جزوه محاسبات عددی

دکتر دمیرچی

Subject: ۱۳۸۸-۸۹
Year: ۸۸ Month: ۱۹ ماه ۱۶ Date: (دکتر وحید...) محاسبات عددی

سرفصل: خطا / حل معادلات $f(x)=0$ / درونیابی / انتگرال‌گیری عددی

حل عددی معادلات دیفرانسیل / حل دستگاه خطی و غیرخطی $AX=b$ /

مرجع: محاسبات عددی ۱) دکتر عبدالله ... ۲) ...

(فصل اول)

منابع خطا: ۱- خطای مدل ۲- خطای داده‌ها ۳- خطای نمایش اعداد

۴- خطای اعمال حسابی ۵) خطای روش

انواع خطا:

۱) خطای قطع کردن: خطایی که در اثر بریدن یا کنار گذاشتن علامات با محدود ... می‌آید.

۲) خطای گرد کردن:

تعریف گرد کردن: اگر $A \neq 0$ عددی اعشاری دارای بسط اعشاری

$$A = a_1 a_2 \cdots a_n / b_1 b_2 \cdots b_n b_{n+1} \cdots$$

برای گرد کردن A تا n رقم بعد از اعشار از قاعده زیر استفاده می‌کنیم.

الف) اگر b_{n+1} ... یک واحد به b_n اضافه کرده و ارقام بعد از b_n را حذف می‌کنیم.

Subject:
Year. Month. Date.

ب) اگر $b_n < 5$ ارقام بعد از b_n را حذف می‌کنیم

ج) $b_{n+1} = 5$ و ارقام بعد از b_{n+1} مخالف صفر باشد در این صورت مشابه (الف) عمل می‌کنیم.

د) اگر $b_{n+1} = 5$ و ارقام بعد از b_{n+1} صفر باشند، در این صورت که b_n فرد باشد مشابه (الف) و اگر b_n زوج است مشابه (ب) عمل می‌کنیم.

$A = ۳۱,۷۴۵۳۲۷۰۱$

$\xrightarrow{(ج1)} a_1 = ۳۱,۷۴۵$

$\xrightarrow{(الف1)} a_2 = ۳۱,۷۴۵۳۳$

$\xrightarrow{(ب1)} a_3 = ۳۱,۷۵$

$A = ۳۱,۷۴۳۵$

$\xrightarrow{(د1)} a' = ۳۱,۷۴۴$

تمرین ۶) اگر a گرد شده عدد A تا n رقم اعشار باشد آن‌گاه

$$|A-a| \leq ۰/۵ \times ۱۰^{-n} = ۵ \times ۱۰^{-(n+1)}$$

Subject:
Year. Month. Date.

فرض کن A را در نظر بگیریم :

$$A = a_1 a_2 \cdots a_n / b_1 \cdots b_n b_{n+1} \cdots$$

$$(b_{n+1} < 5) \qquad a = a_1 \cdots a_n / b_1 \cdots b_n$$

$$A - a = 0/\underbrace{0 \cdots 0}_{n} b_{n+1} \cdots \to |A - a| = 10^{-(n+1)} \times b_{n+1}/\cdots$$

$$\leq 5 \times 10^{-(n+1)}$$

مثل خطا: اگر a تقریبی از A باشد در این صورت

$$A = a + e(a)$$

خطای مطلق $\rightsquigarrow e(a) = |A - a|$

خطای نسبی a $\rightsquigarrow \delta(a) = \frac{e(a)}{|A|} = \frac{|A - a|}{|A|} \leq \frac{e_a}{|a|}$

هر عدد بیشتر از $e(a)$ را یک خطای مطلق ماکس (a) می‌نامیم.

$$e(a) = |A - a| \leq e_a$$

مثال) اگر e_a یک خطای مطلق برای a باشد نشان دهید.

$$\delta(a) \leq \frac{e_a}{|a| - e_a} \qquad \delta(a) = \frac{e(a)}{|A|} \leq \frac{e_a}{|A|}$$

$$\leq \big||A| - |a|\big| \leq |A - a| \leq e_a$$

$$-e_a \leq |A|-|a| \leq e_a$$

$$|a|\, e_a \leq |A| \leq |a|\, e_a$$

$$\frac{1}{|A|} \leq \frac{1}{|a|\, e_a}$$

اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد. در این صورت:

$$\delta(a) = \frac{|A \cdot a|}{|A|} \qquad \delta(a) \cong \frac{e_a}{|a|}$$

$$\delta(a) \cong \frac{e(a)}{|a|}$$

تمرین) اگر e_a کران بالای خطای مطلق a باشد نشان دهید

$$\delta(a) \leq \frac{e_a}{|a|-e_a}$$

می‌دانیم $\delta(a) = \dfrac{e(a)}{|A|}$

$$e(a) \leq e_a \quad (1)$$

$$|A-a| \leq e_a \Longrightarrow |a|-e_a \leq |A| \leq |a|+e_a \quad (2)$$

$$(1),(2) \Longrightarrow \delta(a) = \frac{e(a)}{|A|} \leq \frac{e_a}{|a|-e_a}$$

اگر e_a در مقایسه با a خیلی کوچک باشد یعنی e_a و $e(a)$ خیلی به ترتیب به هم نزدیک باشند $\Longrightarrow \delta(a) = \dfrac{e_a}{|a|}$

$$|a|-e_a \simeq |a|$$

* هرگاه a یک مقدار تقریبی برای عدد A باشد آن را چنین می‌نویسیم: $a \simeq A$

خطای مطلق a، مقدار مثبتی a به عنوان کمیتی که A را با $e(a)$ نشان داده

می‌شود $e(a) = |A - a|$ تعریف می‌کنیم.

اگر عدد A معلوم باشد $e(a)$ را می‌توان از فرمول بالا حساب کرد در صورتی است که بیشتر

مواقع A معلوم نیست از روش زیر استفاده می‌کنیم.

پس از محاسبه a یک حد بالا برای خطای مطلق a قابل محاسبه است.

خطای مطلق حدی: یک مقدار مثبت e_a است که از خطای مطلق آن کوچکتر نباشد و آن

را با e_a نشان می‌دهیم $e(a) \leqslant e_a$

برای $A = \frac{2}{3}$ با تقریب اعشاری و قطعی و خطای مطلق و خطای حدی را بدست آورید.

$A = \frac{2}{3}$ $\quad \underbrace{a = 0{,}67}_{\text{تقریب اعشاری}}$ $\quad e(a) = \left|\frac{2}{3} - \frac{67}{100}\right| = \frac{1}{300}$ خطای مطلق

$e(a) \leq e_a = 0/004$ که البته این جواب منحصر به فرد نیست.

$a = 0/66$ تقریب قطعی $\quad e(a) = \frac{2}{300} \quad e_a = 0/01$

* $e(a)$ منحصر به فرد می‌باشد اما e_a منحصر به فرد نیست *

Subject:
Year. Month. Date.

نکته: هرگاه e_a خطای مطلق حدی a به عنوان تقریبی از عدد A باشد آنگاه $|A-a| \le e_a$

$$|A-a| \le e_a \longleftarrow$$

و بنابه قرارداد نامساوی فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A = a \pm e_a$$

* اگر $A = 1/324 \pm 0/003$ در این صورت $1/321 \le A \le 1/327$

حال توجه کنید که در نامساوی $1/321 \le A \le 1/327$ این نشان می‌دهد که دو رقم اعشار A تا $1/32$ معتبر است. ولی رقم سوم اعشاری از ارقام ۱ تا ۷ خواهد بود ★

مثال) هرگاه $A = \frac{2}{3}$ و $a = 0/67$ تقریبی از آن باشد خطای نسبی a را بدست آورید؟

$$\delta(a) = \frac{e(a)}{A} = \frac{1}{200}$$

نکته: روشی برای گرد کردن یک عدد تا n رقم اعشار:

اگر رقم $(n+1)$ ام اعشار این عدد کمتر از ۵ باشد در این صورت رقم $(n+1)$ ام اعشار و ارقام بعد از آن را حذف می‌کنیم. اما هرگاه رقم $(n+1)$ ام اعشار بیشتر یا مساوی ۵ باشد یک واحد به رقم n ام اعشار اضافه شده و رقم $(n+1)$ ام و ارقام بعد از آن را حذف می‌کنیم. بنابراین قانون خطای گرد کردن همواره کمتر یا مساوی $\frac{1}{2}\times 10^{-n}$ می‌باشد

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

* عبارت $(۳۵)\,۴٫۷۳۲$ یعنی $۴٫۷۳۲$ دارای سه رقم اعشار است.

* خطای 4 عمل اصلی :

خطای حاصل جمع : هرگاه a و b تقریب‌هایی از A و B باشند و این اعداد مثبت باشند و e_a و e_b خطای مطلق عددی a و b باشند و e_c خطای مطلق عددی $C=A+B$ باشد.

$$e_c \le e_a + e_b$$

خطای تفاضل : با مفروضات قسمت بالا هرگاه $C=A-B$ باشد : $e_c \le e_a + e_b$

یعنی $e_a + e_b$ کران بالا برای خطای مطلق عددی c می‌باشد.

مثال : هرگاه اعداد π و $\sqrt{۲}$ را تا ۴ رقم اعشار گرد کنیم مطلوب است خطای $\pi \pm \sqrt{۲}$ و حد بالای خطای حاصل جمع و تفاضل را بدست آورید.

$\pi = ۳٫۱۴۱۶ + e_1$, $\sqrt{۲} = ۱٫۴۱۴۲ + e_2$

* منظور از e_1 و e_2 خطای مرتکب شده در گرد کردن است. $e_1 \le \frac{1}{۲} \times 10^{-۴}$, $e_2 \le \frac{1}{۲} \times 10^{-۴}$

$$\pi + \sqrt{۲} = (۳٫۱۴۱۶ + ۱٫۴۱۴۲) + e_3 = ۴٫۵۵۵۸ + e_3$$

$$e_3 \le e_1 + e_2 \Longrightarrow e_3 \le 10^{-۴}$$

در نتیجه $۴٫۵۵۵۸ - 10^{-۴} \le \pi + \sqrt{۲} \le ۴٫۵۵۵۸ + 10^{-۴}$

Subject:
Year. Month. Date.

و برای تفاضل: $\pi - \sqrt{2} = 1.7274 + e_4$

$$e_4 \le e_1 + e_2 \le 10^{-4}$$

$$\Longrightarrow 1.7274 - 10^{-4} \le \pi - \sqrt{2} \le 1.7274 + 10^{-4}$$

* خطای حاصل ضرب: با همان فرضیات برای خطای حاصل ضرب داریم اگر $C = AB$

$$e_c \le a e_b + b e_a$$

* تقسیم: خطا در عمل تقسیم را این گونه مطرح می‌کنیم به این معنی که خطای تقسیم را الزاما خواسته باشیم به گونه‌ای آن تقسیم را به عمل ضرب تبدیل می‌کنیم و بعد در عمل از (۱-۱) برای خطای حاصل ضرب استفاده می‌کنیم.

* حالت کلی خطا حاصل ضرب سه عدد:

مثلا a و b و c به عنوان تقریب‌هایی از A و B و C به عنوان اعداد دقیق باشند آنگاه برای خطای حاصل ضرب abc به عنوان تقریبی از عدد ABC داریم:

$$e_{abc} \le ab\,e_c + ac\,e_b + bc\,e_a$$

خطای کلی در محاسبات توابع: فرض کنید تابع n متغیره $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را داشته باشیم و بخواهیم مقدار این تابع را به ازای $A_i = a_i + e_{a_i}$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ حساب کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$f(A_1, A_2, \dots, A_n) = f(a_1, \dots, a_n) + e_f$$

بنابراین:

$$e_f \leq e_{a_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_a + e_{a_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_a + \cdots + e_{a_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_a$$

در رابطه بالا منظور از a بردار مقادیر تقریبی a_i یعنی $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ می‌باشد همچنین

$\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_a$ یعنی محاسبه مشتق تابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ به ازای بردار a است.

خطای محاسبه تابع و خطای گسستن: می‌خواهیم مقدار $e^{1/3}$ را حساب کنیم می‌دانیم

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

با این مقدار $e^{1/3}$ یعنی مقدار سری واقع در سمت راست تساوی بالا به ازای $x=\frac{1}{3}$ است اما این جمع

حاصل جمع بی‌نهایت جمله عملاً امکان‌پذیر نیست. معمولاً تعدادی متناهی از جملات نخست را جمع می‌کنیم

و به تعداد لازم انتخاب و به ازای $x=\frac{1}{3}$ محاسبه می‌شود

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

بنابراین $E_n(x)$ هست

$$E_n(x) = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} + \frac{x^{(n+2)}}{(n+2)!} + \cdots$$

$E_n(x)$ اصطلاحاً خطای برشی در x نامیده می‌شود

Subject:
Year. Month. ۷ Date. ۹

چون با تقریب کار می‌کنیم. مثلاً اگر بخواهیم $e^{1/3}$ را با خطای کمتر از 10^{-3} بدست آوریم قرار دهیم:

$$\Rightarrow |E_n(x)| \leq \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

* برای محاسبه $E_n(x)$ معمولاً از جمله اول آن استفاده می‌شود:

$$E_n(x) \simeq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad **$$

بنابراین برای محاسبه $e^{1/3}$ با خطای کمتر از 10^{-3} داریم:

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2}\times 10^{-3} = 5\times 10^{-4}$$

برای $n=3$ نامساوی فوق برقرار نیست اما برای $n \geq 4$ نامساوی برقرار است.

نکته: هرگاه بخواهیم یک عبارت را تا n رقم اعشار بخواهیم محاسبات میانی را تا $n+1$ رقم اعشار انجام داده و نتیجه نهایی را در آخر کار با n رقم اعشار گرد نمائیم.

* تعریف) گوئیم a گرد شده عدد A تا n رقم اعشار است نشان دهیم

$$|A-a| \leq 0.5\times 10^{-n} = 5\times 10^{-(n+1)}$$

(فرض کنیم) $A = a_1a_2 \cdots a_m / b_1 \cdots b_nb_{n+1} \cdots$

$$\text{if } b_{n+1} \geq 5 \Rightarrow A = a_1 \cdots a_m / b_1 \cdots b_nb_{n+1} \cdots$$
$$a = a_1 \cdots a_m / b_1 \cdots (b_n+1)$$

Subject:
Year. Month. Date.

b_{n+1} ,

$$A-a=-0/\underbrace{0\cdots0}_{n\,\text{تا}}b_{n+1}\cdots \Rightarrow |A-a|=-10^{-(n+1)}\times \underbrace{b_{n+1}}_{>5},\cdots$$

$$\Rightarrow |A-a|=10^{-(n+1)}\times(\underbrace{-b_{n+1}}_{<5}) \le 5\times10^{-(n+1)} = /5\times10^{-n}$$

حالت ۱) $A=a_1a_2\cdots a_m/b_1\cdots b_nb_{n+1}\cdots$ $\quad b_{n+1}=5$

$a=a_1\cdots a_m/b_1b_2\cdots(b_n+1)\cdots$ $\quad$ کاملاً مثل حالت قبلی

۲. حالت) $A=a_1a_2\cdots a_m/b_1\cdots b_nb_{n+1}\cdots$

$a=a_1\cdots a_m/b_1\cdots(b_n+1)$

$\begin{cases} b_{n+1}=5 \\ b_n = \text{فرد} \end{cases}$

$$A-a=-0/\underbrace{00\cdots0}_{n\,\text{تا}}b_{n+1}\Rightarrow |A-a|=-10^{-(n+1)}\times5$$

$$\Rightarrow |A-a|\le /5\times10^{-n}$$

۲.(۲) حالت $\quad b_n=\text{زوج} \quad b_{n+1}=5$

$$\Rightarrow A=a_1\cdots a_m/b_1\cdots b_nb_{n+1}$$
$$a=a_1\cdots a_m/b_1\cdots b_n$$

$$A-a=0/\underbrace{0\cdots0}_{n\,\text{تا}}b_{n+1}\Rightarrow |A-a|=10^{-(n+1)}\times5$$

$$\Rightarrow |A-a|\le /5\times10^{-n}$$

(۵)

Subject:
Year. Month. Date

اعمال اصلی روی دو عدد تقریبی و کران خطای آن ها:

کد a و b تقریب های از A و B و هر دو مثبت باشد

$$\begin{cases} A = a + e(a) \\ B = b + e(b) \end{cases}$$

الف) $$\begin{cases} e(a+b) \leq \underbrace{e(a) + e(b)} \\ \delta(a+b) \leq \max\{\delta(a), \delta(b)\} \quad * \end{cases}$$

ب) $$\begin{cases} e(a-b) \leq e(a) + e(b) \\ \delta(a-b) \cong \dfrac{e(a-b)}{|a-b|} \quad ** \checkmark \end{cases}$$

ج) $$\begin{cases} e(ab) \leq a\,e(b) + b\,e(a) \\ \delta(ab) \leq \delta(a) + \delta(b) \quad * \checkmark \end{cases}$$

د) $$\begin{cases} e\left(\dfrac{a}{b}\right) \leq \dfrac{b\,e(a) + a\,e(b)}{b^2} \quad * \\ \delta\left(\dfrac{a}{b}\right) \leq \delta(a) + \delta(b) \quad * \end{cases}$$

اثبات الف: $e(a \pm b) = |(A \pm B) - (a+b)| \leq |A-a| + |B-b|$

$= e(a) \pm e(b)$

اثبات $e(ab) = |AB - ab| = |AB - aB + aB - ab|$

$\leq |B||A-a| + |a||B-b| = B\,e(a) + a\,e(b)$

Subject
Date

می‌دانیم: $B = b + e(b) \Rightarrow$ حاصل $\leq b\,e(a) + a\,e(b)$

$B\,e(a) = b\,e(a) + e(a)e(b)$

$B\,e(a) \leq b\,e(a)$

اثبات) $e(a/b) = \left| \dfrac{A}{B} - \dfrac{a}{b} \right| = \left| \dfrac{a+e(a)}{b+e(b)} - \dfrac{a}{b} \right|$

(مثال) اگر a و b تقریبی هایی از A و B باشند ثابت کنید حد بالای [illegible] a و b [illegible]

[illegible] جمع برابر است.

$e(a+b) \leq e(a) + e(b)$

$e(ab) \leq a\,e(b) + b\,e(a) \leq e(a) + e(b)$

$a \leq 1$ و $b \leq 1$ اگر

اثبات $\delta(a+b) \leq \dfrac{e(a+b)}{|a+b|} \leq \dfrac{e(a)+e(b)}{a+b}$

$$= \frac{a}{a+b} \cdot \underbrace{\frac{e(a)}{a}}_{\delta(a)} + \frac{b}{b+a} \cdot \underbrace{\frac{e(b)}{b}}_{\delta(b)} \leq \frac{a}{a+b} D + \frac{b}{a+b} D = D$$

$D = \max\{\delta(a), \delta(b)\}$

* [illegible] $\delta(a)$ [illegible]

$\delta(b)$ [illegible]

[illegible] $\max\{\delta(a), \delta(b)\}$ [illegible]

(۵)

Subject
Date

* مثال 8 اگر a و b تقریب های نزدیک بهم باشند و هدف محاسبه $a-b$ باشد آنوقت با بیاد دقت

$$\delta(a-b) \simeq \frac{e(a-b)}{|a-b|} \to \infty$$

بالا گرد

if $a \simeq b$ $\quad a-b \to 0$

برای مقادیر x نزدیک تر صفر $\quad A = 1-\cos x = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}(1+\cos x) = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

" " x مثبت و خیلی بزرگ $\quad A = \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{x^2-\frac{1}{x^2}} \simeq \frac{1}{x^3}$

تمرین) مطلوب است محاسبه $\frac{\pi}{3\sqrt{5}}$ و محاسبه خطا ? (3D)

$$\frac{\pi}{3\sqrt{5}} = \pi \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \pi = 3{,}1142 + E_\pi \;/\; \frac{1}{3} = 0/333 + E_{1/3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \underbrace{0/4447}_{b} + E_{1/\sqrt{5}} \;/\; \frac{\pi}{3} = \underbrace{9{,}4205}_{a} + E_{\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{\pi}{3\sqrt{5}} = 0/4447498982 + E_{\pi \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$E_{\pi/3} \leq 0/5\times 10^{-3} \quad E_{1/5} \leq 0/5 \times 10^{-3} \Rightarrow E_{\frac{\pi}{3} \times \frac{1}{\sqrt{5}}} = 9{,}4205\, E_{\frac{1}{\sqrt{5}}} + (0/4447) E_{\frac{\pi}{3}}$$

$$\leq 0/5 \times 10^{-3} (9{,}4205 + 0/4447) \leq$$

$$\pi \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 0/1468 + E_{\frac{\pi}{3} \times \frac{1}{\sqrt{5}}} + \text{خطای گرد کردن}$$

تمرین: مطلوب است حجم استوانه‌ای به شعاع e و ارتفاع $\sqrt{2}$ و کران حداکثر خطا (3D)؟

حجم استوانه: $V =$ ارتفاع × سطح مقطع $= \pi R^2 h = xyz^2$

فرض: $x = h = \sqrt{2} = 1.414 + e_x$; $e_x \le \frac{1}{2} \times 10^{-3}$

$y = \pi = 3.142 + e_y$; $e_y \le \frac{1}{2} \times 10^{-3}$

$z = R = e = 2.718$; $e_z \le \frac{1}{2} \times 10^{-3}$

$$V = (1.414 \times 3.142 \times 2.718^2) + e_V$$

$$V = 32.821 + e_V' \qquad e_V' \le \frac{1}{2} \times 10^{-3} + e_V$$

e_V' حاصل بعد تقریب کردن حاصلضرب تا ۳ رقم اعشاری باشد.

$$e_V \le e_x \frac{\partial V}{\partial x} + e_y \frac{\partial V}{\partial y} + e_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\le \frac{1}{2} \times 10^{-3} \{ yz^2 + xz^2 + 2xyz \}$$

$$\le \frac{1}{2} \times 10^{-3} \{ 23.212 + 10.446 + 24.151 \}$$

$$\le 289.045 \times 10^{-4}$$

$$e_V' \le \frac{1}{2} \times 10^{-3} + e_V = 58.809 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$