جزوه محاسبات عددی

دکتر دمیرچی

فصل پنجم "حل عددی معادلات دیفرانسیل"

یک معادله دیفرانسیل از مرتبه p معادله‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(p)}) = 0$$

و منظور از حل آن پیدا کردن تابع $y = y(x)$ است که در معادله فوق صدق کند

حل بعضی از این معادلات هم پیچیده‌اند یا به صورت بسته حل (

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{x-y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

جواب این معادله به روش حل‌های تحلیلی به صورت $\ln(x^2+y^2) = 2\arctan(\frac{y}{x})$

حال با معادلاتی با مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

شروع می‌کنیم. با داشتن x_0 ،

y_0 مقادیر تقریبی جواب را می‌خواهیم. y جواب معادله دیفرانسیل است را برای x_n ها y_n

کسب کنیم. یعنی مقدار تقریبی $\longrightarrow y_n \simeq y(x_n) \longleftarrow$ مقدار واقعی

روش سری تیلور: معادله دیفرانسیل (1) را در نظر بگیرید. فرض کنید f به اندازه کافی نسبت به x, y

مشتق‌پذیر باشد. هدف $x_1 = x_0 + h$ در این قسمت سری تیلور تابع y را حول x_0 می‌نویسیم.

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + h y'(x_0) + \frac{1}{2!} h^2 y''(x_0) + \dots \quad \star$$

حال صورت کلی جامع تر از بسط تیلور را برای معادلات دیفرانسیل از مرتبه k ام ارائه می دهیم

برای پیدا کردن جواب تقریبی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = f(x,y)$ با شرط $y(x_0)=y_0$

در فاصله $[a,b]$ به صورت زیر عمل می شود:

۱_ فاصله $[a,b]$ را به N قسمت مساوی به طول $h = \frac{b-a}{N}$ تقسیم می کنیم

فرض می کنیم $x_n = a+nh$, $y(x_n) = y(a+nh)$, $x_0 = a$, $x_N = b$

۲_ با داشتن y_n مقدار تقریبی $y(x_{n+1})$ یعنی y_{n+1} را از فرمول زیر محاسبه می کنیم

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n,y_n) + \frac{h^2}{2!} f'(x_n,y_n) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(x_n,y_n) \quad *$$

$$n = 0,1,2,\dots,N-1$$

مثال) با استفاده از روش تیلور مرتبه چهارم مطلوب است برآورد $y(0.5)$ با طول گام ...

$$\begin{cases} y' = x+y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

حل) طبق $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ $\quad f(x,y) = x+y$

$y' = f(x,y) = x+y \qquad y'' = f'(x,y) = 1+y' = 1+x+y$

$y''' = f''(x,y) = 1+y' = 1+x+y$

$$y^{(4)} = f'''(x,y) = 1 + y' = 1 + x + y$$

$$k = 4 , \quad h = \frac{b-a}{N} = \frac{0.5 - 0}{N} = \frac{x_N - x_0}{N} = \frac{0.5 - 0}{5} = 0.1$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.1(x_n + y_n) + \frac{(0.1)^2}{2!}(1 + x_n + y_n) + \frac{(0.1)^3}{3!}(1 + x_n + y_n) +$$
$$+ \frac{(0.1)^4}{4!}(1 + x_n + y_n) \simeq 0.00517 + 0.10517\, x_n + 1.10517\, y_n$$

$$y_1 = 0.00517 + 0.10517(0) + 1.10517(1) = 1.11034$$

$$y_2 = 0.00517 + 0.10517(0.1) + 1.10517(1.11034) = 1.24280$$

$$y_3 = 0.00517 + 0.10517(0.2) + 1.10517(1.24280) = 1.39971$$

$$y_4 = 0.00517 + 0.10517(0.3) + 1.10517(1.39971) = 1.58344$$

$$y_5 = 0.00517 + 0.10517(0.4) + 1.10517(1.58344) = 1.79743$$

$$\Longrightarrow y(0.5) \simeq y_5 = 1.79743$$

روش ~~[illegible]~~ اویلر : همان در روش بسط تیلور قبلی هم $k=1$ خواهد است :

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

Subject:
Year. Month. Date.

مثال) مطلوب است تخمینی از $y(0.2)$ با استفاده از روش اویلر با $h = 0.1$ بدست آورید.

$$\begin{cases} y' = x+y \ , \ x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad f(x,y) = x+y \qquad x_0 = 0 \ , \ y_0 = 1$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1 + 0.1(0+1) = 1.1$$

$$y_2 = y_1 + h f(y_1, x_1) = 1.1 + 0.1 f(1.1, 0.1) = 1.22$$

$$y(0.2) = y(x_2) \simeq y_2 = 1.22$$

روش رونگه - کوتا: همانطور که در روش تیلور برای مرتبه k و مرتبه بالای k قابل استفاده نیست زیرا با مشتقات مرتبه بالا سروکار داریم، لذا اساس کار را در اینجا روش اویلر با حفظ بهینه مراتب h را حل تعریف در نظر بگیریم. حال روش را طوری خواهیم داد که نیازی به مشتقات مرتبه بالا نباشد اما دقت آن در حد روش تیلور مرتبه k باشد.

روش رونگه - کوتای مرتبه دوم: برای معادلات h و $x_n = x_0 + nh$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} K_1 = h f(x_n, y_n) \\ K_2 = h f(x_n + h, y_n + K_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Subject:
Year. Month. Date.

روش رونگه - کوتای مرتبه چهارم :

برای معادله $y' = f(x,y)$ با شرط $y(x_0) = y_0$ و مقدار ثابت h قرار دهید :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

که در آن :

$$k_1 = hf(x_n , y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2} , y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2} , y_n + \frac{k_2}{2}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$k_4 = hf(x_n + h , y_n + k_3)$$

که با داشتن y_n مقدار تقریبی $y(x_{n+1})$ یعنی y_{n+1} را بدست خواهیم آورد .

مثال) مطلوب است تقریبی از $y(0.1)$ با گام $h = 0.1$ با استفاده از روش رونگه - کوتای مرتبه چهارم تخمین بزنید .

$$\begin{cases} y' = -2x - y , & x \geq 0 \\ y(0) = -1 \end{cases} \qquad f(x,y) = -2x - y$$

$$x_0 = 0 , \quad y_0 = -1 , \quad h = 0.1$$

$$k_1 = 0.1(-2x_0 - y_0) = 0.1 \qquad k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2} , y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.185$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2} , y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.1\left(-2x_0 - h - y_0 - \frac{k_2}{2}\right) = 0.1(-0.1 - 1 - 0.0925)$$

$$= -0.11525 \qquad k_4 = 0.1\left(-2\times(0.1) - 1 + 0.11525\right) = 1.0475$$

Subject:
Year. Month. Date.

$$y_1 \simeq y(x_{n+1}) = y(0.1) = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 0.9145$$

تمرین) با استفاده از روش رونگ - کوتا مرتبه چهار و با طول گام $h = 0.1$ تقریبی از مقدار $y(1.1)$ برای معادله دیفرانسیل زیر بدست آورید.

$$\begin{cases} y' = xy^{1/3} \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad x_0 = 1 \quad y_0 = 1 \qquad h = 0.1$$

$$f(x,y) = xy^{1/3}$$

$$K_1 = hf(x_0, y_0) = 0.1(1 \times 1) = 0.1$$

$$K_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}\right) = 0.1\left((1+0.05)(1+0.05)^{1/3}\right) = 0.10672$$

$$K_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}\right) = 0.1\left((1+0.05)(1+0.053)^{1/3}\right) = 0.12067$$

$$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3) = 0.1\left((1+0.1)(1+0.12067)^{1/3}\right) = 0.11075$$

$$y_1 \simeq y(1.1) = 1 + \frac{1}{6}\left[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right] = 1 + 0.10682 = 1.10682$$

تمرین : حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به نمودار y و محور x ها از $x=1$ تا $x=2$ به ازای $n=1,2$ بدست آورید. که y جواب معادله

$$\begin{cases} y' = 2x + y \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

می باشد.

$$V_{\text{حجم}} = \int_1^2 (y(x))^2\,dx \qquad n = 1 \qquad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{1} = 1$$

* حال برای محاسبه انتگرال بالا باید تقریبی از روش عددی ذوزنقه‌ای حساب کرد.

PAPCO

$$V = \int (y(x))^2 dx \xrightarrow{\text{روش ذوزنقه}} T(1) = \frac{1}{2}\left[(y(1))^2 + (y(2))^2\right]$$

حال $y(1)$ را که می‌دانیم برابر صفر است اما برای بدست آوردن $y(2)$ باید آن را به کمک روش رونگه-کوتای مرتبه دوم از معادله $y' = 2x + y$ بدست آورد.

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1) \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

$$\Rightarrow K_1 = 1f(x_0, y_0) = 1(2+0) = 2$$

$$K_2 = 1 \times f(x_0 + h, y_0 + K_1) = 1 \times (4+2) = 6$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \simeq y(2) = 0 + \frac{1}{2}(6+2) = 4$$

$$\Rightarrow T(1) = \frac{1}{2}\left[0 + 4^2\right] = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$ تقریبی از حجم جسم

فصل ششم: حل دستگاه خطی به روش عددی — حل سیستم خطی

فرض کنید دستگاه معادلات خطی شامل ۳ معادله و ۳ مجهول به شکل زیر داشته باشیم

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad (**) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

مثال :
$$\begin{cases} a_{11} \neq 0 \\ a_{22} \neq 0 \\ a_{33} \neq 0 \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date.

در حالت سه بعدی دستگاه بالا را برحسب x_1، x_2 و x_3 مرتب خواهیم نمود

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right) \qquad (*) \\ x_3 = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right) \end{cases}$$

حال می توان یک تقریب اولیه از جواب را به صورت $X^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix}$ در نظر گرفت

حال روش ژاکوبی را توضیح می دهیم:

روش ژاکوبی: با قرار دادن $x_1^{(0)}$ و $x_2^{(0)}$ و $x_3^{(0)}$ در معادلات دستگاه * یک تقریب جدید از دستگاه به صورت زیر بدست می آید. تقریب جدید را با $X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix}$ نشان می دهیم که

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right)$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)}\right)$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)}\right)$$

این عمل یک تکرار را کامل می کند. حال می توانیم با استفاده از مقادیر جدید $x_1^{(1)}$ و $x_2^{(1)}$، $x_3^{(1)}$ یک تقریب دیگر از جواب بدست آوریم. در حالت کلی با در دست داشتن تقریب $x_1^{(k)}$، $x_2^{(k)}$ و $x_3^{(k)}$ جواب $X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix}$ را به صورت زیر بدست می آوریم:

جدید

PAPCO

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1/a_{11}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = 1/a_{22}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}\right) \qquad , k=0,1,2,\dots \\ x_3^{(k+1)} = 1/a_{33}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

دستگاه بالا موسوم به دستگاه تکراری ژاکوبی برای بدست آوردن جواب دستگاه خطی (**) می باشد.

تذکر: در این روش (عددی) برای آنکه جواب علمی دستگاه به جواب عددی همگرا باشد با جابجا کردن سطر و ستون ها سعی می کنیم تا شرط زیر برقرار شود:

شرط همگرایی:

$$\begin{cases} |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| \\ |a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| \end{cases}$$

مثال) دستگاه زیر را به روش ژاکوبی با ۲ تکرار و با تقریب اولیه $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ X حل کنید؟

$$\begin{cases} -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\ 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

حل) با استفاده از دستگاه، سطرها و ستون هایش را جابجا می کنیم تا شرط همگرایی زیر برقرار شود:

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}|$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}|$$
$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}|$$
$$|a_{44}| > |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}|$$

حال اگر دستگاه را به شکل زیر جابجای سطرها را با هم عوض کنیم شرط همگرایی برقرار خواهد شد.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 & \longrightarrow 10 > 1+2+0 \ \checkmark \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 & \longrightarrow 11 > 1+1+3 \ \checkmark \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 & \longrightarrow 10 > 2+1+1 \ \checkmark \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 & \longrightarrow 8 > 3+1+0 \ \checkmark \end{cases}$$

حال شرط همگرایی برقرار است. ✓

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{10}\left[6 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)}\right] = \frac{1}{10}\left[6+0-0\right] = 0.6 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{11}\left[25 + x_1^{(0)} + x_3^{(0)} - 3x_4^{(0)}\right] = \frac{1}{11}\left[25+0+0+0\right] = 2.273 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{10}\left[-11 - 2x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_4^{(0)}\right] = \frac{-11}{10} = -1.1 \\ x_4^{(1)} = \frac{1}{8}\left[15 - 3x_2^{(0)} + x_3^{(0)}\right] = \frac{15}{8} = 1.875 \end{cases}$$

به همان روش بالا $\Rightarrow$ $x_1^{(2)} = 1.047$ $\quad x_2^{(2)} = 1.714$ $\quad x_3^{(2)} = -0.805$ $\quad x_4^{(2)} = 0.885$

در حالت کلی برای جواب متغیرهای جواب به روش ژاکوبی برای این معادله $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left[6 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right] \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}\left[25 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)}\right] \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left[-11 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_4^{(k)}\right] \\ x_4^{(k+1)} = \frac{1}{8}\left[15 - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right] \end{cases}$$

PAPCO

Subject:
Year   Month.   Date.

تمرین: اگر $|y^{(4)}|<1$ مطلوب است محاسبه $\int_0^1 y\,dx$ با خطای دقت 10^{-4} اگر y جواب معادله زیر باشد ها با طول دلخواه باشد؟ (روش اویلر)

$$\begin{cases} y' = \cos x + \cos y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

حل) چون در مسئله کران بالای مشتق چهارم y را به ما داده است بهتر است مقدار انتگرال را از قاعده سیمپسون تقریب بزنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$|E_S(h)| < 10^{-4} \longrightarrow \frac{b-a}{180} h^4 M \leq 10^{-4} \qquad \max|y^{(4)}| \leq 1 = M$$

$$\longrightarrow \frac{1-0}{180} h^4 (1) < 10^{-4} \longrightarrow h < 10^{-1} \sqrt[4]{180}$$

$$\longrightarrow n = \frac{b-a}{h}, \ \frac{1}{h} \geq \frac{1}{10^{-1}\sqrt[4]{180}} = \frac{10}{\sqrt[4]{180}} \simeq ۲٫۷۳$$

چون n در روش سیمپسون باید زوج انتخاب گردد n را باید ۴ در نظر گرفت. لذا خواهیم داشت:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 y\,dt = S\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1/4}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right]$$

y_1 و y_2 و y_3 و y_4 را باید از جواب حل معادله دیفرانسیل بدست آوریم لذا خواهیم داشت:

$y_0 = 0$ ، $x_0 = 0$ $\qquad f(x,y) = \cos x + \cos y$

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 0 + \frac{1}{4}[\cos 0 + \cos 0] = \frac{1}{2}$$

Subject: * برای استفاده از ماشین حساب باید برای محاسبه cos ماشین حساب را برحسب رادیان تنظیم کرد

Year. Month. Date.

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[\cos 1/4 + \cos 1/2\right]$$

$$= 1/2 + \frac{1}{4}\left[1.846\right] \simeq 0.9616$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 0.9616 + \frac{1}{4} f(1/2, 0.9616)$$

$$= 1.324$$

$$y_4 = y_3 + 1/4 f(x_3, y_3) = 1.324 + 1/4 f(3/4, 1.324) = 1.567$$

حاصل انتگرال : $\int_0^1 y\,dy = S(1/4) = \frac{1/4}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right]$

$$= \frac{1}{12}\left[0 + 4(1/2) + 2(0.9616) + 4(1.324) + 1.567\right] \simeq 10.7862$$

PaPCO