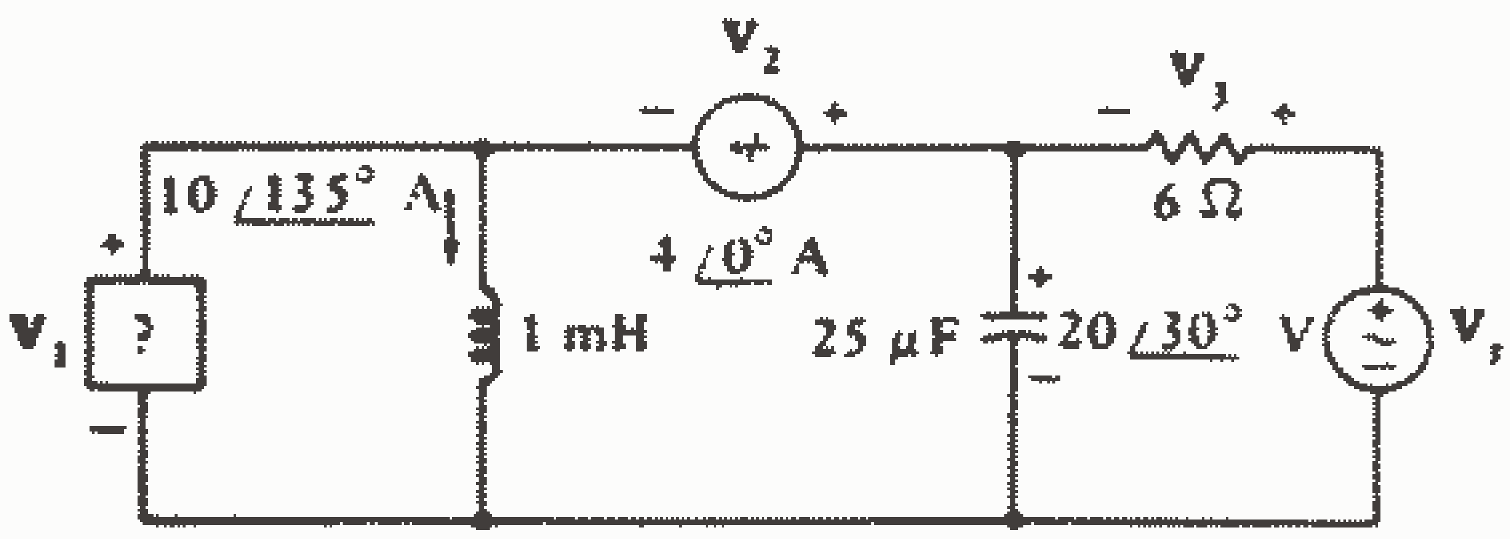
۱۱ ـ یک مقاومت R، یک سلف L و یک منبع ایده‌آل v_s = ۱۰۰ cos ωt V به‌طور سری می‌باشند. اگر ω = ۲۰۰ rad/s، آنگاه جریان فیزوری برابر خواهد بود با ۵. − j۲A. اگر ω = ٤۰۰ rad/s جریان فیزوری چقدر خواهد بود؟

۱۲ ـ در شکل ۱۵-۹ فرض کنید ω = ۵۰۰ rad/s و ولتاژ فیزوری **V** را پیدا کنید.



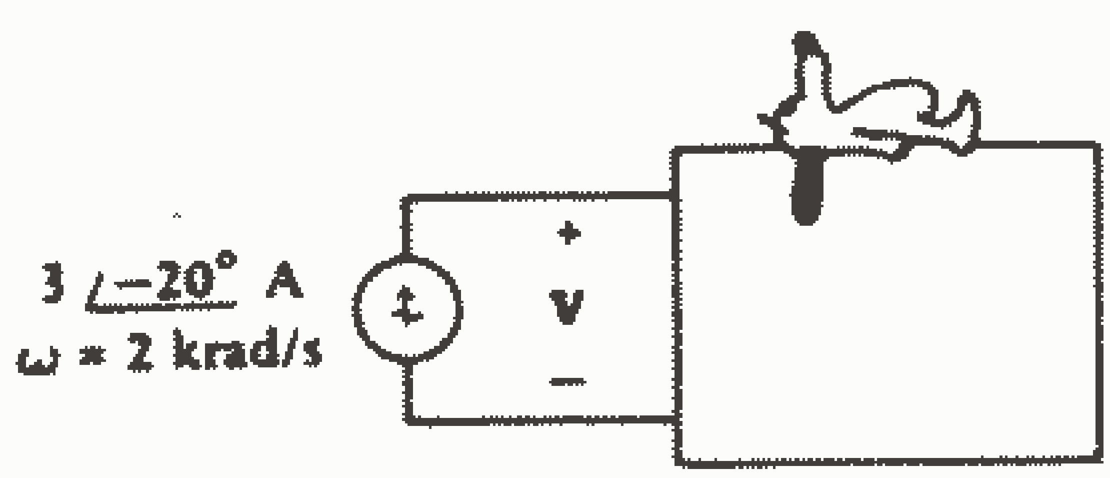
شکل ۱۵ ـ ۹: به مسائل ۱۲ و ۱٦ مراجعه کنید.

۱۳ ـ $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ را در مدار شکل ۱٦-۹ به ازای ω = ۵K rad/s پیدا کنید.



شکل ۱٦ ـ ۹: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

۱٤ ـ در شکل ۱۷-۹ مقدار **V** را پیدا کنید، اگر جعبه حاوی: (a) یک مقاومت ۸Ω به‌طور سری با یک سلف ۵mH باشد. (b) یک مقاومت ۸Ω به‌طور سری با یک خازن ۵۰μF باشد. (c) یک مقاومت ۸Ω و سلف ۵mH و خازن ۵۰μF به‌طور سری باشند. ω = ٤K rad/s.



شکل ۱۷ ـ ۹: به مسئله ۱٤ مراجعه کنید.

۱۵ ـ یک مقاومت ۲۰۰Ω و یک خازن $۲۵\mu F$ و یک سلف L به‌طور موازی می‌باشند. ولتاژ فیزوری دو سر این ترکیب برابر با $۱۰۰\angle ۰° \ V$ می‌باشد. (a) اگر جریانی که از ترمینال مثبت وارد می‌شود برابر $\mathbf{I} = ۰/۵ - j۲A$ ، $\omega = ۱K \ rad/_s$ مقدار L را پیدا کنید. (b) L را پیدا کنید اگر $\omega = ۱۰۰ \ rad/_s$ ، $|\mathbf{I}| = ۱A$.

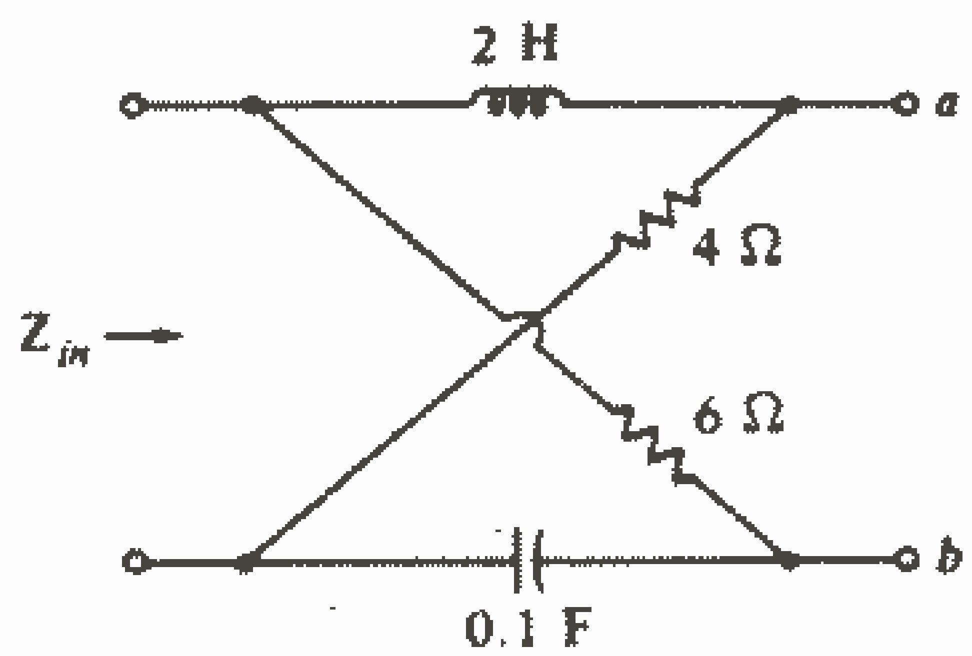
۱۶ ـ امپدانس ورودی مدار شکل ۱۵-۹ را به ازای $\omega = ۵۰۰ \ rad/_s$ پیدا کنید.

۱۷ ـ یک مقاومت ۲۰۰Ω و خازن $۲۵\mu F$ و سلف L به‌طور موازی می‌باشند. (a) امپدانس این ترکیب موازی را به ازای $\omega = ۱۰۰ \ rad/_s$ ، $L = ۱۰H$ پیدا کنید. (b) اگر دامنه امپدانس در $\omega = ۱۰۰ \ rad/_s$ برابر ۸۰Ω باشد، L را پیدا کنید. (c) به ازای چه مقدار ω، دامنهٔ امپدانس به ازای $L = ۱۰H$ برابر ۱۵۰Ω می‌شود؟

۱۸ ـ یک مقاومت $۲K\Omega$ با یک خازن $۴\mu F$ موازی می‌باشد. اگر امپدانس این ترکیب موازی برابر $\mathbf{Z}_{in}$ باشد، به ازای چه فرکانسی: (a) $|\mathbf{Z}_{in}| = ۱۵۰۰\Omega$؟ (b) زاویهٔ $\mathbf{Z}_{in}$ برابر $-۳۰°$ می‌شود؟ (c) $Re|\mathbf{Z}_{in}| = ۲۰۰\Omega$؟ (d) $|X_{in}| = ۴۰۰\Omega$؟

۱۹ ـ یک شبکهٔ دو ترمینالی دارای امپدانس ورودی $۵ - j۸\Omega$ در فرکانس $۴K \ rad/_s$ می‌باشد. چه سلفی باید با آن موازی شود تا امپدانس ورودی آن دارای مشخصات زیر باشد: (a) راکتانس صفر؟ (b) دامنهٔ ۴Ω؟

۲۰ ـ $\mathbf{Z}_{in}$ را در فرکانس $\omega = ۵ \ rad/_s$ برای شبکهٔ شکل ۱۸-۹ پیدا کنید، اگر ترمینالهای a-b: (a) مدار باز باشند. (b) اتصال کوتاه باشند.



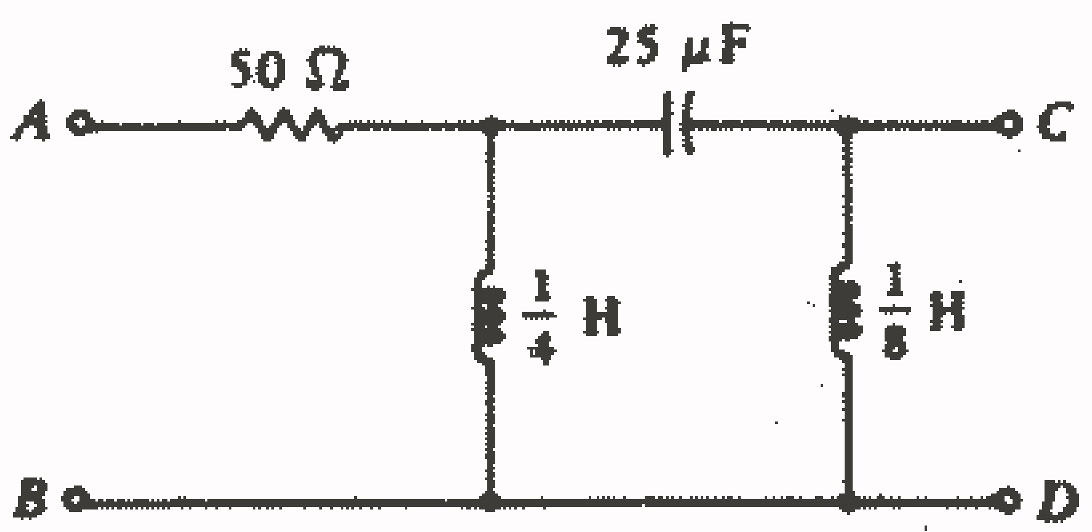
شکل ۱۸ ـ ۹: به مسئله ۲۰ مراجعه کنید.

۲۱ ـ یک مقاومت ۱۰Ω یک سلف $۲mH$ و یک خازن $۰/۲\mu F$ سری می‌باشند. امپدانس این اتصال سری، $\mathbf{Z}_{in}$ می‌باشد. (a) به ازای چه مقدار ω مقدار $\mathbf{Z}_{in}$ می‌نیمم می‌شود؟ (b) به ازای چه مقدار ω داریم: $|\mathbf{Z}_{in}| = ۲|\mathbf{Z}_{in}|_{min}$؟

۲۲ ـ یک مقاومت 2Ω و یک خازن $۰٫۵F$ به طور سری می‌باشند و یک سلف $۳H$ با این ترکیب به طور موازی می‌باشد. اگر امپدانس شبکهٔ موازی برابر با $Z_{in}(\omega) = R_{in}(\omega) + jX_{in}(\omega)$ باشد مقدار $R_{in}(\omega)$ ، $X_{in}(\omega)$ را پیدا کنید.

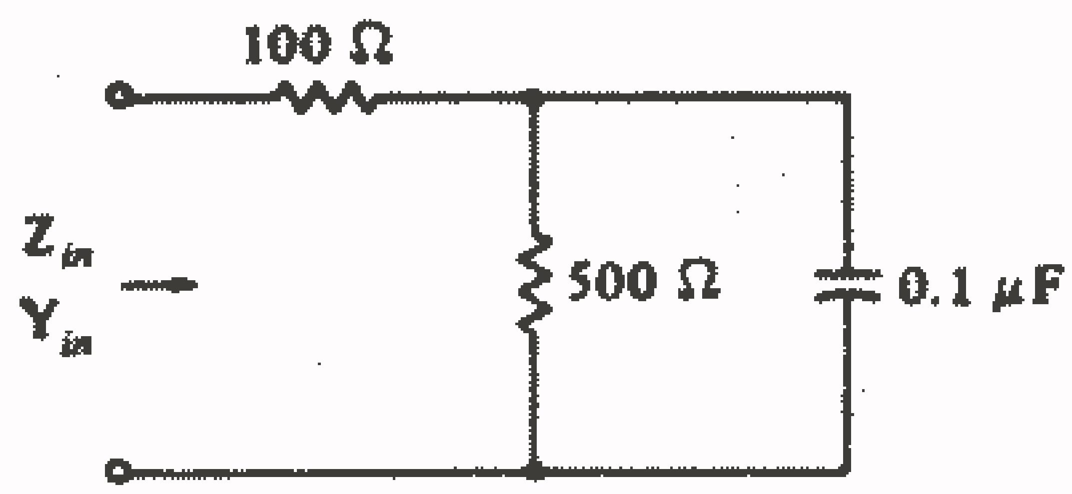
۲۳ ـ یک مقاومت ۱۰۰Ω با یک خازن $۱۰\mu F$ به‌طور سری می‌باشد. فرض کنید آدمیتانس این ترکیب سری برابر با $Y_{in} = G_{in} + jB_{in}$ باشد. در کدام فرکانس: (a) دامنهٔ Y_{in} برابر با $٤m\mho$ می‌شود؟ (b) دامنهٔ G_{in} برابر با $٤m\mho$ می‌شود؟ (c) دامنهٔ B_{in} برابر با $٤m\mho$ می‌شود؟

۲٤ ـ در مدار شکل ۱۹-۹ فرض کنید $\omega = ٤۰۰\ rad/_s$ ، و مقادیر زیر را پیدا کنید:
(a) امپدانسی که در ترمینالهای A − B دیده می‌شود اگر ترمینالهای c − D مدار باز باشند.
(b) آدمیتانسی که در ترمنیالهای c − D دیده می‌شود اگر ترمینالهای A − B اتصال کوتاه باشند.



شکل ۱۹ ـ ۹: به مسئله ۲٤ مراجعه کنید.

۲۵ ـ در مدار شکل ۲۰ـ۹ در کدام فرکانس: (a) $R_{in} = ۲۰۰\Omega$ ؟ (b) $X_{in} = -۲۰۰\Omega$ (c) $G_{in} = ۱/۲۰۰\mho$ ؟ (d) $B_{in} = ۱/۲٤۰\ \mho$



شکل ۲۰ ـ ۹: به مسئله ۲۵ مراجعه کنید.

۲٦ ـ سه آدمیتانس $Y_۱ = ۲ - j٤M\mho$ ، $Y_۲ = ٤ - j۱M\mho$ ، $Y_۳ = ۱ + j۳M\mho$ به‌طور سری می‌باشند و جریان $I = ۲۰\angle ٤۰^\circ \mu A$ از این ترکیب سری عبور می‌کند. دامنهٔ ولتاژ دو سر

هر آدمیتانس و ولتاژ دو سر کل ترکیب سری را به‌دست آورید.

۲۷ ـ آدمیتانس ترکیب موازی ۱۰۰Ω , $۰٫۲H$ در فرکانس $\omega = ۱۵۰۰\ rad/_s$ برابر با آدمیتانس ترکیب سری $L_۱$, $R_۱$ در همان فرکانس می‌باشد. (a) $L_۱$, $R_۱$ را پیدا کنید. (b) همان مقادیر را در فرکانس $\omega = ۵۰۰\ rad/_s$ پیدا کنید.

۲۸ ـ شبکه‌ای متشکل از اتصال موازی $۵K\Omega$, $۰٫۱H$, $۰٫۱\mu F$ داریم. (a) در چه فرکانسی آدمیتانس ورودی دارای حداقل دامنه می‌باشد؟ (b) در چه فرکانسی زاویهٔ فاز آدمیتانس ورودی برابر با $۴۵°$ می‌باشد؟ (c) در چه فرکانس زاویه فاز آدمیتانس ورودی برابر با $-۴۵°$ می‌باشد؟

فصل ۱۰

پاسخ حالت پایدار سینوسی

۱ ـ ۱۰ ـ مقدمه

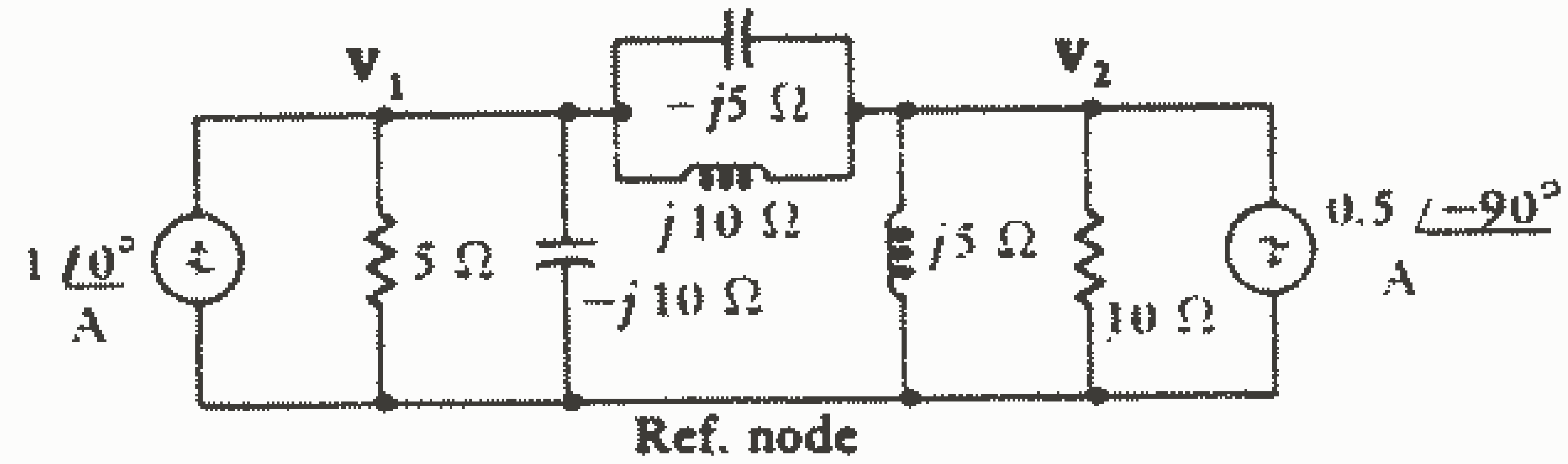
در فصل ۲ و بخصوص در فصل ۳ چند روش مفید برای تحلیل مدارهای مقاومتی آموختیم و اکنون صرفنظر از اینکه مدار مقاومتی هر قدر پیچیده باشد با استفاده از تحلیل گرهی، چشمه‌ای و حلقه‌ای و یا تکنیکهای جمع آثار و تبدیل منابع و قضایای تونن و نورتن قادر به تعیین پاسخ مطلوب مدار می باشیم. گاهی اوقات یک روش کافی است اما اغلب ترکیب چند روش برای به‌دست آوردن پاسخ، مناسب‌تر است. حال می‌خواهیم این تکنیکها را برای تحلیل مدارها در حالت پایدار سینوسی تعمیم دهیم و قبلاً هم دیده‌ایم که امپدانسها را مانند مقاومتها می‌توانیم ترکیب کنیم. قبلاً، تعمیم تکنیکهای مربوط به تحلیل مدارهای مقاومتی را بارها قول داده‌ایم و اکنون پی خواهیم برد که چرا این تعمیم، عاقلانه و موجه است.

۲ ـ ۱۰ ـ تحلیل گرهی، چشمه‌ای و حلقه‌ای

ابتدا بحث مربوط به تحلیل گرهی در یک مدار مقاومتی خالص N گرهی را مرور می‌کنیم. پس از تعیین یک گره مبنا و مشخص کردن متغیرهای ولتاژ بین هر یک از N-۱ گره باقیمانده و گره مبنا، قانون جریان کیرشوف را به هر یک از این N-۱ گره اعمال نمودیم و پس از کاربرد قانون اهم برای همهٔ مقاومتها، N-۱ معادله بر حسب N-۱ مجهول به‌دست آوردیم (البته اگر منابع ولتاژ و یا منابع وابسته در مدار وجود نمی‌داشت در غیراین‌صورت بسته به نوع منابع موجود باید معادلات اضافی هم نوشته می‌شد).

اکنون می خواهیم ببینیم که آیا روش مشابهی بر حسب فیزورها و امپدانسها در حالت پایدار

سینوسی وجود دارد؟ قبلاً دیدیم که هر دو قانون کیرشوف در مورد فیزورها صادق است و نیز قانونی شبیه قانون اهم برای عناصر غیرفعال داریم، یعنی: $\mathbf{V} = \mathbf{ZI}$. به‌عبارت دیگر قانون تحلیل گرهی در مورد فیزورها صادق است و در نتیجه می‌توانیم در حالت پایدار سینوسی هم مدارها را به‌وسیله تحلیل گرهی حل کنیم. به همین طریق معلوم می‌گردد که روشهای تحلیل چشمه‌ای و حلقه‌ای هم صادق می‌باشند. به‌عنوان مثالی برای تحلیل گرهی، مدار شکل ۱-۱۰ را که در حوزهٔ فرکانس می‌باشد در نظر می‌گیریم.



شکل ۱-۱۰: مداری در حوزهٔ فرکانس که در آن ولتاژهای گرهی $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ مشخص شده‌اند.

دو منبع جریان به‌صورت فیزوری داده شده‌اند و ولتاژهای گرهی فیزوری $\mathbf{V}_1$ ، $\mathbf{V}_2$ مشخص گشته‌اند. در گره سمت چپ از KCL و $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\mathbf{V}_1}{5} + \frac{\mathbf{V}_1}{-j10} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{-j5} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{j10} = 1 + j0$$

و در گره سمت راست داریم:

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{-j5} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{j10} + \frac{\mathbf{V}_2}{j5} + \frac{\mathbf{V}_2}{10} = -(-j0.5)$$

پس از ساده کردن داریم:

$$(0.2 + j0.2)\mathbf{V}_1 - j0.1\mathbf{V}_2 = 1 \qquad (۱)$$

$$-j0.1\mathbf{V}_1 + (0.1 - j0.1)\mathbf{V}_2 = j0.5 \qquad (۲)$$

با استفاده از دترمینان معادلات (۱) و (۲) را حل می‌کنیم:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -j0.1 \\ j0.5 & (0.1 - j0.1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.2 + j0.2) & -j0.1 \\ -j0.1 & (0.1 - j0.1) \end{vmatrix}} = \frac{0.1 - j0.1 - 0.05}{0.02 - j0.02 + j0.02 + 0.02 + 0.01}$$

$$= \frac{0.05 - j0.1}{0.05} = 1 - j2 \quad \text{V}$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.2 + j0.2) & 1 \\ -j0.1 & j0.5 \end{vmatrix}}{0.05} = \frac{-0.1 + j0.1 + j0.1}{0.05} = -2 + j4 \quad \text{V}$$

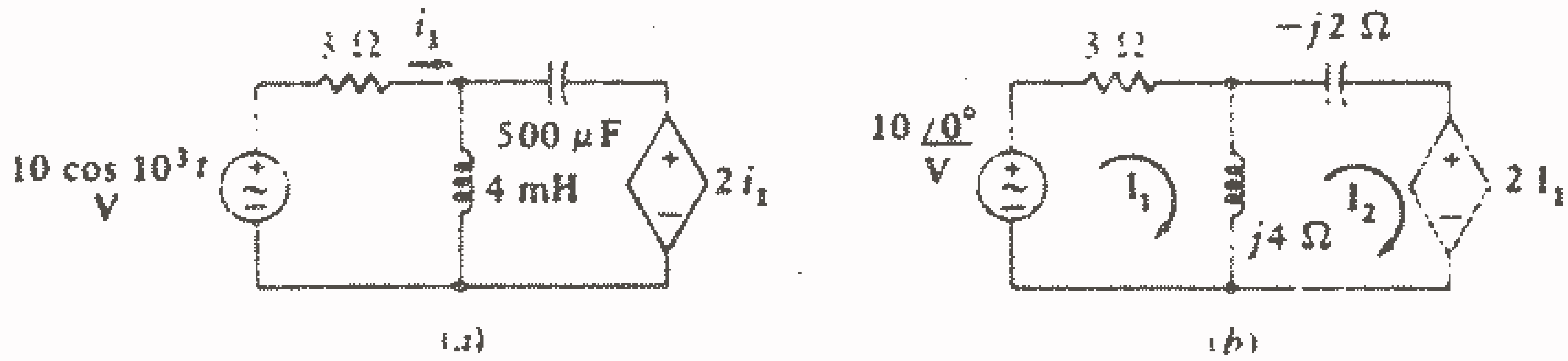
برای به‌دست آوردن پاسخ حوزهٔ زمان، ابتدا $\mathbf{V}_1$ ، $\mathbf{V}_2$ را به‌فرم قطبی بیان می‌کنیم:

$$\mathbf{V}_1 = 2.24\underline{/-63.4^\circ} \qquad \mathbf{V}_2 = 4.47\underline{/116.6^\circ}$$

و سپس آنها را به حوزهٔ زمان تبدیل می‌کنیم:

$$v_1(t) = 2.24 \cos (\omega t - 63.4^\circ) \qquad v_2(t) = 4.47 \cos (\omega t + 116.6^\circ) \quad \text{V}$$

به‌عنوان مثالی برای تحلیل چشمه‌ای یا حلقه‌ای، مدار شکل ۱۰-۲a را در نظر می‌گیریم. از منبع سمت چپ پیداست که $\omega = 10^3 \text{ rad/}_s$ ، سپس مدار حوزهٔ فرکانسی را مطابق شکل ۱۰-۲b رسم می‌کنیم و جریانهای چشمه‌ای $\mathbf{I}_1$ ، $\mathbf{I}_2$ را مشخص می‌نماییم.



شکل ۲ - ۱۰: (a) مداری در حوزهٔ زمان که دارای یک منبع وابسته می‌باشد. (b) مدار متناظر در حوزهٔ فرکانس که در آن جریانهای چشمه‌ای $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ مشخص شده‌اند.

در چشمهٔ ۱ داریم:

$$3\mathbf{I}_1 + j4(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 10\underline{/0^\circ}$$

و یا:

$$(3 + j4)\mathbf{I}_1 - j4\mathbf{I}_2 = 10$$

و در چشمهٔ ۲ خواهیم داشت:

$$j4(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) - j2\mathbf{I}_2 + 2\mathbf{I}_1 = 0$$

و یا:

$$(2 - j4)\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_2 = 0$$

و پس از حل معادلات فوق، به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{14 + j8}{13} = 1.24\underline{/29.7^\circ} \quad \text{A}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{20 + j30}{13} = 2.77\underline{/56.3^\circ} \quad \text{A}$$

و سپس

$$i_1(t) = 1.24 \cos (10^3 t + 29.7^\circ) \quad \text{A}$$

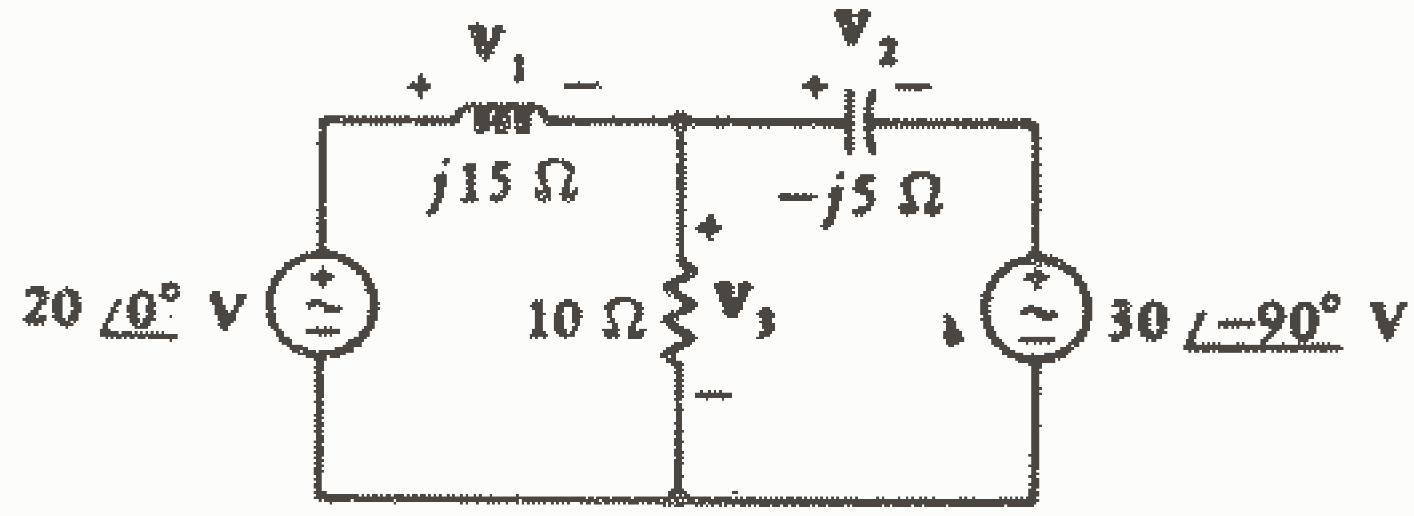
$$i_2(t) = 2.77 \cos (10^3 t + 56.3^\circ) \quad \text{A}$$

صحت راه حل مسائل فوق را می‌توان با حل آنها تماماً در حوزهٔ زمان، چک نمود، اما از این کار صرفنظر می‌کنیم زیرا روش فیزوری بسیار ساده‌تر و کم‌زحمت‌تر است.

تمرین

۱ ـ ۱۰ ـ با فرض اینکه هر دو منبع در شکل ۳ـ۱۰ در فرکانس یکسانی کار کنند، کمتیهای زیر را پیدا کنید: (a) $V_۱$ ، (b) $V_۲$ ، (c) $V_۳$

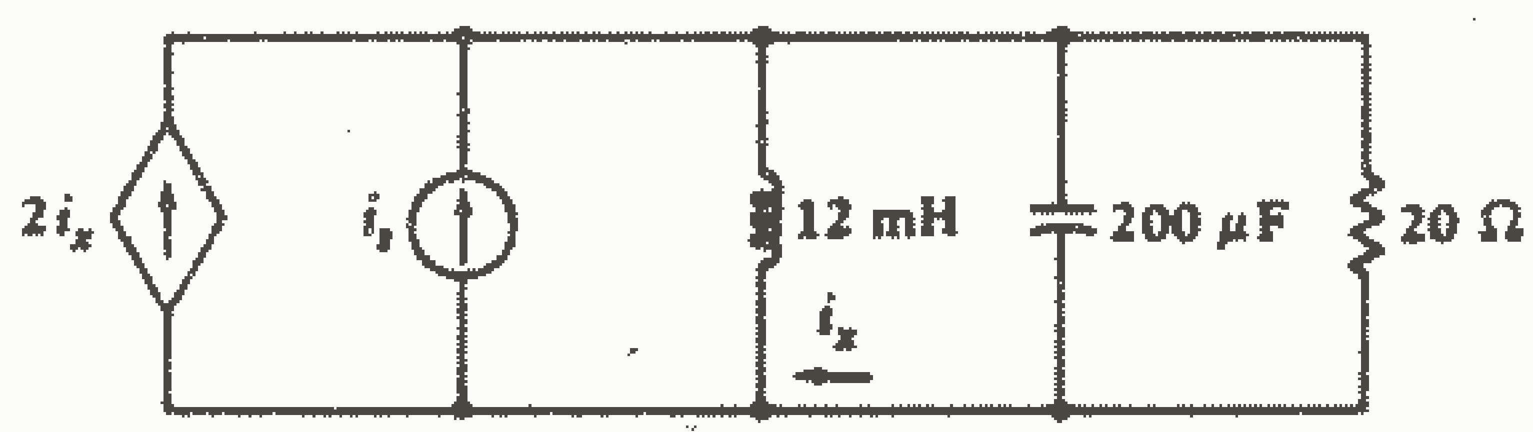
جواب: V ۳۳٫۹ $\angle$۸۱٫۹° ، ۱۵٫۶۲ $\angle$−۱۳٫۳۲° ، ۳۶٫۹ $\angle$−۶۵٫۷°



شکل ۳ ـ ۱۰: به تمرین ۱ ـ ۱۰ مراجعه کنید.

۲ ـ ۱۰ ـ اگر i_s = ۳ Cos۵۰۰t A باشد، مدار شکل ۱۰ـ۴ را به حوزهٔ فرکانس تبدیل کنید و دامنهٔ جریان را در عناصر زیر پیدا کنید: (a) سلف، (b) خازن، (c) مقاومت.

جواب: A ۱٫۸۴۳ ، ۱٫۱۰۶ ، ۰٫۵۵۳



شکل ۴ ـ ۱۰: به تمرین ۲ ـ ۱۰ مراجعه کنید.

۳ ـ ۱۰ ـ اصل جمع آثار، تبدیل منابع و قضیه تونن

پس از اینکه در فصل ٤ سلف و خازن را معرفی کردیم، دریافتیم که مدارهای شامل این عناصر باز هم خطی می‌باشند و مزایای خطی بودن در مورد آنها هم صادق است. از مزایای مذکور می‌توان اصل جمع آثار، قضایای تونن و نورتن و تبدیل منابع را نام برد. بنابراین اکنون

می‌دانیم که از روشهای فوق‌الذکر می‌توانیم در تحلیل مدارهایی که اکنون بررسی خواهیم کرد استفاده کنیم و سینوسی بودن منبع و اینکه به‌دنبال پاسخ اجباری هستیم، اهمیتی ندارد و خللی در روشهای ما ایجاد نمی‌کند. همچنین، ممکن است فکر کنیم که هنگام ترکیب کردن منابع حقیقی و موهومی برای به‌دست آوردن یک منبع مختلط، خطی بودن و اصل جمع آثار نقض شده است.

حال چند مثال را که پاسخ آنها به‌سادگی از طریق اعمال اصل جمع آثار، تبدیل منابع و یا قضایای تونن و نورتن به‌دست می‌آید، بررسی می‌کنیم.

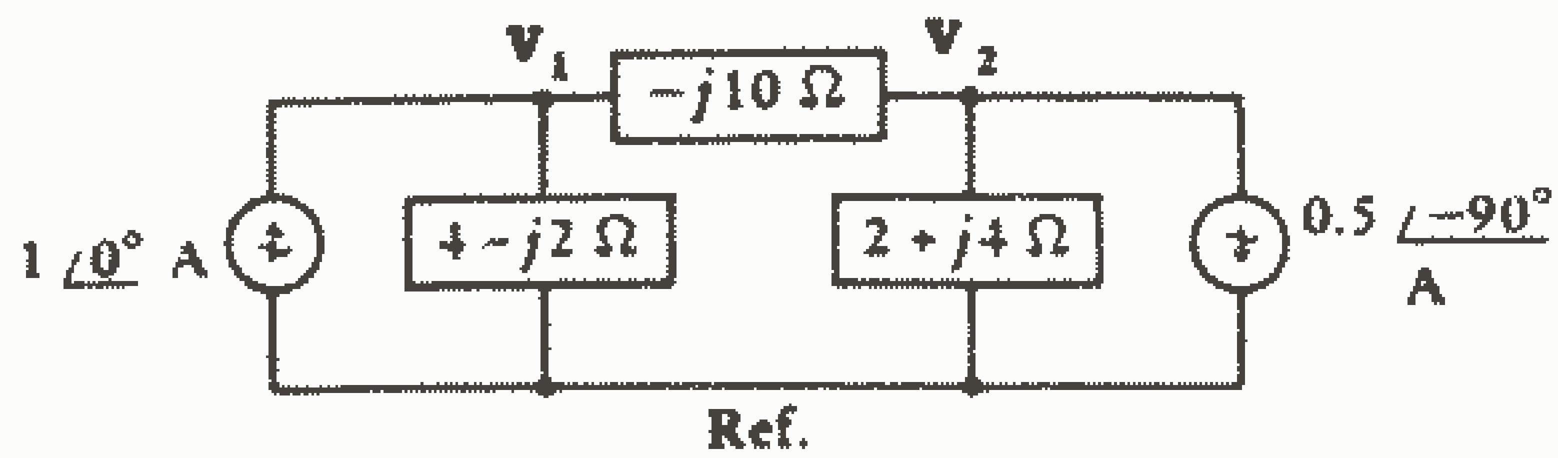
ابتدا مدار شکل ۱-۱۰ را که مجدداً در شکل ۵-۱۰ رسم شده است در نظر می‌گیریم که در آن هر جفت امپدانس موازی با یک امپدانس معادل جایگزین شده است. یعنی امپدانس ۵ و $-j10$ که موازی هستند امپدانس $4 - j2\Omega$ را ایجاد می‌کنند و امپدانسهای $j10$, $-j5$ که موازی هستند دارای معادل $-j10\Omega$ می‌باشند و نیز معادل، ۱۰ موازی با $j5$، عبارت است از $2 + j4\Omega$. برای پیدا کردن $\mathbf{V}_1$، ابتدا فقط منبع سمت چپ را به‌طور فعال فرض می‌کنیم و پاسخ جزئی ناشی از آن را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{V}_{1L} = 1\underline{/0^\circ}\,\frac{(4 - j2)(-j10 + 2 + j4)}{4 - j2 - j10 + 2 + j4} = \frac{-4 - j28}{6 - j8} = 2 - j2$$

و اگر فقط منبع سمت راست فعال باشد، با استفاده از تقسیم جریان خواهیم داشت:

$$\mathbf{V}_{1R} = (-0.5\underline{/-90^\circ})\left(\frac{2 + j4}{4 - j2 - j10 + 2 + j4}\right)(4 - j2) = \frac{-6 + j8}{6 - j8} = -1$$

و پس از جمع کردن دو مؤلفهٔ فوق، خواهیم داشت: $\mathbf{V}_1 = 2 - j2 - 1 = 1 - j2 \quad \mathrm{V}$ که با نتایج قبلی‌مان موافقت دارد.



شکل ۵ - ۱۰: $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ را می‌توان با استفاده از اصل جمع آثار و جمع نمودن پاسخ‌های فیزوری جداگانه، به دست آورد.

همچنین می‌توانیم مشاهده کنیم که قضیه تونن هم در مورد این مدار (شکل ۵-۱۰) صادق است یا خیر. فرض کنید که می‌خواهیم مدار معادل تونن را از دید امپدانس $-j10\Omega$ به‌دست

آوریم. ولتاژ مدار باز (اگر قطب + را در سمت چپ فرض کنیم) عبارت است از:

$$\mathbf{V}_{oc} = (۱\,\underline{/0^\circ})\,(٤ - j۲) + (۰/۵\underline{/-۹۰^\circ})\,(۲ + j٤) = ٤ - j۲ + ۲ - j۱ = ٦ - j۳$$

امپدانس مدار غیرفعال که از ترمینالهای بار دیده می‌شود عبارت است از مجموع دو امپدانس باقیمانده، یعنی:

$$\mathbf{Z}_{th} = ٦ + j۲$$

بنابراین، اگر مجدداً مدار را وصل کنیم، جریانی که از گره ۱ به سمت گره ۲ از طریق امپدانس $-j۱۰\Omega$ جاری می‌شود عبارت است از:

$$\mathbf{I}_{12} = \frac{6 - j3}{6 + j2 - j10} = 0.6 + j0.3$$

اگر این مقدار را از جریان منبع کم کنیم، جریانی که از شاخهٔ $٤ - j۲\Omega$ رو به پایین جاری می‌شود برابر خواهد بود با:

$$\mathbf{I}_1 = 1 - 0.6 - j0.3 = 0.4 - j0.3$$

و از آنجا داریم:

$$\mathbf{V}_1 = (0.4 - j0.3)(4 - j2) = 1 - j2 \quad \text{V}$$

البته اگر کمی دقت به‌خرج می‌دادیم می‌توانستیم قضیه نورتن را هم با فرض‌اینکه توجه اصلی ما معطوف $\mathbf{V}_1$ است، در مورد سه عنصر سمت راست به کار بریم. تبدیل منابع را هم می‌توانیم به‌طور تکراری برای ساده کردن این مدار مورد استفاده قرار دهیم. بنابراین همهٔ تکنیکها و راههای میان‌بر و لم‌هایی را که در فصل ۲ و ۳ دیدیم برای تحلیل مدارها در حوزهٔ فرکانس می‌توانیم مورد استفاده قرار دهیم.فقط اندکی پیچیدگی که ممکن است در حل مدارات حوزهٔ فرکانس وجود داشته باشد مربوط به استعمال اعداد مختلط می‌باشد و گرنه از نظر ملاحظات تئوریک هیچ اشکالی وجود ندارد.

و بالاخره، بهتر است این خبر خوشحال‌کننده را هم به شما بدهیم که روشهای مذکور را می‌توانیم برای پیدا کردن پاسخ اجباری مداراتی که تابع تحریک آنها سینوسی میرا، تابع‌نمایی و بطور کلی توابع تحریکی با فرکانس مختلط می‌باشد، نیز به‌کار بریم. بنابراین، روشهای فوق‌الذکر را در فصل ۱۳ دوباره خواهیم دید.

تمرین

۳ ـ ۱۰ ـ اگر از اصل جمع آثار برای پیدا کردن پاسخ حوزهٔ فرکانس یعنی $\mathbf{I}$ در مدار

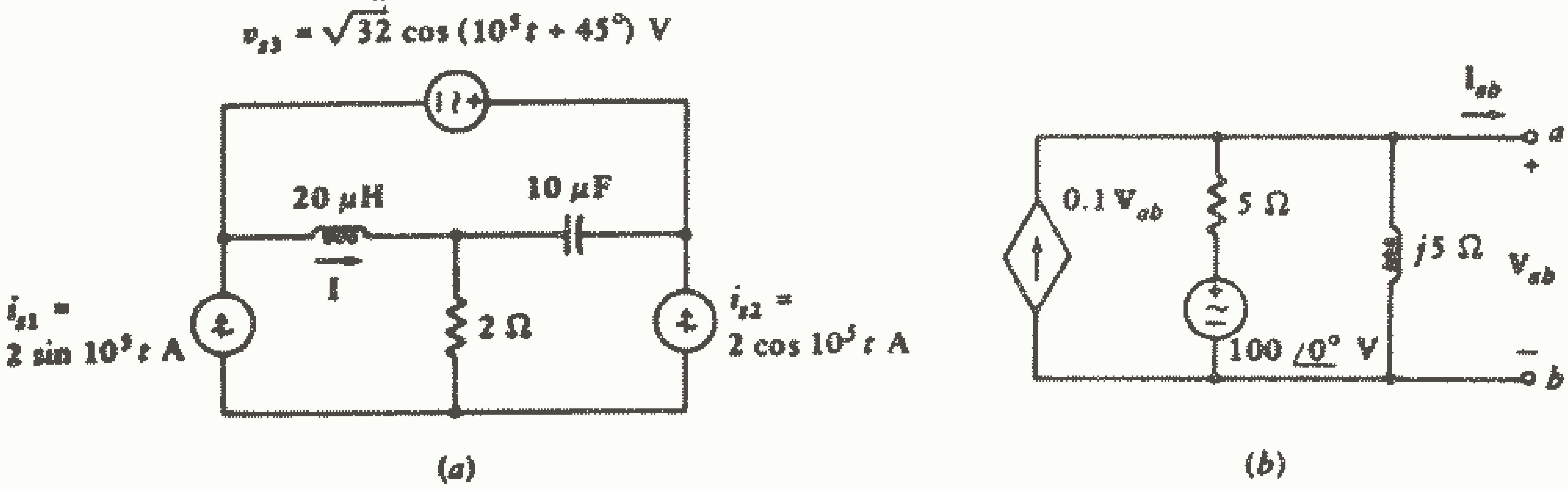
شکل ‎10-6a‎ استفاده شده باشد، پاسخهای جزئی تولید شده به‌وسیله منابع زیر را پیدا کنید:

v_{s3} (c) , i_{s2} (b) , i_{s1} (a)

جواب: $-4 + j4$, -2 , $j2A$

۴ ـ ۱۰ ـ مدار معادل تونن و نورتن را برای شبکهٔ شکل ‎10-6b‎ به‌دست آورید و مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) ولتاژ مدار باز $\mathbf{V}_{ab}$ ، (b) جریان اتصال کوتاه $\mathbf{I}_{ab}$ ، (c) امپدانس تونن $\mathbf{Z}_{th}$

جواب: $89.4 \angle 63.4^\circ$ V ، $20 \angle 0^\circ$ A ، $2 + j4\Omega$

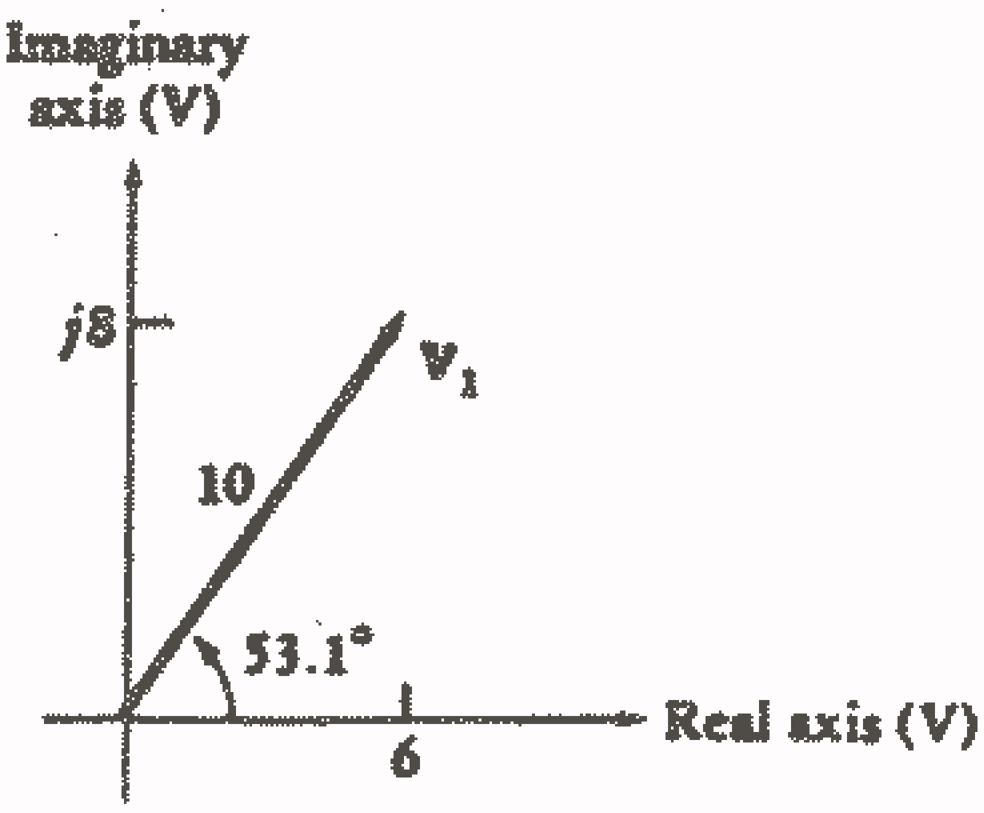


شکل ۶ ـ ۱۰: (a) به تمرین ۳ ـ ۱۰ مراجعه کنید. (b) به تمرین ۴ ـ ۱۰ مراجعه کنید.

۴ ـ ۱۰ ـ دیاگرام فیزوری

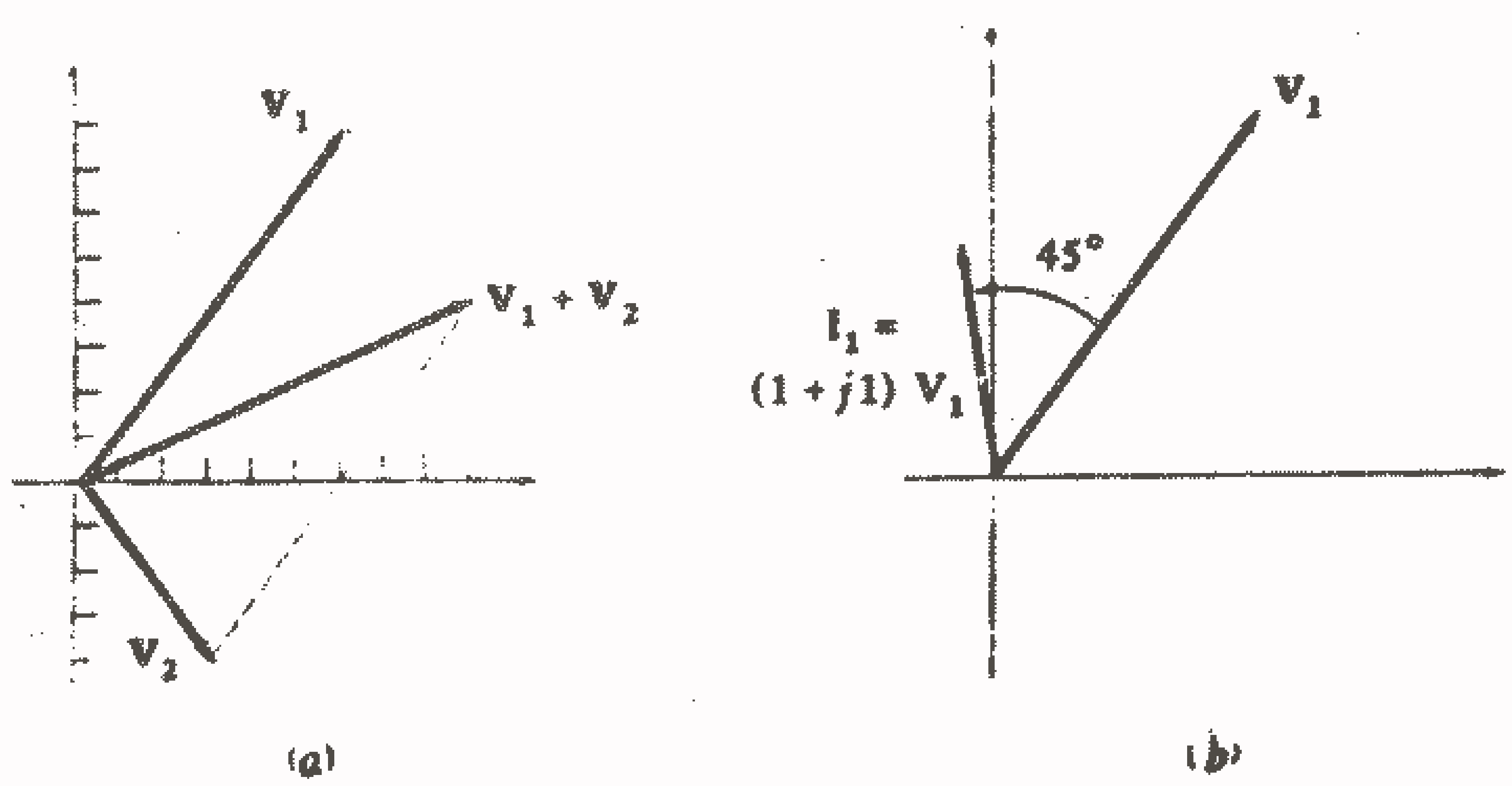
دیاگرام فیزوری نامی است که به نمودارهای داخل صفحهٔ مختلط ولتاژها و جریانهای فیزوری داده شده است، این دیاگرام همچنین یک روش ترسیمی برای حل مسائل خاصی ارائه می‌کند و به‌عنوان یک روش چک برای روشهای تحلیلی دقیق‌تر می‌باشد. این دیاگرام کمک قابل توجهی را در ساده کردن حل تحلیلی مسائل چند فازهٔ متقارن ارائه می‌کند. در فصل بعدی با دیاگرامهای مشابهی روبرو خواهیم شد که روابط قدرت مختلط را در حالت پایدار سینوسی نمایش می‌دهند. کاربرد سایر صفحات مختلط در رابطه با فرکانس مختلط در فصل ۱۳ ظاهر خواهد گشت.

ما قبلاً با کاربرد صفحهٔ مختلط در نمایش ترسیمی اعداد مختلط و جمع و تفریق آنها آشنا شده‌ایم. از آنجاییکه ولتاژها و جریانهای فیزوری، اعداد مختلط می‌باشند می‌توانیم آنها را هم با نقاطی در صفحهٔ مختلط نمایش دهیم. مثلاً ولتاژ فیزوری $\mathbf{V}_1 = 6 + j8 = 10 \angle 53.1^\circ$ در صفحهٔ مختلط ولتاژ در شکل ۷ ـ ۱۰ نمایش داده شده است. محورها عبارتند از محور ولتاژ حقیقی و محور ولتاژ موهومی و ولتاژ $\mathbf{V}_1$ به‌وسیله یک پیکان که از مبدأ رسم می‌شود نمایش داده شده است.



شکل ۷ ـ ۱۰: یک دیاگرام فیزوری ساده که ولتاژ فیزوری
$V_1 = 6 + j8 = 10\underline{/53.1^\circ}$ V را نمایش می‌دهد.

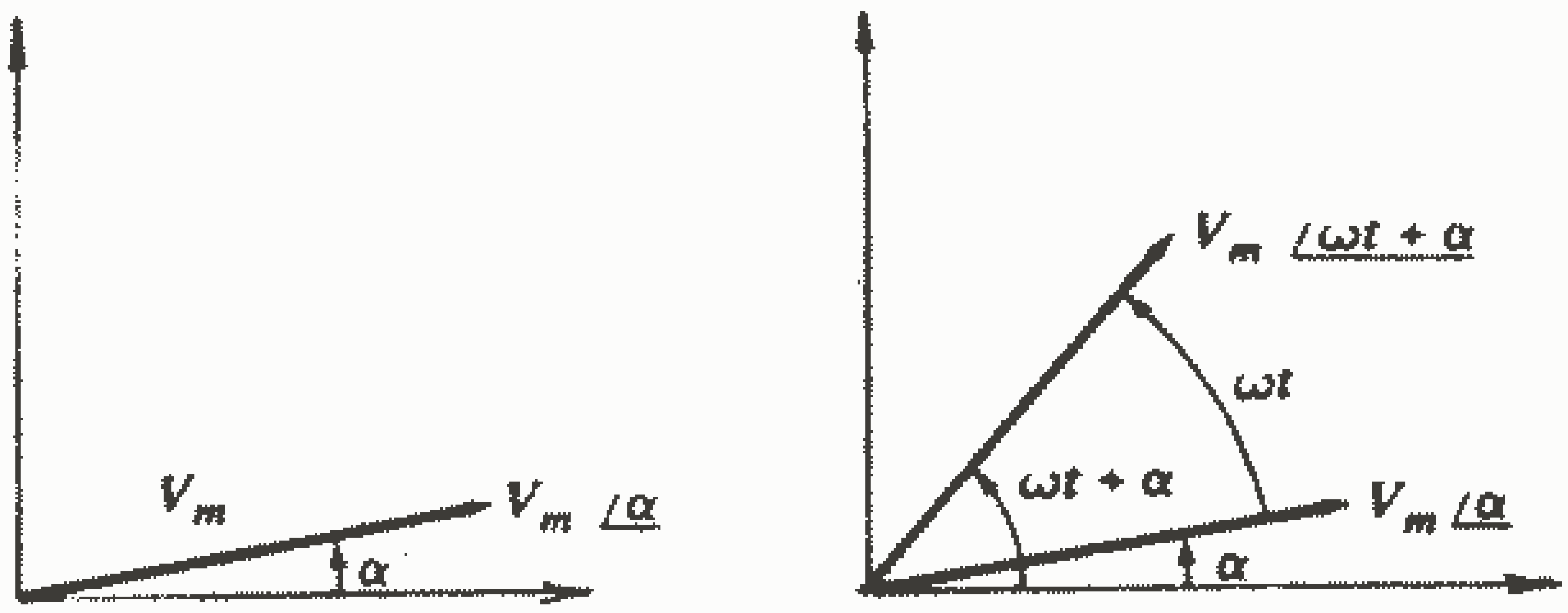
از آنجاییکه انجام دادن و نمایش جمع و تفریق در صفحهٔ مختلط آسان می‌باشد، بدیهی است که فیزورها را به‌سادگی می‌توان در یک دیاگرام فیزوری جمع و تفریق نمود. در ضرب و تقسیم زاویه‌ها به ترتیب جمع و یا تفریق می‌شوند و دامنه هم تغییر می‌کند که این امر به‌وضوح نشان داده نمی‌شود زیرا تغییر دامنه بستگی به دامنهٔ هر یک از فیزورها و مقیاس دیاگرام دارد. در شکل ۱۰-۸a مجموع V_1 با فیزور ولتاژ دیگری مانند $V_2 = 3 - j4 = 5\underline{/-53.1^\circ}$ نشان داده شده و در شکل ۱۰-۸b جریان I_1 که حاصلضرب V_1 با آدمیتانس $Y = 1 + j1$ می‌باشد نمایش داده شده است.



شکل ۸ - ۱۰: (a) یک دیاگرام فیزوری که نمایش دهندهٔ مجموع $V_1 = 6 + j8$ و $V_2 = 3 - j4$ یعنی $V_1 + V_2 = 9 + j4 = 9{,}85\underline{/24^\circ}$ می‌باشد.
(b) یک دیاگرام فیزوری که نشان دهندهٔ V_1 و I_1 می‌باشد بطوریکه:
$I_1 = YV_1$ و $Y = 1 + j1\Omega$

در دیاگرام فیزوری اخیر دو فیزور ولتاژ و جریان در یک صفحهٔ مختلط نمایش داده شده‌اند و در می‌یابیم که هر یک از این فیزورها مقیاس دامنهٔ خاص خودشان را دارند اما هر دو دارای یک مقیاس زاویهٔ مشترکی می‌باشند مثلاً یک فیزور ولتاژ به‌طول ۱cm ممکن است نشان‌دهندهٔ ۳mA باشد.

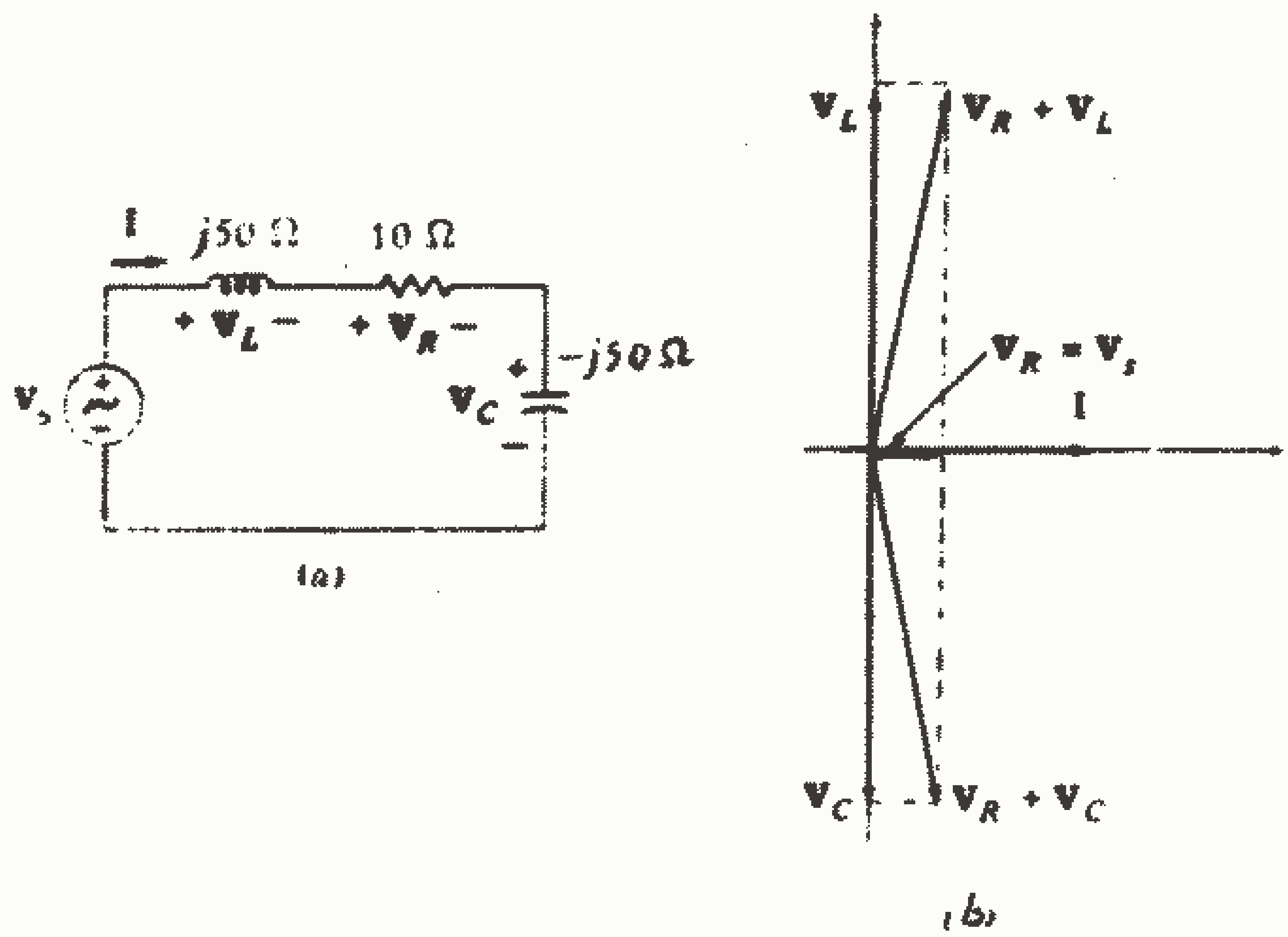
دیاگرام فیزوری همچنین تفسیر و توصیف خوبی از تبدیل حوزهٔ زمان به حوزهٔ فرکانس بدست می‌دهد، زیرا این دیاگرام را هم از نقطه نظر حوزه زمان و هم حوزهٔ فرکانس می‌توان تفسیر نمود. تا به اینجا واضح است که ما فقط تعبیر حوزهٔ فرکانسی را به‌کار برده‌ایم زیرا فیزورها را مستقیماً در دیاگرام فیزوری نمایش داده‌ایم، اما اکنون می‌خواهیم با نشان دادن فیزور $\mathbf{V} = V_m\underline{/\alpha}$ (مطابق شکل ‎10-9a‎) از نقطه نظر حوزهٔ زمان هم تفسیری ارائه دهیم.



شکل ۹ ـ ۱۰: (a) ولتاژ فیزوری $V_m\underline{/\alpha}$. (b) ولتاژ مختلط $V_m\underline{/\omega t+\alpha}$ به صورت یک فیزوری در یک لحظهٔ به خصوصی از زمان نشان داده می‌شود. این فیزور به اندازهٔ ωt رادیان نسبت به $V_m\underline{/\alpha}$ تقدم دارد.

برای تبدیل $\mathbf{V}$ به حوزهٔ زمان، قدم بعدی ضرب کردن این فیزور در $e^{j\omega t}$ می‌باشد یعنی اکنون خواهیم داشت: $V_m e^{j\alpha} e^{j\omega t} = V_m\underline{/\omega t+\alpha}$. این ولتاژ را هم می‌توانیم به‌صورت فیزوری تعبیر کنیم که دارای زاویهٔ فازی است که به‌طور خطی با زمان افزایش می‌یابد. بنابراین فیزور مذکور در یک دیاگرام فیزوری نشان‌دهندهٔ یک قطعه خط در حال چرخش می‌باشد که به اندازهٔ ωt رادیان جلوتر از $V_m\underline{/\alpha}$ می‌باشد (در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت). $V_m\underline{/\alpha}$ ، $V_m\underline{/\omega t+\alpha}$ هر دو در دیاگرام فیزوری شکل ‎10-9b‎ نشان داده شده‌اند.

حال برای تکمیل روند انتقال به حوزهٔ زمان باید از $V_m/\underline{\omega t + \alpha}$ قسمت حقیقی بگیریم. بنابراین به‌طور خلاصه فیزور حوزهٔ فرکانس در دیاگرام فیزوری ظاهر می‌شود و اگر اجازه دهیم این فیزور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت با سرعت زاویه‌ای ω rad/s بچرخد و سپس تصویر آن را روی محور حقیقی در نظر بگیریم، در این صورت انتقال به حوزهٔ زمان صورت می‌گیرد. بهتر است پاره‌خط جهت‌داری که بیانگر فیزور $\mathbf{V}$ می‌باشد را به‌صورت یک عکس فوری که در لحظهٔ $\omega t = 0$ از پاره‌خط جهت‌دار در حال چرخش گرفته شده است تصور کنیم.

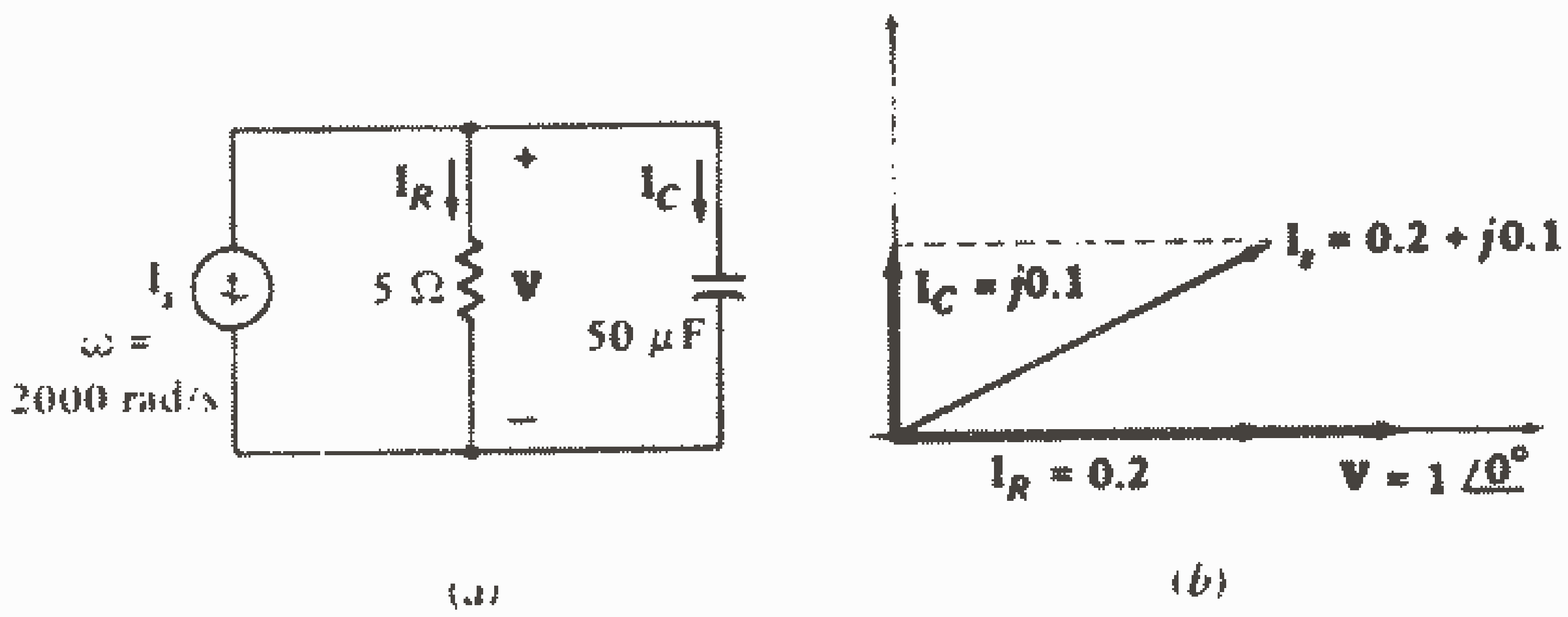


شکل ۱۰ ـ ۱۰: (a) یک مداری RLC سری که در حوزهٔ فرکانس نشان داده شده است. (b) دیاگرام فیزوری مربوطه که در آن جریان چشمه‌ای را به عنوان فیزور مبناء در نظر گرفته‌ایم.

حال دیاگرام فیزوری چند مدار ساده را تشکیل می‌دهیم. مدار RLC سری در شکل ۱۰a−۱۰ دارای چند ولتاژ مشخص شده می‌باشد ولی فقط یک جریان برایش تعریف شده است. دیاگرام فیزوری را با در نظر گرفتن این جریان منفرد به‌عنوان فیزور مبنا، به‌سادگی می‌توان تشکیل داد. به‌طور دلخواه $\mathbf{I} = I_m/\underline{0°}$ را انتخاب کرده و آن را بر روی محور حقیقی دیاگرام فیزوری (مطابق شکل ۱۰b−۱۰) قرار می‌دهیم. سپس می‌توانیم ولتاژهای مقاومت، خازن و سلف را محاسبه نموده و در دیاگرام قرار دهیم که روابط فازی $۹۰°$ هم به‌وضوح مشهود است. مجموع

این سه ولتاژ برابر است با ولتاژ منبع و در مورد این مدار که در شرایط رزونانس[1] می‌باشد (یعنی $Z_c = -Z_L$)، ولتاژ منبع و ولتاژ مقاومت با هم مساویند. ولتاژ کلی دو سر مقاومت و سلف یا مقاومت و خازن به‌سادگی از دیاگرام فیزوری به‌دست می‌آید.

شکل ۱۱a-۱۰ مدار موازی ساده‌ای را نشان می‌دهد که در آن استفاده از ولتاژ منفرد بین دو گره به‌عنوان فیزور مبنا منطقی به‌نظر می‌رسد. فرض کنید $\mathbf{V} = ۱ \angle 0° \text{ V}$ باشد. جریان مقاومت با این ولتاژ هم‌فاز است یعنی $\mathbf{I}_R = ۰٫۲ \angle 0° \text{ A}$ و جریان خازن از ولتاژ مبنا °۹۰ جلوتر است یعنی $\mathbf{I}_C = j۰٫۱ \text{ A}$. بعد از اینکه این دو جریان به دیاگرام فیزوری اضافه شوند (مطابق شکل ۱۱b-۱۰) می‌توان آنها را جمع نموده و جریان منبع را به‌دست آورد. حاصل اینکار عبارت است از $\mathbf{I}_s = ۰٫۲ + j۰٫۱ \text{ A}$.



شکل ۱۱ - ۱۰: (a) یک مدار RC موازی. (b) دیاگرام فیزوری این مدار که در آن ولتاژ گره $\mathbf{V}$ به عنوان یک فیزور مبنای مناسب به کار رفته است.

اگر جریان منبع از ابتدا معلوم می‌بود (مثلاً $۱ \angle 0° \text{ A}$) و ولتاژ گره از ابتدا معلوم نمی‌بود باز هم مناسب‌تر این بود که یک ولتاژ گرهی فرض کنیم (مثلاً $\mathbf{V} = ۱ \angle 0° \text{ V}$) و آن را به‌عنوان فیزور مبنا به کار بریم. سپس دیاگرام را مانند قبل کامل می‌کنیم و جریان منبعی که حاصل از ولتاژ گرهی مفروض می‌باشد، باز هم برابر با $۰٫۲ + j۰٫۱ \text{ A}$ خواهد بود که البته جریان منبع واقعی عبارت از $۱ \angle 0° \text{ A}$ می‌باشد بنابراین ولتاژ گرهی واقعی به اندازهٔ $۱ \angle 0° / ۰٫۲ + j۰٫۱$ بزرگتر می‌باشد یعنی برابر است با: $۴ - j۲ \text{ V}$.

۱- رزونانس را در فصل ۱۴ مورد بحث قرار خواهیم داد.

ولتاژ فرض شده یک دیاگرام فیزوری را ایجاد می‌کند که با دیاگرام فیزوری واقعی در یک تغییر مقیاس با هم تفاوت دارند (دیاگرام مفروض به اندازهٔ عامل ۱/۷۳۰ کوچکتر می‌باشد) و نیز یک چرخش زاویه‌ای هم نسبت به یکدیگر دارند (دیاگرام فرض شده به اندازهٔ ۲۶٫۶° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت چرخیده است).

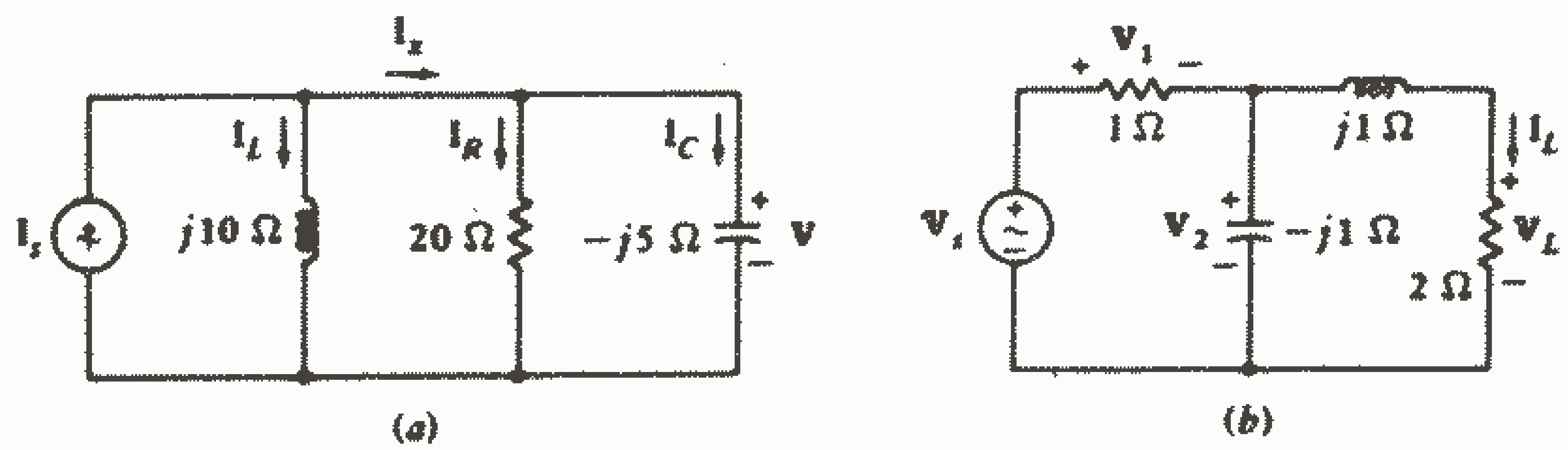
رسم دیاگرامهای فیزوری معمولاً بسیار ساده است و تحلیل حالت پایدار سینوسی در اکثر موارد اگر همراه با چنین دیاگرامی باشد قابل فهم‌تر خواهد بود. مثالهای دیگری از کاربرد دیاگرامهای فیزوری بطور مکرر در باقیماندهٔ مطالعه‌مان ارائه خواهد شد.

تمرین

۵ ـ ۱۰ ـ مقدار مناسبی برای $\mathbf{V}$ در شکل ۱۰-۱۲a فرض کنید و یک دیاگرامی فیزوری رسم کنید که $\mathbf{I}_C$ ، $\mathbf{I}_L$ ، $\mathbf{I}_R$ را نشان دهد. با ترکیب این جریانها، زاویهٔ تقدم فاز $\mathbf{I}_s$ را نسبت به جریانهای زیر پیدا کنید:

$\mathbf{I}_x$ (c) ، $\mathbf{I}_C$ (b) ، $\mathbf{I}_R$ (a)

جواب: ۶۳° ، ‎-۲۷°‎ ، ‎-۱۳°‎



شکل ۱۲ ـ ۱۰: (a) به تمرین ۵ ـ ۱۰ مراجعه کنید. (b) به تمرین ۶ ـ ۱۰ مراجعه کنید.

۶ ـ ۱۰ ـ یک مقدار مبناء برای $\mathbf{I}_L$ در شکل ۱۰-۱۲b انتخاب کنید و یک دیاگرام فیزوری رسم کنید که نشان‌دهندهٔ $\mathbf{V}_L$ ، $\mathbf{V}_2$ ، $\mathbf{V}_1$ ، $\mathbf{V}_s$ باشد و نسبت طولهای زیر را پیدا کنید:

$\mathbf{V}_s$ (a) به $\mathbf{V}_1$ ، $\mathbf{V}_s$ (b) به $\mathbf{V}_2$ ، $\mathbf{V}_s$ (c) به $\mathbf{V}_L$.

جواب: ۱٫۸۰ ، ۱٫۶۱ ، ۱٫۸۰

۵ - ۱۰ - پاسخ به‌صورت تابعی از ω

اکنون می‌خواهیم روشهای به‌دست آوردن و بیان پاسخ یک مدار با تحریک سینوسی را به‌صورت تابعی از فرکانس زاویه‌ای ω، بررسی کنیم. به استثناء فرکانس برق شهر $60 Hz$ که در آن فرکانس ثابت و بار متغیر است در بقیه موارد پاسخ فرکانس سینوسی تقریباً در تمام شاخه‌های مهندسی برق و سایر زمینه‌های مرتبط از قبیل تئوری ارتعاشات مکانیکی حائز اهمیت زیادی است.

بیایید فرض کنیم که مداری با تحریک $\mathbf{V}_s = V_s\angle\theta$ داریم. این ولتاژ فیزوری را می‌توان به‌صورت ولتاژ منبعی در حوزهٔ زمان یعنی $V_s \cos(\omega t + \theta)$ هم تبدیل نمود. پاسخ مطلوب ما در گوشه‌ای از مدار مثلاً به‌صورت یک جریان $\mathbf{I}$ می‌باشد. همانگونه که می‌دانیم این پاسخ فیزوری، یک عدد مختلط می‌باشد و مقدار آن را نمی‌توان به‌طور کلی بدون استفاده از دو کمیت نشان داد که این دو کمیت یکی قسمت حقیقی و دیگری قسمت موهومی و یا یک دامنه با یک زاویه فاز می‌باشند. که جفت کمیت اخیر مفیدتر است و به‌طور تجربی می‌توان به‌سادگی آنها را تعیین نمود که این اطلاعات را ما به‌طور تحلیلی به‌صورت تابعی از فرکانس به‌دست خواهیم آورد. این اطلاعات را به صورت دو منحنی که یکی دامنهٔ پاسخ به‌صورت تابعی از ω و دیگری زاویهٔ فاز پاسخ به‌صورت تابعی از ω می‌باشند می‌توان بیان نمود اغلب این منحنی‌ها را نرمالیزه می‌کنیم و دامنهٔ نسبت جریان به ولتاژ و زاویه فاز نسبت جریان به ولتاژ را به‌صورت تابعی از ω می‌باشد. این آدمیتانس می‌تواند یک آدمیتانس ورودی باشد و یا اگر جریان و ولتاژ در مکانهای مختلفی از مدار اندازه‌گیری شده باشند، می‌تواند یک آدمیتانس انتقالی باشد. اگر پاسخ ولتاژ را نسبت به یک منبع جریان نرمالیزه کنیم در این صورت منحنی‌ها عبارت از دامنه یا زاویهٔ فاز یک امپدانس ورودی یا انتقالی بر حسب ω خواهند بود. سایر حالتهایی که می‌توان در نظر گرفت نسبت ولتاژ به ولتاژ (بهرهٔ ولتاژ) و یا نسبت جریان به جریان (بهرهٔ جریان) می‌باشد. حال جزئیات این روند را با مورد بحث قرار دادن دو مثال بررسی می‌کنیم.

به‌عنوان مثال اول، مدار RL سری را انتخاب می‌کنیم. ولتاژ فیزوری $\mathbf{V}_s$ را به این مدار ساده اعمال می‌کنیم و جریان فیزوری $\mathbf{I}$ (که از قطب مثبت منبع ولتاژ خارج می‌شود) پاسخ مورد نظر ما می‌باشد. فقط پاسخ اجباری، مورد نظر ما می‌باشد و به‌وسیله روشهای آشنای فیزوری خواهیم داشت:

$$\mathbf{I} = \mathbf{V}_s/R + j\omega L$$

این نتیجه را بلافاصله به‌صورت یک نسبت جریان به ولتاژ یعنی آدمیتانس ورودی بیان می‌کنیم:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{I}/\mathbf{V}_s$$

و یا

$$\mathbf{Y} = 1/R + j\omega L \qquad (۳)$$

اگر بخواهیم می‌توانیم آدمیتانس را به‌صورت جریانی که به‌وسیله یک منبع ولتاژ $1\ \underline{/0^\circ}\ \mathrm{V}$ تولید شده است، در نظر بگیریم. دامنهٔ پاسخ عبارت است از:

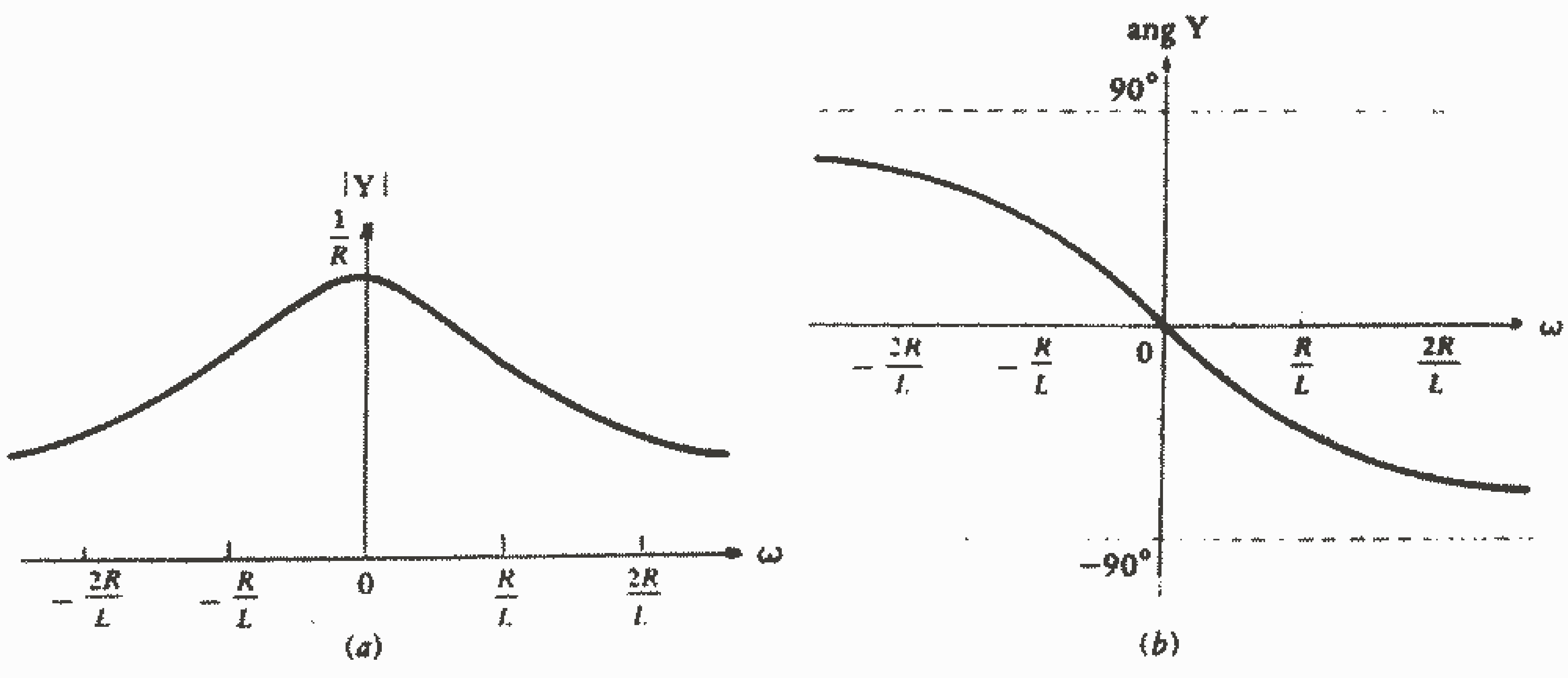
$$|\mathbf{Y}| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \qquad (٤)$$

و زاویهٔ پاسخ عبارت است از:

$$\text{ang } \mathbf{Y} = -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \qquad (۵)$$

معادلات (٤) و (۵) روابط تحلیلی برای دامنه و زاویه فاز پاسخ به‌صورت تابعی از ω می‌باشند و حالا می‌خواهیم همین اطلاعات را به‌صورت ترسیمی بیان کنیم.

ابتدا منحنی دامنه را در نظر می‌گیریم. باید توجه داشت که ما قدر مطلق یک کمیت را بر حسب ω رسم می‌کنیم و بنابراین کل منحنی باید بالای محور ω قرار گیرد. منحنی پاسخ با توجه به این که مقدار پاسخ در فرکانس صفر برابر است با $1/R$ و شیب اولیه صفر است و نیز وقتیکه فرکانس به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند، پاسخ به سمت صفر میل می‌کند، به‌دست می‌آید که این منحنی در شکل ۱۳a–۱۰ نشان داده شده است.



شکل ۱۳ – ۱۰: (a) دامنهٔ $\mathbf{Y} = \mathbf{I}/\mathbf{V}_s$ و (b) زاویهٔ $\mathbf{Y}$ به صورت تابعی از ω برای یک مدار RL سری با تحریک سینوسی رسم شده‌اند.

به منظور کلی بودن و کامل بودن منحنی، آن را برای مقادیر مثبت و منفی فرکانس رسم کرده‌ایم و تقارن موجود در شکل از معادلهٔ (٤) هم مشهود است زیرا در این معادله اگر ω را بـه $(-\omega)$ تبدیل کنیم مقدار $|\mathbf{V}|$ تغییری نمی‌کند. تعبیر فیزیکی فرکانس زاویه‌ای منفی (مثلاً $\omega = -100\ rad/_s$) بستگی به تابع حوزهٔ زمانی دارد و همیشه می‌توان آن را با بررسی تابع زمانی به‌دست آورد. مثلاً ولتاژ $v(t) = 50\ \cos(\omega t + 30°)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $\omega = 100$ باشد ولتاژ مذکور برابر خواهد بود با $v(t) = 50\ Cos(100t + 30°)$، اما اگر $\omega = -100$ باشد، خواهیم داشت:

$$v(t) = 50\ Cos(-100t + 30°) \text{ و یا } 50\ Cos(100t - 30°)$$

که همانگونه که می بینیم این ولتاژها در لحظهٔ $t = 1ms$ دارای مقادیر مختلفی هستند. هر پاسخ سینوسی را می‌توان به طریق مشابهی تفسیر نمود.

قسمت دوم پاسخ، یعنی زاویه فاز $\mathbf{V}$ نسبت به ω، یک تابع تانژانت معکوس می‌باشد. تابع تانژانت، خودش برای ما کاملاً آشناست و اگر آن را به پهلو بخوابانیم و مجانبهای $\pm 90°$ را در نظر بگیریم، منحنی مطلوب به‌دست می‌آید. منحنی پاسخ در شکل ۱۰-۱۳b نشان داده شده است. نقاطی که در آنها $\omega = \pm R/L$ است در هر دو منحنی دامنه و فاز مشخص شده‌اند. در این فرکانسها، دامنه برابر است با ۰٫۷۰۷ برابر ماکزیمم دامنه در فرکانس صفر و زاویه فاز برابر است با $45°$ در فرکانسی که دامنه آدمیتانس ۰٫۷۰۷ برابر ماکزیمم مقدارش می‌باشد، دامنه جریان برابر است با $0{,}707^2$ یا ۰٫۵ برابر مقدار ماکزیمم آن. بنابراین منطقی است که $\omega = R/L$ را به‌عنوان فرکانس «نیم‌قدرت» در نظر بگیریم.

به‌عنوان مثال دوم، یک مدار LC موازی را که با یک منبع جریان سینوسی تحریک می‌شود در نظر می‌گیریم، که در شکل ۱۰-۱٤a نشان داده شده است.

پاسخ ولتاژ $\mathbf{V}$ به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}_s \frac{(j\omega L)(1/j\omega C)}{j\omega L - j(1/\omega C)}$$

که می‌توانیم آن را به‌صورت یک امپدانس ورودی بیان کنیم:

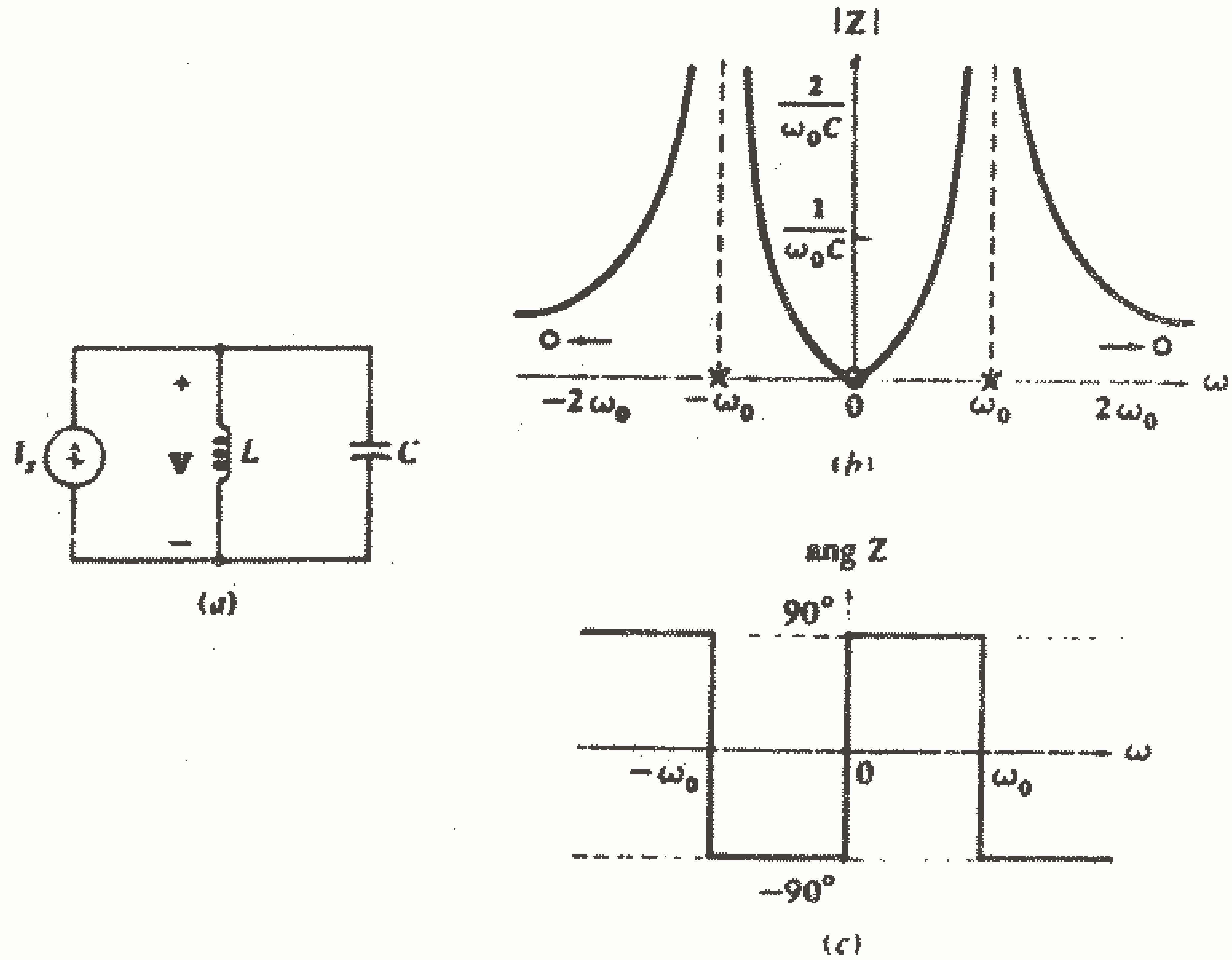
$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_s} = \frac{L/C}{j(\omega L - 1/\omega C)}$$

و یا:

$$\mathbf{Z} = -j\frac{1}{C}\frac{\omega}{\omega^2 - 1/LC} \qquad (6)$$

که اگر $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ را در رابطهٔ (٦) قرار دهیم و دامنهٔ امپدانس ورودی را محاسبه کنیم، فرکانسهایی که در آن، پاسخ برابر با صفر یا بی‌نهایت می‌شود به‌دست می‌آید.

$$|\mathbf{Z}| = \frac{1}{C}\frac{|\omega|}{|(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)|} \qquad (\text{۷})$$



شکل ۱۴ - ۱۰: یک مدار LC موازی با تحریک سینوسی.
(b) دامنهٔ امپدانس ورودی $\mathbf{Z} = \mathbf{V}/\mathbf{I}_s$ (c) زاویه امپدانس ورودی که به صورت تابعی از ω رسم شده است.

چنین فرکانسهایی را فرکانس بحرانی می‌نامیم و تعریف قبلی آنها ترسیم منحنی پاسخ را آسان می‌سازد. ابتدا توجه می‌کنیم که پاسخ در $\omega = 0$ دارای دامنهٔ صفر است و می‌گوییم که پاسخ در $\omega = 0$ دارای یک «صفر» می‌باشد. دامنهٔ بی‌نهایت پاسخ در $\omega = \pm\,\omega_0$ روی می‌دهد که این فرکانسها را قطب می‌نامند و می‌گوییم که پاسخ در هر یک از این فرکانسها دارای یک قطب است. و بالاخره باید توجه داشته باشیم که وقتیکه $\omega \to \infty$ پاسخ میل می‌کند به‌سمت صفر و بنابراین $\omega = \pm\,\infty$ هم یک صفر می‌باشد.[1]

محل فرکانسهای بحرانی را باید بر روی محور ω مشخص نمود که این کار را با استفاده از دایره‌های کوچک توخالی برای صفرها و علامت ضربدر برای قطب‌ها انجام می‌دهیم. صفرها و یا قطب‌هایی که در بی‌نهایت هستند باید به‌وسیله یک فلش در نزدیکی محور مشخص شوند که این

۱- مرسوم است که مثبت بی‌نهایت و منفی بی‌نهایت را یک نقطه در نظر می‌گیرند، البته زاویه فاز پاسخ لازم نیست که به ازای مقادیر خیلی بزرگ مثبت و منفی ω با هم یکی باشند.

مطلب در شکل ۱۰–۱٤b نشان داده شده است. اگر خط‌چین‌های عمودی به‌عنوان مجانب در محل هر قطب اضافه کنیم رسم منحنی آسانتر می‌شود. نمودار کامل دامنه بر حسب ω در شکل ۱۰–۱٤b نشان داده شده است که شیب منحنی در مبداء صفر نیست.

بررسی معادلهٔ (٦) نشان می‌دهد که زاویه فاز امپدانس ورودی باید °۹۰+ و یا °۹۰- باشد و مقدار دیگری نمی‌تواند باشد که این امر برای هر مداری که فقط متشکل از سلف و خازن باشد بدیهی می‌باشد. بنابراین روابط تحلیلی مربوط به $\text{ang}\ \mathbf{Z}$ باید شامل یک سری روابطی باشد که نشان دهد زاویهٔ مورد نظر در فرکانسهای مشخصی °۹۰+ یا °۹۰- است، که خیلی راحت‌تر است این اطلاعات به‌طور ترسیمی مطابق شکل ۱۰–۱٤C نمایش داده شود.

تمرین

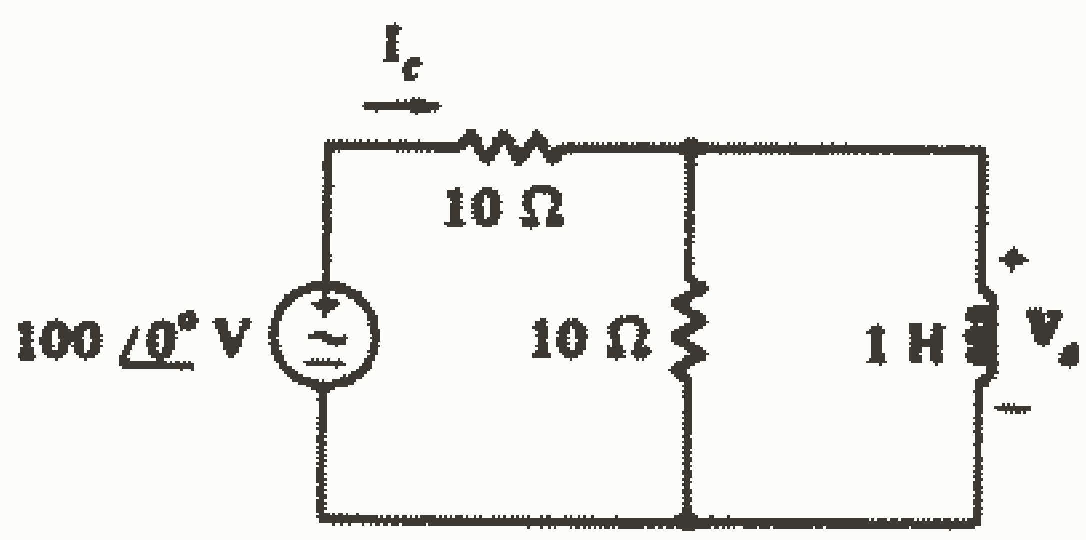
۷ ـ ۱۰ ـ برای مدار شکل ۱۵–۱۰ کمیتهای زیر را به‌صورت تابعی از ω رسم کنید:

$|\mathbf{V}_o|$ (a) $\text{ang}\ \mathbf{V}_o$ (b) $|\mathbf{I}_c|$ (c)

جواب: $|\mathbf{V}_o(j3)| =$ ۲۵٫۷ ، $\text{ang}\ \mathbf{V}_o(-j10) =$ −۲٦٫٦° ، $|\mathbf{I}_c(j5)| = 7.91\ \text{A}$

۸ ـ ۱۰ ـ دو مقاومت ۱۰Ω را در مدار شکل ۱۵-۱۰ با دو خازن ۱۰۰μF جایگزین کنید و فرض کنید $\mathbf{I}_c$ پاسخ مطلوب باشد. دامنه و زاویه فاز پاسخ را به‌صورت تابعی از ω رسم کنید و کلیهٔ فرکانسهای بحرانی پاسخ را تعیین کنید.

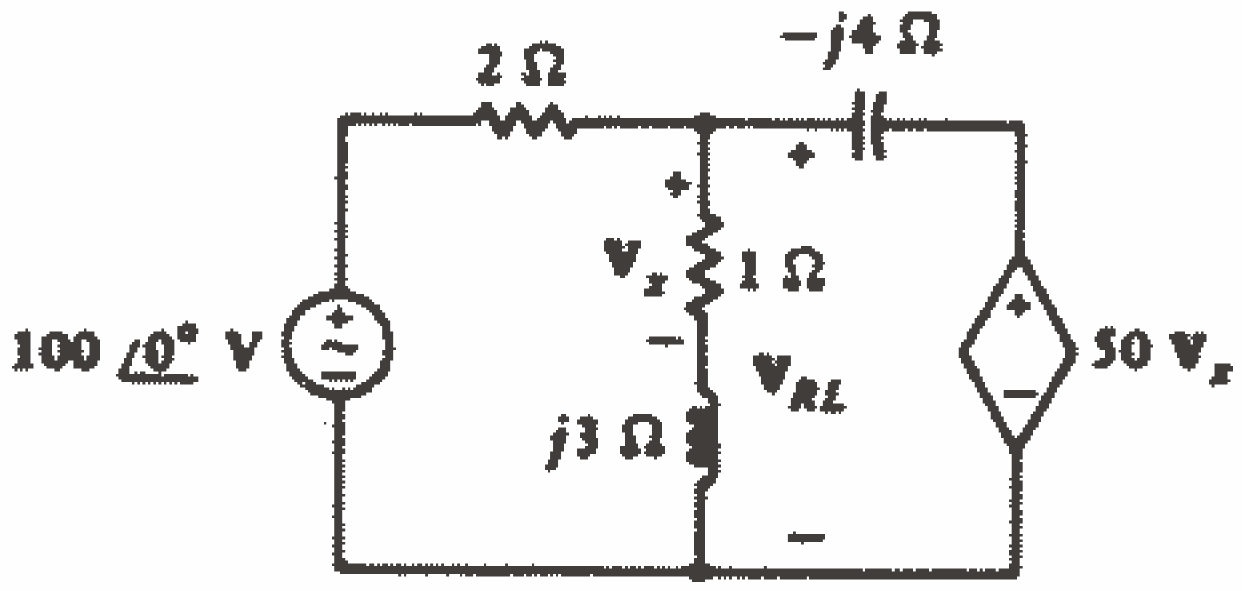
جواب: $\mathbf{I}_c(j$۸۰$) =$ ۱٫۰۳ $\angle -90°\ \text{A}$ ، ۰ ، ۷۰٫۷ ± ، ۱۰۰ ± rad/s



شکل ۱۵ ـ ۱۰: به تمرینات ۷ ـ ۱۰ و ۸ ـ ۱۰ مراجعه کنید.

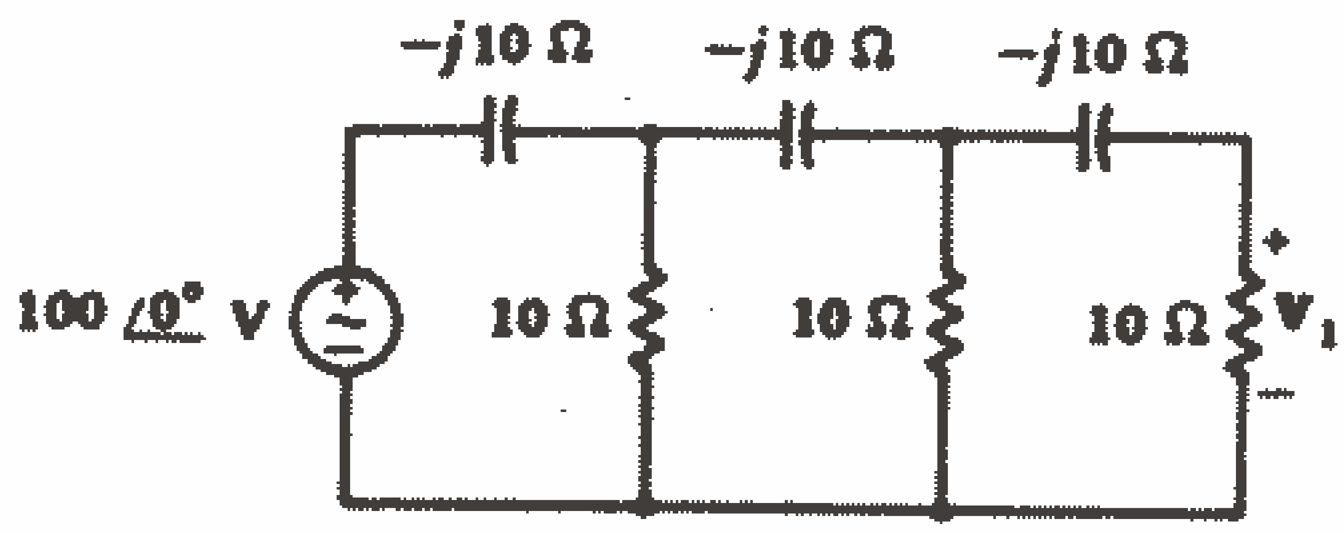
مسائل

۱ ـ با استفاده از تحلیل گرهی در مدار شکل ۱۶ـ۱۰ ولتاژ فیزوری $\mathbf{V}_{RL}$ را پیدا کنید.



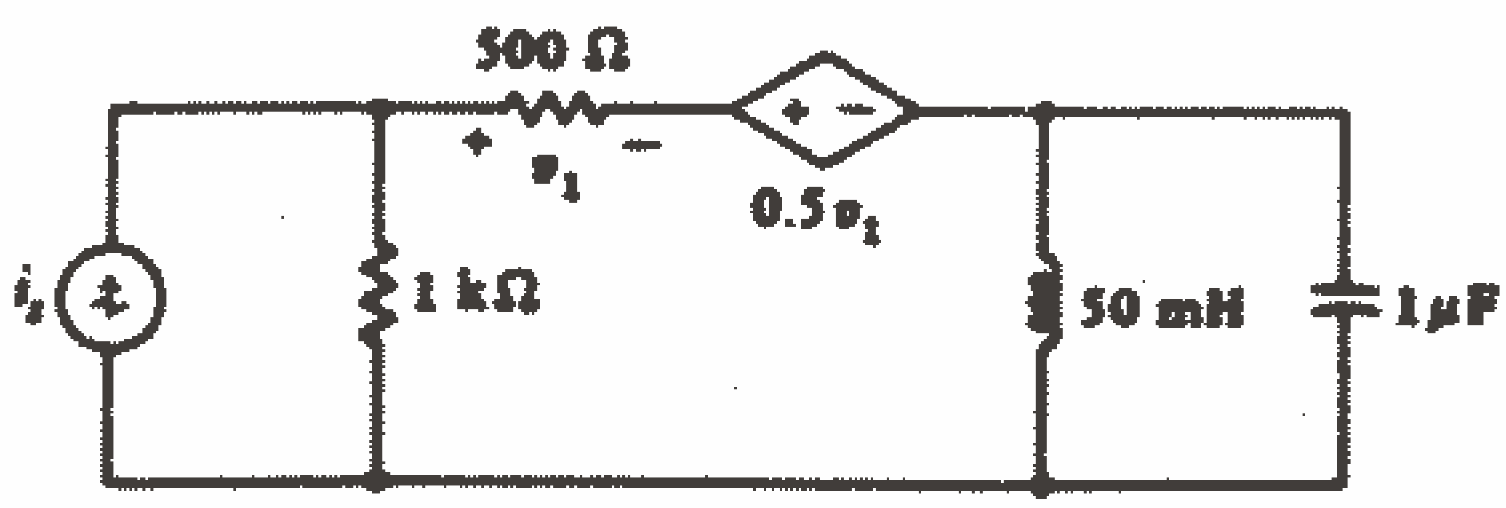
شکل ۱۶ ـ ۱۰: به مسئله ۱ مراجعه کنید.

۲ ـ (a) در شکل ۱۷ ـ ۱۰ $\mathbf{V}_1$ را پیدا کنید. (b) امپدانسهای خازنی را به چه مقداری باید تغییر دهیم تا $\mathbf{V}_1$ به مقدار °۱۸۰ با ولتاژ منبع اختلاف فاز داشته باشد؟



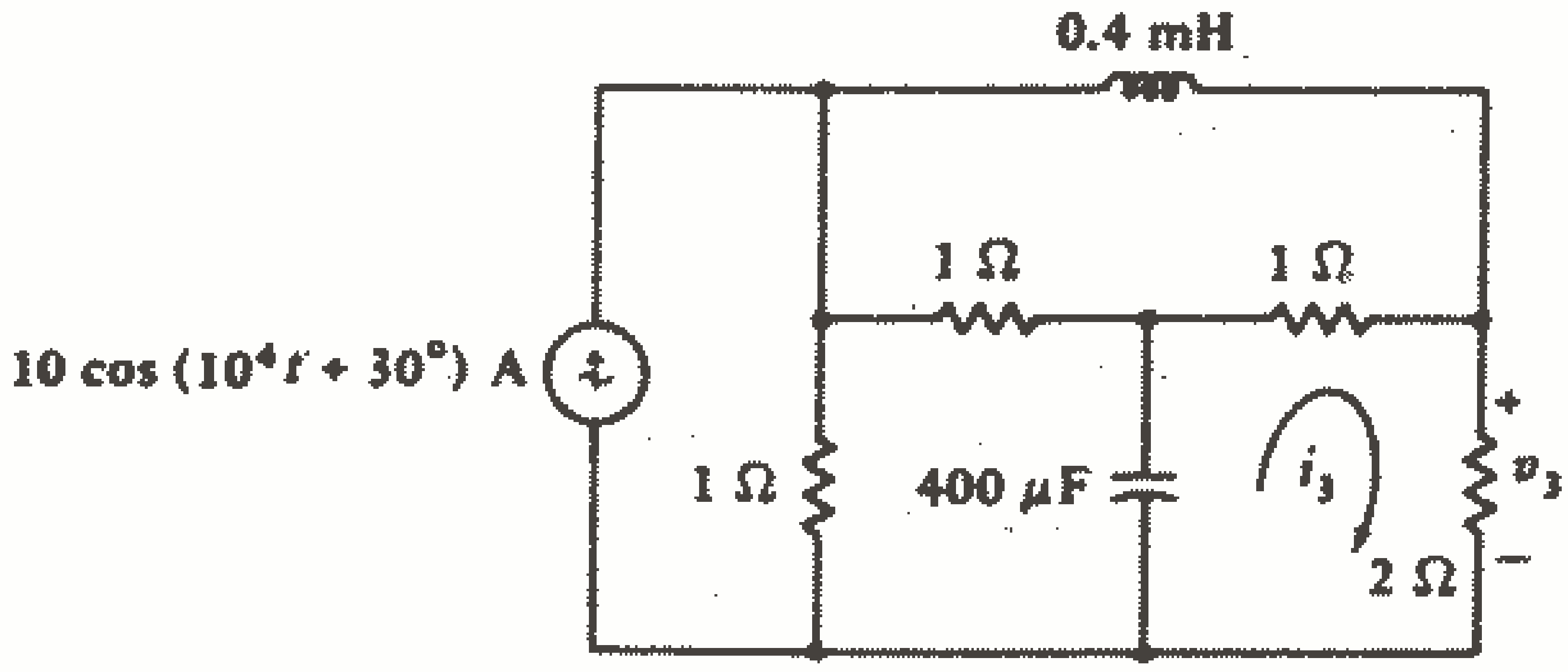
شکل ۱۷ ـ ۱۰: به مسئله ۲ مراجعه کنید.

۳ ـ اگر $i_s(t) = 10^{-3}\ \mathrm{Cos}\,10^{4}t$ باشد در مدار شکل ۱۸ ـ ۱۰ مقدار $v_1(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۱۸ ـ ۱۰: به مسئله ۳ مراجعه کنید.

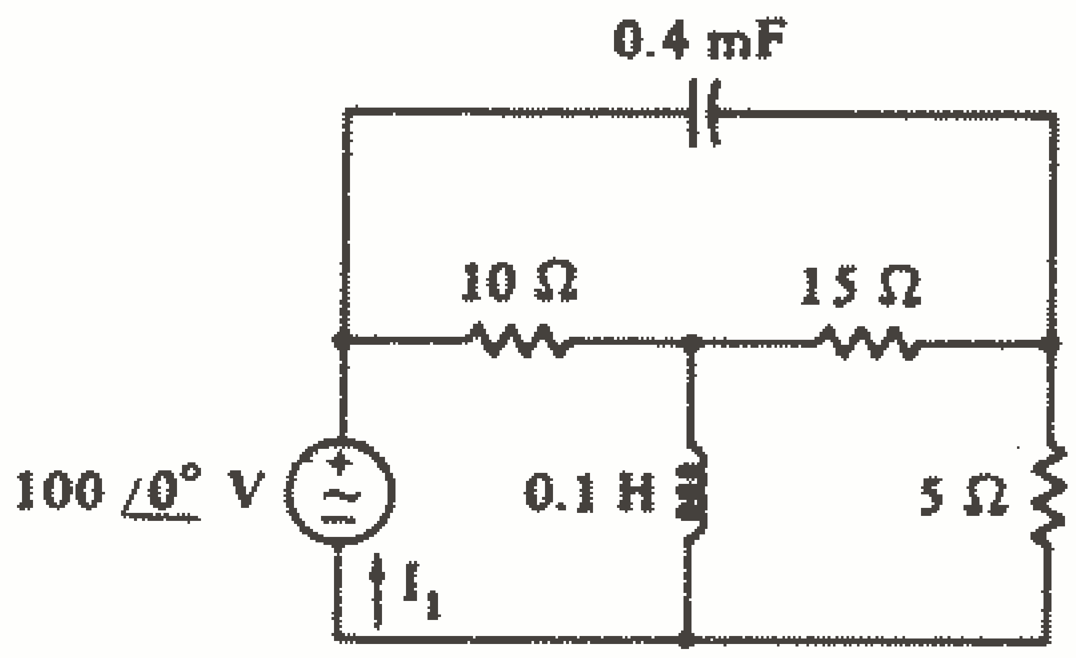
٤ ـ با استفاده از تحلیل گرهی در مدار شکل ۱۹ ـ ۱۰، $v_3(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۱۹ ـ ۱۰: به مسائل ٤ و ۵ مراجعه کنید.

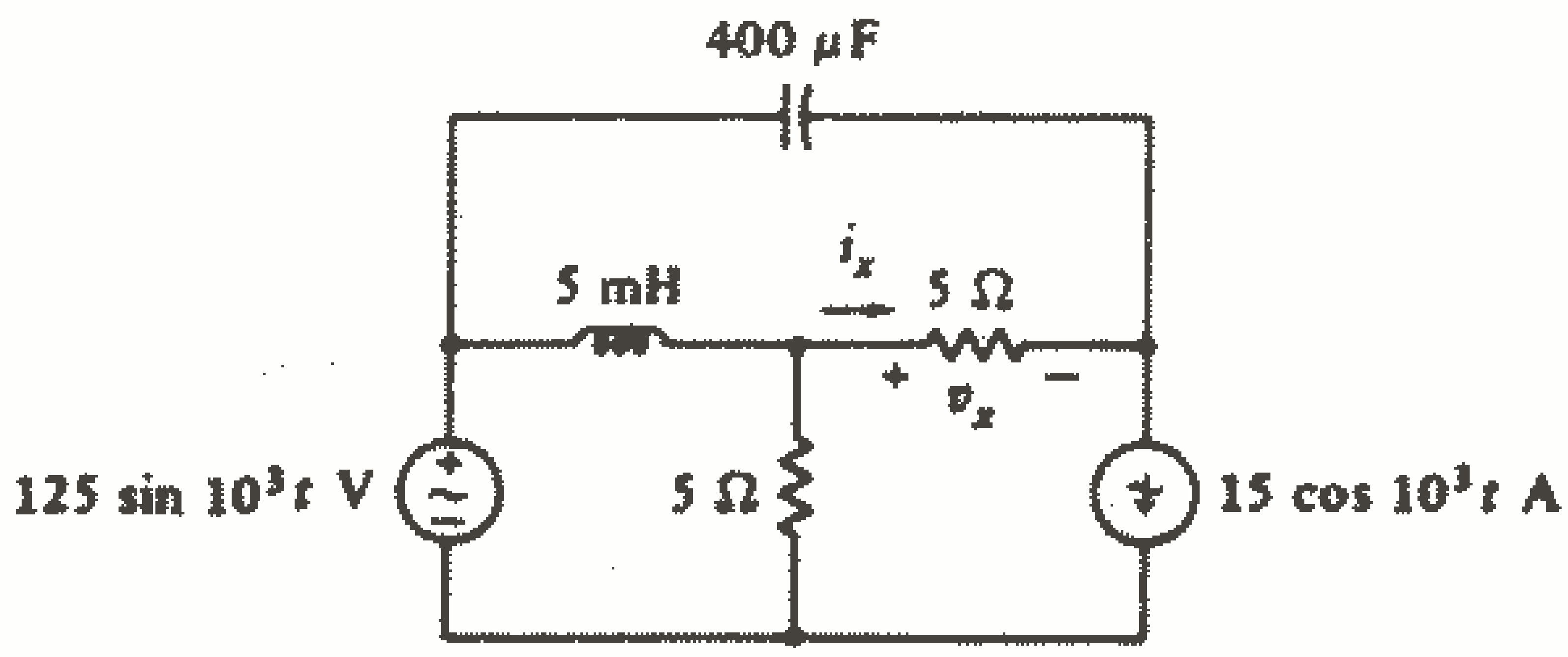
۵ ـ سه معادلهٔ چشمه‌ای نوشته و با حل آنها $i_3(t)$ را در مدار شکل ۱۹ـ۱۰ پیدا کنید.

٦ ـ اگر در منبع شکل ۲۰ ـ ۱۰، $\omega = 100\ rad/_s$ باشد، I_1 را پیدا کنید.



شکل ۲۰ ـ ۱۰: به مسئله ٦ مراجعه کنید.

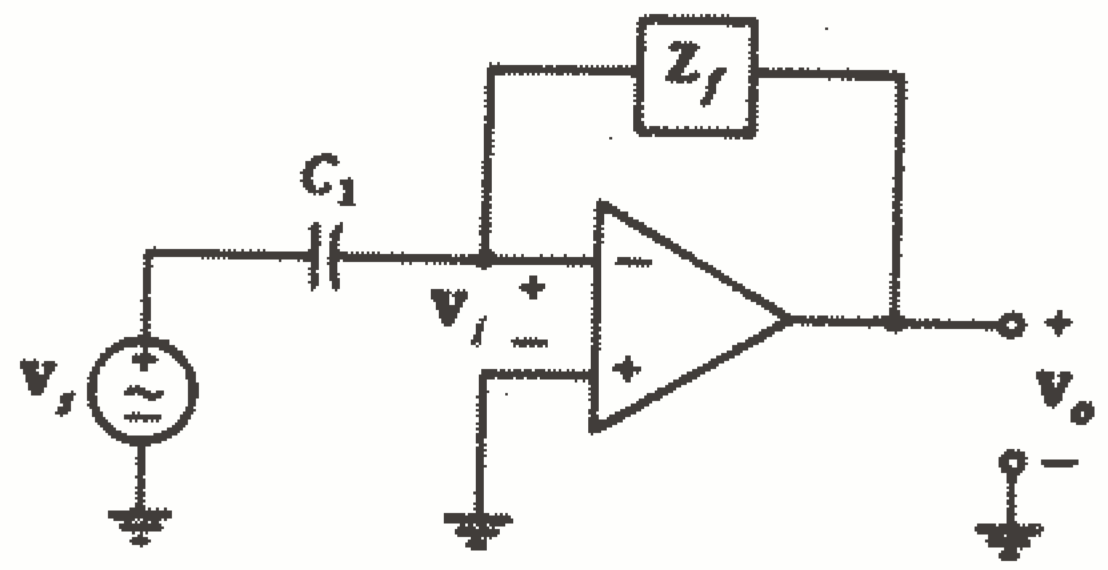
۷ ـ (a) یک درخت برای مدار شکل ۲۱ ـ ۱۰ رسم کنید بطوریکه i_x یک جریان لینک باشد. مجموعهٔ کاملی از جریانهای لینک مشخص کنید و $i_x(t)$ را پیدا کنید. (b) درخت دیگری رسم کنید که در آن v_x یک ولتاژ شاخهٔ درختی باشد و مجموعهٔ کاملی از ولتاژهای شاخه درختی تعیین کنید و $v_x(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۲۱ ـ ۱۰: به مسئله ۷ مراجعه کنید.

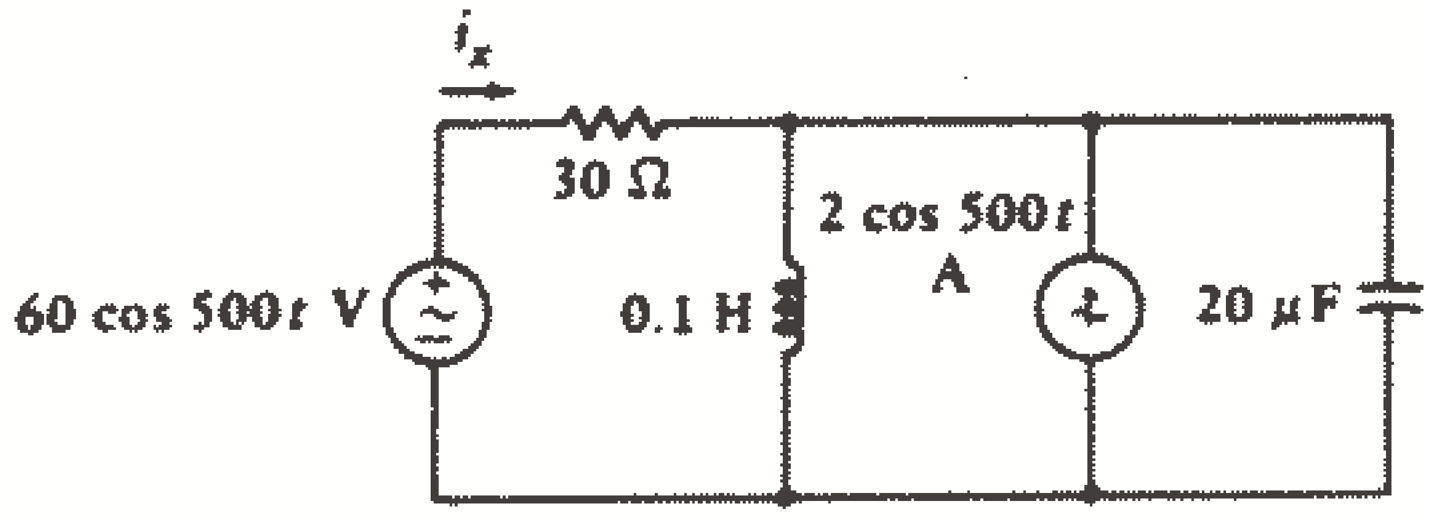
۸ ـ op − amp شکل ۲۲-۱۰ دارای یک امپدانس ورودی بی‌نهایت و امپدانس خروجی صفر و دارای گین بزرگ $A = -V_o / V_i$ می‌باشد. (a) یک مشتق گیر با فرض $Z_f = R_f$ بکشید و V_o / V_s را پیدا کنید و سپس نشان دهید که وقتیکه $A \to \infty$، $V_o / V_s \longrightarrow -j\omega c_1 R_f$. (b) فرض کنید که Z_f عبارت است از R_f موازی با C_f و سپس V_o/V_s را پیدا کنید و نشان دهید که:

$$A \longrightarrow \infty \text{ وقتیکه } V_o/V_s \longrightarrow -j\omega c_1 R_f/(1 + j\omega c_f R_f)$$



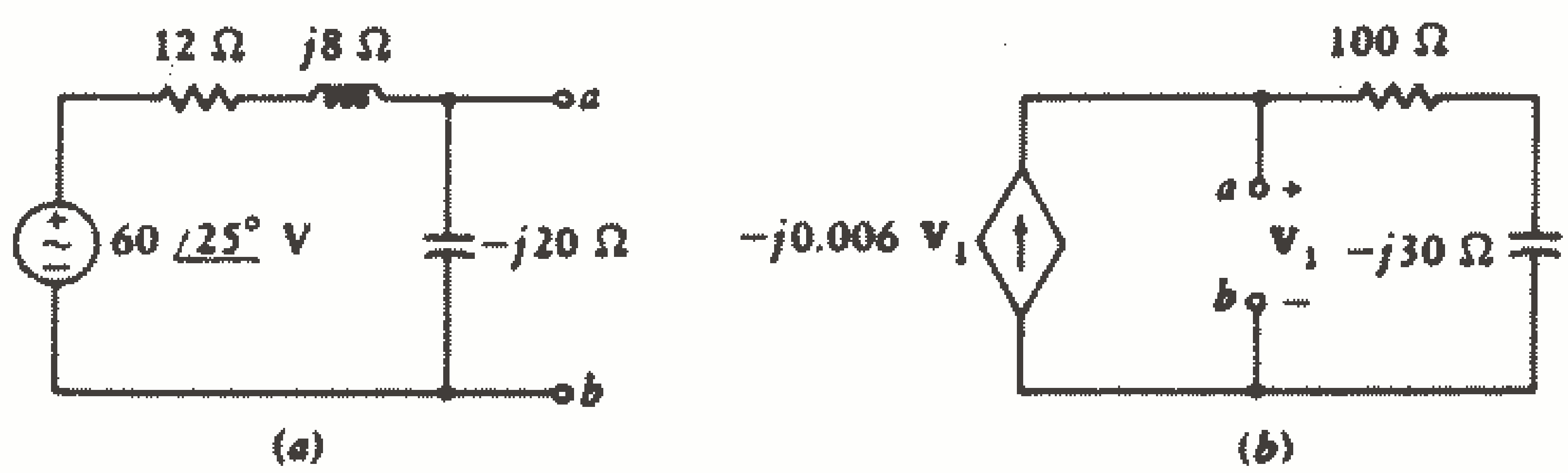
شکل ۲۲ ـ ۱۰: به مسئله ۸ نگاه کنید.

۹ ـ با استفاده از جمع آثار $i_x(t)$ ، I_x را در مدار شکل ۲۳-۱۰ پیدا کنید.



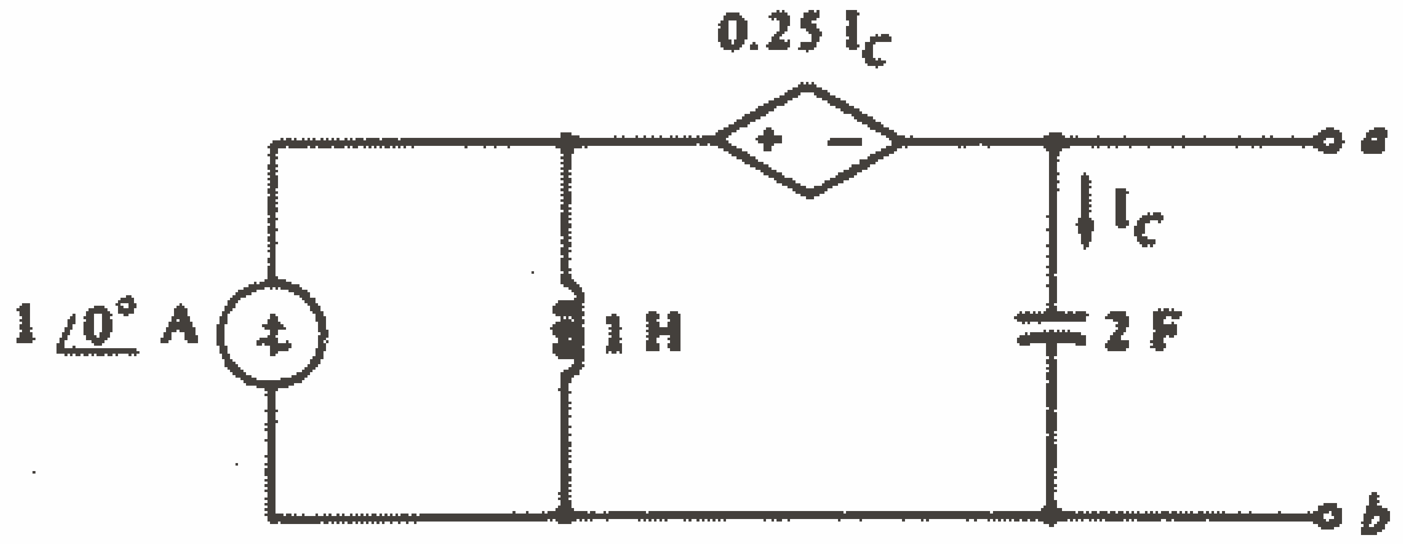
شکل ۲۳ ـ ۱۰: به مسئله ۹ مراجعه کنید.

۱۰ ـ در شکلهای ۲٤a-۱۰ ، ۲٤-۱۰ مدار معادل تونن را پیدا کنید.



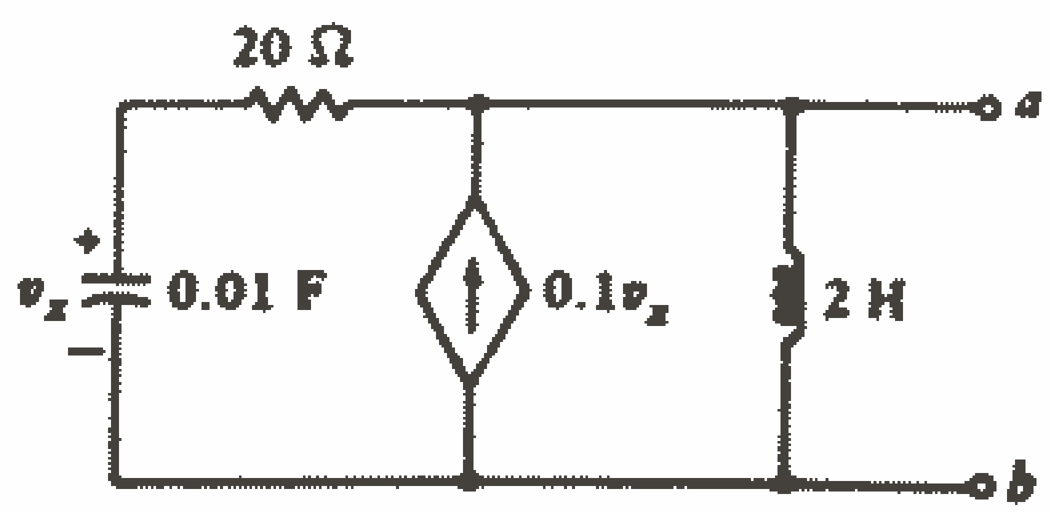
شکل ۲٤ ـ ۱۰: به مسئله ۱۰ مراجعه کنید.

۱۱ ـ در شکل ۲۵-۱۰ فرض کنید $\omega = ۱\ rad/_s$ و معادل تونن را از دید ترمینالهای a-b پیدا کنید و مدار معادل را به‌صورت یک منبع ولتاژ V_{th} به‌طور سری با یک مقاومت R_{th} و یک سلف L_{th} یا یک خازن C_{th} رسم کنید.



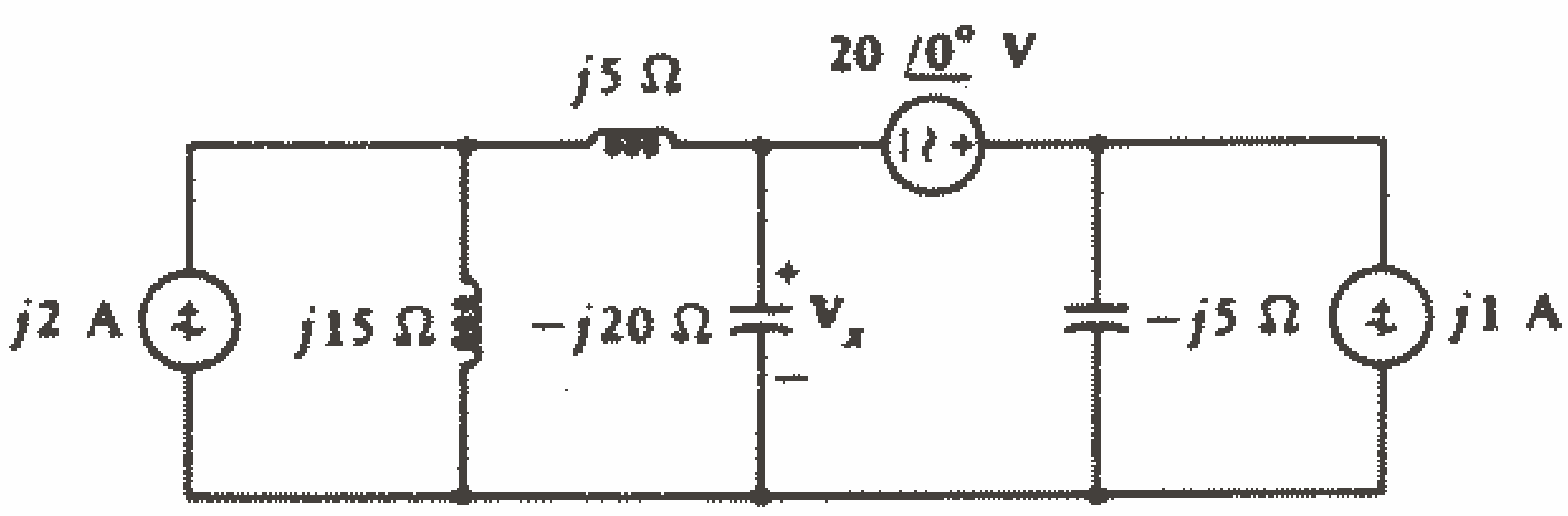
شکل ۲۵ ـ ۱۰: به مسئله ۱۱ مراجعه کنید.

۱۲ ـ مدار معادل تونن مدار شکل ۲۶-۱۰ را در:
(a) $\omega = ۱۰\ rad/_s$, (b) $\omega = ۲۰\ rad/_s$ رسم کنید.



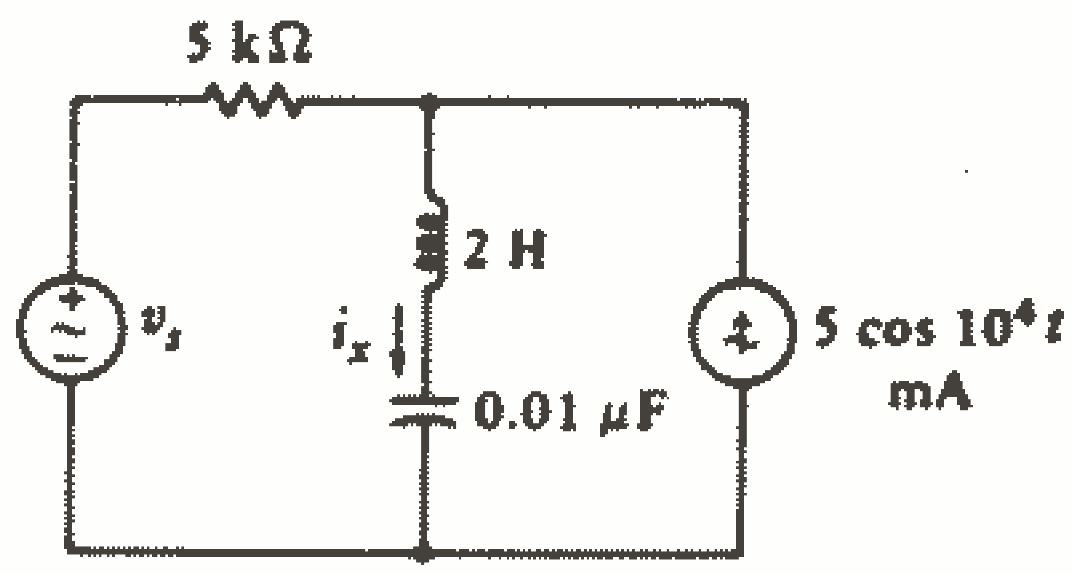
شکل ۲۶ ـ ۱۰: به مسئله ۱۲ مراجعه کنید.

۱۳ ـ V_x را در مدار شکل ۲۷-۱۰ به‌وسیله: (a) جمع آثار (b) تبدیل منابع تکراری، پیدا کنید.



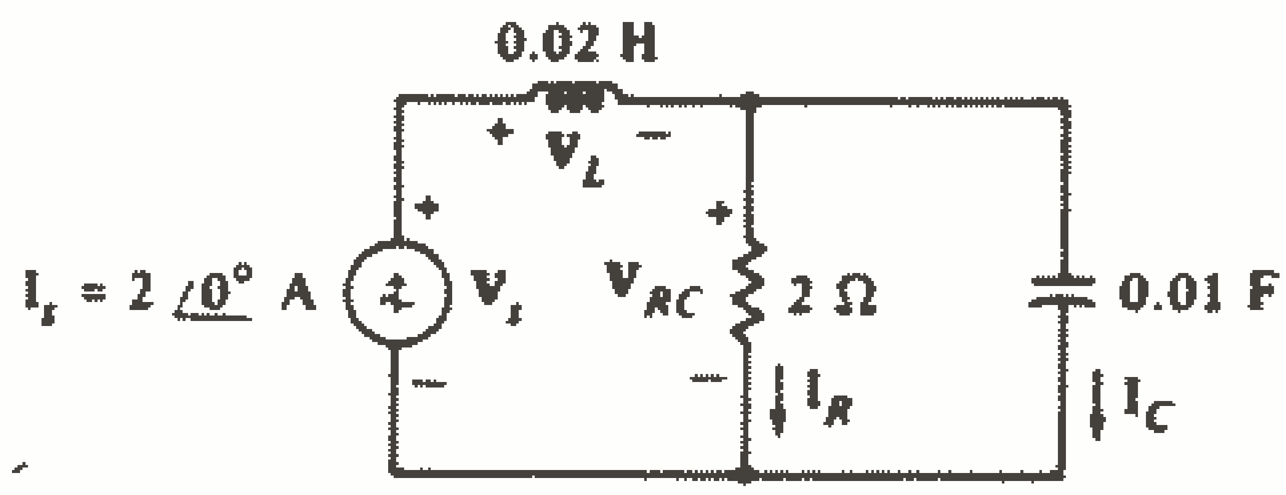
شکل ۲۷ ـ ۱۰: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

۱۴ ـ اگر $v_s(t)$ مقادیر زیر را داشته باشد با استفاده از اصل جمع آثار در مدار شکل ۲۸-۱۰، $i_x(t)$ را پیدا کنید.



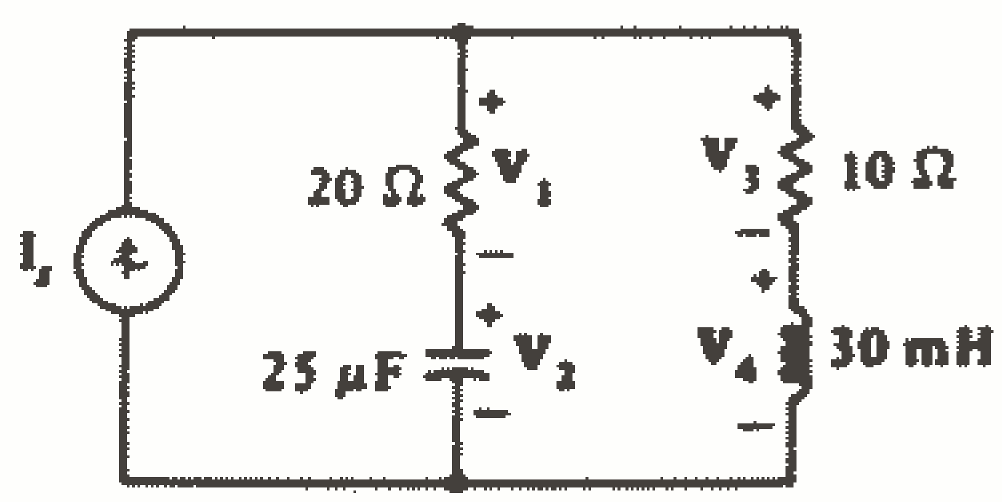
شکل ۲۸ ـ ۱۰: به مسئله ۱۴ مراجعه کنید.

۱۵ ـ در منبع شکل ۲۹-۱۰ فرض کنید $\omega = ۵۰$ rad/s. (a) یک دیاگرام فیزوری بکشید که نشان‌دهندهٔ سه جریان باشد. از مقیاس ۱A/in استفاده کنید. (b) دیاگرام فیزوری دیگری رسم کنید که نشان‌دهندهٔ هر سه جریان با مقیاس ۱V/in باشد.



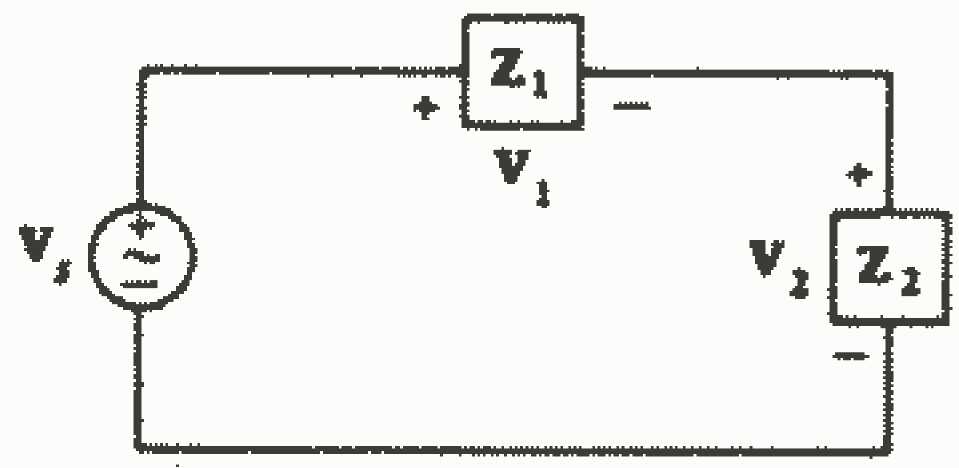
شکل ۲۹ ـ ۱۰: به مسئله ۱۵ مراجعه کنید.

۱۶ ـ در شکل ۳۰-۱۰ فرض کنید I_s یک منبع جریان با دامنهٔ ۳A در ۱۰۰۰ rad/s باشد. با استفاده از این جریان به عنوان فیزور مبنا، چهار ولتاژ مشخص شده را پیدا کنید و آنها را در یک دیاگرام فیزوری دقیق نمایش دهید. و درستی تساوی $V_۱ + V_۲ = V_۳ + V_۴$ را نشان دهید.



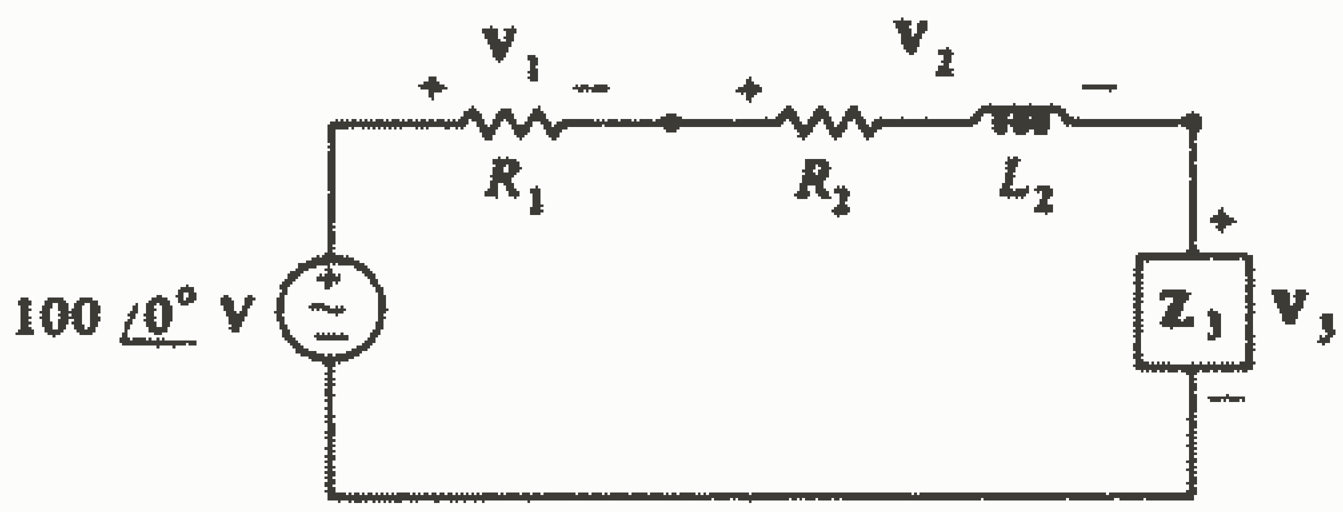
شکل ۳۰ ـ ۱۰: به مسئله ۱۶ مراجعه کنید.

۱۷ ـ در مدار شکل ۳۱-۱۰ فرض کنید $\mathbf{V}_s$ = ۱۰۰ $\angle$۰° V، $|\mathbf{V}_1|$ = ۸۰ V و $|\mathbf{V}_2|$ = ۵۰ V (a) با استفاده از یک دیاگرام فیزوری، V_1 ، V_2 را تعیین کنید. دو جواب وجود دارد، هر دو را پیدا کنید. (b) اگر $\mathbf{Z}_1$ یک امپدانس سلفی و $\mathbf{Z}_2$ یک امپدانس خازنی باشد، $\mathbf{V}_2$ ، $\mathbf{V}_1$ را پیدا کنید.



شکل ۳۱ ـ ۱۰: به مسئله ۱۷ مراجعه کنید.

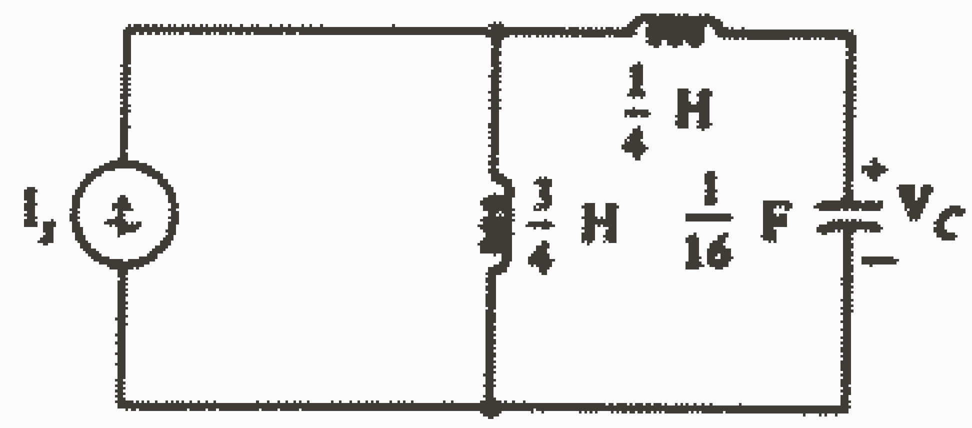
۱۸ ـ در مدار شکل ۳۲-۱۰ می‌دانیم که: $|\mathbf{V}_1|$ = ۵۰ V ، $|\mathbf{V}_2|$ = ۱۲۵ V ، $\mathbf{V}_3$ = ۲۰۰ $\angle$-۴۵° V . با استفاده از روشهای ترسیمی (گونیا، خط‌کش، نقاله، پرگار و سایر وسایل) زاویهٔ $\mathbf{V}_1$ را پیدا کنید. با وجود اینکه ممکن است به‌نظر برسد که این مسئله دو جواب دارد اما یکی صحیح است و دیگری غلط می‌باشد.



شکل ۳۲ ـ ۱۰: به مسئله ۱۸ مراجعه کنید.

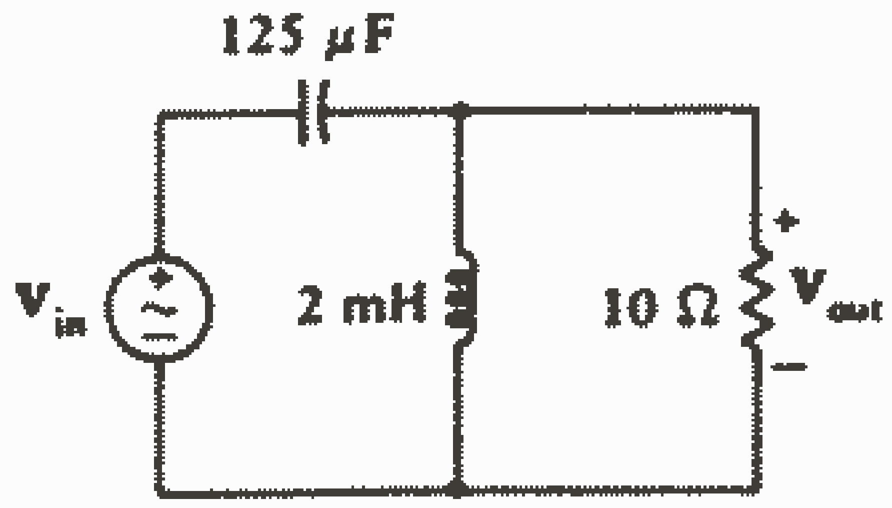
۱۹ ـ یک مقاومت ۴Ω با یک خازن ۱۲۵μF موازی است و کل این مجموعه با یک سلف ۲mH و یک منبع ولتاژ سینوسی $\mathbf{v}_s$ سری می‌باشد. بروش نقطه‌یابی منحنی دامنهٔ نسبت ولتاژ خازن به ولتاژ منبع را رسم کنید (در فاصلهٔ $0 \le \omega \le$ ۵k rad/s).

۲۰ ـ در مدار شکل ۳۳-۱۰: (a) محل کلیه فرکانسهای بحرانی پاسخ $|\mathbf{V}_c/\mathbf{I}_s|$ را مشخص کنید. (b) مقدار پاسخ را در نقطه‌ای بین هر جفت فرکانسهای بحرانی محاسبه کنید. (c) پاسخ را در فاصلهٔ ۱۰- > ω > ۱۰ rad/s رسم کنید.



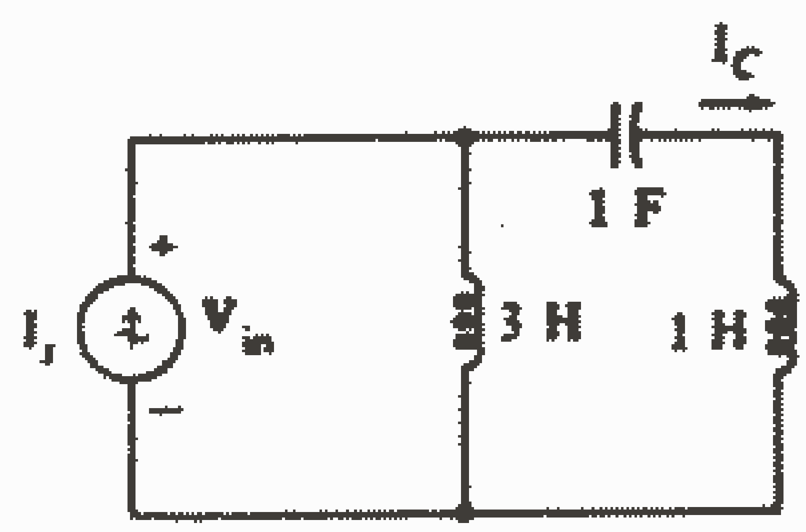
شکل ۳۳ ــ ۱۰: به مسئله ۲۰ مراجعه کنید.

۲۱ ـ در مدار شکل ۳۴-۱۰ منحنی $|V_{out}/V_{in}|$ رانسبت به ω در فاصلهٔ $-۵۰۰۰ < \omega < ۵۰۰۰\ rad/_s$ رسم کنید.



شکل ۳٤ ـ ۱۰: به مسئله ۲۱ مراجعه کنید.

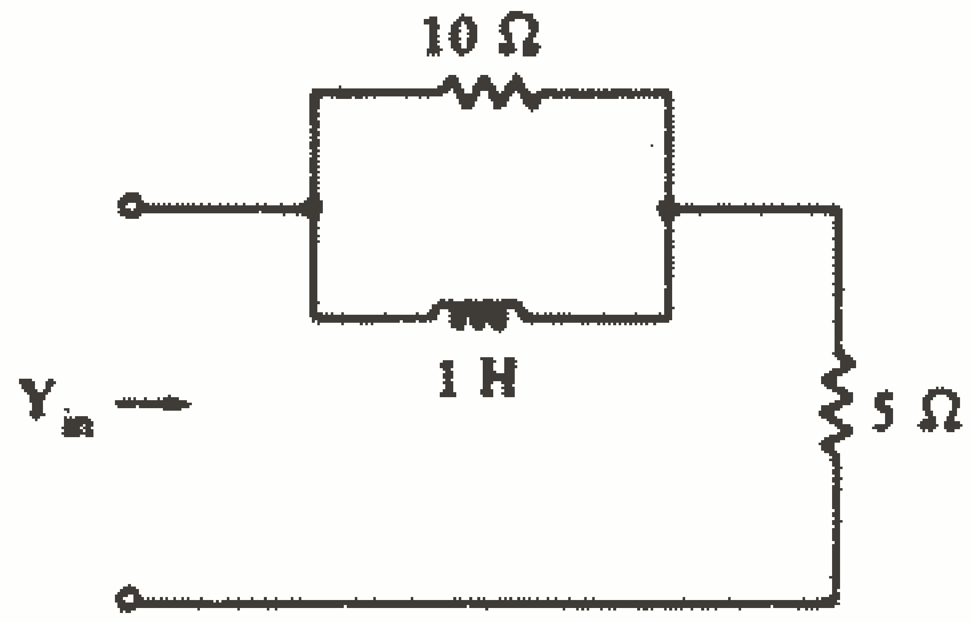
۲۲ ـ در مدار شکل ۳۵-۱۰ کلیه فرکانسهای بحرانی را تعیین کنید و سپس نمودار دامنه و فاز را در حالتهای زیر رسم کنید: (a) V_{in}/I_s ، (b) I_C/I_s.



شکل ۳۵ ـ ۱۰: به مسئله ۲۲ مراجعه کنید.

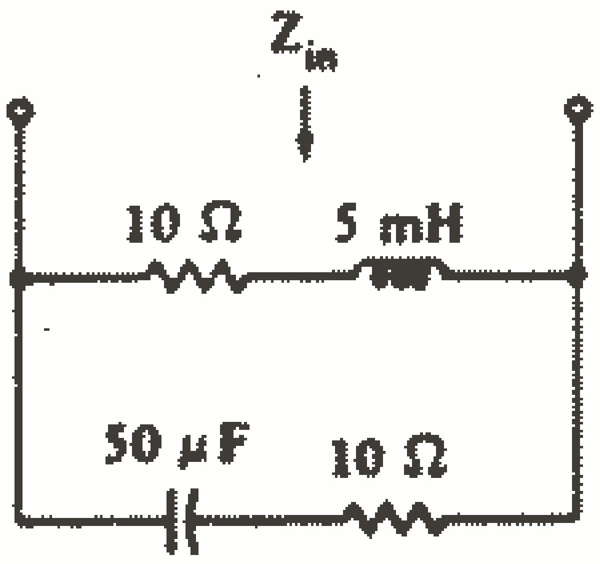
۲۳ ـ یک شبکهٔ دو ترمینالی تشکیل شده است از یک سلف $۸۰mH$ بطور سری با ترکیب موازی سلف $۱۰۰mH$ و خازن $۱۰\mu F$. منحنی‌های دامنه و فاز Z_{in} را نسبت به ω در فاصلهٔ $-۴۰۰۰ < \omega < ۴۰۰۰\ rad/_s$ رسم کنید.

۲٤ ـ در مدار شکل ۳۶-۱۰ منحنی‌های $|Y_{in}|$ ، $ang\ Y_{in}$ را نسبت به ω رسم کنید. بر روی محور طولها ω را در محدودهٔ 0 تا $۳۰\ rad/_s$ در نظر بگیرید.



شکل ۳۶ ـ ۱۰: به مسئله ۲۴ مراجعه کنید.

۲۵ ـ منحنی‌های $|\mathbf{Z}_{in}|$ ، $\text{ang }\mathbf{Z}_{in}$ را نسبت به ω در شبکهٔ دو ترمینالی شکل ۳۷ـ۱۰ رسم کنید.



شکل ۳۷ ـ ۱۰: به مسئله ۲۵ مراجعه کنید.

Appendix 5
Answers to Odd-Numbered Problems

Chapter 1

1 (*a*) 1342 mi/h; (*b*) 196.1 kJ; (*c*) 22.7 days; (*d*) Lois Lane
3 (*a*) 6.97 horses; (*b*) 0.543 liter
5 15 C
7 (*a*) −35.6 mC; (*b*) −34.0 mA; (*c*) 13.41 μC
9 (*a*) 4.38 W; (*b*) 0.400 J
11 (*a*) 0; (*b*) 0
13 −32 W, −16 W, 24 W, 56 W, −32 W

Chapter 2

1 (*a*) 1.667 Ω; (*b*) 0.144 Ω; (*c*) 640 W
3 (*a*) 156.7 ft; (*b*) 1.410 W
5 (*a*) −26 V; (*b*) 320 W; (*c*) 6 V
7 (*a*) −96 W; (*b*) 32 W; (*c*) 21.3 W; (*d*) 16.67 W; (*e*) 10 W
9 (*a*) 51.1 mW; (*b*) 52.2 mW; (*c*) −51.5 mW; (*d*) −51.0 mW
11 (*a*) 1.110 Ω; (*b*) 1.230 Ω; (*c*) 1.241 Ω
13 (*a*) $p_{30} = -600$ W, $p_{0.2} = 80$ W, $p_x = 280$ W, $p_{0.6} = 240$ W; (*b*) 0.7 Ω, 14 V (+ at top), 20 A (down); (*c-a*) 600 W, 80 W, −920 W, 240 W; (*c-b*) −2.3 Ω, 46 V (+ at top), 20 A (up)
15 $p_{0.2} = -148.8$ W, $p_{20} = -1090.9$ W, $p_4 = 743.8$ W, $p_6 = 495.9$ W
17 $p_8 = 10.45$ mW, $p_5 = -45.7$ mW, $p_2 = 41.8$ mW, $p_{-3} = -27.4$ mW, $p_4 = 20.9$ mW
19 (*a*) $p_{25} = 576$ W, $p_5 = -600$ W, $p_x = -120$ W, $p_{100} = 144$ W; (*b*) −120 Ω, 1 A (up), 120 V (+ at top); (*c-a*) 576 W, 600 W, −1320 W, 144 W; (*c-b*) −10.91 Ω, 11 A (down), 120 V (+ at bottom)
21 (*a*) 25 Ω; (*b*) 20.3 Ω; (*c*) 22.5 Ω
23 (*a*) 22.3 Ω; (*b*) 21.8 Ω; (*c*) 22.7 Ω
25 5 A, 17.5 V
27 (*a*) 11.78 m℧; (*b*) 4.32 ℧
29 (*a*) 2.29 mA, (*b*) 2.67 A
31 (*a*) 300 V; (*b*) 120 V; (*c*) 0.333 A
33 (*a*) 1.481 A; (*b*) 5.39 Ω

35 (*a*) 0.999 950 V; (*b*) −50.0 μV; (*c*) 0.999 950 nW
37 (*a*) 2 V; (*b*) 0.5 V

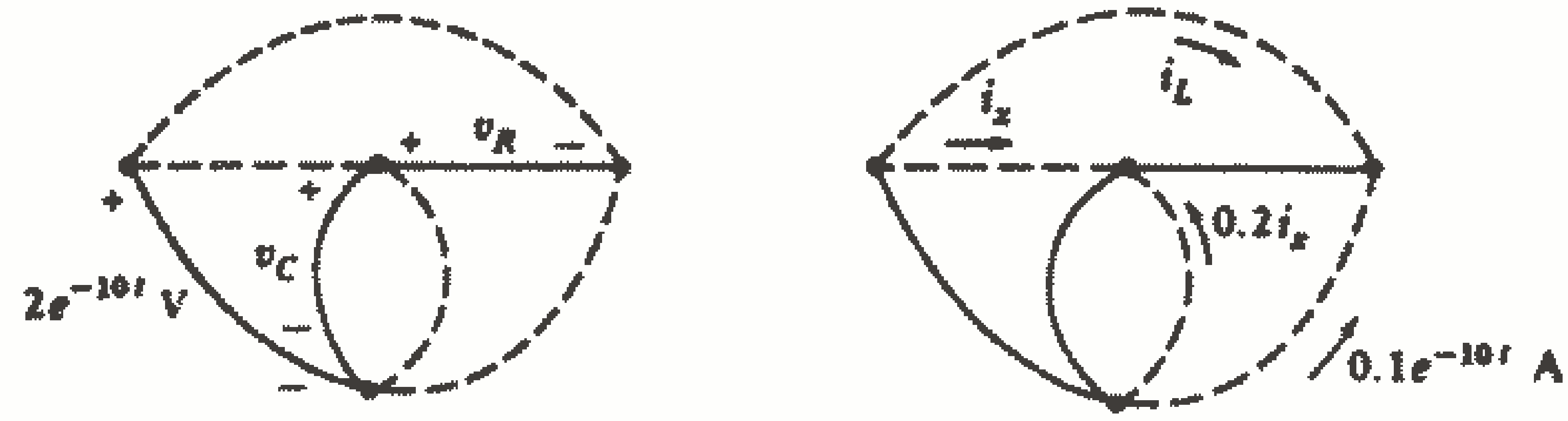
Chapter 3

1 (*a*) −4.83; (*b*) 200
3 (*a*) −60.9 V; (*b*) 195.7 W
5 25.6 W
7 12.13 W
9 (*a*) 2580 W; (*b*) −32 V
11 1 A
13 1.2 A, 4.2 A, 2 A, 3.2 A
15 (*a*) 3.75 A; (*b*) 4.43 A
17 2.625 A, 43.75 V, 45.9 W
19 4 A
21 1.55 V, 1.7 Ω
23 (*a*) 12 Ω, 0.75 W; (*b*) ∞, 6 V; (*c*) 0, 0.5 A
25 (*a*) −22.5 V, −2.4 A, 9.375 Ω; (*b*) −22.5 V, 9.375 Ω; −2.4 A, 9.37
27 (*a*) 32 V, 4 Ω; 8 A, 4 Ω; (*b*) 48.6 V, 3.24 Ω; 15 A, 3.24 Ω
29 (*a*) 20 V, −8 Ω; (*b*) 4 A; (*c*) −4 A
31 238 Ω
33 4.999 500 V, 0.199 976 Ω
35 19.02 V
37 7 V
39 (*a*) $8i_1 + 6(i_1 - 2) - 20 - 4i_1 + 30 = 0$; (*b*) 0.2 A
41 1.818 A

Chapter 4

1 (*a*) −1.618 V; (*b*) 0.0711 V, 0.549 s
3 (*a*) 18 A; (*b*) 160 J; (*c*) 320 W
5 (*a*) $-1 + 0.5\cos 500t + 0.4\sin 500t$ A; (*b*) 0.1633 J
7 (*a*) 90 μJ; (*b*) 94.2 μs
9 (*a*) $10.009e^{-10t} + 0.001$ V; (*b*) $10e^{-10t}$ V
11 (*a*) 0.0677 J; (*b*) 0; (*c*) −8.83 V
13 (*a*) 6.43 H; (*b*) 2.83 H
15 5 in series in parallel with 2 in series
17 (*a*) 9.66 J; (*b*) 7.12 J; (*c*) 11.24 J
19 (*a*) $10^{-3}v_1 + 2\times 10^{-6}(v_1' - v_2') = i_s$, $2\times 10^{-6}(v_2' - v_1') + 200\int_0^t v_2\,dt + 3 = 0$ ($+v_1$ top left, $+v_2$ top right); (*b*) $1000(i_L - i_s) + 5\times 10^5\int_0^t i_L\,dt + 8 + 0.005i_L' = 0$
21 (*a*) See sketch below; $0.2(v_C - 2e^{-10t}) + 0.1v_C' - 0.04(2e^{-10t} - v_C) + 0.05v_R = 0$, $-0.05v_R - 0.1e^{-10t} + 100\int_0^t(-v_R + v_C - 2e^{-10t})\,dt = 0$; (*b*) see sketch below; $5i_x + 10\int_0^t(i_x + 0.2i_x + i_L + 0.1e^{-10t})\,dt - 2e^{-10t} = 0$, $0.01i_L' + 20(i_L + 0.1e^{-10t}) + 10\int_0^t(1.2i_x + i_L + 0.1e^{-10t})\,dt - 2e^{-10t} = 0$

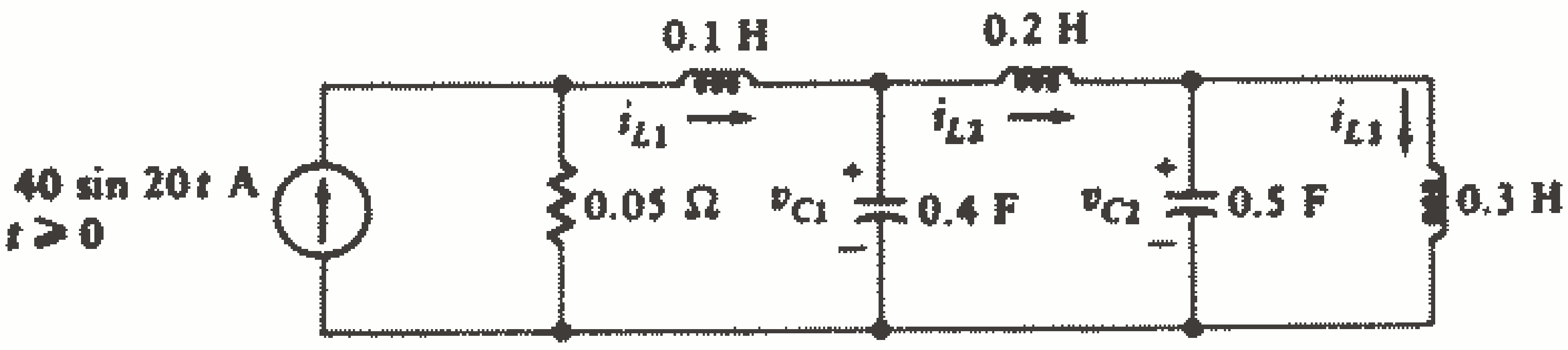
P4-21



(a) (b)

23 See sketch below; $v_{C1}(0) = 8$ V, $v_{C2}(0) = -4$ V, $i_{L1}(0) = 5$ A, $i_{L2}(0) = 6$ A, $i_{L3}(0) = 7$ A

P4-23



25 (a) $2 \times 10^{-4}v_C' + 5000\int_0^t v_C dt + 10 = 0$, OK; (b) $v_{C,\text{dual}} = 10 \cos 5000t + 4 \sin 5000t$ V; (c) self-duals

Chapter 5

1 (a) 5 A, 50 J; (b) $5e^{-2.5t}$ A; (c) $-50e^{-2.5t}$ V
3 (a) $5e^{-125t}$ A, $t_1 = 12.88$ ms; (b) $e^{-20.83(t-t_1)}$ A, $t_2 = 344$ ms
5 12.62 nJ
7 (a) 1.134 s; (b) 4.34 s
9 (a) 8 A; (b) 8 A; (c) 20 Ω; (d) 0.5 ms; (e) $8e^{-2000t}$ A
11 8 mA, $t < 0$, and $4.8e^{-480t}$ mA, $t > 0$; 8 mA, 8 mA, 4.8 mA, 1.838 mA, 0.704 mA
13 $5e^{-5.71t}$ A
15 35 A, 35 A; 35 A, 35 A; 35 A, 8.75 A; 21.2 A, 5.31 A; 12.88 A, 3.22 A
17 (a) 4.49 V; (b) 3.59 V; (c) 8.41 V
19 0.248 C
21 (a) 2 mA, 1.540 mA; (b) 0, 56.9 mW
23 $R_1 = 1742$ Ω, $R_2 = 570$ Ω
25 (a) 34.2 V; (b) $34.2e^{-1916t}$ V
27 (a) 100 V, 0; (b) 100 V, 0, 100 V; (c) 0.01 s; (d) $100e^{-100t}$ V; (e) $40e^{-1130t}$ mA; (f) $20 + 80e^{-100t}$ V, $20 - 20e^{-100t}$ V; (g) 5 + 20 = 25 + 0 mJ
29 $2e^{-400t}$ A
31 500 V, $t < 0$; $250(2e^{-10t} - e^{-2.5t})$ V, $t > 0$

Chapter 6

1 (*a*) 0; (*b*) 1; (*c*) 2; (*d*) 3; (*e*) 4; (*f*) 5; (*g*) 7 (surprise!)

3 (*a*) −1; (*b*) 5; (*c*) 0; (*d*) −3.96; (*e*) $10u(-t) + 2e^{-0.4t}[u(t) - u(t-5)]$

5 120 V, 100 V, 137.5 V, 300 V, 100 V

7 Let $i = i_1 + i_2$. Then the current due to V is $i_1 = V/R$. The current due to $-Vu(-t)$ is $i_2 = (-V/R)u(-t) - (V/R)e^{-Rt/L}u(t)$. Therefore, $i(t) = (V/R)(1 - e^{-Rt/L})u(t)$

9 $2(1 - e^{-40t})$ A

11 (*a*) $25(1 - e^{-40t})$ mA; (*b*) 25 mA, $t < 0$; $50 - 25e^{-40t}$ mA, $t > 0$; (*c*) $12.5(\sin 40t - \cos 40t) + 12.5e^{-40t}$ mA, $t > 0$

13 (*a*) 8.85 A; (*b*) 120 V

15 $10(1 - e^{-267t})u(t)$ A

17 3 A, −0.304 A, 6 V, 12 V

19 0, $t < 0$; $25(1 - e^{-4000t})$ mA, $0 < t < 0.2$ ms; $55 - 41.2e^{-4000(t-0.0002)}$ mA, $t > 0.2$ ms

21 (*a*) 1200 V, 1076 V; (*b*) 999 V

23 $-240u(-t) - (80 + 48e^{-0.2t})u(t)$ V

25 6 V, $t < 0$; $2.4 + 3.6e^{-250t}$ V, $t > 0$

27 (*a*) $-40 + 100e^{-30\,000t}$ V; (*b*) 30.5 μs

29 27.7 μs

31 $2.5e^{-5000t}u(t)$ V

33 $5(e^{-t} - 1)u(t)$ V

Chapter 7

1 1 kΩ, 1.429 μF, 7 H

3 $-1.6e^{-400t} - 0.4e^{-1600t}$ A

5 (*a*) $0.25(e^{-t} + e^{-4t})u(t)$ A; (*b*) 0.322 s

7 (*a*) $80e^{-2t} - 20e^{-8t}$ V; (*b*) $6.4e^{-2t} - 0.4e^{-8t}$ A; (*c*) 2.45 s; (*d*) 2.33 s

9 (*a*) 2.5 kΩ; (*b*) $24e^{-10^6 t}(1 - 10^6 t)$ mA; (*c*) 6.27 μs

11 (*a*) $e^{-4t}(560 \cos 28t - 80 \sin 28t)$ V; (*b*) $e^{-4t}(-2.8 \cos 28t - 9.6 \sin 28t)$ A; (*c*) $e^{-4t}(2.8 \cos 28t - 0.4 \sin 28t)$ A

13 (*a*) $e^{-5t}(200 \cos 10t + 100 \sin 10t)$ V; (*b*) $20 + e^{-5t}(15 \sin 10t - 20 \cos 10t)$ A

15 (*a*) $e^{-2t}(-130 \cos 10t - 26 \sin 10t)$ V; (*b*) 69.4 V, −130 V

17 $e^{-4t}(24 \cos 3t + 32 \sin 3t)$ V

19 (*a*) $-e^{-6000t} + 19e^{-24\,000t}$ A; (*b*) 1.091×10^{10} A/s²

21 (*a*) $4u(-t) + (10.5e^{-4t} - 6.5e^{-8t})u(t)$ A; (*b*) $168e^{-4t} - 52e^{-8t}$ V

23 (*a*) $10 - 10e^{-10t} + 10e^{-40t}$ A; (*b*) 5.28 A, 10 A

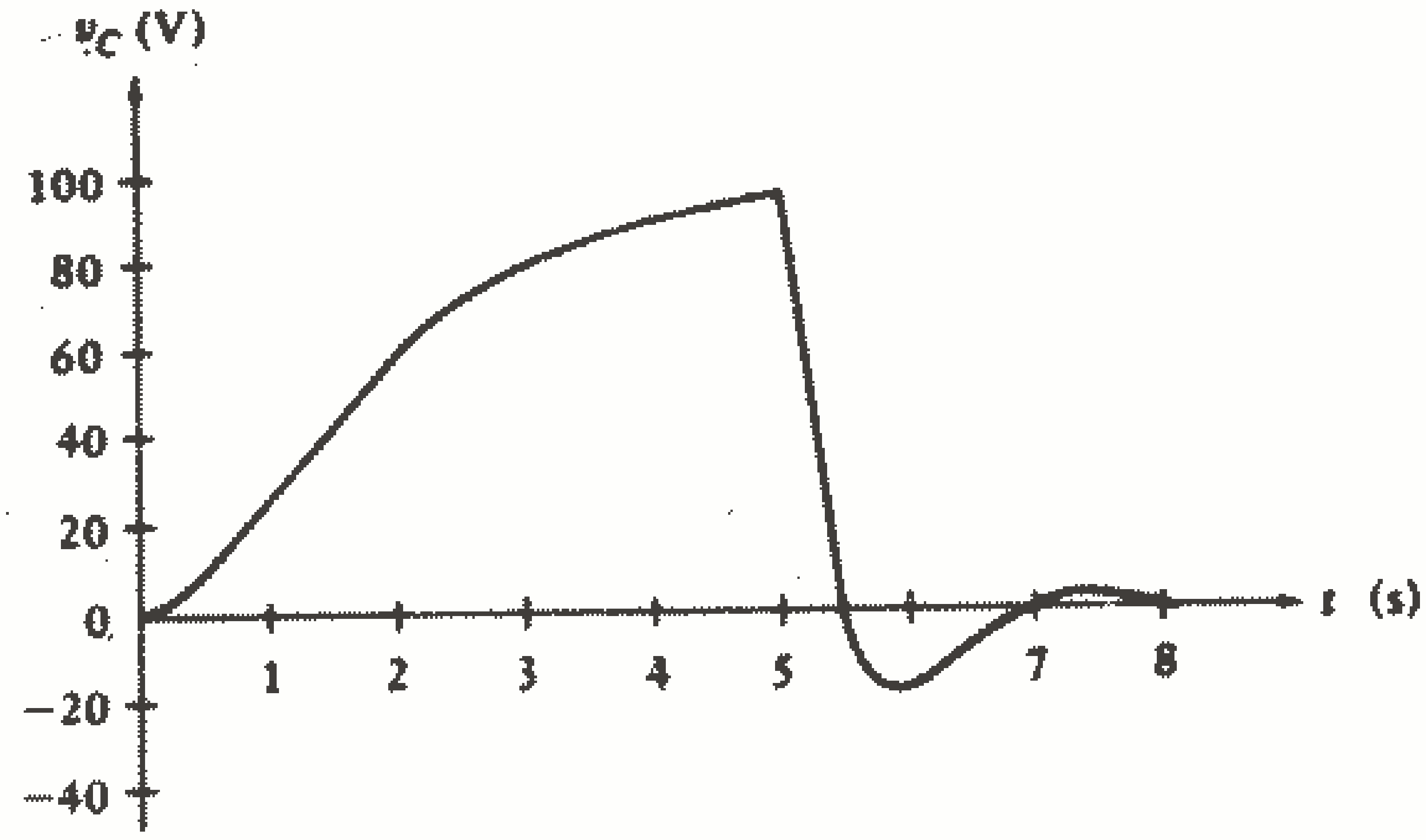
25 (*a*) $320 + e^{-5t}(-160 \cos 15t + 213 \sin 15t)$ V; (*b*) 455 V

27 $0.18 + e^{-500t}(-90t - 0.18)$ A

29 (*a*) $-48 + 64e^{-4t} - 16e^{-8t}$ V; (*b*) 0 V/s², 4096 V/s³

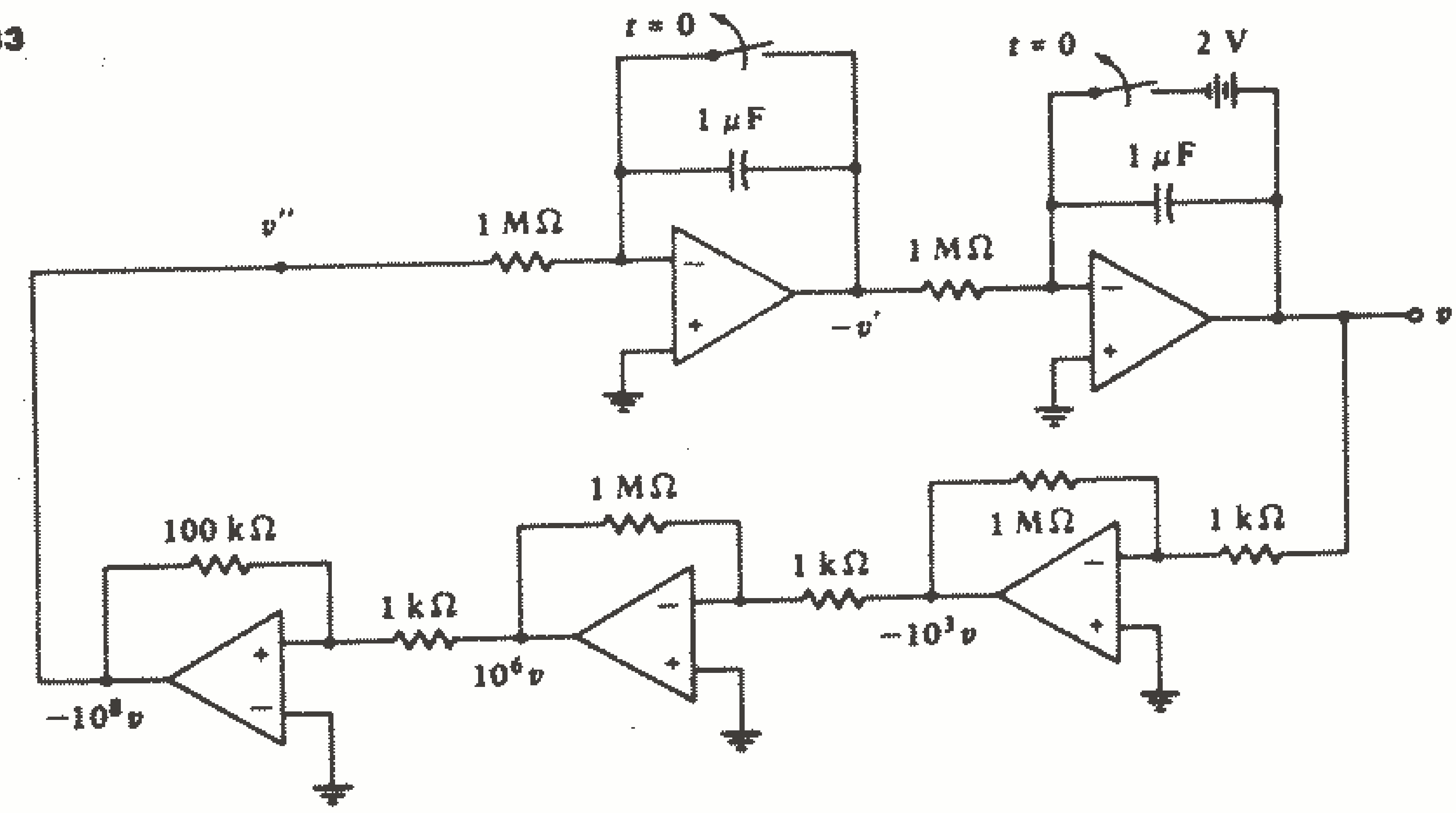
31 (*a*) $100[1 - e^{-t}(t + 1)]$ V, $0 < t < 5$ s; see sketch below; (*b*) $96.0e^{-2(t-5)}\{\cos[2(t-5)] - \sin[2(t-5)]\}$ V, $5 < t < 8$ s; see sketch below

P7-31a,b



33 See sketch below

P7-33



Chapter 8

1 (*a*) 30.2 Hz; (*b*) 33.1 ms; (*c*) 190 rad/s; (*d*) 31.6; (*e*) 34.7°; (*f*) −124.7°; (*g*) 25.9, 73.8°
3 (*a*) $-26.8 \cos 200\pi t + 42.2 \sin 200\pi t$; (*b*) $20.4 \cos (500\pi t - 90°)$
5 28.0 Ω, 11.47 V, $0.410 \cos (500t + 45°)$ A, $16.38 \cos (500t + 135°)$ V
7 (*a*) 1.618 W; (*b*) 1 W; (*c*) 1 W
9 $0.9 \cos (400t - 53.1°)$ A
11 $0.4 \cos (400t - 53.1°) + 0.693 \cos (200t - 33.7°)$

13 (*a*) $-V_m \cos \omega t + Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt = 0,\ \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = -\frac{\omega V_m}{R}\sin \omega t$;

(*b*) $i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \cos\left(\omega t + \tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}\right)$

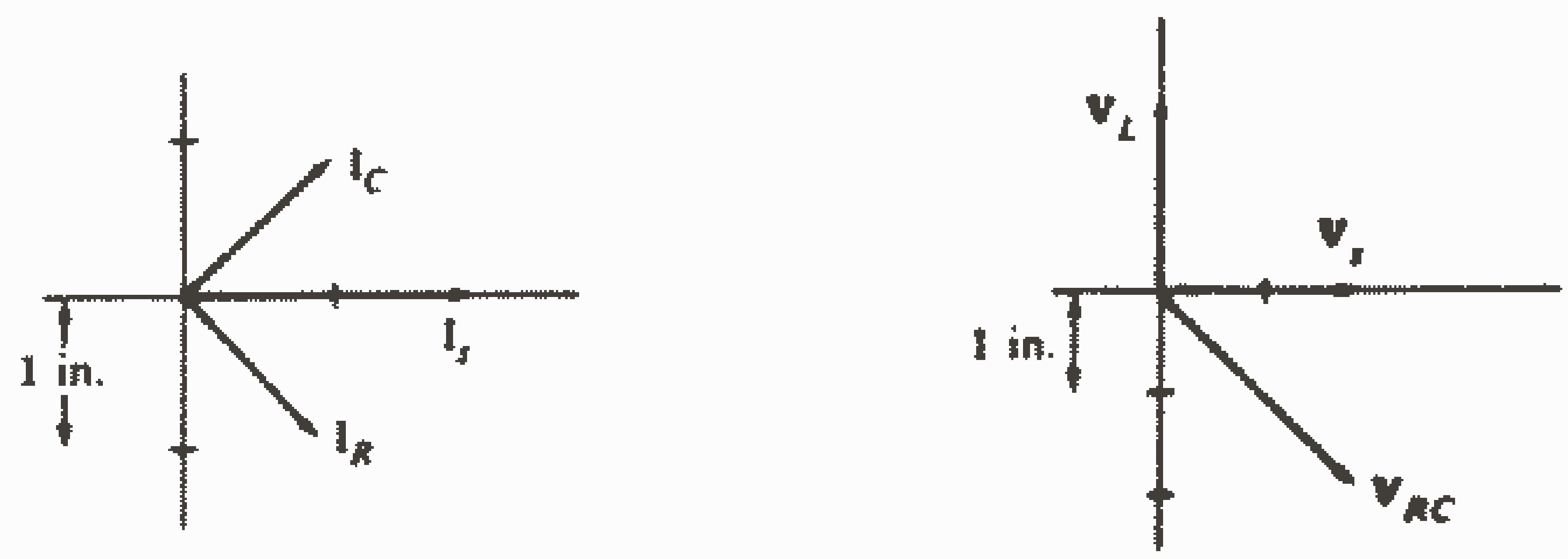
Chapter 9

1 (*a*) $5.60\underline{/-5.24^\circ}$; (*b*) $1.585\underline{/78.1^\circ}$; (*c*) $5.95\underline{/106.9^\circ}$; (*d*) $1.500 + j8.33$; (*e*) $7.02 + j3.84$
3 $162.8e^{j(20t+47.5^\circ)}$ V
5 (*a*) $1.25 \cos (1000t - 114^\circ)$ A; (*b*) $1.25 \cos (1000t - 64^\circ)$ A; (*c*) $1.25e^{j(1000t-3^\circ)}$ A; (*d*) $0.729e^{j(1000t-55.0^\circ)}$ A
7 (*a*) 4.81 A; (*b*) −0.980 A; (*c*) $10.42\underline{/15.62^\circ}$, $10.42 \cos (100t + 15.62^\circ)$ A
9 (*a*) −64.0 V; (*b*) −4.02 A; (*c*) 257 W
11 $3.54 - j2.83$ A
13 $50 \cos (5000t - 135^\circ)$ V, $69.5 \cos (5000t + 40.7^\circ)$ V, $21 \cos (5000t + 38.2^\circ)$ V
15 (*a*) 1/45 H; (*b*) 0.896 H
17 (*a*) $183.5 - j55.0\ \Omega$; (*b*) 0.717 H; (*c*) 20.3 and 196.7 rad/s
19 (*a*) 2.78 mH; (*b*) 0.750 mH
21 (*a*) 50 krad/s; (*b*) 45.9 and 54.5 krad/s
23 (*a*) 436 rad/s; (*b*) 816 rad/s; (*c*) 500 and 2000 rad/s
25 (*a*) 40 krad/s; (*b*) 40 and 10 krad/s; (*c*) 98.0 krad/s; (*d*) 120 krad/s
27 (*a*) 90 Ω, 20 mH; (*b*) 50 Ω, 100 mH

Chapter 10

1 $14.67\underline{/157.6^\circ}$ V
3 $0.285 \cos (10^4 t + 4.09^\circ)$ V
5 $0.808 \cos (10^4 t - 46.0^\circ)$ A
7 (*a*) Tree: 400 μF, v_s, central 5 Ω; i_L to right in 5 mH; $i_x(t) = 8.98 \cos (1000t + 158.2^\circ)$ A; (*b*) tree: v_s, 400 μF, right 5 Ω; v_C with + at left: $v_x(t) = 44.9 \cos (1000t + 158.2^\circ)$ V
9 $2\underline{/-146.6^\circ}$ and $2 \cos (500t - 146.6^\circ)$ A
11 $0.894\underline{/-63.4^\circ}$ V in series with 0.4 Ω and 1.25 F
13 (*a*) and (*b*) $\mathbf{V}_x = -7.5 + j0$ V
15 See sketches below

P10-15

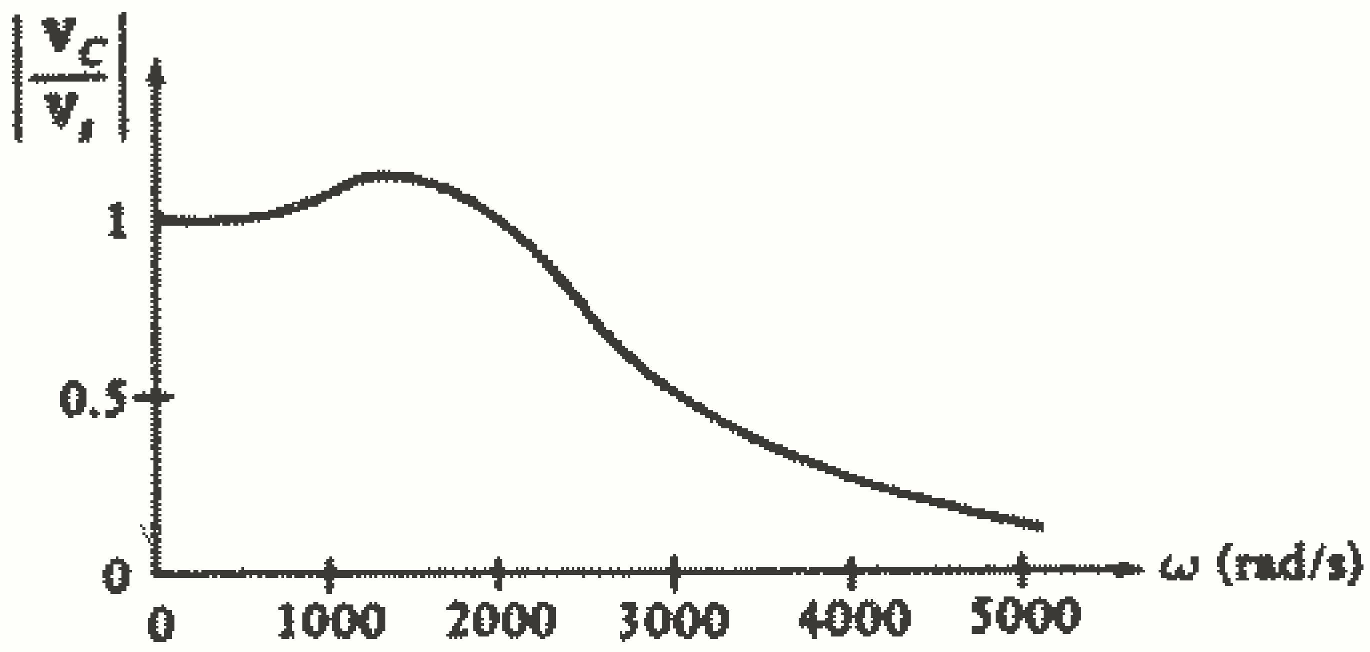


(*a*) (*b*)

17 (*a*) $\mathbf{V}_1 = 80\underline{/30^\circ}(29.69^\circ)$ V, $\mathbf{V}_2 = 50\underline{/-52^\circ}(-52.41^\circ)$ V or $\mathbf{V}_1 = 80\underline{/-30^\circ}$ V, $\mathbf{V}_2 = 50\underline{/52^\circ}$ V, (*b*) $\mathbf{V}_1 = 80\underline{/30^\circ}$ V, $\mathbf{V}_2 = 50\underline{/-52^\circ}$ V

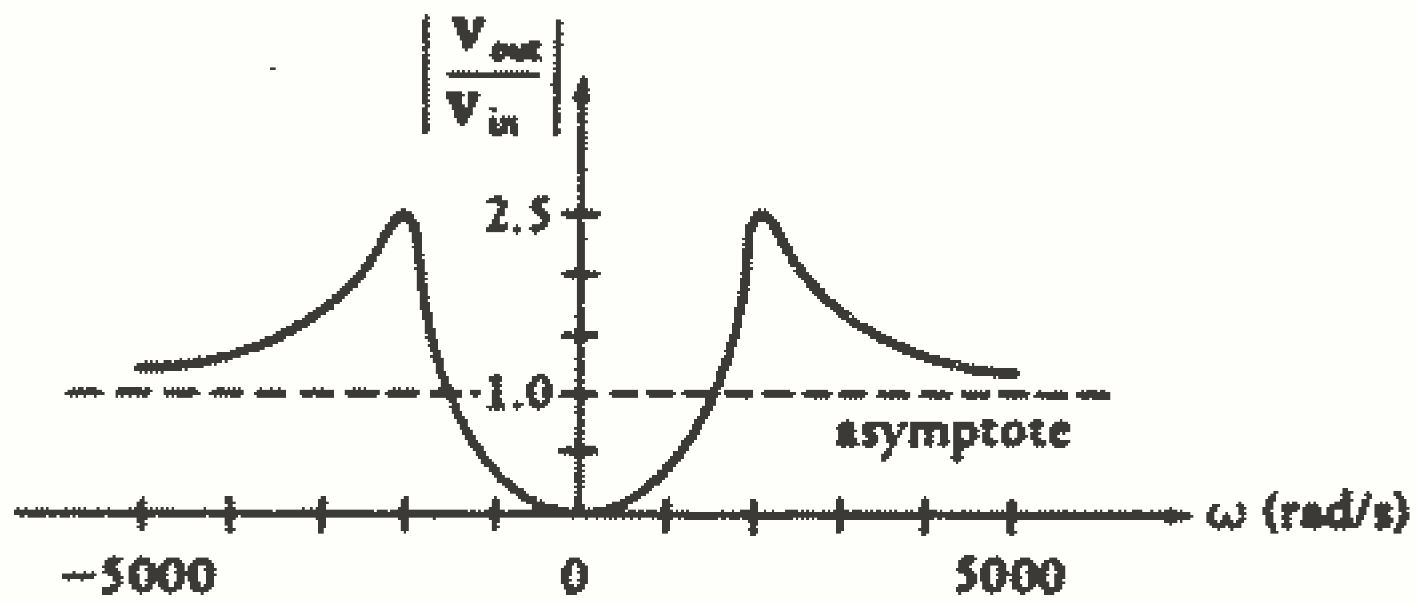
19 See sketch below

P10-19



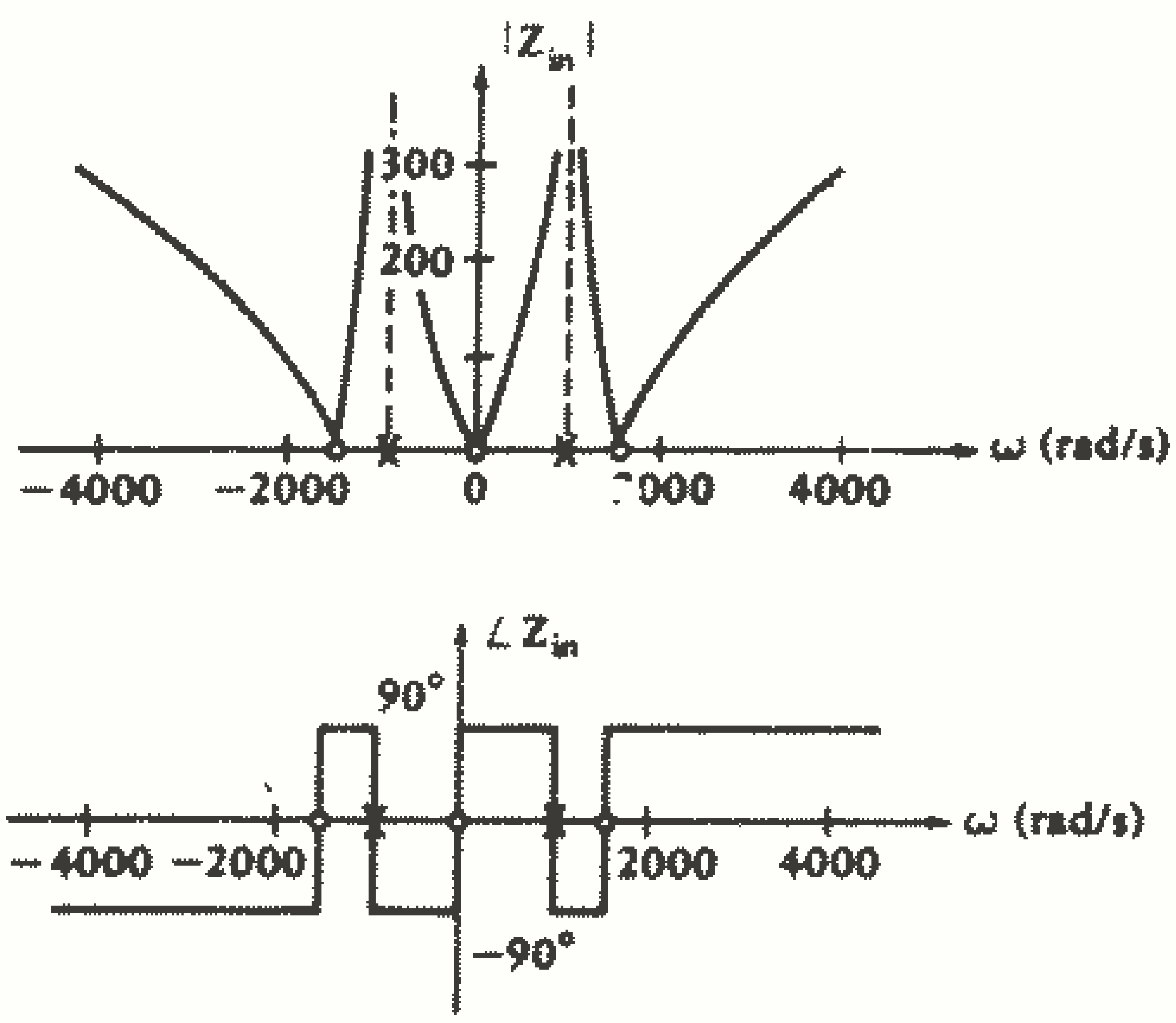
21 See sketch below

P10-21



23 See sketches below

P10-23



P10-28