$$\to r(r-1)a_0x^r + ra_0x^r - \nu^2 a_0 x^r + (1+r)ra_1x^{1+r} + (1+r)a_1x^{1+r}$$

$$-\nu^2 a_1 x^{1+r} + \sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[(k+r)(k+r-1)+(k+r)-\nu^2\right]a_k + a_{k-2}\right\}x^{k+r} = 0$$

$$x^r : \left(r^2 - r + r - \nu^2\right)a_0 = 0 \qquad \begin{cases} r_1 = \nu \\ r_2 = -\nu \end{cases}$$

با انتخاب $r = r_1 = \nu$ مسئله را حل می‌کنیم:

$$x^{1+r} = x^{1+\nu} : \left[(1+\nu)\nu + \underbrace{1+\nu}_{-\nu^2}\right]a_1 = 0 \to (2\nu+1)a_1 = 0 \xrightarrow{\nu \neq -\frac{1}{2}} \boxed{a_1 = 0}$$

$$\to \sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[\underbrace{\underbrace{(k+\nu)(k+\nu-1)+(k+\nu)}_{\substack{(k+\nu)[k+\nu+1-1] \\ (k+\nu)^2}}-\nu^2}_{k^2+2k\nu}\right]a_k + a_{k-2}\right\}x^{k+r} = 0$$

$$\to a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)} \qquad k=2 \to a_2 = \frac{-a_0}{2(2+2\nu)} = -\frac{a_0}{(2)^2(1+\nu)}$$

جملات دارای اندیس فرد همگی صفر می‌شوند $\leftarrow$ $k=3 \to a_3 = 0$

$$k=4 \to a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2\nu)} = \frac{a_0}{2^4\cdot 2(1+\nu)(2+\nu)}$$

$$k=6 \to a_6 = -\frac{a_4}{6(6+2\nu)} = -\frac{a_0}{2^6\cdot 2\cdot 3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}$$

$$k=8 \rightarrow a_8 = -\frac{a_6}{8(8+2\nu)} = \frac{a_0}{2^8\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)(4+\nu)}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0 \times 2^{\nu}}{2^{2m+\nu}\cdot m!\,(1+\nu)(2+\nu)\cdots(m+\nu)}}$$

اگر ν عدد صحیح مثبتی باشد: از انتگرال بوسیله تابع گاما (گاما) داریم:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

برای $x>0$ همگراست

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} \underset{dv}{e^{-t}}\, \overset{u}{t^{x}}\, dt = -e^{-t} t^{x}\Big|_0^{\infty} + x\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

$$\Rightarrow \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

$\Gamma(x)$ در $x=0$ تعریف نمی‌شود

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = \_\_\_$$

در $x=0$، $x=-1$ تعریف نمی‌شود

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+3)}{x(x+1)(x+2)}$$

$$\vdots$$

m عدد صحیح مثبت

$$\Rightarrow \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+m)}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}$$

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x!}$$

در صورتی که x عدد صحیح مثبتی باشد:

$$\rightarrow a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0 \cdot 2^\nu \cdot \Gamma(1+\nu)}{2^{2m+\nu} \cdot m! \times \Gamma(1+\nu)\,(1+\nu)(2+\nu)\cdots(m+\nu)}$$

$$\rightarrow a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0\, 2^\nu\, \Gamma(1+\nu)}{2^{2m+\nu}\, m!\, \Gamma(m+\nu+1)}$$

a_0 ضریب اختیاری است و آنطوری انتخاب می‌کنیم

$$a_0 \Gamma(1+\nu) 2^\nu = 1$$

$$\rightarrow a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m+\nu}\, m!\, \Gamma(m+\nu+1)}$$

$$\rightarrow y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\nu} \rightarrow y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+\nu}$$

تابع بسل نوع اول از مرتبه ν $=$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\, \Gamma(k+\nu+1)} = J_\nu(x)}$$

برای $r_2 = -\nu$ به همین ترتیب داریم:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}}{m!\, \Gamma(m-\nu+1)}$$

$$\nu \notin \mathbb{Z} \longrightarrow y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

اگر فرض کنیم $\nu \notin \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} c_1 = \cot \nu\pi \\ c_2 = -\csc \nu\pi \end{cases}$$

$$\longrightarrow y(x) = \frac{\cos \nu\pi \, J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

ولی اگر $\nu \in Z$ داریم: $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$ (J_ν و $J_{-\nu}$ استقلال خطی ندارند)

$$\longrightarrow y(x) = \frac{0}{0}$$

با استفاده از هوپیتال داریم:

جمله ها جدا می‌شود در نتیجه Y_ν را از کنار $x \to 0$ بسمت ∞ میل میکند

تابع بسل نوع دوم: $Y_\nu(x)$

$$\lim_{x \to 0} Y_\nu(x) = -\infty$$

ترکیب مختلط توابع بسل نوع اول و نوع دوم به تابع بسل نوع سوم معروف است:

تابع هنکل نوع اول $\boxed{H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i Y_\nu(x)}$

تابع هنکل نوع دوم $\boxed{H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i Y_\nu(x)}$

توابع بسل ارتباط تنگاتنگ با توابع مثلثاتی دارند:

تابع مولد توابع بسل: $e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$

Generating Function

$$e^{\frac{x}{2}t} \cdot e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{xt}{2})^k}{(k!)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\frac{x}{2t})^m}{m!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{x}{2})^{k+m}}{k!\, m!} t^{k-m}$$

$m=0$ $n=k \to \Big|^{\infty}$

$k=0$ $n=-m \Big|^{0}_{-\infty}$

اگر $k-m=n$ بنویسیم n از $-\infty$ تا $+\infty$ خواهد بود

توابع بسل

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+n)!} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}}{m!} t^n$$

اگر $t=e^{i\theta} \longrightarrow t-\frac{1}{t} = e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \Rightarrow e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, e^{in\theta}$$

$$\longrightarrow \cos(x\sin\theta) + i\sin(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\left[\cos n\theta + i\sin n\theta\right]$$

$$\begin{cases} \text{Real} = \text{Real} \\ \text{Im} = \text{Im} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \cos(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\cos n\theta & \text{I} \\ \sin(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\sin n\theta & \text{II} \end{cases}$$

به ازای $\theta=\frac{\pi}{2}$ $\quad \cos n\theta = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n=2k-1 \ (\text{فرد}) \\ \pm 1 & n=2k \ (\text{زوج}) \end{cases}$

$$\sin\frac{n\pi}{2} \begin{cases} 0 & n=2k \ (\text{زوج}) \\ \pm 1 & n=2k-1 \ (\text{فرد}) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{2n}(x)(-1)^n = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x)$$

$$\sin x = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)(-1)^{n+1}$$

$$\cos m\theta \times \cos(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\cos n\theta \times \cos m\theta \qquad \leftarrow \mathrm{I}$$

$$\sin m\theta \times \sin(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\sin n\theta \times \sin m\theta \qquad \leftarrow \mathrm{II}$$

$$① \rightarrow \int_0^{2\pi} \cos(x\sin\theta)\cos m\theta\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\int_0^{2\pi}\cos m\theta \cos n\theta\, d\theta$$

$$② \quad \int_0^{2\pi} \sin(x\sin\theta)\sin m\theta\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\int_0^{2\pi}\sin m\theta \sin n\theta\, d\theta$$

$$\star \int_0^{2\pi} \underset{\cos}{\sin m\theta}\ \underset{\cos}{\sin n\theta}\, d\theta = \pi\,\delta_{mn}$$

$$① \text{ جمع } ② \text{ و} \quad \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos[x\sin\theta - n\theta]\, d\theta = J_n(x)}$$

تعریف انتگرالی تابع بسل

$$n=0 \rightarrow J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta)\, d\theta \xrightarrow{x=0} J_0(0) = 1$$

$$J_n(0) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\geq 1 \end{cases}$$

تمامی توابع بسل به جز (n=0) از مبدأ مختصات عبور می‌کنند

$$\lim_{x\to 0} J_n(x) = 0 \qquad n\geq 1$$

$$\lim_{x\to\infty} J_n(x) = ?$$

رفتار توابع بسل وقتی $x \to \infty$

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \longrightarrow y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$$

شکل استاندارد معادله درجه دو

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f$$

برای حل این معادله $y = uv$

$$y' = u'v + uv'$$

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} u''v + 2u'v' + uv'' + p[u'v + uv'] + q(uv) = f$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب سازی}} uv'' + v'(2u' + pu) + v(u'' + pu' + qu) = f$$

اگر u یکی از جواب‌های معادله همگن باشد: $u'' + pu' + qu = 0 \longrightarrow$ روش کاهش مرتبه $v' = w$

ولی اگر u طوری انتخاب شود که ضریب v' صفر شود:

$$v'' + v\left(\frac{u'' + pu' + qu}{u}\right) = f$$

$$2u' + pu = 0 \longrightarrow 2\frac{u'}{u} + p = 0 \longrightarrow \frac{u'}{u} = -\frac{p}{2} \longrightarrow u = e^{\int -\frac{p}{2}dx}$$

معادله اصلی $p = \frac{1}{x} \longrightarrow e^{-\int \frac{p}{2}dx} = e^{\int -\frac{1}{2x}dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} y = \frac{v}{\sqrt{x}} = vx^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} y' = v'x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}vx^{-\frac{3}{2}} \\ y'' = v''x^{-\frac{1}{2}} - v'x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{-5/2}v \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}} v''x^{-\frac{1}{2}} - v'x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{-5/2}v + v'x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}vx^{-\frac{5}{2}} + vx^{-\frac{1}{2}} - n^2vx^{-\frac{5}{2}} = 0$$

$$\times x^{\frac{1}{2}} \rightarrow v'' - \cancel{v' x^{-1}} + \frac{3}{4} x^{-2} v + \cancel{v' x^{-1}} - \frac{1}{2} v x^{-2} + v - n^2 v x^{-2} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \Rightarrow v'' + \Big(\underbrace{\frac{1}{4x^2} - \frac{n^2}{x^2}}_{=0} + 1\Big) v = 0 \longrightarrow v'' + v = 0 \quad \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases}$$

← رفتار تابع بسل در ∞ شبیه دو تابع $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ خواهد بود

← در نقاطی که $\sin x$ و $\cos x$ صفر می‌شوند تابع بسل هم صفر می‌شود.

با این تفاوت که فاصله صفرهای $\sin$ و $\cos$ ثابت است اما فاصله صفرهای تابع بسل

از هم ~~[illegible]~~ کمتر و کمتر می‌شوند.

$$\begin{cases} J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} J_{\nu}(mx)\right) = ? \qquad \bigstar$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{mx}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\right] = \frac{d}{dx}\left[x^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{2k+\nu} x^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{m}{2}\right)^{2k+\nu} x^{2k+2\nu-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} (2)(k+\nu)\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[x^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{m}{2}\right)^{2k+\nu} x^{\nu+2k-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} 2(k+\nu)\right]$$

$$= \left[x^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{\dfrac{m^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu-1}} \cdot x^{\nu+2k-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu)} \right]$$

$$= m \left[x^{\nu} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{\dfrac{m^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu-1}}\, x^{\nu+2k-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu)}}_{J_{\nu-1}(mx)} \right]$$

$$= m x^{\nu} J_{\nu-1}(mx)$$

$$\int x^{\nu} J_{\nu-1}(mx) = \frac{x^{\nu}}{m} J_{\nu}(mx) + C$$

$$\int x^{3} J_{2}(x)\, dx = x^{3} J_{3}(x) + C$$

$$\int x^{5} J_{2}(x)\, dx = \int \underbrace{x^{2} \cdot x^{3} J_{2}(x)\, dx}_{\text{جزء جزء}}$$

$\int x^{p} J_{q}(x)\, dx$ قابل محاسبه است به شرطی که $p+q>0$

فرد ← به توابع بسل می‌رسیم
زوج ← به توابع بسل مرتبه صفر می‌رسیم

کتاب دانشگاه
۹۰ صفحه

Bessel Functions and Applications
300 ص Korenev

جلسه یازدهم 91/8/7

$$x^2y'' + xy' + (\beta^2x^2-\nu^2)y = 0$$

$$J_\nu(\beta x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\beta x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \qquad (*)$$

حالتی که $\frac{\beta}{2} < 0$ باشد: معادله دیفرانسیل پیراسته‌ی بسل

$$x^2y'' + xy' - (x^2+\nu^2)y = 0$$

$$x^2y'' + xy' + (i^2x^2-\nu^2)y = 0$$

جواب با استفاده از (*):

$$\to J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{ix}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$\star\ i^{2k+\nu} = i^\nu \underbrace{i^{2k}}_{(-1)^k} =$$

$$\to J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} i^\nu \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}$$

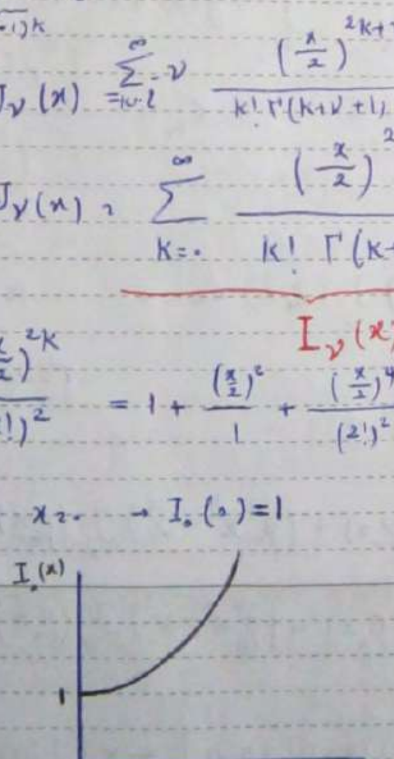
$$i^{-\nu} J_\nu(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}}_{I_\nu(x)}$$

تابع پیراسته‌ی بسل نوع اول

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} = 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \cdots$$

سری همگراست

$$x=0 \to I_0(0)=1$$



$I_0(x)$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود

صفر ندارد

تابعی را بر حسب تابع پیراسته‌ی بسل نوع اول نمی‌توان بسط داد

اگر معادله‌ای از نوع پیراسته بسل داشتیم در آن جهت شرط مرزی حتمی نمی‌توانیم داشته باشیم!

$$x^2y'' + xy' + (\beta^2x^2 - \nu^2)y = 0$$

$$\underbrace{xy'' + y'} + \left(\beta^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0$$

$$\frac{d}{dx}(xy') + \left(\beta^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0$$

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + \left(q(x) + \lambda r(x)\right)y = 0$$

مشابه با صورت کلی اشتورم لیوویل

اشتورم لیوویل نسبت

$$\begin{cases} p = x \\ r = x \\ q = -\dfrac{\nu^2}{x} \end{cases}$$

$$\int_a^b r\, y_i(x)\, y_j(x)\, dx = 0 \qquad i \neq j$$

$$\int_a^b r\, y^2(x)\, dx = N$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\, y_k(x) \quad , \quad C_k = \frac{\int_a^b r\, f(x)\, y_k(x)\, dx}{\int_a^b r\, y_k^2(x)\, dx}$$

$$\xrightarrow[\text{بسل داریم}]{\text{برای معادله}} \int_a^b x\, J_\nu(\beta_m x)\, J_\nu(\beta_n x)\, dx = 0 \qquad m \neq n$$

برای اثبات این رابطه داریم،

$$x^2y'' + xy' + (\beta^2x^2 - \nu^2)y = 0$$

$\times J_\nu(\beta_n x)$ $\quad x^2 J_\nu''(\beta_m x) + x J_\nu'(\beta_m x) + (\beta_m^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\beta_m x) = 0$ برای β_m

$\times J_\nu(\beta_m x)$ $\quad x^2 J_\nu''(\beta_n x) + x J_\nu'(\beta_n x) + (\beta_n^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\beta_n x) = 0$ برای β_n

$$\xrightarrow{①-②} x^2\left[J_\nu(\beta_n x) J_\nu''(\beta_m x) - J_\nu(\beta_m x) J_\nu''(\beta_n x)\right] + x\left[J_\nu(\beta_n x) J_\nu'(\beta_m x) - J_\nu(\beta_m x) J_\nu'(\beta_n x)\right]$$

$$\Rightarrow + x^2 (\beta_m^2 - \beta_n^2) J_\nu(\beta_m x) J_\nu(\beta_n x) = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{x[\qquad\qquad] + [\qquad\qquad]}_{} \qquad + x(\qquad) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(J_\nu(\beta_n x) J_\nu'(\beta_m x) - J_\nu(\beta_m x) J_\nu'(\beta_n x)\right)\right] = (\beta_n^2 - \beta_m^2)\, x\, J_\nu(\beta_n x) J_\nu(\beta_m x)$$

از طرفین این رابطه در بازه $[a,b]$ نسبت به x انتگرال می‌گیریم.

$$(**)\quad \Big[x\big(J_\nu(\beta_n x) J_\nu'(\beta_m x) - J_\nu(\beta_m x) J_\nu'(\beta_n x)\big)\Big]_a^b = (\beta_n^2 - \beta_m^2)\int_a^b x\, J_\nu(\beta_n x) J_\nu(\beta_m x)\, dx$$

شرط مرزی
I
نوع اول

$$\begin{aligned} x=a \\ x=b \end{aligned} \;\rightarrow\; \begin{aligned} &J_\nu(\beta_m a) = 0 \qquad J_\nu(\beta_m b) = 0 \\ &J_\nu(\beta_n a) = 0 \qquad J_\nu(\beta_n b) = 0 \end{aligned}$$

سمت چپ $= 0$

شرط مرزی
II
نوع دوم

$$\begin{aligned} &J_\nu'(\beta_m a) = 0 \qquad J_\nu'(\beta_m b) = 0 \\ &J_\nu'(\beta_n a) = 0 \qquad J_\nu'(\beta_n b) = 0 \end{aligned}$$

سمت چپ $= 0$

شرط مرزی عمومی در انتقال حرارت

شرط مرزی
III
نوع سوم

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \rightarrow y(a) + H_1 y'(a) = 0$$

$$y(b) + H_2 y'(b) = 0$$

$$-J_\nu(\beta_m a) + H_1 J_\nu'(\beta_m a) = 0 \quad (1) \qquad , \qquad J_\nu(\beta_n a) + H_1 J_\nu'(\beta_n a) = 0$$

$$J_\nu(\beta_m b) + H_2 J_\nu'(\beta_m b) = 0 \quad (2) \qquad\qquad J_\nu(\beta_n b) + H_2 J_\nu'(\beta_n b) = 0$$

$(1) \rightarrow J_\nu(\beta_m a) = -H_1 J'_\nu(\beta_m a)$

$(2) \rightarrow J_\nu(\beta_m b) = -H_2 J'_\nu(\beta_m b)$

$$(**) \rightarrow -H_2 J'_\nu(\beta_n b) J'_\nu(\beta_m b) - \{-H_2 J'_\nu(\beta_m b) J'_\nu(\beta_n b)\} = 0$$

← خاصیت تعامد توابع بسل

$$\frac{\left[x\left(J_\nu(\beta_n x) J'_\nu(\beta_m x) - J_\nu(\beta_m x) J'_\nu(\beta_n x)\right)\right]}{\beta_n^2 - \beta_m^2} = \int_a^b x J_\nu(\beta_n x) J_\nu(\beta_m x)\, dx$$

Rec

$$x^2 \underbrace{J''_\nu(\beta_m x)}_{u''} + x \underbrace{J'_\nu(\beta_m x)}_{u'} + (\beta_m^2 x^2 - \nu^2) \underbrace{J_\nu(\beta_m x)}_{u} = 0$$

$$\rightarrow x^2 u'' + x u' + (\beta_m^2 x^2 - \nu^2) u = 0$$

$$\rightarrow x u'' + u + \left(\beta_m^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) u = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}[x u'] + \left(\beta_m^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) u = 0 \qquad \times 2 x u'$$

$$\underbrace{2 x u' \frac{d}{dx}[x u']}_{\frac{d}{dx}\left[(x u')^2\right]} + \beta_m^2 x^2 \underbrace{(2 u u')}_{\frac{d}{dx}(u^2)} - \nu^2 \underbrace{(2 u u')}_{\frac{d}{dx}(u^2)} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \left.(x^2 u'^2 - \nu^2 u^2)\right|_a^b + \beta_m^2 \int_a^b x^2 \frac{d}{dx}(u^2)\, dx = 0$$

$$\int_a^b x^2 \frac{d}{dx}(u^2)\,dx = x^2u^2\Big|_a^b - 2\int_a^b x u^2\,dx$$

$$\rightarrow \left[x^2u'^2 + (\beta_m^2x^2 - \nu^2)u^2\right]_a^b = 2\beta_m^2\int_a^b x u^2\,dx$$

$$\rightarrow \underbrace{\int_a^b x J_\nu^2(\beta_m x)\,dx}_{N} = \frac{1}{2\beta_m^2}\Big[\beta_m^2 x^2 J_\nu'^2(\beta_m x) + (\beta_m^2x^2-\nu^2)J_\nu^2(\beta_m x)\Big]_a^b$$

برای شرایط مرزی مختلف داریم:

(I) $J_\nu(\beta_m a) = 0$ و $J_\nu(\beta_m b) = 0$

$$\longrightarrow N = \frac{1}{2}\left[x^2 J_\nu'^2(\beta_m x)\right]_a^b$$

(II) $J_\nu'(\beta_m a) = 0$

$J_\nu'(\beta_m b) = 0$

(III)

★ برای بدست آوردن نرم تابع بسل و بسط دادن هر تابع برحسب توابع بسل داریم:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_\nu(\beta_k x)$$

$$\longrightarrow \int_a^b x J_\nu(\beta_m x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b x J_\nu(\beta_m x) J_\nu(\beta_k x)\,dx$$

$$\boxed{\longrightarrow c_k = \frac{1}{N}\int_a^b x f(x)\, J_\nu(\beta_k x)\,dx}$$

$m \neq k \rightarrow 0$

$m = k \rightarrow N$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, I_\nu(p_k x) \quad *$$ سری بسل

چون تابع را برحسب جملهای تابع بسل بسط دهیم.

حل معادله پتانسیل در دستگاه مختصات کروی

$$\nabla^2 u=0 \longrightarrow U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}=0$$ در دستگاه مختصات قائم

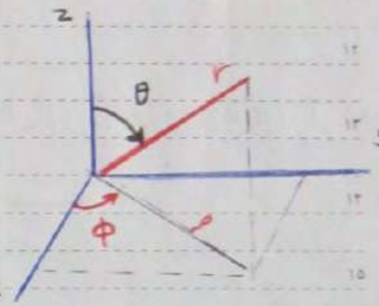
در مختصات کروی داریم:

$$\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0$$

اگر شرایط مرزی تابع طوری باشد که بتوانیم F با استفاده از روش جداسازی متغیرها مسئله را حل کنیم داریم:

$0<\theta<\pi$

$0<\phi<2\pi$



$$u(r,\theta,\phi)=M(r)N(\theta)P(\phi)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} M''NP+\frac{2}{r}M'NP+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\cdot MN'P)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}MNP''=0$$

$$\rightarrow \frac{M''}{M}+\frac{2}{r}\frac{M'}{M}+\frac{1}{Nr^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta N')+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{P''}{P}=0$$

$$\left\{\frac{M''}{M}+\frac{2}{r}\frac{M'}{M}+\frac{1}{Nr^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta N')\right\}r^2\sin^2\theta=-\frac{P''}{P}=m^2$$

$$\rightarrow \boxed{P''+m^2P=0} \quad \mathrm{I}$$ sin - cos, e

$$\rightarrow \left\{\frac{M''}{M}+\frac{2}{r}\frac{M'}{M}+\frac{1}{Nr^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(N'\sin\theta)\right\}r^2\sin^2\theta-m^2=$$

$.M$

$$\to \left\{ \frac{r^2 M''}{M} + 2r\frac{M'}{M} + \frac{1}{N\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(N'\sin\theta\right) \right\}\sin^2\theta - m^2 = 0$$

$$\to \left\{ \frac{r^2 M''}{M} + 2r\frac{M'}{M} + \frac{1}{N\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(N'\sin\theta\right) \right\} - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0$$

$$\to \frac{r^2 M''}{M} + 2r\frac{M'}{M} = -\left\{ \frac{1}{N\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(N'\sin\theta\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right\} = \lambda$$

$$\to \boxed{r^2 M'' + 2rM' - \lambda M = 0} \quad \text{I} \to$$ معادله کوشی-اویلر

$$\boxed{\frac{d}{d\theta}\left(N'\sin\theta\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) N\sin\theta = 0} \quad \text{II}$$

I $\quad M(r) = r^k \to \left[k(k-1) + 2k - \lambda\right] r^k = 0 \to k^2 + k - \lambda = 0$

$$\to k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2} \qquad \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda} \\ k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda} \end{cases}$$

$$\to M(r) = A_1 r^{k_1} + A_2 r^{k_2} \quad (\square)$$

از معادلات درجه ۲ : $\quad k_1 k_2 = -\lambda$

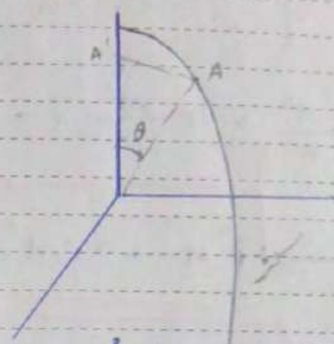
$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda} = \beta \quad \to \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda} = -\beta$$

$$\begin{cases} k_1 = \beta \\ -(\beta+1) = k_2 \end{cases} \qquad -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda} = -\beta - 1 = k_2$$

$$\longrightarrow k_1 k_2 = -\lambda = \left[-\beta(\beta+1)\right] \Rightarrow \beta(\beta+1) = \lambda$$

$$(\text{II}) \longrightarrow \quad M(r) = c_1 r^{\beta} + c_2 r^{-(\beta+1)}$$

$$(\text{III}) \rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dN}{d\theta}\right) + \left[\beta(\beta+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] N \sin\theta = 0$$



$$r=1 \longrightarrow z = \cos\theta \rightarrow dz = -\sin\theta\, d\theta$$

$$\frac{dN}{d\theta} = \frac{dN}{dz}\,\frac{dz}{d\theta} = -\sin\theta \frac{dN}{dz}$$

$$\rightarrow -\sin\theta \frac{d}{dz}\left[\sin\theta\left(-\sin\theta \frac{dN}{dz}\right)\right] + \left[\beta(\beta+1) - \frac{m^2 \cancel{\sin\theta}}{\sin^2\theta}\right] N \sin\theta = 0$$

$$\sin\theta \neq 0 \longrightarrow \frac{d}{dz}\left[\sin^2\theta \frac{dN}{dz}\right] + \left[\beta(\beta+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] N = 0$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dN}{dz}\right] + \left[\beta(\beta+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right] N = 0$$

$$\begin{cases} z \longrightarrow x \\ N \longrightarrow y \end{cases} \quad - \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)y'\right] + \left[\beta(\beta+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0$$

($m=0$ ← معادله دیفرانسیل لژاندر

($m\neq 0$ ← معادله دیفرانسیل وابسته به لژاندر)

$$m=0 \begin{cases} P_n(x) & \text{چندجمله‌ای‌های لژاندر} \\ Q_n(x) & \text{توابع لژاندر} \end{cases}$$

نوع اول وابسته

$$m\neq 0 \begin{cases} P_n^m(x) \end{cases}$$

چندجمله‌ای لژاندر از درجه n از مرتبه m

توابع نوع اول وابسته لژاندر

$m \leq n$

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

$$Q_n^m(x) =$$

جلسه شانزدهم 91/8/23

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \beta(\beta+1)y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)y'\right] + \beta(\beta+1)y = 0 \qquad \begin{cases} p = 1-x^2 \\ q = 0 \\ r = 1 \end{cases}, \ \lambda = \beta(\beta+1)$$

حول $x=0$ می‌خواهیم این معادله را به روش سری توانی حل کنیم.

$$\rightarrow y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$\alpha = \beta(\beta+1)$

$$\longrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

[یکسان سازی توان‌ها] $k \rightarrow k+2$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)a_{k+2}x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

یکسان سازی کرانها $\rightarrow 2a_2 x^0 + 6a_3 x - 2a_1 x + \alpha a_0 x^0 + \alpha a_1 x$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ (k+1)(k+2)a_{k+2} + \underbrace{\left[-k(k-1) - 2k + \alpha\right]}_{-k^2+k-2k+\alpha} a_k \right\} x^k = 0$$

$$= -k^2 - k + \beta^2 + \beta = (\beta^2 - k^2) + (\beta - k) = (\beta-k)(\beta+k+1)$$

$x^0 : 2a_2 + \alpha a_0 = 0 \qquad a_2 = -\frac{\alpha}{2}a_0 = \frac{-\beta(\beta+1)}{2}a_0$

$x^1 : 6a_3 + (\alpha-2)a_1 = 0 \qquad a_3 = -\frac{\alpha-2}{6}a_1 = -\frac{\beta^2+\beta-2}{6}a_1 = -\frac{(\beta+2)(\beta-1)}{6}a_1$

$$\rightarrow a_{k+2} = -\frac{(\beta-k)(\beta+k+1)}{(k+1)(k+2)} a_k \qquad k \geq 2$$

$$k=2 \rightarrow a_4 = -\frac{(\beta-2)(\beta+3)}{3\times 4}\, a_2 = \frac{\beta(\beta-2)(\beta+1)(\beta+3)}{4!}\, a_0$$

$$k=3 \rightarrow a_5 = -\frac{(\beta-3)(\beta+4)}{4\times 5}\, a_3 = \frac{(\beta-1)(\beta-3)(\beta+2)(\beta+4)}{5!}\, a_1$$

$$k=4 \rightarrow a_6 = \frac{-(\beta-4)(\beta+5)}{5\times 6}\, a_4 = \frac{-\beta(\beta-2)(\beta-4)(\beta+1)(\beta+3)(\beta+5)}{6!}\, a_0$$

$$k=5 \rightarrow a_7 = -\frac{(\beta-5)(\beta+6)}{6\times 7}\, a_5 = -\frac{(\beta-1)(\beta-3)(\beta-5)(\beta+2)(\beta+4)(\beta+6)}{7!}\, a_1$$

توان های زوج ← a_0 ← اندیس های زوج

توان های فرد ← a_1 ← فرد

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

$$= a_0\, y_1(x) + a_1\, y_2(x)$$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\beta(\beta-2)(\beta-4)\cdots(\beta-2m+2)(\beta+1)(\beta+3)\cdots(\beta+2m-1)}{(2m)!} \times x^{2m}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(\beta-1)(\beta-3)(\beta-5)\cdots(\beta-2m+1)(\beta+2)(\beta+4)\cdots(\beta+2m)}{(2m+1)!} \times x^{2m+1}$$

اگر $\beta=2$ تمامی اندیس ها صفر بر

اگر $\beta=4$

اگر $\beta=1$ از a_3 به بعد صفر

اگر $\beta=3$

به ازای βهای صحیح ، چند جمله ای با تعداد محدودی از جملات تبدیل می شود.

if $\beta = 0 \quad \{ \; y_1(x) = a_0$

$\beta = 1 \longrightarrow y_2(x) = a_1 x$

$\beta = 2 \longrightarrow y_1(x) = (1 - 3x^2) a_0$

$\beta = 3 \longrightarrow y_2(x) = (x - \frac{5}{3}x^3) a_1$

اگر y_1 و y_2 جواب های معادله باشند هر ضریبی از آنها هم جواب معادله خواهد بود

اگر a_0 و a_1 را طوری انتخاب کنیم که هر دو از $x=1$ بگذرند و مقدارشان یک باشد چند

جمله های لژاندر را خواهیم داشت

$$\left. \begin{matrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{matrix} \right|_{x=1} = 1 \longrightarrow P_n(x)$$

$\beta = 0 \Rightarrow P_0(x) = 1$

$\beta = 1 \longrightarrow P_1(x) = x$

$\beta = 2 \longrightarrow a_0(1 - 3x^2)\Big|_{x=1} = 1 \longrightarrow -2a_0 = 1 \rightarrow a_0 = -\frac{1}{2} \longrightarrow P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$\beta = 3 \rightarrow (1 - \frac{5}{3}) a_1 = 1 \rightarrow a_1 = -\frac{3}{2} \longrightarrow P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$\vdots \qquad \vdots$

هر کدام از چند جمله ای های لژاندر به ازای درجه شان (n) در بازه $(0, 1)$ ، n صفر خواهند داشت

$P_{n} \leftarrow$ تعداد صفر

فرمول رودریگز rodriguez $\longrightarrow \boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n}$

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

$P_n(x)$ یکی از جواب های معادله دیفرانسیل است.

دو جواب معادله باید با هم استقلال خطی داشته باشند (خارج قسمت آنها نباید ثابت باشد)

$$y_1(x)=P_n(x)\quad,\quad y_2(x)=?\qquad\qquad \frac{y_2}{y_1}=u$$

$$\Rightarrow y_2(x)=u\cdot P_n \longrightarrow y_2'=u'P_n+uP_n'$$

$$\longrightarrow y_2''=u''P_n+2u'P_n'+uP_n''$$

باید در معادله صدق کند

$$\longrightarrow (1-x^2)\left[u''P_n+2u'P_n'+uP_n''\right]-2x\left[u'P_n+uP_n'\right]+n(n+1)uP_n=0$$

معادله را برحسب مشتقات u مرتب می‌کنیم:

$$\longrightarrow P_n(1-x^2)u''+\left[2(1-x^2)P_n'-2xP_n\right]u'+\Big[\underbrace{(1-x^2)P_n''+2xP_n'+n(n+1)P_n}_{=0}\Big]u=0$$

$$\longrightarrow P_n(1-x^2)u''+\left[2(1-x^2)P_n'-2xP_n\right]u'=0$$

$$\longrightarrow u''+\left[\frac{2P_n'}{P_n}-\frac{2x}{1-x^2}\right]u'=0$$

$$u'=z \longrightarrow z'+\left[\frac{2P'}{P}-\frac{2x}{1-x^2}\right]z=0$$

$$e^{\int\left(\frac{2P'}{P}-\frac{2x}{1-x^2}\right)dx}=e^{2\ln P+\ln(1-x^2)}=e^{\ln P^2(1-x^2)}=P_n^2(1-x^2)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left[z \cdot P_n^2 (1-x^2)\right] = 0 \rightarrow z \cdot P_n^2 (1-x^2) = c_1$$

$$\rightarrow u' = \frac{c_1}{P_n^2(x)(1-x^2)} \longrightarrow u = \int \frac{c_1}{P_n^2(x)(1-x^2)}\, dx$$

$$\longrightarrow y_2(x) = Q_n(x) = P_n(x) \int \frac{c_1}{[P_n(x)]^2 (1-x^2)}\, dx$$

تابع لژاندر: در $x=\pm 1$
تعریف نمی‌شود (ناسره است)

$$\rightarrow y(x) = c_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x)$$

* اگر x شامل ± 1 شود ضریب C_2 را صفر در نظر می‌گیریم.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0 \qquad m \neq n \qquad (*)$$

$$x = \cos\theta \longrightarrow \int_0^{\pi} P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta = 0$$

$dx = -\sin\theta\, d\theta$

→ در صورت انتگرال
اثر می‌کند

$$(*) \begin{cases} (1-x^2) P_m''(x) - 2x P_m'(x) + m(m+1) P_m = 0 & \times P_n \\ (1-x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) + n(n+1) P_n = 0 & \times P_m \end{cases}$$

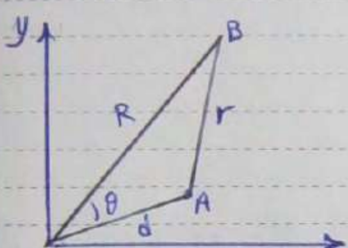
$$\Rightarrow (1-x^2)\underbrace{\left[P_m'' P_n - P_n'' P_m\right]}_{W''} - 2x \underbrace{\left[P_m' P_n - P_n' P_m\right]}_{W} + \left[m(m+1) - n(n+1)\right] P_m P_n = 0$$

رونسکین جواب‌ها

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)W\right] dx}_{\Downarrow} = \left[n(n+1)-m(m+1)\right]\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx$$

$$\rightarrow (1-x^2)W\Big|_{-1}^{1} = 0 \rightarrow \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x) = 0$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{mn} \qquad (**)$$



گرانش : $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} = \dfrac{k}{r^2} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{k}{r}\right) = -k\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\right)$

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$$r^2 = d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta \rightarrow r = \sqrt{d^2+R^2-2dR\cos\theta}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{d^2+R^2-2Rd\cos\theta}} = \frac{1}{R\sqrt{\left(\frac{d}{R}\right)^2+1-2\left(\frac{d}{R}\right)\cos\theta}}$$

$\frac{d}{R} \to t$, $\cos\theta \to x$

$$= \frac{1}{R\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n$$

تابع مولد چندجمله‌ای های لژاندر

$$x=1 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \longrightarrow P_n(1)=1$$

$t<1$ شرط همگرایی

$$x=-1 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+t)^2}} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \longrightarrow P_n(-1)=(-1)^n$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = [\underset{a}{1} + (\underbrace{t^2-2xt}_{b})]^{-\frac{1}{2}}$$

باید ثابت کنیم $\int_{-1}^{1} [P_m(x)]^2 dx = \frac{2}{2m+1}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \longrightarrow \frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_m(x)P_n(x)\, t^{m+n}$$

برای $m \neq n$ بدست آوردیم

برای $m=n$ داریم

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2xt+t^2} = -\frac{1}{2t}\int \frac{-2t\,dx}{1-2xt+t^2} = \frac{-1}{2t}\ln(1-2xt+t^2)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2t}\Big[\ln(\underbrace{1-2t+t^2}_{(1-t)^2}) - \ln(\underbrace{1+2t+t^2}_{(1+t)^2})\Big]$$

$$= -\frac{1}{t}\ln\frac{1-t}{1+t} = -\frac{1}{t}\big[\ln(1-t) - \ln(1+t)\big]$$

$$\ln(1+t) = \int_0^t \frac{dx}{1+x} = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$\left[-\frac{1}{t} \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n+1} \right]$$

$$\ln(1-t) = -\int^t \frac{+dx}{1-x} = -\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, dx$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$\left[-\frac{1}{t} \ln(1-t) \right.$$

$$= -\frac{1}{t} \left[-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + (-1)^n \right] \frac{t^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2t^{2n}}{2n+1}$$

حال می‌توانیم یک تابع را برحسب چندجمله‌ای های لژاندر بسط دهیم.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m P_m(x)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) \, dx = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \underbrace{\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) \, dx}_{\frac{2}{2n+1}}$$

$$\rightarrow \boxed{A_m = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) \, dx}$$

معادله ارتعاش یک جسم کروی در سه حالت

جلسه هفدهم ۹۱/۸/۲۸

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

کره ① $0<r<b$

توخالی ② $a<r<b \quad 0<\theta<\pi$

فضای بیرون از کره ③ $a<r<\infty \quad t>0$

① $u(b,\theta,t)=f(\theta)=\underline{\underline{0}}$ تغییر مکان در سطح بیرونی صفر

$|u(0,\theta,t)|<\infty$

$$\begin{cases} u(r,\theta,0)=f_1(r,\theta) \\ u_t(r,\theta,0)=f_2(r,\theta) \end{cases}$$

شرط مرزی مسئله همگن است. از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم.

$$u(r,\theta,t)=M(r)N(\theta)P(t)$$

$$M''NP+\frac{2}{r}M'NP+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\, MPN')=\frac{1}{c^2}MNP''$$

$$\frac{M''}{M}+\frac{2}{r}\frac{M'}{M}+\frac{1}{Nr^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\, N')=\frac{P''}{c^2P}=-\lambda^2$$

①

$$\rightarrow P''+c^2\lambda^2P=0 \longrightarrow \boxed{P(t)=A_1\sin c\lambda t+A_2\cos c\lambda t}$$

$$\rightarrow \frac{M''}{M}+\frac{2}{r}\frac{M'}{M}+\frac{1}{Nr^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\, N')+\lambda^2=0$$

$$r^2\frac{M''}{M}+\frac{2r^2}{r}\frac{M'}{M}+\frac{1}{N\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\, N')+\lambda^2r^2=0$$

$$r^2\frac{M''}{M}+2r\frac{M'}{M}+\lambda^2r^2=-\frac{1}{N\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\, N')=\gamma$$

(2)

$$\begin{cases} r^2 M'' + 2r M' + (\lambda^2 r^2 - \gamma) M = 0 \\ \dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\, N'\right) + \gamma N \sin\theta = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$\cos\theta = \mu \longrightarrow N' = \frac{dN}{d\theta} = \frac{dN}{d\mu}\frac{d\mu}{d\theta} = -\sin\theta \frac{dN}{d\mu}$$

$$(3) \Rightarrow -\sin\theta \frac{d}{d\mu}\left(\sin\theta\left(-\sin\theta \frac{dN}{d\mu}\right)\right) + \gamma N \sin\theta = 0$$

معادله لژاندر $\rightarrow \dfrac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\dfrac{d\mu}{dN}\right] + \gamma N = 0$

$$\gamma = n(n+1) \Rightarrow \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\mu}{dN}\right] + n(n+1)N = 0$$

$$\longrightarrow N(\mu) = \begin{cases} P_n(\mu) \\ Q_n(\mu) \end{cases}$$

(2) معادله (2) هم به فرم معادله بسل قابل حل خواهد بود.

$Z_\gamma(\lambda r)$ ← همه نوع تابع بسل

با توجه به تغییر متغیر مناسب به توابع بسل از مرتبه $n+\frac{1}{2}$ می‌رسیم

$$\begin{cases} J_{n+\frac{1}{2}}(r) \\ Y_{n+\frac{1}{2}}(r) \end{cases}$$

$$\rightarrow u(r,\theta,t) = \left(A_1 \sin c\lambda t + A_2 \cos c\lambda t\right)\left(B_1 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) + B_2 Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)\right)$$
$$\left(D_1 P_n(\cos\theta) + D_2 Q_n(\cos\theta)\right)$$

u بایستی کران‌دار باشد.

حالت اول: کره توپر: $Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$ در $r=0$ تعریف نمی‌شود $\longleftarrow$ $\boxed{B_2=0}$

$Q_n(\cos\theta)$ در ± 1 تعریف نمی‌شود $\longleftarrow$ $\boxed{D_2=0}$

ادغام ضرایب با ثابت‌ها $\rightarrow u(r,\theta,t)=\left(A_1^* \sin c\lambda t + A_2^* \cos c\lambda t\right) J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)\, P_n(\cos\theta)$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda b)=0 \rightarrow J_{n+\frac{1}{2}}(\beta_m)$$

β_m: صفرهای تابع J از مرتبه $n+\frac{1}{2}$

مقادیر ویژه مربوط به تابع بسل $\longrightarrow \lambda_m=\dfrac{\beta_m}{b}$

اگر ترکیب خطی هم جواب‌ها را در نظر بگیریم داریم:

$$u(r,\theta,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m r)\, P_n(\cos\theta)\left(A_{mn}\cos c\lambda_m t + B_{mn}\sin c\lambda_m t\right)$$

$$f_1(r,\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m r)\, P_n(\cos\theta)$$

با توجه به روابط در مسائل اشتورم لیوویل $\longrightarrow$

$$A_{mn}=\frac{\int_0^{\pi}\int_0^{b} r f_1(r,\theta)\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m r)\, P_n(\cos\theta)\sin\theta\, dr\, d\theta}{\int_0^{\pi}\int_0^{b} r J^2_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m r)\left[P_n(\cos\theta)\right]^2\sin\theta\, dr\, d\theta}$$

برای B_{mn} با استفاده از شرط $f_2(r,\theta)$ داریم:

$$B_{mn}=\frac{\int_0^{\pi}\int_0^{b} r f_2(r,\theta)\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m r)\, P_n(\cos\theta)\sin\theta\, dr\, d\theta}{c\lambda_m\int_0^{\pi}\int_0^{b} r J^2_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m r)\left[P_n(\cos\theta)\right]^2\sin\theta\, dr\, d\theta}$$

حالت دوم: ضریب $Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$ ها مخالف صفر خواهد بود.
تنها تفاوت با حالت اول این است که

حالت سوم: شبیه حالت دوم خواهد بود.

حال بررسی می‌کنیم که چرا J ها از مرتبه $n+\frac{1}{2}$ بدست آمده اند.

در حالت کلی (که مستقل از ϕ نیست) معادله اولیه را داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

تغییر متغیر $\mu=\cos\theta \longrightarrow d\mu=-\sin\theta\, d\theta$

$$-\sin\theta\frac{d}{d\mu}\left[\sin\theta\left(-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)\right]$$

حال معادله اصلی را اصلاح می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

تعویض متغیر دوم:

$$u=\frac{v}{\sqrt{r}}=vr^{-\frac{1}{2}}$$

$$u_r=v_r r^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}vr^{-\frac{3}{2}}$$

$$u_{rr}=v_{rr}r^{-\frac{1}{2}}-v_r r^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}vr^{-\frac{5}{2}}$$

جایگذاری در معادله بالا داریم:

$$v_{rr}r^{-\frac{1}{2}}-v_r r^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}vr^{-\frac{5}{2}}+\frac{2}{r}\left(v_r r^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}vr^{-\frac{3}{2}}\right)$$
$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial v}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2}=\frac{r^{-\frac{1}{2}}}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\times r^{+\frac{1}{2}} \rightarrow v_{rr} - \frac{1}{r} v_r + \frac{3}{4r^2} v + \frac{2}{r}\left(v_r - \frac{1}{2} v r^{-1}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial v}{\partial \mu}\right]$$

$$+ \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow v_{rr} + \frac{1}{r} v_r - \frac{1}{4r^2} v + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial v}{\partial \mu}\right] + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

با استفاده از جداسازی متغیرها داریم:

$$v(r, \mu, \phi, t) = M(r) N(\mu) P(\phi) Q(t)$$

$$\rightarrow M'' NPQ + \frac{1}{r} M' NPQ - \frac{1}{4r^2} MNPQ + \frac{1}{r^2}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2) MPQN'\right]$$

$$+ \frac{1}{r^2(1-\mu^2)} MNQP'' = \frac{1}{c^2} MNPQ''$$

$$\rightarrow \frac{M''}{M} + \frac{1}{r}\frac{M'}{M} + \frac{-1}{4r^2} + \frac{1}{r^2 N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)N'\right] + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{P''}{P} = \frac{Q''}{c^2 Q} = -\lambda^2$$

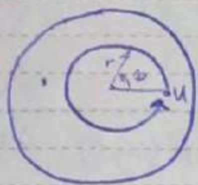
$$\text{I} \quad Q'' + c^2\lambda^2 Q = 0$$

$$\Rightarrow Q(t) = A_1 \sin c\lambda t + A_2 \cos c\lambda t$$

$$\frac{M''}{M} + \frac{1}{r}\frac{M'}{M} - \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{r^2 N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)N'\right] + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{P''}{P} + \lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{M''}{M} + \frac{1}{r}\frac{M'}{M} + \frac{-1}{4r^2} + \frac{1}{r^2 N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)N'\right] + \lambda^2 \right\} r^2(1-\mu^2) = -\frac{P''}{P} = \nu^2$$

$$\text{II} \quad P'' + \nu^2 P = 0 \rightarrow P(\phi) = D_1 \sin \nu\phi + D_2 \cos \nu\phi$$



روی کره در صفحه xy

کمترین مقداری که ν می‌تواند داشته باشد یک است

ν عددی صحیح است . $(\nu = n)$

$$\rightarrow \left\{ \frac{M''}{M} + \frac{1}{r}\frac{M'}{M} - \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{r^2 N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)N'\right] + \lambda^2 \right\} r^2(1-\mu^2) - \nu^2 = 0$$

$$\rightarrow \left\{ \frac{M''}{M} + \frac{1}{r}\frac{M'}{M} - \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{r^2 N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)N'\right] + \lambda^2 \right\} - \frac{\nu^2}{r^2(1-\mu^2)} = 0$$

$$\rightarrow r^2\frac{M''}{M} + r\frac{M'}{M} - \frac{1}{4} + \frac{1}{N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)N'\right] + \lambda^2 r^2 - \frac{\nu^2}{(1-\mu^2)} = 0$$

$$\underbrace{r^2\frac{M''}{M} + r\frac{M'}{M} - \frac{1}{4} + \lambda^2 r^2}_{} = \underbrace{-\frac{1}{N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dN}{d\mu}\right] + \frac{n^2}{1-\mu^2}}_{\text{شبیه معادله دیفرانسیل لژاندر}} = \gamma$$

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dN}{d\mu}\right] + \left(-\frac{n^2}{1-\mu^2} + \gamma\right)N = 0$$

جواب‌های این معادله لژاندر خواهد بود ، بشرطی که

$$\text{II} \quad P_n^m(\mu) \text{ , } Q_n^m(\mu) : \gamma = m(m+1)$$

$$\rightarrow r^2\frac{M''}{M} + r\frac{M'}{M} - \frac{1}{4} + \lambda^2 r^2 = m^2 + m$$

$$(m+\tfrac{1}{2})^2$$

$$\uparrow$$

$$\rightarrow r^2 M'' + r M' + \left[\lambda^2 r^2 - \left(m^2 + m + \frac{1}{4}\right)\right] M = 0$$

این معادله، معادله بسل از رتبه $m+\frac{1}{2}$ می‌باشد.

توابع بسل استوانه‌ای $\rightarrow J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r) \quad , \quad Y_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)$ توابع بسل کروی

IV $\boxed{\cancel{+}\, j_m(\lambda r) \qquad = y_m(\lambda r)}$

$$m=0 \rightarrow J_{\frac{1}{2}}(\lambda r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r \lambda}}\, \sin \lambda r$$

از فرمول رودریگز

$$\rightarrow \text{II} \begin{cases} P_n^m(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m}{d\mu^m} P_n(\mu) = \dfrac{(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \dfrac{d^{m+n}}{d\mu^{m+n}} (\mu^2-1)^n \\ Q_n^m(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m}{d\mu^m} Q_n(\mu) \end{cases}$$

در حل برخی مسائل به توابع زیر می‌رسیم:

$$P_n^{-m}(\mu) = (-1)^m P_n^m(\mu)$$

$$k\lambda \longleftrightarrow k\alpha$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(\mu) P_n(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{mn}$$

اگر به شکل عکس نوشته شود

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(\mu) P_k^m(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{(m+n)!}{(m-n)!}\, \delta_{kn}$$

در حل برخی از مسائل، توابعی که می‌رسیم می‌بایستی ویژگی‌های این توابع را بدانیم

از جمله توابع خاص:
- تابع گاما
- تابع بتا
- تابع خطا
- تابع انتگرال نمایی

● تابع گاما

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

به ازای $n>0$ همگرا

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$$

با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب می‌خواهیم تابع گاما را به شکل‌های مختلف بنویسیم:

① $x=\lambda y \longrightarrow \Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-\lambda y}(\lambda y)^{n-1}\lambda\,dy$

$$\boxed{\Gamma(n)=\lambda^n\int_0^\infty e^{-\lambda y}y^{n-1}\,dy}$$

② $e^{-x}=y$ $\quad \begin{cases} x\to\infty \longrightarrow y\to 0 \\ x=0 \longrightarrow y=1\end{cases}$

$-x=\ln y$

$x=-\ln y=\ln\frac{1}{y}$

$$\rightarrow \boxed{\Gamma(n)=\int_1^0 y\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{n-1}\frac{-dy}{y}=\int_0^1\left[\ln\frac{1}{y}\right]^{n-1}dy}$$

③ $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}} \quad \rightarrow dx=\frac{1}{n}y^{\frac{1-n}{n}}dy$

$$\rightarrow \boxed{\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-\sqrt[n]{y}}\,y^{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}y^{\frac{1-n}{n}}dy=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-\sqrt[n]{y}}\,dy}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-y^2}dy=2\int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

④ $x=u^2 \rightarrow dx=2u\,du$

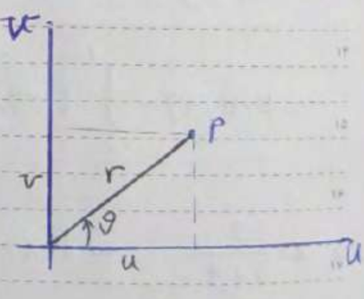
$$\rightarrow \Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-u^2}(u^2)^{n-1}\,2u\,du=$$

$$\Rightarrow \Gamma(n)=2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2n-1}du \quad ①$$

می‌توانیم بنویسیم $\Gamma(m)=2\int_0^\infty e^{-v^2}v^{2m-1}dv \quad ②$

$$①,② \Rightarrow \Gamma(m)\Gamma(n)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}u^{2n-1}v^{2m-1}du\,dv \quad ③$$

با استفاده از دستگاه مختصات قطبی داریم



$$\begin{cases} u=r\cos\theta \\ v=r\sin\theta \end{cases}, \quad r^2=u^2+v^2$$

عنصر سطح: $du\,dv=r\,dr\,d\theta$

$$③ \Rightarrow \Gamma(m)\Gamma(n)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2n-1}(r\sin\theta)^{2m-1}r\,dr\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2m+2n-1}\cos^{2n-1}\theta\,\sin^{2m-1}\theta\,d\theta$$

$$=\underbrace{\left(2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2m+2n-1}dr\right)}_{\Gamma(m+n)}\underbrace{\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta\right)}_{\beta(m,n)}$$

مقایسه با ①

$$\rightarrow \boxed{\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}}$$

● تابع بتا

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

اگر $x=\sin^2\theta$ انتگرال صفحهٔ قبل ظاهر می‌شود

$$\beta(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{m-1}(\cos^2\theta)^{n-1}\,2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

■ جلسه هجدهم 91/8/30

بیان تابع گاما به شکل های مختلف

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

① $1-x=y \rightarrow x=1-y$ $\qquad \begin{cases} x=0 \rightarrow y=1 \\ x=1 \rightarrow y=0 \end{cases} \qquad -dx=dy$

از حدود انتگرال اثر می‌کند

$$\boxed{\rightarrow \beta(m,n)=\int_0^1 (1-y)^{m-1}\,y^{n-1}\,dy}$$

تابع β یک تابع متقارن نسبت به متغیرهایش می‌باشد

② $x=\dfrac{y}{1+y} \rightarrow 1-x=\dfrac{1}{1+y}$ $\qquad \begin{matrix} x=0 & y=0 \\ x\to 1 & y\to\infty \end{matrix}$

(A)

$$\longrightarrow \beta(m,n)=\int_0^\infty \left(\frac{y}{1+y}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{1+y}\right)^{n-1}\frac{dy}{(1+y)^2}=\boxed{\int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy}$$

(A) $y=\dfrac{ax}{b} \rightarrow \beta(m,n)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\left(\frac{ax}{b}\right)^{m-1}}{\left(\frac{ax+b}{b}\right)^{m+n}}\,\frac{a}{b}\,dx$

$$\longrightarrow \beta(m,n)=a^m b^n\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(ax+b)^{m+n}}\,dx$$

(۸)
$$\int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}dy = \int_0^1 \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}dy + \underbrace{\int_1^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}dy}$$

$$\boxed{\Rightarrow \beta(m,n) = \int_0^1 \frac{y^{m-1}+y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}dy}$$

$y=\frac{1}{x}$ $\quad y=1,\ x=1;\quad y\to\infty,\ x\to 0$

$$\int_1^0 \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{m-1}}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^{m+n}}\left(\frac{-dx}{x^2}\right)$$

$$=\int_0^1 \frac{x^{m+n}}{x^{m-1}x^2(x+1)^{m+n}}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x^{m+n}}{x^{m+1}(x+1)^{m+n}}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$$

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

$x=\sin^2\theta$ $\quad x=0,\ \theta=0;\quad x=1,\ \theta=\frac{\pi}{2}$

$$\to \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-2}\theta\cos^{2n-2}\theta\,(2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$$\frac{1}{2}\beta(m,n)=\boxed{\to \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}}$$

$$\begin{cases}2m-1=p\\2n-1=q\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}m=\frac{p+1}{2}\\ n=\frac{q+1}{2}\end{cases} \to \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\theta\cos^q\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$$

$p,q>-1$

$$p=0 \longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^q\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{q+1}{2})}{2\Gamma(\frac{q+2}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{q+1}{2})}{2\Gamma(\frac{q+2}{2})}$$

$$\rightarrow \beta(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}{2\Gamma(1)} \longrightarrow \Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

$$q=0 \longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{p+1}{2})}{2\Gamma(\frac{p+2}{2})}$$

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

اگر $m=n$ داریم:

$$\Rightarrow \beta(m,m) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{m-1}dx = \frac{[\Gamma(m)]^2}{\Gamma(2m)}$$

حال اگر $m \rightarrow 2m$ داریم:

$$\beta(m,m) = \int_0^1 [x(1-x)]^{m-1}dx$$

$$x = \frac{1+t}{2} \quad \begin{cases} x=0 & t=-1 \\ x=1 & t=1 \end{cases}$$

$$2\frac{1}{2^{2m-1}}\int_0^1 (1-t^2)^{m-1}dt$$

$$\rightarrow \int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(\frac{1-t}{2}\right)\right]^{m-1}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2^{2m-1}}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{m-1}dt$$

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\int_0^1 (1-t^2)^{m-1}dt$$

$$t^2=z \rightarrow 2t\,dt = dz$$

$$\rightarrow \frac{1}{2^{2m-2}}\int_0^1 (1-z)^{m-1}\frac{dz}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2^{2m-1}}\underbrace{\int_0^1 (1-z)^{m-1}\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}}}_{\beta(m,\frac{1}{2})}$$

W. W. BELL
special functions
for scientists and engineers
1968

$$\rightarrow \beta(m,m) = \frac{1}{2^{2m-1}}\,\beta\left(m,\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2m-1}} \times \frac{\Gamma(m)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\rightarrow \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(2m)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \times \frac{1}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \rightarrow \boxed{\Gamma(2m) = \frac{2^{2m-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(m)\,\Gamma\left(m+\tfrac{1}{2}\right)}$$

فرمول Dublication of Legender

• مثال:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{tg\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}{\cos^{\frac{1}{2}}\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}\theta \cos^{-\frac{1}{2}}\theta\, d\theta$$

$$\begin{cases} 2m-1 = \frac{1}{2} \\ 2n-1 = \frac{-1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ n = \frac{1}{4} \end{cases} \quad = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{2}\,\pi$$

$$\boxed{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}}$$

• مثال:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} \qquad x^3 = t \quad \begin{cases} x=0 & t=0 \\ x=1 & t=1 \end{cases}$$

$$3x^2\,dx = dt \longrightarrow dx = \frac{dt}{3x^2} = \frac{dt}{3t^{\frac{2}{3}}}$$

$$\rightarrow \int_0^1 \frac{1}{3}\,\frac{t^{-\frac{2}{3}}\,dt}{(1-t)^{1/3}} = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{3}}\, t^{-\frac{2}{3}}\, dt = \frac{1}{3}\,\beta\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right)$$

$$\begin{cases} m-1 = -\frac{2}{3} \rightarrow m = \frac{1}{3} \\ n-1 = \frac{-1}{3} \rightarrow n = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{3}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\int_0^{\infty} t^{-3/2}(1-e^{-t})\,dt$$

$$=\int_0^{\infty}\underbrace{(1-e^{-t})}_{u}\,\underbrace{t^{-\frac{3}{2}}\,dt}_{dv} = -2t^{-\frac{1}{2}}(1-e^{-t})\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}(-2t^{-\frac{1}{2}})(e^{-t}dt)$$

$$=\frac{-2(1-e^{-t})}{\sqrt{t}}\Big|_0^{\infty}+2\underbrace{\int_0^{\infty}e^{-t}\,t^{-\frac{1}{2}}\,dt}_{\Gamma(\frac{1}{2})} = (0-0)+2\Gamma(\tfrac{1}{2})=2\sqrt{\pi}$$

Incomplete Gamma Funcition

- $\gamma(n,x)=\int_0^{x}e^{-t}\,t^{n-1}\,dt$

تابع گامای ناکامل مکمل

$\Gamma(n,x)=\int_x^{\infty}e^{-t}\,t^{n-1}\,dt$

$$\boxed{\Gamma(n)=\gamma(n,x)+\Gamma(n,x)}$$

$$\gamma(n,x)=\int_0^{x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^k}{k!}\,t^{n-1}\,dt$$

$$=\int_0^{x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{k+n-1}}{k!}\,dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+n}}{k!\,(n+k)}$$

$$\boxed{=x^n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!\,(n+k)}}$$

- $\beta(m,n)=\int_0^{1}t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt$

نا‌کامل $\beta_x(m,n)=\int_0^{x}t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt$

- تابع انتگرال نمایی (exp. In. Func)

$$E_1(x)=-\int_x^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=-\Gamma(0,x)$$

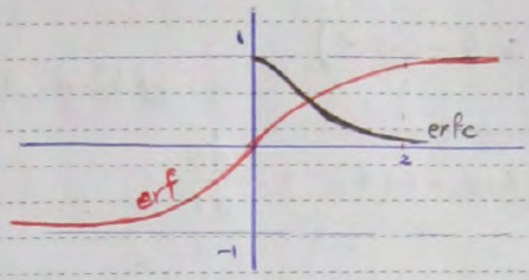
[illegible]

تابع خطا

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

تابع خطای مکمل –

$$\mathrm{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$



رابطه تابع خطا با توابع گاما با استفاده از تغییر متغیر مناسب:

$$t^2=y \rightarrow 2t\,dt=dy \longrightarrow t=\frac{dy}{2\sqrt{y}} \qquad \begin{cases} t=0 & y=0 \\ t=x & y=x^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x^2} e^{-y}\,\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-y}\,y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$\boxed{\mathrm{erf}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\gamma\left(\frac{1}{2},x^2\right)}$$

$$\boxed{\rightarrow \mathrm{erfc}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2},x^2\right)}$$

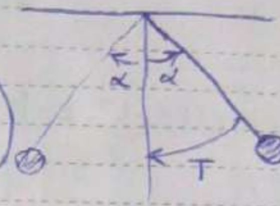
معادله حاکم بر حرکت پاندول

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta$$

$$\rightarrow \dot{\theta}\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\dot{\theta}\sin\theta \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}^2\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{g}{l}\cos\theta\right)$$

$$\rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + C_1$$

$$\rightarrow 0 = \frac{2g}{l}\cos\alpha + C_1 \rightarrow \boxed{C_1 = \frac{-2g}{l}\cos\alpha}$$



$\theta = \alpha \rightarrow$ سرعت زاویه‌ای $= 0$

$$\rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}\left(\cos\theta - \cos\alpha\right)$$

(دوره تناوب کامل) $= 4T$

$$\rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{l}\left(\cos\theta - \cos\alpha\right)} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt \rightarrow \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \int_0 \sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt$$

$$\rightarrow T\sqrt{\frac{2g}{l}} = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

$$, \cos\theta - \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} - \left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\left[1 - \left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right]$$

$$= \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{\sin\theta/2}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2}}$$

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = x \rightarrow \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sin\frac{\alpha}{2}} = dx \rightarrow d\theta = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\,dx}{\cos\frac{\theta}{2}} \quad \begin{cases} \theta = 0 & x = 0 \\ \theta = \alpha & x = 1 \end{cases}$$

$$= \int \frac{\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\theta/2}\,dx}{\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - x^2}}$$

$$, \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$, \sqrt{1 - x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

(انتگرال های بیضوی (لژاندر))

$$= \int_0^1 2 \frac{dx}{\sqrt{2(1-x^2)}\sqrt{1-x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

نوع اول: $\int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = F(k,\theta)$, $\boxed{0<k<1}$

نوع دوم: $\int_0^\theta \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\, d\phi = E(k,\theta)$, $0<k<1$

Ch8 ، all / 9.23.24

Ch9 ، all / 3,7

(تا آخر فصل ۹ - میان ترم دوم) 5 دی ماه

جلسه ۱۹ - 91/9/12

IT: تبدیلات انتگرالی

استفاده از IT در حل PDE

I: بازه

$f(t)$

$k(s,t)$

s: پارامتر تبدیل

$k(s,t)$: هسته تبدیل (کرنل تبدیل)

$$F(s) = I[f(t)] = \int_a^b k(s,t)\, f(t)\, dt$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل وارون}} f(t) = I^{-1}[F(s)] = \int_c^d F(s)\, k^{-1}(s,t)\, ds$$

برحسب k ها و F های متفاوت، تبدیلات انتگرالی متفاوتی خواهیم داشت

نام تبدیل	(a,b)	$k(s,t)$	(c,d)	$k^{-1}(s,t)$
لاپلاس	$(0,\infty)$	e^{-st}	$(\gamma-i\infty, \gamma+i\infty)$	$\frac{1}{2\pi i} e^{st}$
فوریه	$(-\infty,+\infty)$	e^{-ist} / $\frac{e^{-ist}}{\sqrt{2\pi}}$	$(-\infty,+\infty)$	$\frac{1}{2\pi} e^{ist}$ / $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ist}$
سینوسی فوریه	$(0,\infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin st$	$(0,\infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(st)$
کسینوسی فوریه	$(0,\infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(st)$	$(0,\infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(st)$

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s)\, ds$$

$$F_s(s) = \mathcal{F}_s[f(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin st\, dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}_s^{-1}[F_s(s)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(s)\sin st\, ds$$

$$F_c(s) = \mathcal{F}_c[f(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos st\, dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}_c^{-1}[F_c(s)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(s)\cos st\, ds$$

تبدیل فوریه وقتی سیستم مختصات محوری باشد به تبدیل هانکل تبدیل می‌شود

هانکل	$(0, \infty)$	$tJ_n(s,t)$	$(0,\infty)$	$tJ_n(s,t)$

$$H_n[f(t)] = \int_0^\infty t J_n(s,t) f(t)\, dt = H_n(s)$$

$n \leftarrow$ مرتبه

$$f(t) = \int_0^\infty H_n(s)\, t J_n(s,t)\, ds$$

(تبدیل وارون هانکل)

در حالت خاص و با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب به تبدیل ملین می‌رسیم :

ملین	$(0,\infty)$	t^{s-1}	$\begin{pmatrix}\gamma-i\infty \\ \gamma+i\infty\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2\pi i} t^{-s}$

$$M[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, t^{s-1}\, dt = M(s)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} M(s)\, t^{-s}\, ds$$

در ادامه به نحوه بدست آوردن این تبدیلات (سرمنشأ: تبدیل فوریه) اشاره می‌کنیم
و سپس به ویژگی‌ها و نحوه کاربرد این تبدیلات می‌رسیم.

محیط یا دامنه مسئله →
- محدود (a,b)
- نیمه محدود $(0,\infty)$ $(-\infty,b)$ → $x=0$ →
  - $u=0$ → تبدیل سینوسی فوریه
  - $u_x=0$ → کسینوسی فوریه
  - $u_x+Hu=0$ → تبدیل استاندارد فوریه
  - $x\to\infty$
- نامحدود $(-\infty,+\infty)$ (فوریه) → (تابع کراندار) $\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) < \infty$

محدود :

$x=0$	$x=L$	
$u=0$	$u=0$	→ تبدیل محدود سینوسی فوریه
$u_x=0$	$u_x=0$	→ کسینوسی فوریه

ترکیب شرایط بالا → تبدیل فوریه

معادله گرما

$$c^2 u_{xx} = u_t$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \qquad 0 < x < L, \quad t > 0$$

از تبدیل محدود سینوسی فوریه استفاده می کنیم:

$$\bar{U}_s(n,t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

اگر f فرد بود $\longrightarrow$ $f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = F_s(n)$$

$$\longrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_s(n)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_s(n,t)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\longrightarrow \frac{2c^2}{L}\int_0^L u_{xx}\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L u_t \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big[\underbrace{\frac{2}{L}\int_0^L u\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx}_{\bar{U}}\Big]$$

$$\longrightarrow \frac{2c^2}{L}\int_0^L u_{xx}\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{\partial \bar{U}_s(n,t)}{\partial t}$$

سمت چپ را از جزء به جزء حساب می کنیم

$$\int_0^L u_{xx}\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = u_x\sin\frac{n\pi}{L}x\Big|_0^L - \frac{n\pi}{L}\int_0^L u_x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$= -\frac{n\pi}{L}\Big[u_x\cos\frac{n\pi}{L}\Big|_0^L + \frac{n\pi}{L}\int_0^L u\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\Big]$$

با جایگذاری $\longrightarrow$ $-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}\bar{U}_s(n,t) = \frac{\partial \bar{U}_s(n,t)}{\partial t}$ $\longrightarrow$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$\longrightarrow \bar{U}_s(n,t) = A_1 e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$$\bar{U}_s(n,0) = A_1 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$\rightarrow \bar{U}_s(n,t) = \left[\frac{2}{L}\int_0^L f(x') \sin\frac{n\pi}{L} x' \, dx'\right] e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$$\longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_s(n,t) \sin\frac{n\pi}{L} x$$

حل معادله گرما در محیط نامحدود ⇐

$$c^2 u_{xx} = u_t \qquad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) < \infty$$

نماد تبدیل

$$\mathcal{F}[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-isx} dx = \bar{\bar{U}}(s,t)$$

$$\xrightarrow{e^{-isx},\ \int} \underbrace{c^2 \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx} e^{-isx} dx}_{\text{با استفاده از خواص تبدیل فوریه}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-isx} dx = \frac{\partial \bar{U}(s,t)}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{F}\left[f^{(n)}(x)\right] = (is)^n \mathcal{F}[f(x)]$$

$$\rightarrow -c^2 s^2 \bar{U}(s,t) = \frac{\partial \bar{U}(s,t)}{\partial t} \longrightarrow \bar{U}(s,t) = A_1 e^{-c^2 s^2 t}$$

$$\bar{U}(s,0) = A_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-isx} dx = F(s)$$

$$\rightarrow \bar{U}(s,t) = F(s) e^{-c^2 s^2 t}$$

$$\longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(s,t) e^{isx} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-c^2 s^2 t} e^{isx} ds$$

$F(s)$ جایگذاری $\longrightarrow u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')e^{-isx'}\,dx'\right\}e^{-c^2s^2t}\,e^{isx}\,ds$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-c^2s^2t}\,e^{-is(x'-x)}\,ds}_{G(x,t|s,0)}\Big]dx'$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[\overset{a^2}{c^2s^2t}+\overset{2ab}{is(x'-x)}]}\,ds \qquad , \int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$$

انتگرال گاوسی

$$\begin{cases} c^2s^2t=a^2 \rightarrow a=cs\sqrt{t} \\ is(x'-x)=2ab=2cs\sqrt{t}\,b \rightarrow b=\dfrac{i(x'-x)}{2c\sqrt{t}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Big[\underbrace{c^2s^2t+is(x'-x)+\frac{i^2(x'-x)^2}{4c^2t}}_{\left(cs\sqrt{t}+\frac{i(x'-x)}{2c\sqrt{t}}\right)^2}-\frac{i^2(x'-x)^2}{4c^2t}\Big]}ds$$

$$=\frac{e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(cs\sqrt{t}+\frac{i(x'-x)}{2c\sqrt{t}}\right)^2}ds}_{\frac{\sqrt{\pi}}{c\sqrt{t}}}$$

$cs\sqrt{t}+\frac{i(x'-x)}{2c\sqrt{t}}=u$

$\rightarrow ds=\frac{du}{c\sqrt{t}}$

$s\rightarrow-\infty \quad u\rightarrow-\infty$

$s\rightarrow+\infty \quad u\rightarrow+\infty$

$$\rightarrow u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,\underbrace{\frac{e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}}{2c\sqrt{\pi t}}}\,dx'$$

Fundamental Solution جواب اساسی معادله گرما

در $t=0$ تعریف نمی شود

جواب را به ازای حالت خاصی از f می‌توان بدست آورد

مثلاً $f(x)=u_0 \rightarrow u(x,t)=\frac{u_0}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}\,dx'$

$$\rightarrow u(x,t)=\frac{u_0}{2c\sqrt{\pi t}}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}\,dx' + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}\,dx'\right\}$$

انتگرال اول $\frac{x'-x}{2c\sqrt{t}}=-z \rightarrow dx'=-2c\sqrt{t}\,dz$

$$\rightarrow =\frac{u_0}{2c\sqrt{\pi t}}\left\{\int_{-\infty}^{\frac{x}{2c\sqrt{t}}} e^{-z^2}\left(-2c\sqrt{t}\,dz\right) + \int_{\frac{-x}{2c\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-w^2}\left(2c\sqrt{t}\right)dw\right\}$$

انتگرال دوم $\frac{x'-x}{2c\sqrt{t}}=w$

$dx'=2c\sqrt{t}\,dw$

$$=\frac{2u_0}{2\sqrt{\pi}}\left\{\int_{-\frac{x}{2c\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-w^2}\,dw + \int_{\frac{x}{2c\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz\right\}$$

$$\star\ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x}^{\infty} e^{-w^2}\,dw = \operatorname{erfc}(x)$$

$$=\frac{u_0}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{-x}{2c\sqrt{t}}\right)+\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)\right]$$

* در مورد کت [illegible] این جواب [illegible] [illegible] سرعت [illegible] [illegible] [illegible]

• معادله موج در حالت نامحدود $-\infty<x<\infty$

$$c^2 u_{xx}=u_{tt}$$

$u(x,0)=f(x)$ $\qquad \lim_{|x|\to\infty} u<\infty$ $\qquad$ (تبدیل فوریه)

$u_t(x,0)=0$

$$\bar{U}(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,e^{-isx}\,dx$$

$y = -x - 1$ $\quad -1 = -1$ $\quad y' = x - y$ $\quad y(0) = -1$

$$\rightarrow -c^2 s^2 \bar{U}(s,t) = \frac{\partial^2 \bar{U}(s,t)}{\partial t^2} \rightarrow$$ (جوابها sin و cos هستند)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \bar{U}(s,t)}{\partial t^2} + c^2 s^2 \bar{U}(s,t) = 0$$

$$\rightarrow \bar{U}(s,t) = A_1 \sin cst + A_2 \cos cst$$

$$\bar{U}_t(s,0)\Big|_{t=0} = 0 \longrightarrow \boxed{A_1 = 0}$$

$$\longrightarrow \bar{U}(s,t) = A_2 \cos cst \qquad \rightarrow \bar{U}(s,0) = A_2 = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx$$

$$\rightarrow \bar{U}(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-isx'} dx' \cdot \cos cst$$

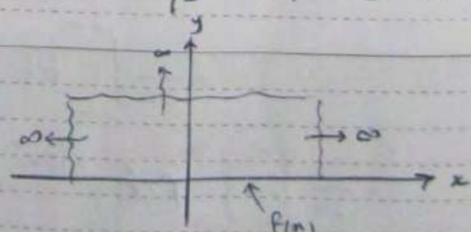
$$\rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(s,t) e^{isx} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-is(x'-x)} \underbrace{\cos cst}_{\frac{e^{isct} + e^{-isct}}{2}} dx' ds \quad \cdot F(x+ct) \cdot f(x-ct)$$

جلسه 20 - 91/9/14

معادله پتانسیل (دوبعدی) را در نیم صفحهٔ بالایی در نظر می‌گیریم. (مسئله دیریکله برای نیم صفحهٔ بالایی)
در جهت y شرط مرزی نمی‌توانیم بنویسیم

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$



$$\begin{cases} \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x,y) < \infty \\ \cancel{\lim u(x,y) < \infty} \end{cases} \qquad u(x,0) = f(x)$$

اگر به جای $u(x,0)$ ، $u_x(x,0)$ را داده بودیم به مسئله نیومان تبدیل می‌شود

در ترکیب حالات بالا هم مسئله روبین را داشتیم.

از تبدیل فوریه برای حل این معادله استفاده می‌کنیم:

$$\bar{u}(s,y)=\mathcal{F}[u(x,y)]=\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\,e^{-isx}\,dx$$

$$\rightarrow \mathcal{F}[u_{xx}]+\mathcal{F}[u_{yy}]=0 \qquad \leftarrow \text{ویژگی خطی تبدیلات فوریه}$$

* ویژگی دیگر: $\mathcal{F}[u_{xx}]=(is)^2\mathcal{F}[u]$

$$\rightarrow -s^2\bar{u}(s,y)+\frac{\partial^2\bar{u}(s,y)}{\partial y^2}=0 \rightarrow$$ معادله دیفرانسیل مرتبه 2

$$\rightarrow \bar{u}(s,y)=A_1e^{sy}+A_2e^{-sy}$$

$$\rightarrow u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}(s,y)\,e^{isx}\,ds$$

A_1 و A_2 ممکن است توابعی از s باشند.

$$\bar{u}(s,y)=A_3e^{-|s|y}$$

$A_3=A_2 \leftarrow s>0$
$A_3=A_1 \leftarrow s<0$
جهت برآورده سازی شرط کرانداری

$$\bar{u}(s,0)=A_3=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-isx}\,dx=F(s)$$

$$\Rightarrow \bar{u}(s,y)=F(s)\,e^{-|s|y} \longrightarrow u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}(s,y)\,e^{-isx}\,ds$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(s)\,e^{-|s|y}\,e^{isx}\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(x')\,e^{-isx'}\,dx'\,e^{-|s|y}\,e^{isx}\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x'-x) - |s|y} \, ds \right\} dx'$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x'-x)-|s|y} \, ds = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{s(y-i(x'-x))} ds + \int_{0}^{\infty} e^{-s[y+i(x'-x)]} ds \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{e^{s(y-i(x'-x))}}{y-i(x'-x)} \Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-s[y+i(x'-x)]}}{-[y+i(x'-x)]} \Bigg|_{0}^{\infty} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{y-i(x'-x)} + \frac{1}{y+i(x'-x)} \right\}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2y}{y^2+(x'-x)^2} \right\} = \frac{y}{\pi[y^2+(x'-x)^2]}$$

انتگرال پواسون برای نیم صفحهٔ بالایی :

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x') \, dx'}{y^2+(x'-x)^2}}$$

if $f(x')=1 \rightarrow u \doteq tg^{-1}$

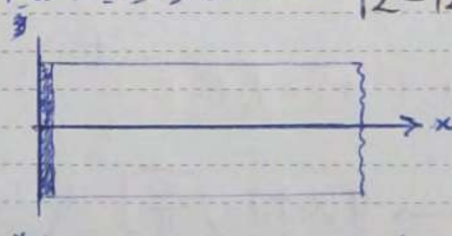
مثال 12-12 معادله انتقال گرما در یک میله با طول نیم محدود

$$u_{xx} = u_t \qquad x>0 \; , \; t>0$$

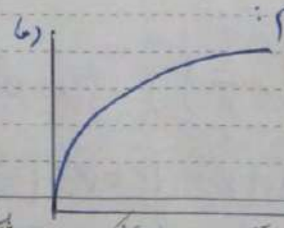
$u(0,t) = 0 \rightarrow$ 0 = دما در

$u(x,0) = f(x)$

و جواب در حالت خاص : ثابت = $f(x)$



در انتقال حرارت داشتیم :



این مسئله را به سه طریق حل خواهیم کرد

۱- تبدیل سینوسی فوریه

۲- " لاپلاس

سری های توانی / انتگرال گیری در صفحه z

$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \eta$

$$\bar{u}_s(s,t) = \mathcal{F}_s\left[u(x,t)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} u(x,t)\sin(sx)\,dx$$

از طرفین معادله نسبت به x تبدیل سینوسی فوریه می‌گیریم :

[مشتق ترادف]

$$\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} u_{xx}\sin(sx)\,dx = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}\sin(sx)\,dx}_{\frac{\partial \bar{u}_s(s,t)}{\partial t}}$$

$$*\int_0^{\infty} u_{xx}\sin(sx)\,dx = u_x\sin(sx)\Big|_0^{\infty} - s\int_0^{\infty} u_x\cos sx\,dx$$

$u_x = 0$ کران بالا

$\sin(sx)=0$ کران پایین

$$= -s\left\{\left[u\cos sx\Big|_0^{\infty}\right] + s\int_0^{\infty} u\sin(sx)\,dx\right\}$$

$$= -s^2\int_0^{\infty} u\sin(sx)\,dx$$

اعمال ضریب

$$* \; -s^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} u\sin(sx)\,dx = -s^2\,\bar{u}_s(s,t)$$

$$\xrightarrow[\text{اصلی}]{\text{جایگذاری در معادله}} \frac{\partial \bar{u}_s(s,t)}{\partial t} = -s^2\,\bar{u}_s(s,t) \xrightarrow{\text{جواب معادله}} u_s(s,t) = A_1 e^{-s^2 t}$$

شرط اولیه $\quad \bar{u}_s(s,0) = A_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin(sx)\,dx = F_s(s)$

$$\Rightarrow \bar{u}_s(s,t) = F_s(s)\,e^{-s^2 t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x')\sin(sx')\,dx'\; e^{-s^2 t}$$

$$\longrightarrow u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \bar{u}_s(s,t)\sin(sx)\,ds$$

در رابطه انتگرال $f(x) \leftarrow x \longrightarrow x'$ ،

$$\rightarrow u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x')\,e^{-s^2 t}\sin(sx')\sin(sx)\,dx'\,ds$$

$$\rightarrow u(x,t) = \int_0^{\infty} f(x')\underbrace{\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-s^2 t}\cdot\sin(sx')\sin(sx)\right]}_{G(x,t|s,0)} dx'$$

$$I=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-s^2t}\sin(sx')\sin(sx)\,ds$$

$$\sin(sx')\sin(sx)=\frac{1}{2}\left[\cos s(x'-x)-\cos s(x'+x)\right]$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-s^2t}\left[\cos s(x'-x)-\cos s(x'+x)\right]ds$$

$$J=\int_0^\infty e^{-s^2t}\cos s(x'-x)\,ds$$

$$\begin{cases} e^{-s^2t}=w \longrightarrow -2st\,e^{-s^2t}\,ds=dw \\ \cos s(x'-x)\,ds=dv \longrightarrow \dfrac{1}{x'-x}\sin s(x'-x)=v \end{cases}$$

$$\Rightarrow J=\frac{e^{-s^2t}}{x'-x}\sin s(x'-x)\Big|_0^\infty+\frac{2t}{x'-x}\int_0^\infty e^{-s^2t}\sin s(x'-x)\,ds$$

$$J(t,x'-x)=\int_0^\infty e^{-s^2t}\cos s(x'-x)\,ds$$

در این انتگرال می‌توانیم نسبت به t یا $x'-x$ مشتق بگیریم!

$$\frac{\partial J(t,x'-x)}{\partial(x'-x)}=\int_0^\infty -s\,e^{-s^2t}\sin s(x'-x)\,ds$$

$$\begin{cases} -se^{-s^2t}\,ds=dv \\ \sin s(x'-x)=w \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2t}e^{-s^2t}=v \\ (x'-x)\cos s(x'-x)\,ds=dw \end{cases}$$

$$=\frac{1}{2t}e^{-s^2t}\sin s(x'-x)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{x'-x}{2t}e^{-s^2t}\cos s(x'-x)\,ds$$

$$\frac{\partial J(t, x'-x)}{\partial (x'-x)} = -\frac{x'-x}{2t} J \rightarrow \frac{\partial J}{J} = -\frac{x'-x}{2t} \partial (x'-x)$$

$$\longrightarrow \ln J = -\frac{(x'-x)^2}{4t} + k_1 \quad \rightarrow J = k_2 e^{-\frac{(x'-x)^2}{4t}}$$

$$k_2 = ? \quad J(t,0) = k_2 = \int_0^\infty e^{-s^2 t} ds \quad \left[z = s\sqrt{t} \quad \rightarrow \int_0^\infty e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{t}} \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \left[\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right],$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$$

$$\longrightarrow k_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$$

$$\longrightarrow J = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \, e^{-\frac{(x'-x)^2}{4t}}$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(x'-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x'+x)^2}{4t}} \right]$$

$$\longrightarrow U(x,t) = \int_0^\infty f(x') \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(x'-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x'+x)^2}{4t}} \right] dx'$$

جواب مسأله برای حالت خاص $\boxed{f(x) = U_0}$

$$\rightarrow \frac{U(x,t)}{U_0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(x'-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x'+x)^2}{4t}} \right\} dx'$$

$$\left. \begin{array}{l} * \ \frac{x'-x}{2\sqrt{t}} = z \\ * \ \frac{x'+x}{2\sqrt{t}} = v \end{array} \right\} \rightarrow \frac{U}{U_0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left[\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-z^2} 2\sqrt{t}\, dz - \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-v^2} 2\sqrt{t}\, dv \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-z^2} dz + \int_\infty^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-v^2} dv \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u}{u_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)}$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx \rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{isx} ds$$

می‌خواهیم از تبدیل فوریه به تبدیل لاپلاس برسیم.

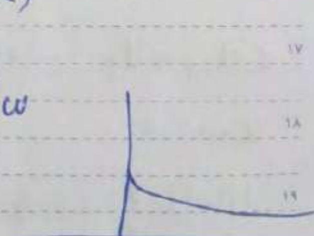
به جای متغیر s می‌توانیم از متغیر دیگری مانند $\underline{\underline{\omega}}$ استفاده کنیم

تعریف: $$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-\gamma x} f(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

تبدیل فوریه $\Phi(\omega)$: $$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_0^{\infty} f(x) e^{-(\gamma + i\omega)x} dx$$

$$\rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega x} d\omega = e^{-\gamma x} f(x)$$

$$\longrightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{(\gamma + i\omega)x} d\omega$$



اگر $\gamma + i\omega = s \longrightarrow d\omega = \frac{ds}{i}$

$$\rightarrow \Phi(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

$$, f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Phi(s) e^{sx} ds$$

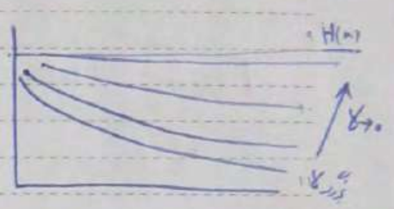
از نظر هندسی γ چه معنایی دارد

تبدیل فوریه این تابع را پیدا می‌کنیم:

فرض $f(x) = H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

$$\to \int_0^{\infty} e^{-iwx}\, dx = \frac{e^{-iwx}}{-iw}\Big|_0^{\infty} \quad (\text{بی معنی})$$

ترفند: $H(x) = \lim_{\gamma \to 0} e^{-\gamma x} H(x)$



$$\to \int_0^{\infty} e^{-(\gamma + iw)x}\, dx = \frac{e^{-(\gamma+iw)x}}{-(\gamma+iw)}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\gamma + iw}$$

γ: طول همگرایی

کوچک γ که باعث می‌شود انتگرال تبدیل لاپلاس همگرا شود.

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{1}{\gamma + iw} = \frac{1}{iw} \quad (\text{با معنی})$$

جلسه ۲۱ - ۹۱/۹/۱۹

(شرط مرزی همگن - معادله گرمای یک بعدی)

این معادله را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل می‌کنیم.

$c^2 u_{xx} = u_t \qquad 0 < x < L,\ t > 0$

$u(0,t) = 0$

$u(L,t) = 0$

$u(x,0) = f(x)$

حل تفکیک متغیرها

$$\to u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$A_n = \frac{2}{L}$

$\to \bar{u}$

$$\to c^2 \frac{\partial^2 \bar{u}(x,s)}{\partial x^2} = s\bar{u}(x,s) - u(x,0)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \bar{u}(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{c^2}\bar{u}(x,s) = -\frac{f(x)}{c^2}$$ (معادله مرتبه دو خطی - ناهمگن)

$$\rightarrow \bar{u}_h = A_1 e^{\frac{x}{c}\sqrt{s}} + A_2 e^{-\frac{x}{c}\sqrt{s}}$$

or $B_1 \sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x + B_2\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x$

از روش تغییر پارامترها برای بدست آوردن جواب خصوصی استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases} u_1 = \sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x \\ u_2 = \cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x \end{cases} \rightarrow W = \begin{vmatrix} \sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x & \cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x \\ \frac{\sqrt{s}}{c}\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x & \frac{\sqrt{s}}{c}\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{s}}{c}$$

$$\bar{u}_p(x,s) = v_1 u_1 + u_2 v_2$$

$$v_1' = -\frac{c}{\sqrt{s}}\begin{vmatrix} 0 & \cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x \\ -\frac{f(x)}{c^2} & \frac{\sqrt{s}}{c}\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x \end{vmatrix} = -\frac{1}{c\sqrt{s}} f(x)\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x$$

$$\rightarrow v_1 = \int_0^x -\frac{1}{c\sqrt{s}} f(x')\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x'\,dx'$$

$$v_2' = -\frac{c}{\sqrt{s}}\begin{vmatrix} \sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x & 0 \\ \frac{\sqrt{s}}{c}\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x & f(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{c\sqrt{s}} f(x)\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x$$

$$\rightarrow v_2 = \int_0^x \frac{1}{c\sqrt{s}} f(x')\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x'\,dx'$$

$$\rightarrow \bar{u}_g(x,s) = B_1\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x + B_2\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x - \frac{1}{c\sqrt{s}}\int_0^x f(x')\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x'\,dx'$$

$$+ \frac{1}{c\sqrt{s}}\int_0^x f(x')\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x'\,dx'$$

$$\rightarrow \bar{U}_g(x,s) = B_1 \sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x + B_2\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x + \frac{1}{c\sqrt{s}}\int_0^x f(x')\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}(x'-x)\,dx'$$

$$\bar{U}_g(0,s) = 0 \longrightarrow \boxed{B_2 = 0}$$

$$\bar{U}_g(L,s) = 0 \rightarrow B_1\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}L + \frac{1}{c\sqrt{s}}\int_0^L f(x')\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}(x'-L)\,dx' = 0$$

$$\rightarrow \boxed{B_1 = -\frac{1}{c\sqrt{s}\,\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}L}\int_0^L f(x')\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}(x'-L)\,dx'}$$

$$\rightarrow \bar{U}_g(x,s) = \frac{1}{c\sqrt{s}}\int_0^x f(x')\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}(x'-x)\,dx' - \left(\frac{1}{c\sqrt{s}}\frac{\int_0^L f(x')\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}(x'-L)\,dx'}{\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}L}\right) = \sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x$$

$$\rightarrow u(x,t) = L^{-1}\left[\bar{U}_g(x,s)\right]$$

فرض $G(s) = \dfrac{\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x}{\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}L} \longrightarrow g(t) = ?$

دنبال مقادیری هستیم که به ازای s های آن ها مخرج تعریف نمی شود

$$\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}L = 0 \rightarrow i\sin\frac{i\sqrt{s}}{c}L = 0 \Rightarrow \sin n\pi$$

$$\rightarrow i\frac{\sqrt{s}}{c}L = n\pi \rightarrow \sqrt{s} = \frac{cn\pi}{Li}$$

$$\rightarrow s = -\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2$$

$$\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{m=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z)\right]\Big|_{z=z_m}$$

[B.V.P] → by: Powers
Boundary Value Problem

$$* \ \sinh(ix) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = i \sin x$$

$$\sinh\left(-\frac{cn\pi i}{cL}\right)x = -i \underbrace{\sin\frac{n\pi}{L}x}_{\text{همان تابع ویژه}}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$

* مسئله را در حالتی حل می‌کنیم که تابع $f(x)$ مقدار ثابتی باشد. ، $x>0$

$$c^2 u_{xx} = u_t \qquad x>0 \ , \ t>0$$

$u(0,t)=0$
$u(x,0)=u_0$

$$\underline{\bar{u}(x,s)} = L\left[u(x,t)\right] = \int_0^\infty u(x,t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\rightarrow c^2 \frac{\partial^2 \bar{u}(x,s)}{\partial x^2} = s\bar{u}(x,s) - u_0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \bar{u}(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{c^2}\bar{u}(x,s) = -\frac{u_0}{c^2}$$

$$\rightarrow \bar{u}(x,s) = A_1 e^{\frac{x}{c}\sqrt{s}} + A_2 e^{-\frac{x}{c}\sqrt{s}} + \frac{u_0}{s}$$

شرط کراندار بودن $\bar{u}$ وقتی ... : $\lim_{x\to\infty} \bar{u}(x,s) < \infty \longrightarrow \boxed{A_1 = 0}$

شرط مرزی $\bar{u}(0,s) = 0 = A_2 + \frac{u_0}{s} \longrightarrow A_2 = -\frac{u_0}{s}$

$$\longrightarrow \bar{u}(x,s) = \frac{u_0}{s}\left(1 - e^{-\frac{x}{c}\sqrt{s}}\right)$$

$$L^{-1}\left[\frac{U_0}{s}\right] = U_0$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s} e^{-\frac{x}{c}\sqrt{s}}\right] = ?$$

$$\frac{x}{c} = K \longrightarrow G(s) = \frac{1}{s} e^{-K\sqrt{s}} \longrightarrow g(t) = ?$$

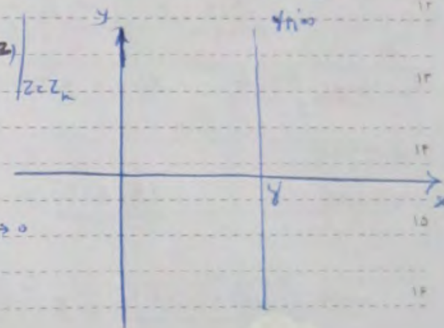
$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \underbrace{\frac{1}{s} e^{-K\sqrt{s}}}_{F(z)} e^{st}\, ds$$

$$s = \gamma + i\omega$$

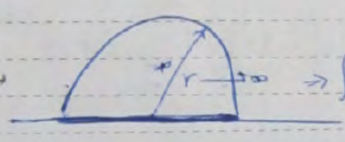
$\gamma = 0 \longrightarrow$ تبدیل فوریه

$\omega = 0 \longrightarrow$ تبدیل لاپلاس

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \oint_c f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{m=1}^{n} \operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=z_k}$$



[illegible] ←



$\Rightarrow \int f \to 0$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c F(z)\,dz$$

$$e^{-K\sqrt{z}} \begin{cases} \nearrow x+iy \\ \searrow x-iy \end{cases}$$

نیم صفحه بالا $\quad 0 < \theta < \pi$

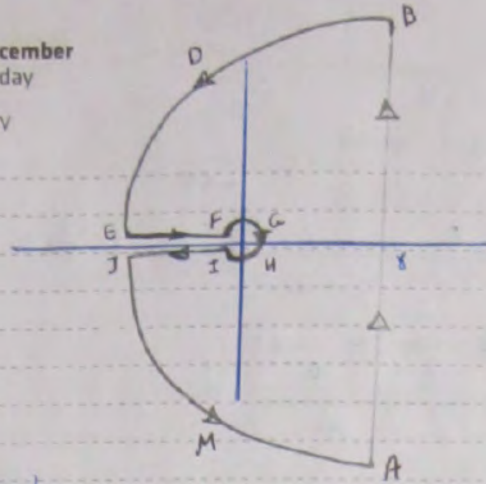
$$z = re^{i\theta}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{\frac{i\theta}{2}} \longrightarrow \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{r}$$

پایینی $\quad \sqrt{z} = -i\sqrt{r}$

خط $x=0$ برای $\sqrt{z}$ خط برش می‌باشد در $\theta = \pi$

$s=0$ (یا $z=0$) برای تابع $G(z)$ یک نقطه تکین می‌باشد.



$$\rightarrow \frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_c F(z)\,dz\right\}=0$$

$$C:\ \overline{AB}+\widehat{BDE}+\overline{EF}+\widehat{FGHI}+\overline{IJ}+\widehat{JMA}$$

$$\rightarrow \int_A^B+\int_{BDE}+\int_{EF}+\int_{FGHI}+\int_{IJ}+\int_{JMA}=0$$

$BDE+JMA \qquad S=Re^{i\theta}$

$$G(s)=\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{s}=\frac{e^{-k\sqrt{R}\,e^{i\theta/2}}}{Re^{i\theta}} \qquad R\to\infty \to G(s)=0$$

روی حاصل جمع دو منحنی انتگرال صفر می‌باشد.

$$FGHI:\ S=\varepsilon e^{i\theta} \rightarrow \int \frac{e^{-k\sqrt{s}}}{s}e^{st}\,ds=\int_{+\pi}^{-\pi}\frac{e^{-k\sqrt{\varepsilon}\,e^{i\theta/2}}\,e^{\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}}\left(i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta\right)$$

$$(\varepsilon\to 0)\Rightarrow \qquad =\int_{+\pi}^{-\pi} i\,d\theta = i\theta\Big|_{\pi}^{-\pi}=-2\pi i$$

$$EF:\ S=xe^{i\pi}=-x \qquad \begin{array}{l} S=-R=-x \\ S=-\varepsilon=-x \end{array}$$

$$\int_R^{\varepsilon}\frac{e^{-k\sqrt{x}\,e^{i\pi/2}}\,e^{-xt}}{-x}(-dx)=\int_R^{\varepsilon}\frac{e^{-ki\sqrt{x}}\,e^{-xt}}{x}\,dx$$

$IJ: \quad S = xe^{-i\pi} = -x \quad (-i)$

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-k\sqrt{x}\,e^{-i\pi/2}}\, e^{-xt}}{-x}(-dx)$$

$$= \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ki\sqrt{x}}\, e^{-xt}}{x}\, dx$$

$$EF + IJ = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-xt}}{x}\left(e^{ki\sqrt{x}} - e^{-ki\sqrt{x}}\right) dx$$

$$= 2i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-xt}}{x}\left(\frac{e^{ki\sqrt{x}} - e^{-ki\sqrt{x}}}{2i}\right) dx$$

$$\begin{cases} \varepsilon \to 0 \\ R \to \infty \end{cases} \quad = 2i \int_{0}^{\infty} \frac{\sin k\sqrt{x}}{x}\, e^{-xt}\, dx$$

$$\rightarrow \int_{A}^{B} + (-2\pi i) + 2i \int_{0}^{\infty} \frac{\sin k\sqrt{x}}{x}\, e^{-xt}\, dx = 0$$

$$\rightarrow \int_{A}^{B} = 2\pi i - 2i \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-xt}}{x} \sin k\sqrt{x}\, dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} = 1 - \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-xt}}{x} \sin k\sqrt{x}\, dx}$$

$$\sqrt{x} = z \rightarrow x = z^2 \qquad \Rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-z^2 t}}{z^2} \sin kz\,(2z\,dz)$$

$$\begin{cases} x=0 & z=0 \\ x\to\infty & z\to\infty \end{cases}$$

$$\overbrace{=2\int_0^{\infty}\frac{e^{-z^2t}}{z}\sin kz\,dz}^{J(k,t)}$$

$$\rightarrow J(k,t)=2\int_0^{\infty}\frac{e^{-z^2t}}{z}\sin kz\,dz$$

$$\frac{\partial J}{\partial k}=2\underbrace{\int_0^{\infty}e^{-z^2t}\cos kz\,dz}_{\text{را قبلاً اثبات شده}}=2\sqrt{\frac{\pi}{4t}}\,e^{-\frac{k^2}{4t}}$$

جلسه 22 - 91/10/3

• تبدیل ملین: قابل استخراج از تبدیل فوریه

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,e^{-i\omega(t-x)}\,dt\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{+i\omega x}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,e^{-i\omega t}\,dt}_{G(\omega)}\,d\omega$$

یعنی تغییر متغیرها را در نظر می‌گیریم

$$e^{t}=u\rightarrow t=\ln u\qquad\begin{cases}t\to-\infty & u\to 0\\ t\to+\infty & u\to+\infty\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\underbrace{\int_0^{\infty}g(\ln u)\,u^{-i\omega-1}\,du}_{G(\omega)}\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\int_0^{\infty}g(\ln u)\,u^{-i\omega-1}\,\frac{u^{\gamma}}{u^{\gamma}}\,du\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\int_0^{\infty}g(\ln u)\,u^{+\gamma-i\omega-1}\,u^{-\gamma}\,du\,d\omega$$

$$e^{x}=y\rightarrow x=\ln y\rightarrow g(\ln y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}y^{i\omega}\int_0^{\infty}g(\ln u)\,u^{\gamma-i\omega-1}\,u^{-\gamma}\,du\,d\omega$$

$$\gamma - i\omega = s \;\rightarrow\; d\omega = -\frac{s}{i}$$

$$\rightarrow g(\ln y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+i\infty}^{\gamma-i\infty} y^{i\omega}\int_0^\infty g(\ln u)\, u^{\gamma-i\omega-1}\, u^{-\gamma}\, du\,(-s)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} y^{i\omega}\int_0^\infty g(\ln u)\, u^{s-1}\, u^{-\gamma}\, du\,(ds)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} y^{-\gamma}\, y^{i\omega}\, y^{\gamma}\int_0^\infty g(\ln u)\, u^{s-1}\, u^{-\gamma}\, du\,(ds)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} y^{-s}\, y^{\gamma}\int_0^\infty g(\ln u)\, u^{s-1}\, u^{-\gamma}\, du\,(ds)$$

$$\underbrace{y^{-\gamma} g(\ln y)}_{f(y)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} y^{-s}\int_0^\infty g(\ln u)\, u^{s-1}\, u^{-\gamma}\, du\, ds$$

$$\rightarrow u^{-\alpha} g(\ln u) = f(u)$$

$$\rightarrow f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Big(\underbrace{\int_0^\infty f(u)\, u^{s-1}\, du}_{M[f(u)]}\Big)\, y^{-s}\, ds$$

$$\rightarrow M(s) = M[f(x)] = \int_0^\infty f(x)\, x^{s-1}\, dx$$

$$\rightarrow f(x) = M^{-1}[M(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} M(s)\, x^{-s}\, ds$$

این تبدیل کاربرد چندانی در مسائل مهندسی ندارد.

$$\star\ M\left[e^{-x}\right] = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx = \Gamma(s)$$

$$\star\ M\left[\sin x\right] = \int_0^{\infty} x^{s-1} \sin x\, dx$$

$$\star\ M\left[\cos x\right] = \int_0^{\infty} x^{s-1} \cos x\, dx$$

$$\star\ M\left[\sin wx\right] = \int_0^{\infty} x^{s-1} \sin wx\, dx \qquad \star\ M\left[\cos wx\right]$$

$$\star\ M\left[\cos wx + \sin wx\right] = \int_0^{\infty} x^{s-1} \left(\cos wx + \sin wx\right) dx$$

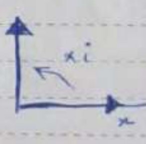
انتگرال بالا را با استفاده از قضیه مانده‌ها حساب می‌کنیم

$$\begin{cases} \cos wx = \mathrm{Re}\left(e^{-iwx}\right) \\ \sin wx = \mathrm{Im}\left(e^{-iwx}\right) \end{cases}$$

اگر تبدیل ملینِ e^{-iwx} را حساب کنیم، قسمت Re آن تبدیل ملینِ $\cos wx$ و قسمت Im

آن تبدیل ملینِ $\sin wx$ خواهد بود.

$$M\left[e^{-iwx}\right] = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-iwx}\, dx$$



$$iwx = z \longrightarrow dx = \frac{dz}{iw}$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{z}{iw}\right)^{s-1} e^{-z} \frac{dz}{iw} = \frac{1}{(iw)^s} \underbrace{\int_0^{\infty} z^{s-1} e^{-z}\, dz}_{\Gamma(s)}$$

$$\rightarrow M\left[e^{-iwx}\right] = \frac{\Gamma(s)}{w^s i^s} \quad , \quad i = e^{\frac{\pi i}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma(s)}{w^s} e^{-\frac{\pi i s}{2}} = \frac{\Gamma(s)}{w^s}\left(\cos\frac{\pi s}{2} - i \sin\frac{\pi s}{2}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} M[\cos wx] = \dfrac{\Gamma(s)}{w^s}\cos\dfrac{\pi s}{2} \\ M[\sin wx] = \dfrac{\Gamma(s)}{w^s}\left(-\sin\dfrac{\pi s}{2}\right) \end{cases}$$

$$* \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \rightarrow M\left[\frac{1}{1+x}\right] = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx = \beta(s,1-s)$$

$$= \Gamma(s)\Gamma(1-s)$$

• تبدیل هانکل

در سیستمی که سیستم دارای تقارن دایره‌ای باشد.

هر متغیری که بحث می‌شود مستقل از زاویهٔ محیط خواهد بود. (فقط وابسته به r خواهد بود)

تبدیل فوریهٔ یک تابع دو متغیره را در نظر می‌گیریم :

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{-iw(u-x)}\,du\,dw$$

$$\mathcal{F}[g(x,y)] = G(u,v)$$

$$\rightarrow G(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, e^{-i(xu+yv)}\,dx\,dy$$

$$\rightarrow g(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(u,v)\, e^{i(ux+yv)}\,du\,dv$$

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} \rightarrow (r,\theta) \Longrightarrow \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}$$

$$\begin{cases} u \\ v \end{cases} \rightarrow (\rho,\phi) \Longrightarrow \begin{array}{l} u = \rho\cos\phi \\ v = \rho\sin\phi \end{array}$$

$$xu + yv = \rho r\cos\theta\cos\phi + \rho r\sin\phi\sin\theta = \rho r\cos(\theta-\phi)$$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۳۰						۱
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲
۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹

$$G(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} r g(r) e^{-i\rho r \cos(\phi-\theta)} \, d\theta \, d$$

$$g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \rho G(\rho) e^{i\rho r \cos(\theta-\phi)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \quad dx\,dy$$
$$\downarrow$$
$$\int\int \quad dr\,d\theta$$

قبلاً داشتیم : $J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\, d\theta$

$$J_0(\rho r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos(\theta-\phi)} \, d\theta$$

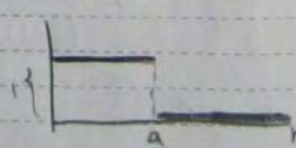
$$\rightarrow G(\rho) = \int_0^{\infty} r g(r) J_0(\rho r)\, dr = H_0[g(r)]$$

تبدیل وارون هنکل $g(r) = \int_0^{\infty} \rho G(\rho) J_0(\rho r)\, d\rho$

$$\Rightarrow \quad H_n[f(r)] = \int_0^{\infty} r f(r) J_n(\rho r)\, dr$$

* مثال :

$H_n(r^n \underbrace{H(a-r)}_{\text{تابع پله‌ای هویساید}})$ $\qquad H(a-r) = \begin{cases} 1 & a-r \geq 0 \\ 0 & a-r < 0 \end{cases}$



$$\to H_n\left[r^n H(a-r)\right] = \int_0^\infty r^{n+1} H(a-r) J_n(\rho r)\, dr$$

$$= \int_0^a r^{n+1} J_n(\rho r)\, dr$$

$* \ \rho r = x \to r = \frac{x}{\rho}$ $\quad r=0 \quad x=0$; $\quad r=a \quad x=\rho a$

$$= \int_0^{\rho a} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{n+1} J_n(x) \frac{dx}{\rho} = \frac{1}{\rho^{n+2}} \int_0^{a} x^{n+1} J_n(x)\, dx$$

$* \ \frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x)$

$$= \frac{1}{\rho^{n+2}} x^{n+1} J_{n+1}(x) \Big|_0^{\rho a} = \frac{(\rho a)^{n+1}}{\rho^{n+2}} J_{n+1}(\rho a)$$

$$= \frac{a^{n+1}}{\rho} J_{n+1}(\rho a)$$

$$* \ H_0\left[e^{-a^2 r^2}\right] = \int_0^\infty r e^{-a^2 r^2} J_0(\rho r)\, dr$$

$$\int x^p J_q(x)\, dx \xrightarrow{\text{قابل حل اگر}} p+q = 2n+1$$

$$= \int_0^\infty r e^{-a^2 r^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\rho r}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}\, dr$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \int_0^\infty e^{-a^2 r^2} r^{2k+1}\, dr$$

$a^2 r^2 = t \to r = \frac{\sqrt{t}}{a}$ $\quad r=0 \quad t=0$; $\quad r=\infty \quad t=\infty$

$$= \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{\sqrt{t}}{a}\right)^{2k+1} \frac{dt}{2a\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{2a^{2k+2}} \int_0^\infty e^{-t} t^k \, dt = \frac{k!}{2a^{2k+2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}}{(k!)^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{(k!)}}{2a^{2k+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2a^2} \frac{\left(\frac{\rho}{2a}\right)^{2k}}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2a^2} \frac{\left(\frac{\rho^2}{4a^2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2a^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\rho^2}{4a^2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2a^2} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2}}$$

$$\star \; H_0\left\{\frac{e^{-ar}}{r}\right\} = \int_0^\infty e^{-ar} J_0(\rho r)\, dr = \frac{1}{\sqrt{a^2+\rho^2}}$$

$a \to 0 \Rightarrow \star \; H_0\left(\frac{1}{r}\right)$ ✓

$$\rightarrow \lim_{a \to 0} H_0\left\{\frac{e^{-ar}}{r}\right\} = \frac{1}{\rho}$$

★ تبدیل هنکل مشتقات تابع

$$F(\rho) = H_n[f(r)]$$

$$H_1[f'(r)] = \int_0^\infty r f'(r) J_1(\rho r)\, dr$$

$f'(r)dr = du \qquad u = f(r)$

$r J_1(\rho r) = v \qquad dv = r\rho J_0(\rho r)$

$$\rightarrow v f(r) J_1(\rho r)\Big|_0^\infty - \rho \int_0^\infty r f(r) J_0(\rho r)\, dr = -\rho H_0[f(r)]$$

مشتق از رابطه محصول ← تبدیل هنکل مرتبه صفر

تبدیل را برای کامل شما هست ← " " " مرتبه n

$$\star\ H_0\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rf(r)\right)\right]=$$

$$\rightarrow I=\int_0^\infty J_0(\rho r)\frac{d}{dr}\left(rf(r)\right)dr$$

$$=rf(r)J_0(\rho r)\Big|_0^\infty+\rho\int_0^\infty rf(r)J_1(\rho r)\,dr$$

$$=\rho H_1\left[f(r)\right]$$

★ فرض کنید $f'(r)=g(r)$

$$\rightarrow \rho H_1\left[f'(r)\right]=-\rho^2H_0\{f(r)\}\ \rightarrow\ \boxed{H_1\{f'(r)\}=-\rho H_0\{f(r)\}}$$

$$\star\ \int_0^\infty rf(r)g(r)\,dr=\int_0^\infty \rho F(\rho)G(\rho)\,d\rho$$

$F(\rho)$ و $G(\rho)$ تبدیلات هنکل توابع $f(r)$ و $g(r)$ از مرتبه دلخواه می‌باشند

جلسه ۲۳ - ۹۱/۹/۲۶

$$H_n\left[e^{-a^2r^2}\right]=\frac{1}{2a^2}e^{-\frac{\rho^2}{1+a^2}}$$

$$H_n\left\{r^ne^{-a^2r^2}\right\}=\int_0^\infty r^{n+1}J_n(\rho r)e^{-a^2r^2}dr=\int_0^\infty r^{n+1}\left(\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{\left(\frac{\rho r}{2}\right)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(k+n+1)}\right)e^{-a^2r^2}dr$$

$$=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(k+n+1)}\int_0^\infty r^{n+1}e^{-a^2r^2}r^{2k+n}\,dr$$

$$a^2r^2=t\rightarrow r=\frac{\sqrt{t}}{a}\rightarrow dr=\frac{dt}{2a\sqrt{t}}\quad\begin{cases}r=0 & t=0\\ r=\infty & t=\infty\end{cases}$$

$$I = \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{\sqrt{t}}{a}\right)^{2k+2n+1}\frac{dt}{2a\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{2a\, a^{2k+2n+1}}\int_0^\infty e^{-t}\underbrace{(\sqrt{t})^{2(k+n)}}_{t^{k+n}}dt = \frac{1}{2a\, a^{2k+2n+1}}\,\Gamma(k+n+1)$$

$$\rightarrow H_n\left\{r^n e^{-a^2r^2}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(k+n+1)}\times\frac{\Gamma(k+n+1)}{2a\cdot a^{2(k+n)+1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^n}{2a^2a^{2n}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}}{k!\,a^{2k}} \quad \left(\frac{\rho^2}{4a^2}\right)^k$$

$$\Rightarrow \boxed{H_n\left\{r^n e^{-a^2r^2}\right\} = \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^n}{2a^2\cdot a^{2n}}\,e^{-\frac{\rho^2}{4a^2}}}$$

جلسه قبل $H_1\{f'(r)\}$ را بدست آوردیم. حال می‌خواهیم $H_n\{f'(r)\}$ را بدست آوریم:

$$H_n\{f'(r)\} = \int_0^\infty r f'(r) J_n(\rho r)\,dr = \int_0^\infty \underbrace{rJ_n(\rho r)}_{v}\underbrace{f'(r)dr}_{du}$$

$$= rf(r)J_n(\rho r)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(r)\frac{d}{dr}\left[rJ_n(\rho r)\right]dr$$

$0 \Leftarrow \infty$ [illegible] J_n [illegible] $f(r)$ [illegible]

0 [illegible] $\leftarrow$ [illegible]

$$\star\ \frac{d}{dr}\left[rJ_n(\rho r)\right] = J_n(\rho r) + r\left[\rho J_n'(\rho r)\right]$$

$$\rightarrow H_n\{f'(r)\} = -\int_0^\infty f(r)\left\{J_n(\rho r) + r\left[\rho J_n'(\rho r)\right]\right\}dr$$

می‌توانیم بنویسیم:

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

$$\xrightarrow{\partial t} \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, t^{n-1} J_n(x)$$

$$\to \frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n + \frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^{n-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x)\, t^{n-1}$$

$$\to \frac{x}{2}\left[J_{n+1} + J_{n-1}\right] = nJ_n$$

$$\to H_n\{f'(r)\} = -\int_0^\infty f(r)\left[\frac{\rho r}{2n}\left(J_{n+1}(\rho r) + J_{n-1}(\rho r)\right) + \frac{\rho r}{2}\left(J_{n-1}(\rho r) - J_{n+1}(\rho r)\right)\right] dr$$

$$= \int_0^\infty \left\{\left[\frac{\rho r}{2n} f(r) J_{n+1}(\rho r) + \frac{\rho r}{2n} f(r) J_{n-1}(\rho r)\right] + \left[\frac{\rho r}{2} f(r) J_{n-1}(\rho r) - \frac{\rho r}{2} f(r) J_{n+1}(\rho r)\right]\right\} dr$$

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

$$\xrightarrow{\partial x} \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=1}^{\infty} J_n'(x)\, t^n$$

$$\to \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n t^{n+1} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n t^{n-1} = 2\sum J_n' t^n$$

$$\to \boxed{J_n' = \frac{1}{2}\left[J_{n-1} - J_{n+1}\right]}$$

$$\to H_n\{f'(r)\} = -\left\{\frac{\rho}{2n} H_{n+1}[f(r)] - \frac{\rho}{2} H_{n+1}[f(r)] + \frac{\rho}{2n} H_{n-1}[f(r)] + \frac{\rho}{2} H_{n-1}[f(r)]\right\}$$

$$= -\frac{\rho}{2}\left\{\left(\frac{1}{n}-1\right) H_{n+1}[f(r)] + \left(\frac{1}{n}+1\right) H_{n-1}[f(r)]\right\}$$

$$= \frac{-\rho}{2n}\left\{(1-n) H_{n+1}[f(r)] + (1+n) H_{n-1}[f(r)]\right\}$$

$$f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rf'(r)\right]$$

$$f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)-\frac{\nu^2}{r^2}f(r)=0 \longrightarrow J$$ (تابع بسل)

می‌خواهیم تبدیل $H_0\left\{\frac{d}{dr}(rf'(r))\right\}$

$$H_0\left\{\frac{d}{dr}\left[rf'(r)\right]\right\}=\int_0^\infty rJ_0(\rho r)\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rf'(r)\right]\right\}dr=\int_0^\infty J_0(\rho r)\,d\left[rf'(r)\right]$$

$$=rf'(r)J_0(\rho r)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty rf'(r)\frac{d}{dr}\left[J_0(\rho r)\right]dr$$

در هر دو کران صفر

$$=\rho\underbrace{\int_0^\infty rf'(r)J_1(\rho r)\,dr}_{-\rho H_0\{f(r)\}}=-\rho^2H_0\left[f(r)\right]$$

★مثال:

$$u_t=c^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right)+f(r)\delta(t)\qquad r>0,\ t>0$$

$$u(r,0)=0$$

برای این که بدانیم از تبدیل هنکل چه مرتبه‌ای استفاده کنیم:

از u وابسته به ϕ یا θ نباشد $\leftarrow H_0$

دیگر اگر u وابسته به ϕ یا θ باشد $\leftarrow H_n$ (n غیر از صفر)

$$\bar{u}(\rho,t)=\int_0^\infty ru(r,t)J_0(\rho r)\,dr$$

$$\rightarrow\int_0^\infty r\frac{\partial u}{\partial t}J_0(\rho r)\,dr=c^2H_0\left[u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right]+\int_0^\infty \delta(t)\,rf(r)J_0(\rho r)\,dr$$

$$\rightarrow\frac{\partial\bar{u}(\rho,t)}{\partial t}=-\rho^2c^2\,\bar{u}(\rho,t)+\delta(t)F(\rho)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \bar{u}(\rho,t)}{\partial t} + \rho^2 c^2 \bar{u}(\rho,t) = \delta(t)\, F(\rho)$$

با پیدا کردن عامل انتگرال ساز داریم:

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{u}(\rho,t)\, e^{\rho^2 c^2 t}\right] = F(\rho)\,\delta(t)\, e^{\rho^2 c^2 t}$$

$$\xrightarrow{\int_0^t dt} \bar{u}(\rho,\tau)\, e^{\rho^2 c^2 \tau}\Big|_0^t = \underbrace{\int_0^t F(\rho)\,\delta(\tau)\, e^{\rho^2 c^2 \tau}\, d\tau}_{F(\rho)} \qquad \delta(\tau-0)$$

$$\rightarrow \bar{u}(\rho,t) = F(\rho)\, e^{-\rho^2 c^2 t}$$

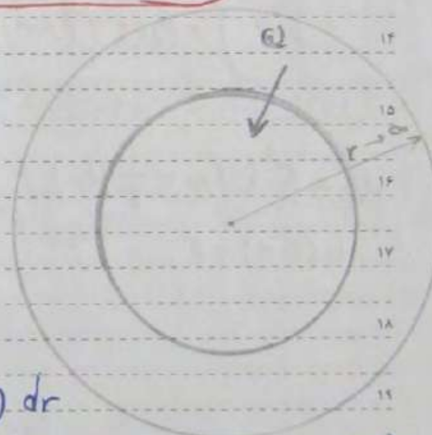
$$\xrightarrow[\text{تبدیل}]{\bar{H}_0^{-1}} \boxed{u(r,t) = \int_0^\infty \rho\, F(\rho)\, e^{-\rho^2 c^2 t} J_0(\rho r)\, d\rho}$$

جواب مسأله

اگر داشته باشیم

آهنگ انتقال گرما

$$f(r) = \frac{Q}{\pi a^2}\underbrace{H(a-r)}_{\text{تابع پله‌ای واحد (هوی‌ساید)}}$$



$$F(\rho) = H_0[f(r)] = \int_0^\infty r \frac{Q}{\pi a^2} H(a-r)\, J_0(\rho r)\, dr \qquad H(a-r) = \begin{cases} 1 & a-r \geq 0 \\ 0 & a-r < 0 \end{cases}$$

$$= \int_0^a \frac{Q}{\pi a^2}\, r J_0(\rho r)\, dr$$

$$= \frac{Q}{\pi a^2}\int_0^a \frac{x}{\rho} J_0(x) \frac{dx}{\rho} = \frac{Q}{\pi \rho^2 a^2}\, x J_1(x)\Big|_0^{\rho a} = \frac{Q}{\pi \rho a} J_1(\rho a)$$

$$\rightarrow u(r,t) = \int_0^\infty \rho \left(\frac{Q}{\pi \rho a}\right) J_1(\rho a) J_0(\rho r)\, e^{-\rho^2 c^2 t}\, d\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{U(r,t) = \frac{Q}{\pi a} \int_0^\infty J_1(\rho a) J_0(\rho r)\, e^{-\rho^2 c^2 t}\, d\rho}$$

• تمرین ۹۵ کتاب

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + u_{zz} = -A_0\, q(r)$$

$$u(r,0) = 0 \qquad \lim_{\substack{r\to\infty \\ z\to\infty \\ r\to 0}} |u(r,z)| < \infty$$

از تبدیل هنکل مرتبه صفر نسبت به متغیر r داریم:

$$H_0\left[u_{rr} + \frac{1}{r} u_r\right] + H_0\left[u_{zz}\right] = -A_0\, H_0\left[q(r)\right]$$

اگر $\bar{U}(\rho,z) = H_0[u(r,z)]$, $\bar{Q}(\rho) = H_0[q(r)]$

$$-\rho^2 \bar{U}(\rho,z) + \frac{\partial^2 \bar{U}(\rho,z)}{\partial z^2} = -A_0\, \bar{Q}(\rho)$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ناهمگن

$$\rightarrow \bar{U}(\rho,z) = C_1 e^{\rho z} + C_2 e^{-\rho z} + A_0 \frac{\bar{Q}(\rho)}{\rho^2}$$

از شرط کران‌دار بودن $z\to\infty \quad u<\infty$

$$\lim_{z\to\infty} \bar{U}(\rho,z) < \infty \longrightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$\bar{U}(\rho,0) = 0 \longrightarrow \boxed{C_2 = -\frac{A_0 \bar{Q}(\rho)}{\rho^2}}$$

$$\rightarrow \bar{U}(\rho,z) = \frac{A_0 \bar{Q}(\rho)}{\rho^2}\left(1 - e^{-\rho z}\right)$$

$$\xrightarrow{H_0^{-1}} \boxed{u(r,z) = A_0 \int_0^\infty \frac{\bar{Q}(\rho)}{\rho}(1-e^{-\rho z}) J_0(\rho r)\, d\rho}$$

اگر تابع $q(\rho)$ داده شود

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{c^2} u_{tt} \qquad r>0,\ t>0$$

$$u(r,0) = f(r) \qquad , \qquad \lim_{\substack{r\to\infty \\ t\to\infty \\ r\to 0}} |u(r,t)| < \infty$$
$$u_t(r,0) = g(r)$$

$$\to H_0\left[u_{rr} + \frac{1}{r} u_r\right] = \frac{1}{c^2} H_0\left[u_{tt}\right] \quad , \ \bar{u}$$

$$\bar{u}(\rho,t) = H_0\left[u(r,t)\right] = \int_0^\infty r\, u(r,t) J_0(\rho r)\, dr$$

$$-\rho^2 \bar{u}(\rho,t) = \frac{1}{c^2} \bar{u}_{tt}(\rho,t) \to \bar{u}_{tt}(\rho,t) + \rho^2 c^2 \bar{u}(\rho,t) = 0$$

$$\longrightarrow \bar{u}(\rho,t) = A_1 \sin \rho c t + A_2 \cos \rho c t$$

چون Sin و Cos کران دار هستند شرایط کراندار خود بخود برآورده شده اند.

$$\bar{u}(\rho,0) = A_2 = \int_0^\infty r\, f(r) J_0(\rho r)\, dr = F(\rho)$$

$$\longrightarrow \bar{u}(\rho,t) = A_1 \sin \rho c t + F(\rho) \cos \rho c t$$

$$\xrightarrow{u_t(r,0)=g(r)} \boxed{A_1 = \frac{1}{\rho c} G(\rho)}$$

$$\longrightarrow \bar{u}(\rho,t) = \frac{G(\rho)}{\rho c} \sin \rho c t + F(\rho) \cos \rho c t$$

$$\longrightarrow u(r,t) = \frac{1}{c}\int_0^\infty G(\rho)\sin\rho ct\, J_0(\rho r)\,d\rho + \int_0^\infty \rho F(\rho)\cos\rho ct\, J_0(\rho r)\,d\rho$$

برای حالت خاص $g(r)=0$ ، $f(r)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}$ داریم:

$$F(\rho) = \int_0^\infty \frac{ra}{\sqrt{a^2+r^2}} J_0(\rho r)\,dr = \frac{a}{\rho} e^{-a\rho}$$

$$\longrightarrow u(r,t) = a\int_0^\infty e^{-a\rho}\cos\rho ct\, J_0(\rho r)\,d\rho$$

$$\cos\rho ct = \mathrm{Re}\left[e^{-i\rho ct}\right]$$

$$\longrightarrow u(r,t) = a\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[e^{-\rho(a+ict)}\right] J_0(\rho r)\,d\rho$$

$$\mathcal{L}\left[J_0(\rho r)\right] = \int_0^\infty e^{-sr} J_0(\rho r)\,dr = \frac{1}{\sqrt{s^2+\rho^2}}$$

$$u(r,t) = a\,\mathrm{Re}\frac{1}{\sqrt{r^2+(a+ict)^2}}$$

جلسه ۲۴ - ۹۱/۹/۲۸

آنالیز برداری و تانسوری

با کمیت هایی که قبلاً آشنا شده‌ایم.

اسکالر $\xrightarrow{\text{تعریف}}$ عدد

جرم، حجم، دما $\xrightarrow{\text{دستگاه مختصات}}$

$m_1 = m_2 \rightarrow \rho\, dx\, dy\, dz = \rho' dx' dy' dz'$

جا‌به‌جایی تبدیل ... ← قانون بقای جرم

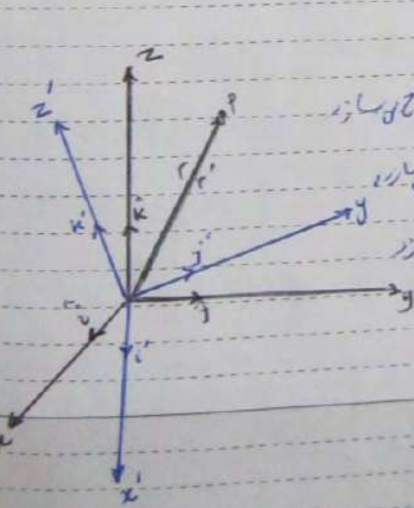
و کمیت هایی که جهت و مقدار دارند را کمیت های برداری گویند.

برداری Φ, Ψ

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{u}, \vec{v}$

ترکیب خطی از بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ = کمیت های برداری

$\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ بردارهای یکه پایه در جهت‌های x و y و z



α_1 و β_1 و γ_1 زوایایی هستند که بردار یکه i' با محور x و y و z می‌سازد.

α_2 و β_2 و γ_2 زوایایی هستند که بردار j' با محور x و y و z می‌سازد.

α_3 و β_3 و γ_3 که زوایایی هستند که k' با محور x و y و z می‌سازد.

$$i' = \cos\alpha_1 \hat{i} + \cos\beta_1 \hat{j} + \cos\gamma_1 \hat{k}$$

$$i' = p_1 \hat{i} + q_1 \hat{j} + r_1 \hat{k}$$

$$j' = p_2 \hat{i} + q_2 \hat{j} + r_2 \hat{k}$$

$$k' = p_3 \hat{i} + q_3 \hat{j} + r_3 \hat{k}$$

$$r' = r$$

$$x'i' + y'j' + z'k' = xi + yj + zk$$

$$\rightarrow x'(p_1 \hat{i} + q_1 \hat{j} + r_1 k) + y'(p_2 i + q_2 j + r_2 k) + z'(p_3 i + q_3 j + r_3 k) = xi + yj + zk$$

$$x = p_1 x' + p_2 y' + p_3 z'$$
$$y = q_1 x' + q_2 y' + q_3 z'$$
$$z = r_1 x' + r_2 y' + r_3 z'$$

$p_1 = \cos(i, i')$

$$x^\alpha \qquad \bar{x}^\beta$$

$$a^\alpha_\beta = \cos(i, i')$$

$$\rightarrow \boxed{x^\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} a^\alpha_\beta \bar{x}^\beta}$$

به همین ترتیب $\boxed{\bar{x}^\beta = \sum_{\alpha=1}^{3} A^\alpha_\beta x^\alpha}$

$a^\alpha_\beta = A^\alpha_\beta$ برای دستگاه‌های متعامد دوران دارند

$$a^\alpha_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} \quad , \quad A^\alpha_\beta = \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\alpha}$$

* حالتی را در نظر می‌گیریم که دستگاه مختصات به اندازه زاویه خاصی دوران کند همچنین زوایای بین محورها هم تغییر کند (در نتیجه از برخورد محورهای مختصات منحنی‌ها را خواهیم داشت)

$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\longrightarrow d\vec{r} = \frac{\partial r}{\partial x} dx\,\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y} dy\,\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z} dz\,\vec{k}$ از دوران بردارها

نقطهٔ P روی منحنی خاص حرکت خواهد کرد. که از مبدأ مختصات به این منحنی وصل کنیم (شعاعی)
بردار $\vec{r}$ می‌شود

$dr = \vec{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}\,dz$

$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$

در حالت کلی $i \cdot j = \delta_{ij}$ $\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{array} \right.$

$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$

$e_i \times e_j = e_k \varepsilon_{kij}$

عملگر دل !!! $\vec{\nabla} = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$

ازدیاد مقدار $\rightarrow \vec{\nabla}\phi = \text{grad}\,\phi = i\frac{\partial\phi}{\partial x} + j\frac{\partial\phi}{\partial y} + k\frac{\partial\phi}{\partial z}$ هندسی: آهنگ بیشترین تغییرات

اگر ϕ ثابت باشد gradϕ بر خود ϕ عمود خواهد بود

برای بردار
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{div}\,\vec{V} = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot v_j e_j = e_i \cdot e_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\ \nabla \times \vec{v} = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times v_j e_j = e_i \times e_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = e_k \varepsilon_{kij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \end{array} \right.$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

4

$$= i\underbrace{\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)}_{w_1} - j\underbrace{\left(\frac{\partial v_3}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)}_{w_2} + k\underbrace{\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)}_{w_3}$$

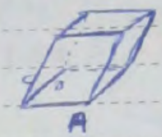
w_1 سرعت زاویه‌ای حول محور x

if $w_1 = 0 \longrightarrow$ جریان غیرچرخشی

* اگر سه بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ را داشته باشیم:

ضرب دوتایی : $\vec{A}\cdot\vec{B}$ و $\vec{A}\times\vec{B}$

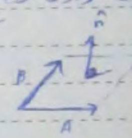
ضرب سه تایی : $A\cdot B\times C = [ABC]$



$\vec{A}\cdot\vec{B} \Rightarrow$ کار

نیرو
جابجایی

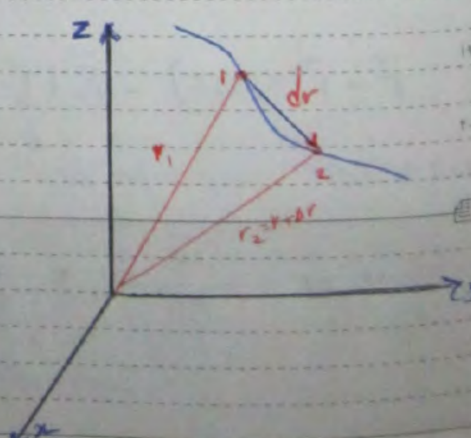
$\vec{A}\times\vec{B} \Rightarrow$ مساحت متوازی الاضلاع



$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (B\cdot A)\vec{C} - (C\cdot A)\vec{B}$$

$$dA_z = dx\,dy\,\hat{k} = \hat{i}\,dx \times \hat{j}\,dy$$

فرض کنیم x و y و z توابعی پیوسته از پارامتر t هستند که از تغییر آنها منحنی فضایی C ایجاد می‌شود



دستگاه مختصات

$$(x,y,z) \xrightarrow{T} (q_1, q_2, q_3)$$
$$\xleftarrow[T^{-1}]{\text{تبدیل وارون}}$$

این تبدیل یک به یک پوشا و وارون پذیر است.

استوانه‌ای

$(x,y,z) \longrightarrow (r,\theta,z)$ ممکن است دارای بعد طول نباشند. q_1, q_2, q_3

مثلاً بعد زاویه‌ای

(r,θ,ϕ) کروی

رابطه بین دو دستگاه

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \xrightarrow{\text{برعکس}} \begin{aligned} q_1 &= q_1(x,y,z) \\ q_2 &= q_2(x,y,z) \\ q_3 &= q_3(x,y,z) \end{aligned}$$

مختصه — تابع   مختصه — تابع

$$(x,y,z) \longrightarrow (\underset{q_1}{r}, \underset{q_2}{\theta}, \underset{q_3}{z})$$

$$\begin{cases} x = q_1 \cos q_2 \\ y = q_1 \sin q_2 \\ z = q_3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} q_1 &= \sqrt{x^2+y^2} \\ q_2 &= tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ q_3 &= z \end{aligned}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(x,y,z) = \vec{R}(q_1, q_2, q_3)$$

توابعی از x,y,z توابعی از q_1, q_2, q_3

دیفرانسیل $\longrightarrow$ $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_2} dq_2 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_3} dq_3$

$d\vec{r}$ بردار مماس بر منحنی در نقطه ما است که لزوماً بردار یکه نیست

برای بدست آوردن بردار یکه نرمال داریم :

q_1 بردار یکه در امتداد : $\bar{e}_1 = \dfrac{\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_1}}{\left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_1}\right| \to h_1}$, $\bar{e}_2 = \dfrac{\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_2}}{\left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_2}\right| \to h_2}$, $\bar{e}_3 = \dfrac{\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_3}}{\left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_3}\right| \to h_3}$

$$\rightarrow d\vec{r} = h_1 \bar{e}_1\, dq_1 + h_2 \bar{e}_2\, dq_2 + h_3 \bar{e}_3\, dq_3$$

تقابل $\quad i\,dx + j\,dy + k\,dz$

$$\left.\begin{matrix} dx \leftrightarrow h_1\, dq_1 \\ dy \leftrightarrow h_2\, dq_2 \\ dz \leftarrow h_3\, dq_3 \end{matrix}\right\}$$

h_1 , h_2 , h_3 را ضریب سنجی را ضریب شکل (Shape factor) گویند

قطبی $\begin{cases} x = q_1 \cos q_2 \\ y = q_1 \sin q_2 \\ z = q_3 \end{cases}$

$$h_1 = \left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\cos q_2^{\,2} + \sin q_2^{\,2} + 0} = 1$$

استوانه‌ای

$$h_2 = \left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_2}\right| = \sqrt{(-q_1 \sin q_2)^2 + (q_1 \cos q_2)^2 + 0} = q_1$$

$$h_3 = \left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_3}\right| = \sqrt{0^2 + 0 + 1} = 1$$

q_1 المان طول در جهت $\quad dl_1 = h_1\, dq_1 = dr$

q_2 " " " " $\quad dl_2 = h_2\, dq_2 = r\, d\theta$

q_3 " " " " $\quad dl_3 = h_3\, dq_3 = dz$

المان سطح $dA_k = dl_i \vec{e}_i \times dl_j \vec{e}_j = e_i \times e_j \, dl_i \, dl_j = e_k \, dl_i \, dl_j$

$dl_i = h_i \, dq_i \Rightarrow \quad = e_k (h_i \, dq_i)(h_j \, dq_j)$

المان سطح در جهت کلی — $\boxed{dA_k = h_i h_j \, dq_i \, dq_j}$

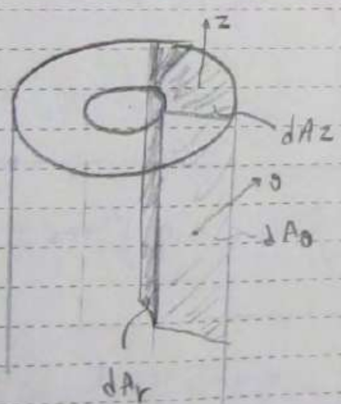
المان سطح در جهت r . $dA_r = dA_1 = h_2 h_3 \, dq_2 \, dq_3 = q_2 \, dq_2 \, dq_3$

$= r \, d\theta \, dz$

المان سطح در جهت θ $\quad dA_2 = dA_\theta = h_3 h_1 \, dq_3 \, dq_1 = dr \, dz$

z " " " " $\quad dA_3 = dA_z = h_1 h_2 \, dq_1 \, dq_2 = r \, dr \, d\theta$

که بردار یکه عمودی سطح در جهت z می‌باشد



المان حجم $dv = \vec{e}_1 \, dl_1 \cdot \vec{e}_2 \, dl_2 \times \vec{e}_3 \, dl_3 = \underbrace{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \times \hat{e}_3}_{1} \cdot h_1 h_2 h_3 \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3$

$dv = \underbrace{h_1 h_2 h_3}_{\text{ژاکوبی تبدیل}} \underbrace{dq_1 \, dq_2 \, d_3}_{\text{حجم}}$

$J = ?$

در تبدیل دکارتی به استوانه‌ای

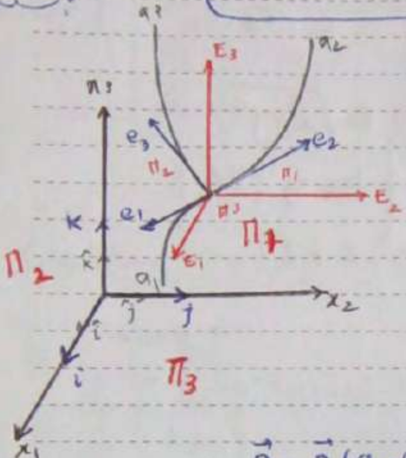
$J = r$

Spencer هارو؟
Field theory H.B for Engineers

$$dV = \vec{e}_i h_i dq_i \cdot \vec{e}_j h_j dq_j \times \vec{e}_k h_k dq_k$$

جای ~~...~~ در دستگاه مختصات منحنی‌الخط متعامد باید ثابت شود

$$\boxed{dV = h_i h_j h_k \, dq_i \, dq_j \, dq_k}$$



جلسه 25 — 91/10/3

$$(x, y, z) \underset{T^{-1}}{\overset{T}{\longleftrightarrow}} (q_1, q_2, q_3)$$

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$dR = i\,dx + j\,dy + k\,dz$$

$$\vec{R} = \vec{R}(q_1, q_2, q_3)$$

$$d\vec{R} = \frac{\partial R}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial R}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial R}{\partial q_3} dq_3$$

$$= h_1 e_1 dq_1 + h_2 e_2 dq_2 + h_3 e_3 dq_3$$

$h_1 dq_1$: المان طول در جهت q_1
$h_2 dq_2$: المان طول در جهت q_2

$$E_1 = \frac{\nabla q_1}{|\nabla q_1|}, \quad E_2 = \frac{\nabla q_2}{|\nabla q_2|} \quad \frac{\nabla q_3}{|\nabla q_3|}$$

بردارهای یکه عمود بر رویه‌های Π_1 و Π_2 و Π_3

بنابراین اگر برداری داشته باشیم می‌توانیم بنویسیم :

$$V = V_1 e_1 + V_2 e_2 + V_3 e_3$$

بردار V Contra Variant
V_1, V_2, V_3 مولفه‌های

$$= \bar{V}_1 E_1 + \bar{V}_2 E_2 + \bar{V}_3 E_3$$

$\bar{V}_i$ مولفه‌های بردار V Covarient

فرض کنیم از دستگاه دکارتی به دستگاه مختصات استوانه‌ای می‌رویم. داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} r \longrightarrow q_1 \\ \phi \longrightarrow q_2 \\ z \longrightarrow q_3 \end{array}\right.$$

دکارتی ⟵ استوانه‌ای

بردار / تفاوت‌ها:

$$i, j, k \longrightarrow e_r, e_\phi, e_z$$

$$i, j, k \longleftarrow e_r, e_\phi, e_z$$

ارتباط بین دو دستگاه مختصات (روابط تبدیل):

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{array}\right.$$

روابط تبدیل برعکس:

$$\left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = tg^{-1}(y/x) \\ z = z \end{array}\right.$$

$$\vec{R} = xi + yj + zk$$

$$d\vec{R} = i\,dx + j\,dy + k\,dz$$

$$dx = \cos\phi\,dr - r\sin\phi\,d\phi$$

$$dy = \sin\phi\,dr + r\cos\phi\,d\phi$$

$$dz = dz$$

$$\rightarrow d\vec{R} = i(\cos\phi\,dr - r\sin\phi\,d\phi) + j(\sin\phi\,dr + r\cos\phi\,d\phi) + k\,dz$$

این رابطه را براساس دیفرانسیل دستگاه مختصات استوانه‌ای مرتب می‌کنیم

$$d\vec{R} = \underbrace{(i\cos\phi + j\sin\phi)}_{\text{بردار مماس بر منحنی محور } r} dr + \underbrace{(-r\sin\phi\, i + r\cos\phi\, j)}_{\text{بردار مماس بر منحنی محور } \phi} d\phi + k\,dz$$

e_r ⇐ اندازه واحد است

$e_\phi = -i\sin\phi + j\cos\phi$ اندازه r

e_z

$$\begin{cases} \vec{e}_r = i\cos\phi + j\sin\phi \\ \vec{e}_\phi = -i\sin\phi + j\cos\phi \\ \vec{e}_z = e_z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس تبدیل}} \begin{bmatrix} dr \\ d\phi \\ dz \end{bmatrix}$$

اگر وارون این ماتریس تبدیل را بدست آوریم می‌توانیم بردارهای یکه i و j و k را برحسب بردارهای یکه e_r و e_ϕ و e_z بدست آوریم.

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{R}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial R}{\partial r}\right|} \quad , \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} i + \frac{\partial y}{\partial r} j + \frac{\partial z}{\partial r} k$$

$$= (\cos\phi) i + (\sin\phi) j$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \vec{R}}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial \phi}\right|} \quad , \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi} i + \frac{\partial y}{\partial \phi} j + \frac{\partial z}{\partial \phi} k$$

$$= (-r\sin\phi) i + (r\cos\phi) j$$

$$\vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \vec{R}}{\partial z}}{\left|\frac{\partial R}{\partial z}\right|}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{بردار یکه در راستای r}} \nabla \vec{r} = \frac{\overset{r\cos\phi}{x}}{\underset{r=}{\sqrt{x^2+y^2}}} \vec{i} + \frac{\overset{r\sin\phi}{y}}{\underset{r=}{\sqrt{x^2+y^2}}} \vec{j} + 0$$

$$= \cos\phi\, \vec{i} + \sin\phi\, \vec{j} = \vec{e}_r$$

$$\nabla \vec{\Phi} = \Phi_x i + \Phi_y j + \Phi_z k$$

$r\sin\phi \qquad r\cos\phi$

$$\to \nabla\vec{\phi} = -\frac{y}{x^2+y^2}\,i + \frac{x}{x^2+y^2}\,j = -\frac{\sin\phi}{r}\,i + \frac{\cos\phi}{r}\,j = \frac{1}{r}\vec{e}_\phi$$

$$\nabla\vec{z} = (1)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{E}_p = \frac{\vec{e}_p}{h_p}} \qquad p = 1, 2, 3 \qquad \begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = r \\ h_3 = 1 \end{cases}$$

مؤلفه‌های بردار

$$\vec{\nabla\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,i + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,j + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,k$$

$$\to q_1, q_2, q_3 = ?$$

دستگاه مختصات منحنی‌الخط متعامد

$$\longrightarrow \vec{\nabla\psi} = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 \qquad f_1, f_2, f_3$$

$$\psi(x, y, z) \longrightarrow \psi(q_1, q_2, q_3)$$

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\psi}{\partial q_3}dq_3 \quad \star$$

$$= \vec{\nabla\psi}\cdot d\vec{r} = \vec{\nabla\psi}\cdot(h_1 e_1 dq_1 + h_2 e_2 dq_2 + h_3 e_3 dq_3)$$

$$= (f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3)\cdot(h_1 e_1 dq_1 + h_2 e_2 dq_2 + h_3 e_3 dq_3)$$

$$= f_1 h_1 dq_1 + f_2 h_2 dq_2 + f_3 h_3 dq_3 \quad \star$$

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial\psi}{\partial q_1} \\ f_2 = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial\psi}{\partial q_2} \\ f_3 = \dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial\psi}{\partial q_3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nabla \vec{f} = \left(\frac{e_1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{e_2}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{e_3}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3} \right)$$

ازحالت کلی برای عملگر ∇ در مختصات منحنی الخط متعامد

$$\boxed{\vec{\nabla} = \left(\frac{e_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{e_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{e_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \right)}$$

کاربرد عملگر در xyz داشتیم ∇ → دیورژانس $\vec{\nabla} \cdot \square$ ، کرل $\nabla \times \square$

$$\rightarrow \nabla \vec{f} \cdot \vec{e_1} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}$$

مشتق f در جهت q_1

$$\text{if } f = q_1 \longrightarrow \vec{\nabla q_1} \cdot \vec{e_1} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial q_1}{\partial q_1} = \frac{1}{h_1}$$

$$\vec{\nabla q_2} \cdot \vec{e_2} = \frac{1}{h_2}$$

$$\vec{\nabla q_3} \cdot \vec{e_3} = \frac{1}{h_3}$$

[illegible]

$$E_p = \frac{\nabla q_p}{|\nabla q_p|} \quad : \quad \vec{\nabla q_p} = \vec{E_p}\,\underbrace{|\nabla q_p|}_{\frac{1}{h_p}} \longrightarrow \boxed{\vec{\nabla q_p} = \frac{\vec{E_p}}{h_p}}$$

$$\vec{E_p} = \frac{\vec{e_p}}{h_p} \quad ,$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{e_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{e_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{e_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \right) \cdot \left(V_1 e_1 + V_2 e_2 + V_3 e_3 \right)$$

$e_1 = e_2 \times e_3$

$e_2 = e_3 \times e_1$

$e_3 = e_1 \times e_2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 h_1 V_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 V_3) \right\}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 e_1 & h_2 e_2 & h_3 e_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}}$$

لاپلاسین

اگر جزء ∇ گرادیان یک میدان مانند ψ باشد

$$\boxed{\nabla\cdot(\nabla\psi)=\nabla^2\psi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)\right\}}$$

حال روابط بالا را برای یک میدان (؟) برداری در دستگاه مختصات استوانه ای بحث می کنیم.

$$\begin{cases} h_1=h_r=1\\ h_2=h_\phi=r\\ h_3=h_z=1\end{cases}\qquad \begin{cases} q_1=r\\ q_2=\phi\\ q_3=z\end{cases}$$

$$\vec{\nabla}\psi=e_r\underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial r}}_{\text{بردار طول}}+\frac{e_\phi}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}+e_z\underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial z}}_{\text{بردار طول}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{\partial}{\partial\phi}(V_\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(rV_z)\right]$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}(V_\phi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rV_z)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix} e_r & re_\phi & e_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_r & rV_\phi & V_z\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{v} = \frac{1}{r}\left\{ e_r\left(\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{r\partial v_\phi}{\partial z}\right) - r e_\phi\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) + e_z\left(\frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right)\right\}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{v} = e_r\underbrace{\left(\frac{\partial v_z}{r\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)}_{\text{چرخش در جهت محور } r} - e_\phi\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}e_z\left(\frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right)}$$

چرخش در جهت محور ϕ — چرخش در جهت محور z

$$\nabla^2 t = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial t}{\partial z}\right)\right\}$$

$$\boxed{\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}}$$

ch10 : 1–30 ? ?
ch12

} مهلت تا روز پایان ترم