جزوه دینامیک ماشین

استاد مشکینی

فصل اول: مقدمات و مفاهیم اساسی

(فصل اول کتاب مارتین)

سینماتیک ماشین:

مطالعه و تجزیه و تحلیل راجع به حرکت نسبی اجزاء ماشین شامل تجزیه و تحلیل مکان، سرعت و شتاب

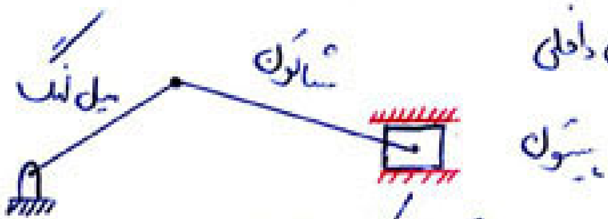
دینامیک ماشین:

مطالعه و بررسی نیروهای وارد بر اجزاء یک ماشین و حرکات ناشی از این نیروها

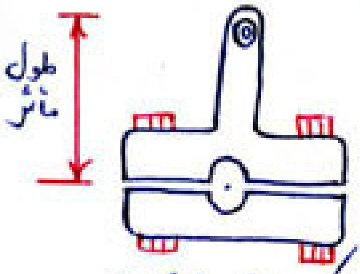
نمودار سینماتیکی: (Kinematic diagram)

نموداری است که در آن بعد یا ابعادی از یک اهرم رسم می‌شود که در حرکت آن مکانیزم مؤثرند.

مثال: نمودار سینماتیکی یک موتور احتراق داخلی



همانطور که در نمودار سینماتیکی اهرمی رسم می‌شود در واقع از شکل واقعی آن اطلاعاتی در دست نیست. لذا هر نقطه از یک صفحه می‌تواند ذره‌ای از آن اهرم باشد.



(شکل واقعی شاتون)

اهرم: (Link)

✓ اهرم ساده‌ترین عضو از یک مکانیزم است که با اتصال آن به اعضاء مجاور به نحوی که این اعضاء بتوانند نسبت به هم جابجا شوند، کار یا عملی خاص انجام می‌شود. شکل هندسی اهرم‌ها زیاد اهمیت نمی‌باشد و طول شاتون، فاصله بین مفاصل است. مثال:

این مکانیزم دارای ۴ اهرم است.

تکیه‌گاه زمین خود یک اهرم محسوب می‌شود.

✓ عضوی که حرکت یا شکل آن تأثیری در حرکت نداشته باشد و یا صرفاً ساده کننده باشد، عضو حساب نمی‌شود.

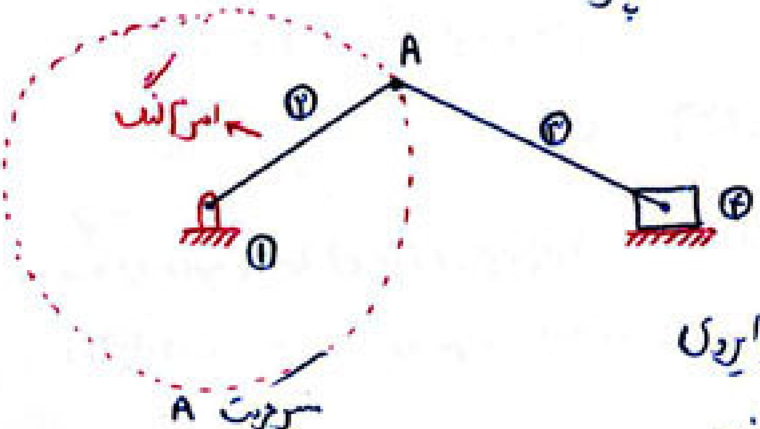
انواع اهرم:

- اهرم پایه: دستگاه مختصات مرجع به آن وصل بوده و حرکت سایر اهرم نسبت به آن تحلیل می‌شود. (زمین)
- اهرم ورودی: معمولاً متصل به اهرم پایه بوده و تمهیدات سینماتیکی به آن وارد می‌شود.
- اهرم خروجی: معمولاً متصل به اهرم پایه بوده و تمهیدات سینماتیکی از آن گرفته می‌شود.
- اهرم رابط: اهرم مابین اهرم ورودی و اهرم خروجی را اهرم رابط گویند.

انواع اهرم از لحاظ دامنه نوسان (حرکت):

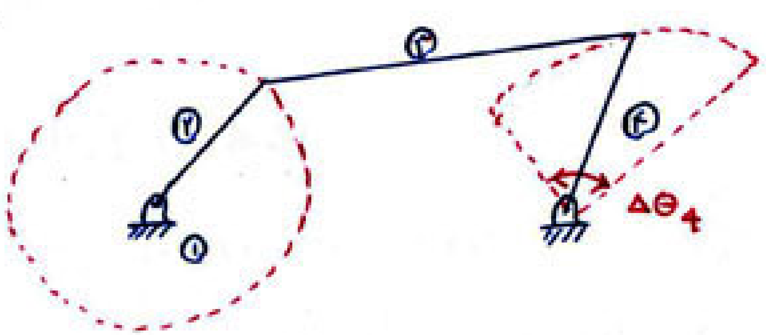
- اهرم لنگ (Crank):

اهرمی است که بتواند در خلال حرکت به میزان 360° بچرخد.



- اهرم اسبک یا آونگ (رقصنده) Rocker:

اهرمی که در خلال حرکت بتواند بخشی از یک مسیر دایروی
و یا به عبارت دیگر زاویه‌ای کمتر از 360° نوسان کند.



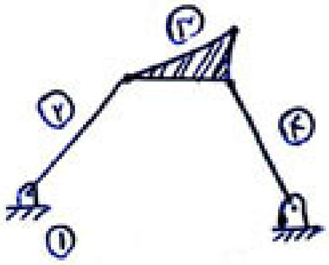
به ازای چرخش کامل اهرم ۲ (Crank) اهرم ۴ (Rocker) فقط در بازه $\Delta\theta_4$ نوسان می‌کند.

اهرم ساده و اهرم مرکب:

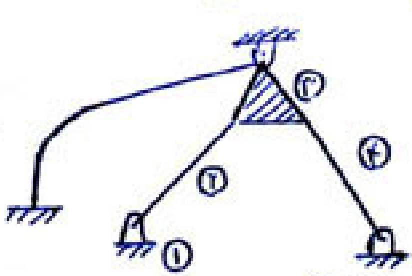
- اگر اهرمی حداکثر ۲ مفصل داشته باشد آن اهرم را اهرم ساده گویند (Simple link)
- اگر اهرمی بیش از ۲ مفصل داشته باشد آن اهرم را اهرم مرکب گویند (Complex link)

* مفصل: محل اتصال دو اهرم که بتوانند نسبت بهم جابجا شوند.

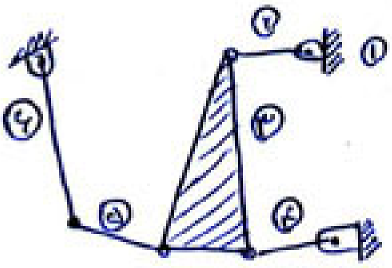
مثال: اهرم‌های ساده و مرکب را مشخص نمایید:



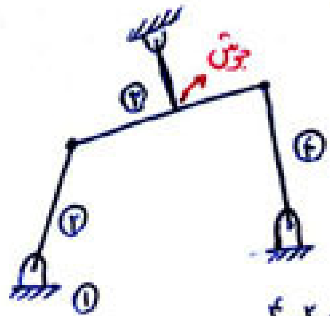
اهرم‌های ساده: ۱-۲-۳-۴
اهرم‌های مرکب: —



اهرم‌های ساده: ۲ ، ۴
اهرم‌های مرکب: ۱-۳



اهرم‌های ساده: ۲ و ۴ و ۵ و ۶
اهرم‌های مرکب: ۱ و ۳

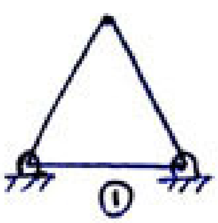


اهرم‌های ساده: ۲ و ۴
اهرم‌های مرکب: ۱ و ۳

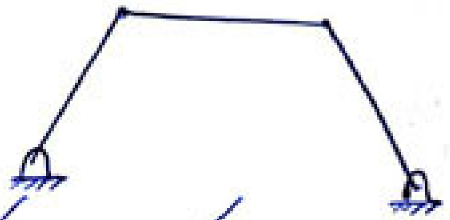
(ولی بعدها خواهیم خواند که به دلیل اینکه درجه آزادی این مجموعه (۱=) است این مجموعه حرکت ندارد و کل آن زمین یا اهرم ثابت محسوب می‌شود.)

زنجیرهٔ سینماتیکی (Kinematic chain):

- یک زنجیره سینماتیکی عبارت است از یک مجموعه میله‌های صلب که ضمن اتصال با مفاصل با یکدیگر می‌توانند دارای حرکت نسبی باشند. اگر یکی از میله‌ها ثابت باشد و حرکت یکی دیگر از میله‌ها باعث حرکت سایر میله‌ها گردد به نحوی که حرکت و وضعیت آن میله‌ها قابل پیش‌بینی باشد به آن زنجیره سینماتیکی مقید یا مکانیزم می‌گویند. همچنین اگر یکی از میله‌ها ثابت باشد و با حرکت یکی دیگر از میله‌ها حرکت و وضعیت سایر میله‌ها قابل پیش‌بینی نباشد به آن زنجیره سینماتیکی غیر مقید می‌گویند.
- در تعریفی دیگر اگر حرکت یکی از میله‌ها هیچ‌گونه حرکتی در سایر میله‌ها ایجاد نکند به آن مجموعه دیگر زنجیره سینماتیکی گفته نمی‌شود و یک سازه است. (مثل مثال زیر)

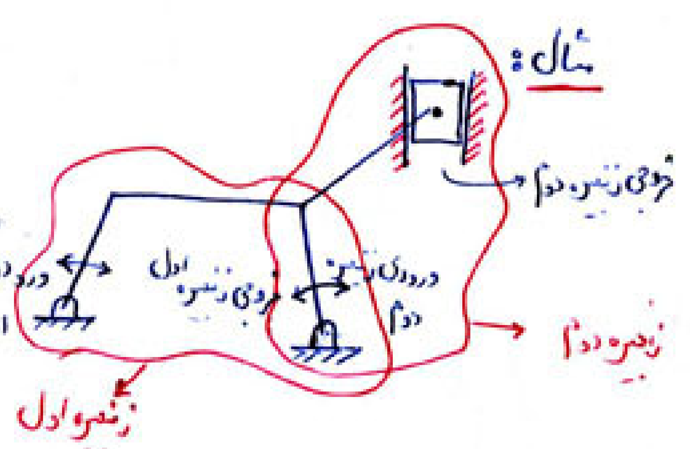


یک مکانیزم (زنجیره سینماتیکی معین) ممکن است از چندین زنجیره سینماتیکی حاصل شود. به نحوی که خروجی زنجیره اول، ورودی زنجیره دوم باشد و ...



مکانیزم ۴ میله‌ای: یک زنجیره سینماتیکی معین

مثال:



مکانیزم ۴ میله‌ای

یک زنجیره سینماتیکی معین با چهار عضو (شامل عضو ثابت در زمین)، لعضو ورودی، عضو خروجی و عضو رابط با یک درجه آزادی

رابطه گراشف: $L + S < P + Q$ (Large, Small)

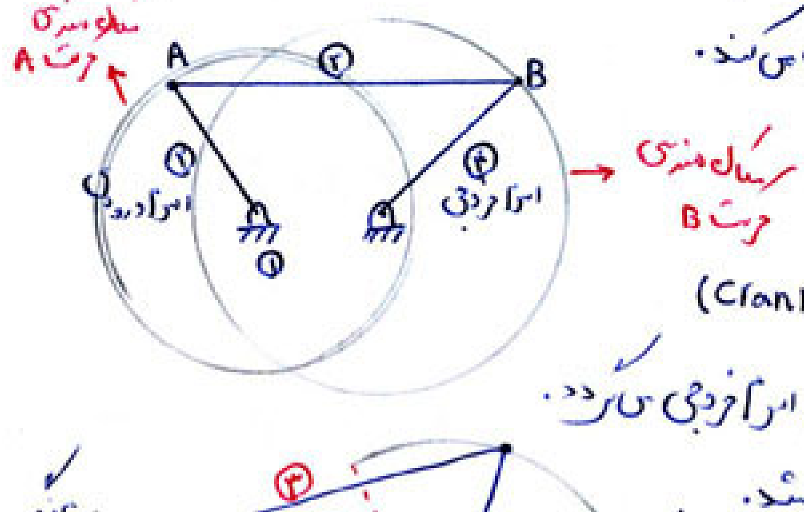
تقسیم گراشف: اگر در زنجیره ۴ میله‌ای مجموع طول بزرگترین و کوچکترین عضو از مجموع طول دو عضو باقیمانده کوچکتر باشد آن مکانیزم، مکانیزم گراشف است.

انواع حرکت در مکانیزم‌های ۴ میله‌ای:

* زنجیره یا مکانیزم لنگ-لنگ (Double crank)

در این مکانیزم کوتاه‌ترین عضو به عنوان میله یا عضو ثابت است، به ازای حرکت دورانی ۳۶۰° درجه عضو ورودی، عضو خروجی نیز به میزان ۳۶۰° نوسان می‌کند.

به شرط مکانیزم گراشف



* زنجیره یا مکانیزم لنگ-اسلب (Crank-Rocker)

در این زنجیره حرکت ورودی لنگ باشد حرکت اسلبی عضو خروجی می‌گردد.

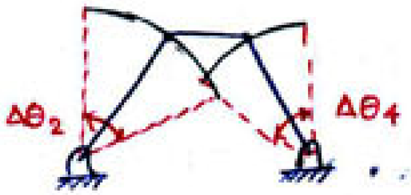
در این مکانیزم کوتاه‌ترین عضو می‌تواند عضو ورودی باشد.

یا «کوتاه‌ترین عضو، عضو لنگ است»

به شرط مکانیزم گراشف

* زنجیره یا مکانیزم اسب-اسب (Double Rocker)

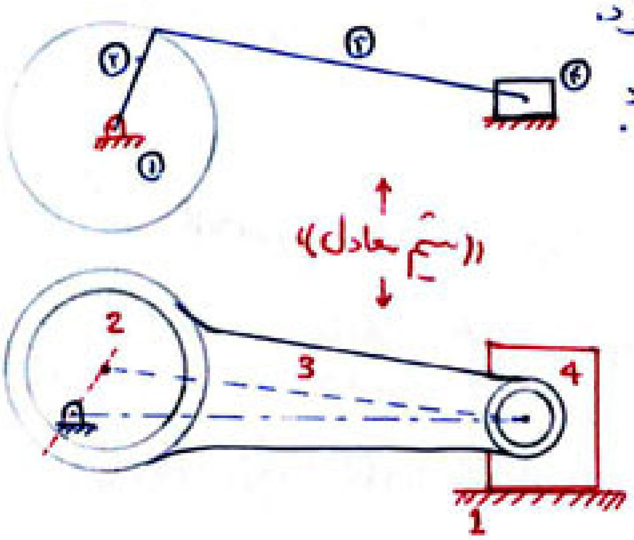
زنجیره ای است که اهرم‌های ورودی و خروجی می‌توانند در زاویه‌ای کمتر از $360°$ نوسان نمایند.



در این مکانیزم ما در اغلب موارد، کوتاهترین اهرم، اهرم رابط است.
در صورت گراشفی بودن مکانیزم

* زنجیره یا مکانیزم لنگ-لغزنده (Slider - crank)

اگر در مکانیزم لنگ-لنگ، اهرم خروجی را با یک لغزنده تعویض نماییم آنگاه مکانیزمی حاصل می‌شود که برای تبدیل حرکت دورانی به انتقالی و برعکس می‌توان از آن استفاده نمود. کاربرد آن در موتورهای دیزل و بنزینی و سیستم‌های کمپرسورهوا می‌باشد.



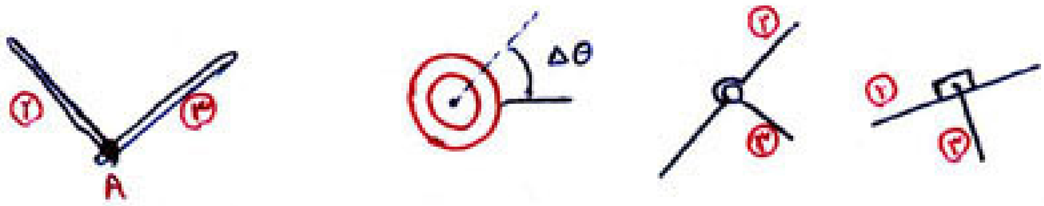
اتصالات سینماتیکی و انواع آن (Joint or Pairing Element)

تعریف مفصل: مفصل محل اتصال دو عضو (و اهرم) است که می‌توانند نسبت به هم جابجا شوند و دارای انواع مختلفی می‌باشند که از آن جمله موارد زیر را می‌توان نام برد:

۱- مفصل لولایی یا پین: (Revolute)

مفصلی است بین دو اهرم به‌طوری که جابجایی و سرعت و شتاب آن از هریک از دو اهرم که به اساس محاسبات قرار می‌گیرد برابر است و درجه آزادی آن یک می‌باشد و اجازه جابجایی زاویه‌ای دو اهرم $(\Delta\theta)$ را نسبت به هم می‌دهد.

مثال :



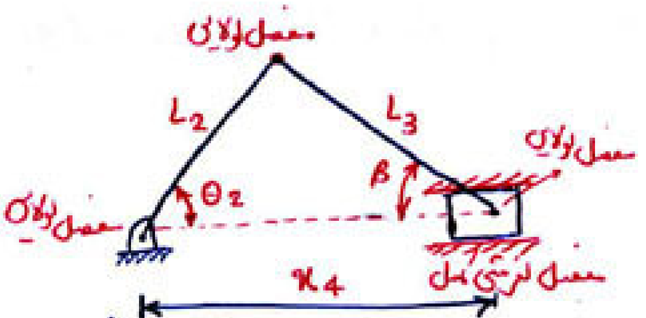
۲- مفصل لغزشی کامل : (Pure Sliding)

در یک مفصل لغزشی کامل زمانی حادث می‌گردد که اعضاء در امتداد تماس مشترک نقطه تماس دارای حرکت نسبی باشند. به عبارت دیگر مفصل لغزشی کامل مفصلی است بین دو جسم به نحوی که موقعیت یکی از اجسام (اعضا) توسط یک کمیت نسبت به جسم یا اجسام دوم مشخص می‌شود.

در یک مفصل با تماس مستقیم موقعی لغزش پدید می‌آید که نقطه تماس در امتداد خط المرکزین و یا عمود بر آن باشد.

در تعریفی دیگر بیان می‌گردد که اگر دو جسم نسبت به هم سرعت زاویه‌ای (ω) نداشته باشند حرکت لغزشی کامل می‌باشد.

مثال :



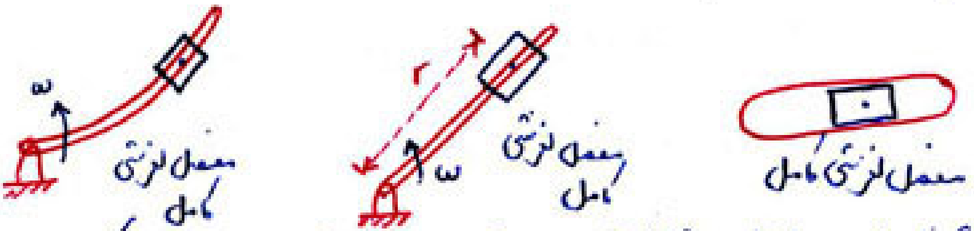
$$x_4 = x_{4/1} = L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\beta$$

$$\text{where: } \frac{\sin\beta}{L_2} = \frac{\sin\theta_2}{L_3}$$

ملاحظه می‌شود که با معلوم بودن θ_2، جابجایی، سرعت و شتاب عضو 4 نسبت به عضو 1 با یک کمیت که همان θ_2 است مشخص می‌گردد.

✓ نکته : مفاصل لغزشی کامل جزء مفاصل یک درجه آزادی هستند.

مثال :



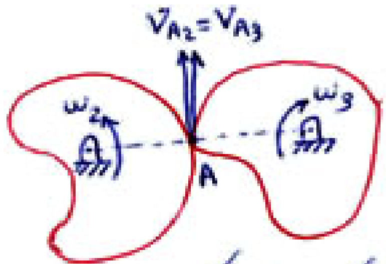
به دلیل عدم وجود ω (سرعت زاویه‌ای) و فقط با داشتن مقدار r می‌توان سرعت و شتاب را محاسبه کرد.

۳- مفصل غلتشی کامل : (Rolling Joint)

برای داشتن مفصل و تماس غلتشی سرعت‌های خطی اعضاء در نقطه تماس می‌بایست با یکدیگر یکسان بوده که ضرورتاً

نقطه تماس می بایست بر روی خط المرکزین واقع بوده باشد.

البته قرار داشتن نقطه تماس بر روی خط المرکزین امری ضروری است ولی کافی نمی باشد. زیرا فقط ممکن است در یک لحظه خاص مفصل غلتشی باشد و در سایر لحظات این شرایط برقرار باشد. به شکل زیر توجه شود.

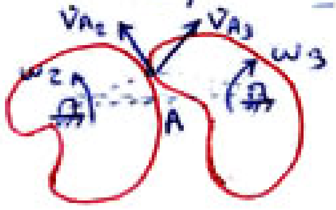


ملاحظه می گردد که تماس شرایط یک مفصل غلتشی برقرار است:

۱- نقطه تماس در خط واصل بین مرکزین (خط المرکزین) واقع است.

۲- مقدار و جهت سرعت دوران خطی در نقطه تماس از دو جسم برابر است.

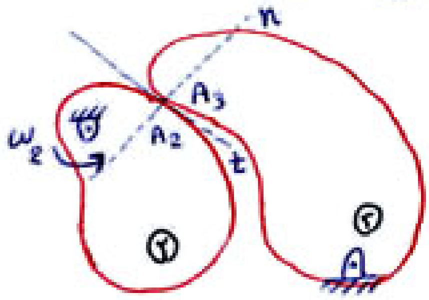
ولی مفصل فوق غلتشی خالص نیست زیرا فقط شرایط فوق در یک لحظه خاص می باشد.



(ملاحظه می گردد که در لحظه بعد شرایط غلتش خالص نیست)

۴- مفصل لغزشی - غلتشی

اگر مفصل بین دو جسم که سرعت زاویه ای آنها نسبت به هم صفر نباشد از نوع غلتشی خالص نباشد، آن مفصل از نوع غلتشی، لغزشی است.



در چنین مواقعی برای تعیین سرعت یک عضو نسبت به عضو دیگر به دو کمیت نیاز است.

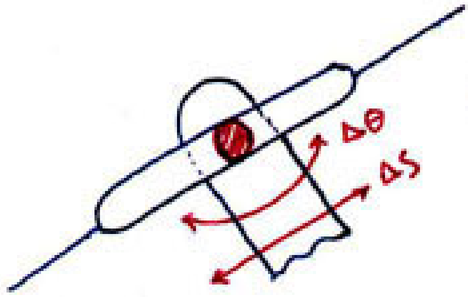
در این مفاصل در نقطه تماس سرعت نسبی ناشی از لغزش وجود دارد ($\vec{V}_{A_2/A_3}=\vec{V}_{A_2}-\vec{V}_{A_3}$)

برای تعیین سرعت زاویه ای عضو ۳ نیاز به تعیین V_{A_3} و V_{A_2/A_3} می باشد.

با توجه به این اصل که دو جسم در محل تماس در هم فرو نمی روند می توان جهت V_{A_2/A_3} را تعیین نمود. برای این منظور دستگاه n-t را در محل تماس دو جسم رسم می نماییم و با توجه به اینکه مؤلفه n سرعت هر دو برابر می باشد، بنابراین فقط سرعت در راستای t وجود دارد که تفاضل سرعت های V_{A_2} و V_{A_3} باعث لغزش می گردد.

چرخ دنده ها و اتصال چنگالی (Fork Joint) در گونه مفصل لغزشی-غلتشی هستند.

اتصال چنگالی :

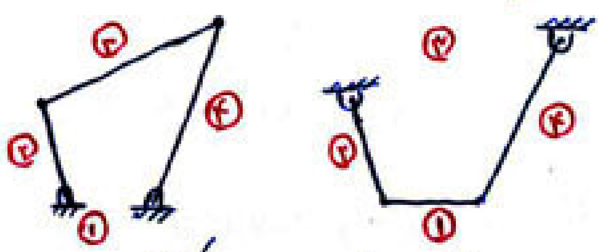


بین دو لینک شیار هم اجازه لغزش (ΔS)
و هم اجازه غلتش ($\Delta\theta$) دارد.

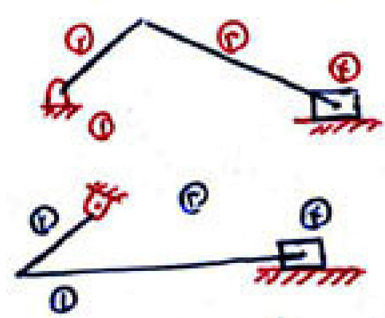
وارونش سینماتیکی یا برگردان :

با ثابت قرار دادن میله‌ای دیگر از یک زنجیره سینماتیکی معین می‌توان یک سازوکار دیگر به دست آورد که به این عمل برگردان سازوکار می‌گویند.

به عبارت دیگر هرگاه دستگاه مختصات مرجع روی اجزا n ام نصب گردیده و حرکات دیگر اجزا نسبت به آن بررسی شود، سازوکار جدید را وارونش یا برگردان n ام سازوکار اصلی می‌خوانند، مثلاً در شکل‌های زیر برگردان سازوکار ۴ میله‌ای و سازوکار لنگ لغزنده قابل مشاهده می‌باشد.



«سازوکار اصلی» «وارونش سوم»



در برگردان یک سازوکار این نکته مهم و قابل ذکر است که حرکت نسبی بین میله‌ها به هیچ وجه تغییر نمی‌کند.

به عنوان مثال در سازوکار لنگ لغزنده اگر میله ۲ به اندازه زاویه θ در جهت گردش عقربه‌های ساعت گردش نماید؛ میله ۴ در امتداد خطی مستقیم بر روی میله ۱ به مقدار معینی به طرف راست حرکت خواهد کرد. این مطلب بدون توجه به اینکه کدام میله ثابت است صادق خواهد بود.

حرکت در صفحه :

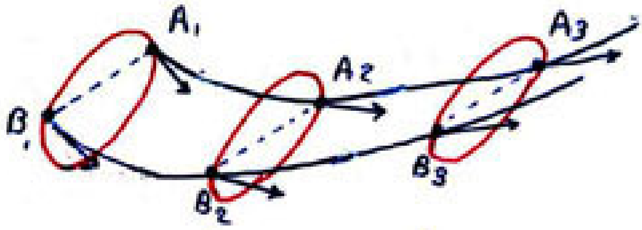
✓ حرکت : تغییر وضعیت یک جسم (ذره مادی یا جسم صلب) نسبت به جسم دیگر که در طی زمان رخ می دهد را حرکت گویند.

✓ حرکت صفحه ای :

موقعی یک جسم دارای حرکت در صفحه خواهد بود که تمام نقاط آن در صفحاتی موازی با یک صفحه مبنا حرکت نمایند. این صفحه مبنا را صفحه حرکت می نامند. حرکت در صفحه می تواند یکی از سه نوع انتقالی، دورانی و ترکیب انتقالی و دورانی باشد.

✓ حرکت انتقالی :

اگر جسمی طوری حرکت کند که تمام خطوط مستقیم واقع بر جسم همواره وضعیت های موازی همدیگر داشته باشند، جسم دارای انتقال خواهد بود.



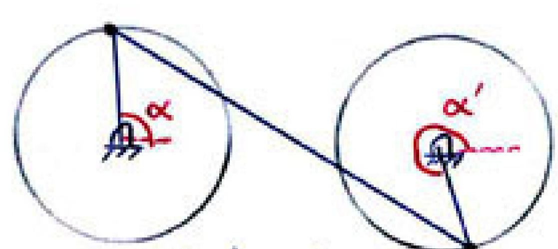
$\overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2} \parallel \overline{A_3B_3}$

$\vec{V}_A = \vec{V}_B = F(t)$ (به طور مشابه برای تمام نقاط)

اگر مسیر حرکت تمام نقاط جسم صلب، مشابه و همزمان باشد به این معنی که مسیر همه نقاط یک شکل بوده و در هر لحظه معین روی موقعیت های متناظر از آن شکل ها واقع باشند، حرکت را جزء دسته حرکت انتقالی می نامیم.

اگر مسیر مذکور، خط باشد آن را راست خط (مستقیم الخط) و در غیر این صورت خمیده خط (منحنی الخط) می نامند.

مثال : کدام یک از شکلهای زیر حرکت انتقالی را نمایش می دهند؟



« مسیرهای مشابه - غیر همزمان »
حرکت غیر انتقالی

« مسیرهای مشابه - همزمان »
حرکت انتقالی خمیده خط

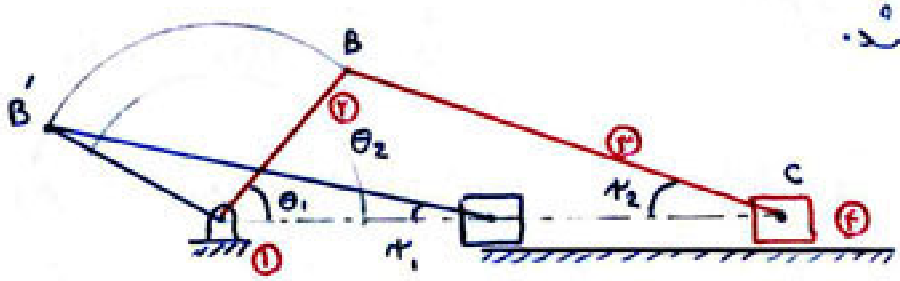
✓ حرکت دورانی یا چرخشی :

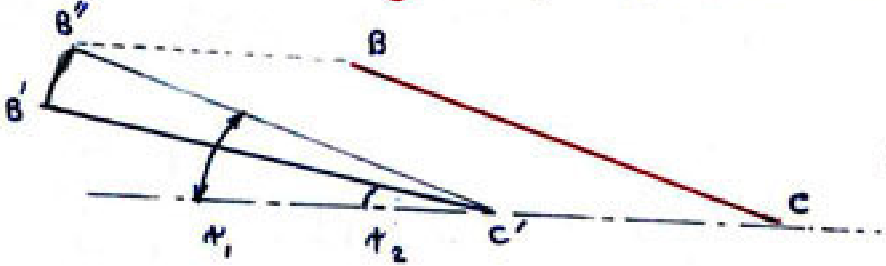
حرکتی است صفحه‌ای که در آن فاصله هر نقطه از جسم صلب در تمام طول چرخه حرکت از یک خط مستقیم (موسوم به محور دوران یا محور چرخش) یکسان و مقداری ثابت است و نقاط واقع بر روی جسم مسیر دایره‌ای را حول آن طی می‌کنند. سرعت نقاطی از جسم صلب که بر روی محور چرخش قرار دارند صفر است.

به عنوان مثال در مکانیزم لنگ - لغزنده، حرکت لنگ یک حرکت دورانی است.

✓ انتقال و دوران :

ترکیبی از حرکت انتقالی و حرکت دورانی را حرکت کلی صفحه‌ای می‌گویند که اغلب قطعات ماشینها دارای حرکتی مرکب از انتقال و دوران می‌باشند. برای مثال حرکت میله رابط موجود در مکانیزم لنگ - لغزنده را ملاحظه نمایید. حرکت عضو ۲ دورانی و حرکت عضو ۴ خطی می‌باشد. اما حرکت عضو ۳ (میله رابط) می‌تواند ترکیبی از حرکت دورانی و حرکت خطی (انتقالی) باشد.





ملاحظه می‌گردد که حرکت از BC به B'C' شامل دو قسمت می‌باشد:

حرکت انتقالی از BC به B''C' به اندازه $\overline{CC'}$
حرکت دورانی از B''C' به B'C' به اندازه زاویه $\psi_1 - \psi_2$

✓ نکته : دو نوع حرکت دیگر به اسامی حرکت مارپیچ و حرکت کروی نیز وجود دارد که در دسته حرکات صفحه‌ای نمی‌باشد.

(مراجعه به صفحه ۱۳ - دینامیک ماشین مارتین) پازوکی

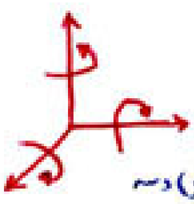
فصل دوم: درجه آزادی (Degree of Freadom)

تعریف کلی درجه آزادی:

طبق تعریف درجه آزادی برابر است با تعداد محورهای مختصات مستقل که برای تعریف حرکت نیاز است منهای تعداد روابط مانع (مقید کننده) که باعث مقید شدن آن حرکت می‌شوند.

به عبارت دیگر تعریف درجه آزادی عبارت است از تعداد متغیرهای (پارامترهای) مستقل یا کمترین پارامترهای مستقل که برای تعیین وضعیت جسم مورد نیاز است.

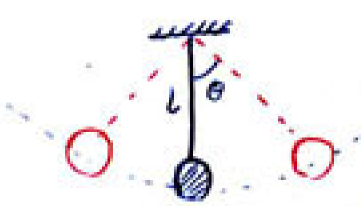
تذکر ۱: ذره در صفحه دارای ۲ درجه آزادی (حداکثر) و در فضا دارای ۳ درجه آزادی (حداکثر) می‌باشد. زیرا اندازه ذره ناچیز است و در نتیجه چرخش آن دور خودش مهم نیست.



تذکر ۲: جسم صلب در صفحه حداکثر ۳ درجه آزادی و در فضا حداکثر ۶ درجه آزادی دارد.

(سه جابجایی خطی و سه جابجایی زاویه‌ای)

مثال: درجه آزادی را تعیین نمایید.



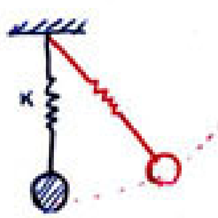
معادله نوسان: $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$

یک معادله دارد که همیشه مسیر آونگ را نشان می‌دهد که یک قید محسوب می‌شود. اگر دستگاه مختصات x و y داشته باشیم درجه آزادی برابر است با:

۲ - ۱ = ۱ = درجه آزادی

در دستگاه قطبی نیز تنها متغیر θ وضعیت جسم را بیان می‌کند.

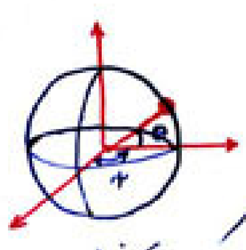
مثال: درجه آزادی را تعیین نمایید.



با وجود فنر K طول L ثابت نیست و معادله محدود کننده وجود ندارد.

۲ - ۰ = ۲ : درجه آزادی

مثال: درجه آزادی را تعیین نمایید.



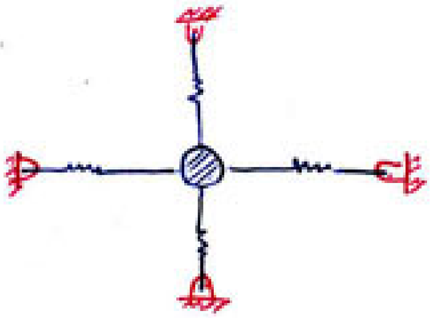
(کره توخالی)

- در دستگاه x و y و z یک معادله قید وجود دارد: $x^2+y^2+z^2=r^2$

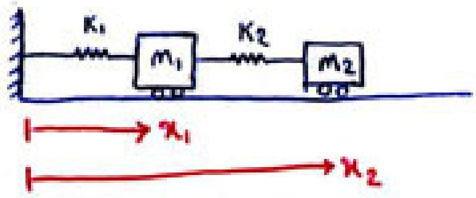
۳ - ۱ = ۲ : درجه آزادی

- در دستگاه r و θ و φ، شعاع r محدود و θ و φ وضعیت جسم را تعیین می‌کنند.

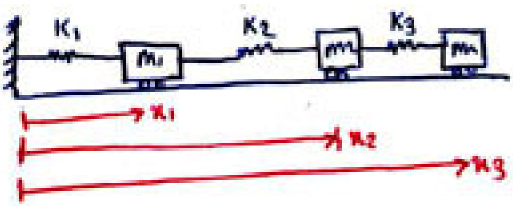
مثال: درجه آزادی شکل‌های زیر را تعیین کنید. (در صفحه)



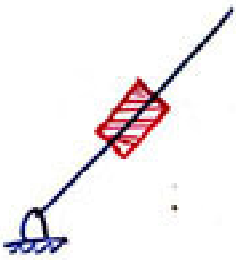
((رابطه مانع نداریم و درجه آزادی برابر ۳ می‌باشد))



مسأله دارای ۲ درجه آزادی است. اگر یکی از دو جسم را بگیریم دیگری مستقل از آن حرکت می‌کند.

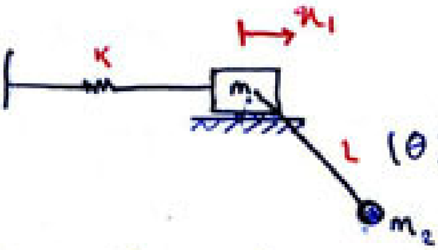


هر کدام از ۳ جرم با یک مختصه x حرکت می‌کنند و در نتیجه ۳ درجه آزادی داریم.



دو درجه آزادی دارد.

(تغییر r و تغییر θ) یا (x و y)

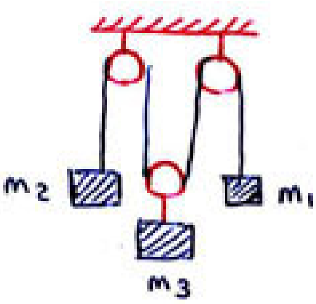


دو درجه آزادی دارد.

یکی حرکت جرم m_1 (x) و دیگری نوسان آونگ (θ)

اگر جسم الاستیک باشد هر ذره آن ۳ درجه آزادی دارد و به دلیل امکان حرکت ذرات نسبت به هم تعداد ∞ ذره با ۳ درجه آزادی وجود دارد که ∞ درجه آزادی بوجود می‌آید. لذا کلیه اجسام الاستیک را جهت بررسی و تحلیل صلب در نظر می‌گیریم با احتساب 6 درجه آزادی در فضا.

- در سیستم طناب و قرقره درجه آزادی عبارت است از (تعداد جرم‌ها - تعداد طناب‌ها)



مثال: درجه آزادی = ۲ <= ۱ طناب - 3 جرم

چون ۲ درجه آزادی دارد می‌تواند ۲ ورودی دلخواه نیز داشته باشد

درجه آزادی در زنجیره سینماتیکی:

درجه آزادی یک زنجیره سینماتیکی عبارت است از تعداد حداقل پارامترهای مستقل که برای تعیین وضعیت اعضای یک زنجیره سینماتیکی نسبت به عضو پایه مورد نیاز می باشد. به عبارت دیگر تعداد ورودی های مورد نیاز جهت قرار دادن یک مکانیزم در وضعیت خاص را درجه آزادی گویند.

درجه آزادی یک سازوکار (مکانیزم) را می توان با استفاده از تعداد اعضا و تعداد و نوع اتصالات بکاررفته تعیین نمود. به این منظور از رابطه گروبلر (Grubler) استفاده می گردد:

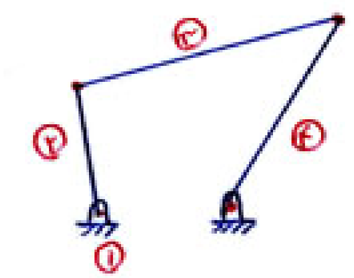
$$\boxed{DoF = 3(n-1) - 2F_1 - F_2}$$

n: تعداد اعضای مکانیزم

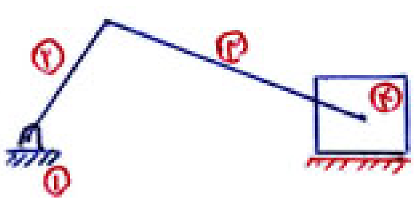
F_1: تعداد مفاصل یک درجه آزادی شامل مفاصل لولایی، لغزشی یا غلتشی

F_2: تعداد مفاصل دو درجه آزادی شامل مفاصل لغزشی-غلتشی

مثال: درجات آزادی مکانیزم های زیر را تعیین کنید:

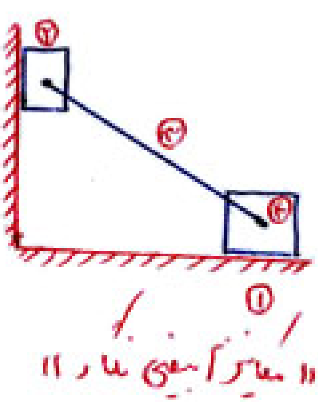


$$\begin{cases} n = 4 \\ F_1 = 4 \text{ (لولا)} \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(4-1) - 2\times 4 - 0 = 9 - 8 = 1$$



$$\begin{cases} n = 4 \\ F_1 = 3 \text{ (لولا)} + 1 \text{ (لغزنده)} = 4 \\ F_2 = 0 \end{cases}$$

$$DoF = 3(4-1) - 2\times 4 - 0 = 9 - 8 = 1$$



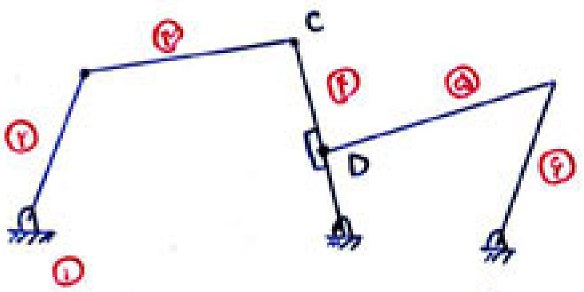
« مکانیزم بیضی نگار »

$n = 4$

$F_1 = 2 \text{ (لولا)} + 2 \text{ (لغزنده)} = 4$

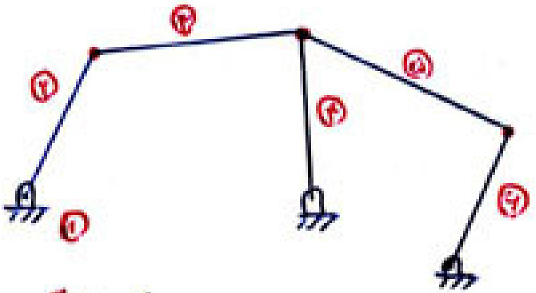
$F_2 = 0$

$$DoF = 3(4-1) - 2\times 4 - 0 = 9 - 8 = 1$$



$$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 7 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(6-1) - 2\times 7 - 0 = 1$$

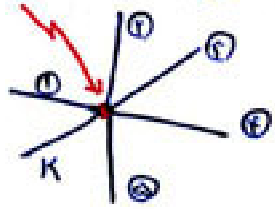
حال فرض کنید C و D بر هم منطبق شده اند



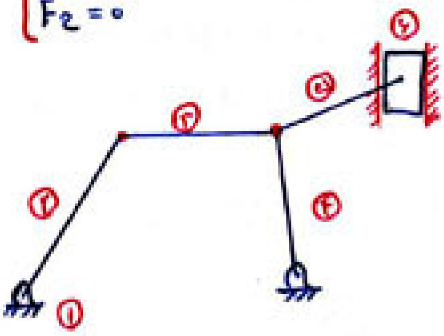
✓ نکته مهم: هرگاه K عضو در یک نقطه لولا شده باشند

آن لولا یک لولای چندگانه خوانده می شود و معادل (K-1)

لولای ساده می باشد



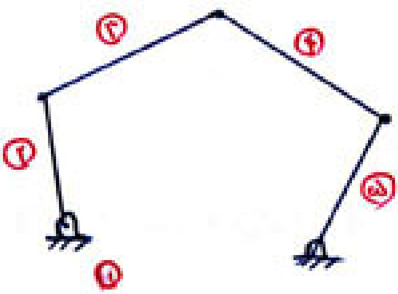
$$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 7 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(6-1) - 2\times 7 - 0 = 1$$



$$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 7 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(6-1) - 2\times 7 - 0 = 1$$

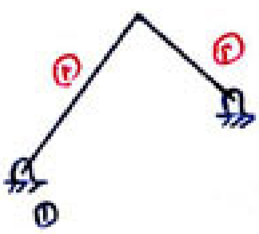
✓ لغزنده چه به صورت شماتیک با یک سطح درگیر باشد چه با دو سطح

در مجموع یک مفصل لغزشی از نوع F_1 محسوب می شود



$$\begin{cases} n = 5 \\ F_1 = 5 (\text{لولا}) \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(5-1) - 2\times 5 - 0 = 2$$

✓ مکانیزم 2 درجه آزادی است و جهت حرکت نیاز به ۲ ورودی دارد.

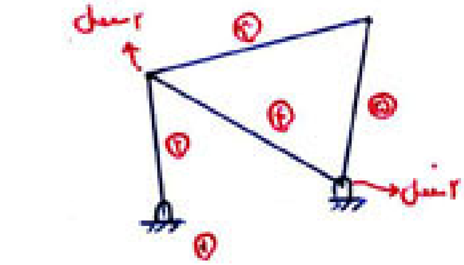


$$\begin{cases} n = 3 \\ F_1 = 3 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(3-1) - 2\times 3 - 0 = 0$$

زمانی که یک مکانیزم دارای درجه آزادی صفر باشد یعنی

مجموعه صلب و نامتحرک بوده یا اصطلاحاً سازه نامیده می شود

P-15



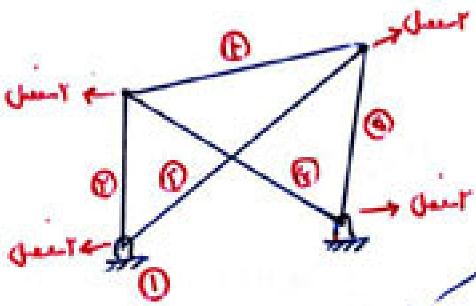
$$\begin{cases} n = 5 \\ F_1 = 6 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(5-1) - 2(6) - 0 = 0$$

سازه معین (صلب)

نکته: به ازای هر میله یا عضوی که به سازه معلومی اضافه گردد، سه درجه آزادی افزایش می‌یابد و به ازای هر لولایی که به سازه افزوده شود، دو درجه آزادی کاسته می‌شود.

- در نهایت افزودن هر عضو دو مفصلی به سازه باعث کاهش یک درجه آزادی می‌گردد. (($3(1) - 2\times2 = -1$))

در مثال بالا افزایش یک عضو به سازه ۴ میله‌ای باعث کاهش درجه آزادی از 1 به صفر گردید.



$$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 8 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(6-1) - 2\times8 = -1$$

سازه نامعین (دارای یک درجه فوق صلب)

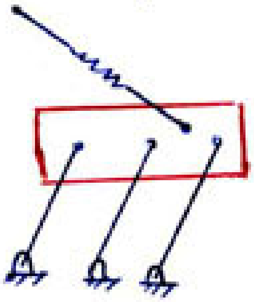
- یعنی سازه نامعین فوق نه تنها حرکت نمی‌کند بلکه اگر یک میله را هم برداریم باز هم حرکتی نداریم.

استثنا:

۱- رابطه گروبلر در مورد مکانیزم‌هایی که قسمتی از آن را می‌توان توسط اعضای موازی جایگزین نمود صادق نیست.

۲- اگر افزودن عضو یا اتصال جدید تاثیری در حرکت نداشته باشد، یعنی با حذف آن عضو یا مفصل همان حرکت قبلی امکان‌پذیر باشد در این صورت دستور گروبلر دیگر درست نخواهد بود.

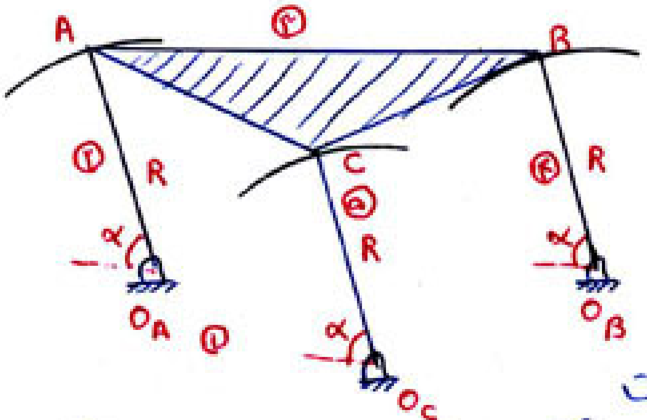
مثال:



در مکانیزم رو به رو حذف هر یک از میله‌ها تاثیری در حرکت ندارد و قابل حذف هستند.

$$DoF = 3(4-1) - 2\times4 - 0 = 1$$

مثال:



$n = 5$

$F_1 = 6$

$F_2 = 0$

$$DoF = 3(5-1) - 2(6) = 0$$

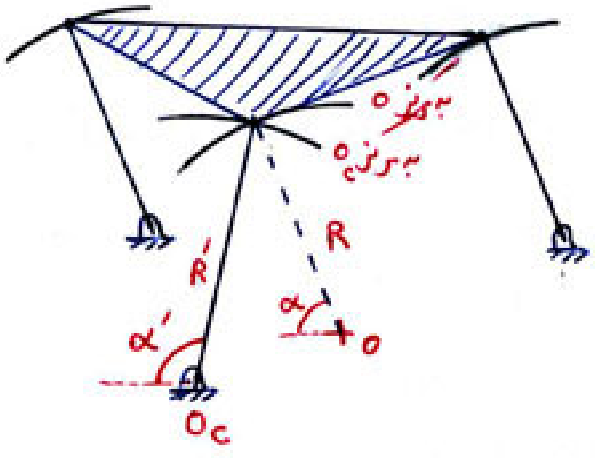
(غیر واقعی)

مکانیزم فوق، مکانیزم موازی الاضلاع می باشد و چون حرکت تمامی نقاط روی عضو بالایی (عضو ۲) یک حرکت انتقالی است؛ بنابراین مسیر حرکت همه نقاط این عضو، دایره‌ای به شعاع R می باشد و اگر در این موضوع دقت کنیم، هر عضوی به مکانیزم که سبب گردد مسیر نقطه‌ای از این عضو، همین دایره باشد، یک قید اضافی در اینجا بوده و قابل حذف می باشد. مثلاً عضو ۵ سبب می گردد تا نقطه C روی مسیر اولیه خود (در حالتی که عضو ۵ وجود نداشته) باقی بماند. بنابراین وجود این عضو (عضو ۵) زائد و قابل حذف است.

با حذف این عضو داریم:

$$\begin{cases} n = 4 \\ F_1 = 4 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(4-1) - 2\times 4 - 0 = 1$$

اما در صورتی که طول عضو ۵ کمی بلندتر یا کوتاه‌تر باشد $(R \pm \varepsilon)$ یا زاویه α کمی کمتر یا بیشتر باشد $(\alpha \pm \varepsilon)$ آنگاه نقطه C وادار به حرکت روی مسیر دایره‌ای جدیدی می شود که با مسیر دیکته شده توسط مکانیزم موازی الاضلاع متفاوت بوده و با توجه به اینکه یک نقطه واحد نمی تواند روی دو دایره متفاوت حرکت کند، پس سازوکار قفل می شود.



$n = 5$

$F_1 = 6$

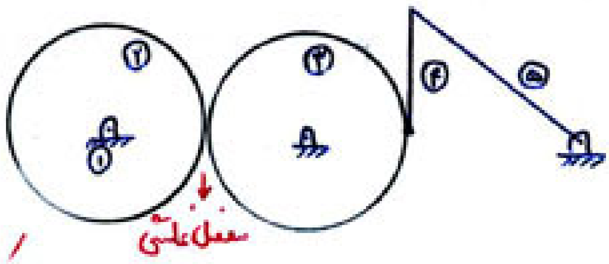
$F_2 = 0$

$$DoF = 3(5-1) - 2\times 6 = 0$$

(واقعی)

(سازه صلب)

مثال:

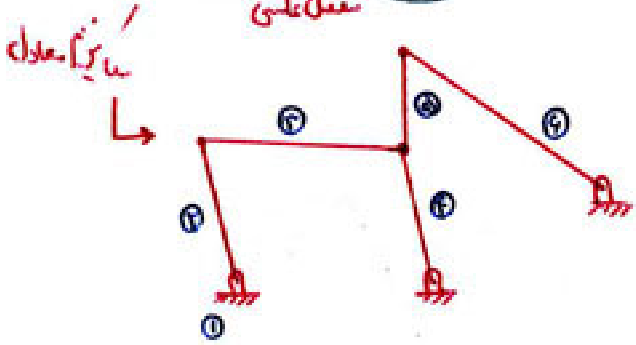


$n=5$

$F_2=6$ $\qquad DoF=3(4)-2(6)=0$

$F_2=0$

(غیر واقعی)



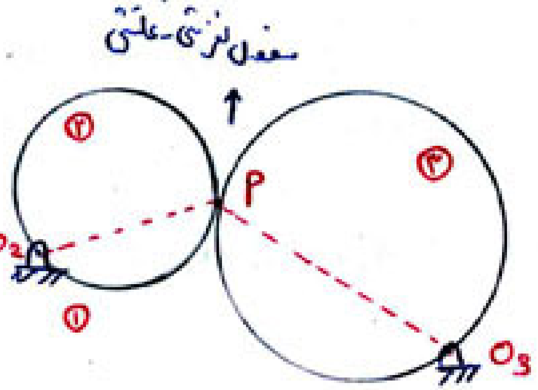
$n=6$

$F_2=7$ $\qquad DoF=3(5)-2(7)=1$

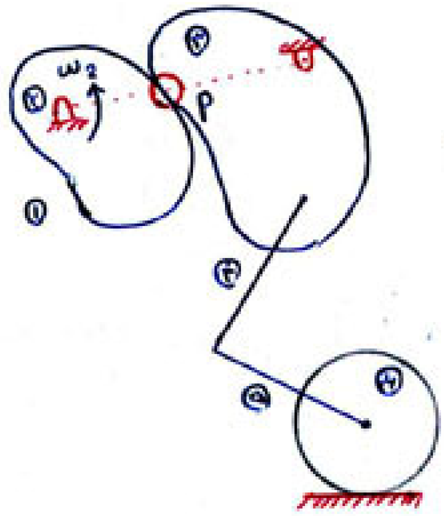
$F_2=0$

(واقعی)

مثال: درجه آزادی مکانیزم های زیر را تعیین کنید.



$$\begin{cases} n=3 \\ F_1=2 \\ F_2=1 \end{cases} \qquad DoF=3(2)-2(2)-1=1$$



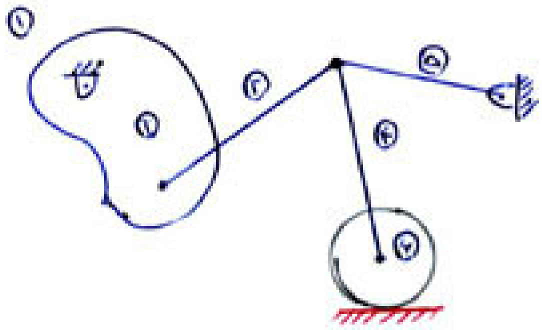
$$\begin{cases} n=6 \\ F_1=6 \\ F_2=1 \end{cases} \qquad DoF=3(5)-2(6)-1=2$$

✓ نکته: با وجودی که $V_{P_3}=V_{P_2}$
ولی در نقطه تماس بعد از این وضعیت برقرار نیست و مفصل
لغزشی غلتشی است.

✓ نکته: هر جسمی که روی زمین قرار دارد (مثل غلتک و گرد) چنانچه پین نشده باشد و اطلاعاتی از حرکت آن در دست نباشد
نسبت به زمین یک مفصل غلتشی به حساب می آید.

تکلیف:

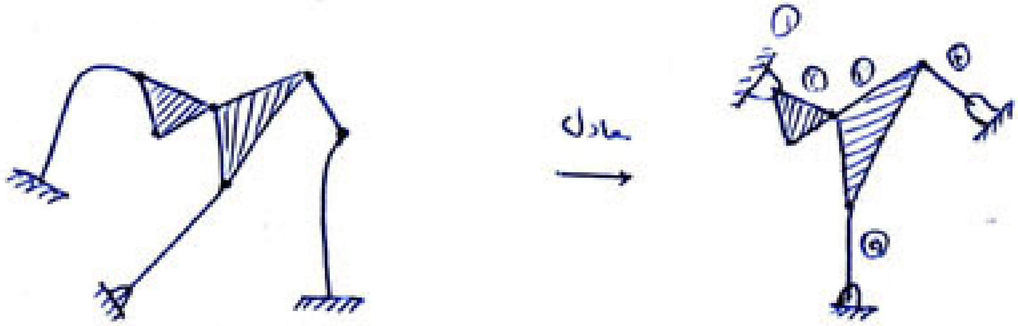
①



$$\begin{cases} n=6 \\ F_1=7 \\ F_2=0 \end{cases}$$

$$DoF=3(5)-2(7)=1$$

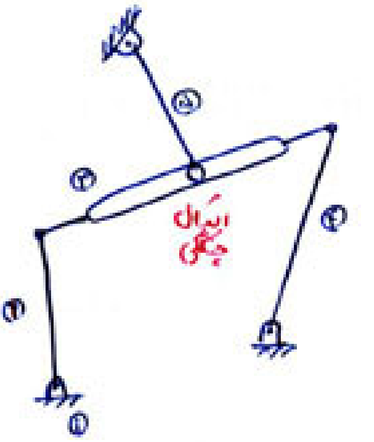
②



$$\begin{cases} n=5 \\ F_1=6 \\ F_2=0 \end{cases}$$

$$DoF=3(4)-2(6)=0$$

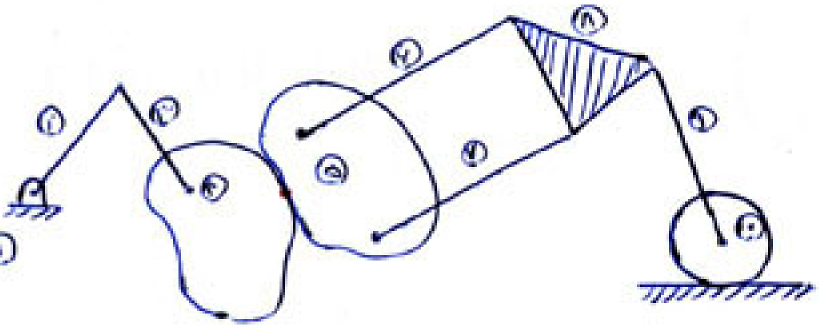
③



$$\begin{cases} n=5 \\ F_1=5 \\ F_2=1 \end{cases}$$

$$DoF=3(4)-2(5)-1=1$$

④

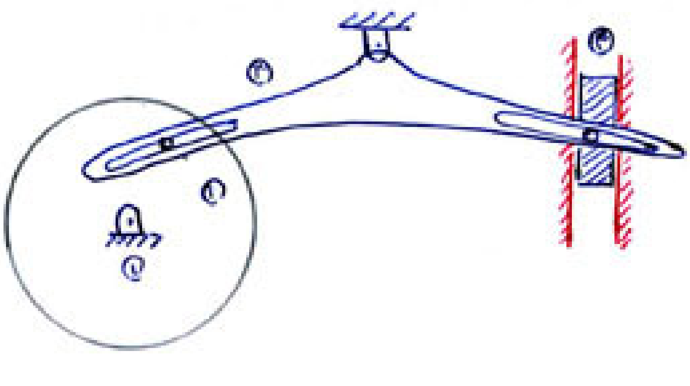


$$\begin{cases} n=10 \\ F_1=10+1 \\ F_2=0 \end{cases}$$

$$DoF=3(9)-2(11)=5$$

با توجه به اینکه بین اجزا ۵ و ۴ یک مفصل وجود دارد و قضاوتی در مورد لغزشی یا غلتشی بودن نمی‌توان انجام داد و در این دوران دو اجزا ۴ و ۵ مشخص نیست فرض می‌شود که مفصل غلتشی است.

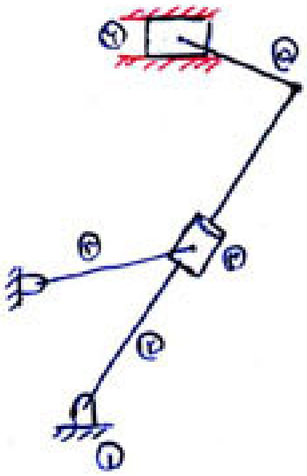
⑤



$$\begin{cases} n=4 \\ F_1=3 \\ F_2=2 \end{cases}$$

$$DoF=3(3)-2(3)-2=1$$

6



$$\begin{cases} n=6 \\ F_1=7 \\ F_2=0 \end{cases} \qquad DoF=3(5)-2(7)=1$$

تسمه به عنوان اتصال پوششی (wrapping Pair)

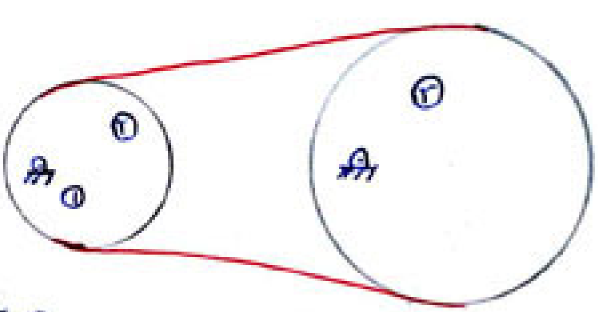
یک سیم، تسمه، زنجیر و یا هر عضو انعطاف پذیر و بدون قابلیت تغییر طول که دو اهرم بدون تماس مستقیم را به هم وصل می‌کند و یک اتصال دو درجه آزادی می‌باشد را اتصال پوششی گویند. یک درجه آزادی چرخش جسم حول محل تماس اتصال و یک درجه دیگر انتقال منحنی الخط (روی مسیر دایره) حول محل دیگر تماس اتصال می‌باشد.

پس از نوع F_2 می‌باشد.

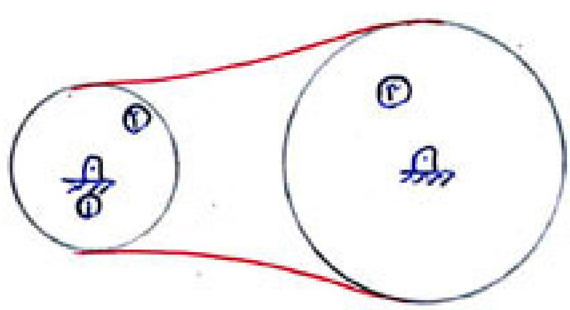
اگر در مکانیزم ثابت بودن طول تسمه تضمین شود یک اتصال F_2 درنظر گرفته می‌شود و در غیر این صورت دو اتصال F_2 درنظر گرفته می‌شود.

تسمه در شمارش اهرمها لحاظ نمی‌گردد (قرارداد)

مثال: درجه آزادی دو مکانیزم زیر را تعیین کنید.



$$\begin{cases} n=3 \\ F_1=2 \\ F_2=2 \end{cases} \qquad DoF=3(2)-2(2)-2=0$$



$$\begin{cases} n=3 \\ F_1=2 \\ F_2=1 \end{cases} \qquad DoF=3(2)-2(2)-1=1$$

✓ نکته : مفصل بین دو چرخنده یا محل اتصال و تماس دو چرخنده یک مفصل لغزشی غلتشی با دو درجه آزادی از نوع F_2 محسوب می‌شود.

فصل سوم: مراکز آنی (Centers)

(مدل ۳ ساعتی)

اصطلاح مرکز آنی برای نشان دادن مرکز دوران یک جسم در هر لحظه مورد استفاده قرار می گیرد و به شکل زیر تعریف می شود:

تعریف ۱) مرکز آنی نقطه‌ای واقع بر یک جسم بوده که عضو دیگری به طور دائم یا لحظه‌ای حول آن دوران می نماید.

تعریف ۲) مرکز آنی نقطه‌ای مشترک واقع بر دو جسم می باشد که در سرعتهای آنها چه از نظر مقدار و چه از نظر امتداد و جهت با یکدیگر یکسان می باشد و در آن نقطه سرعت نسبی بین دو جسم مورد نظر صفر است.

- مرکز آنی چرخش بین دو جسم متحرک شماره m و n را با I_{mn} یا I_{nm} نمایش می دهند.
- برای یک مکانیزم که شامل n عضو باشد، تعداد مراکز آنی از رابطه زیر حاصل می شود:

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

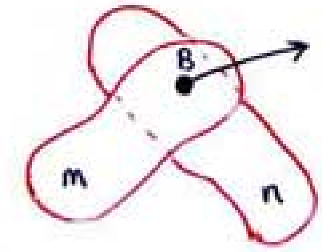
- مراکز چرخش می توانند آنی (Instantaneous) و یا دائم (Permanent) باشند. در موردی که محل مرکز چرخش، نسبت به دو جسم تغییر نکند آن را آنی در عین حال مرکز دائم گویند.

مراکز آنی بر دو نوع هستند: ۱- مراکز آنی اولیه (Primery centers)
۲- مراکز آنی ثانویه (secondry centers)

- موقعیت مراکز چرخش اولیه با توجه به شرایط مکانیزم معلوم بوده و نیازی به اعمال فرآیند خاصی نیست، اما موقعیت مراکز چرخش ثانویه با توجه به موقعیت مراکز چرخش اولیه و انجام فرآیندهای خاصی معلوم می شود.
- هر دو نوع مرکز چرخش اولیه و ثانویه می توانند دائم یا آنی باشند.

۱) مرکز آنی در مفصلهای پینی (لولایی)

اگر دو جسم به هم لولا شده باشند، در آن نقطه سرعت دو جسم متحرک با هم برابر است و آن نقطه مرکز آنی چرخش می باشد.

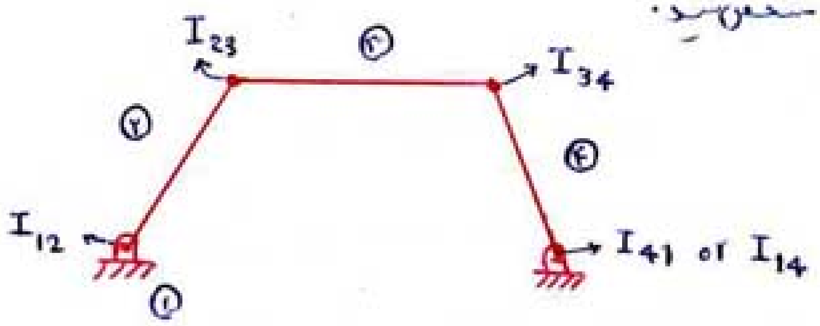


$$(\overrightarrow{V_B})_n = (\overrightarrow{V_B})_m$$

$$\hookrightarrow I_{mn} = B$$

یعنی نقطه مفصل همان مرکز آنی دوران نسبی می باشد.

مثال: مراکز آنی چرخش از نوع پین در شکل زیر را مشخص نمایید.

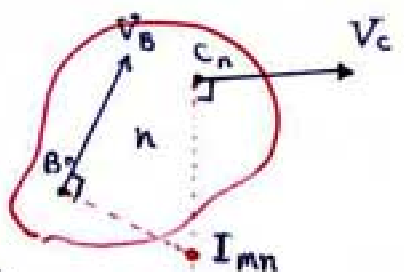


$$N = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(3)}{2} = 6$$

از 6 مرکز آنی برای این سازه تعداد ۴ عدد مراکز آنی اولیه از نوع لولایی و پین ها باشد.

۲) مرکز آنی جسم صلبی که امتداد سرعت خطی دو نقطه آن معلوم باشد:

اگر راستای سرعت دو نقطه از یک جسم صلب معلوم باشد و آن دو راستا موازی نباشند با رسم دو عمود بر راستاهای معلوم در محل برخورد آن دو عمود می توان مرکز آنی دوران آن جسم را مشخص کرد.

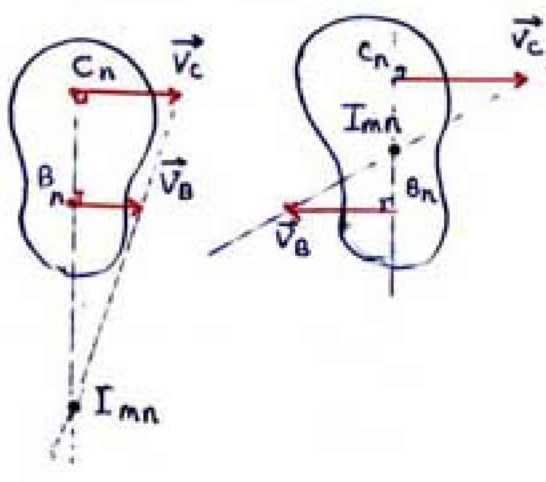


$$\vec{V}_c = \vec{\omega}_n \times \vec{Ic} \qquad \vec{V}_c \perp \vec{Ic}$$

$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_n \times \vec{IB} \qquad \vec{V}_B \perp \vec{IB}$$

(زمین m)

اگر راستای سرعت دو نقطه از یک جسم صلب معلوم و آن دو راستا موازی باشند، در این صورت پس از خارج شدن یک عمود بر راستای سرعت دو نقطه، انتهای سرعت دو نقطه را به هم وصل کرده تا مرکز چرخش از تقاطع دو خط فوق حاصل گردد.



(زمین m)

$$\vec{V}_c = \vec{\omega}_n \times Ic$$

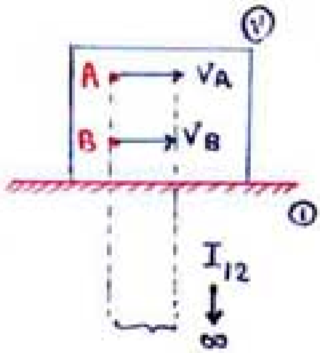
$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_n \times IB$$

$$\omega_n = \frac{|\vec{V}_c|}{Ic} = \frac{|\vec{V}_B|}{IB}$$

۳) مرکز آنی یک جسم لغزنده

اگر حرکت بین دو جسم از نوع لغزش کامل باشد در آن صورت ممکن است یکی از حالات زیر اتفاق افتد:

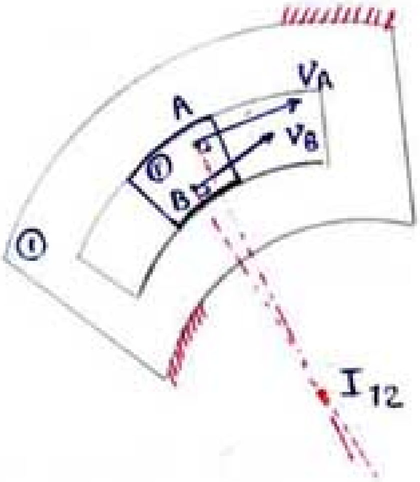
الف) لغزش در امتداد مسیری مستقیم:



با توجه به اینکه سرعت دو نقطه از جسم ($\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$) مشخص و برابر است.
لذا رسم دو عمود بر ابتدا و انتهای این دو بردار دو خط موازی است
که فرض می شود دو خط موازی همدیگر را در بی نهایت قطع می کنند.
لذا مرکز آنی در حالا در بی نهایت و عمود بر سطح لغزش است.

$V = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{V}{r}$, $r \to \infty \Rightarrow \omega = 0$ (جسم لغزش کامل دارد)

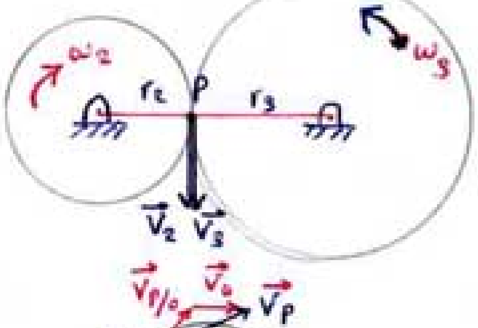
ب) لغزش در امتداد مسیر منحنی:



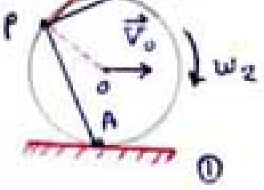
با توجه به مسیر منحنی شکل وجود یک مرکز آنی در آن
در بی نهایت نیست بلکه در مرکز انحنای مسیر می باشد.

۴) مرکز آنی یک جسم غلتان

اگر یک جسم بدون لغزش روی جسم دیگری بغلتد، (جسم دیگری می تواند ساکن یا متحرک باشد) آنگاه به دلیل اینکه سرعت در نقطه تماس از دو جسم برابر است و سرعت نسبی برای نقطه محل تماس صفر باشد، بنابراین نقطه تماس خود مرکز آنی سرعت این دو جسم نسبت به هم است.



$$\vec{V}_2 = \vec{V}_3 \Rightarrow r_2\omega_2 = r_3\omega_3$$
$$\vec{V}_{2/3} = 0 \Rightarrow I_{23} = P$$



$$\vec{V}_P = \vec{V}_{P/o} + \vec{V}_o$$

(مرکز آنی در آن) $I_{12} = A$

سرعت در نقطه P یا o یا ... را می توان نسبت به نقطه A بررسی کرد، لذا در نقطه تماس

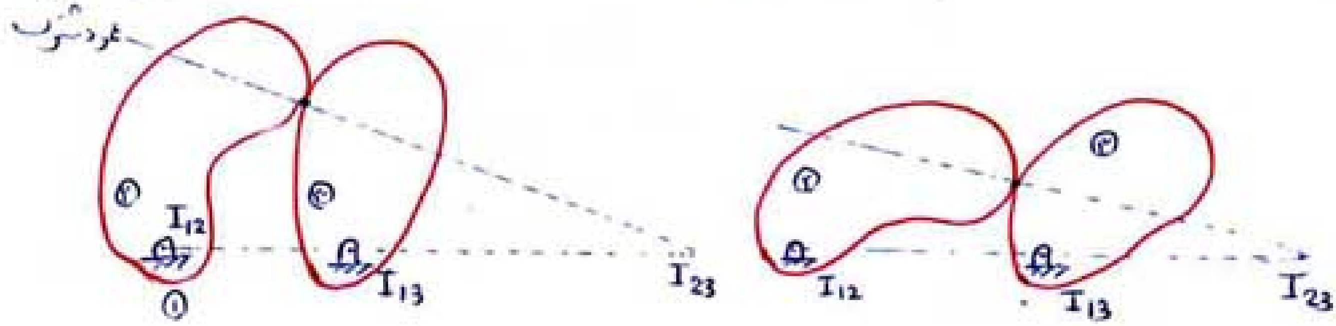
۵) مرکز آنی در تماس لغزشی - غلتشی

اگر تماس بین دو جسم از نوع غلتشی - لغزشی باشد در آن صورت برای تعیین مرکز آنی آن دو جسم نسبت به هم به شرح زیر عمل می‌کنیم:

الف) مرکز یا مراکز آنی دو جسم نسبت به یک مبنا را پیدا می‌کنیم.

ب) عمود مشترک دو سطح در نقطه تماس را رسم می‌کنیم.

پ) محل تلاقی عمود مشترک با رابط بین مراکز بین دو جسم نسبت به یک مبنا، مرکز آنی دو جسم نسبت به یکدیگر است.



I_{23} می‌تواند جزئی از جسم ۲ یا ۳ نیز باشد.

قضیه کندی: (Arnhold Kennedy)

بنابر قضیه کندی سه قطعه که نسبت به یکدیگر دارای حرکت نسبی صفحه‌ای می‌باشند، دارای سه مرکز آنی بوده که هر سه در یک راستا می‌باشند. یعنی اگر سه جسم مثل m و n و k داشته باشیم، با معلوم بودن I_{nk} و I_{mk} می‌توان گفت سه مرکز چرخش I_{nm} روی خط واصل بین دو مرکز فوق قرار دارد. (مثل شکل بالا)

روش دیاگرام دایره برای جایابی مراکز آنی ثانویه

یکی از روشهای تعیین مراکز آنی ثانویه روش دایره می‌باشد که به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

۱- ابتدا دایره‌ای به شعاع دلخواه رسم می‌کنیم و به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. (n تعداد اجزای مکانیزم است)

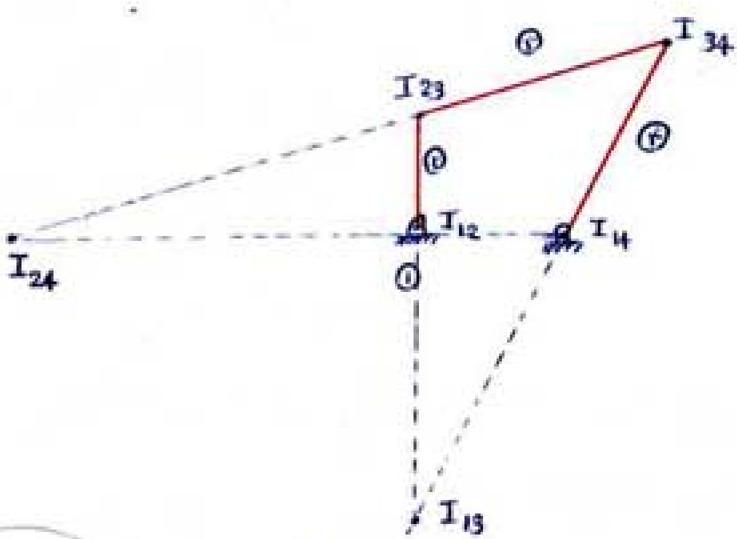
۲- به هر گره یک شماره داده می‌شود که معرف یک جسم مثل اتصال شماره خواهد بود.

۳- رابطه بین هر دو گره (دو شماره) معرف یک مرکز آنی (مرکز چرخش) است. اگر این مرکز از نوع اولیه باشد آن را با خط پر و اگر مرکز مربوطه ثانویه باشد (ثانویه) آن را با خط نقطه‌چین مشخص می‌کنیم.

۴- برای تعیین مراکز آنی ثانویه، هر دو مثلثی را در نظر می‌گیریم که در هر یک ضلع نقطه‌چین مشترک و دو ضلع دیگر آنها پر باشد.

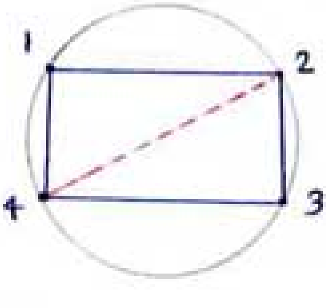
۵- براساس قضیه کندی، محل مرکز آنی ثانویه را به دست می‌آوریم و پس از تعیین آن خط‌چین مورد نظر را با خط پر بر روی دایره نمایش می‌دهیم.

مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.



$$N = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(3)}{2} = 6$$

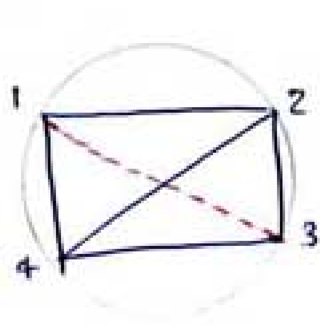
از مجموع ۶ مرکز آنی تعداد ۴ عدد مراکز آنی اولیه شامل می‌باشند. جهت تعیین ۲ مرکز آنی ثانویه از روش دایره استفاده می‌کنیم.



جهت به دست آوردن مرکز آنی ثانویه I_{24} از دو مثلث $\overset{\triangle}{234}$ و $\overset{\triangle}{214}$ استفاده می‌کنیم.

از مثلث $\overset{\triangle}{234}$ امتداد مراکز آنی اولیه I_{23} و I_{34} را با هم وصل می‌کنیم.

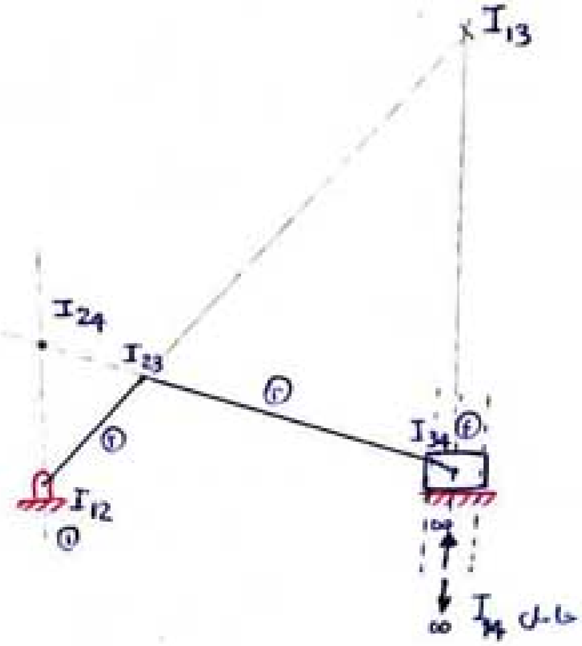
از مثلث $\overset{\triangle}{214}$ امتداد مراکز آنی اولیه I_{12} و I_{14} را به هم وصل می‌کنیم.



محل تقاطع دو خط I_{24} را به ما نشان می‌دهد و خط 24 را پر (کامل) می‌کنیم.

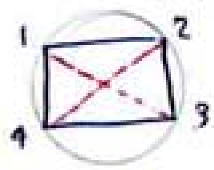
به همین ترتیب I_{13} را از دو مثلث $\overset{\triangle}{123}$ و $\overset{\triangle}{143}$ به دست می‌آوریم.

مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را نشان دهید.



$$N = \frac{n(n-1)}{2} = 6$$

۴ مرکز آنی اولیه هستند که I_{12} و I_{23} و I_{34} در مفاصل است و I_{14} در راستای عمود بر لغزنده و در بی‌نهایت است.



$I_{31} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{214}$ و $\overset{\Delta}{432}$

برای $\overset{\Delta}{214}$ می‌بایست I_{12} و I_{14} را بهم متصل کنیم و برای این کار، از محل I_{12} صفحه عمودی به سمت بی‌نهایت رسم می‌کنیم.

«توضیحی از کاربرد مراکز آنی دوران در این مثال»:

فرض کنید ω_2 معلوم باشد. ω_3 و ω_4 را محاسبه کنید:

با ترسیم مراکز آنی و مشخص نمودن محل آنها می‌دانیم که I_{23} نقطه‌ای است که سرعت دو جسم 2 و 3 نسبت به آن یکسان است.

از جسم ۲ $\quad V_{I_{23}} = (I_{12} - I_{23})\,\omega_2$

از جسم ۳ $\quad V_{I_{23}} = (I_{13} - I_{23})\,\omega_3$

$$\Rightarrow \omega_3 = \frac{I_{12} - I_{23}}{I_{13} - I_{23}}\,\omega_2$$

حال با توجه به اینکه I_{23} بین I_{13} و I_{12} است لذا ω_3 در خلاف جهت ω_2 است.

ضمناً چون طول $\overline{I_{12}-I_{23}}$ از طول $\overline{I_{13}-I_{23}}$ کمتر است $\longleftarrow$ $\omega_2 > \omega_3$

به طور کلی می‌توان تعریف کرد:

$$\omega_{\text{متحرک}} = \frac{\text{فاصله مرکز آنی محرک نسبت به قطعه ثابت تا مرکز آنی محرک نسبت به متحرک}}{\text{فاصله مرکز آنی متحرک نسبت به قطعه ثابت تا مرکز آنی محرک نسبت به متحرک}} \cdot \omega_{\text{محرک}}$$

* نکته: اگر مرکز آنی دو جسم نسبت به هم مابین مراکز آنی هر دو جسم نسبت به قطعه ثابت باشد، در آن صورت جهت ω محرک خلاف جهت ω متحرک است. و اگر مابین نباشد ω محرک و متحرک هم جهت می‌باشد.

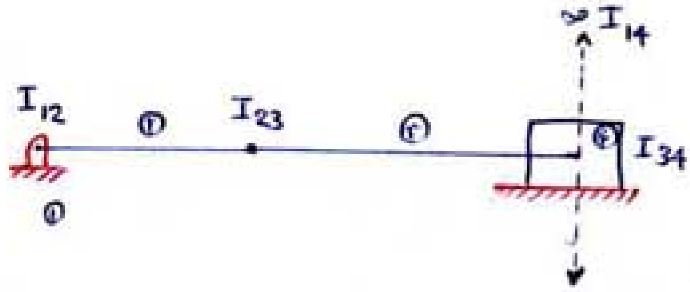
با ترتیب فوق برای ω_4 داریم:

$$\omega_4 = \frac{I_{12} - I_{24}}{I_{14} - I_{24}}\,\omega_2 \Rightarrow \omega_4 = 0$$

به سمت ∞

جسم ۴ فقط لغزش دارد که کاملاً صحیح است.

مثال: در مکانیزم ذیل در حالت ذیل مراکز آنی را مشخص کنید.



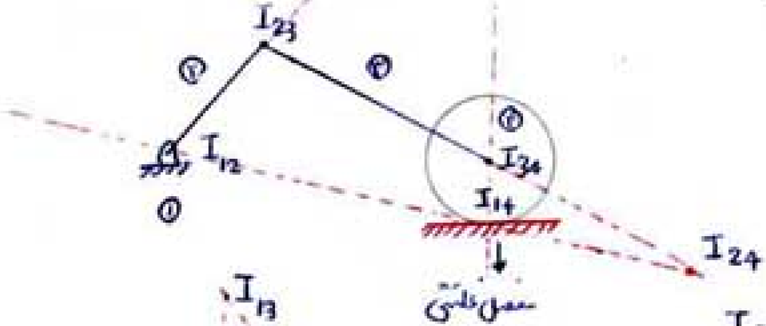
نمودار دایره شکل ذیل را رسم می کنیم و از قاعده مثلث ها استفاده می کنیم.

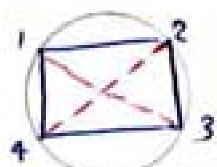
$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{214}$ و $\overset{\Delta}{432}$

ملاحظه می گردد که I_{13} منطبق بر I_{34} و I_{24} منطبق بر I_{12} خواهد افتاد. پس در حالت‌های خاص برخی از مراکز چرخش بر هم منطبق می شوند.

مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.

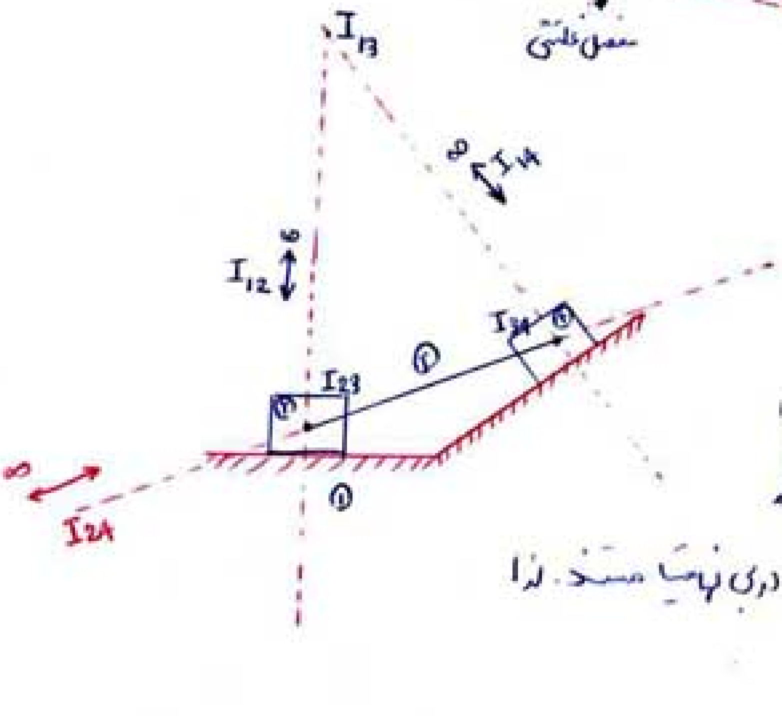




$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{214}$ و $\overset{\Delta}{234}$

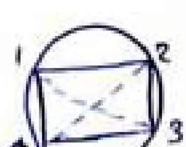
$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.



$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

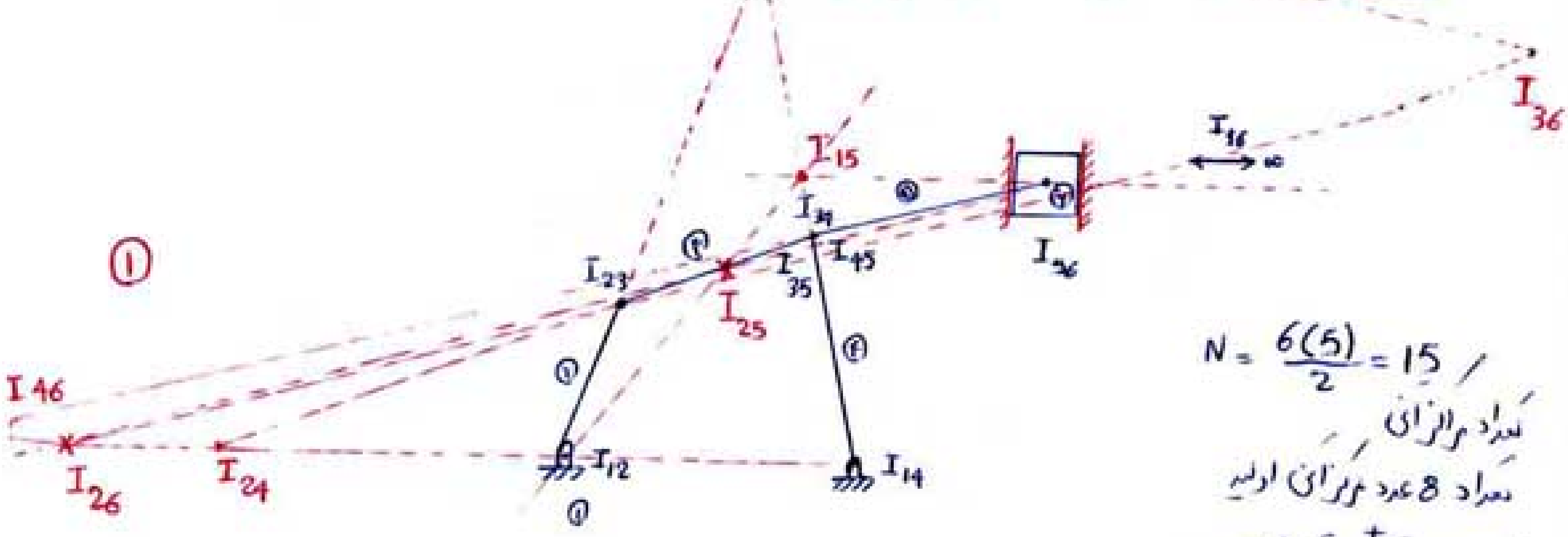
$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{412}$ و $\overset{\Delta}{432}$



مکان I_{24} در امتداد عضو ۳ است. از طرفی I_{14} و I_{12} در بی‌نهایت هستند. لذا I_{24} در امتداد عضو ۳ در بی‌نهایت است.

تکلیف: کلیه مراکز آنی مکانیزم‌های زیر را تعیین کنید.

(1)



$$N = \frac{6(5)}{2} = 15$$

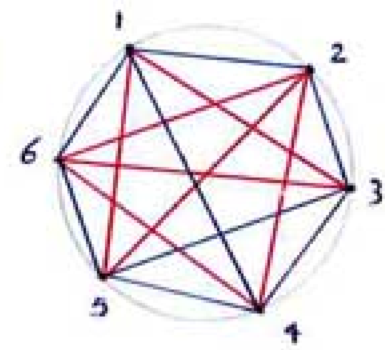
تعداد مراکز آنی

تعداد 8 عدد مراکز آنی اولیه

+

تعداد 7 عدد مراکز آنی ثانویه

برای پیدا کردن ۷ مرکز آنی ثانویه ابتدا از آنهایی شروع می‌کنیم که در ۲ مثلث کامل ایجاد برای آنها باشد.



$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

$I_{15} \rightarrow \overset{\Delta}{165}$ و $\overset{\Delta}{145}$

$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{234}$ و $\overset{\Delta}{214}$

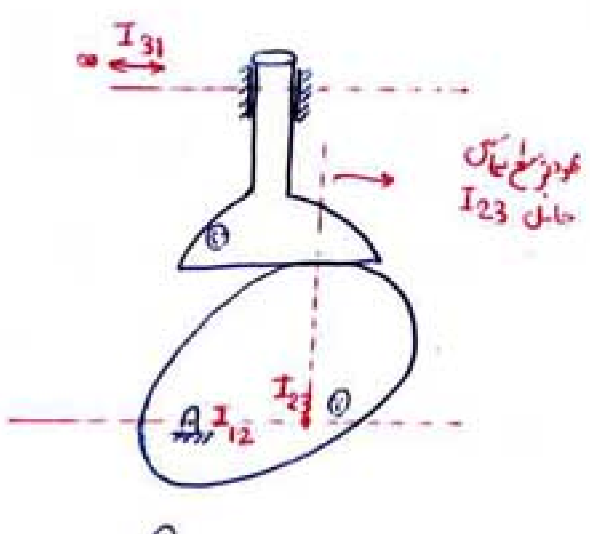
$I_{25} \rightarrow \overset{\Delta}{235}$ و $\overset{\Delta}{245}$ ⟶ روی یک خط می‌افتند $\xrightarrow{\text{۲ مثلث دیگر}}$ $\overset{\Delta}{235}$ و $\overset{\Delta}{215}$

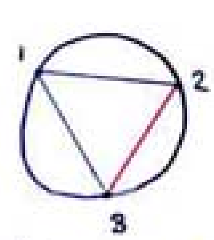
$I_{26} \rightarrow \overset{\Delta}{216}$ و $\overset{\Delta}{256}$

$I_{36} \rightarrow \overset{\Delta}{316}$ و $\overset{\Delta}{326}$

$I_{46} \rightarrow \overset{\Delta}{456}$ و $\overset{\Delta}{416}$

(۲)



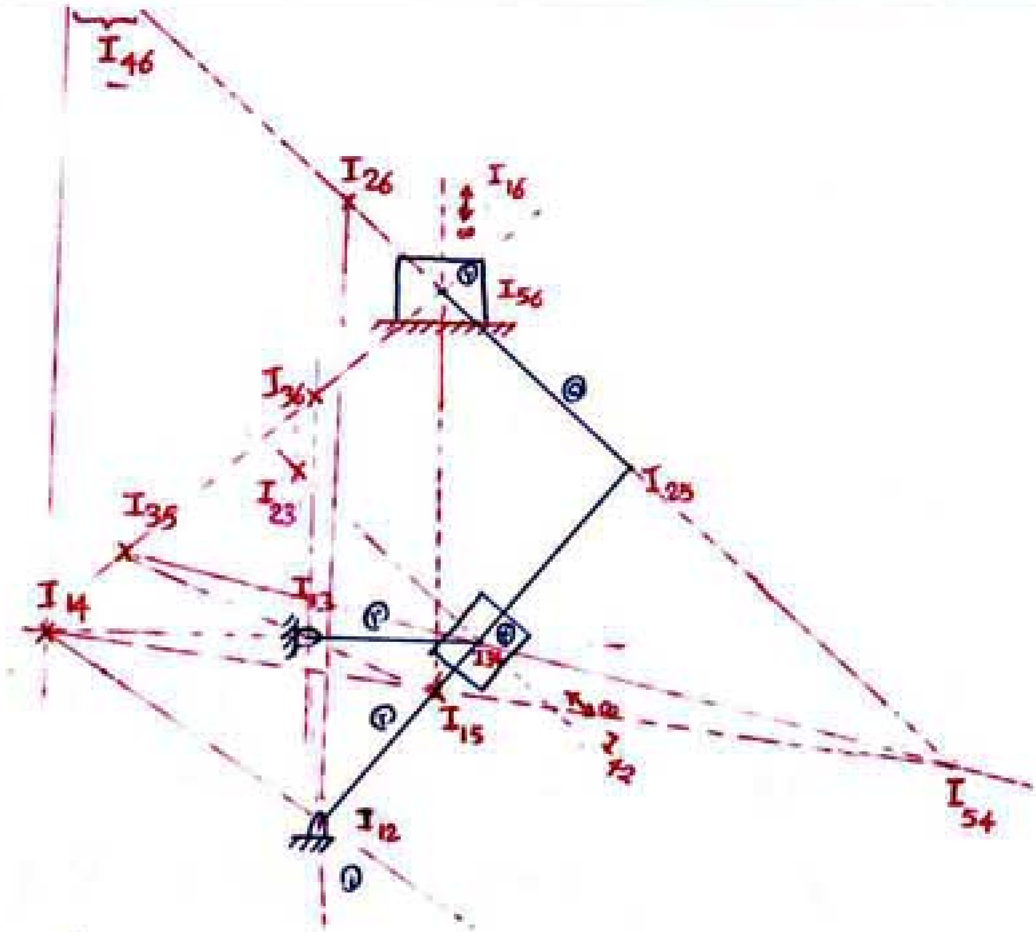


$I_{23} \rightarrow \overset{\Delta}{213}$ و ↓ عمود بر سطح تماس

$$N = \frac{3(2)}{2} = 3$$

P-29

③



$I_{15} \rightarrow \overset{\Delta}{125}$ و $\overset{\Delta}{165}$

$I_{26} \rightarrow \overset{\Delta}{612}$ و $\overset{\Delta}{652}$

$I_{14} \rightarrow \overset{\Delta}{124}$ و $\overset{\Delta}{134}$

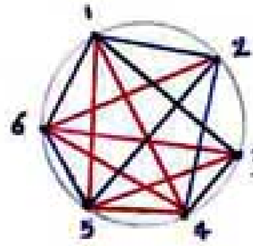
$I_{54} \rightarrow \overset{\Delta}{415}$ و $\overset{\Delta}{425}$

$I_{46} \rightarrow \overset{\Delta}{416}$ و $\overset{\Delta}{456}$

$I_{35} \rightarrow \overset{\Delta}{345}$ و $\overset{\Delta}{315}$

$I_{36} \rightarrow \overset{\Delta}{356}$ و $\overset{\Delta}{316}$

$I_{23} \rightarrow \overset{\Delta}{213}$ و $\overset{\Delta}{243}$

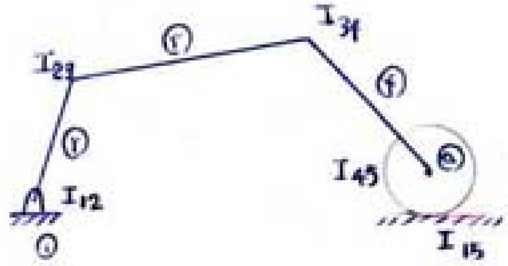


$$N = \frac{6(5)}{2} = 15$$

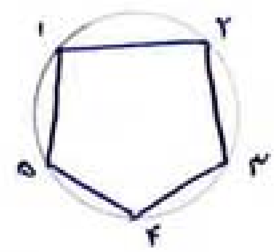
7 ← مرکز آنی اولیه

8 ← مرکز آنی ثانویه

مثال: کلیه مراکز آنی مسائل زیر را تعیین کنید.



$$N=\frac{5(4)}{2}=10$$



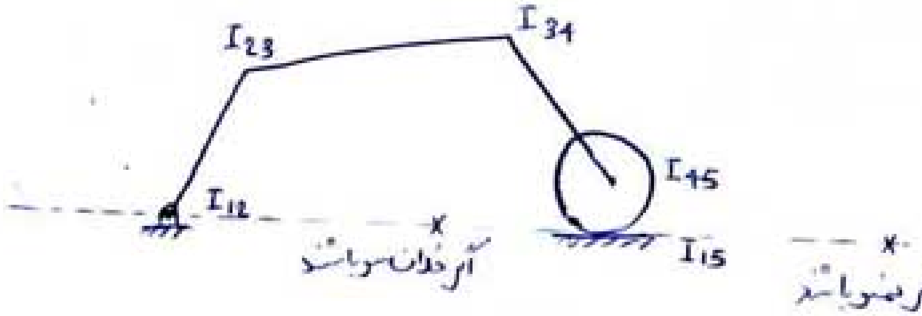
ملاحظه می‌گردد ۵ مرکز آنی اولیه مشخص و ۵ مرکز آنی دیگر ثانویه و غیر مشخص هستند.
دقت شود که اگر مسئله ۲ درجه آزادی باشد، الزاماً می‌بایست اطلاعاتی غیر از محل مراکز آنی اولیه در دست باشد، زیرا در غیر این صورت مسئله غیر قابل حل است.

✓ اطلاعات اضافی: $\frac{\omega_2}{\omega_5}=0.5$ و ω_2 و ω_5 خلاف جهت هم حرکت می‌کنند.

پس ابتدا I_{25} را با استفاده از اطلاعات تکمیلی بدست می‌آوریم. پس از مشخص شدن تعداد کافی از موقعیت مراکز آنی، سایر مراکز آنی ثانویه را بدست می‌آوریم.

I_{25} روی خط واصل I_{12} و I_{15} است.

$$\frac{\omega_2}{\omega_5}=\frac{I_{15}-I_{25}}{I_{12}-I_{25}}=\frac{1}{2}$$

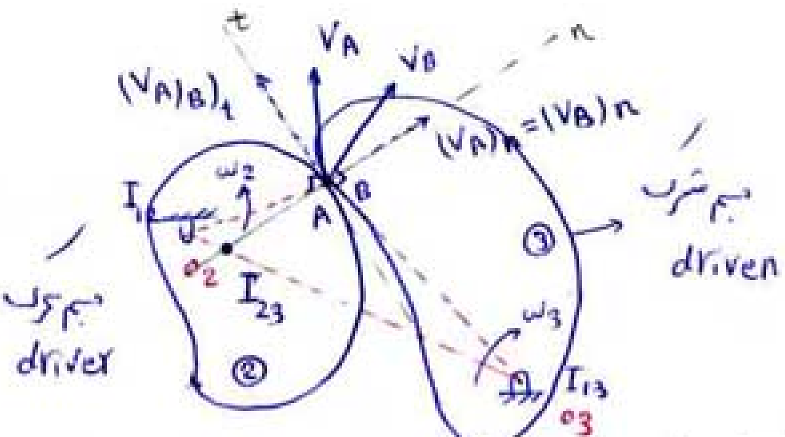


پس از تعیین این مرکز آنی، سایر مراکز آنی قابل تعیین هستند.

حرکت لغزشی-غلتشی :

پیشتر گفته شد به مفصلی که هم لغزش و هم غلتش را توأماً داشته باشد، مفصل لغزشی-غلتشی نامیده می شود مانند اتصال چنگالی، یا به عبارت دیگر مفصلی که در تمام لحظات شرایط غلتشی خالص بودن را نداشته باشد می تواند لغزشی-غلتشی باشد. منظور از مفصل ساده، غلتشی در تمام لحظات است و منظور از حرکت بررسی وضعیت در لحظه ای خاص است. پس یک مفصل لغزشی-غلتشی در زمانهای مختلف می تواند نوع حرکت متفاوتی را از خود نشان دهد :

حالت اول :



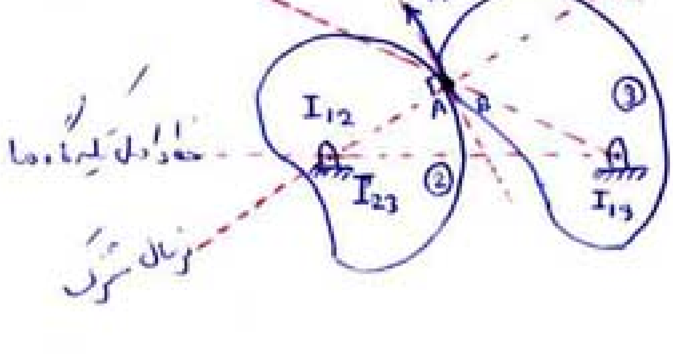
ملاحظه می گردد که حرکت از نوع لغزشی غلتشی است و با فرض معلوم بودن ω_2 و همچنین پیدا کردن مرکز آنی I_{23} در طول نقطه I_{23} مابین I_{12} و I_{13} است جهت ω_2 و ω_3 خلاف هم می باشد.

$$\omega_3 = \frac{(\overline{I_{12}-I_{23}})}{(\overline{I_{13}-I_{23}})} \cdot \omega_2$$

* با توجه به نسبت فاصله مراکز آنی می توان تشخیص داد که کدام محرک بزرگتر است یا کدام متحرک.

I_{23} نمی تواند روی I_{13} بیفتد زیرا به ازای ω_2 مقدار ω_3 برابر ∞ می شود.
I_{23} می تواند روی I_{12} بیفتد و در آن صورت حالت لغزشی پیش می آید.

حالت دوم :



$$(V_A)_n = 0 \Rightarrow (V_B)_n = 0$$
$$\downarrow$$
$$V_B = 0 \quad \text{و} \quad (V_B)_t = 0$$

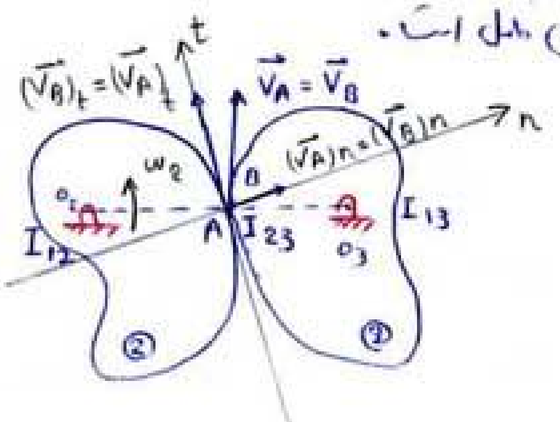
از آنجا که $(V_A)_n$ ، مولفه عمودی در سرعت‌ها هم برابرند، لذا $(V_A)_n=(V_B)_n=0$ به همین دلیل $V_B=0$ و یا $\omega_3=0$ پس در این لحظه جسم 3 ثابت می‌باشد. از آنجا که لغزش تابع رابطه $(\vec{V}_{A/B})_t=(\vec{V}_A)_t-(\vec{V}_B)_t$ است در این لحظه به دلیل صفر شدن $(\vec{V}_A)_t$ (به علت صفر بودن $\vec{V}_A$)، لغزش حداقل مقدار شده، و لذا حرکت بین دو جسم به صورت غلتش کامل می‌شود.

دقیقاً مانند حالتی که جسم روی زمین می‌غلتد. (جسم ۳ زمین می‌شود و جسم ۲ می‌غلتد)

پس در این حالت (لحظه) حرکت غلتشی کامل می‌باشد ولی معمولاً همراه لغزش-غلتشی است.

حالت سوم:

اگر حالتی در حین حرکت دو جسم به وجود آید که مرکز آنی دوران دو جسم نسبت به یکدیگر بر نقطه تماس دو جسم منطبق شود در آن صورت حرکت دو جسم هم از نوع غلتشی کامل است.



داریم: $(\vec{V}_B)=(\vec{V}_A)$

از آنجا که $(\vec{V}_B)_n=(\vec{V}_A)_n$

لذا $(\vec{V}_B)_t=(\vec{V}_A)_t$

$\Rightarrow (\vec{V}_{A/B})=(\vec{V}_A)_t-(\vec{V}_B)_t=0$

فصل چهارم: بررسی جابجایی در مکانیزمها

در بررسی جابجایی اهرمها یا ذره‌ای از یک اهرم معمولاً موقعیتی از یک مکانیزم در نظر گرفته می‌شود که اصطلاحاً فاز نام دارد.

یک مکانیزم در طول یک سیکل حرکت خود از فازهای مختلفی عبور می‌کند که ممکن است مورد نظر باشند، لذا در بررسی جابجایی یک اهرم یا ذره‌ای از آن لازم است تا فازهای مختلف حرکت بررسی شوند، برای منظور روشهای مختلفی وجود دارد که از آن جمله می‌توان موارد زیر را نام برد:

۱- روش ترسیمی

۲- روش جبری

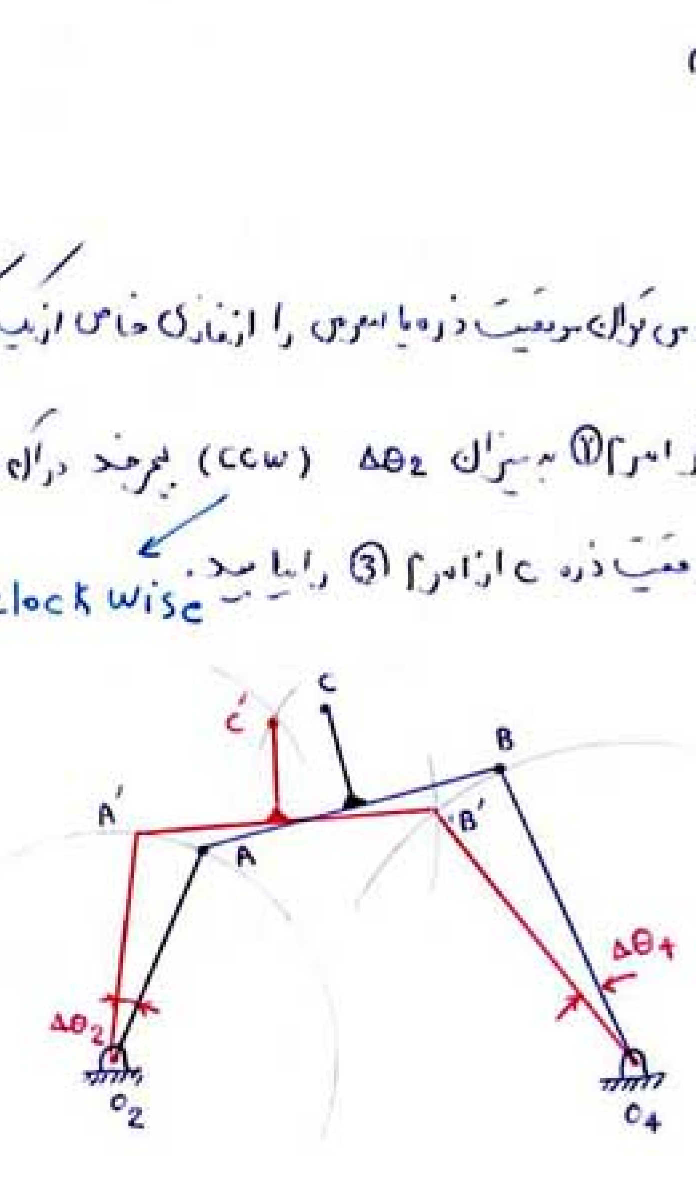
۳- روش برداری (مختلط)

۱- روش ترسیمی

روشی است که از طریق آن می‌توان موقعیت ذره‌ها یا اهرمها را از فازی خاص از یک حرکت بدست آورد.

مثال: در مکانیزم زیر اگر اهرم ② به میزان $\Delta\theta_2$ (CCW) بچرخد در آن صورت در این ترتیب از اهرمهای دیگر و نیز موقعیت ذره c از اهرم ③ را بیابید.

Counter clock wise

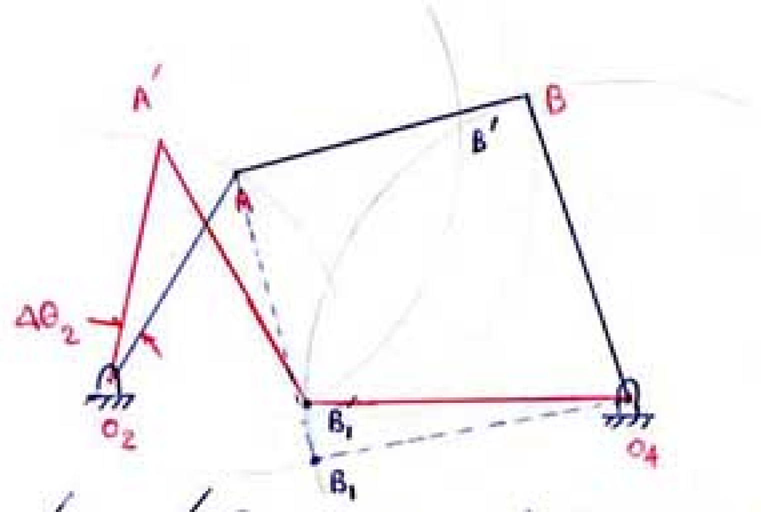


توجه شود که مسئله یک درجه آزادی است و با داشتن $\Delta\theta_2$ بقیه موارد قابل محاسبه اند.

مراحل کار:

- به اندازه O_2A با پرگار کمانی از نقطه O_2 می‌زنیم و با توجه به زاویه $\Delta\theta_2$ در کمان مذکور موقعیت A' حاصل می‌گردد.
- به اندازه O_4B با پرگار کمانی از O_4 می‌زنیم تا کمان مسیری نقطه B بدست آید.
- از A' به اندازه AB کمانی می‌زنیم تا کمان مسیری و مسیر حرکت B را قطع کند و این نقطه را B' می‌نامیم.
- با وصل کردن A' به B' موقعیت جدید مکانیزم مشخص می‌گردد.
- از C تا A و B یک فاصله وجود دارد، بنابراین دو کمان به مرکز A' و B' با طولهای AC و BC می‌زنیم و محل تقاطع نقطه C' است، از آن به $A'B'$ عمود می‌کنیم.

نکته: به ازای زاویه $\Delta\theta_2$ حالت دیگری نیز ممکن است اتفاق بیفتد. به شکل زیر توجه شود.



به ازای $\Delta\theta_2$ در جدول می‌توان دو موقعیت $A'B'$ و $A'B'_1$ بوجود آید که هر دو امکان‌پذیر است.

از دو موقعیت اشکالی قابل قبول است که به حالت قبل نزدیک‌تر باشد. با توجه به اینکه مکانیزم ابتدا از نقطه B' می‌گذرد لذا همان مکانیزم قبلی از اتفاق شده قابل قبول است.

اگر مکانیزم در حالت $O_2AB_1O_4$ به عنوان حالت ابتدایی باشد ادامه مکانیزم $O_2A'B'_1O_4$ حالت نزدیکتر و قابل قبول می‌بود.

نکته:

۱- اگر کمان رسم شده به مرکز جدید A (شکل A') بر مسیر حرکت B مماس شود، در آن صورت منحنی الحاقی حرکت اهرم ② به سمت چپ مشخص خواهد شد. تحت چنین شرایطی مکانیزم ایستاده و شروع به حرکت در جهت عکس می‌نماید.

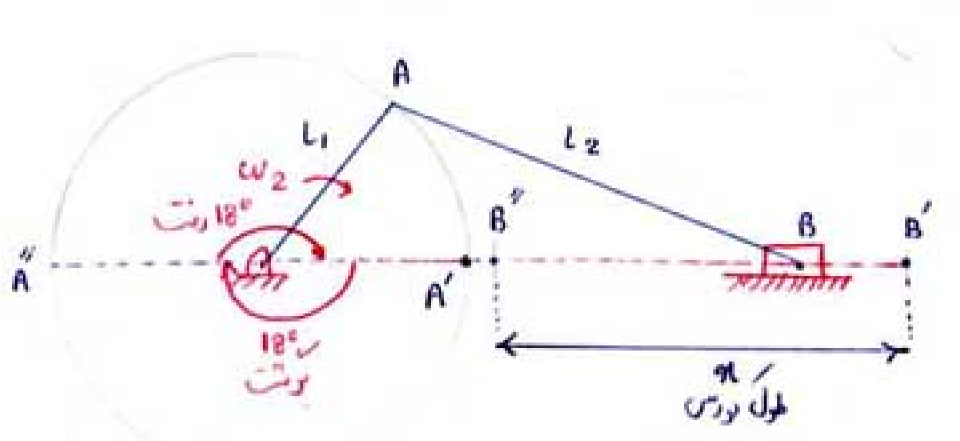
۲- اگر کمان رسم شده به مرکز جدید A (شکل A') مسیر حرکت B را قطع نکند، این بدان معنی است که آن موقعیت برای آن مکانیزم وجود ندارد.

- مکانیزمهای بازگشت سریع (Quick Return mechanism)

از مکانیزمهای با بازگشت سریع عموماً در ماشین‌های ابزار مثل صفحه تراش و اره‌های الکتریکی استفاده می‌گردد. این مکانیزم ضمن ثابت بودن سرعت زاویه‌ای لنگ، قادر است ابزار برش ماشین را که دارای حرکت رفت و آمدی است خیلی آرام به جلو برده ولی سریع به عقب برگرداند.

به طور کلی مکانیزمهایی هستند که نسبت زمان رفت به زمان بازگشت اهرم خروجی به موقعیت اولیه بزرگتر از یک باشد.

مثال: با فرض سرعت ثابت اهرم ② (اهرم ورودی) آیا مکانیزم از نوع بازگشت سریع است یا خیر؟



$$x = L_1\cos\theta_2 + L_2\cos\beta$$

$$v = \dot{x} = -L_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 - L_2\dot{\beta}\sin\beta$$

ملاحظه می‌گردد سرعت بلوک ثابت نیست.

اگر ω ثابت باشد آنگاه $\alpha = 0$ ، در این صورت $\Delta\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega t$

داریم $\Delta\theta_2 = \omega t$

$$(\Delta\theta_2)_{\text{رفت}} = \omega . t$$

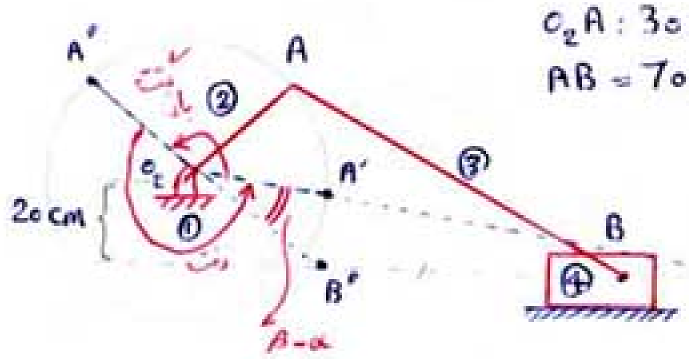
$$(\Delta\theta_2)_{\text{بازگشت}} = \omega . t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\theta_{2\,\text{رفت}}}{\Delta\theta_{2\,\text{بازگشت}}} = \frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{بازگشت}}}$$

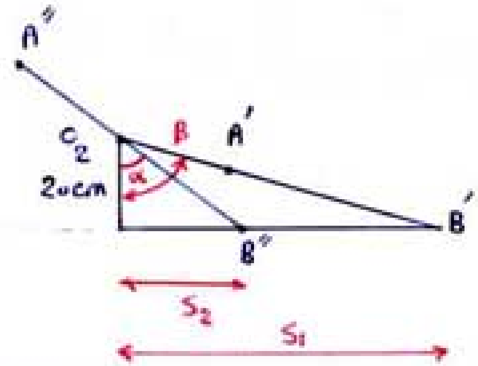
بنابراین با توجه به شکل زاویه °180 رفت و °180 برگشت آنگاه $\frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}} = 1$ و مکانیزم از نوع بازگشت سریع نیست.

مثال: آیا مکانیزم زیر بازگشت سریع است یا خیر؟ نسبت زمان رفت به بازگشت را بیابید. همچنین طول کورس لغزنده را محاسبه نمایید.

$O_2A : 30\,cm$

$AB = 70\,cm$





$$S_1 = \sqrt{100^2 - 20^2} = 97.98$$

$$S_2 = \sqrt{40^2 - 20^2} = 34.64$$

$$S_2 - S_1 = 63.33\ cm$$

طول کورس لغزنده

$$\tan\alpha = \frac{34.64}{20} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\tan\beta = \frac{97.78}{20} \Rightarrow \beta = 78.46^\circ$$

$$\beta - \alpha = 18.46^\circ$$

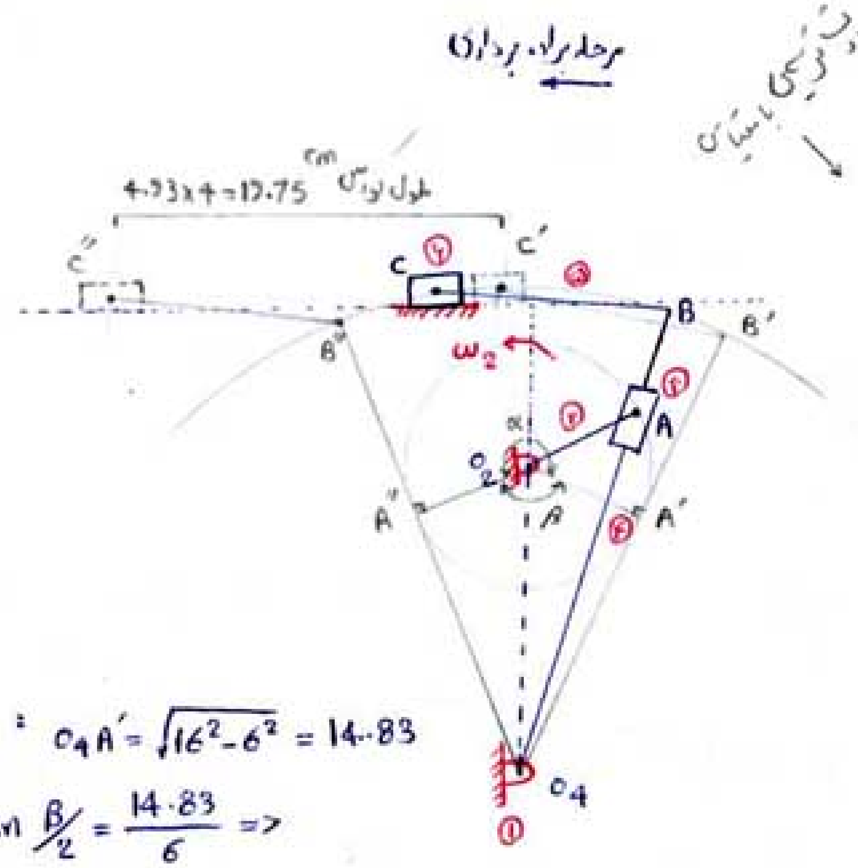
زاویه شروع کار رفت $= 180^\circ + 18.46 = 198.46$

زاویه بازگشت $= 180^\circ - 18.46 = 161.54$

$$\frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}} = \frac{\Delta\theta_{\text{رفت}}}{\Delta\theta_{\text{برگشت}}} = \frac{198.46}{161.54} = 1.23$$

پس مکانیزم بازگشت سریع است.

تمرین: برای مکانیزم زیر که در یک ماشین تراش کاربرد دارد، مشخص کنید: الف) آیا مکانیزم بازگشت سریع است؟
ب) محاسبه طول کورس و ج) نسبت زمان رفت به زمان برگشت؟



$O_2O_4 = 16\,cm$
$O_2A = 6\,cm$
$O_4B = 26\,cm$
$BC = 12\,cm$
مسیر C تا $O_4 = 25\,cm$
مقیاس $1\,cm = 4\,cm$

$\overset{\Delta}{O_2A'O_4}$: $O_4A' = \sqrt{16^2 - 6^2} = 14.83$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{14.83}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{\beta}{2} = 67.97 \Rightarrow \beta = 135.95$$

$$\alpha = 360 - \beta = 224.05$$

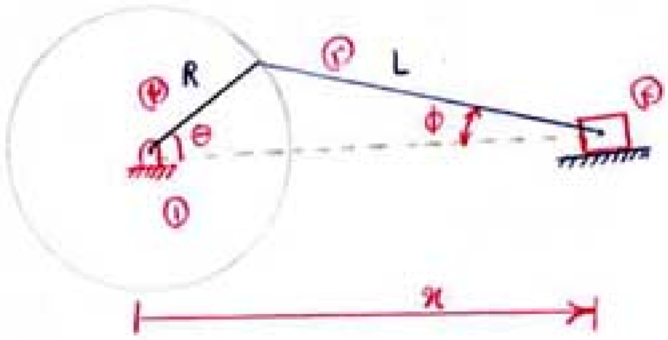
$$\frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}} = \frac{\Delta\theta_{\text{رفت}}}{\Delta\theta_{\text{برگشت}}} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{224.05}{135.95} = 1.64$$

مکانیزم بازگشت سریع است.

۲- روش جبری

روشی است که در آن از عبارات ریاضی برای تعیین موقعیت یک عضو یا ذره‌ای از یک عضو استفاده می‌شود. با بدست آوردن معادلات جبری می‌توان جابجایی، سرعت و شتاب اعضای مکانیزم را تعیین نمود.

مثال ۸: با در نظر گرفتن مکانیزم لنگ لغزنده در شکل زیر، معادلات مربوط به جابجایی، سرعت و شتاب لغزنده را به صورت تابعی از R و L و θ و ω بدست آورید. (فرض: ω ثابت است)



$$x = R\cos\theta + L\cos\phi \quad ①$$

$$\frac{dx}{dt} = -R\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} - L\sin\phi\,\frac{d\phi}{dt} \quad ②$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad ③$$

$$\frac{\sin\theta}{L} = \frac{\sin\phi}{R} \Rightarrow \sin\phi = \frac{R}{L}\sin\theta \quad ④ \qquad \phi = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{R}{L}\sin\theta\right) \quad ⑤$$

با مشتق‌گیری از ④ $\Rightarrow \cos\phi\,\dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{R}{L}\cos\theta\,\dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow \dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{R\omega\cos\theta}{L\cos\phi} \quad ⑥$

با جایگزینی ۳، ۴ و ۶ در ② $\Rightarrow V = \dfrac{dx}{dt} = -R\omega\left[\sin\theta + \cos\theta\tan\phi\right] \quad ⑦$

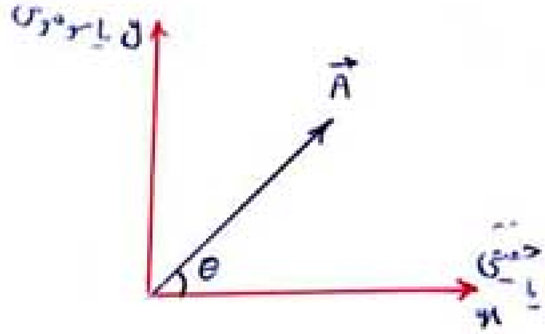
با مشتق‌گیری از ⑦ $\quad A = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -R\omega\left[\cos\theta\,\dfrac{d\theta}{dt} - \sin\theta\tan\phi\,\dfrac{d\theta}{dt} + \cos\theta \times \dfrac{1}{\cos^2\phi} \times \dfrac{d\phi}{dt}\right]$

$$\Rightarrow A = -R\omega^2\left[\cos\theta + \frac{R\cos^2\theta}{L\cos^3\phi} - \sin\theta\tan\phi\right]$$

۳- روش برداری (دقیق)

در این روش هر یک از اعضا به صورت برداری تعریف می‌شود. سپس با استفاده از عبارات جمع یا تفریق برداری مجهولات مسئله (طوری که در مثال بعد گفته خواهد شد) تعیین می‌شوند.

قبل از ذکر مثال لازم به توضیح است که چنانچه بردار A به بزرگی A در جهتی مطابق شکل زیر باشد، آن بردار را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر نوشت.

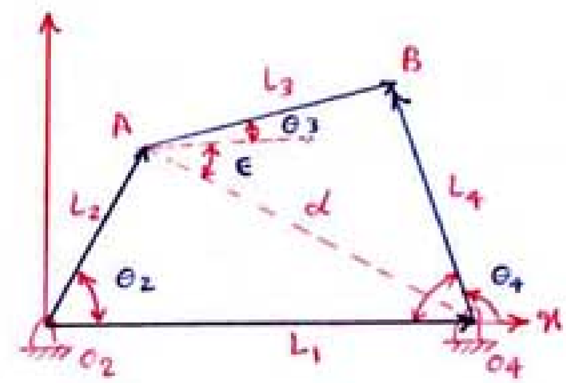


$$\vec{A} = Ae^{i\theta}$$

or

$$\vec{A} = A(\cos\theta + i\sin\theta)$$

مثال: در مکانیزم زیر موقعیت هر یک از اهرم‌های 3 و 4 را برحسب موقعیت اهرم 2 بیابید.



$$L_1 = L_1 e^{i(0)}$$
$$L_2 = L_2 e^{i(\theta_2)}$$
$$L_3 = L_3 e^{i(\theta_3)}$$
$$L_4 = L_4 e^{i(\theta_4)}$$
$$d = de^{i\epsilon}$$

از قبل می‌دانیم که اندازه d طول آن وابسته به مقدار θ_2 می‌باشد و مجهول است:

$$d^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\theta_2$$

با توجه به شکل داریم:

$$\vec{L_2} + \vec{d} = \vec{L_1}$$

$$L_2e^{i\theta_2} + de^{i\epsilon} = L_1 \quad \text{or} \quad L_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) + d(\cos\epsilon + i\sin\epsilon) = L_1$$

$$\Rightarrow (L_2\cos\theta_2 + d\cos\epsilon) + i(L_2\sin\theta_2 + d\sin\epsilon) = L_1$$

Real component : $L_2\cos\theta_2 + d\cos\epsilon = L_1 \Rightarrow d\cos\epsilon = L_1 - L_2\cos\theta_2$ ①

imaginary component : $L_2\sin\theta_2 + d\sin\epsilon = 0 \Rightarrow d\sin\epsilon = -L_2\sin\theta_2$ ②

تقسیم ۲ بر ۱ داریم $\Rightarrow$ $$\tan\epsilon = \frac{-L_2\sin\theta_2}{L_1 - L_2\cos\theta_2} \Rightarrow \epsilon = \tan^{-1}\left(\frac{+L_2\sin\theta_2}{L_2\cos\theta_2 - L_1}\right)$$

همچنین با توجه به شکل داریم: $\vec{d} + \vec{L_4} = \vec{L_3}$

$$d e^{i\epsilon} + L_4 e^{i\theta_4} = L_3 e^{i\theta_3} \Rightarrow$$

$$(d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4) + i(d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4) = L_3\cos\theta_3 + iL_3\sin\theta_3$$

Real Component: $d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4 = L_3\cos\theta_3$ ۳

imaginary component: $d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4 = L_3\sin\theta_3$ ۴

از تقسیم ۴ بر ۳ داریم: $$\tan\theta_3 = \frac{d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4}{d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4} \Rightarrow \theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4}{d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4}\right)$$

همچنین داریم: $\vec{L_2} + \vec{L_3} - \vec{L_1} = \vec{L_4}$ یا $\vec{L_2} + \vec{L_3} - \vec{L_4} = \vec{L_1}$

$$L_2 e^{i\theta_2} + L_3 e^{i\theta_3} - L_1 = L_4 e^{i\theta_4}$$

$$L_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) + L_3(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3) - L_1 = L_4(\cos\theta_4 + i\sin\theta_4)$$

Real Component: $L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\theta_3 - L_1 = L_4\cos\theta_4$ ۵

imaginary component: $L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_3 = L_4\sin\theta_4$ ۶

از تقسیم ۶ بر ۵ داریم: $$\tan\theta_4 = \left(\frac{L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_3}{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\theta_3 - L_1}\right) \Rightarrow \theta_4 = \tan^{-1}\left(\frac{L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_3}{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\theta_3 - L_1}\right)$$

با داشتن θ_2 و ϵ برحسب θ_2 و حل θ_3 و θ_4 در یک دستگاه، کلیه مجهولات بدست می‌آیند.

فصل پنجم: بررسی سرعت در مکانیزمها

(فصل ۵ و ۶ مارتین)

بمنظور تعیین سرعت ذره‌ای از یک عضو یا سرعت زاویه‌ای عضوی خاص از یک مکانیزم روشهای مختلفی وجود دارد که از آن جمله می‌توان موارد زیر را نام برد:

۱- روش مرکز آنی

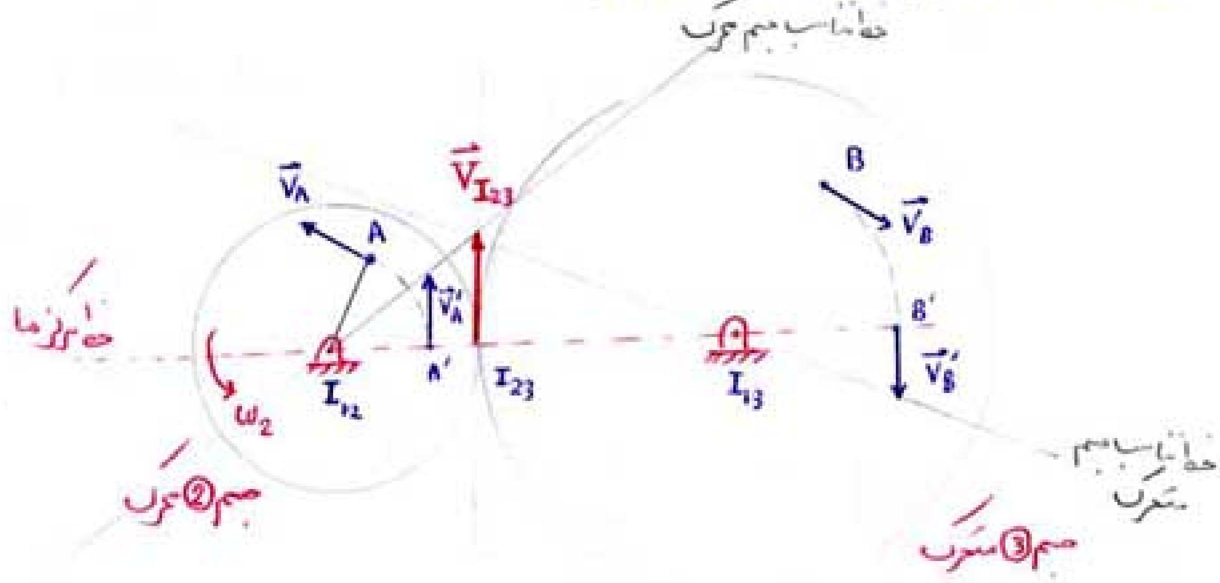
۲- روش مؤلفه

۳- روش خط موازی

۴- روش سرعت نسبی

۱- روش مرکز آنی

از این روش هم برای تعیین سرعت زاویه‌ای و هم تعیین سرعت خطی ذره‌ای از یک عضو استفاده می‌شود. اگر در مکانیزم سرعت ذره‌ای مانند A از جسم محرک معلوم باشد، می‌توان به شرح زیر سرعت ذره‌ای مانند B از جسم متحرک را مشخص نمود.



مراحل انجام کار:

۱- مراکز آنی جسم متحرک نسبت به زمین (I_{12})، مشترک نسبت به زمین (I_{13}) و متحرک نسبت به مشترک (I_{23}) را یافته و طبق قضیه کندی این سه مرکز روی یک خط راست قرار دارند که همان خط مرکزها می باشد.

۲- از نقطه A که سرعت آن معلوم است به مرکز I_{12} کمانی رسم می کنیم به طوری که نقطه A و به تناسب آن سرعت V_A روی خط مرکزها منطبق شود. (A' و V'_A)

۳- از I_{12} به نوک V'_A خطی رسم می کنیم تا خط تناسب سرعت جسم محرک حاصل شود

۴- از I_{23} عمود بر خط مرکزها رسم می کنیم تا خط تناسب جسم محرک را قطع کند، بدین ترتیب $V_{I_{23}}$ حاصل شود

۵- از I_{13} به نوک $V_{I_{23}}$ خطی رسم می کنیم تا خط تناسب جسم 3 (مشترک) حاصل شود.

۶- از مرکز I_{13} کمانی رسم می کنیم تا نقطه B را روی خط مرکزها منتقل کند (B')

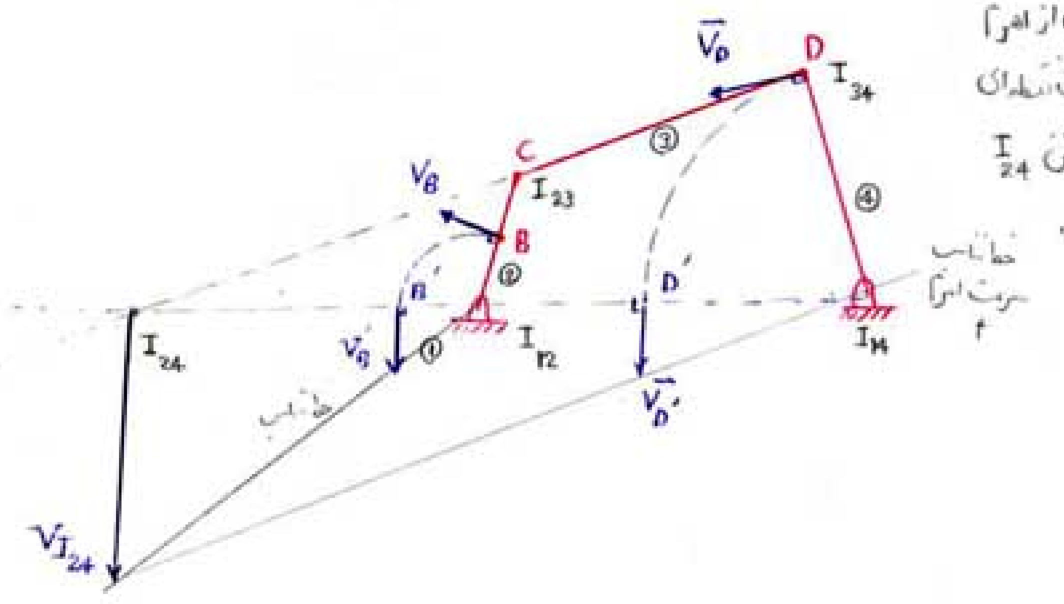
۷- از B' عمود بر خط مرکزها رسم کرده تا خط تناسب سرعت جسم مشترک را قطع کند، بدین ترتیب V'_B حاصل می شود.

۸- مجدداً به مرکز I_{13} کمانی رسم و $\vec{V'_B}$ از نقطه B' را به $\vec{V_B}$ در نقطه B منتقل می کنیم.

* نکته: در این مسئله ها برگرداندن ها رعایت دقیق زاویه و مقیاس الزامی است.

مثال: با توجه به شکل و داشتن سرعت نقطه B، سرعت نقطه D را بدست آورید.

چون می خواهیم سرعت نقطه ای از عضو 4 را با توجه به معلوم بودن سرعت نقطه ای از عضو 2 بدست آوریم، لذا یافتن I_{24} الزامی است.



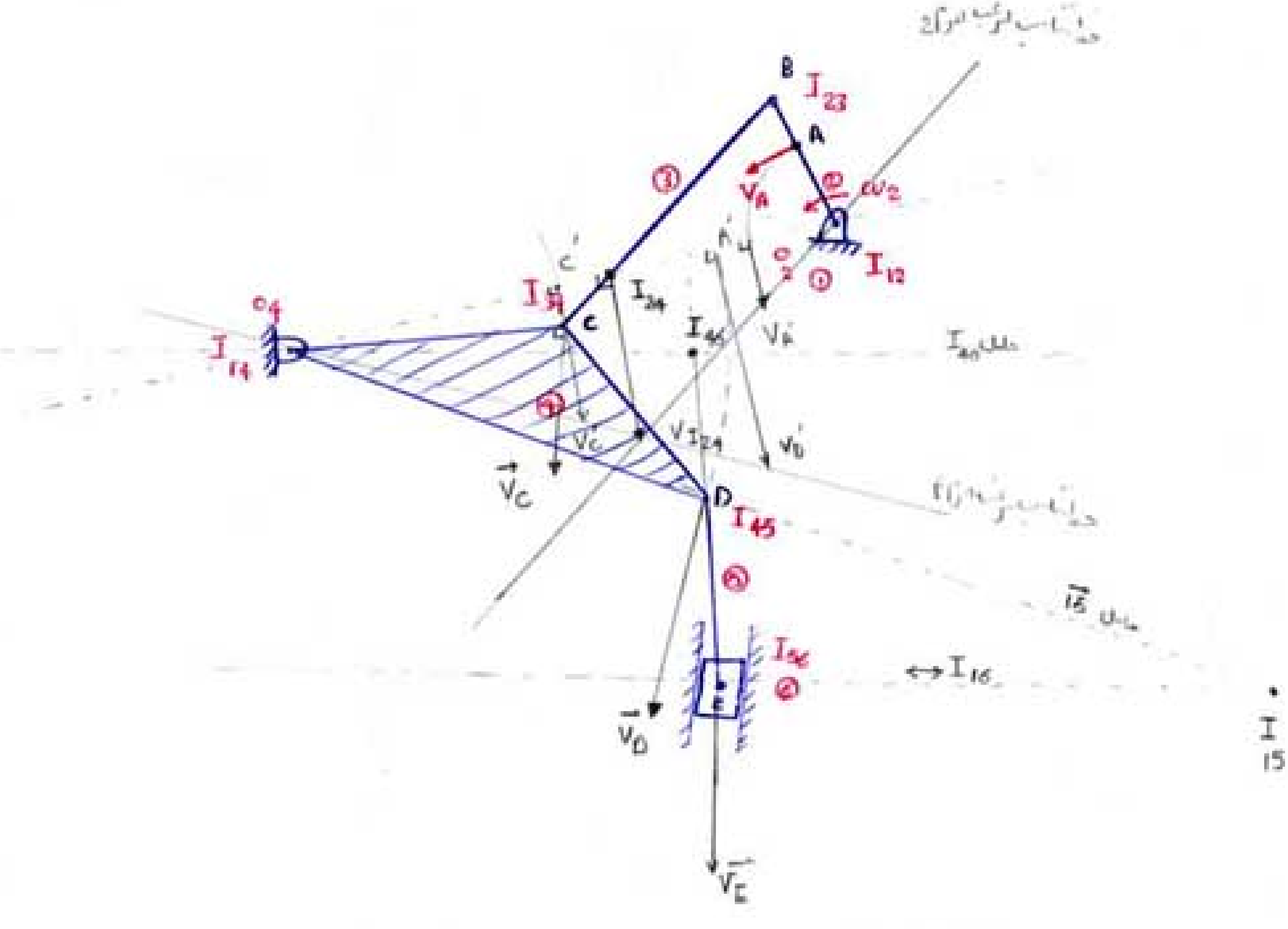
P-43

تکلیف: در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای عضو ② معلوم باشد: مطلوبست

الف) تعیین سرعت ذره A از این عضو

ب) سرعت ذره C از عضو 4 با استفاده از روش مرکز آنی

ج) تعیین سرعت خطی عضو 6 با معلوم بودن سرعت نقطه A



الف) $\vec{V}_A = (\overline{O_2A})\,\omega_2$

ب) جهت تعیین سرعت $\vec V_C$ از روش مرکز آنی استفاده می‌کنیم.

ج) جهت محاسبه $\vec V_E$ چند راه وجود دارد که یکی از آنها را بیان می‌کنیم. با استفاده از مرکز آنی I_{15} و مثلث‌های $\overset{\Delta}{164}$ و $\overset{\Delta}{456}$

محاسبه سرعت $\vec V_D$ ...

$$\vec V_E = \frac{\overline{I_{15}-E}}{\overline{I_{15}-I_{45}}}\,\vec V_D$$

الف: با توجه به مکانیزم زیر مطلوبست تعیین کلیه مراکز آنی. اگر $V_A = 635 \ \frac{mm}{s}$ و جهت چرخش ω_2 در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد، V_D را به روش مراکز آنی تعیین کنید.

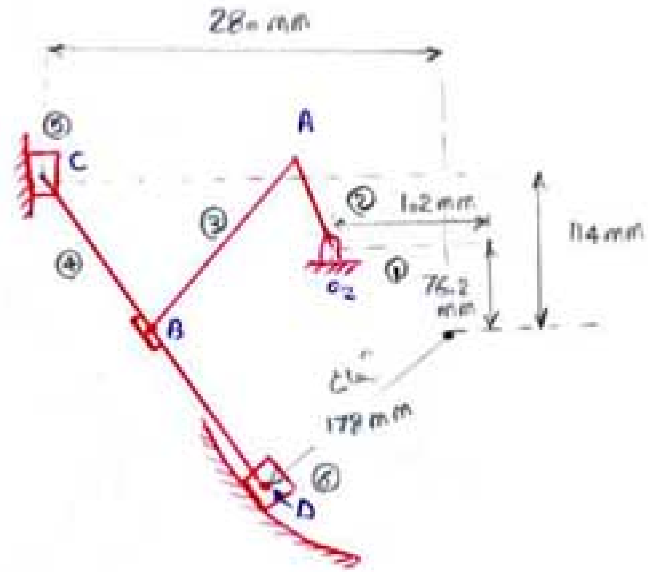
(حل صفحه ۲۹۲
مابی اوکن)

$O_2A = 76.2 \ mm$

$AB = 178 \ mm$

$CD = 305 \ mm$

$CB = 152 \ mm$



۲- روش مؤلفه (Component method)

تجزیه و تحلیل سرعت مکانیزمها به وسیله مؤلفه ها عبارت است از تجزیه سرعت به مؤلفه های مناسب به طوری که بتوان از روی آنها استفاده و دورال میله های مختلف مکانیزم را بررسی نمود.

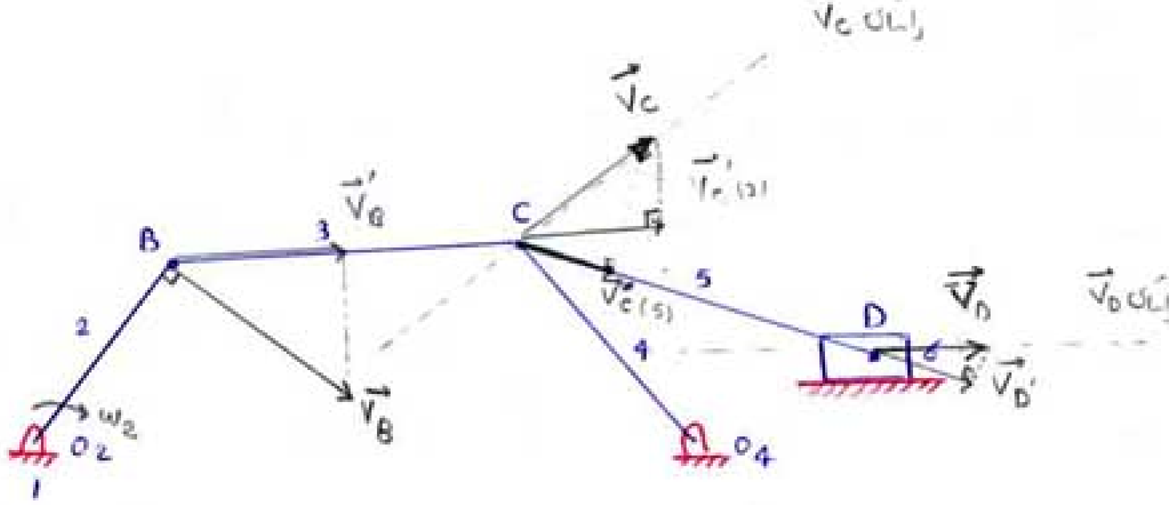
حالت اول: اگر سرعت ذره ای همانند A از جسم صلبی معلوم باشد و راستای سرعت ذره ای دیگر همانند B از همان جسم نیز معلوم باشد می توان برای تعیین V_B به شرح زیر عمل کرد:

۱- ابتدا مؤلفه سرعت V_A را بر رابطه دو ذره تصویر می کنیم ($\vec{V}'_A$)

۲- $\vec{V}'_B = \vec{V}'_A$ در نقطه B را انتخاب می کنیم.

۳- عمود از نوک $\vec{V}'_B$ برای بردار رسم کرده تا راستای سرعت B را قطع کند، بدین ترتیب $\vec{V}_B$ حاصل می شود.

مثال: با معلوم بودن w_2 سرعت نقاط C و D را بدست آورید.



حالت دوم: اگر سرعت ذره ای همانند A و B از جسم صلبی معلوم باشد و بخواهیم سرعت ذره ای همانند C را که از آن چیزی نمی دانیم را تعیین کنیم به شرح زیر عمل می کنیم:

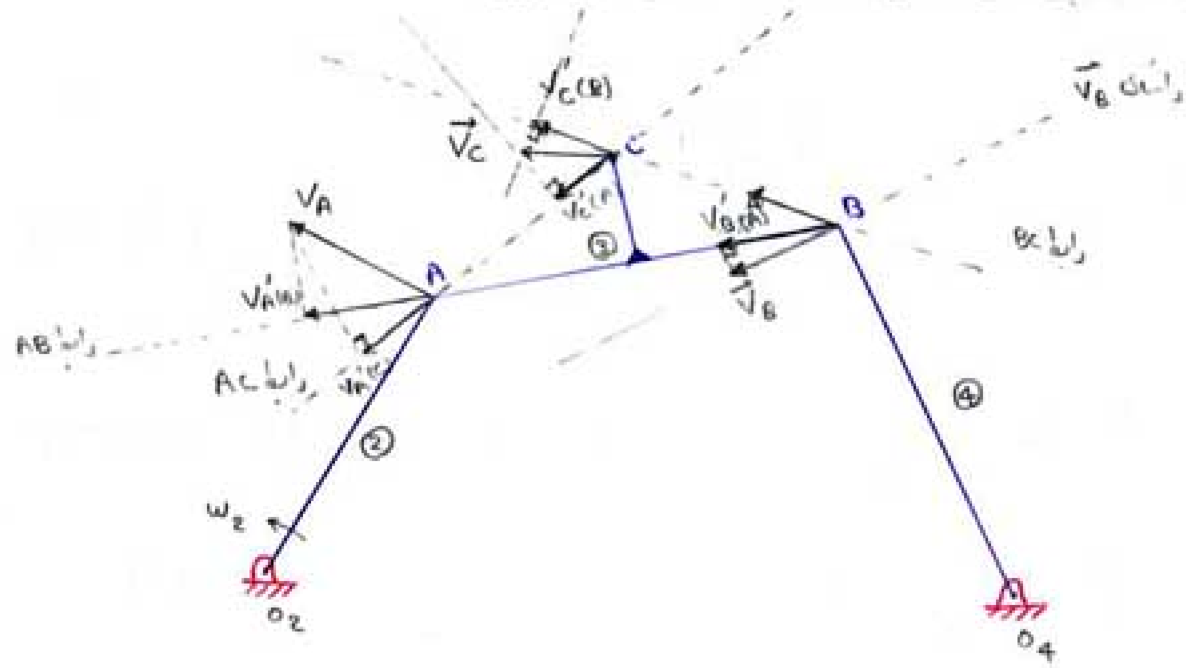
۱- مؤلفه سرعت V_A را بر رابطه AC تصویر می کنیم. (V'_A)

۲- مؤلفه سرعت V_B را بر رابط BC تصویر می‌کنیم (V'_B)

۳- V'_B و V'_A را به نقطه C انتقال داده و عمود بر هر دو رسم کرده، امتداد $\vec{V}_C$ حاصل می‌شود.

نه برآیند برداری !!

مثال: با معلوم بودن ω_2 سرعت نقطه C از اهرم 3 را بیابید.



حالت سوم: اگر سرعت ذره‌ای مانند A و B از جسم صلبی معلوم باشد و بخواهیم سرعت ذره‌ای مانند C روی رابط AB را بیابیم از روش زیر استفاده می‌کنیم.

۱- مؤلفه سرعت $\vec{V}_B$ را عمود بر رابط AB می‌یابیم.

۲- مؤلفه سرعت $\vec{V}_A$ را عمود بر رابط AB می‌یابیم.

۳- خطی از نوک V''_A و V''_B رسم کرده تا در نقطه D با خط مورد نظر (AB) برخورد کند.

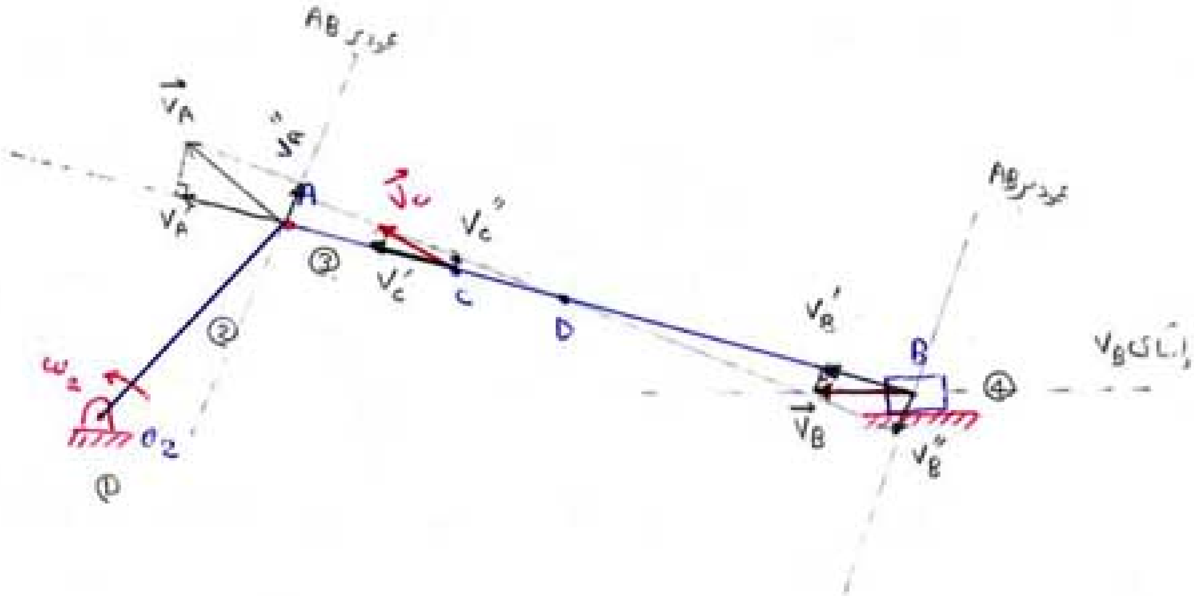
۴- از نقطه C عمود بر AB رسم کرده تا خط حاصل از بند ۳ را قطع کند ($\vec{V}''_C$ حاصل می‌شود)

۵- $\vec{V}'_C$ را از $\vec{V}'_A$ می‌یابیم.

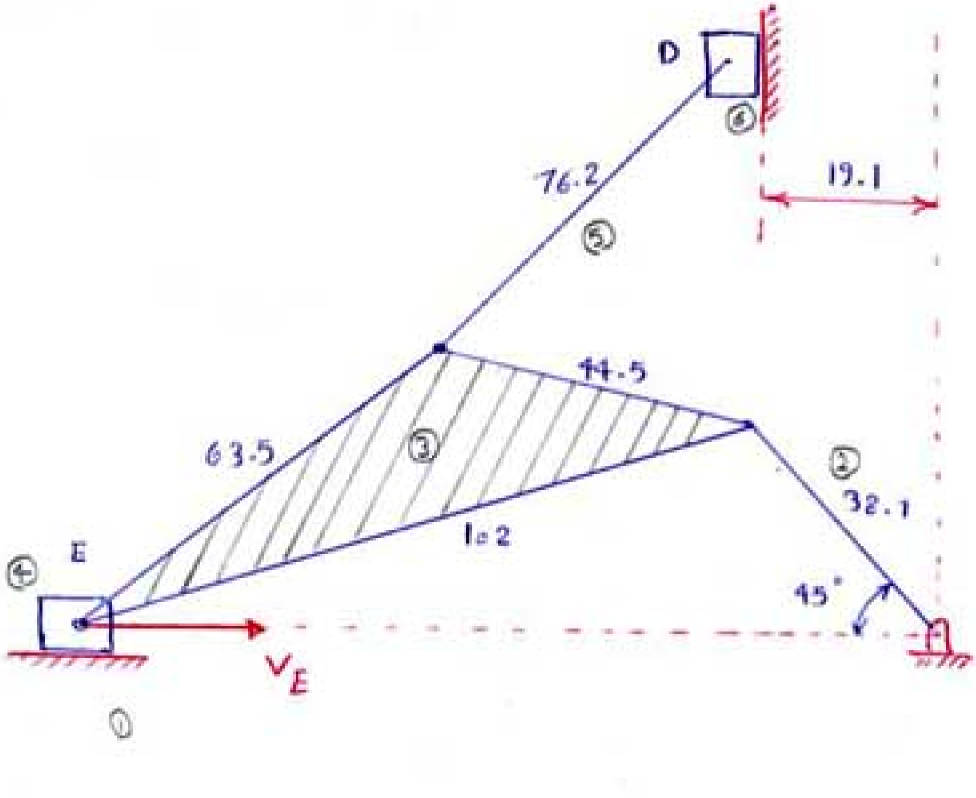
۶- جمع برداری $\vec{V}'_C$ و $\vec{V}''_C$ مقدار $\vec{V}_C$ را تعیین می‌کند.

P- 47

مثال: با معلوم بودن ω_2 سرعت نقطه C را تعیین کنید.



تکلیف: سرعت نقطه E در شکل زیر برابر $4.57 \frac{m}{s}$ می باشد. با استفاده از روش مؤلفه سرعت زاویه‌ای ω_2 و سرعت $\vec{V}_D$ را بیابید.



۳- روش خط موازی

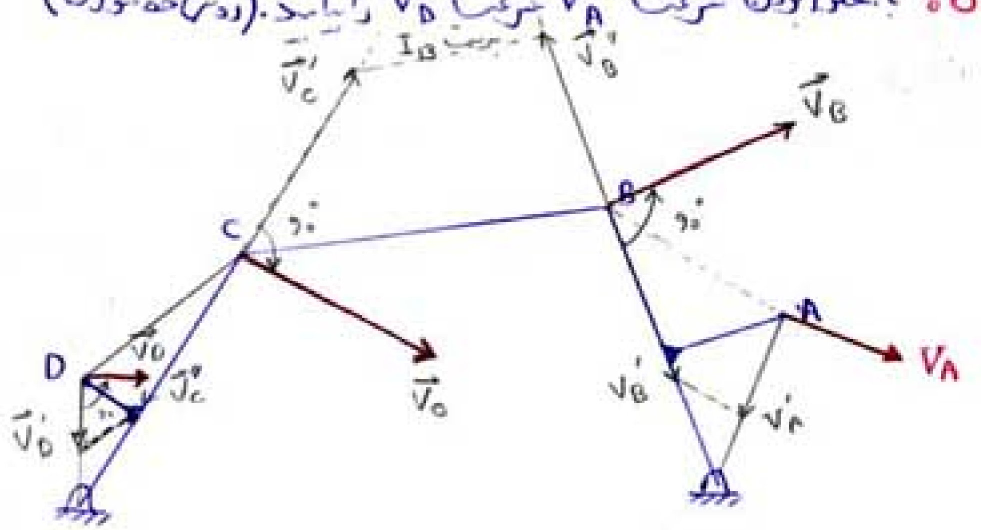
اگر دو ذره A و B بر جسم صلبی واقع باشند و سرعت جسم A معلوم و راستای رابطه آن ذرات به مرکز آنی دوران آن جسم نسبت به زمینه معلوم باشد (به محل دقیق نقطه مرکز آنی نیازی نیست) می‌توان به روش زیر سرعت نقطه B را یافت.

۱- بردار $\vec{V}_A$ را به اندازه ۹۰ درجه می‌چرخانیم تا بر رابطه آن ذره و مرکز آنی سرعت منطبق گردد. (V'_A به دست می‌آید)

۲- از نوک $\vec{V}'_A$ موازی خط AB رسم کرده تا رابطه ذره B و مرکز آنی جسم نسبت به زمینه را در B' قطع کند.

۳- $\vec{V}'_B$ را ۹۰ درجه برمی‌گردانیم (خلاف جهت چرخش قبلی) تا $\vec{V}_B$ حاصل شود.

مثال: با معلوم بودن سرعت V_A سرعت V_D را بیابید. (روش خط موازی)



۴- روش سرعت نسبی

روش سرعت نسبی بدان دلیل حائز اهمیت است که بدین وسیله می‌توان به طور همزمان سرعت ذرات و سرعت زاویه‌ای اجسام را پیدا نمود. همانطور که می‌دانیم اگر دو ذره بر جسم صلبی قرار داشته باشند می‌توان نوشت:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \qquad (1)$$

و به جای $\vec{V}_{A/B}$ در رابطه می‌توان نوشت:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \qquad (2)$$

که راستای آن عمود بر خط رابط AB و مقدار آن برابر $\overline{AB}\omega$ می‌باشد.

رابطه (2) زمانی صادق است که A و B متعلق به یک جسم صلب باشند.

مراحل انجام کار:

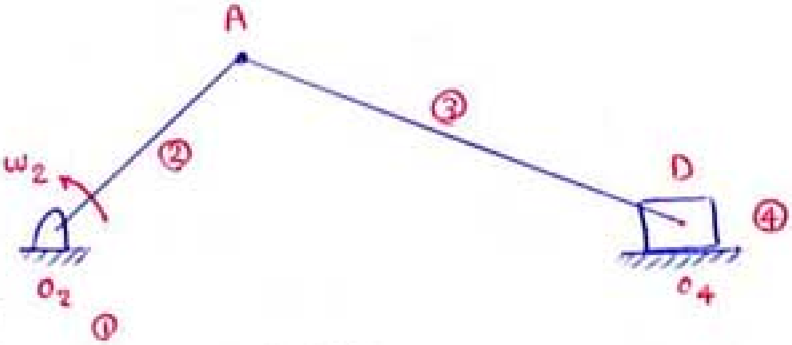
۱- ابتدا نقطه‌ای را به عنوان قطب سرعت در صفحه مشخص می‌کنیم.

۲- از قطب سرعت برداری هم‌سنگ $\vec{V}_B$ رسم می‌کنیم تا نقطه B به دست آید.

۳- می‌دانیم $\vec{V}_{A/B} = \overline{AB}\omega$ عمود بر $\overline{AB}$ است. در جهت عمود بر $\overline{AB}$ از نوک A و متناسب با جهت ω و به بزرگی $\overline{AB}\omega$ رسم می‌کنیم و نقطه به دست آمده را A می‌نامیم.

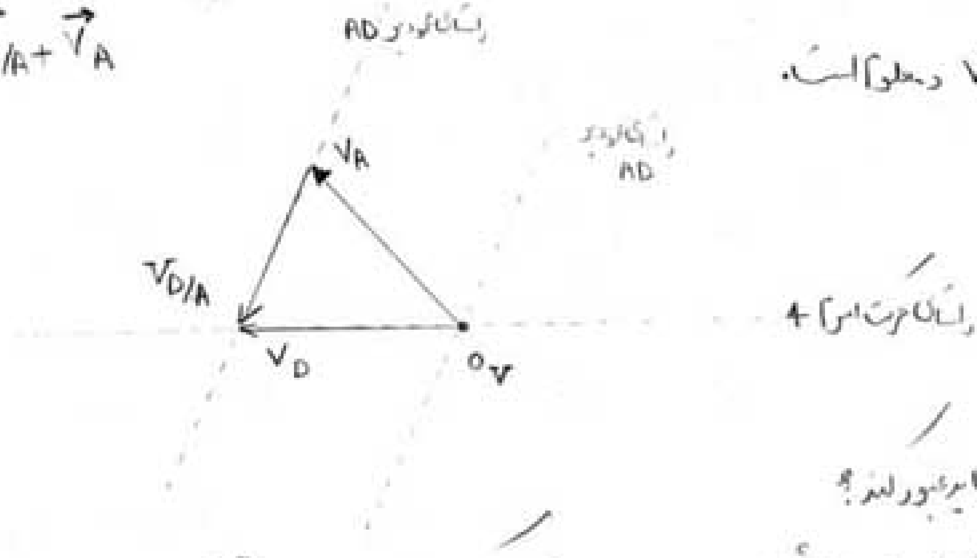
۴- رابط O_p به A سرعت $\vec{V}_A$ است.

مثال: در مکانیزم زیر با معلوم بودن ω_2 با استفاده از روش سرعت نسبی سرعت زاویه‌ای اهرم 3 و سرعت لوله شماره 4 را بیابید.



$$\overset{\checkmark -}{\vec{V}_D} = \overset{\checkmark -}{\vec{V}_{D/A}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_A}$$

$V_A = \overline{O_2A}\ \omega_2$ معلوم است.



سرعت لغزنده 4 ← $\vec{V}_D$

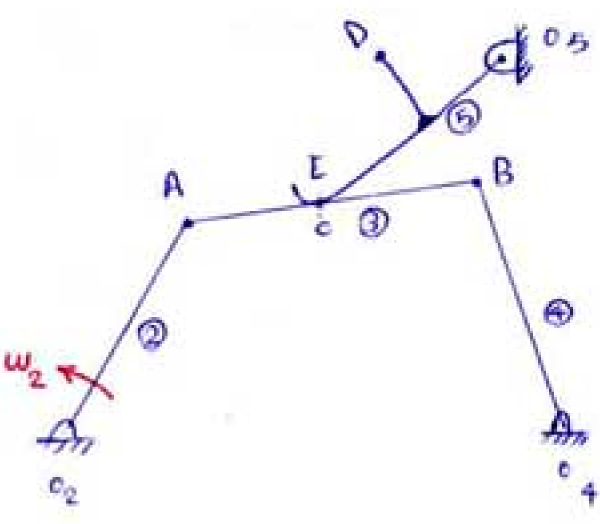
سرعت زاویه‌ای ω_3 ← $\omega_3 = \dfrac{V_{D/A}}{\overline{AD}}$

سؤال:

چرا $\vec{V}_D$ الزاماً از O_V باید عبور کند؟

دقت شود که هر برداری که از O_V رسم شود سرعت مطلق و هر بردار بین دو نقطه بدون قطب سرعت باشد، بیانگر سرعت نسبی بین آن دو نقطه است.

مثال 8 در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای اهرم 2 معلوم باشد، سرعت دورانی D از اهرم 5 را بیابید.



D درواقع روی اهرم 5 می‌باشد.

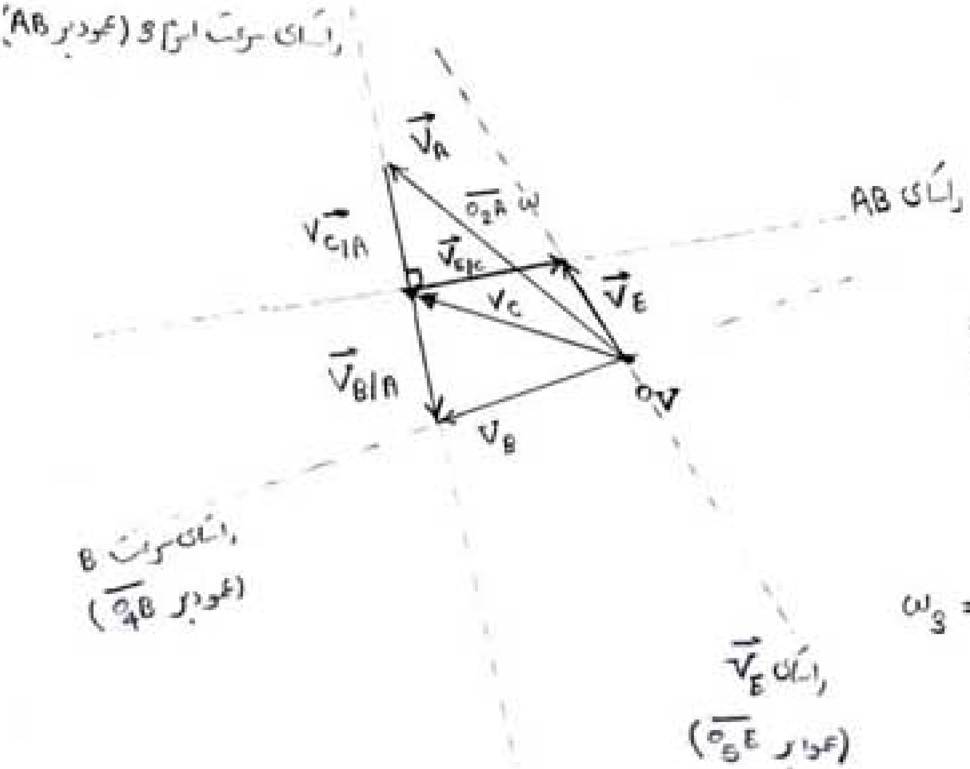
با داشتن ω_5 و با معلوم بودن فاصله $\overline{O_5D}$ سرعت $\vec{V}_D$ تعیین می‌گردد.

پس هدف تعیین ω_5 است که جهت بدست آوردن آن محاسبه سرعت V_E الزامیست.

مفصل بین اهرم 5 و اهرم 3 با اتصال نقاط E و C از چه نوعی است؟

چون رابطه خط المرکزین از یک شکل تماسی پیروی نمی‌کند مفصل لغزشی - غلتشی است. پس

$$\vec{V}_E = \vec{V}_{E/C} + \vec{V}_C$$



برای A:

اندازه: $V_A = \overline{O_2A}\,\omega_2$

جهت: عمود بر $\overline{O_2A}$

برای AB:

$$\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_A} + \overset{-\checkmark}{\vec{V}_{B/A}} = \overset{-\checkmark}{\vec{V}_B}$$

با معلوم شدن $\vec{V}_{B/A}$ داریم $\omega_3 = \dfrac{\vec{V}_{B/A}}{\overline{AB}}$

به این ترتیب برای نقطه C داریم:

$$\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_A} + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_{C/A}} = \overset{--}{\vec{V}_C}$$

با توجه به معلوم بودن $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_{C/A}$ اندازه $\vec{V}_C$ معلوم می‌شود.

می‌دانیم که با توجه به لغزشی - غلتشی بودن مفصل بین E و C اندازه سرعت نسبی در راستای مماس یعنی در راستای AB است.

$$\overset{\checkmark-}{\vec{V}_E} = \overset{\checkmark-}{\vec{V}_{E/C}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_C}$$

با معلوم شدن $\vec{V}_E$ داریم $\omega_5 = \dfrac{\vec{V}_E}{\overline{O_5E}}$

اندازه: $\underline{V_D = \overline{O_5D}\,\omega_5}$ و ساعتگرد یا CW است.

فصل ششم : بررسی شتاب در مکانیزم ها

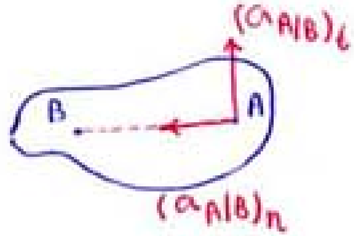
(فصل ۷ مابی)

اگر دو ذره مانند A و B در جسم صلبی قرار داشته باشند در آن صورت رابطه بین شتاب آن دو ذره بصورت زیر است :

$$\vec{a}_{A/B} + \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

$$(\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t + \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

برای شتاب ۲ مولفه عمودی و مماسی به شکل زیر تعریف می شوند :

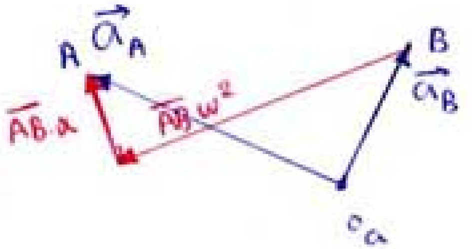


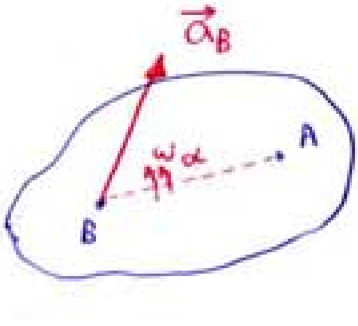
$(\vec{a}_{A/B})_n = \overline{AB}\,\omega^2$ از A به سمت B

$(\vec{a}_{A/B})_t = \overline{AB}\cdot\alpha$ عمود بر $\overline{AB}$

پس اگر در جسم صلبی شتاب نقطه ای مانند B معلوم باشد و سرعت و شتاب زاویه ای آن جسم صلب نیز مشخص باشد، برای تعیین شتاب ذره ای مانند A به شرح زیر عمل می کنیم.

۱- نقطه ای را به عنوان قطب شتاب (O_a) انتخاب می کنیم و تمام بردارهای مطلق شتاب از این نقطه رسم می شوند و خطوط بین سایر نقاط در دیاگرام شتاب نشان دهنده شتابهای نسبی بین دو نقطه مذکور است.





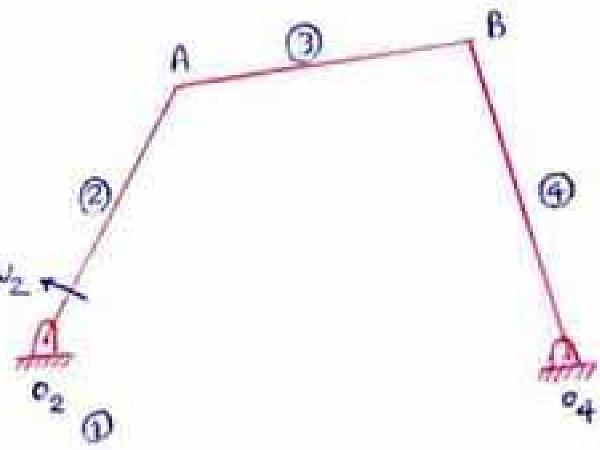
۲- از قطب شتاب برداری هم‌شکل $\vec{a}_B$ رسم نموده و انتهای آن را B می‌نامیم.

۳- از نقطه B بردار $(a_{A/B})_n$ را به بزرگی $\overline{AB}\,\omega^2$ و از A به سمت B رسم می‌کنیم.

۴- از نوک این بردار $(a_{A/B})_t$ برداری به بزرگی $AB\alpha$ رسم می‌کنیم و انتهای آن را A می‌نامیم.

۵- رابط O_a به انتهای بردار مذکور (نقطه A) معرف شتاب A است. ($\vec{a}_A$)

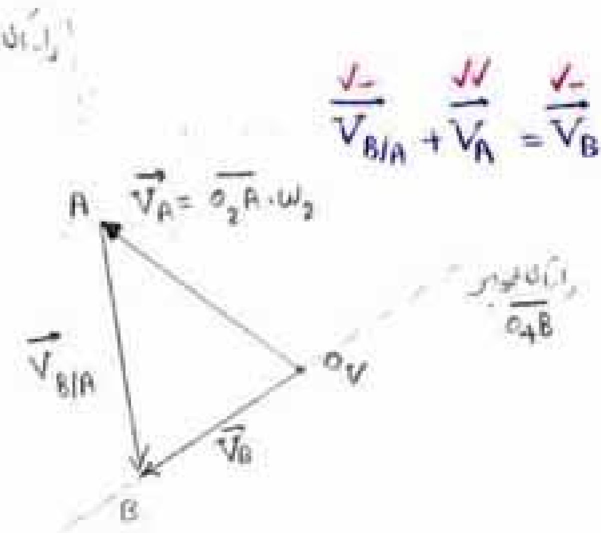
مثال: در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای اهرم 2 ثابت و برابر ω_2 باشد، شتاب زاویه‌ای اهرم ۴ را بیابید.



حل: روش سرعت‌ها:

برای اهرم 3 داریم:

$$\vec{V}_{B/A} + \vec{V}_A = \vec{V}_B$$



$$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{\overline{AB}} \quad cw \quad \text{ساعتگرد}$$

$$\omega_4 = \frac{V_B}{\overline{O_4B}} \quad ccw \quad \text{پادساعتگرد}$$

روش شتاب‌ها:

برای اهرم 3 داریم:

$$\vec{a}_{B/A} + \vec{a}_A = \vec{a}_B$$

$$(\vec{a}_{B/A})_t + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_A)_t + (\vec{a}_A)_n = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t$$

P-55

$(\vec{a}_{B/A})_t = \overline{AB}\cdot\alpha_3$ عمود بر AB

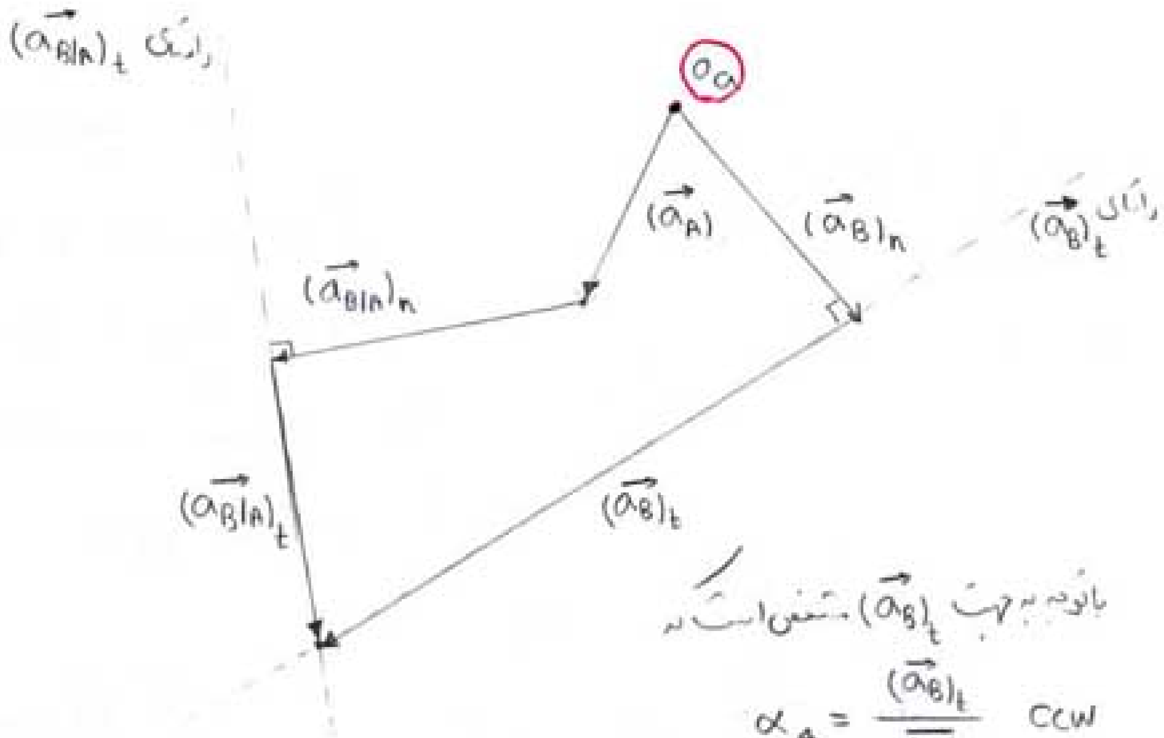
$(\vec{a}_{B/A})_n = \overline{AB}\cdot\omega_3^2$ جهت (از B به A)

$(\vec{a}_A)_t = \overline{O_2A}\cdot\alpha_2 = 0$

$(\vec{a}_A)_n = \overline{O_2A}\cdot\omega_2^2$ جهت (از A به O_2)

$(\vec{a}_B)_t = \overline{O_4B}\cdot\alpha_3$ عمود بر $\overline{O_4B}$

$(\vec{a}_B)_n = \overline{O_4B}\cdot\omega_4^2$ جهت (از B به O_4)

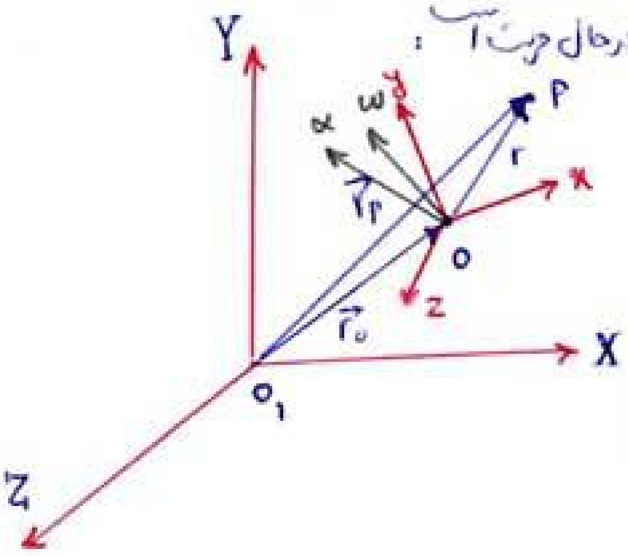


با توجه به جهت $(\vec{a}_B)_t$ مشخص است که

$$\alpha_4 = \frac{(\vec{a}_B)_t}{\overline{O_4B}} \quad CCW$$

شتاب کوریولیس :

فرض کنیم به نقطه P در فضای سه بعدی در حال حرکت است :



✓ محور مختصات ثابت : X-Y-Z

✓ محور مختصات متحرک : x-y-z
(دوران + انتقال)

✓ بردارهای یکه در راستای x و y و z : $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$

✓ مبداء مختصات ثابت : O_1

✓ مبداء مختصات متحرک : O

✓ موقعیت ذره P نسبت به محور متحرک : $\vec{r}$

✓ موقعیت ذره P نسبت به محور ثابت : $\vec{r}_P$

✓ موقعیت مبداء مختصات متحرک نسبت به مبداء محور مختصات ثابت : $\vec{r}_o$

✓ سرعت و شتاب زاویه ای محور مختصات متحرک : $\vec{\alpha}$ و $\vec{\omega}$

نکته : وقتی محور مختصات ما دارای حرکت می باشد آنگاه جهت بردارهای $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ متغیر می شود.

$$\vec{r}_P = \vec{r}_o + \vec{r} \qquad (1)$$

$$\vec{V}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_o + \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

به دوران محور x و y و z و همچنین $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ نسبت به زمان تغییر می کند.

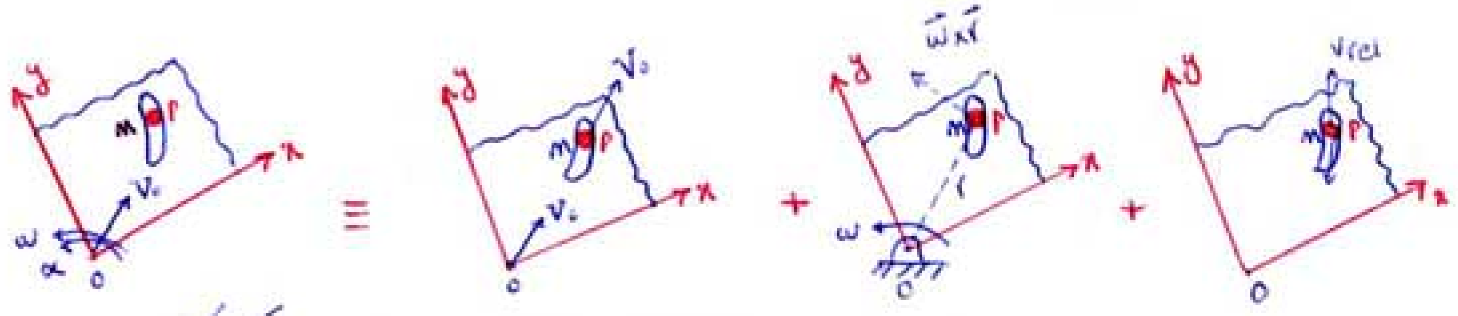
$$\vec{V}_P = \vec{V}_o + \underbrace{(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})}_{\vec{V}_{P/oxyz} = V_{Reletiv} = \vec{V}_{rel}} + (x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}})$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\hat{i}} = \vec{\omega} \times \hat{i} \\ \dot{\hat{j}} = \vec{\omega} \times \hat{j} \\ \dot{\hat{k}} = \vec{\omega} \times \hat{k} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_o + \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_o + \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (2)$$

توجیه فیزیکی رابطه (2) :



حرکت کلی — انتقال با سرعت $\vec{V}_0$ (P درون حفره ثابت است) — دوران حول O (P درون حفره ثابت است) — P درون حفره با سرعت V_{rel} حرکت می‌کند (حفره ثابت است)

$$\vec{V}_m = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{rel}$$

$$\vec{V}_{P/m} = \vec{V}_P - \vec{V}_m = \vec{V}_{rel}$$

برای محاسبه شتاب ذره P از رابطه ② نسبت به زمان مشتق می‌گیریم :

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{V}_P}{dt} = \frac{d\vec{V}_0}{dt} + \frac{d}{dt}\overbrace{(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})}^{V_{rel}} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_0 + \underbrace{(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k})}_{\vec{a}_{rel}} + \underbrace{(\dot{x}\dot{\hat{i}} + \dot{y}\dot{\hat{j}} + \dot{z}\dot{\hat{k}})}_{\omega \times \vec{V}_{rel}} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{rel}}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_0 + \vec{a}_{rel} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel}}_{\text{شتاب کوریولیس}} \qquad (3)$$

توجیه فیزیکی رابطه (3) :

حرکت کلی — دوران حول O (P ثابت) — حرکت انتقالی با a_0 (P ثابت) — حفره ثابت و P متحرک

جمله شتاب کوریولیس ظاهر شده، پس توجیه فیزیکی ندارد. اگر جسمی روی جسم دیگری که ω دارد حرکت نسبی داشته باشد، کوریولیس داریم.

$$\vec{a}_m = \vec{a}_o + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_o + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{a}_{rel} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}$$

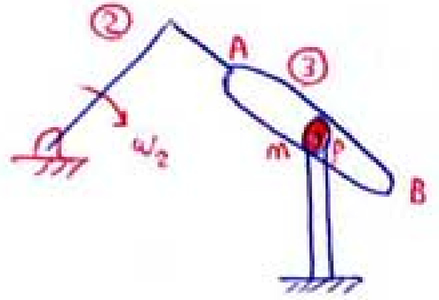
$$\vec{a}_{P/m} = \vec{a}_p - \vec{a}_m = \vec{a}_{rel} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}$$

روشهای دیگری نیز جهت بررسی شتاب وجود دارد که در اینجا مورد بررسی قرار نمی‌گیرند. از جمله روش ترسیمی هارتمن و رابطه اویلر- ساواری (Euler-Savary)

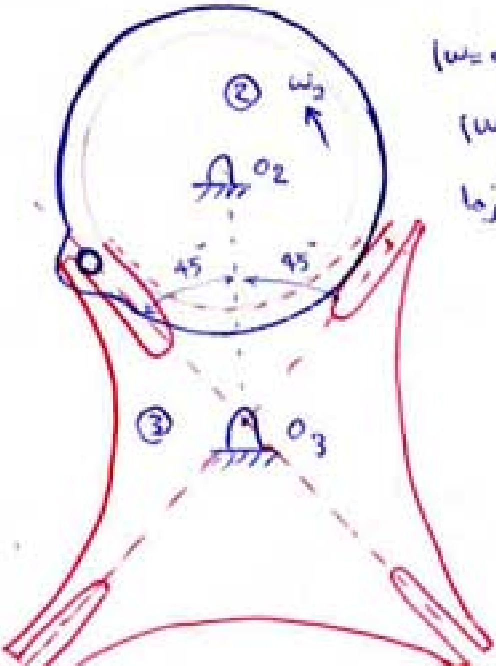
چند نکته مهم :

۱- شتاب کوریولیس داریم در اینجا برابر است با

$2\omega_3 \times v_{rel}$



۲- هرجا ω یا v_{rel} صفر شد شتاب کوریولیس هم برابر صفر است مثل چرخ ژنوا در سه حالت زیر: (ژنو مالتی)



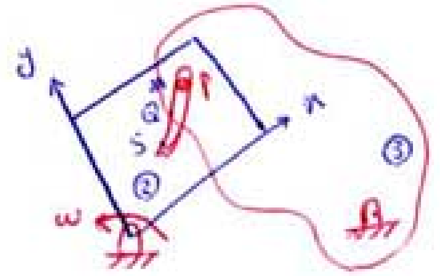
۱- موقع ورود پین به شیار ($\omega=0$)

۲- موقع خروج پین از شیار ($\omega=0$)

۳- موقعی که پین در راستای خط مرکزها قرار می‌گیرد ($\vec{v}_{rel}=0$)

۳- اگر حرکت در صفحه در نظر گرفته شود جهت شتاب کوریولیس به صورت زیر تعیین می‌شود

«جهت سرعت نسبی را ۹۰ درجه در جهت چرخش ω می‌چرخانیم»

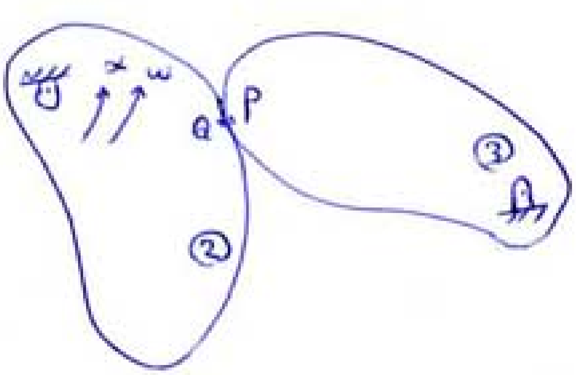


۴- نقطه P عضوی از عضو 3 است و در لحظه اول در تماس با m بعد با Q و بعد S می باشد.

شتاب کوریولیس $2\vec{\omega}_2\times\vec{V}_{rel}$

((ω_2 حرکت نه ω_3 حرکت))

اما

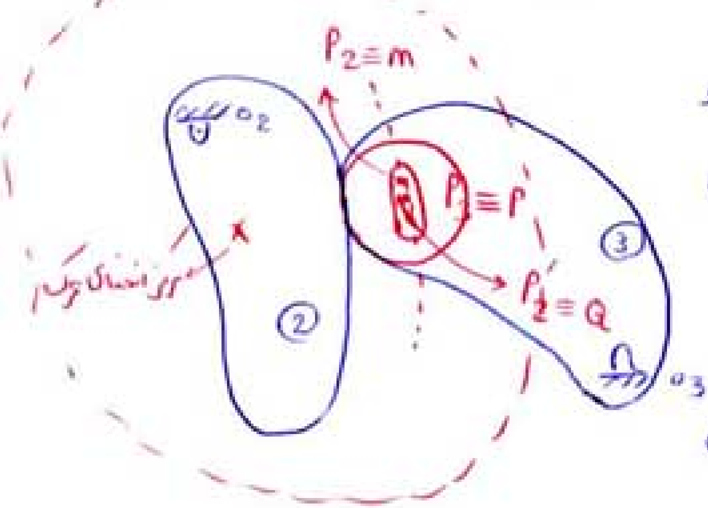


نقطه P و Q نسبت به هم $\vec{V}_{rel}$ دارند و جسم حرکت دارای ω_2 است اما شتاب کوریولیس از رابطه $2\vec{\omega}_2\times\vec{V}_{P/Q}$ حاصل نمی شود، زیرا نقطه P از جسم 3 و نقطه Q از جسم 2 دائما عوض می شوند. در صورتیکه باید P یک نقطه ثابت از عضو 3 باشد.

راه حل:

در محل تماس دو جسم ② و ③ یک مرکز انحنا به دست می آوریم (اگر جسم ② حرکت است دایره روی ③ در نظر گرفته می شود). جسم ② را بزرگتر فرض می کنیم به طوری که شیاری روی آن است که مرکز انحنا روی آن حرکت می کند.

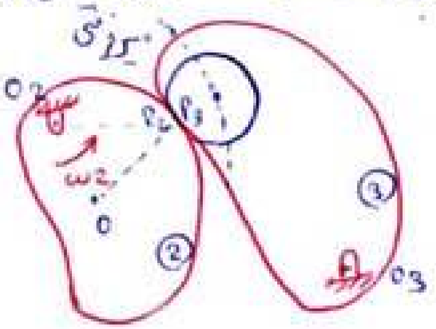
مطابق با انحنای جسم حرکت از آن مرکز انحنا رسم می کنیم.



مرکز انحنا مکان نقطه مطلوب ما یعنی P است و نقاط Q و m محل تماس نقطه P در دو لحظه با جسم 2 است.

شتاب کوریولیس: $2.\vec{\omega}_2\times\vec{V}_{P_3/P_2}$

مثال: در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای اهرم ② ثابت و برابر ω_2 باشد، شتاب زاویه‌ای اهرم ③ را بیابید.



ابتدا باید سرعت V_{P_3/P_2} را حساب کنیم:

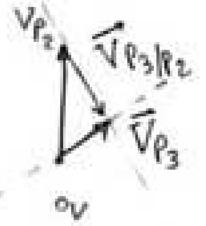
$$\overset{\checkmark -}{\vec{V}_{P_3/P_2}} = \overset{\checkmark -}{\vec{V}_{P_3}} - \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_{P_2}}$$

$\vec{V}_{P_3/P_2}$: مماس بر سطح تماس یا در جهت t

$\vec{V}_{P_3}$: عمود بر $\overline{O_3P_3}$

$\vec{V}_{P_2}$: عمود بر $\overline{O_2P_2}$

راستای V_{P_3/P_2} (مماس در راستای t)



راستای $\vec{V}_{P_3}$ عمود بر $\overline{O_3P_3}$

$$\omega_3 = \frac{|\vec{V}_{P_3}|}{\overline{O_3P_3}} \quad CW$$

برای شتاب‌ها:

$$\vec{a}_{P_3/P_2} = \vec{a}_{P_3} - \vec{a}_{P_2} = \vec{a}_{rel} + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{rel}$$

$$\overset{\checkmark -}{(\vec{a}_{P_3})_t} + \overset{\checkmark\checkmark}{(\vec{a}_{P_3})_n} = \cancel{(\vec{a}_{P_2})_t} + \overset{\checkmark\checkmark}{(\vec{a}_{P_2})_n} + \overset{\checkmark -}{(\vec{a}_{rel})_t} + \overset{\checkmark\checkmark}{(\vec{a}_{rel})_n} + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{rel}$$

$(\vec{a}_{P_3})_t$: $\overline{O_3P_3} \cdot \alpha_3$ عمود بر $\overline{O_3P_3}$

$(\vec{a}_{P_3})_n$: $\overline{O_3P_3}\, \omega_3^2$ از P_3 به O_3

$(\vec{a}_{P_2})_t$: $O_2P_2 \cdot \alpha_2 = 0$

$(\vec{a}_{P_2})_n$: $O_2P_2 \cdot \omega_2^2$ از P_2 به O_2

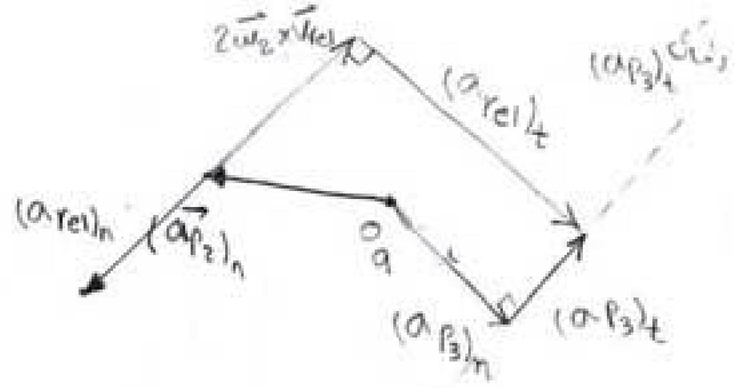
$(\vec{a}_{rel})_t$: $\dot{V}_{rel}$ مماس بر V_{rel} (یا در جهت t)

$(\vec{a}_{rel})_n$: $\dfrac{|\vec{V}_{rel}|^2}{\overline{OP_2}}$ از P_2 به سمت O

$2\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{rel}$ هم‌راستا و هم‌جهت

(با چرخش V_{rel} به میزان ۹۰ درجه در جهت ω_2
و از O به سمت P_2)

$(a_{rel})_t$ راستای مماس بر V_{rel}



$$\alpha_3 = \frac{|\vec{a}_{P_3}|_t}{\overline{O_3P_3}} \quad CW$$

فصل هفتم : مکانیزمهای معادل

هنگامی که تجزیه و تحلیل شتاب یک مکانیزم تماسی مستقیم مورد نظر باشد، مسأله را می توان با جایگزین نمودن یک مکانیزم چند میله ای معادل ساده تر نمود.

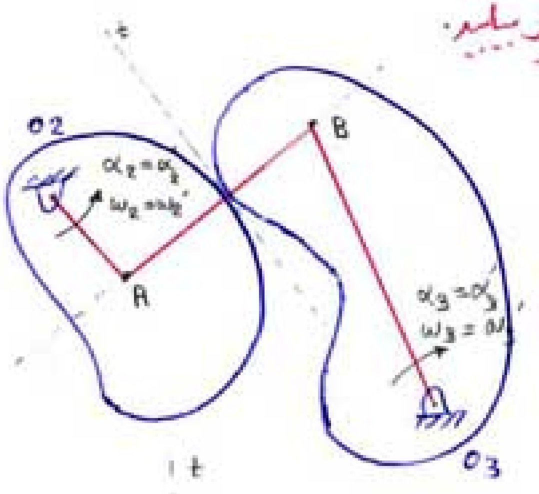
یک مکانیزم معادل، مکانیزمی است که سرعت و شتاب زاویه ای عضو محرک و متحرک به طور لحظه ای برابر اعضای محرک و متحرک مکانیزم اولیه باشد.

روش کار :

در مکانیزمهای تماس مستقیم ابتدا عمود مشترک دو سطح را در محل تماس رسم می کنیم . بر روی این عمود مشترک مراکز انحنای دو سطح را مشخص می کنیم . از مرکز دوران جسم محرک به مرکز انحنای آن و از مرکز دوران جسم متحرک به مرکز انحنای آن متصل می کنیم. مکانیزم حاصل را مکانیزم معادل می نامند.

مثال : مکانیزمهای معادل را در شکلهای زیر بیابید.

1)



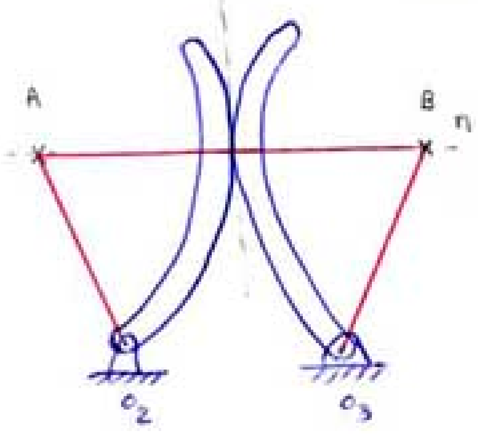
مکانیزم معادل : O_2ABO_3

دیگر شتاب کریولیس نداریم و تحلیل مسأله ساده تر می شود.

$\alpha_2=\alpha'_2$ و $\alpha_3=\alpha'_3$

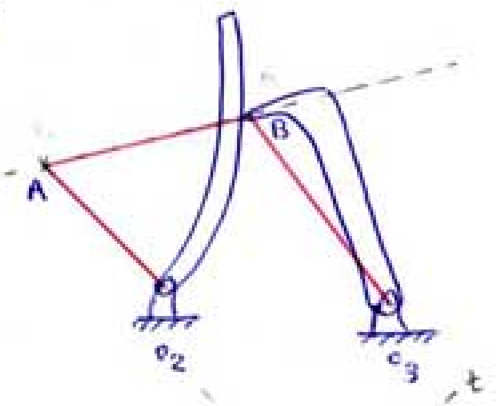
$\omega_2=\omega'_2$ و $\omega_3=\omega'_3$

2)



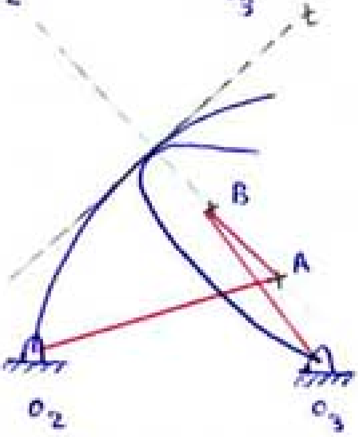
مکانیزم معادل : O_2ABO_3

3)



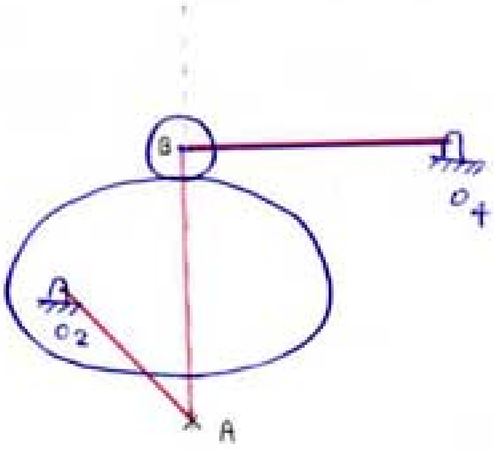
مکانیزم معادل : O_2ABO_3

4)

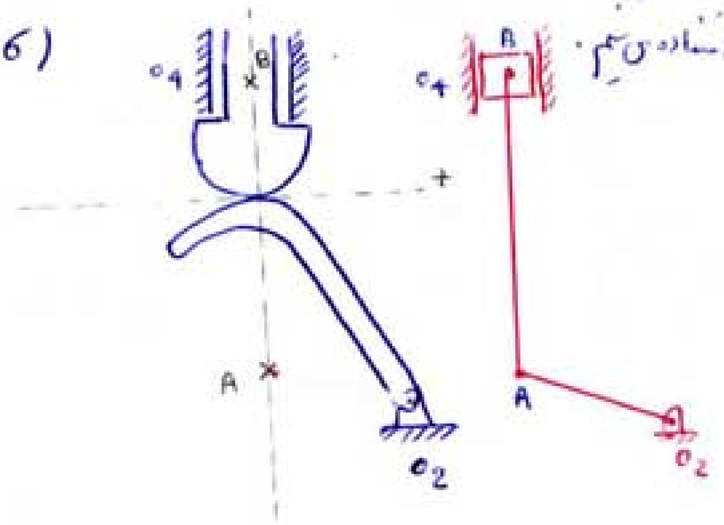


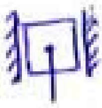
مکانیزم معادل : O_2ABO_3

5)



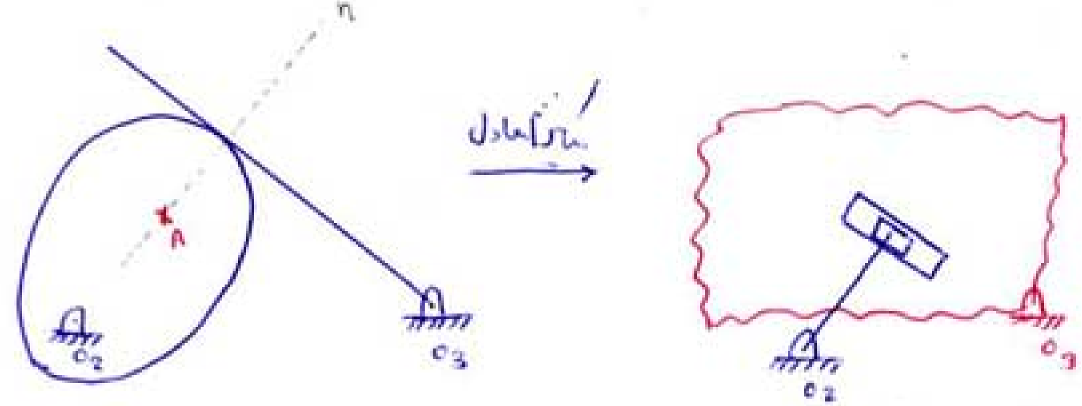
6)



اگر حرکت بادامک داشتیم به جای آن از  استفاده می‌کنیم.

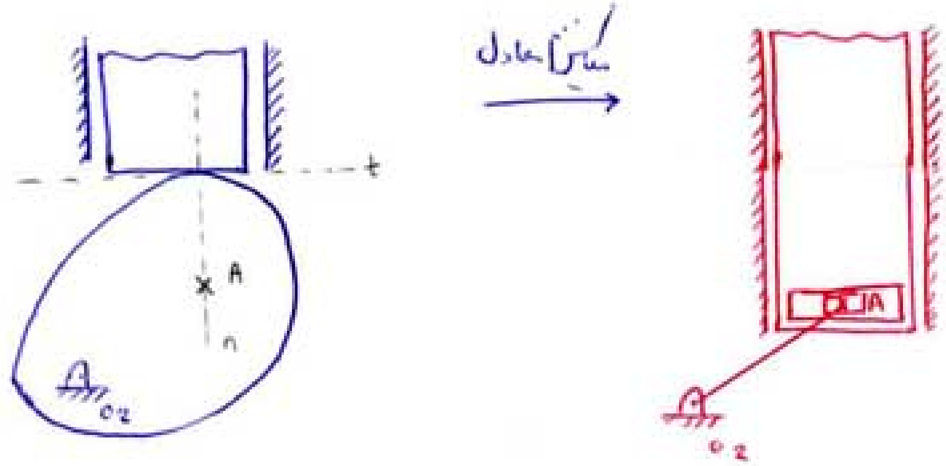
مکانیزم معادل : O_2ABO_4

7)

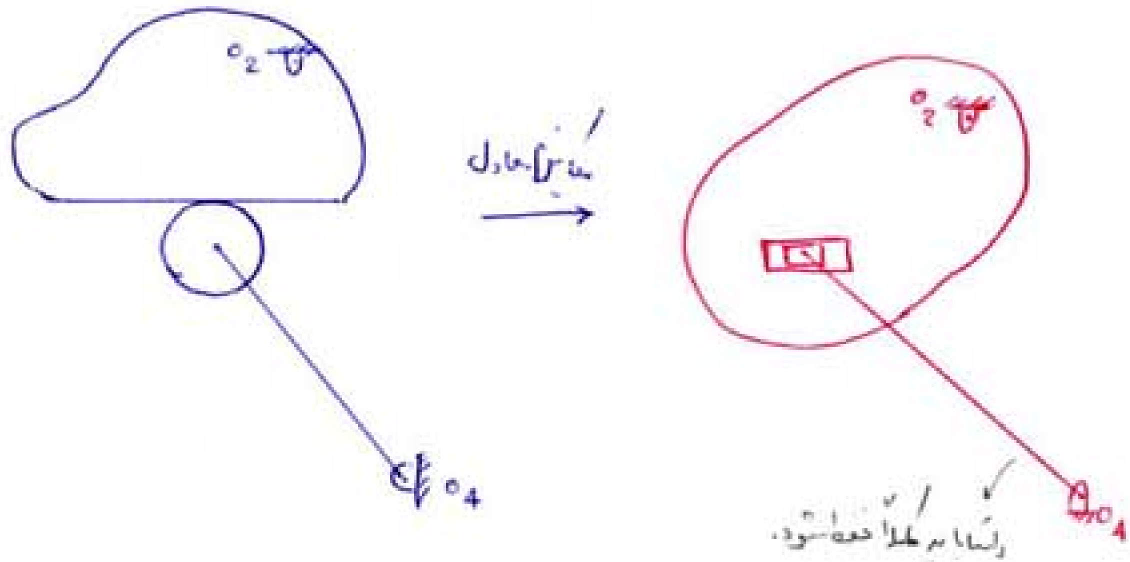


اگر مرکز انحنای یکی از اجسام درگیر در بی‌نهایت باشد به جای آن لغزنده می‌گذاریم. مسیر لغزنده همیشه در جهت خط مماس در محل برخورد دو جسم است و محل آن در مرکز انحنای جسم دیگر است.

8)



9)



راستا باید حتماً حفظ شود.

فصل هشتم : چرخ دنده ها

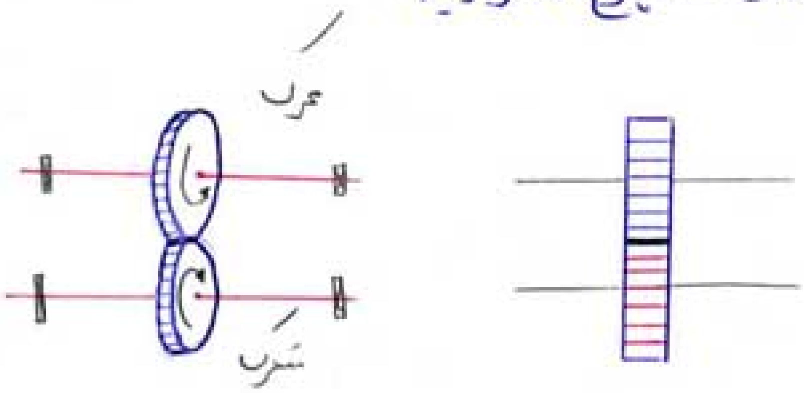
(مطالعه فصل ۱۲ و ۱۳ مارتین)

قدرت قابل انتقال توسط اعضای غلتشی محدود به اصطکاک بین سطوح در تماس است و اگر بار از حد تجاوز کند، لغزش اتفاق می افتد و برای فراهم کردن رانش مثبت در روی سطوح تماس دندانه تعبیه می شود.
اعضای حاصل موسوم به چرخ دنده می باشد.

چرخ دنده عضوی است که از آن برای انتقال توان همراه با تغییرات دور استفاده می شود که دارای انواع مختلفی می باشد که از جمله می توان موارد زیر را نام برد:

۱- چرخ دنده ساده یا صاف (Spur Gear)

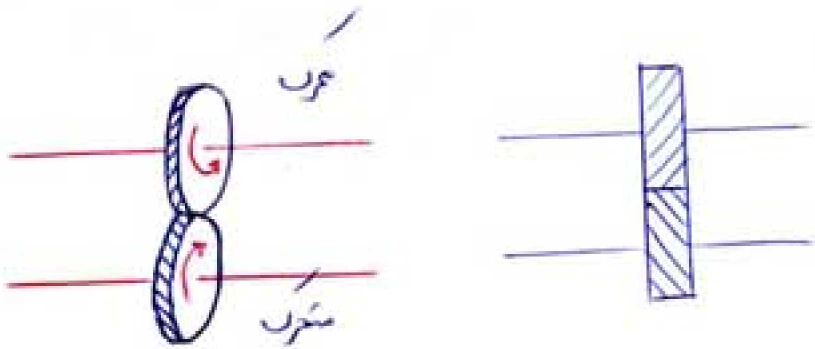
چرخ دنده ای است که برای انتقال توان بین دو شافت موازی از آن استفاده می شود. دندانه های این چرخ دنده ها با محور یا شافت چرخ دنده موازیند.

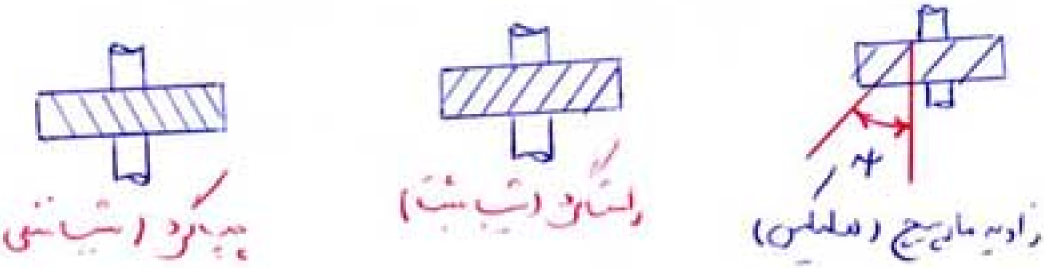


۲- چرخ دنده مارپیچ ساده (Simple Helical gear)

چرخ دنده ای است که برای انتقال توان بین دو شافت موازی از آن استفاده می شود. دندانه های این چرخ دنده ها به طور مورب نسبت به محور چرخ دنده قرار دارند. نحوه درگیری دندانه ها تدریجی بوده و لذا از این چرخ دنده ها در مواقعی که دور بالا است استفاده می شود به همین دلیل برای ایجاد شده توسط

این چرخ دنده ها همتراز چرخ دنده های ساده است. این چرخ دنده ها یا راستگرد هستند یا چپگرد.
(همانند پیچ ها) که دو چرخ دنده های مارپیچ ساده همواره یک راستگرد یا یک چپگرد درگیر می شوند.





زاویه مارپیچ ψ دو چرخ دنده مارپیچ ساده درگیر با هم الزاماً برابر است.

۳) چرخ دنده مارپیچ ضربدری (متقاطع)

چرخ دنده های هستند که توان را بین دو شافت متنافر انتقال می دهند، زاویه بین این دو شافت تابع رابطه زیر است:

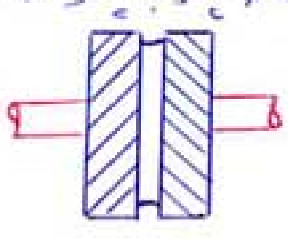
زاویه بین دو شافت ← $\Sigma = \psi_1 \pm \psi_2$ → زاویه مارپیچ چرخ دنده 2

زاویه مارپیچ چرخ دنده 1

اگر هر دو چپگرد یا راستگرد باشند علامت جمع و اگر یکی چپگرد و دیگری راستگرد باشد علامت منفی را داریم.

۴) چرخ دنده جناغی

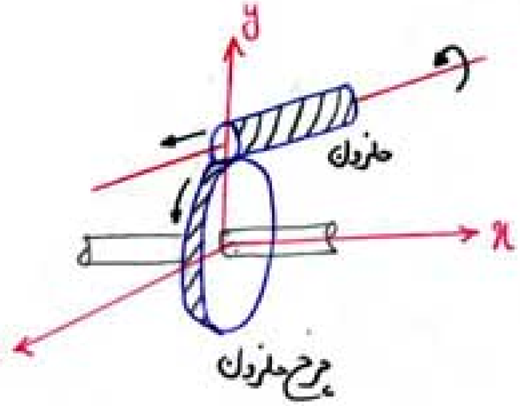
یک چرخ دنده جناغی معادل ۲ چرخ دنده مارپیچ با شیب معکوس است که پهلو به پهلو در کنار هم قرار داشته باشند و قابلیت حذف فشارهای جانبی را دارد.



۵) چرخ دنده حلزونی (worm gears)

در این چرخ دنده ها توان بین دو شافت متنافر که عموماً زاویه بین آنها ۹۰° است منتقل می شود. یک جزء در این دستگاه حلزون است. لذا از این چرخ دنده ها برای کاهش دور به میزان قابل توجهی استفاده می شود.

اگر حلزون راستگرد باشد، چرخ حلزون نیز راستگرد است و بالعکس.

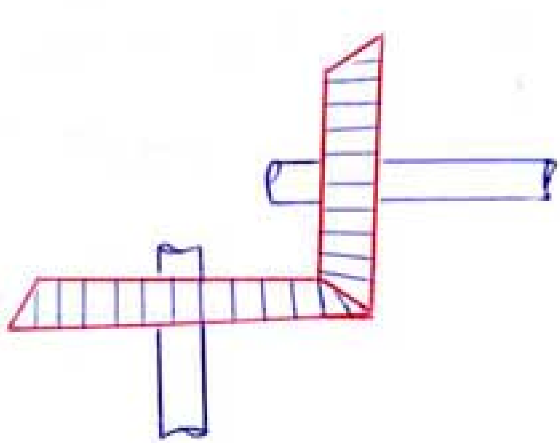


((در شکل هر دو چپگرد هستند.))

به منظور تعیین جهت دوران چرخ دنده به ازاء دوران حلزون از قانون پیچ و مهره استفاده می شود. در این جا حلزون مانند پیچ و چرخ حلزون مانند مهره عمل می کند. به این ترتیب که اگر حلزون با توجه به دید از سمت z- ، cw بچرخد، چرخ حلزون با توجه به دید از x+ ، ccw خواهد چرخید.

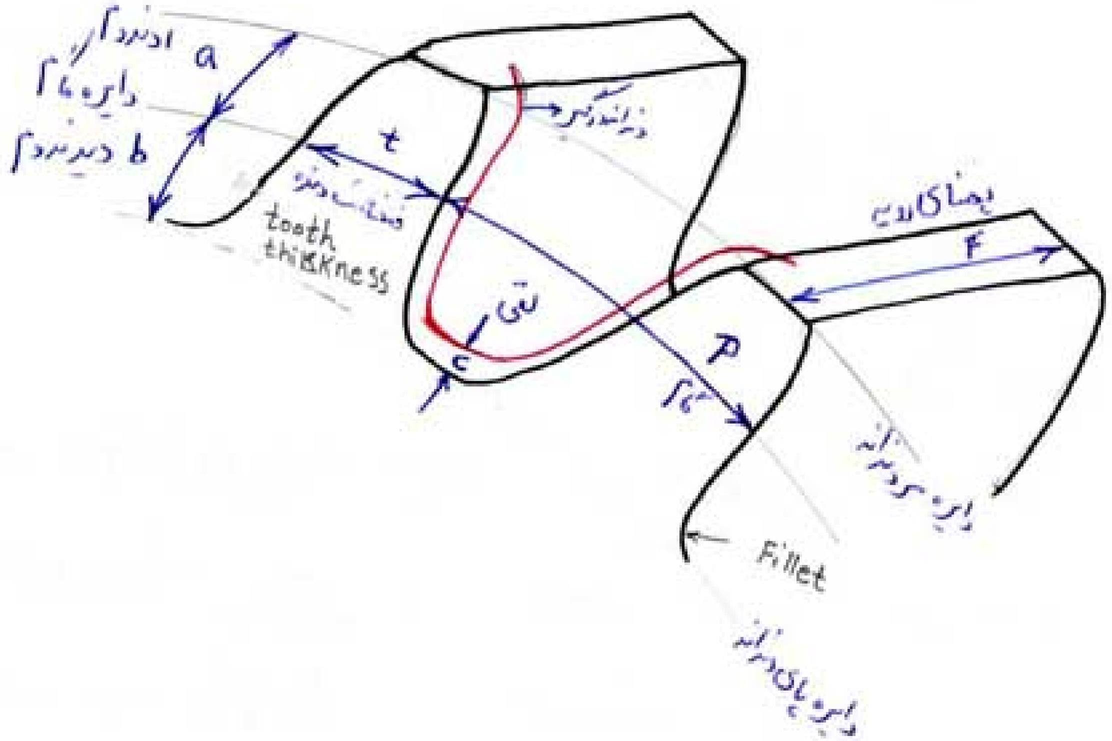
۶) چرخ دنده مخروطی (Bevel gears)

این چرخ دنده ها انواع مختلفی دارند که مهمترین آنها می توان به مخروطی ساده و مخروطی مارپیچ اشاره کرد. در چرخ دنده های مخروطی ساده و مخروطی مارپیچ توان بین دو شافت متقاطع که زاویه بین آنها ۹۰° است، انتقال می یابد.



تعاریف اولیه:

اگر یک جفت دندانه از یک چرخدنده ساده را در نظر بگیریم، در آن صورت می‌توان پارامترهای زیر را به شرحی که گفته خواهد شد، تعریف کرد:



۱- دایره گام (Pitch circles):

دایره‌ای فرضی است که از آن در امر محاسبات استفاده می‌شود، قطر این دایره را با d نمایش می‌دهند.

دوایر گام دو چرخدنده درگیر با هم مماس بوده و بر روی هم می‌غلتند.

۲- گام دندانه P (Circular pitch):

فاصله یک نقطه واقع بر یک دندانه تا نقطه‌ی مشابه واقع بر دندانه‌ی دیگر روی دایره گام را گام دندانه می‌نامند.

گام دندانه‌ی دو چرخ دنده‌ی درگیر باید با هم برابر باشند.

۳- مدول m (module):

در سیستم متریک طبق تعریف مدول برابر است با:

قطر برحسب mm

$$m = \frac{d}{N}$$

تعداد دندانه

در سیستم انگلیسی گام قطری تعریف می‌شود که با P_d نمایش داده می‌شود:

Diameter Pitch

$$D_P \text{ یا } P_d = \frac{N \xrightarrow{} \text{تعداد دندانه}}{d \xrightarrow{} \text{قطر بر حسب in}}$$

رابطه گام با مدول:

$$NP = \pi d \longrightarrow P = \pi \frac{d}{N} \Rightarrow \underline{P = \pi m}$$

رابطه گام با DP:

$$NP = \pi d \longrightarrow P\frac{N}{d} = \pi \Rightarrow \underline{P \cdot D_P = \pi}$$

مدول یا Dp دو چرخ دنده درگیر باهم برابر است.

۴- لقی جانبی یا عرضی (Backlash):

فاصله آزاد بین دو دندانه که بر روی دایره‌ی گام اندازه گرفته می‌شود را لقی جانبی گویند.

۵- لقی c (Clearance):

فاصله آزاد بین سطح بالای یک دندانه و سطح پایینی دندانه‌ی دیگر را لقی c گویند.

۶- ادندوم a (addendum):

فاصله دایره‌ی گام تا سطح بالای دندانه را ادندوم گویند.

۷- دیدندوم b (Didendom):

فاصله دایره‌ی گام تا سطح پایینی دندانه را دیدندوم گویند.

۸- عمق دندانه (whole depth):

عمق دندانه برابر است: $h_t = a + b$

Pinion: چرخ دنده کوچک

Gear: چرخ دنده بزرگ

(مراجعه به صفحه ۲۰۸ جدول ۱۲-۲ ← ۴ فرم دنده استاندارد و متداول)

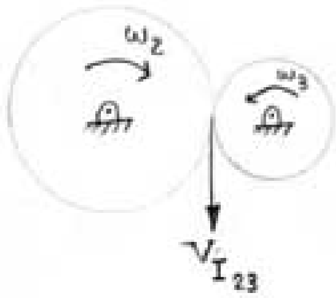
رشته چرخ دنده های معمولی :

یک جفت چرخ دنده درگیر را در نظر بگیرید. ۲ محرک و ۳ متحرک است.

$$V_{I_{23}} = r_2\omega_2 = r_3\omega_3 \Rightarrow$$

$$\omega_3 = \frac{r_2}{r_3}\omega_2 = \frac{d_2}{d_3}\omega_2 = \frac{N_2}{N_3}\omega_2$$

$$\Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{N_2}{N_3}\omega_2$$



برای چرخ دنده ساده، مارپیچ ساده و مخروطی صادق است

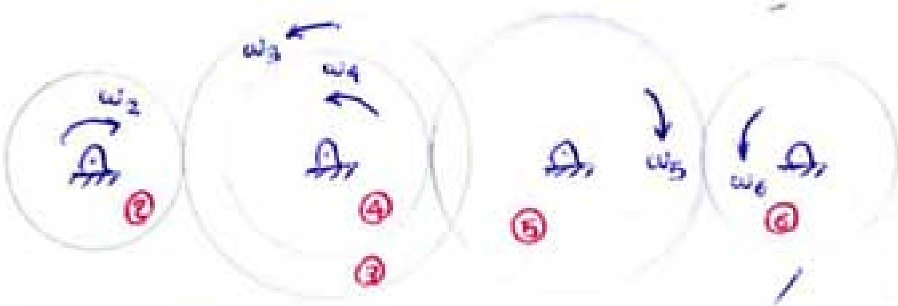
برای چرخ دنده حلزونی

$$\omega_{\text{چرخ حلزون}} = \frac{N_W}{N_G}\,\omega_{\text{حلزون}}$$

N_W: تعداد دوره های حلزون

N_G: تعداد دندانه چرخ حلزون

حال اگر چند جفت چرخ دنده درگیر داشته باشیم :



$$\omega_3 = \frac{N_2}{N_3}\omega_2 \quad \text{و} \quad \omega_3 = \omega_4$$

$$\omega_5 = \frac{N_4}{N_5}\omega_4 = \frac{N_4}{N_5}\cdot\frac{N_2}{N_3}\omega_2$$

$$\omega_6 = \frac{N_5}{N_6}\omega_5 = \frac{N_4}{N_6}\cdot\frac{N_2}{N_3}\cdot\frac{N_5}{N_5}\omega_2$$

بنابراین با تشکیل جدول محرک ها و متحرک ها داریم :

محرک	2	4	5
متحرک	3	5	6

$$e = \frac{N_2 \cdot N_4 \cdot N_5}{N_3 \cdot N_5 \cdot N_6}$$ که نسبت دوری

نسبت دوری

$$\boxed{e \text{ یا } VR = \frac{\text{حاصل ضرب تعداد دندانه های چرخ دنده های محرک}}{\text{حاصل ضرب تعداد دندانه های چرخ دنده های متحرک}}}$$

angular Velocity ratio

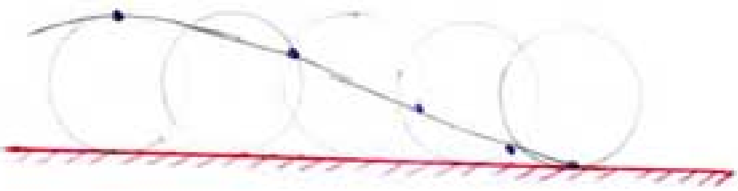
$$\omega_L = e\,\omega_F \longleftarrow \begin{cases} \text{سرعت زاویه ای خروجی} & \omega_L = \omega_6 \\ \text{سرعت زاویه ای ورودی} & \omega_F = \omega_2 \end{cases}$$

✓ چرخ دنده های مانند ω_5 را که در رابطه حاصل ضرب حذف شده اند هرزگرد می نامند و فقط جهت ω را عوض می کنند

اگر e مثبت باشد جهت ω_L و ω_F یکی است و بالعکس.

رشته چرخ دنده های خورشیدی و یا اپی سیکلوئیدی :

سیکلوئید منحنی حرکت ذره از محیط یک دایره است که بر سطح افق می غلتد.



اگر سطح افق محدب شود منحنی بدست آمده اپی سیکلوئید و اگر مقعر شود هیپوسیکلوئید نام دارد.

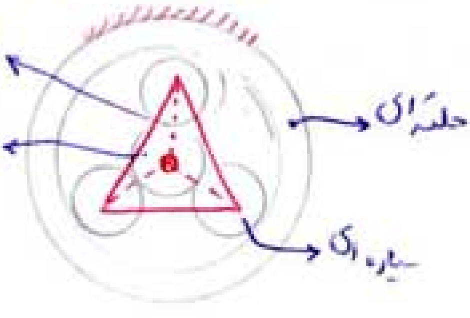
چرخدنده های خورشیدی یا Sun Gear چرخدنده هایی هستند که درجه آزادی آنها ۲ است. این مجموعه چرخدنده ها عموماً دارای اجزاء زیر باشند :

۱- چرخدنده ای که در وسط است و بقیه چرخدنده ها به دور آن می چرخند که اصطلاحاً خورشیدی نام دارد

۲- بازویی که مرکز تعدادی از چرخدنده ها را که به دور خورشیدی می چرخند به هم متصل می کند.

۳- چرخدنده هایی که با حرکت بازو به دور خورشیدی می چرخند که آنها سیاره ای می گویند.

۴- چرخدنده حلقه ای یا رینگی که دور چرخدنده های سیاره ای قرار داشته باشد.



روش تحلیل سرعت زاویه‌ای روش شمارش دور :

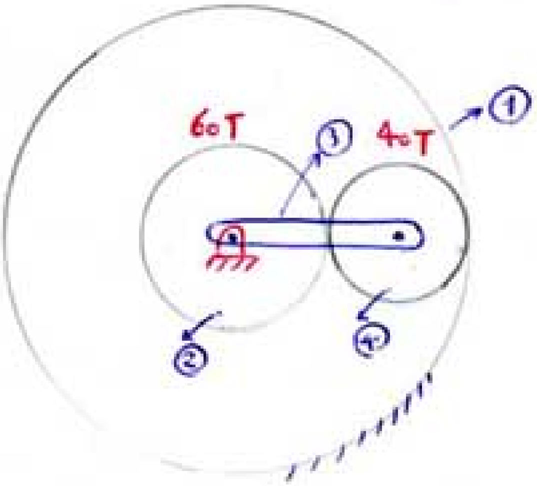
۱- ابتدا کل مجموعه را یک بار در جهت (cw) می‌چرخانیم.

۲- بازو را ثابت نگه می‌داریم و چرخ‌دنده‌ای که ثابت بوده را یک دور در جهت (ccw) می‌چرخانیم.

۳- جمع مراحل ۱ و ۲ تعداد دورهای زده شده هر عضو را نشان خواهد داد.

توجه: جهت چرخش ساعتگرد مثبت است. توجه شود که دو چرخ‌دنده درگیر خارجی جهت را عوض کرده و دو چرخ‌دنده درگیر داخلی (مثل سیاره و رینگ) جهت را عوض نمی‌کند.

مثال: اگر سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده ② در دستگاه نشان داده شده زیر 80 rpm در جهت ccw باشد و چرخ‌دنده حلقه‌ای ① ساکن باشد، سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده ④ را بیابید.



درجه آزادی: $n = 4$, $f_1 = 3$, $f_2 = 2$ $DoF = 9 - 2(3) - 2 = 1$

ابتدا تعداد دندانه‌های چرخ‌دنده رینگی را می‌یابیم:

$$\frac{1}{2}d_2 + d_4 = \frac{1}{2}d_1 \qquad M = \frac{d}{N} \text{ or } d = MN$$

$$\downarrow$$

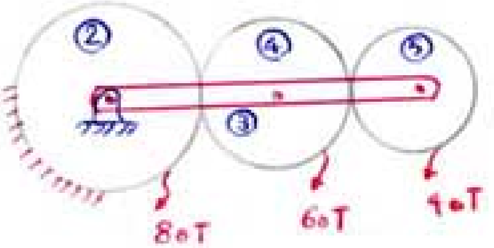
$$MN_2 + 2MN_4 = MN_1 \Rightarrow N_2 + 2N_4 = N_1 \Rightarrow N_1 = 140\,T$$

اعمال شده روی مجموعه	بازو ③	چرخ‌دنده ②	چرخ‌دنده ④	چرخ‌دنده ①
مجموعه یک بار در جهت (cw) می‌زند	+1	+1	+1	+1
بازو ثابت و چرخ‌دنده ① یک بار در جهت ccw می‌زند	0	$+\frac{140}{40} \times \frac{40}{60}$	$-\frac{140}{40}$	-1
تعداد دورهای بدست آمده	+1	$+3\frac{1}{3}$	$-2\frac{1}{2}$	0

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{-2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}} = \frac{-5/2}{10/3} = \frac{-15}{20} = -\frac{3}{4}$$ و $\omega_2 = 80\ rpm$ ccw ! (یعنی)

$$\Rightarrow \omega_4 = 80 \times \frac{3}{4} = 60\ rpm$$

مثال: در دستگاه خورشیدی زیر نسبت سرعت زاویه‌ای چرخدنده ⑤ به چرخدنده ④ را بیابید.



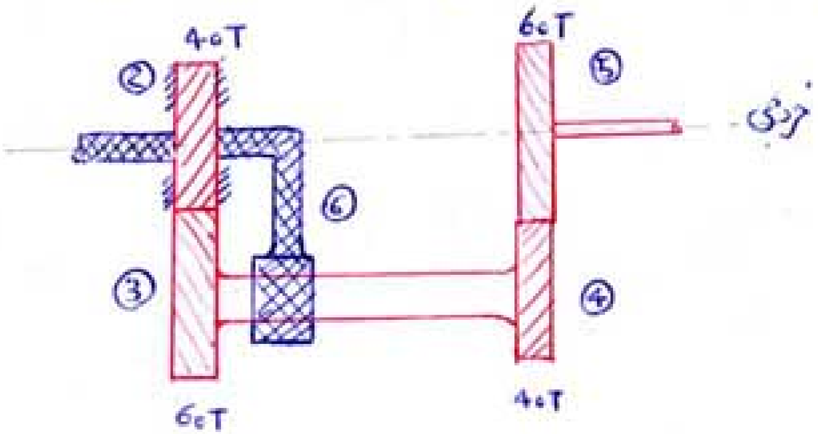
اعضای تشکیل‌دهنده مجموعه	بازو ③	چرخدنده ②	چرخدنده ④	چرخدنده ⑤
مجموعه یک دور مثبت بزند (cw)	+1	+1	+1	+1
اگر بازو ثابت و چرخدنده ② یک دور منفی بزند	0	-1	$+\frac{80}{60}$	$-\frac{80}{60} \times \frac{60}{90}$
تعداد دورهای بدست آمده	+1	0	$+7/3$	-1

$$\frac{\omega_5}{\omega_4} = \frac{-1}{+7/3} = -3/7$$ یعنی نسبت $3/7$ و خلاف جهت هم می‌چرخند.

اگر $\omega_3 = 60\ rpm$ و cw باشد: آنگاه $\omega_5 = -60\ rpm$ (ccw)

↳ $\omega_4 = 7/3 \times 60 = 140\ rpm$ cw

مثال: در گیربکس خورشیدی هم محور زیر سرعت زاویه‌ای شافت خروجی به شافت ورودی را بیابید.



شافت خروجی به ورودی:

VR یا TV یا e

Velocity ratio ← VR

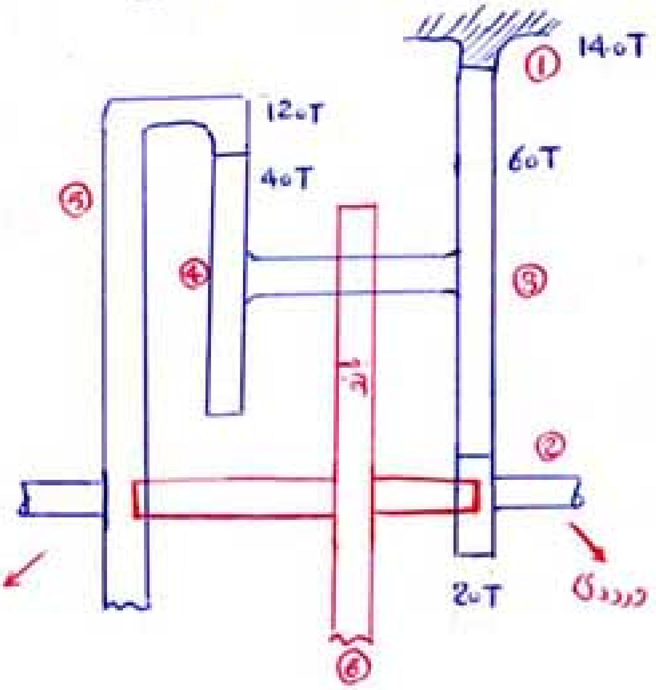
Train Value ← TV

اعضای تشکیل دهنده مجموعه	چرخدنده ②	چرخدنده ③	چرخدنده ④	چرخدنده ⑤	بازو ⑥
مجموعه یک دور مثبت بزند (cw)	+1	+1	+1	+1	+1
بازو ثابت و چرخدنده ② یک دور منفی بزند	-1	$+\frac{40}{60}$	$+\frac{40}{60}$	$-\frac{40}{60} \times \frac{40}{60}$	0
تعداد دورهای بدست آمده	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{9}$	+1

$$TV = \frac{\omega_5}{\omega_6} = \frac{5/9}{1} = 5/9$$

یعنی دستگاه تعداد دور را 4/9 کاهش می دهد.

مثال ۶ در گیربکس خورشیدی زیر نسبت سرعت خروجی به ورودی یا (TV) را بیابید.



$$\frac{\omega_5}{\omega_2} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{1}} = \frac{1}{36}$$

$$\boxed{\omega_5 = \frac{1}{36}\,\omega_2}$$

اعضای تشکیل دهنده مجموعه	چرخدنده ①	چرخدنده ②	چرخدنده ③	چرخدنده ④	چرخدنده ⑤	بازو ⑥
مجموعه یک دور مثبت بزند (cw)	+1	+1	+1	+1	+1	+1
بازو ثابت و چرخدنده ① یک دور منفی بزند	-1	$\frac{140}{60} \times \frac{60}{20}$	$-\frac{140}{60}$	$-\frac{140}{60}$	$-\frac{140}{60} \times \frac{40}{120}$	0
تعداد دورهای بدست آمده	0	+8	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$+\frac{2}{9}$	+1

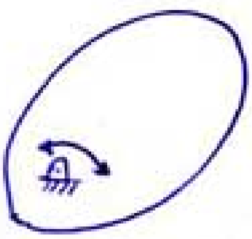
فصل نهم: بادامکها : (Cams)

بادامک عضوی از ماشین بوده که با شکل نامنظم خود به عنوان یک محرک ، حرکت را به عضو دیگری به نام پیرو (follower) انتقال می‌دهد و در ماشینهای اتوماتیک مثل ماشین چاپ ، ماشینهای ابزار ، موتورهای داخلی و ... کاربرد دارد.

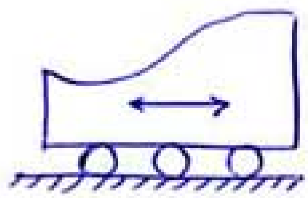
انواع بادامکها :

۱- بادامکهای دیسکی (Disk cams) یا بادامکهای دورانی (Rotating cams)

۲- بادامکهای انتقالی (Tranlation cams) یا بادامکهای رفت و برگشتی (Reciprocating cams)



(Rotating cams)

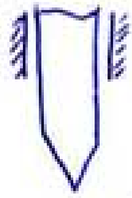


(Reciprocating cams)

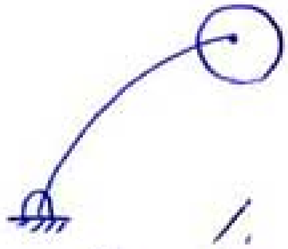
انواع پیروها :

از نظر حرکتی:
- پیروهای نوسانی یا دورانی (Osilating or Rotating)
- پیروهای رفت و برگشتی (Reciprocating)

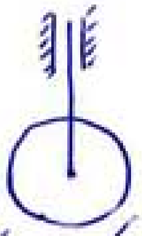
از نظر شکل:
- نوک تیز (Knife edge)
- غلتکی (Roler)
- کفشکی تخت (Flat Shoe)
- کفشکی منحنی (Curve Shoe)



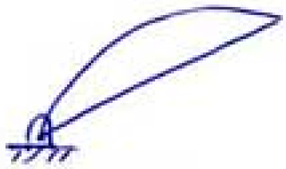
نوک تیز



غلتکی دورانی

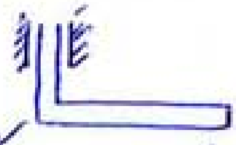


غلتکی رفت و برگشتی



لنگی تخت دورانی

لنگی منحنی رفت و برگشتی

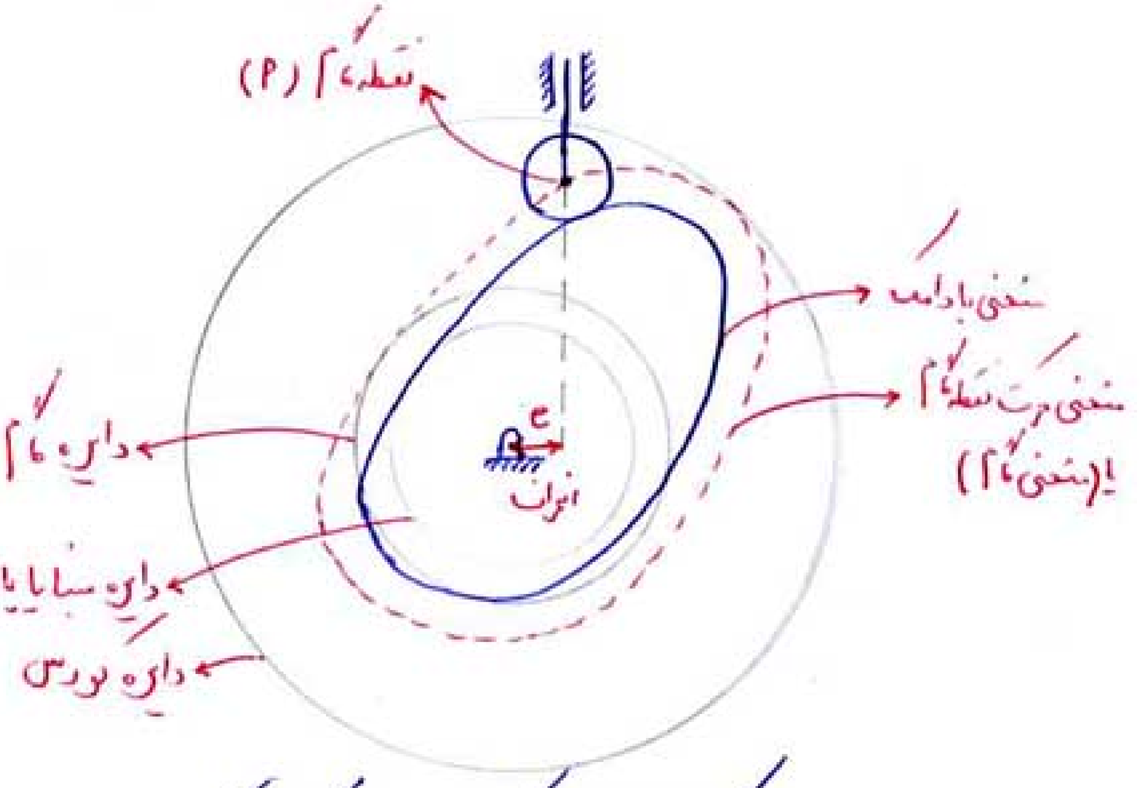


لنگی تخت رفت و برگشتی

- برای طراحی بادامکها ابتدا رفتار پیرو را مشخص می‌کنیم و سپس براساس آن رویه (سطح) بادامک تعیین می‌گردد.

نقطه گام:

یک نقطه فرضی از پیرو است که در سازوکار معادل با پیرو نوک تیز، نوک پیرو در آن نقطه واقع می‌شود. بسته به نوع سازوکار معادل، ممکن است این نقطه دائم باشد، مثلاً در پیرو غلتکی و لنگی دایروی، مرکز دایره، محل تماس فرضی (از نوع) دائم است و در لنگی غیر دایروی، مرکز انحنای سطح در تماس پیرو بوده و آنی است. در پیرو لنگی تخت، همان محل تماس پیرو با بادامک بوده و آنی است. نقطه گام را با P نمایش می‌دهند و مسیر حرکت نقطه گام بر روی بادامک را منحنی گام می‌نامند. مثلاً برای پیرو لنگی تخت منحنی گام همان منحنی بادامک است.



بادامک چرخان خارج از مرکز - پیرو غلتکی رفت و برگشتی

دایره پایه:

کوچکترین دایره به مرکز چرخش بادامک که در منحنی بادامک مماس است را دایره پایه گویند.

دایره گام:

کوچکترین دایره به مرکز چرخش بادامک که بر منحنی گام مماس است را دایره گام می‌نامند. واضح است در پیروهای غلتکی تخت یا نوک تیز این دایره بر دایره پایه منطبق است.

دایره کورس:

بزرگترین دایره به مرکز چرخش بادامک که بر منحنی گام مماس است را دایره کورس نامند.

L: کورس پیرو ، R_{min} شعاع دایره گام ، R_{max} شعاع دایره کورس

$$L = R_{max} - R_{min}$$

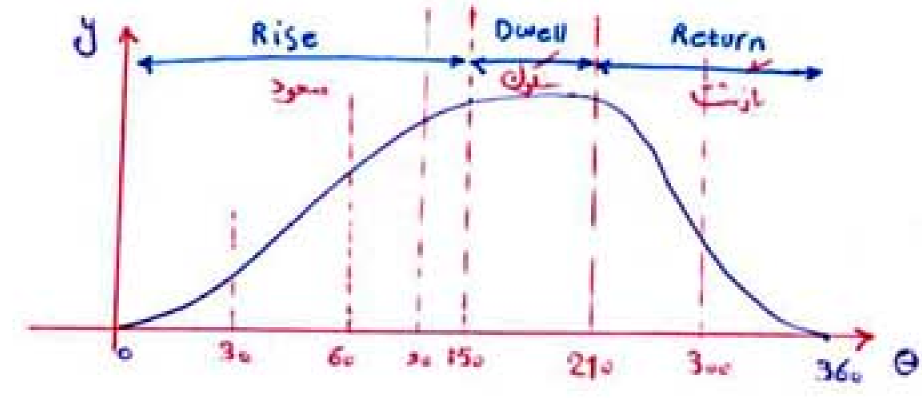
انحراف:

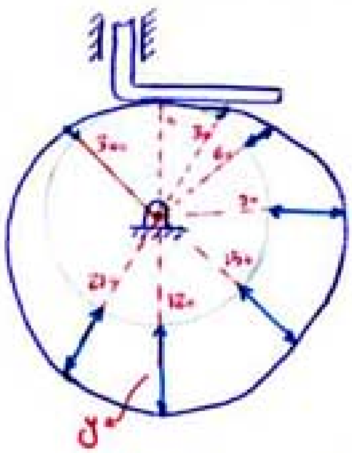
فاصله مرکز چرخش بادامک تا امتداد حرکت نقطه گام را انحراف (e) می‌نامند و این بادامک‌ها را خارج از مرکز نامند.

موقعیت پیرو :

فرض کنید که موقعیت و نمودار حرکت پیرو به ازای یک حرکت دورانی کامل بادامک به شکل زیر داده شده است.

و بادامک از نوع دورانی خارج از مرکز و پیرو لغزشی تخت رفت و برگشتی باشد.





موقعیت پیرو با L نمایش داده می‌شود و در پیرو رفت و برگشتی برحسب متر یا میلی‌متر بیان می‌شود [L] و در پیرو نوسانی (دورانی) بدون بعد بوده و با واحد رادیان بیان می‌گردد. نزدیکترین حد نقطه‌ای به مرکز چرخش بادامک به عنوان مبداء اندازه‌گیری موقعیت پیرو در نظر گرفته می‌شود و در بادامک دورانی مبداء $L=0$ مماس بر دایره پایه است.

بادامک‌های رفت و برگشتی نیز برحسب [L] و بادامک‌های دورانی برحسب θ و بدون بعد و برحسب رادیان است.

می‌توان نوشت : $L=F(\theta)$ (برای بادامک‌های دورانی)

مشتق شتاب Jerk (ضربه یا پرش)

با مشتق‌گیری پیاپی از y نسبت به زمان می‌توان سرعت، شتاب و تکان پیرو را بدست آورد. ولی اگر این مشتق‌گیری مستقل از نحوه چرخش زمانی توسط بادامک باشد، مشتق‌گیری پیاپی از y نسبت به موقعیت بادامک (θ) صورت گرفته و با استفاده از قاعده زنجیره‌ای می‌توان مشتق‌های نسبت به زمان را محاسبه نمود:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad , \quad y' = \frac{dy}{d\theta}$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad , \quad y'' = \frac{d^2y}{d\theta^2}$$

$$\dddot{y} = \frac{d^3y}{dt^3} \quad , \quad y''' = \frac{d^3y}{d\theta^3}$$

$\dot{y}$: سرعت واقعی m/s

$\ddot{y}$: شتاب واقعی m/s^2

$\dddot{y}$: تکان واقعی m/s^3 (Jerk)

y' : سرعت هندسی m/rad

y'' : شتاب هندسی m/rad^2

y''' : تکان هندسی m/rad^3

$$y = f(\theta) \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{y} = y'\dot{\theta} \quad \text{یا} \quad \dot{y} = y'\omega$$

$$\ddot{y} = y''\dot{\theta}^2 + y'\ddot{\theta} \quad \text{یا} \quad \ddot{y} = y''\omega^2 + y'\alpha$$

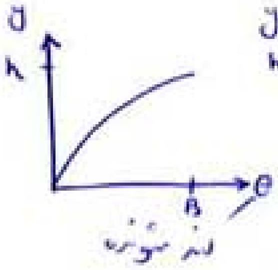
$$\dddot{y} = y'''\dot{\theta}^3 + 3y''\dot{\theta}\ddot{\theta} + y'\dddot{\theta} \quad \text{یا} \quad \dddot{y} = y'''\omega^3 + 3y''\omega\alpha + y'\dot{\alpha}$$

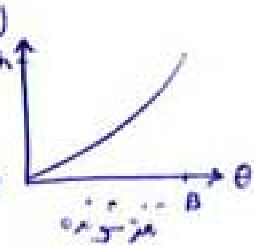
(α: شتاب زاویه‌ای بادامک)

<u>انواع حرکات متداول پیرو:</u>

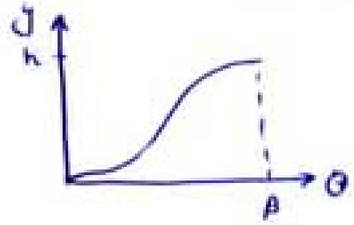
نوع حرکت	تغییر مکان (y)	سرعت ($\dot{y}$)	شتاب ($\ddot{y}$)
شتاب ثابت	$\frac{\theta}{\beta} \leq 0.5 \quad s = 2h\frac{\theta^2}{\beta^2}$ $\frac{\theta}{\beta} \geq 0.5 \quad s = h\left[1-2\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)^2\right]$	$\frac{ds}{dt} = \frac{4h\omega\theta}{\beta^2}$ $\frac{ds}{dt} = \frac{4h\omega}{\beta}\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)$	$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{4h\omega^2}{\beta^2}$ $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{4h\omega^2}{\beta^2}$
هارمونیک ساده	$s = \frac{h}{2}\left(1-\cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$	$\frac{ds}{dt} = \frac{\pi h\omega}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$	$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\pi^2h\omega^2}{2\beta^2}\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$
سیکلوئیدی	$s = h\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$	$\frac{ds}{dt} = \frac{h\omega}{\beta}\left(1-\cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$	$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{2\pi h\omega^2}{\beta^2}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}$

انواع معادلات :





۱- شتاب ثابت : $y = A\theta^2 + B\theta + C$



۲- هارمونیک ساده : $y = A\cos(a\theta) + B$ یا $y = A\sin(a\theta) + B$

۳- سیکلوئیدی : $y = A\cos(a\theta) + B\theta + C$ یا $y = A\sin(a\theta) + B\theta + C$

θ : زاویه چرخش شده

h : بیشترین خیز بادامک

β : زاویه بیشترین خیز بادامک

بادامک خارج از مرکز :

در این نوع بادامکها که به دلیل حذف برخی حرکات جانبی در ماشینها و کاهش فشارهای جانبی روی پیرو طراحی شده‌اند، مرکز دوران بادامک به اندازه e از مرکز دایره فاصله دارد. معادله حرکت پیرو عبارتست از

$$y = e(1 - \cos\theta)$$