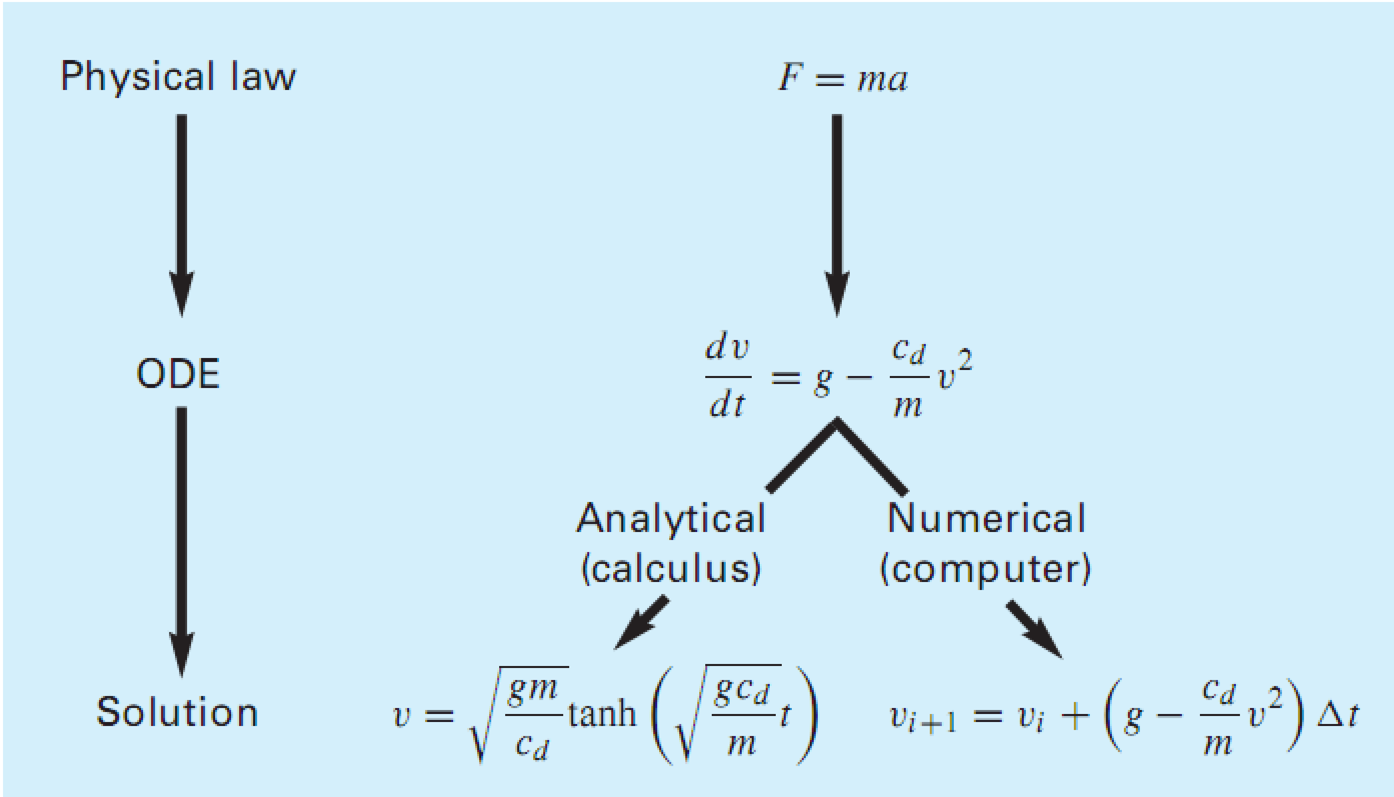
PART SIX
قسمت ششم

Ordinary Differential Equations

معادلات دیفرانسیل معمولی

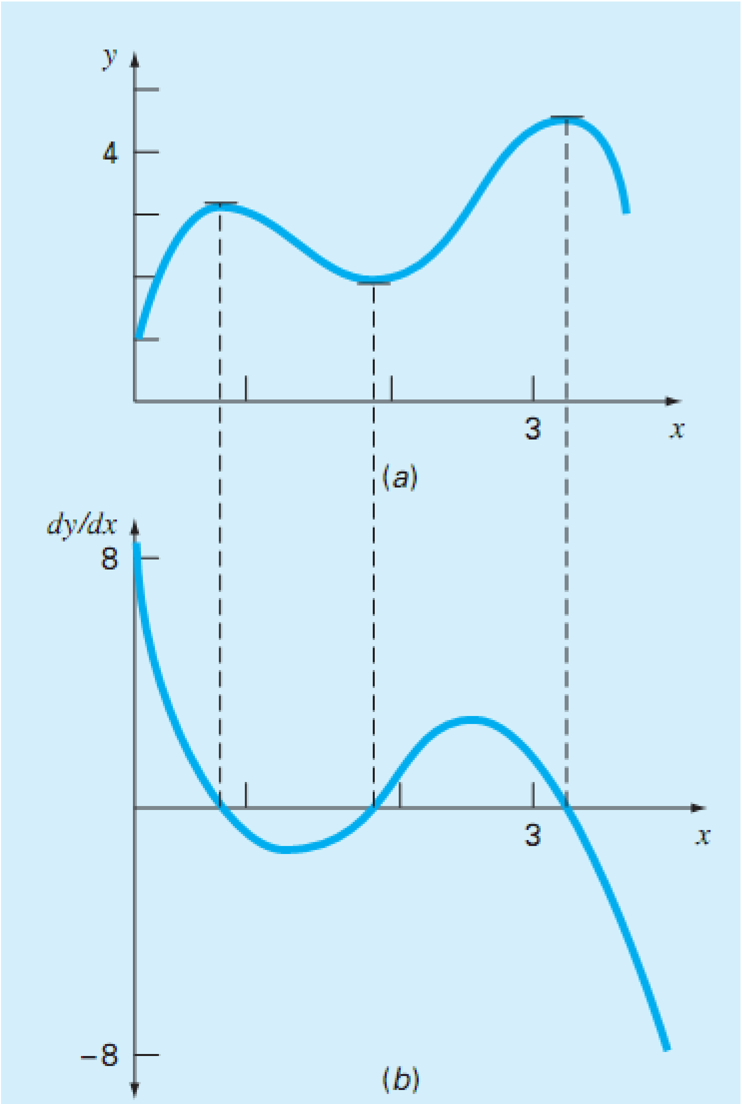
نحوه برخورد با معادلات دیفرانسیل



- حل عددی
- حل تحلیلی

مفهوم حل معادله دیفرانسیل

حل یک معادله دیفرانسیل تابع مشخصی از متغیر مستقل است که در معادله دیفرانسیل صدق می کند.



به عنوان مثال تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

این معادله نیز رفتار تابع را نشان

می دهد اما به روشی دیگر.

برای حل معادله به روش تحلیلی از

معادله انتگرال می گیریم:

$$y = \int (-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5)\, dx$$

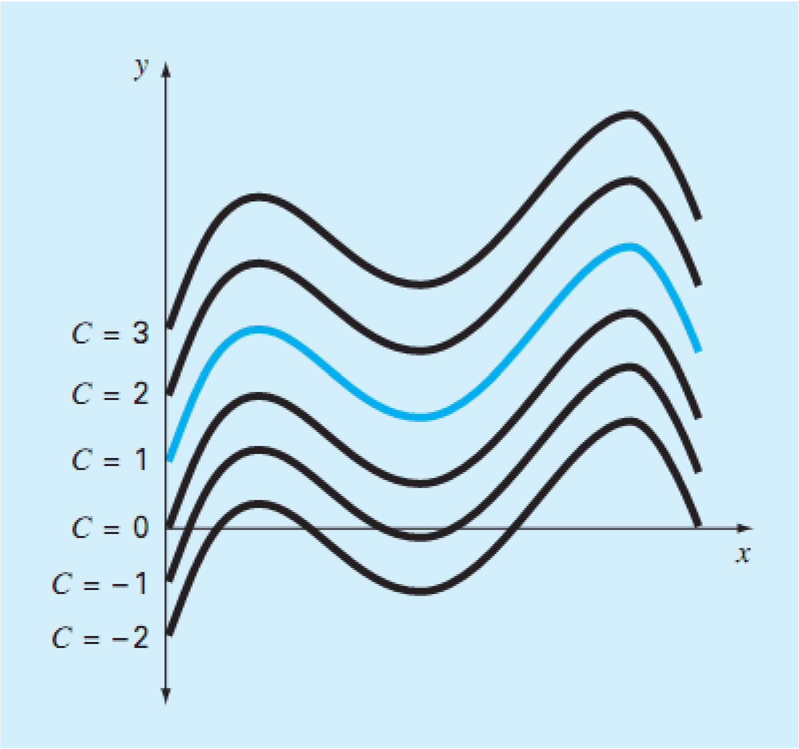
$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C$$

برای محاسبه مقدار ثابت از شرایط مرزی استفاده می کنیم:

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C$$

$$x = 0,\ y = 1 \Longrightarrow C = 1$$

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$



در معادلات مرتبه n به n شرط نیاز است.

در صورتیکه شرایط همگی در یک نقطه داده شده باشند به مسئله، مسئله مقدار اولیه (Initial Value Problem) گویند.

در غیر اینصورت مسئله از نوع مقدار مرزی (Boundary Value Problem) است.

22

فصل ۲۲

Initial-Value Problems

مسائل مقدار اولیه

در روش اویلر با شروع از نقطه معلوم و تعیین یک بازه (step) می توان مقادیر لحظه بعد را محاسبه نمود. بطور مثال معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

می توان مقدار جدید را از رابطه زیر بدست آورد:

New value = old value + slope × step size

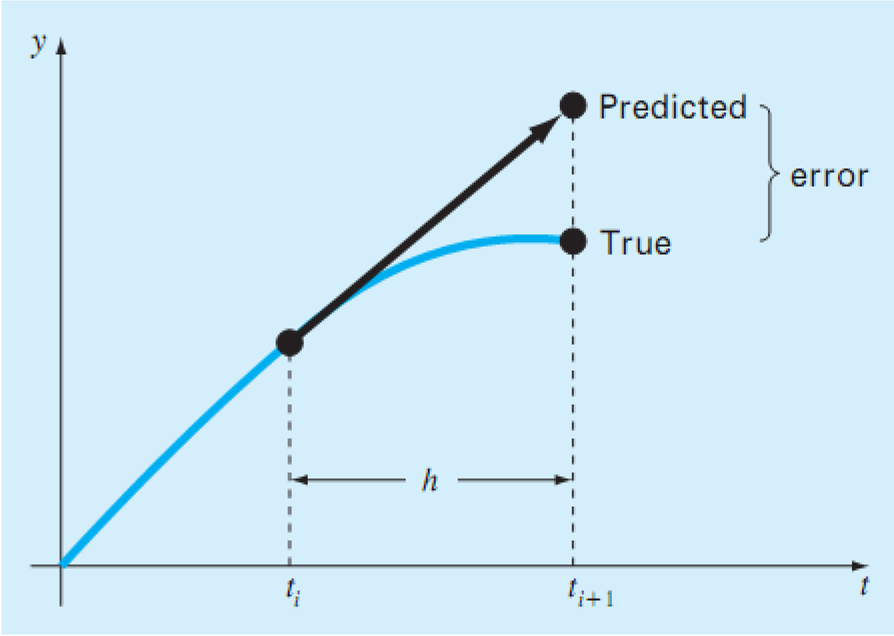
$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h$$

خطای روش اویلر:

$$E_a = \frac{f'(t_i, y_i)}{2!}h^2$$

or

$$E_a = O(h^2)$$



مثال:

با استفاده از روش اویلر معادله دیفرانسیل زیر را در بازه داده شده با توجه به شرط اولیه حل نمائید. از بازه زمانی برابر ۱ استفاده نمائید.

$$y' = 4e^{0.8t} - 0.5y$$

$$t = 0 \text{ to } 4$$

$$\text{at } t = 0 \text{ is } y = 2$$

با استفاده از روش اویلر:

$$y(1) = y(0) + f(0, 2)(1)$$

$$f(0, 2) = 4e^0 - 0.5(2) = 3 \Rightarrow y(1) = 2 + 3(1) = 5$$

پاسخ دقیق معادله بصورت روبرو می باشد:

$$y = \frac{4}{1.3}(e^{0.8t} - e^{-0.5t}) + 2e^{-0.5t}$$

بنابراین:

$$y = \frac{4}{1.3}\left(e^{0.8(1)} - e^{-0.5(1)}\right) + 2e^{-0.5(1)} = 6.19463$$

خطای روش پس از یک مرحله:

$$\varepsilon_t = \left|\frac{6.19463 - 5}{6.19463}\right| \times 100\% = 19.28\%$$

مرحله دوم بصورت زیر است:

$$y(2) = y(1) + f(1, 5)(1)$$
$$= 5 + \left[4e^{0.8(1)} - 0.5(5)\right](1) = 11.40216$$

مقدار دقیق تابع در t=۲:

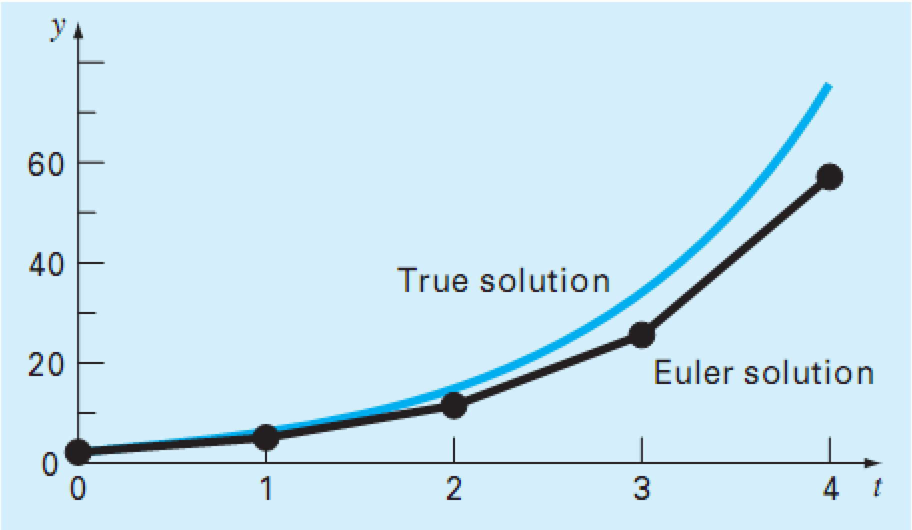
$$14.84392$$

بنابراین درصد خطای نسبی واقعی برابر است با:

$$23.19\%$$

مراحل بعد در جدول زیر لیست شده است:

t	y_{true}	y_{Euler}	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)
0	2.00000	2.00000	
1	6.19463	5.00000	19.28
2	14.84392	11.40216	23.19
3	33.67717	25.51321	24.24
4	75.33896	56.84931	24.54



یکی از منابع خطا در روش اویلر استفاده از مقدار مشتق نقطه شروع بازه برای کل بازه می باشد. دو روش برای حل این مشکل وجود دارد که هردو آنها مانند روش اویلر جزء دسته بزرگتری از روشهای حل معادلات به نام رانگ-کوتا می باشند.

از آنجا که این روشها نمایش گرافیکی ساده ای دارند پیش از روش رانگ-کوتا معرفی می شوند.

22.3.1 Heun's Method

روش هئون

یک روش برای افزایش دقت، برآورد مشتق در نقطه ابتدا و انتهای بازه می باشد. سپس مقادیر بدست آمده میان گیری می شوند تا برآورد بهتری در کل بازه برای مشتق بدست آید. این روش هئون نام دارد. به یاد آورید که در روش اویلر مشتق نقطه شروع برای تخمین بعدی استفاده می شد:

$$y_i' = f(t_i, y_i)$$

در روش استاندارد اویلر تخمین مشتق در همین مرحله متوقف می شد در حالیکه در روش هئون مقدار بدست آمده یک تخمین در مرحله میانی است به همین دلیل با بالانویس ۰ نشان داده شده است. به این معادله تخمین گر گفته می شود که توسط آن می توان مشتق انتهای بازه را محاسبه نمود.

سپس با میان گیری با مشتق نقطه شروع، مشتق با دقت بالاتر حاصل می شود.

سپس از میانگین مشتق برای محاسبه نقطه انتهای بازه استفاده می شود که به آن معادله اصلاح کننده گویند.

$$y_{i+1}' = f\left(t_{i+1}, y_{i+1}^0\right) \qquad \bar{y}' = \frac{f(t_i, y_i) + f\left(t_{i+1}, y_{i+1}^0\right)}{2}$$

predictor

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(t_i, y_i)h \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{f(t_i, y_i) + f\left(t_{i+1}, y_{i+1}^0\right)}{2}h$$

corrector

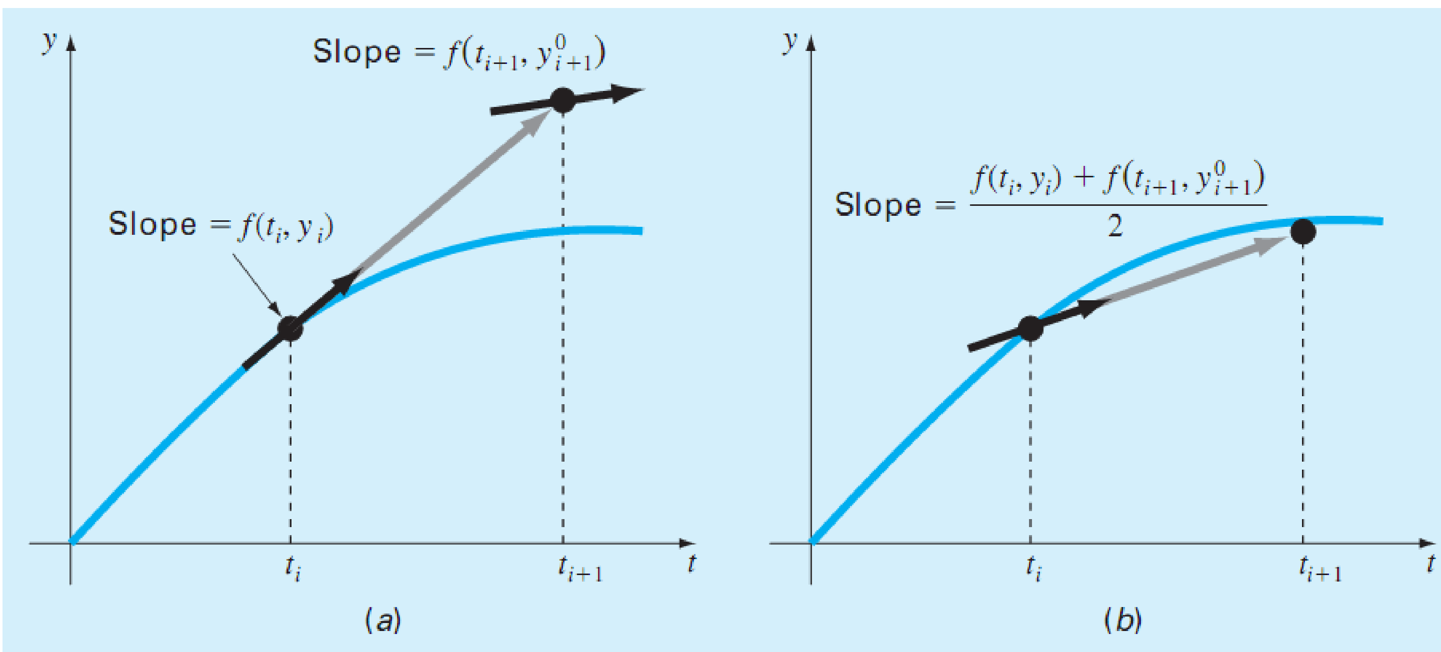
22.3.1 Heun's Method

روش هئون

این روند اصلاح را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$y_{i+1}^{j} \longleftarrow y_i^m + \frac{f(t_i, y_i^m) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^{j-1})}{2} h$$

همچنین در شکل زیر روند اصلاح مشتق نشان داده شده است:



22.3.1 Heun's Method

روش هئون

همانگونه که ملاحظه می شود مقدار y_{i+1} در دو سمت رابطه اصلاح کننده وجود دارد بنابراین می بایست این معادله را بصورت متوالی استفاده نمود تا همگرا گردد.

$$y_{i+1}^{j} \longleftarrow y_i^m + \frac{f(t_i, y_i^m) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^{j-1})}{2}h$$

Predictor (Fig. 22.4*a*): $$y_{i+1}^0 = y_i^m + f(t_i, y_i)h$$

Corrector (Fig. 22.4*b*): $$y_{i+1}^j = y_i^m + \frac{f(t_i, y_i^m) + f\left(t_{i+1}, y_{i+1}^{j-1}\right)}{2}h$$

(for $j = 1, 2, \ldots, m$)

درصد خطای نسبی تقریبی را می توان برای بررسی همگرایی اصلاح کننده مورد استفاده قرار داد.

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{y_{i+1}^j - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^j}\right| \times 100\%$$

مثال:

معادله دیفرانسیل مثال قبل را با روش هئون با تکرار حل نمائید.
از مقدار ۰/۰۰۰۰۱٪ به عنوان معیار توقف تکرار معادله اصلاح کننده استفاده نمائید.

$$y' = 4e^{0.8t} - 0.5y$$

from $t = 0$ to 4

at $t = 0$ is $y = 2$

حل: مشتق در نقطه شروع برابر است با:

$$y_0' = 4e^0 - 0.5(2) = 3$$

معادله تخمین گر بصورت روبرو خواهد بود:

$$y_1^0 = 2 + 3(1) = 5$$

مشتق نقطه انتهای بازه:

$$y_1' = f\left(x_1, y_1^0\right) = 4e^{0.8(1)} - 0.5(5) = 6.402164$$

میانگین مشتقات ابتدا و انتهای بازه:

$$\bar{y}' = \frac{3 + 6.402164}{2} = 4.701082$$

مقدار اصلاح شده در انتهای بازه:

$$y_1^1 = 2 + 4.701082(1) = 6.701082$$

مرحله بعدی اصلاح:

$$y_1^2 = 2 + \frac{3 + 4e^{0.8(1)} - 0.5(6.701082)}{2}1 = 6.275811$$

مثال:

مراحل مختلف تکرار معادله اصلاح کننده به همراه خطا در جدول زیر گردآوری شده است.

				Without Iteration		With Iteration	
t	y_{true}	y_{Euler}	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)	y_{Heun}	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)	y_{Heun}	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)
0	2.00000	2.00000		2.00000		2.00000	
1	6.19463	5.00000	19.28	6.70108	8.18	6.36087	2.68
2	14.84392	11.40216	23.19	16.31978	9.94	15.30224	3.09
3	33.67717	25.51321	24.24	37.19925	10.46	34.74328	3.17
4	75.33896	56.84931	24.54	83.33777	10.62	77.73510	3.18

22.3.2 The Midpoint Method

روش نقطه میانی

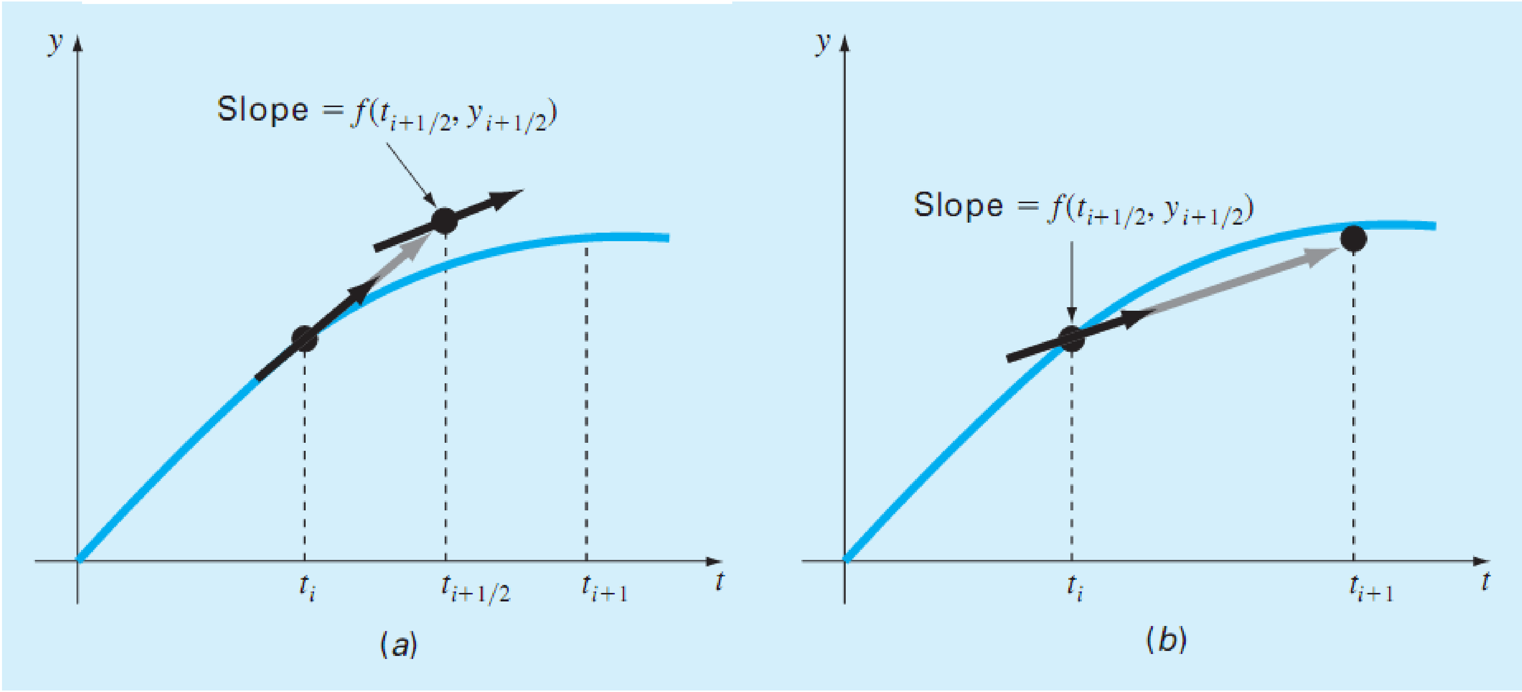
در این روش از شیب نقطه میانی لحظه های کنونی و بعدی برای محاسبه نقطه بعدی استفاده می شود. لذا ابتدا مقدار تابع در نقطه میانی محاسبه می شود:

$$y_{i+1/2} = y_i + f(t_i, y_i)\frac{h}{2}$$

سپس با استفاده از مقدار بدست آمده شیب نقطه میانی بدست می آید:

$$y'_{i+1/2} = f(t_{i+1/2}, y_{i+1/2})$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$



روشهای رانگ-کوتا برای رسیدن به دقت روش بسط تیلور، بدون لزوم محاسبه مشتقات مرتبه بالاتر استفاده می شوند. روشهای رانگ-کوتا دارای فرم های متفاوتی می باشند که می توان آنها را به فرم عمومی زیر نشان داد:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

که تابع ϕ تابع نمو (increment) نامیده می شود و بصورت زیر تقریب زده می شود.

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_i, y_i) \\
k_2 &= f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&\vdots \\
k_n &= f(t_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)
\end{aligned}$$

در روابط فوق a_i و p_i و q_{ij} مقادیر ثابت می باشند که از مقایسه با بسط تیلور محاسبه می شوند.

رابطه کلی رانگ-کوتای مرتبه ۲ بصورت روبرو است:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

با مقایسه با بسط تیلور مرتبه ۲ سه معادله بر حسب چهار مجهول مورد نظر بدست می آید:

$$a_1 + a_2 = 1$$
$$a_2 p_1 = 1/2$$
$$a_2 q_{11} = 1/2$$

برای محاسبه مقادیر می توان یکی از مجهولات (مثلا a_2) را فرض کرد:

$$a_1 = 1 - a_2$$
$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

لذا به ازا مقادیر مختلف a_2 ویرایش های مختلف رانگ-کوتای مرتبه ۲ بدست می آید. در ادامه تعدادی از این حالات معرفی می شود.

در صورتیکه ($a_2 = 1/2$) فرض شود خواهیم داشت:

($a_2 = 1/2$) $a_1 = 1/2$ and $p_1 = q_{11} = 1$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

where

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = f(t_i + h, y_i + k_1 h)$$

که در آن k_1 مقدار شیب در نقطه ابتدا و k_2 شیب نقطه انتهایی می باشد. لذا این روش رانگ-کوتا، معادل روش هئون بدون اصلاح کننده می شود.

درصورتیکه ($a_2 = 1$) فرض شود خواهیم داشت:

$$a_1 = 0,\ p_1 = q_{11} = 1/2,$$

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

where

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = f(t_i + h/2, y_i + k_1 h/2)$$

که $k_۲$ شیب در نقطه میانی می باشد و این روش همان روش نقطه میانی است.

رالستون و رابینوویتز نشان دادند که فرض $(a_2 = 2/3)$ باعث کمینه شدن خطای قطع در رانگ-کوتای مرتبه ۲ می شود. در این شرایط بقیه ثابت ها بصورت زیر می باشند:

$$a_1 = 1/3 \text{ and } p_1 = q_{11} = 3/4$$

و بنابراین:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$

where

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{3}{4}h,\, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

22.4.2 Classical Fourth-Order Runge-Kutta Method رانگ-کوتای مرتبه ۴

روشهای رانگ-کوتای مرتبه ۴ از معروفترین روشهای حل معادلات معمولی می باشند. مشابه روشهای مرتبه ۲، بینهایت روش مرتبه ۴ وجود دارد که معروف ترین آنها بصورت زیر است.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

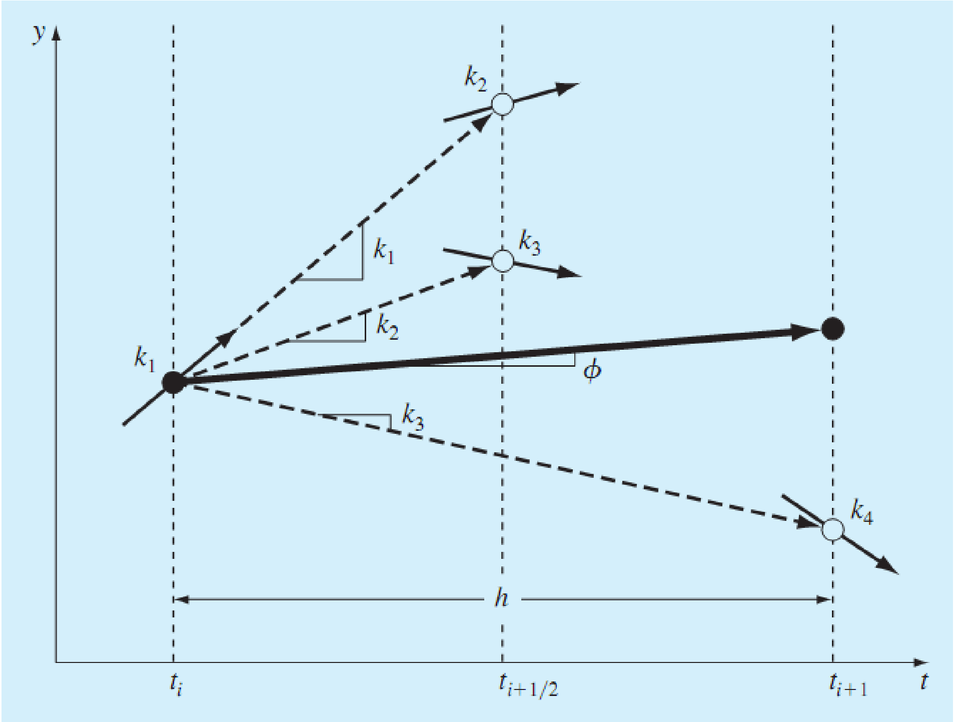
where

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + k_3 h)$$



هر یک از k ها معرف شیب می باشد و سپس مجموع وزنی این مقادیر برای محاسبه تخمین بهتری از شیب استفاده می شود.

مثال:

معادله دیفرانسیل زیر را با روش رانگ-کوتای مرتبه ۴ حل نمائید.

$$y' = 4e^{0.8t} - 0.5y \qquad y(0) = 2 \qquad t = 0 \text{ to } 1$$

$$k_1 = f(0, 2) = 4e^{0.8(0)} - 0.5(2) = 3$$

$$y(0.5) = 2 + 3(0.5) = 3.5$$

$$k_2 = f(0.5, 3.5) = 4e^{0.8(0.5)} - 0.5(3.5) = 4.217299$$

$$y(0.5) = 2 + 4.217299(0.5) = 4.108649$$

$$k_3 = f(0.5, 4.108649) = 4e^{0.8(0.5)} - 0.5(4.108649) = 3.912974$$

$$y(1.0) = 2 + 3.912974(1.0) = 5.912974$$

$$k_4 = f(1.0, 5.912974) = 4e^{0.8(1.0)} - 0.5(5.912974) = 5.945677$$

$$\phi = \frac{1}{6}[3 + 2(4.217299) + 2(3.912974) + 5.945677] = 4.201037$$

$y(1.0) = 2 + 4.201037(1.0) = 6.201037$ مقدار دقیق 6.194631 $(\varepsilon_t = 0.103\%)$

نکته

امکان استفاده از روشهای رانگ-کوتا با مراتب بالاتر از ۴ نیز وجود دارد، به عنوان مثال رانگ-کوتای مرتبه ۵ Butcher بصورت زیر می باشد.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h$$

where

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{4}h,\ y_i + \frac{1}{4}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{4}h,\ y_i + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h\right)$$

$$k_4 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h,\ y_i - \frac{1}{2}k_2h + k_3h\right)$$

$$k_5 = f\left(t_i + \frac{3}{4}h,\ y_i + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h\right)$$

$$k_6 = f\left(t_i + h,\ y_i - \frac{3}{7}k_1h + \frac{2}{7}k_2h + \frac{12}{7}k_3h - \frac{12}{7}k_4h + \frac{8}{7}k_5h\right)$$

اما با افزایش مرتبه روش، تعداد توابعی که لازم است محاسبه شوند نیز افزایش می یابد که این امر افزایش زمان محاسبه را به دنبال دارد.

همین امر دلیل استفاده زیاد از رانگ-کوتای مرتبه ۴ می باشد.

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی را می توان به فرم کلی زیر نشان داد:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

برای حل این دستگاه به n شرط اولیه نیاز است.

کلیه روشهای اشاره شده برای تک معادله دیفرانسیل، برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی قابل استفاده می باشند.

نکته: یک معادله دیفرانسیل مرتبه بالا را می توان با تعریف متغیرات جدید به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل نمود.

مثال: معادله دیفرانسیل مربوط به شخص پرشگر به فرم زیر است:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{C_d}{m}v^2 \Longrightarrow \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= g - \frac{c_d}{m}v^2 \end{aligned}$$

و شرایط اولیه را می توان به فرم زیر در نظر گرفت.

$$x(0) = v(0) = 0$$

این مدل میزان رشد جمعیت شکار و شکارچی را در تقابل با هم نشان می دهد.

پارامترهای این معادلات به صورت زیر می باشد:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

x: تعداد شکار

y: تعداد شکارچی

a : نرخ افزایش شکار

c: نرخ مرگ و میر شکارچی

b: نرخ اثر متقابل شکار– شکارچی بر مرگ و میر شکار

d: نرخ اثر متقابل شکار– شکارچی بر رشد شکارچی

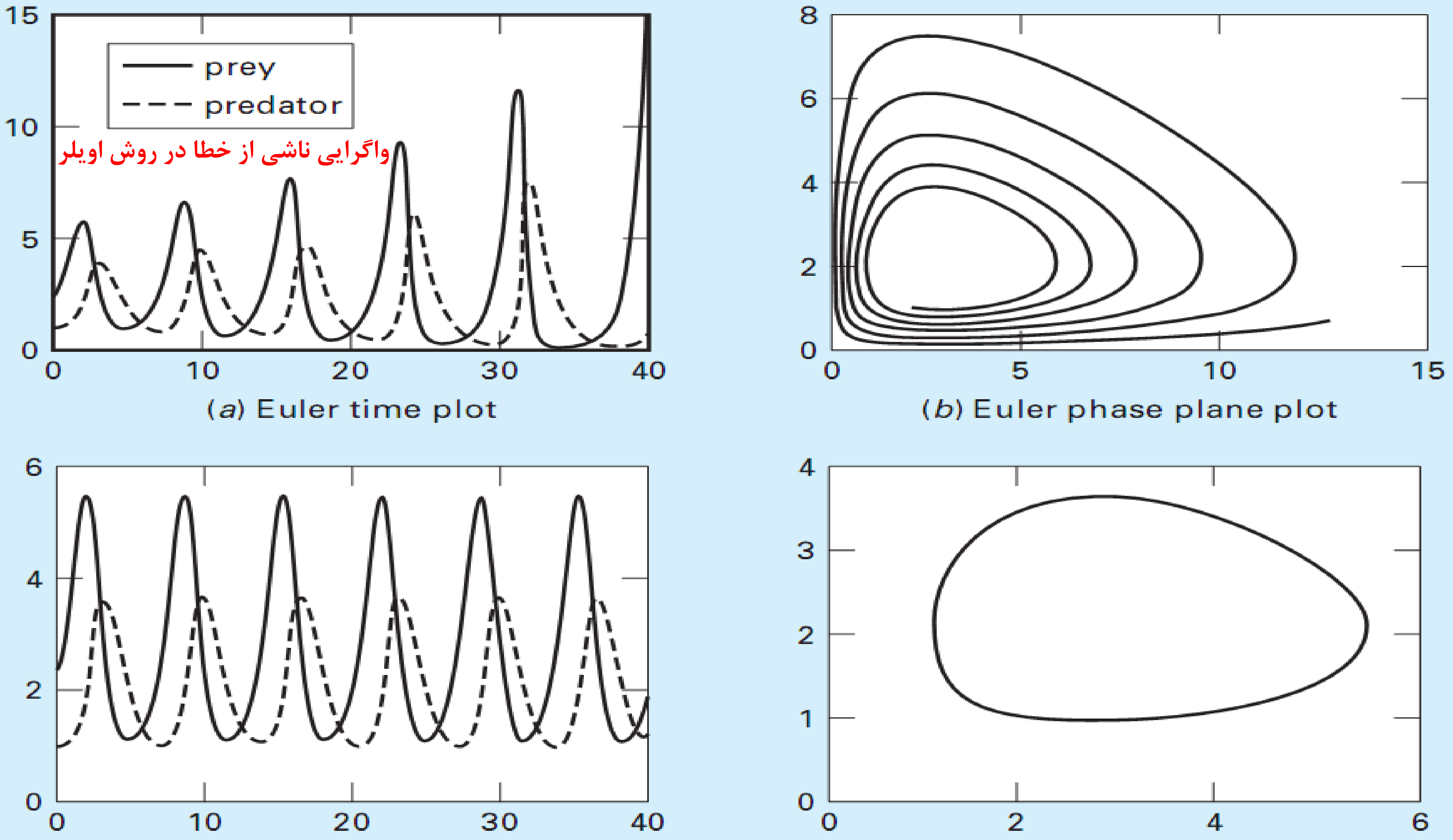
$a = 1.2$, $b = 0.6$, $c = 0.8$, and $d = 0.3$

initial conditions of $x = 2$ and $y = 1$

integrate from $t = 0$ to 30

step size of $h = 0.0625$

پاسخ این معادلات با دو روش اویلر و رانگ-کوتای مرتبه ۴ محاسبه شده است. همانگونه که ملاحظه می شود روش اویلر دارای خطا می باشد که برای کاهش این خطا می توان از بازه های کوچکتر استفاده نمود. در مقابل روش رانگ-کوتا با همان بازه به درستی جواب می دهد.



(a) Euler time plot

(b) Euler phase plane plot

(c) RK4 time plot

(d) RK4 phase plane plot

تمرین ۱:

برای معادله داده شده از روشهای زیر استفاده نموده و کلیه نتایج را در یک نمودار نشان دهید:

الف) روش تحلیلی.

ب) روش اویلر با h=۰.۵ و h=۰.۲۵ .

ج) روش نقطه میانی با h=۰.۵.

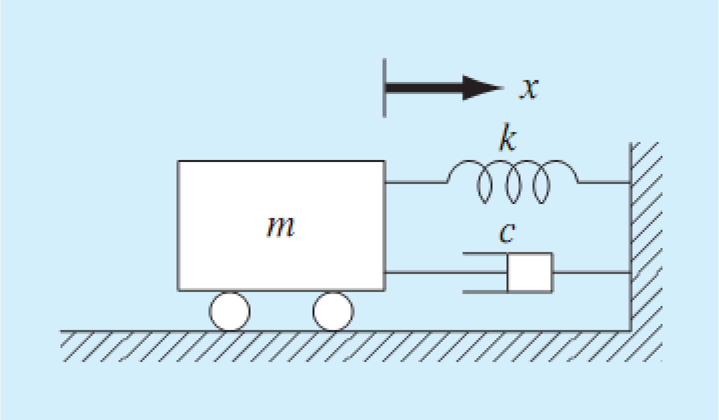
د) روش رانگ-کوتای مرتبه ۴ با h=۰.۵.

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y$$

$t = 0$ to 2 where $y(0) = 1$

تمرین۲:

معادله حرکت یک سیستم جرم-فنر-دمپر بصورت زیرمی باشد:



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$0 \le t \le 15 \text{ s}$$

initial displacement $x = 1$ m

initial velocity v=۰

$m = 20$-kg $\qquad k = 20$ N/m

با استفاده از یک روش عددی معادله فوق را در سه حالت زیر حل نمائید و نتایج را بر روی یک نمودار نشان دهید.

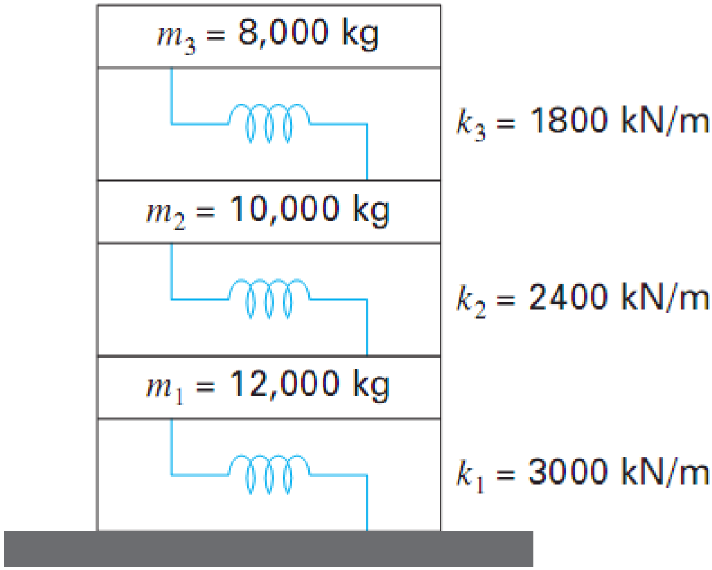
الف) c=۵ حالت زیر میرا

ب) c=۴۰ حالت میرایی بحرانی

ج) c=۲۰۰ حالت فوق میرا

تمرین۳:

دستگاه معادلات زیر مربوط به حرکت یک ساختمان سه طبقه می باشد.



$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}(x_2 - x_1)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{k_2}{m_2}(x_1 - x_2) + \frac{k_3}{m_2}(x_3 - x_2)$$

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = \frac{k_3}{m_3}(x_2 - x_3)$$

$$t = 0 \text{ to } 20 \text{ s}$$

دستگاه معادلات فوق را با توجه به داده های زیر حل نمائید:

جابجایی و سرعت کلیه طبقات بجز سرعت طبقه اول صفر می باشد.

سرعت اولیه طبقه اول برابر $dx_1/dt = 1$ m/s است.

نتایج را به صورت نمودارهای جابجایی-زمان و سرعت-زمان و همچنین نمودار سه بعدی جابجایی بر حسب زمان و سرعت بیان کنید.

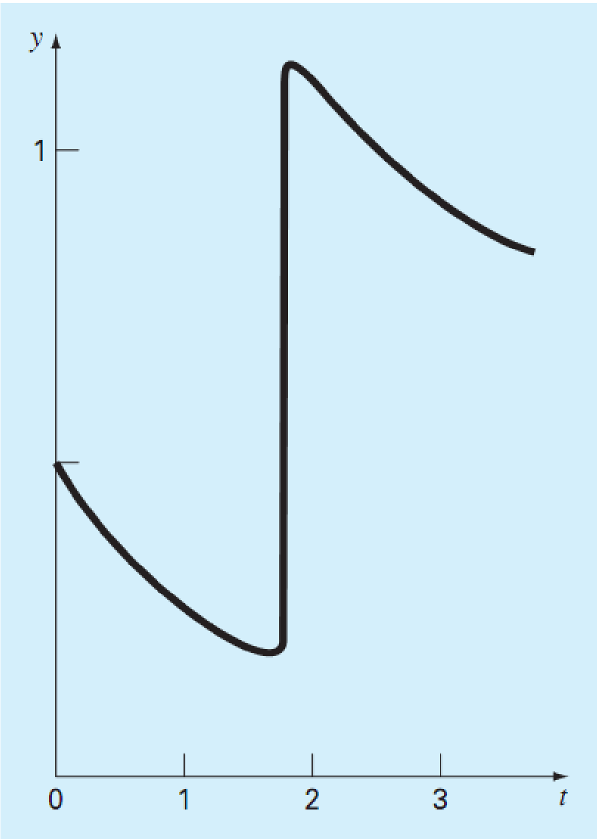
23

فصل ۲۳

Adaptive Methods and Stiff Systems

روشهای تطابقی و سیستمهای سفت

استفاده از بازه ثابت در حل بسیاری از مسائل جوابگو است. اما در تعدادی از مسائل مانند شکل زیر، تابع در محدوده بزرگی دارای تغییرات ناچیز است و می توان از بازه های بزرگتر استفاده نمود. اما در قسمتی از دامنه، تابع دارای تغییرات شدید است که در این محدوده می بایست از بازه های کوچکتر استفاده نمود تا این تغییرات شدید قابل مشاهده باشد.



برای تشخیص طول بازه مناسب

دو روش وجود دارد:

۱- نصف کردن بازه (با محاسبه مقادیر بازه اولیه و نصف آن، خطا محاسبه می شود)

۲- روشهای مبتنی بر رانگ-کوتا

(با مقایسه مراتب مختلف رانگ-کوتا خطا محاسبه می شود).

23.1.1 MATLAB Functions for Nonstiff Systems

توابع متلب برای سیستم های nonstiff

یکی از توابع متلب برای حل مسائل معمولی، تابع ode۲۳ می باشد که از رانگ-کوتای مرتبه ۲ و ۳ و مقایسه آن دو برای محاسبه گام استفاده می کند.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3)h$$

where

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h,\, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{3}{4}h,\, y_i + \frac{3}{4}k_2 h\right)$$

The error is estimated as

$$E_{i+1} = \frac{1}{72}(-5k_1 + 6k_2 + 8k_3 - 9k_4)h$$

where

$$k_4 = f(t_{i+1}, y_{i+1})$$

در هر مرحله خطا محاسبه شده و درصورتیکه کمتر از مقدار از پیش تعیین شده باشد گام فعلی قبول می شود. در غیر اینصورت گام کوچکتر شده و مجددا بررسی می شود که آیا خطا از مقدار مورد نظر کوچکتر شده است یا خیر.

توابع ode در متلب

توابع متفاوتی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول در متلب وجود دارد که فرمت کلی آنها بصورت زیر است:

[T,Y] = *solver*(odefun,tspan,y۰)

[T,Y] = *solver*(odefun,tspan,y۰,options)

که solver یکی از توابع زیر می باشد:

ode۴۵, ode۲۳, ode۱۱۳, ode۱۵s, ode۲۳s, ode۲۳t, ode۲۳tb

ورودیهای تابع:

odefun: نام فایلی که معادلات دیفرانسیل درآن تعریف می شوند.

tspan: محدوده زمانی حل مسئله به فرم [t۰,tf] یا [t۰,t۱,...,tf]

y۰: مقدار اولیه برای حل معادله

خروجی های تابع:

T: بردار ستونی نقاط زمانی

Y: بردار پاسخ

Solver	Problem Type	Order of Accuracy	When to Use
ode۴۵	Nonstiff	Medium	Most of the time. This should be the first solver you try.
ode۲۳	Nonstiff	Low	For problems with crude error tolerances or for solving moderately stiff problems.
ode۱۱۳	Nonstiff	Low to high	For problems with stringent error tolerances or for solving computationally intensive problems.
ode۱۵s	Stiff	Low to medium	If ode۴۵ is slow because the problem is stiff.
ode۲۳s	Stiff	Low	If using crude error tolerances to solve stiff systems and the mass matrix is constant.
ode۲۳t	Moderately Stiff	Low	For moderately stiff problems if you need a solution without numerical damping.
ode۲۳tb	Stiff	Low	If using crude error tolerances to solve stiff systems.

مثال:

حل

```
function yp = predprey(t,y)
yp = [1.2*y(1)-0.6*y(1)*y(2);-0.8*y(2)+0.3*y(1)*y(2)];
```

معادلات:

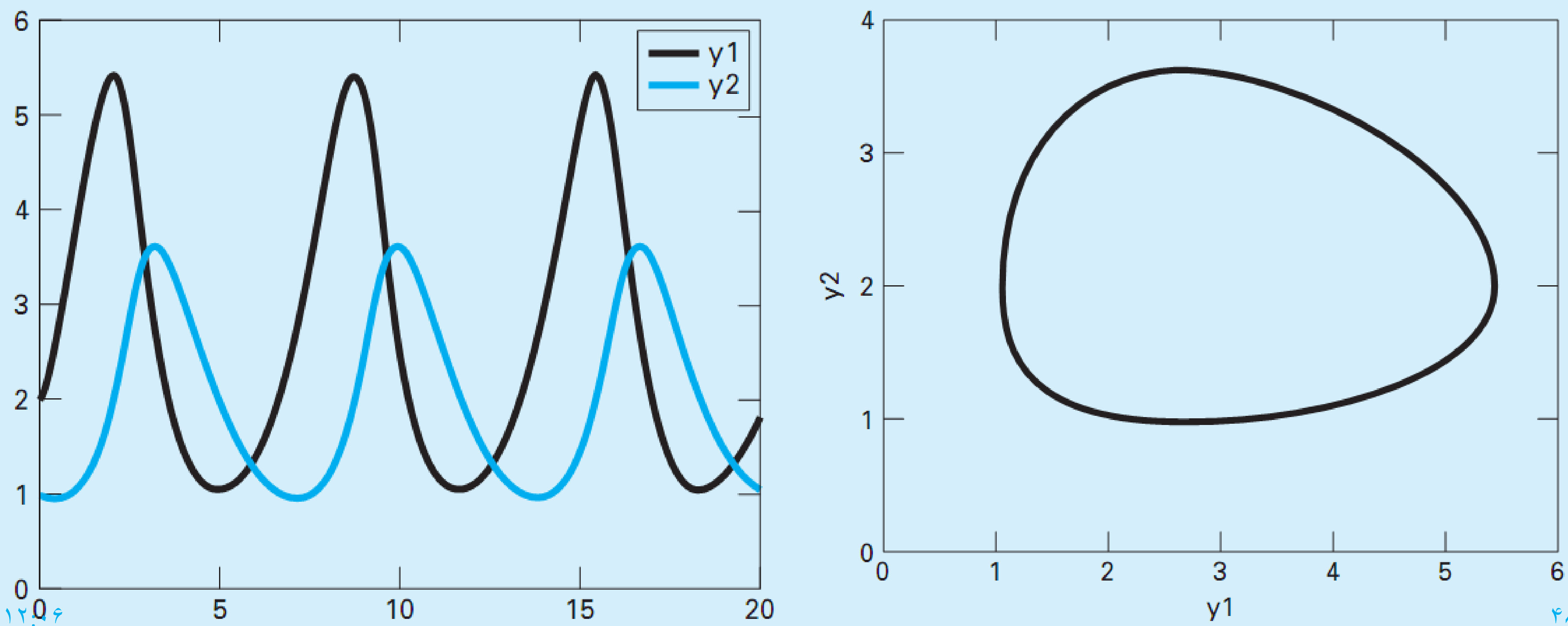
$t = 0$ to 20:

$$\frac{dy_1}{dt} = 1.2y_1 - 0.6y_1y_2 \qquad \frac{dy_2}{dt} = -0.8y_2 + 0.3y_1y_2$$

ش...

$y_1 = 2$ and $y_2 = 1$ at $t = 0$

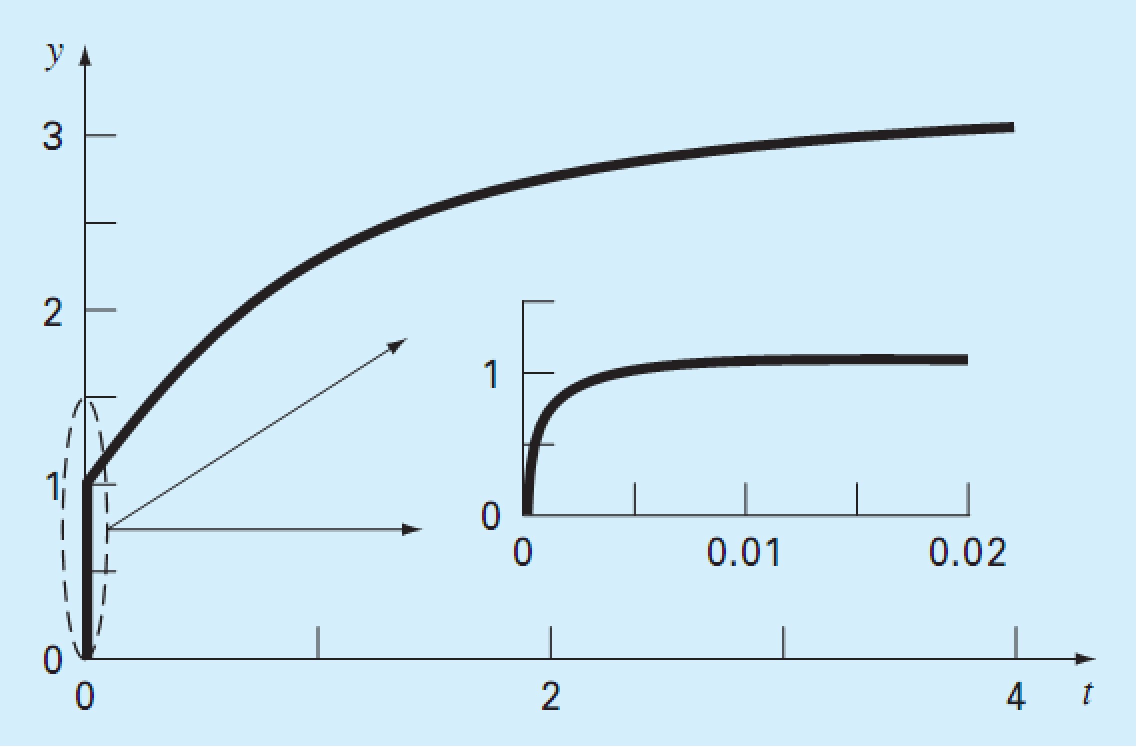
```
>>
>>
>> [t,y] = ode45(@predprey, tspan, y0);
>> plot(t,y)
>> plot(y(:,1),y(:,2))
```



سفتی مشکل خاصی است که در حل معادلات دیفرانسیل رخ می دهد. یک سیستم سفت (Stiff) سیستمی است که دارای پارامترهایی با تغییرات زیاد و ناگهانی می باشد.

$$y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -1000y + 3000 - 2000e^{-t} \xrightarrow{\text{حل تحلیلی}} y = 3 - 0.998e^{-1000t} - 2.002e^{-t}$$



مثال:

معادله واندرپول به ازاء مقادیر مختلف μ می تواند یک معادله معمولی یا سفت باشد. در این مثال این معادله با دو روش معمولی(ode۴۵) و روش مخصوص سیستم سفت (ode۲۳s) مورد بررسی قرار می گیرد.

$$y'' - \mu\left(1 - y^2\right)y' + y = 0$$

این معادله به ازاء μ=۱ یک سیستم معمولی و به ازاء μ=۱۰۰۰ یک سیستم سفت می باشد.

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \mu\left(1 - y_1^2\right)y_2 - y_1 = 0$$

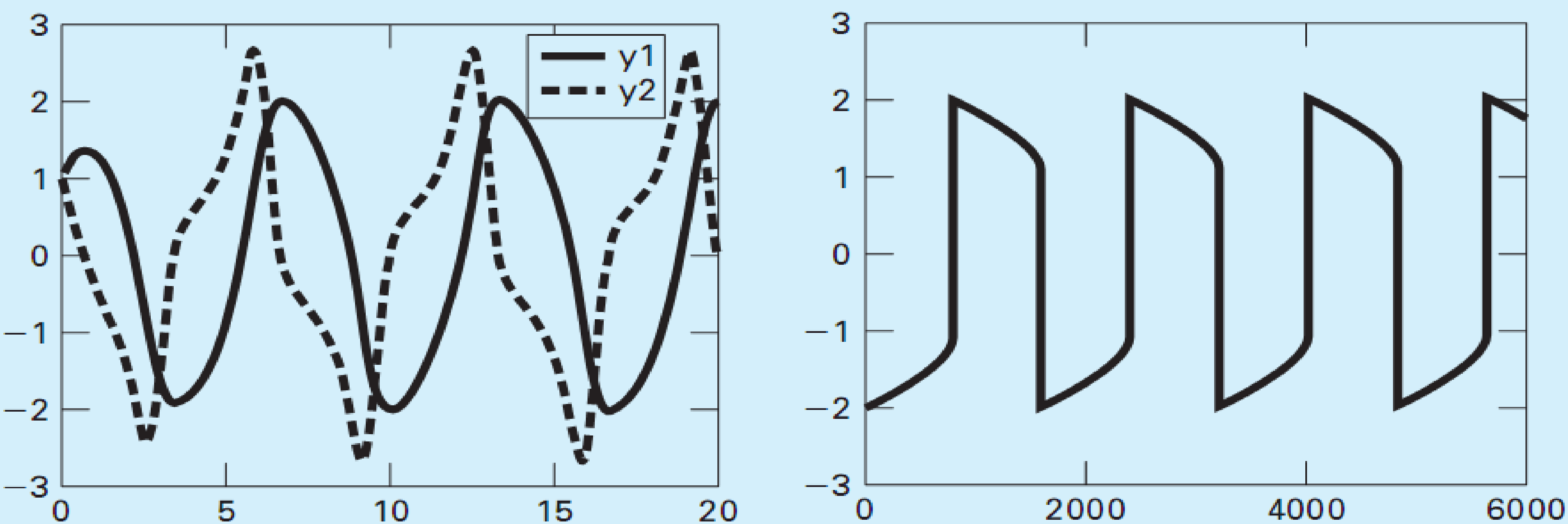
```
function yp = vanderpol(t,y,mu)
yp = [y(2);mu*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1)];
```

μ=۱

```
>> [t,y] = ode45(@vanderpol,[0 20],[1 1],[],1);
>> plot(t,y(:,1),'-',t,y(:,2),'--')
>> legend('y1','y2');
```

μ=۱۰۰۰

```
>> [t,y] = ode۴۵(@vanderpol,[۰ ۲۰],[۱ ۱],[],۱۰۰۰);
>> plot(t,y(:,۱),'-',t,y(:,۲),'--')
```



(a) m = 1

(b) m = 1000

تمرین ۱:

معادله حاکم بر یک پاندول به صورت زیر می باشد.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

در زوایای کوچک می توان معادله را بشکل زیر خطی نمود:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

با استفاده از دستور ode۴۵ و داده های زیر معادله غیرخطی را به ازاء دو مقدار اولیه داده شده حل نمائید. برای معادله خطی نیز موارد فوق را انجام داده و سپس کلیه نتایج را در یک نمودار ترسیم نمائید.

$g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ $\quad$ $l = 0.6\ \mathrm{m}$

الف) حالت اولیه ۱: $\theta = \pi/8$ and $d\theta/dt = 0$

ب) حالت اولیه ۲: $\theta = \pi/2$ $\quad$ $d\theta/dt = 0$

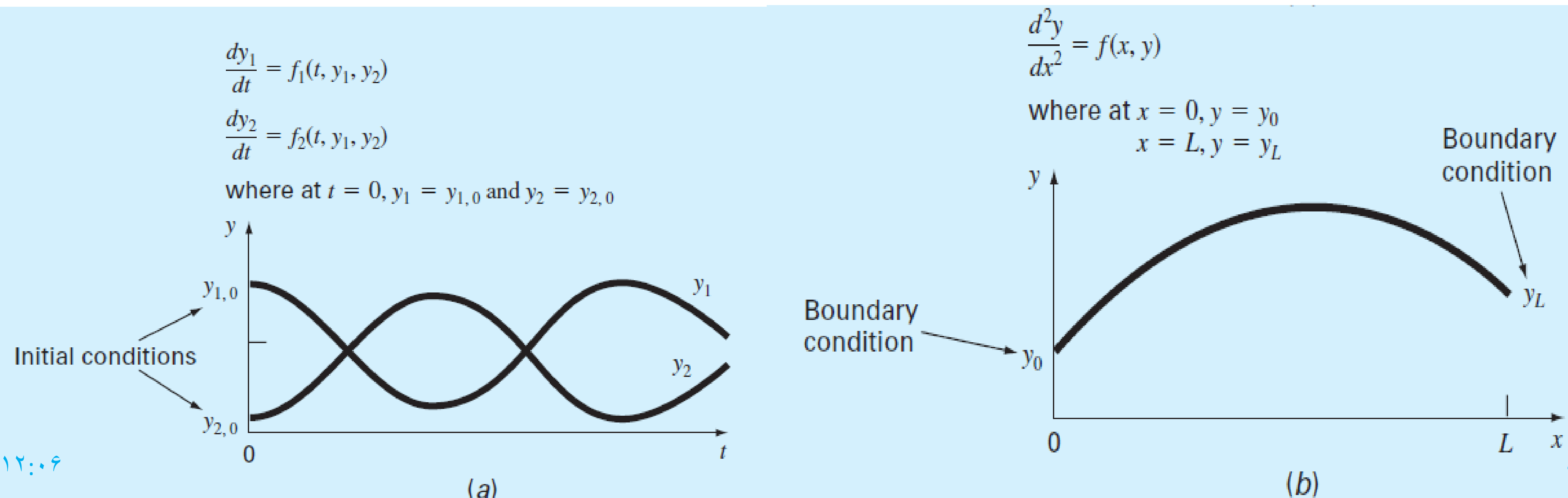
24 فصل ۲۴

Boundary-Value Problems

مسائل مقدار مرزی

تعریف مسائل مقدار مرزی

همانگونه که اشاره گردید، برای حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه n به n شرط کمکی نیاز است. در صورتیکه این شرایط در نقاط مختلف داده شده باشد، به این نوع مسئله، مسئله مقدار مرزی گویند، زیرا شرط ها معمولا در مرزهای ناحیه حل داده می شود.



یکی از روشها حل مسائل شرایط مرزی استفاده از روش شوت کردن میباشد. در این روش ابتدا معادله دیفرانسیل مرتبه n را به nمعادله دیفرانسیل مرتبه ۱ تبدیل می کنیم.

سپس با فرض شرایط اولیه برای این n معادله، مسئله در ناحیه مورد نظر حل می شود. در پایان حل مسئله چک می کنیم آیا شرایط مرزی انتهایی برآورده شده است یا خیر.

درصورتیکه شرایط مرزی در انتهای بازه حل برآورده شود پاسخ حاصل جواب مسئله خواهد بود.

در غیر اینصورت می بایست با فرض شرایط اولیه جدید، مسئله را مجددا حل نمود تا نهایتا شرایط مرزی مسئله برآورده گردد.

برای معادلات دیفرانسیل خطی می توان از میان یابی استفاده نمود. بدین ترتیب که با دو بار حدس اولیه، دو مقدار برای شرط مرزی انتهای بازه بدست می آید. سپس می توان از رابطه زیر حدس اولیه صحیح را محاسبه نمود.

$$z_a = z_{a1} + \frac{z_{a2} - z_{a1}}{T_{b2} - T_{b1}}(T_b - T_{b1})$$

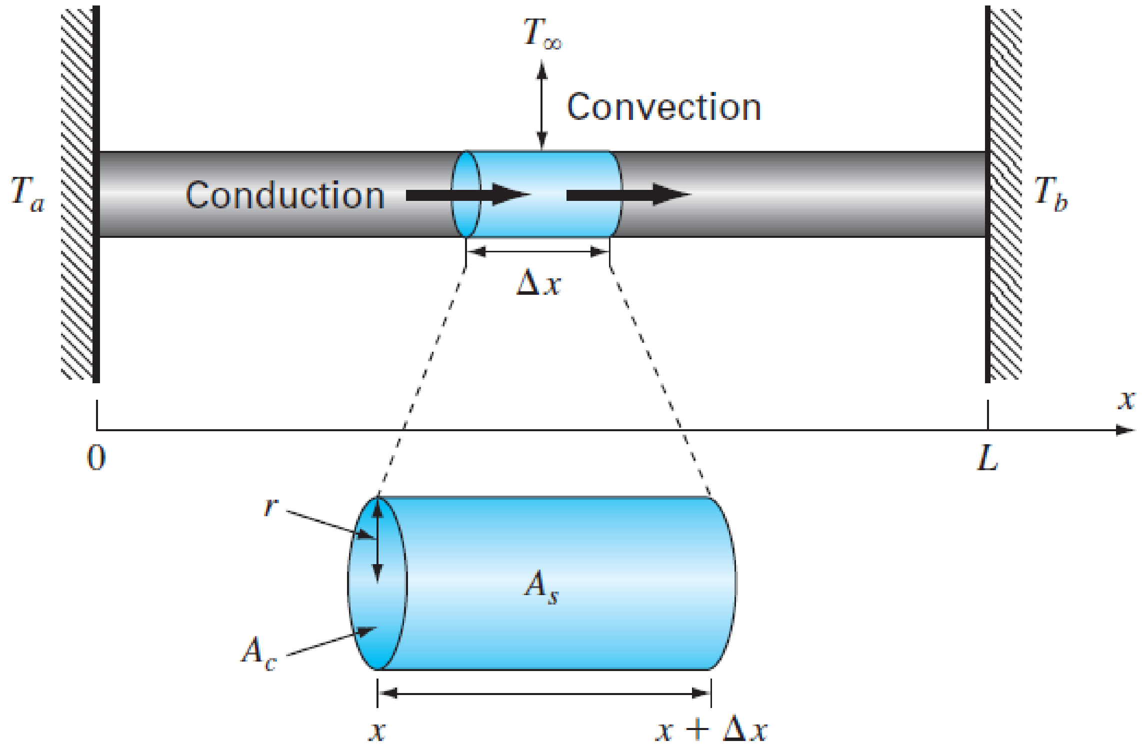
مثال:

معادله دیفرانسیل حاکم بر توزیع دما در یک میله با انتقال حرارت جابجایی و هدایتی بصورت زیر می باشد.

$$0 = \frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_\infty - T)$$

$$T(0) = T_a$$
$$T(L) = T_b$$

که در آن h' ضریب انتقال حرارت حجمی است.



حل تحلیلی

ابتدا از روش تحلیلی معادله مذکور برای شرایط زیر حل می شود:

$$0 = \frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_\infty - T)$$

$T(0) = 300\ \mathrm{K}$ $\quad T(10) = 400\ \mathrm{K}$

$T_\infty = 200\ \mathrm{K}$ $\quad h' = 0.05\ \mathrm{m}^{-2}$

$L = 10\ \mathrm{m}$

معادله به فرم روبرو تبدیل می شود:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - h'T = -h'T_\infty$$

رابطه سمت چپ تساوی یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ با ضرایب ثابت است که دارای پاسخ $T = e^{\lambda x}$ می باشد. با جایگذاری در معادله:

$$T = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} \qquad \lambda^2 e^{\lambda x} - h'e^{\lambda x} = 0 \qquad \lambda = \pm\sqrt{h'}$$

پاسخ خصوصی معادله نیز به فرم $T = T_\infty$ است بنابراین پاسخ کلی:

$$T = T_\infty + Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$$

حل تحلیلی

با اعمال شرایط مرزی مسئله می توان مجهولات AوB را بدست آورد.

$$T = T_\infty + Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$$

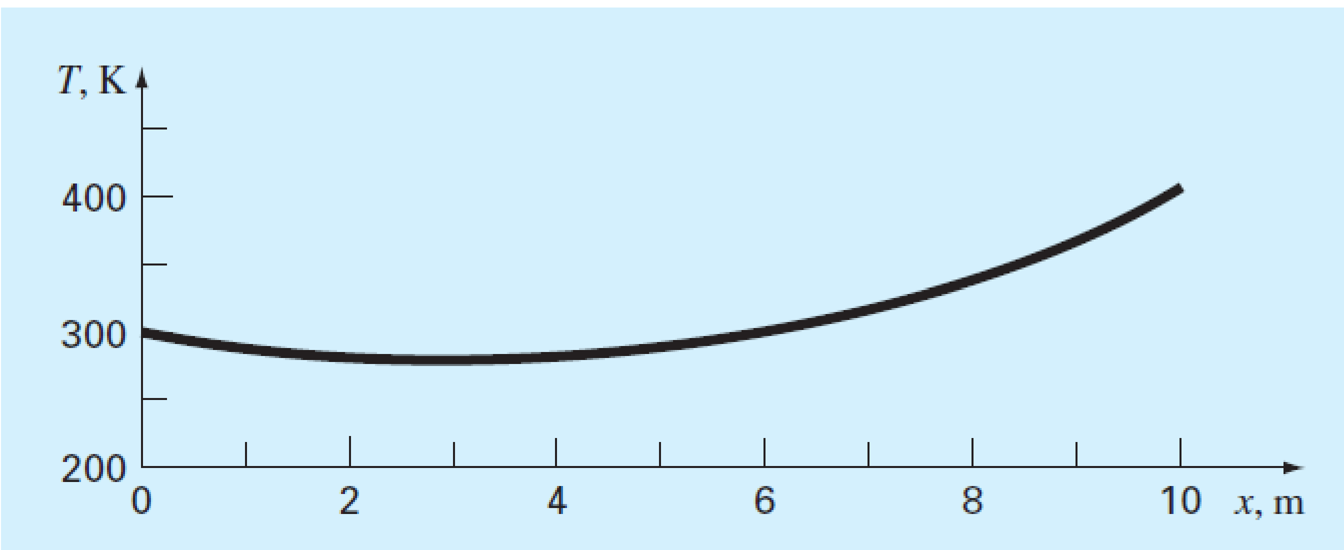
$$T(0) = 300 \text{ K} \qquad T(10) = 400 \text{ K}$$

$$T_a = T_\infty + A + B$$
$$T_b = T_\infty + Ae^{\lambda L} + Be^{-\lambda L}$$

$$A = \frac{(T_a - T_\infty)e^{-\lambda L} - (T_b - T_\infty)}{e^{-\lambda L} - e^{\lambda L}}$$

$$B = \frac{(T_b - T_\infty) - (T_a - T_\infty)e^{\lambda L}}{e^{-\lambda L} - e^{\lambda L}}$$

$$T = 200 + 20.4671e^{\sqrt{0.05}x} + 79.5329e^{-\sqrt{0.05}x}$$



حل به روش شوت کردن

ابتدا با تعریف $\frac{dT}{dx} = z$ معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ را به دو معادله دیفرانسیل مرتبه ۱ تبدیل می نمائیم.

$$0 = \frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_\infty - T)$$

$$T(0) = T_a$$

$$T(L) = T_b$$

$$\frac{dT}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = -0.05(200 - T)$$

مقدار دما در نقطه شروع معلوم است. $T(0) = T_a$

نرخ تغییرات دما را نیز در نقطه شروع حدس می زنیم. $z_{a1} = -5$ K/m

با این حدس می توان معادلات را با روش های مربوط به مسائل مقدار اولیه حل نموده و مقدار دما در نقطه انتهایی را بدست آورد.

به عنوان نمونه برای حل مسئله مقدار اولیه ایجاد شده از دستور ode۴۵ متلب استفاده می شود.

```
function dy=Ex2402(x,y)
dy=[y(2);-0.05*(200-y(1))];
```

```
>> [t,y]=ode45(@Ex2402,[0 10],[300,-5]);
>> Tb1=y(length(y))

Tb1 =
  569.7539
```

بنابراین

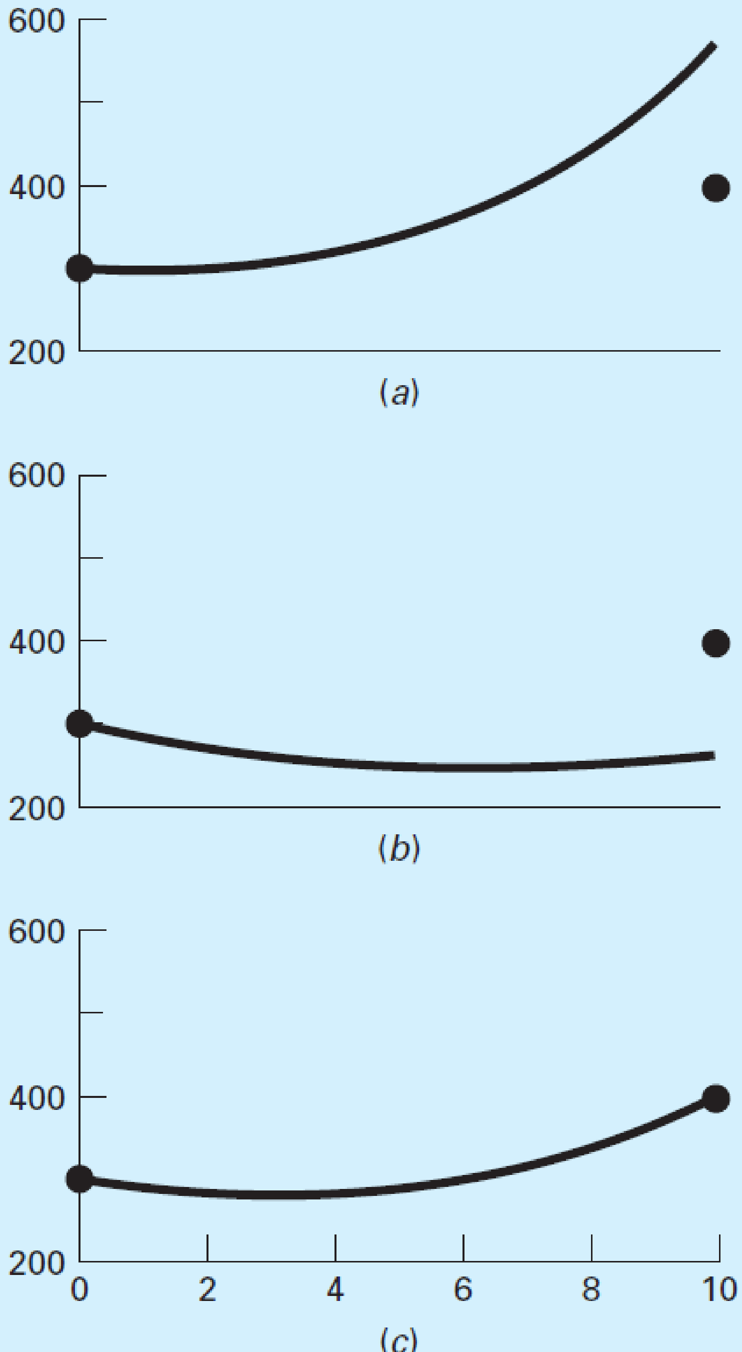
$$z_{a1} = -5 \text{ K/m} \Rightarrow T_{b1} = 569.7539$$

از آنجا که دمای بدست آمده از دمای مطلوب $T_b = 400$ بزرگتر است مقدار شیب نقطه ابتدایی را کاهش داده و حدس اولیه بصورت زیر فرض می شود.

$$z_{a2} = -20 \Rightarrow T_{b2} = 259.5131$$

سپس با یک میانیابی خواهیم داشت:

$$z_a = -5 + \frac{-20-(-5)}{259.5131-569.7539}(400-569.7539) = -13.2075$$



$$z_{a1} = -5 \text{ K/m} \Rightarrow T_{b1} = 569.7539$$

$$z_{a2} = -20 \Rightarrow T_{b2} = 259.5131$$

$$z_a = -5 + \frac{-20 - (-5)}{259.5131 - 569.7539}(400 - 569.7539) = -13.2075$$

24.2.1 Derivative Boundary Conditions

شرط مرزی مشتقی

در مثال قبل شرایط مرزی بصورت مقدار تابع داده شده بود که به آن شرط مرزی ثابت یا دیریکله گویند. fixed or *Dirichlet boundary condition*

نوع دیگر شرط مرزی بر حسب مشتق تابع بیان می شود که شرط مرزی نیومن نام دارد. *Neumann boundary condition.*

از آنجا که در روش شوت کردن مقدار تابع و مشتق آن در معادلات ظاهر می شود، اعمال این نوع شرط مرزی در روش شوت کردن بسیار ساده خواهد بود.

نحوه اعمال شرط مرزی نیومن در مثال بعد تشریح می شود.

مثال

میله مثال قبل را در نظر بگیرید که بجای دمای ثابت در ابتدا، دارای انتقال حرارت جابجایی می باشد.

$$\frac{dT}{dx} = z$$

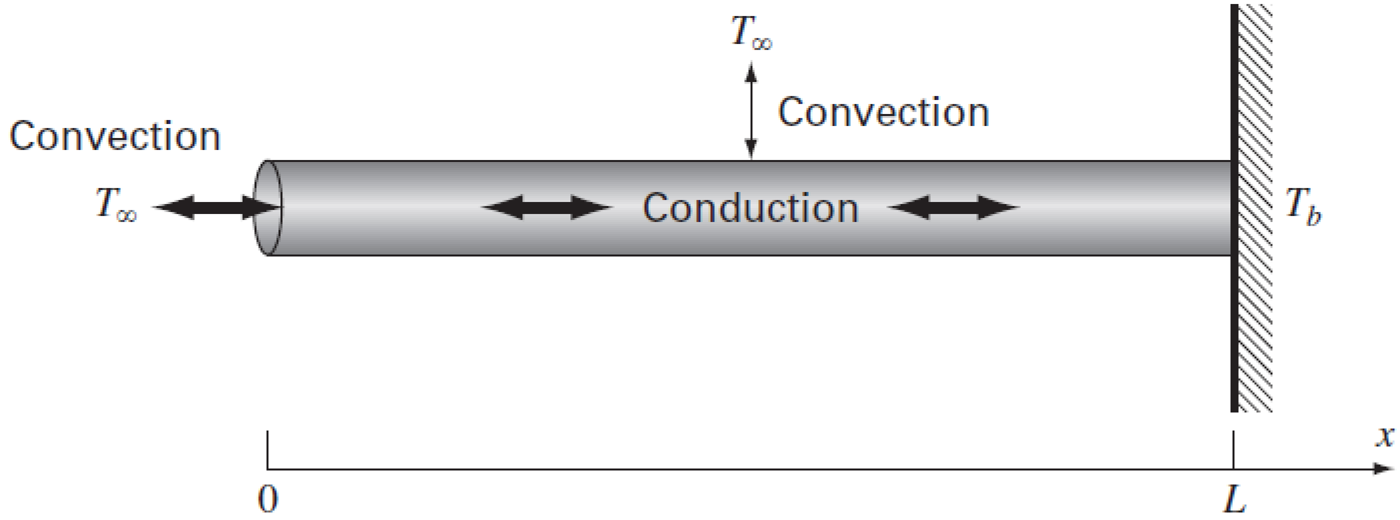
$$L = 10\ \text{m},\ h' = 0.05\ \text{m}^{-2}$$

$$\frac{dz}{dx} = -0.05(200 - T)$$

$$T_\infty = 200\ \text{K, and } T(10) = 400\ \text{K}$$

شرط مرزی نقطه شروع از تعادل انرژی به صورت زیر در می آید:

$$hA_c(T_\infty - T(0)) = -kA_c\frac{dT}{dx}(0) \Rightarrow \frac{dT}{dx}(0) = \frac{h}{k}(T(0) - T_\infty)$$



با حدس دمایی برای نقطه شروع، با استفاده از معادله بدست آمده از انتقال حرارت جابجایی در ابتدای میله می توان مقدار مشتق را در نقطه شروع بدست آورد:

$$\frac{dT}{dx}(0) = \frac{h}{k}(T(0) - T_\infty) \quad \boxed{T(0) = T_{a1} = 300\ \mathrm{K}} \Rightarrow z_{a1} = \frac{dT}{dx}(0) = \frac{1}{200}(300 - 200) = 0.5$$

با داشتن مقدار تابع و مشتق آن و استفاده از دستور ode۴۵ می توان مقدار دمای انتهای میله را محاسبه و با مقدار مطلوب مقایسه نمود.

```
>> [t,y]=ode45(@Ex2402,[0 10],[300,0.5]);
>> Tb1=y(length(y))

Tb1  =
   683.5088
```

$$\boxed{T(0) = T_{a1} = 300\ \mathrm{K}} \Rightarrow T_{b1} = 683.5088\ \mathrm{K} \neq T_b = 400$$

مجددا دمای میله را حدس می زنیم:

$T_{a2} = 150\ \mathrm{K}$ ⇒ $z_{a2} = -0.25$ ⇒ Tb2 = −41.7544

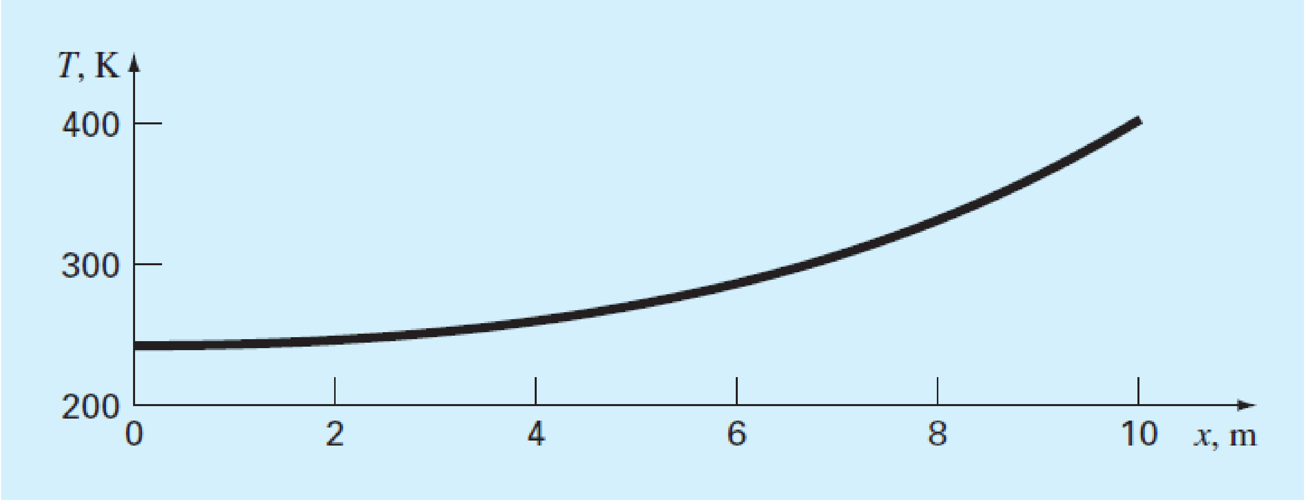
سپس با میانیابی خواهیم داشت:

$$T_a = 300 + \frac{150 - 300}{-41.7544 - 683.5088}(400 - 683.5088) = 241.3643\ \mathrm{K} \Rightarrow z_a = 0.2068$$

و می توان چک نمود آیا شرط مرزی مشتقی در ابتدای میله برآورده می شود یا خیر:

$$1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^2 K\ s}}\pi \times (0.2\ \mathrm{m})^2 \times (200\ \mathrm{K} - 241.3643\ \mathrm{K}) = -200\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\ K\ s}}\pi \times (0.2\ \mathrm{m})^2 \times 0.2068\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$$

$$-5.1980\ \mathrm{J/s} = -5.1980\ \mathrm{J/s}.$$



همانگونه که پیشتر اشاره شد، برای ODEهای خطی دو حدس اولیه و سپس استفاده از میان یابی به جواب دقیق منجر می شود. در حالیکه برای ODEهای غیرخطی دو حدس اولیه کفایت نمی کند. می توان از سه حدس اولیه استفاده نموده و با نتایج حاصل و یک میان یابی غیرخطی مرتبه ۲ به جواب واقعی نزدیک شد.

روش دیگر، بیان مسئله به فرم ریشه یابی است.

در مسئله انتقال حرارت میله، با حدس اولیه مقدار مشتق نقطه شروع و انتگرال گیری، مقدار دمای نقطه انتهایی میله تخمین زده می شد. بنابراین انتگرال گیری و حل این مسئله در واقع تابعی به فرم زیر است.

$$T_b = f(z_a)$$

ما به دنبال مشتق نقطه شروعی هستیم که دمای انتهای میله به ازاء آن برابر ۴۰۰ درجه گردد.

$$\boxed{T_b = 400} \Rightarrow \quad 400 = f(z_a)$$

لذا می توان معادله قبل را به صورت زیر درآورد:

$$400 = f(z_a) \quad \Longrightarrow \quad res(z_a) = f(z_a) - 400$$

درصورتیکه مقدار باقیمانده $res(z_a)$ صفر گردد، z_a همان پاسخ مورد نظر خواهد بود. پس مسئله به یک مسئله ریشه یابی تبدیل می شود.

این روش در مثال بعدی تشریح خواهد شد.

مثال

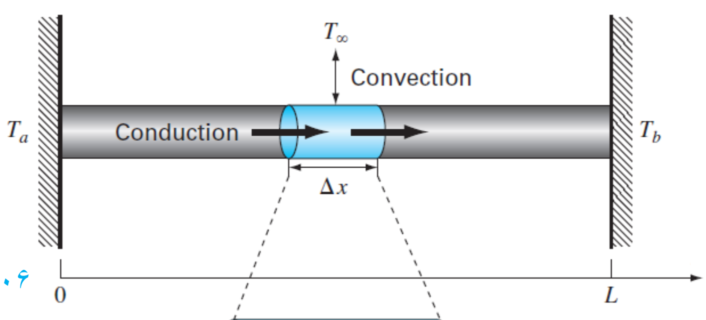
مسئله انتقال حرارت در میله مثال قبل را با درنظر گرفتن اثرات تشعشع حل نمائید.

حل: معادله حاکم بر سیستم با در نظر گرفتن تشعشع به صورت زیر در می آید که σ' وابسته به ضریب انتقال حرارت تشعشعی و هدایتی است.

$$0 = \frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_\infty - T) + \sigma'(T_\infty^4 - T^4)$$

$T_\infty = 200$ K, $T(0) = 300$ K, and $T(10) = 400$ K

$L = 10$ m, $h' = 0.05$ m^{-2}, $\sigma' = 2.7 \times 10^{-9}$ K^{-3} m^{-2}



$$\frac{dT}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = -0.05(200 - T) - 2.7 \times 10^{-9}(1.6 \times 10^9 - T^4)$$

تابع معادلات دیفرانسیل مسئله:

```
function dy=dydxn(x,y)
dy=[y(2);-0.05*(200-y(1))-2.7e-9*(1.6e9-y(1)^4)];
```

تابع باقیمانده:

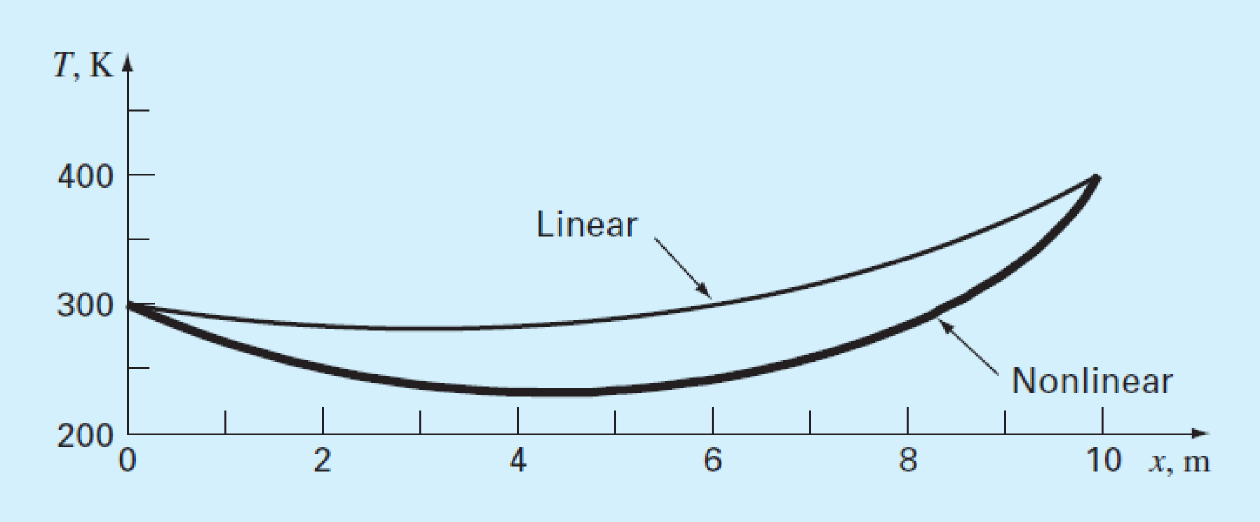
```
function r=res(za)
[x,y]=ode45(@dydxn,[0 10],[300 za]);
r=y(length(x),1)-400;
```

استفاده از ریشه یابی برای محاسبه z_a:

```
>> fzero(@res,-50)

ans =
  -41.7434
```

$\Rightarrow z(0) = -41.7434 \Rightarrow T(10) = 400$



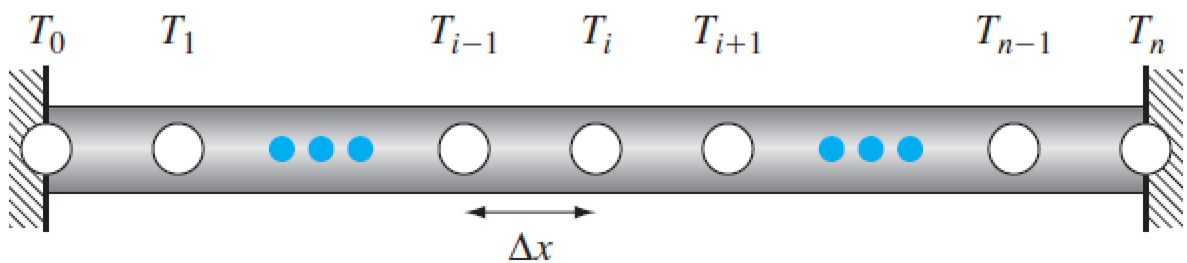
رایج ترین روش حل مسائل مقدار مرزی استفاده از روشهای تفاضل محدود است که در آن مشتقات با تقریب های تفاضلی جایگزین می شوند.

با اینکار معادله دیفرانسیل خطی به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می شود. دستگاه حاصل را می توان با یکی از روشهای حل دستگاه خطی حل نمود.

مثال

مسئله انتقال حرارت در میله را با استفاده از روش تفاضل محدود حل نمائید.

حل: برای بیان مشتق بصورت تفاضل محدود ابتدا تعدادی نقطه (گره) در طول میله در نظر می گیریم:



با استفاده از تقریب مرکزی زیر برای مشتق دوم داریم:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2T}{dx^2} &= \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} \\ 0 &= \frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_\infty - T) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} + h'(T_\infty - T_i) = 0 \Rightarrow$$

برای کلیه نقاط داخلی:

$$-T_{i-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_i - T_{i+1} = h'\Delta x^2 T_\infty$$

به عنوان مثال با فرض $\Delta x = 2\text{ m}$ معادله برای گره اول عبارتست از:

$$-T_0 + 2.2T_1 - T_2 = 40 \xrightarrow{\boxed{T_0 = 300}} 2.2T_1 - T_2 = 340$$

با نوشتن معادلات بقیه گره ها

دستگاه زیر حاصل می شود:

$$\begin{bmatrix} 2.2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 340 \\ 40 \\ 40 \\ 440 \end{Bmatrix}$$

با حل دستگاه

```
>> A=[2.2 -1 0 0;
-1 2.2 -1 0;
0 -1 2.2 -1;
0 0 -1 2.2];
>> b=[340 40 40 440]';
>> T=A\b

T =
  283.2660
  283.1853
  299.7416
  336.2462
```

مقایسه نتایج سه روش :

x	Analytical Solution	Shooting Method	Finite Difference
0	300	300	300
2	282.8634	282.8889	283.2660
4	282.5775	282.6158	283.1853
6	299.0843	299.1254	299.7416
8	335.7404	335.7718	336.2462
10	400	400	400

24.3.1 Derivative Boundary Conditions

شرط مرزی مشتقی

فرض کنید می خواهیم توزیع دمای یک میله را تحت شرایط مرزی زیر بدست آوریم:

$$0 = \frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_\infty - T)$$

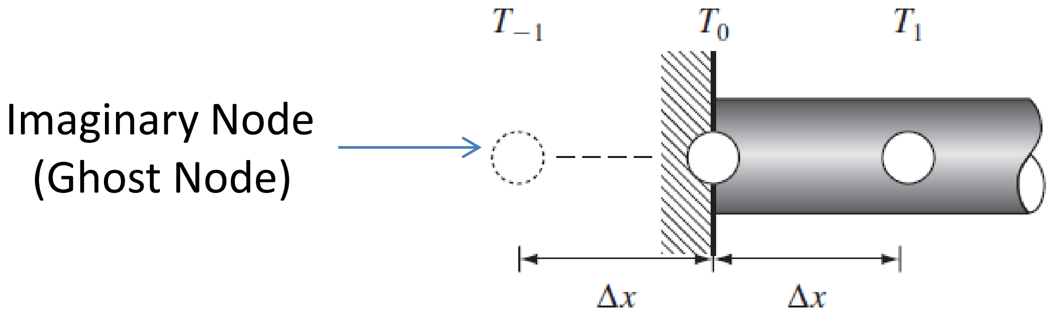
$$\frac{dT}{dx}(0) = T'_a$$

$$T(L) = T_b$$

مجددا مسئله با انتخاب تعدادی گره در طول میله و استفاده از تفاضل محدود گسسته سازی می شود. اما در این حالت، مقدار T_0 داده نشده است. بنابراین معادله مربوط به گره مرزی بصورت زیر خواهد بود:

$$-T_{-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_0 - T_1 = h'\Delta x^2 T_\infty$$

T_{-1} نقطه ای خارج از میله است که به آن گره مجازی گویند.



با استفاده از شرط مرزی مشتق در نقطه شروع می توان نوشت:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_1 - T_{-1}}{2\Delta x} \quad \Rightarrow \quad T_{-1} = T_1 - 2\Delta x \frac{dT}{dx}$$

با جایگذاری در معادله گره مرزی (شماره صفر) خواهیم داشت:

$$-T_{-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_0 - T_1 = h'\Delta x^2 T_\infty \quad \Rightarrow$$

$$\underbrace{(2 + h'\Delta x^2)T_0 - 2T_1}_{\text{مقادیر مجهول}} = \underbrace{h'\Delta x^2 T_\infty - 2\Delta x \frac{dT}{dx}}_{\text{مقادیر معلوم}}$$

مثال

مسئله توزیع دما در میله را به ازاء دو مقدار صفر و ۲۰- برای مشتق نقطه ابتدا با روش تفاضل محدود حل نمائید.

$$0 = \frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_\infty - T)$$

$\Delta x = 2\ \text{m},\ h' = 0.05\ \text{m}^{-2},\ T_\infty = 200\ \text{K}$ $\qquad T_b = 400\ \text{K}$

حل: الف) ابتدا حالت روبرو را در نظر می گیریم: $\quad T'_a = 0$

با استفاده از معادله گره مرزی و مشتق آن داریم:

$$(2 + h'\Delta x^2)T_0 - 2T_1 = h'\Delta x^2 T_\infty - 2\Delta x \frac{dT}{dx} \Rightarrow 2.2T_0 - 2T_1 = 40$$

$$\begin{bmatrix} 2.2 & -2 & & & \\ -1 & 2.2 & -1 & & \\ & -1 & 2.2 & -1 & \\ & & -1 & 2.2 & -1 \\ & & & -1 & 2.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 440 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} T_0 &= 243.0278 \\ T_1 &= 247.3306 \\ T_2 &= 261.0994 \\ T_3 &= 287.0882 \\ T_4 &= 330.4946 \end{aligned}$$

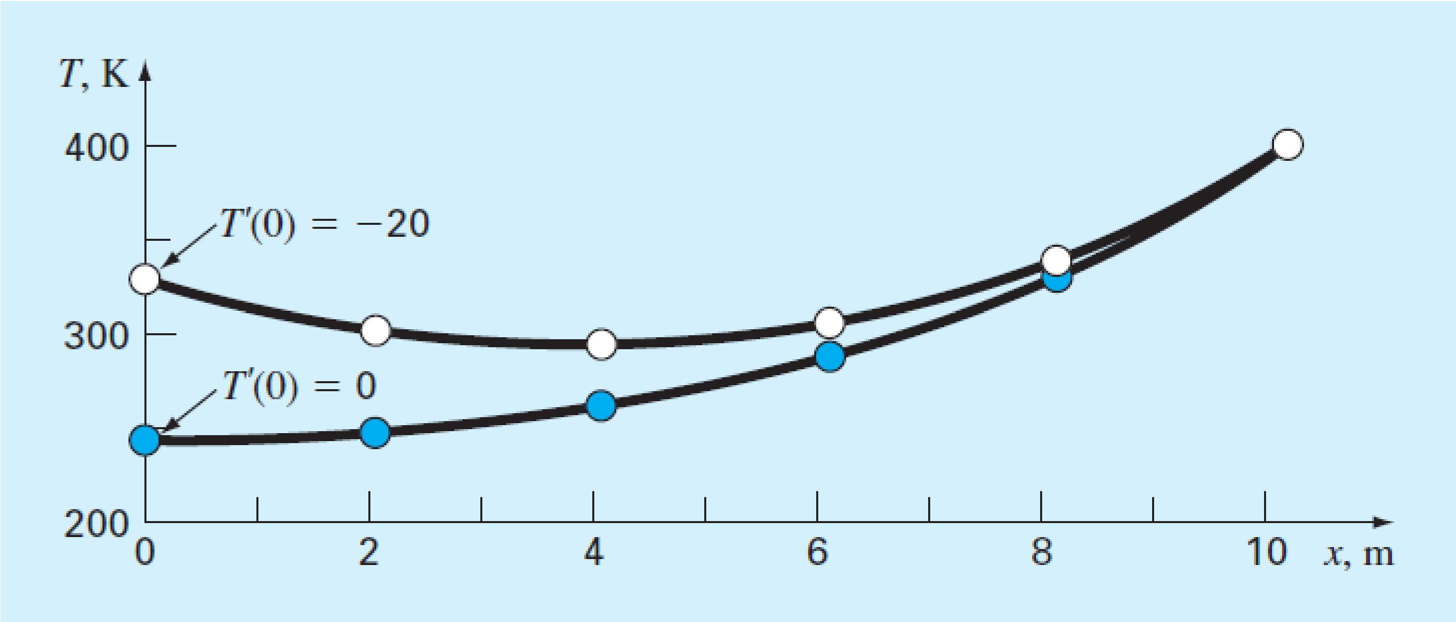
ب) حالتی که در آن مشتق نقطه شروع ۲۰- است:

$$dT/dx = -20 \text{ at } x = 0$$

$$(2 + h'\Delta x^2)T_0 - 2T_1 = h'\Delta x^2 T_\infty - 2\Delta x \frac{dT}{dx}$$

$$\begin{bmatrix} 2.2 & -2 & & & \\ -1 & 2.2 & -1 & & \\ & -1 & 2.2 & -1 & \\ & & -1 & 2.2 & -1 \\ & & & -1 & 2.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 120 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 440 \end{Bmatrix}$$

$T_0 = 328.2710$
$T_1 = 301.0981$
$T_2 = 294.1448$
$T_3 = 306.0204$
$T_4 = 339.1002$



مشابه معادلات خطی، معادله دیفرانسیل غیرخطی مورد نظر ابتدا با فرض تعدادی گره گسسته سازی می شود. سپس قسمت های خطی و غیرخطی در معادله جبری حاصل از هم جدا می شود.

به عنوان مثال معادله دیفرانسیل توزیع دما در میله با در نظر گرفتن تشعشع به فرم زیر می باشد.

$$0 = \frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_\infty - T) + \sigma''(T_\infty^4 - T^4)$$

با گسسته سازی خواهیم داشت:

$$0 = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} + h'(T_\infty - T_i) + \sigma''(T_\infty^4 - T_i^4)$$

با جدا سازی قسمت های خطی و غیر خطی فرم زیر حاصل می شود:

$$-T_{i-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_i - T_{i+1} = h'\Delta x^2 T_\infty + \sigma''\Delta x^2(T_\infty^4 - T_i^4)$$

ماتریس ضرایب قسمت خطی مسلط قطری است و می توان از روشهای تکراری مانند گاوس-سایدل استفاده نمود.

بنابراین می توان درایه روی قطر اصلی را به صورت زیر برحسب بقیه جملات بدست آورد:

$$T_i = \frac{h' \Delta x^2 T_\infty + \sigma'' \Delta x^2 \left(T_\infty^4 - T_i^4\right) + T_{i-1} + T_{i+1}}{2 + h' \Delta x^2}$$

با حدس مقادیر جملات سمت راست می توان مقدار جدید T_i را محاسبه نموده و با ادامه روند تکراری به پاسخ مسئله دست یافت.

این روش در مثال بعد تشریح خواهد شد.

مثال

معادله توزیع دما دریک میله دارای انتقال حرارت تشعشعی را به روش تفاضل محدود حل نمائید.

$$0 = \frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_\infty - T) + \sigma'(T_\infty^4 - T^4)$$

$$h' = 0.05\ \mathrm{m}^{-2},\ T_\infty = 200\ \mathrm{K},\ T(0) = 300\ \mathrm{K},$$
$$\sigma' = 2.7 \times 10^{-9}\ \mathrm{K}^{-3}\mathrm{m}^{-2},\ L = 10\ \mathrm{m},$$
$$T(10) = 400\ \mathrm{K}$$

حل: معادله حاکم بر یک مقطع داخلی در این مسئله به صورت زیر بدست آمد:

$$-T_{i-1} + (2 + h'\Delta x^2)T_i - T_{i+1} = h'\Delta x^2 T_\infty + \sigma'\Delta x^2\left(T_\infty^4 - T_i^4\right)$$

با محاسبه دمای گره i بر حسب بقیه جملات داریم:

$$T_i = \frac{h'\Delta x^2 T_\infty + \sigma'\Delta x^2\left(T_\infty^4 - T_i^4\right) + T_{i-1} + T_{i+1}}{2 + h'\Delta x^2}$$

$$T_i = \frac{h'\Delta x^2 T_\infty + \sigma''\Delta x^2 (T_\infty^4 - T_i^4) + T_{i-1} + T_{i+1}}{2 + h'\Delta x^2}$$

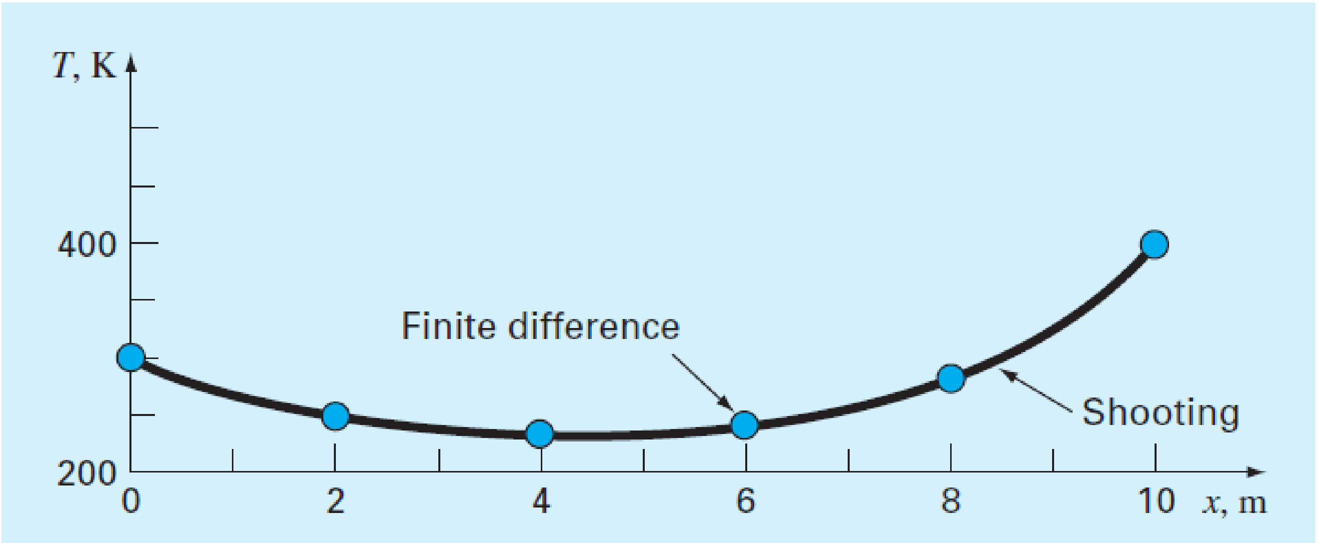
دماهای مرحله اول با استفاده از معادله فوق و فرض مقدار صفر برای نقاط میانی:

$$T_1 = \frac{0.05(2)^2\,200 + 2.7 \times 10^{-9\prime}(2)^2(200^4 - 0^4) + 300 + 0}{2 + 0.05(2)^2} = 159.2432$$

$$T_2 = \frac{0.05(2)^2\,200 + 2.7 \times 10^{-9\prime}(2)^2(200^4 - 0^4) + 159.2432 + 0}{2 + 0.05(2)^2} = 97.9674$$

$$T_3 = \frac{0.05(2)^2\,200 + 2.7 \times 10^{-9\prime}(2)^2(200^4 - 0^4) + 97.9674 + 0}{2 + 0.05(2)^2} = 70.4461$$

$$T_4 = \frac{0.05(2)^2\,200 + 2.7 \times 10^{-9\prime}(2)^2(200^4 - 0^4) + 70.4461 + 400}{2 + 0.05(2)^2} = 226.8704$$



تمرین ۱

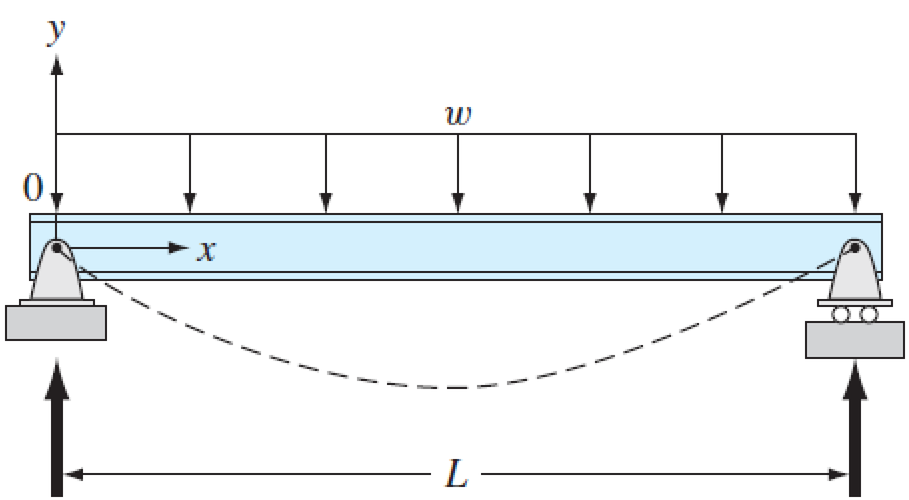
از روش تفاضل محدود برای حل معادله حاکم بر خیز تیر نشان داده شده استفاده نمائید:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} \qquad y(0) = y(L) = 0$$

$E = 200$ GPa, $I = 30{,}000$ cm^4, $w = 15$ kN/m, and $L = 3$ m $\qquad (\Delta x = 0.6$ m$)$

سپس پاسخ خود را با جواب دقیق زیر مقایسه نمائید.

$$y = \frac{wLx^3}{12EI} - \frac{wx^4}{24EI} - \frac{wL^3x}{24EI}$$



تمرین۲

معادله دیفرانسیل و توزیع بار گسترده وارد بر یک کابل مطابق روابط زیر است:

$$w = w_o\left[1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2l_A}\right)\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w_o}{T_o}\left[1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2l_A}\right)\right]$$

با استفاده از مقادیر داده شده و روشی مشابه شوت کردن، از مقادیر مختلف T، شروع کرده تا به ارتفاع مطلوب در نقطه A برسید.

$(dy/dx) = 0$ at $x = 0$, $\qquad w_o = 450$ N/m