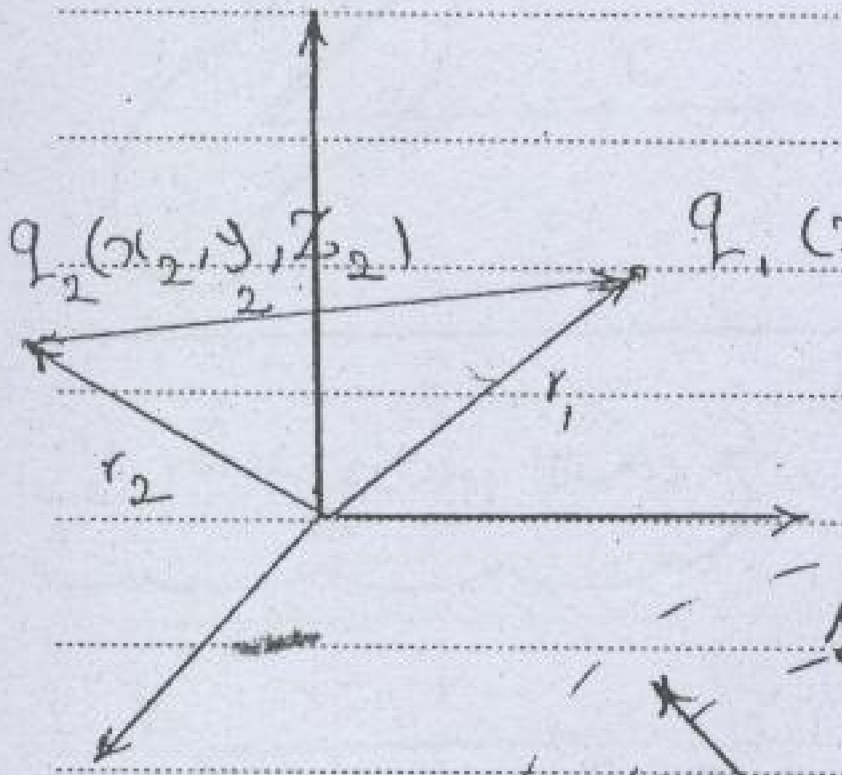
جلسه اول

Subject:

Year. Month. Date. ( )

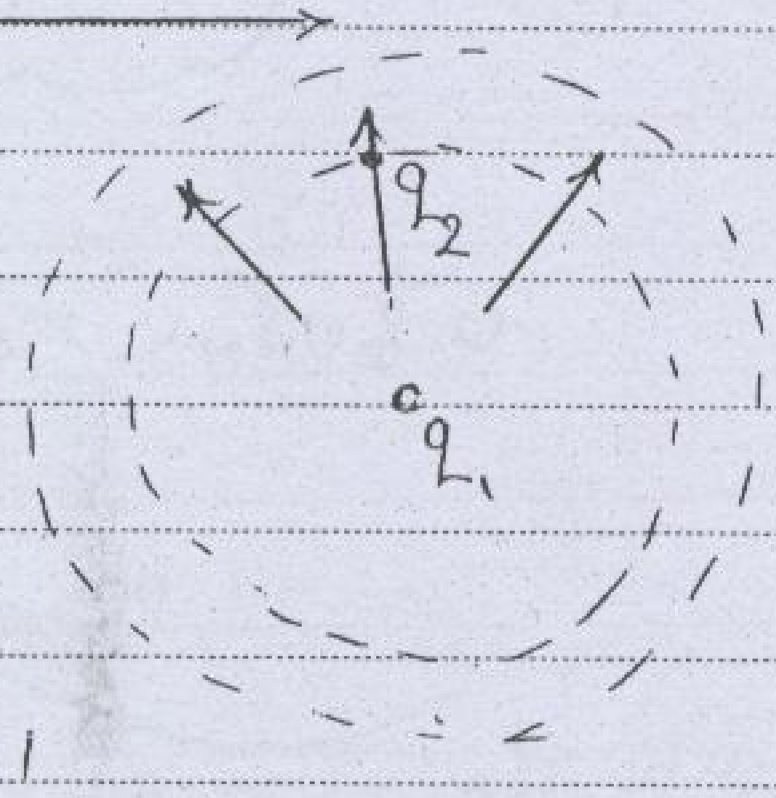
به نام الله هرچه دارم از اوست

فیزیک الکتریکی ۲



$q_2(x_2, y_2, z_2)$ $q_1(x_1, y_1, z_1)$

قانون کولمب $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$



در مقایسه با ثابت گذردهی الکتریکی

$\varepsilon > \varepsilon_0$ هر محیط دیگر.

* کاهش سرعت نور با افزایش ε هوا است.

$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ سرعت امواج الکترومغناطیسی

- اصل برهم کنی یا SuperPosition

$F_n = \sum F_{ij} = F_{1n} + F_{2n} + F_{3n} + \dots$

اصل برهم کنی در جایی درست است که

$F(q) = aq + b$ خطی باشد

ناشی از اجتماع نیروهای دیگر

$F_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(n-1) q q_n}{r^2}$

یا

اصل برهم کنی $F_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} [q + q + \dots + q] q_n$

اما اگر: $F \propto q^2$

$F \propto (n-1)^2 q^2$ ✗

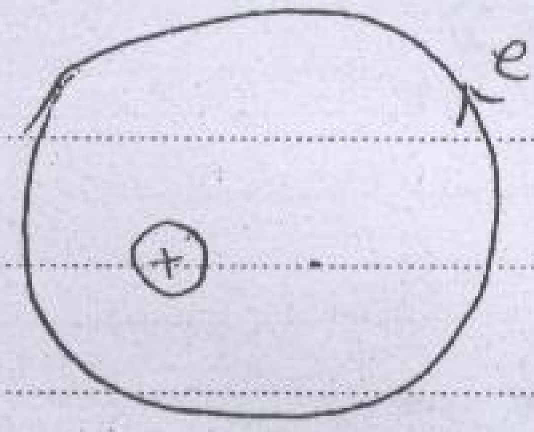
اما هست $F \propto (n-1) q^2$

این اصل تنها درست در مورد رابطه خطی است.

PAPCO

Subject:

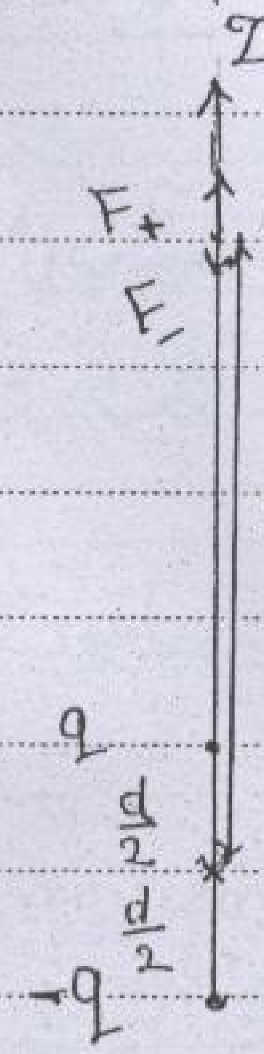
Year. Month. Date. ( )



نیروی ناشی از دوقطبی الکتریکی

$q \xleftrightarrow{d} q$

* توجه کنار هم قرارگیری مولکولها ۰.



$d \ll z$

$$F = F_- + F_+ = \frac{-qq'}{4\pi\varepsilon_0 (z+\frac{d}{2})^2} + \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 (z-\frac{d}{2})^2}$$

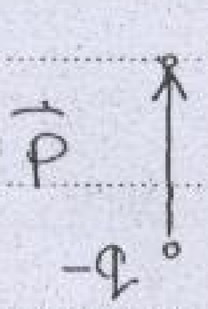
$$F = \frac{+qq'}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[\frac{1}{(1-\frac{d}{2z})^2} - \frac{1}{(1+\frac{d}{2z})^2}\right]$$

با بسطها تا اول (بسط تیلور): $F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[\left(1+\frac{d}{z}\right) - \left(1-\frac{d}{z}\right)\right] = \frac{2qq'd}{4\pi\varepsilon_0 z^3}$ حتما

چون $\left(1 \mp \frac{d}{2z}\right)^{-2} \simeq 1 \pm \frac{d}{z}$

$$F = \frac{qq'd}{2\pi\varepsilon_0 z^3}$$

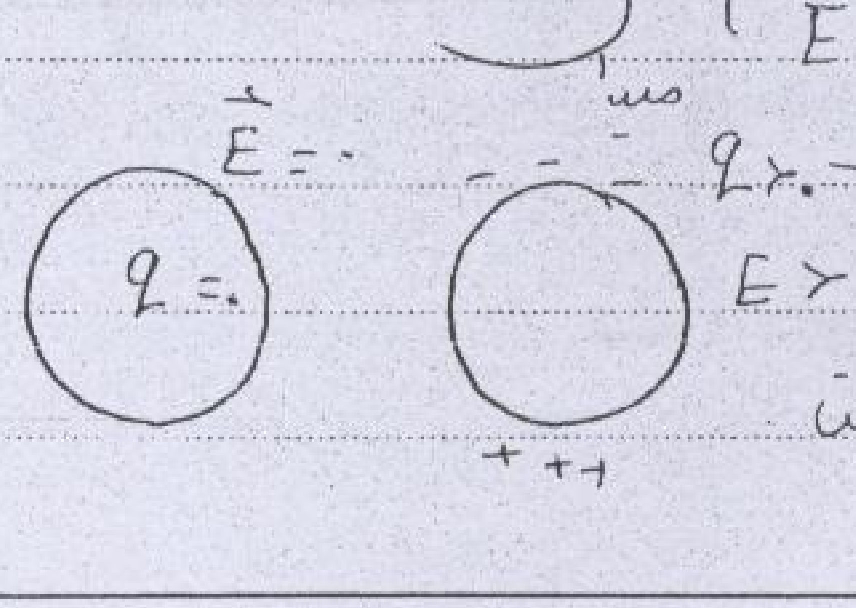
$P = qd$ گشتاور مغناطیسی
۲قطبی مغناطیسی



$$F = \frac{pq'}{2\pi\varepsilon_0 z^3}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

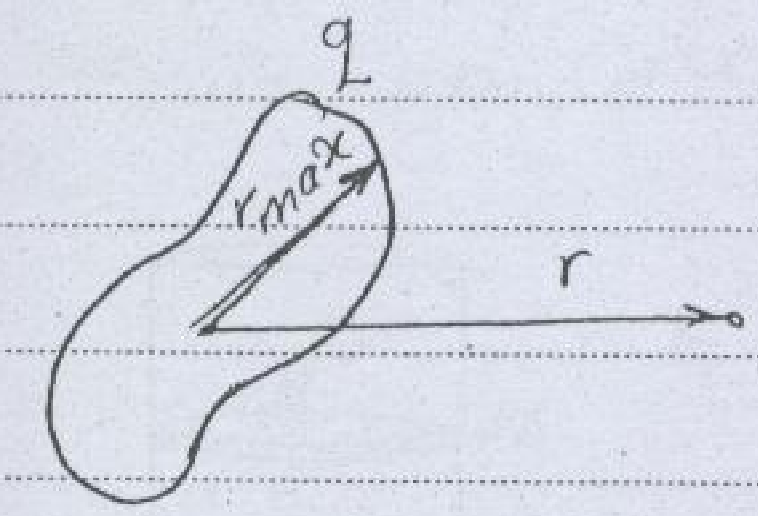
$$E = \lim_{q \to 0} \frac{F}{q}$$



* میدان جزو مشخصات منبع است

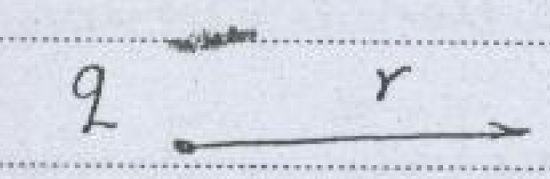
Subject:
Year. Month. Date. ( )

اصل برهم نهی در مورد میدان هم درست است.

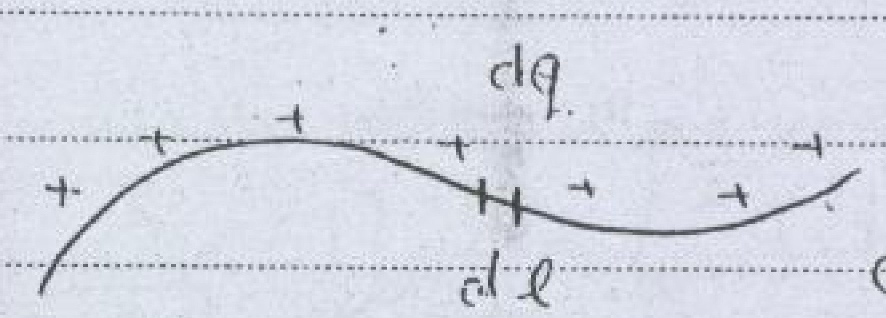


$r \gg r_{max}$ شرط نقطه‌ای بودن بار

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

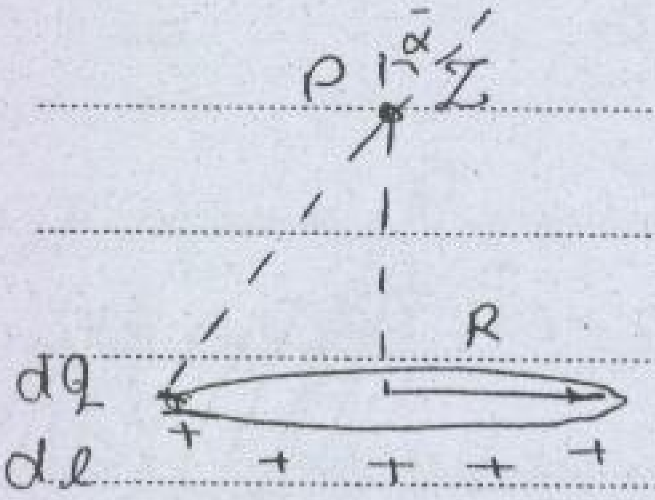


محاسبه روی بار غیر نقطه‌ای E



$\lambda = \frac{dq}{dl}$ چگالی بار خطی

مثال) حلقه‌ای مطابق شکل دارای چگالی بار خطی ثابت λ می‌باشد. مطلوبست میدان الکتریکی در فاصله عمودی Z از مرکز این حلقه:



حل)

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \left(\sqrt{R^2+Z^2}\right)^2} \hat{E}$$

$$\Rightarrow dE = \frac{dq \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+Z^2)}$$

$$\Rightarrow dE = \frac{dq \times \frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}}}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+Z^2)} \Rightarrow E = \frac{2\cancel{\pi} R \lambda Z}{2 \cancel{4\pi} \varepsilon_0 (R^2+Z^2)^{3/2}}$$

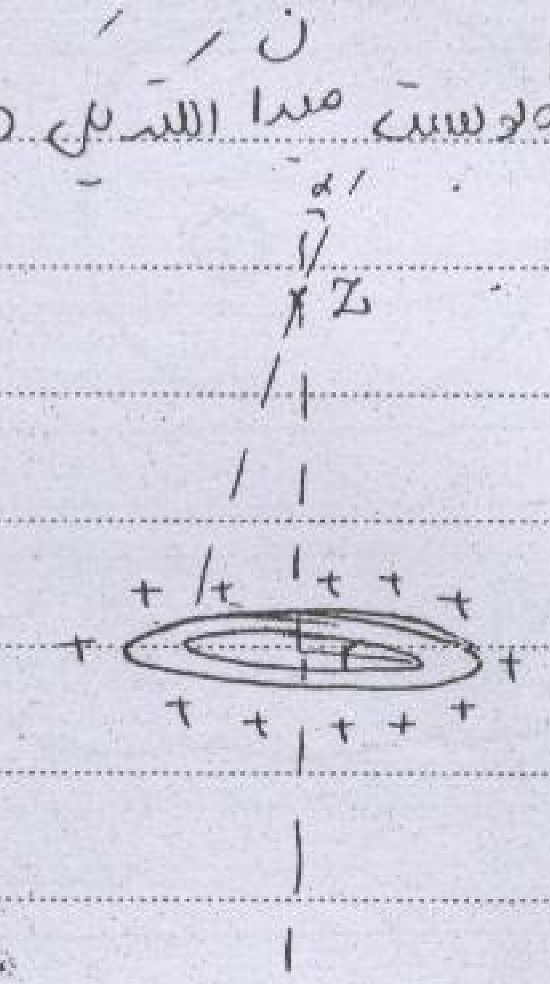
PAPCO

جلسه دوم

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال) دیسکی مطابق شکل به شعاع R دارای چگالی بار سطحی یکنواخت σ می باشد. مطلوبست میدان الکتریکی در فاصله عمودی z از مرکز دیسک.



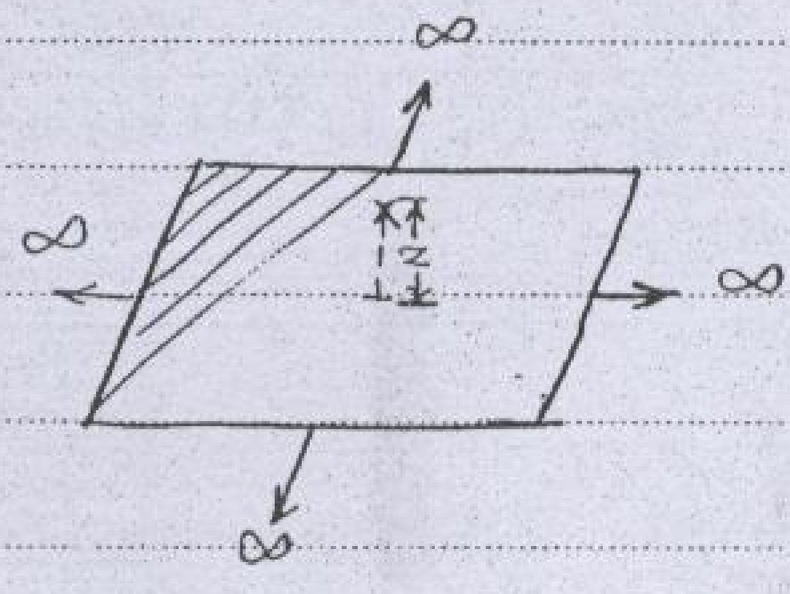
حل: با استفاده از حلقه ها

$$E_z = \int_0^R \frac{z\,dq}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[-(z^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]$$

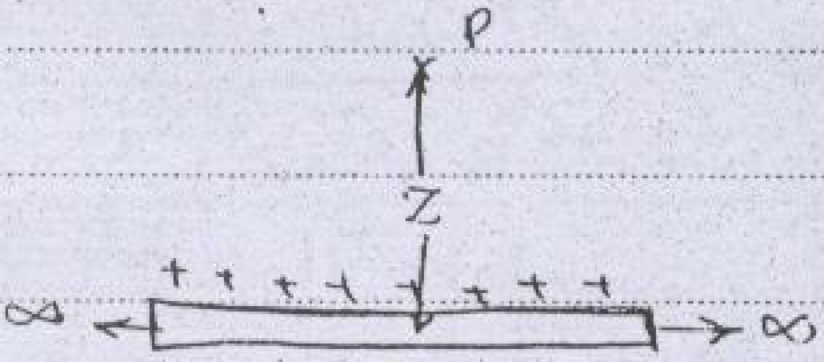
$$\text{if } R\to\infty \text{ یا } z\to 0 \Rightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

مثال) مطلوبست میدان ناشی از صفحه عایق نامحدود با چگالی یکنواخت σ.



واضح است برابر با $E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

مثال) برای یک صفحه رسانا نامحدود:



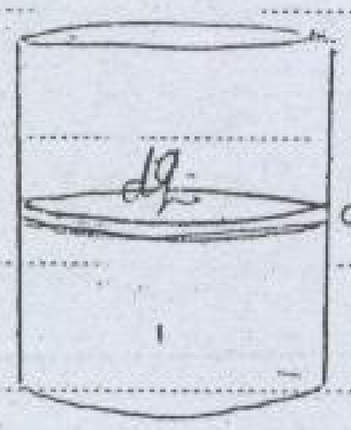
برحسب σ
$$\begin{cases} \text{رسانا}, & E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ \text{عایق} & E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \end{cases}$$

برحسب q
$$\begin{cases} \text{رسانا}, & E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \text{عایق}\; E_z = \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال) استوانه‌ای مطابق شکل به طول l و چگالی بار حجمی یکنواخت ρ مفروض است مطلوبست میدان در فاصله عمودی z از مرکز این استوانه.



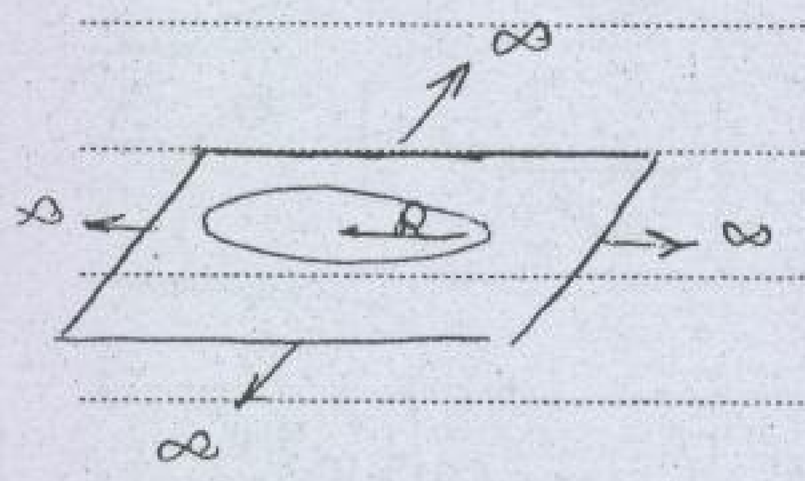
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]$$

$$\Rightarrow dE = \frac{\rho\, dz}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] \Rightarrow \frac{2\varepsilon_0 E}{\rho} = \int \frac{dz}{\sqrt{R^2+z^2}} - \int \frac{z\, dz}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

و با استفاده از جدول انتگرال‌ها

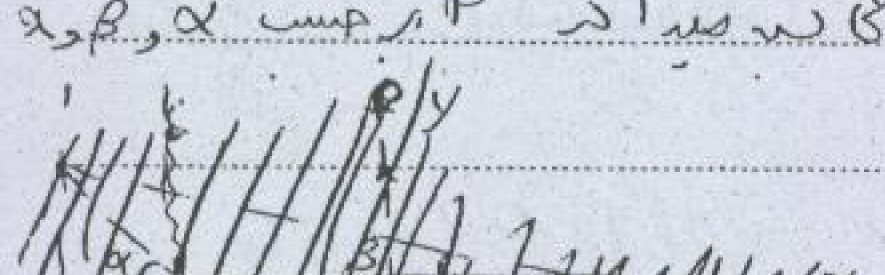
$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\ln\left(1 + \frac{l}{z+\sqrt{R^2+z^2}}\right) - \left(\sqrt{R^2+(l+z)^2} - \sqrt{R^2+z^2}\right)\right]$$

مثال) صفحه نامحدود عایقی مطابق شکل دارای چگالی بار سطحی یکنواخت σ می‌باشد. از داخل آن دایره‌ای به شعاع R خارج می‌کنیم میدان الکتریکی در نقطه P

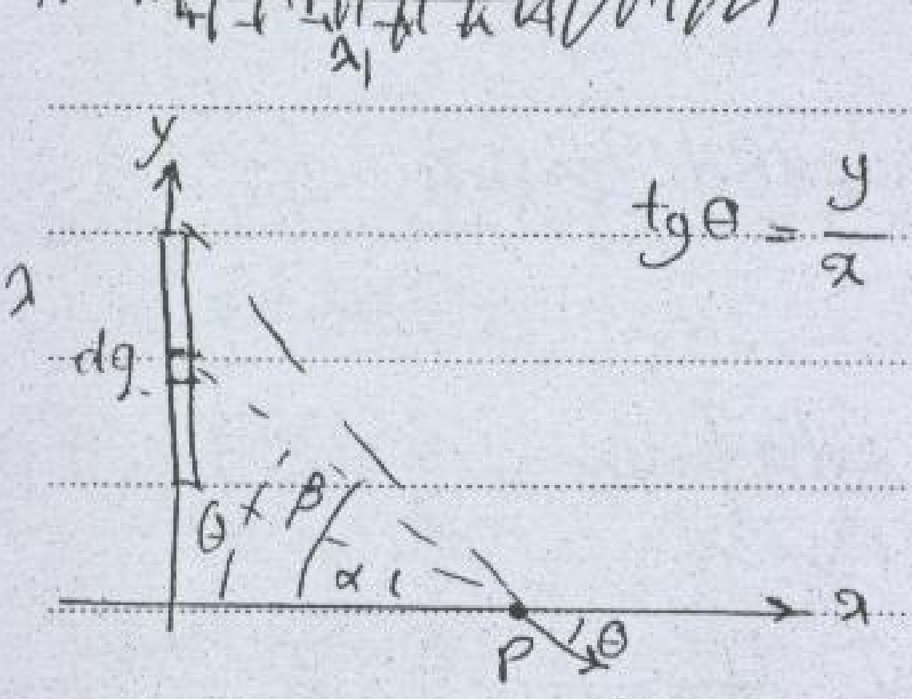


$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

مثال) میله‌ای مطابق شکل دارای چگالی بار طولی یکنواخت λ می‌باشد مطلوبست کردن میدان در P برحسب α و β و x



$$\begin{cases} dE_x = dE\cos\theta \\ dE_y = dE\sin\theta \end{cases}$$



$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\tan\theta \qquad \frac{\lambda\, dy}{4\pi\varepsilon_0} = dE \Rightarrow x\sec^2\theta\, d\theta = y$$

$$\cos^2\theta = \frac{x}{r}$$

$$r = x\sec^2\theta$$

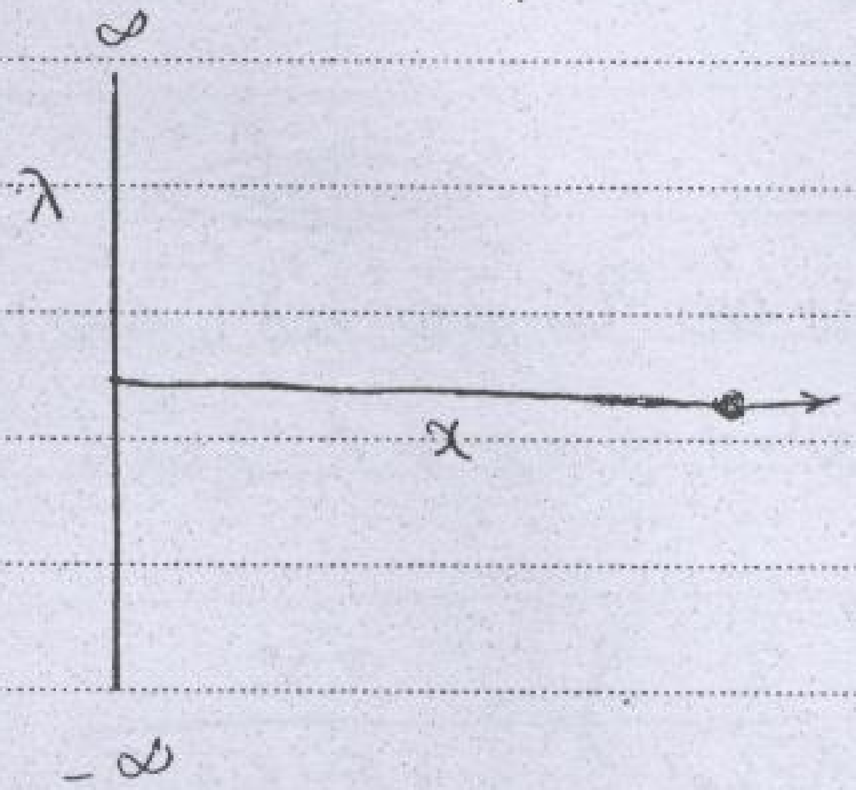
$$dE = \frac{\lambda\, dy}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda x\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

$$= \frac{\lambda\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$dE_x = \frac{\lambda \cos\theta \, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 x} \Rightarrow E_x = \frac{k\lambda}{x}\int_\alpha^\beta \cos\theta \, d\theta = \frac{k\lambda}{x}\left[\sin\beta - \sin\alpha\right]$$

$$dE_y = -\frac{k\lambda \sin\theta \, d\theta}{x} \Rightarrow E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\left[\cos\beta - \cos\alpha\right]$$

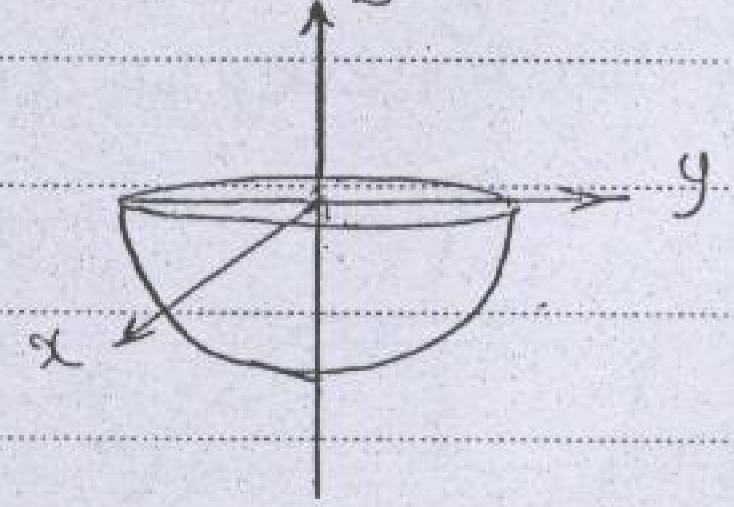


حالت خاص:

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$E_x = \frac{k\lambda}{x} \quad E_y = 0$$

مثال) نیمکره‌ای مطابق شکل دارای چگالی بار حجمی غیر یکنواخت $\rho = \rho_0\left(\frac{r}{R}\right)$ در آن ρ_0 ثابت مثبت و r فاصله هر نقطه از مرکز نیمکره است. مطلوبست میدان الکتریکی در مرکز نیمکره.



حل)

$$dE_z = \frac{k\,dq}{r^2} = \frac{k\rho\,dv}{r^2} = \frac{k\rho r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr \cos\theta}{r^2}$$

$$E_z = \frac{k}{R}\int_0^R\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \rho_0 \frac{r}{R} \times \sin\theta\, d\theta\, dr\, d\varphi \cos\theta$$

$$E_z = \frac{k\rho_0}{R}\int_0^R r\,dr \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$E_z = \frac{k\rho_0}{R}\,\frac{R^2}{2} \times \frac{1}{4}\cos 2\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \times 2\pi$$

$$E_z = \frac{k\rho_0}{R}\,\frac{R^2}{2} \times \frac{1}{2} \times 2\pi = \frac{\pi R^2}{2R}\rho_0 \times \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 R}{8\varepsilon_0}$$

جهت در Z

جلسه سوم

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* چکیده مطالب ①

① میدان الکتریکی ناشی از دو قطبی $Z \gg d$:

$$E = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 Z^3}$$

② میدان الکتریکی ناشی از حلقه باردار با شعاع R :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{qZ}{(R^2+Z^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{Z^2}$$

$Z \longrightarrow \infty$ (Z diverges to infinity)

③ میدان الکتریکی دیسک به شعاع R دارای چگالی بار σ :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}\right]$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$R \longrightarrow \infty$

صفحه بزرگ عایق

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

صفحه بزرگ رسانا

④ انتگرال‌های مهم:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$

b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$

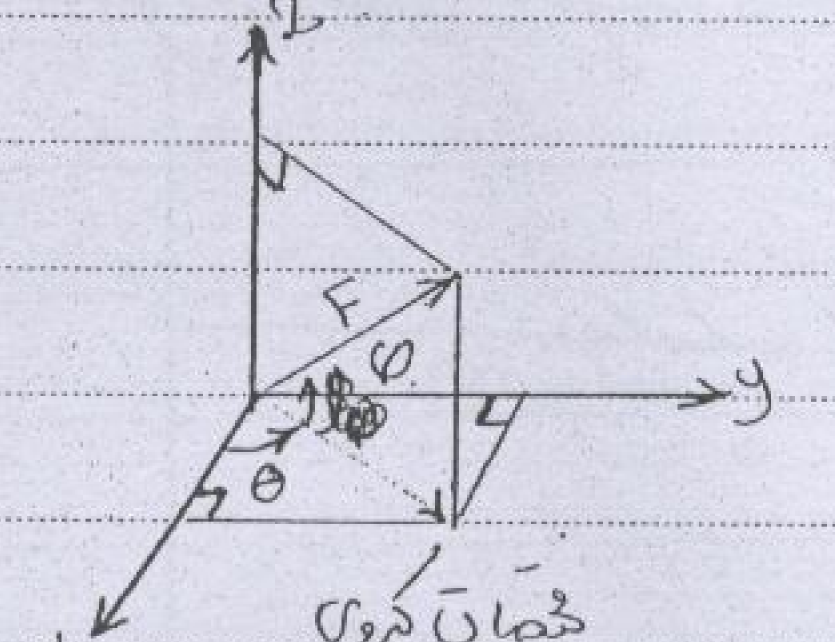
c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

⑤ المان‌ها در مختصات استوانه‌ای و کروی:

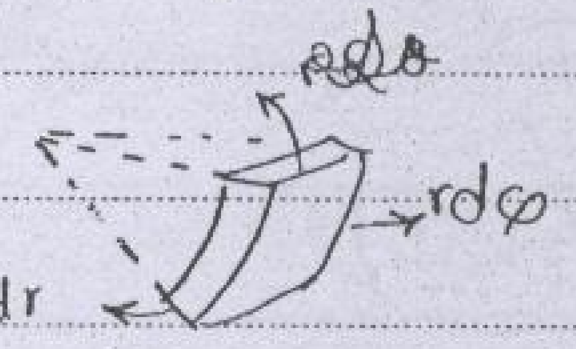
$$\boxed{dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}$$ المان حجم کروی

$$\boxed{dv = r \, dr \, d\theta \, dz}$$ المان حجم استوانه



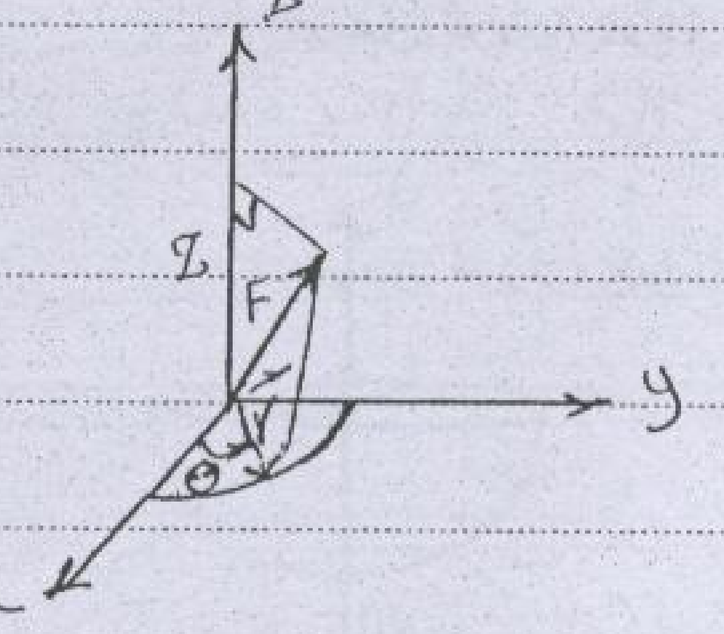
$$\begin{cases} F_x = F\cos\varphi\cos\theta \\ F_y = F\cos\varphi\sin\theta \\ F_z = F\sin\theta \end{cases}$$

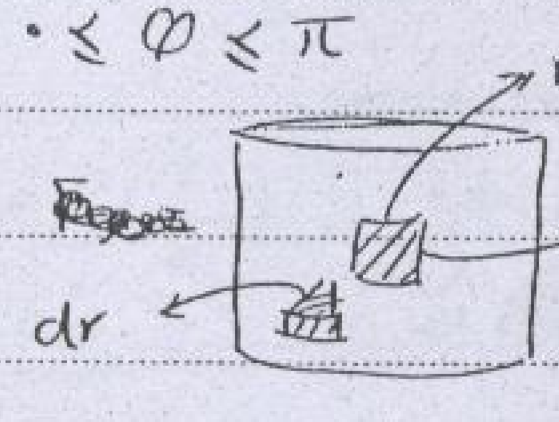
$$\begin{cases} d^2S = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi & \text{سطح} \\ dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi & \text{حجم} \end{cases}$$



$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \varphi \leq \pi$





$$\begin{cases} d^2S = r \, d\theta \, dz & \text{المان سطح} \\ d^2S = 2\pi r \, dz \end{cases}$$

$dv = r \, d\theta \, dz \, dr$ المان حجم

⑥ گشتاور وارد بر یک دوقطبی الکتریکی در میدان $\vec{E}$:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E}}$$

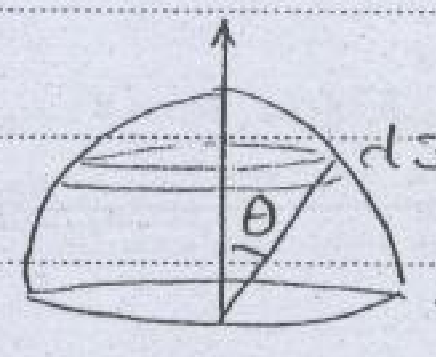
⑦ پتانسیل الکتریکی دوقطبی و کار نیروی خارجی دوقطبی:

$$W_{ext} = -W_E = (U_f - U_i)$$

$$U = -\vec{P} \cdot \vec{E}$$

$$\begin{cases} \theta = 0 & U_{min} \\ \theta = 90 & U = 0 \\ \theta = 180 & U_{max} \end{cases}$$

مثال) بار الکتریکی با چگالی سطحی غیر یکنواخت $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ مطابق شکل روی نیم‌کره‌ای به شعاع R توزیع شده. میدان الکتریکی در مرکز نیم‌کره بیابید.



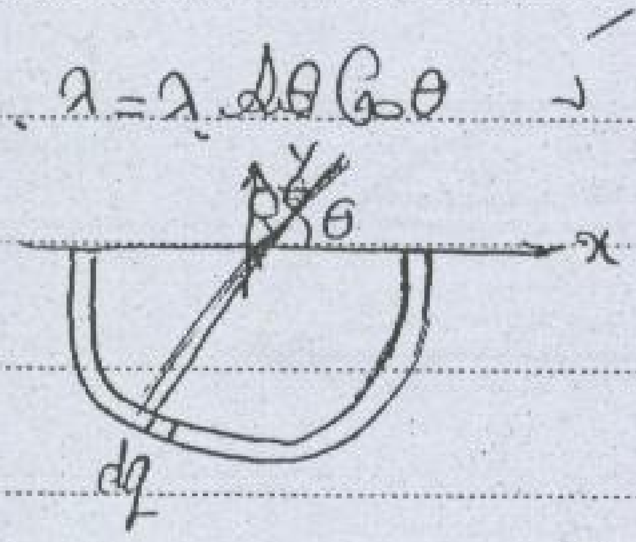
$ds = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$

حل) $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$

$$dE_z = -dE\cos\theta = -\frac{\sigma_0 \cos\theta\, 2\pi R^2 \sin\theta \cos\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\Rightarrow E_z = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = -\frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0}$$

مثال) بار الکتریکی بر روی میله نیم دایره به شعاع R به طور غیر یکنواخت پخش شده که $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$. مطلوبست میدان در مرکز نیم دایره.

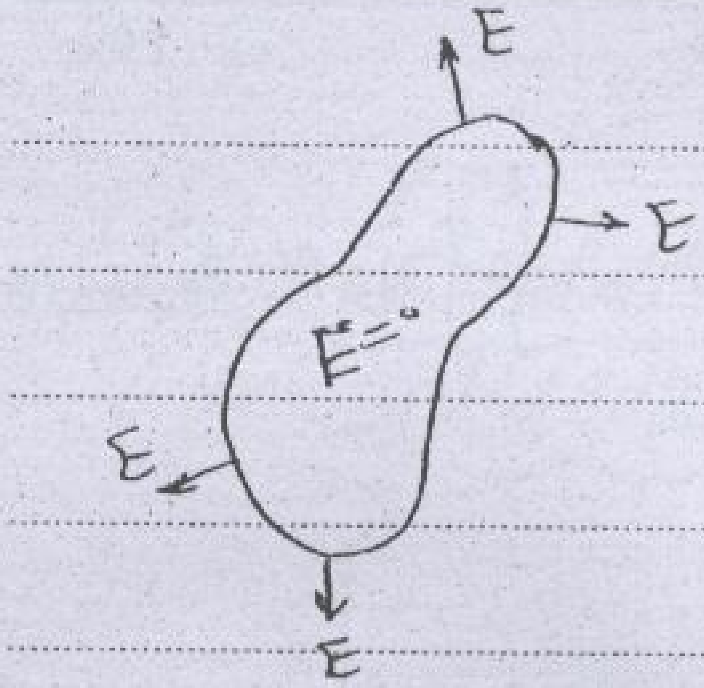


$$dE_x = dE\cos\theta$$

$$\Rightarrow dE_x = \frac{k\,dq}{R^2}\cos\theta = \frac{Rk\lambda_0 \cos^2\theta}{R^2}d\theta \Rightarrow E_x = \int_0^{\pi} \frac{k\lambda_0 \cos^2\theta}{R}d\theta$$

$$= \frac{k\lambda_0}{R}\times\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{R} = \frac{\lambda_0}{6\pi R\varepsilon_0}$$

میدان الکتریکی درون جسم رسانا

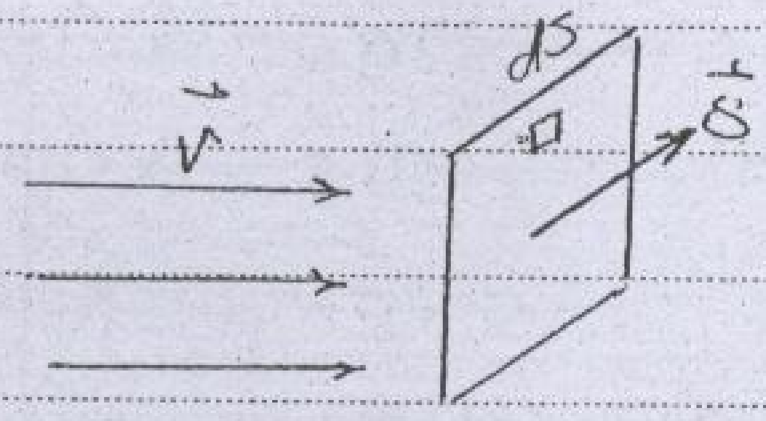


① میدان داخل رسانا صفر است.

② خطوط میدان بر سطح خارجی جسم رسانا عمود است.

قانون گاوس

شار

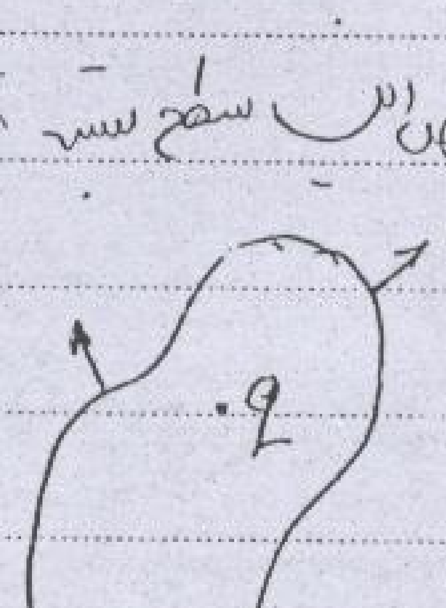


$$\varphi = \vec{v} \cdot \vec{S}$$

$$d\varphi = \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

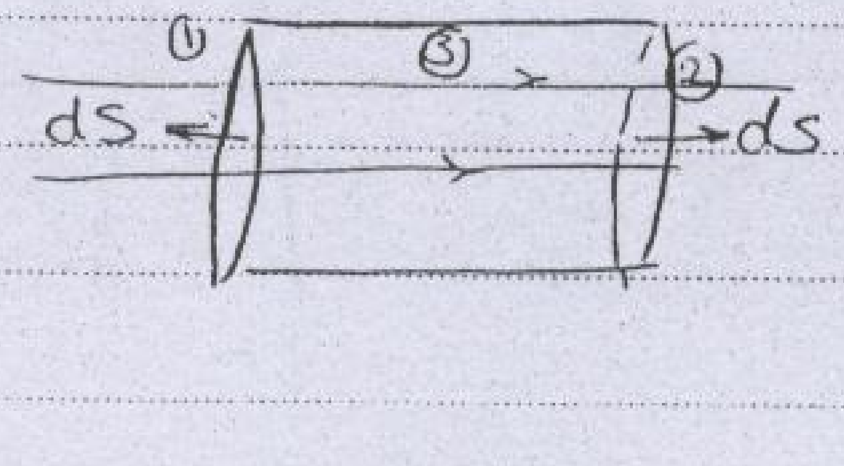
$$\varphi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

شار الکتریکی از این سطح بسته به طوری که متناسب است با بار خالصی که داخل این سطح بسته قرار دارد.



$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

قانون گاوس



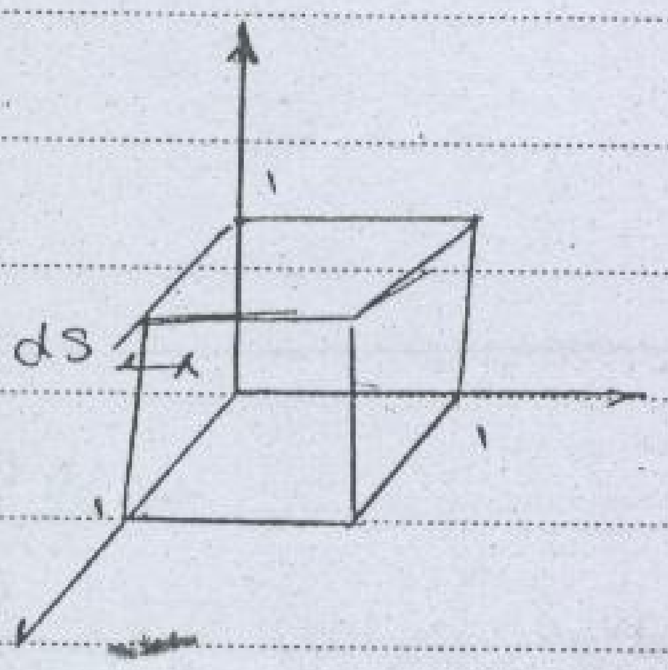
$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_1 \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{-EA} + \underbrace{\iint_2 \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{EA} + \underbrace{\iint_3 \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{0} = 0$$

شار خارجی صفر است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال) در تمام نقاط فضا پتانسیل الکتریکی به صورت $V = -yx^2$ می‌باشد. مطلوبست محاسبه بار الکتریکی در داخل مکعبی مطابق شکل به طول واحد



حل)

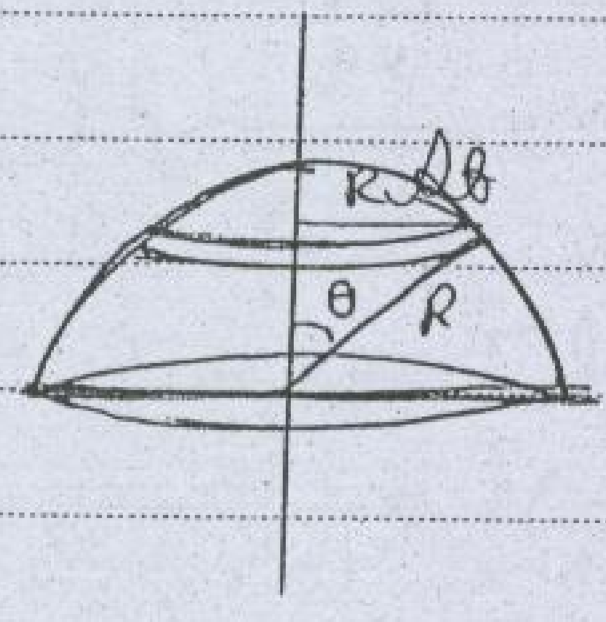
$$V = -yx^2$$

$$-\nabla V = \vec{E} = 2xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$$

$$\oint E \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \iint_{L}{}_0^1 -x^2\,dx\,dz + \iint_{R}{}_0^1 x^2\,dx\,dz + \iint_{B}{}_0^1 -2xy\,dy\,dz + \iint_{F}{}_0^1 2xy\,dy\,dz + \cancel{\iint_{T}{}_0^1 0\,dx\,dy} + \cancel{\iint_{Bt}{}_0^1} = 0$$

مثال) بار الکتریکی با چگالی سطحی غیر یکنواخت $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ روی نیم کره‌ای به شعاع R توزیع شده است. مطلوبست محاسبه پتانسیل الکتریکی مرکز نیم کره (σ_0 مقدار مثبت) θ زاویه هر نقطه با محور z.



$$(2\pi R \sin\theta) R\,d\theta$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0} \sin\theta \cos\theta\,d\theta$$

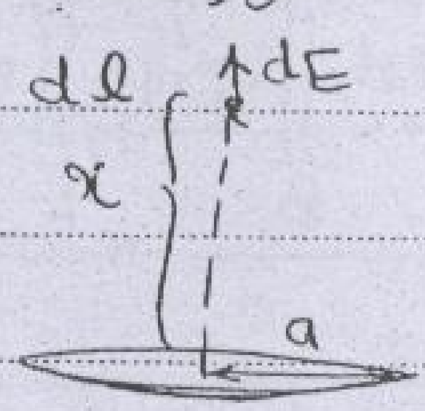
$$V = \int dV = \frac{\sigma_0 R}{2\varepsilon_0} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta\,d\theta = \frac{\sigma_0 R}{4\varepsilon_0}$$

برای محاسبه میدان Z را متغیر گرفته تا ادامه بدهیم: $Z=$

تمرین بار حلقه

۱) نشان دهید که پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای روی محور حلقه باردار به شعاع a در فاصله x از مرکز حلقه از فرمول

$$v = \frac{kq}{\sqrt{x^2+a^2}}$$



به دست می‌آید.

$$\Delta v = v_f - v_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_i^f \frac{kqx\,dl}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$v_x = \int_x^\infty \frac{kqx\,dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = kq\left(\frac{-1}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)\Bigg]_x^\infty \Rightarrow v = \frac{kq}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

۲) با استفاده از پتانسیل بالا میدان را روی محور محاسبه کنید

$$E = -\nabla v \Rightarrow E = -\nabla \frac{kq}{\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kq}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)\vec{i} = \frac{kqx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

الف/ ۳) پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای واقع بر محور قرص باردار به شعاع a در فاصله r از محور قرص را بیابید

ب/ نشان دهید با استفاده از مقدار پتانسیل میدان روی محور از فرمول زیر به دست می‌آید

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}}\right]$$

ج/ رابطه پتانسیل را برای $r \gg a$ و $r \to 0$ تحقیق کنید

PaPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

فضای میان دو کره هم مرکز به شعاع های r_1 , r_2 است را با بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ~~ρ~~ پر شده است.
پتانسیل الکتریکی v را به صورت تابع از فاصله r :
در نواحی $r>r_2$ و $r<r_1$ و $r_1<r<r_2$.

$$v = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\, dl$$

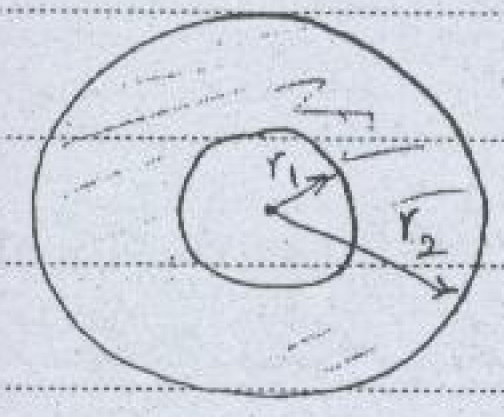
$$v = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

با داشتن $\vec{E}$ را بیابید.

$r>r_2 : \; E_1 = \frac{kq}{r^2}$

$r_2>r>r_1 : \; E_2 = \frac{kq'}{r^2}$

$r<r_1 : \; E_3 = 0$



$$r>r_2 : v_1 = \frac{kq}{r} = \frac{k\rho}{r} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^2 \times \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho = \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}$$

$$r_2>r>r_1 : v_2 = -\int_{r_2}^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{r}^{r_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \frac{kq}{r_2} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}(r_2^2 - r^2)$$

$$r<r_1 : v_3 = -\int_{r_2}^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} - \int_{r_2}^{r} \vec{E}_3 \cdot dl = \frac{kq}{r_2} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}(r_2^2 - r_1^2)$$

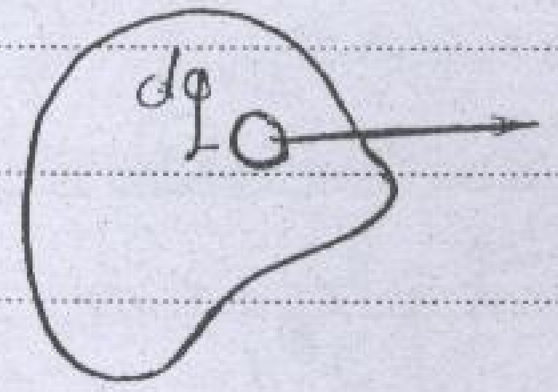
$$v_1 = \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}, \quad v_2 = \frac{\rho r_2^2}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}(r_2^2 - r^2), \quad v_3 = \frac{\rho r_2^2}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}(r_2^2 - r_1^2)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

نکته: برای بدست آوردن پتانسیل به راههای پیچیده داریم.

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$\Delta U = -W_{if} = \frac{\Delta U}{q}$$

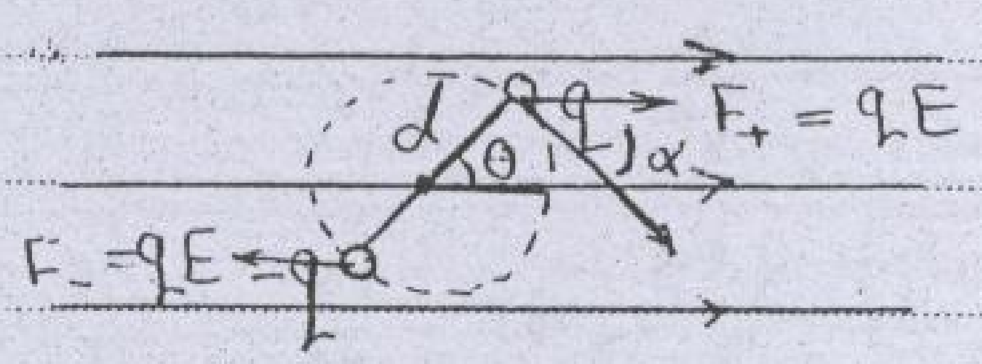
$$E = -\nabla V$$

$$\Delta V = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$V(x)$, $V(y)$, $V(z)$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

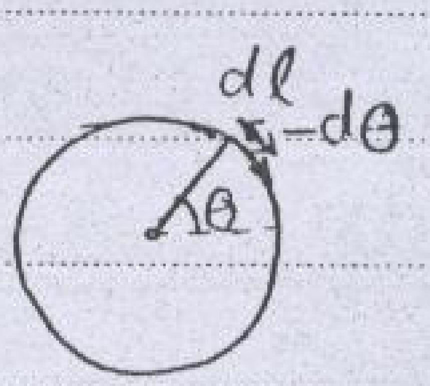
انرژی پتانسیل دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی



$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$$

* $d\theta$ در جهت افزایش θ است.
در این جا θ کاهش می‌یابد.

$$dl = \frac{d}{2} d\theta$$



$$dW = F_+ \times dl \times \sin\theta \times 2 \times \underbrace{(-1)}_{\ominus d\theta}$$

$$dW = -2Eq\sin\theta \frac{d}{2} d\theta$$

$$W = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} -Eqd\sin\theta \, d\theta$$

کار میدان $W = PE\cos\theta = \vec{P} \cdot \vec{E}$ $\qquad$ $U = -\vec{P} \cdot \vec{E}$

$\theta = 0 \Rightarrow U = -P \cdot E$

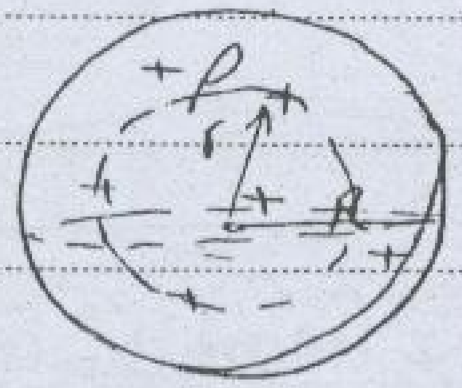
$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow U = 0$ $\qquad$ $\theta = 0 \Rightarrow \min(U)$

$\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow U = PE$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال) کره ای عایق توپر به شعاع R دارای چگالی بار حجمی ρ یکنواخت می باشد. مطلوبست میدان الکتریکی در داخل و خارج.



$0 \leq r < R$

$$\oiint \vec{E}\, d\vec{s} = q/\varepsilon_0$$

$$E \oiint ds = E.\,4\pi r^2$$

$$q = \int \rho\, dv$$

$$q = \int_0^r \rho\, 4\pi r'^2 dr'$$

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 / \varepsilon_0 \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \qquad 0 \leq r < R$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \qquad 0 \leq r < R$$

برای نقاط بیرون: $r \geq R$. ثابت می شود که بار کل توی نقطه متمرکز باشد

$$\oiint \vec{E}\, d\vec{s} = q/\varepsilon_0$$

$$E \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

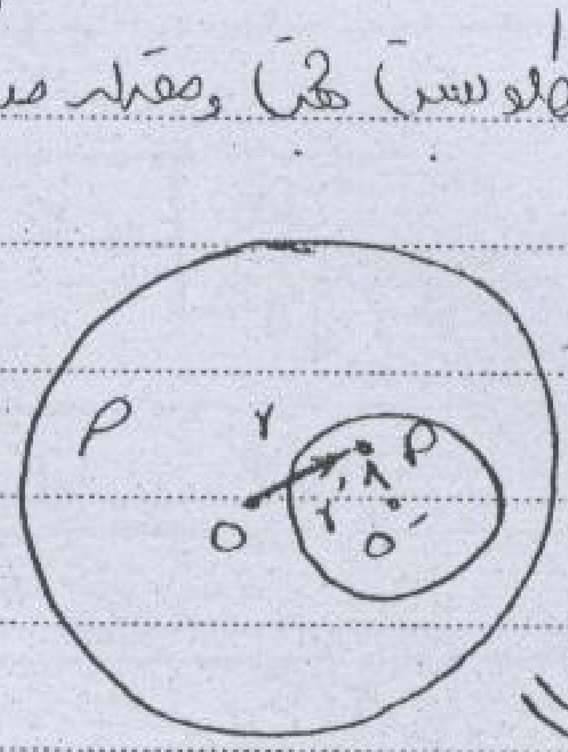
$$E = \frac{kq}{r^2}$$

* اگر $0 \leq r < R$ و $\rho = \rho_0 r \Rightarrow E = \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0}$

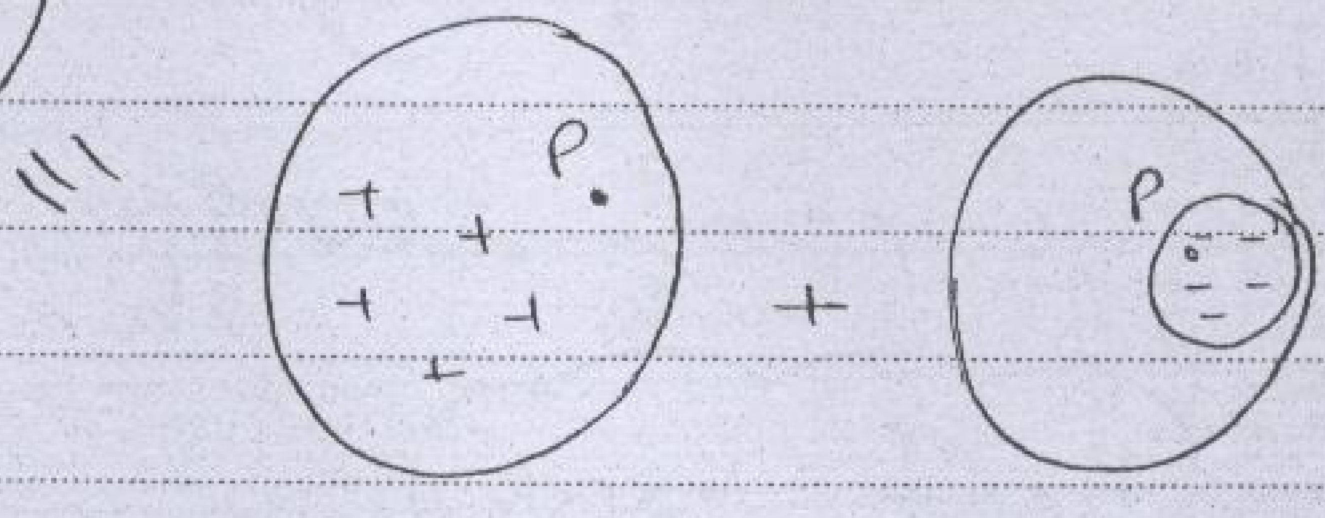
* اگر $R \leq r$ و $\rho = \rho_0 r \Rightarrow E = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 r^2}$

P4PCO

مثال) مطابق شکل داخل کره‌ای به شعاع R با چگالی یکنواخت ρ حفره‌ای ایجاد کرده‌ایم. مطلوبست جهت و مقدار میدان داخل حفره.



$\vec{E}_p = ?$

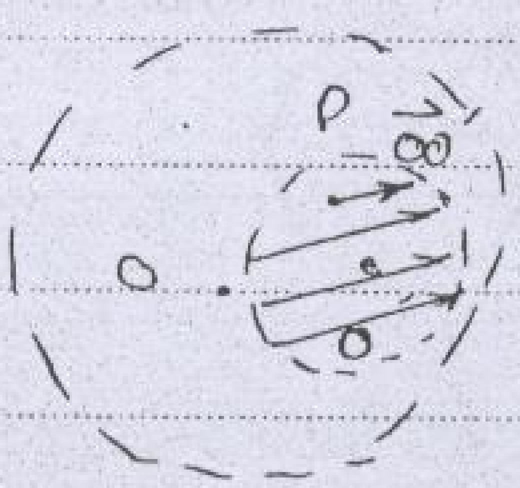


حل)

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

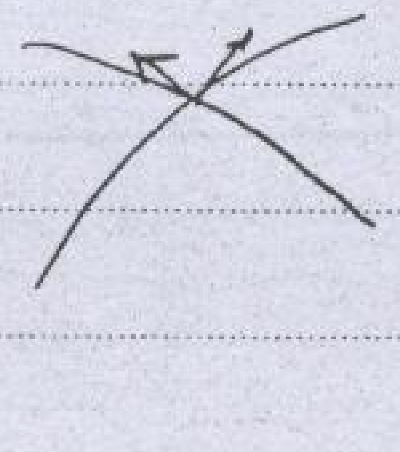
$$\vec{E}_1 = \frac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0} \qquad \vec{E}_2 = -\frac{\rho \vec{r}'}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r} - \vec{r}')}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho \vec{OO'}}{3\varepsilon_0}$$

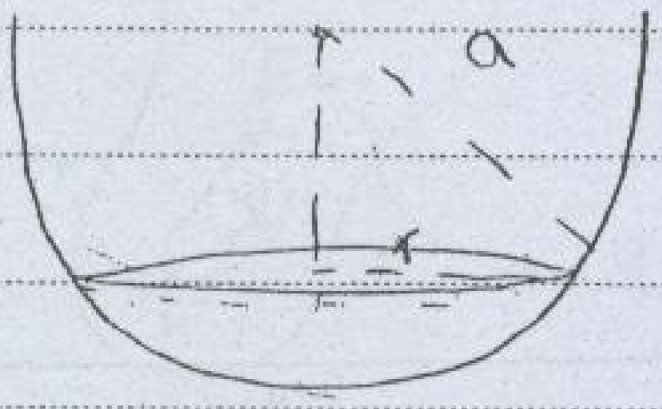


دیده می‌شود: میدان داخل کره کوچک فقط تابع ثابت و جهت آن $\vec{OO'}$ است!

* خطوط میدان الکتریکی قطع نمی‌شوند چون ۲ تا جهت خواهیم داشت.



مثال) میدان در مرکز یک پوسته نارسانای نیم کروی با چگالی $\sigma=\frac{q}{2\pi r^2}$ را بیابید.



$$dE=\frac{k\,dq\,y}{(r^2+y^2)^{3/2}} \Rightarrow dE=\frac{k\sigma\,dA\,y}{(r^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow dE=\frac{k\frac{q}{2\pi r^2}\,y\times dA}{a^3} \Rightarrow E=\frac{kq}{2\pi a^3}\int\frac{y\,dA}{r^2}=\int\frac{y\,dy\times 2\pi r}{r^2}$$

$$=\frac{kq}{a^3}\int\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\frac{kq}{a^3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2\sqrt{a^2-y^2}\Big]_0^a$$

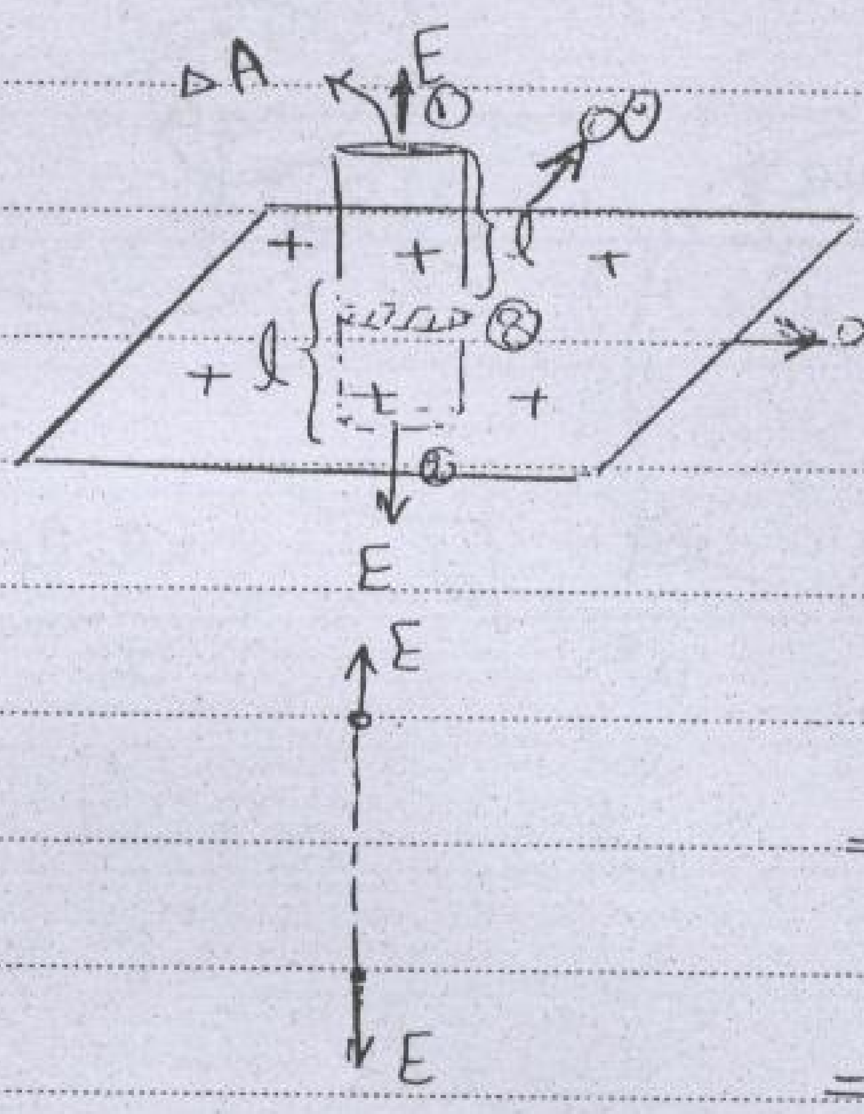
$$=\frac{kq}{a^3}\times a=\frac{kq}{a^2}=\frac{kq}{a^2}\times\sqrt{a^2-0}=\frac{kq\,2\pi}{a}$$

سایر قوانین گاوس :

$E = 0 \Rightarrow q = 0$

$q = 0 \not\Rightarrow E = 0$

مثال) محاسبه میدان صفحه نامحدود با قانون گاوس :



حل)

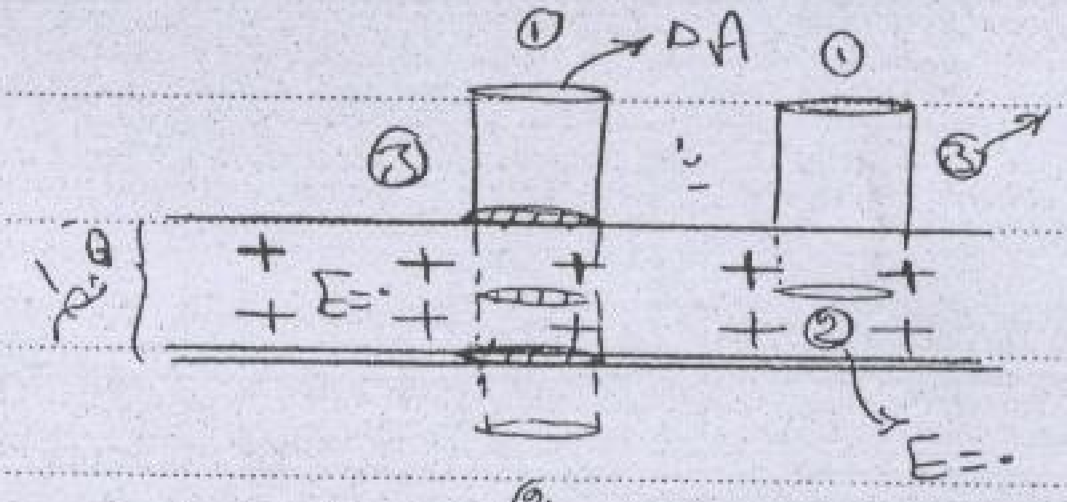
$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \iint E \cdot dS_1 + \iint E \cdot dS_2 + \cancel{\iint E \cdot dS_3}$$

$$\Rightarrow 2E \iint dS = 2E\Delta A = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

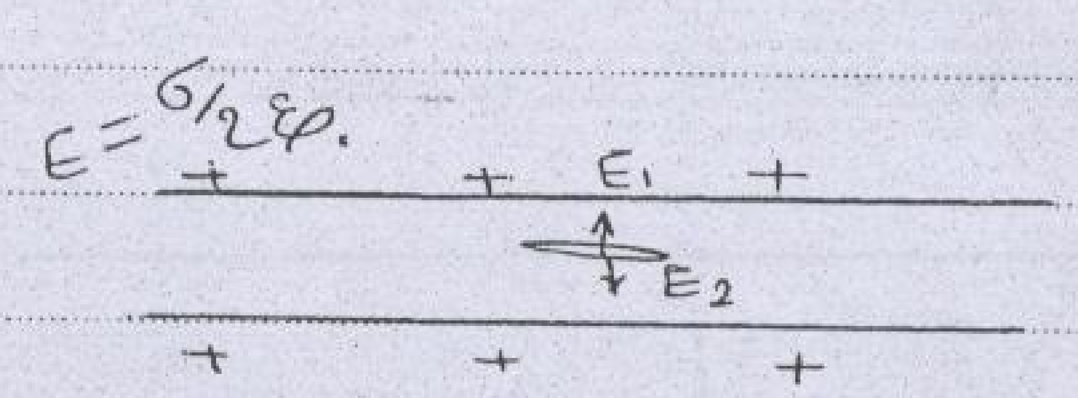
میدان در سطح نارسانا صفحه ی عایق

مثال) محاسبه میدان صفحه نامحدود رسانا :



$$\frac{q}{\varepsilon_0} = 2E\Delta A = \frac{2\sigma\Delta A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

* میدان داخل رسانا صفر است :

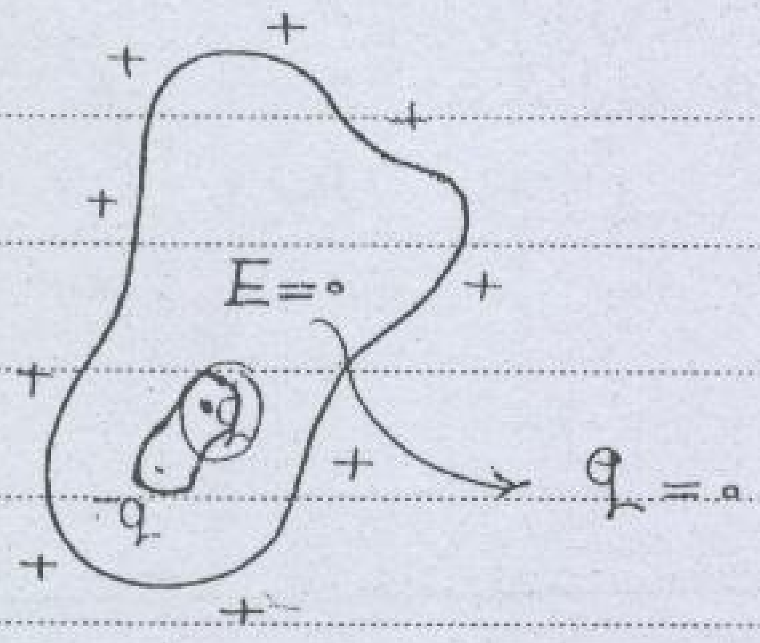


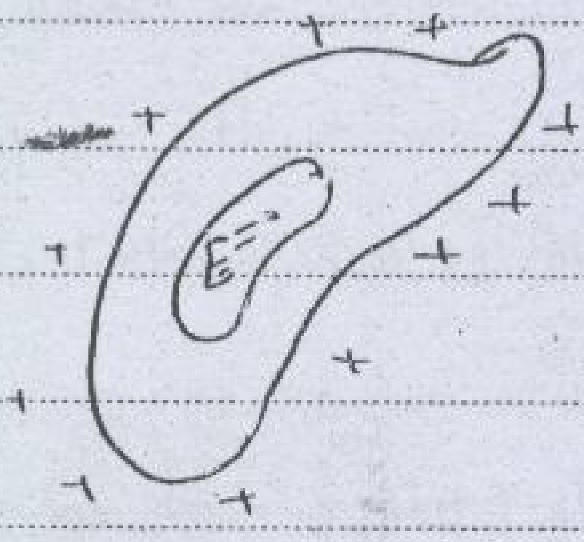
$$E = E_1 - E_2 = 0$$

PAPCO

چهل

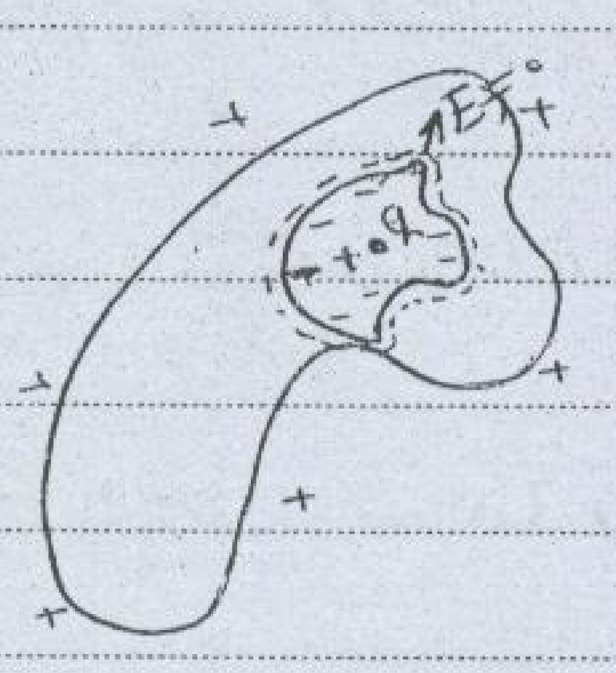
نحوه توزیع بار در رسانا ۲





چون حفره بدون بار داخل جسم باردار است باز هم میدان داخل آن صفر است.

* هرجا سطح باشد باید میدان E در امتداد سطح داشته باشیم.



$$\oint E \cdot ds = 0 \Rightarrow q = 0$$

پس در داخل قرینه هم بار است.

* چکیده مثال ②

① میدان داخل کره نارسانا باردار با چگالی یکنواخت :

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}$$

② میدان خارج کره نارسانا باردار با چگالی یکنواخت به شعاع R به فاصله r از مرکز :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2}\hat{r}$$

③ میدان در فاصله x از میله باردار یکنواخت طولی :

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \times \frac{\lambda}{x}$$

④ داریم صفحه مقابل رسانا با بار با چگالی یکنواخت σ میدان آن :

$$|E| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

⑤ میدان داخل رسانا صفر است و هر سطح گوسی دلخواه داخل آن دارای شار صفر است .

⑥ می‌توانیم بارها را وقتی که بخواهیم میدان خارجش را بیابیم مانند نقطه باردار ببینیم

⑦ قانون گاوس :

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

حل تمرین‌های فیزیک ۲

مثال ۱) مقطع لوله‌ای دایره‌ای طویل با دیواره نازک به شعاع R و با چگالی طولی λ. میدان را در $r<R$ بیابید:
$r>R$

حل) اگر $r>R \Leftarrow$ $E=\frac{2k\lambda}{r}$

اگر $r<R \Leftarrow$ $q_{enc}=0$

مثال ۲) کره‌ای به شعاع R دارای چگالی بار حجمی غیر یکنواخت $\rho=\rho_0 r$ و ضریب دی‌الکتریک ε است. که در آن ρ_0 ثابت مثبت است و واحد هر دو مقدار اینجا است. چنانچه در آن تا شعاع $2R$ بوسیله ماده عایقی با ضریب دی‌الکتریک $\varepsilon=\varepsilon_0 K$ احاطه شده است. میدان الکتریکی را در فواصل $r<R$، $R<r<2R$ و $r>2R$ بیابید. ب) انرژی ذخیره شده الکتریکی تا شعاع $2R$ را بیابید.

$0<r<R \Rightarrow \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0}$

$R<r<2R \Rightarrow \frac{1}{4k\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{r^2}$ $\qquad q=\int\rho\,dv$

$r>2R \Rightarrow \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 r^2}$

$$E=\frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0 K}\times\frac{\rho\cancel{4\pi}R^3}{3r^2}=\rho\frac{R^3}{3\varepsilon_0 K r^2}$$

مثال ۳) دو پوسته رسانای هم‌مرکز به شعاع a، b به ترتیب بار q و $-q$ است.
الف) میدان را در همه‌جا بیابید.
ب) پتانسیل الکتریکی در فاصله $b/2$ از مرکز؟

Subject:

Year. Month. Date. ( )

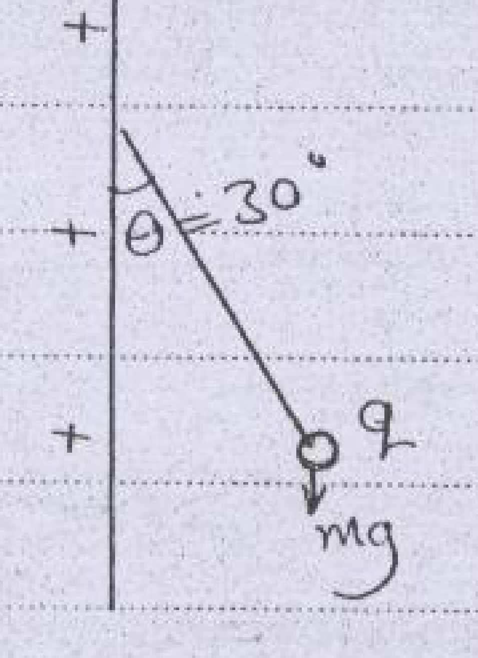
مثال ④ ابر نارسانای توپری با بار حجمی یکنواخت ρ است. فرض کنید r بردار فاصله مرکز این کره تا نقطه‌ای مانند P داخل آن باشد.

الف/ نشان دهید میدان الکتریکی در P از رابطه $E=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$ است.

ب/ مطابق شکل کاواک کروی در قسمتی از این کره ایجاد می‌شود. با مفاهیم برهم‌نهی نشان دهید میدان الکتریکی در تمام نقاط داخل کاواک $\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$ است. r برداری است که مرکز کاواک و کره را وصل می‌کند.

مثال ⑤ یک صفحه نارسانا با چگالی یکنواخت بار σ است. میدان را در نقاط فضا مشخص کنید.

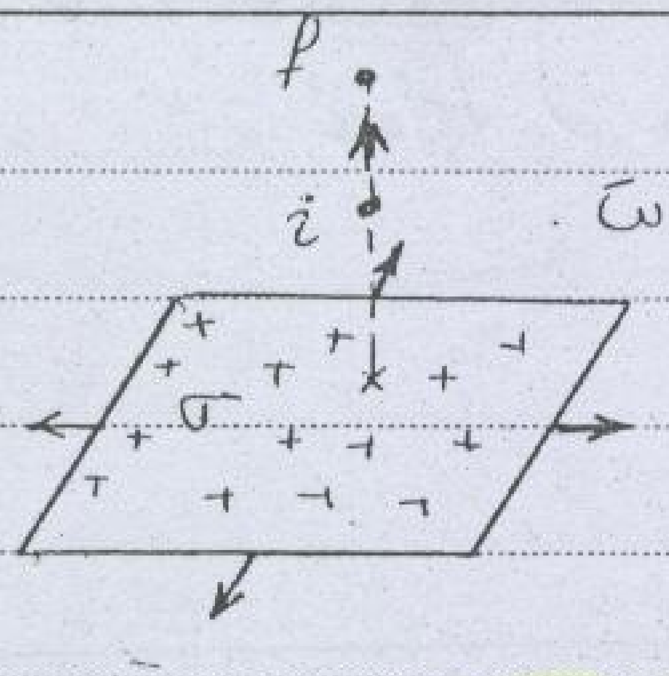
ب/ یک گوی کوچکی به جرم $10^{-3}\,gr$ دارای بار $2\times10^{-8}\,C$ است. این کره از نخ ابریشمی آویزان است و مطابق شکل با ورقه نارسانا با چگالی بار σ دارای زاویه $30°$ است. چگالی σ را بیابید.



$mg =$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

پتانسیل الکتریکی



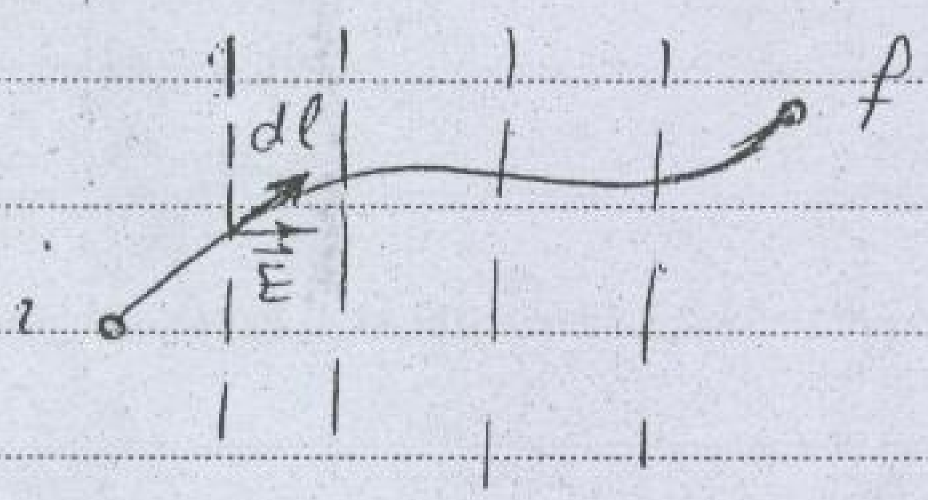
بار هم مثبت است

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{-W_{if}}{q}$$ کار میدان رو V با -

$$W_{if} = \int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{-q\sigma h}{2\varepsilon_0}$$

یکنواخت

$$\Delta V = +\frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}$$



$$dw = \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

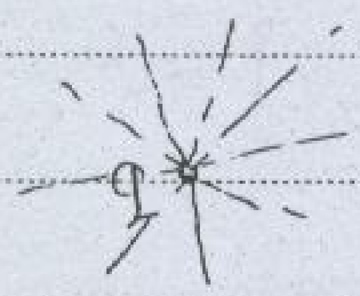
$F = Eq$

$$\Rightarrow W = q\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$V = \frac{W}{q}$

$$\Delta V = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$i \rightarrow \infty$

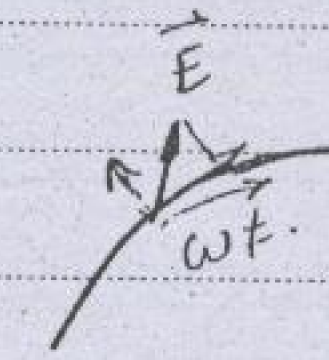
$f \rightarrow r$

$$\Rightarrow \Delta V = V_f - V_i = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$V_f - V_i = -\int_\infty^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q}{r^2}\hat{r}\,dr \Rightarrow V_f - V_i = -\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr \Rightarrow V_r - V(\infty) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V(\infty) = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



نکته مهم: میدان الکتریکی همواره بر سطوح هم پتانسیل عمود هستند چون اگر عمود نباشد:

$V = cte$

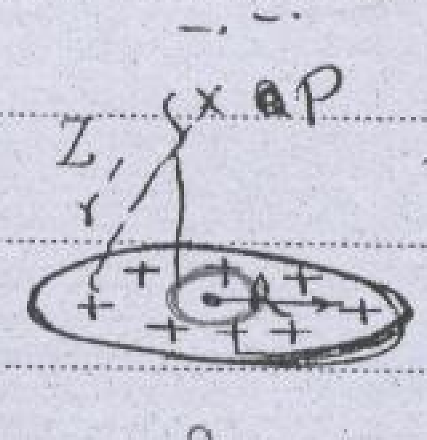
<< و بالعکس >>

برای جابه‌جایی بار روی سطوح هم پتانسیل باید کاری انجام دهیم اگر $\vec{E}$ عمود نباشد

باید بر آن غلبه کرد که کار لازم است.

مثال) پتانسیل الکتریکی را در فاصله Z از دیسک باردار به شعاع R و چگالی بار سطحی σ بیابید.

حل)

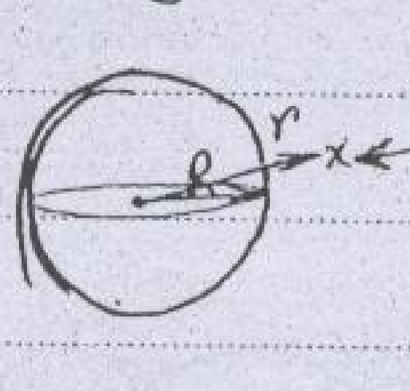


$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2+Z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \times \frac{r dr}{\sqrt{r^2+Z^2}}$$

$$\sigma = \frac{q}{2\pi r dr} \rightarrow q = \sigma 2\pi r dr \quad , \quad V = \int^R \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \times \frac{r dr}{\sqrt{r^2+Z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{Z^2+R^2} - Z\right] = V$$

اگر $R \to \infty \Rightarrow V \to \infty$

مثال) کره‌ای به شعاع R دارای چگالی یکنواخت بار ρ است. پتانسیل الکتریکی در داخل و خارج کره



$$\Delta V = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$0 \leq r < R \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \Rightarrow V = \cancel{-\int_\infty^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}} \; ?$$

$$r \geq R \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow V = -\int_\infty^r \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

$$? \; V(r) = -\int_\infty^R \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr - \int_R^r \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} \quad 0 \leq r \leq R$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

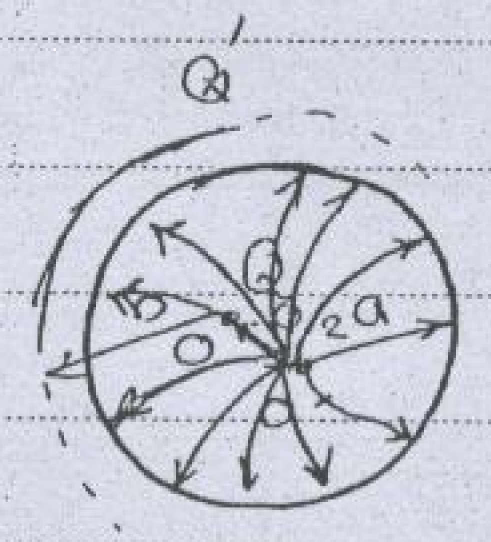
مثال ⑥ یک کره‌ی رسانای ۱ با بار $+Q$ توسط پوسته‌ی رسانای ۲ با بار $+2Q$ احاطه شده، میدان الکتریکی را در نواحی مختلف میدان الکتریکی را بیابید.

مثال) پوسته کروی رسانا مطابق شکل دارای بار Q' می باشد.

الف/ اگر جایی که بار نقطه ای با اندازه Q را در مرکز این کره قرار دهیم بار القا شده بر سطوح داخلی و خارجی این کره را بیابید.

ب/ میدان الکتریکی در نقاط مختلف را حساب کنید.

ج/ الف و ب را برای حالتی مجدداً حل کنید که بار Q در نقطه O' قرار گرفته باشد.



حل:

الف) قانون گاوس $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow q=0$

در سطح داخلی بار $-Q$ جمع می شود تا میدان داخل آن صفر شود.

در سطح خارجی بار $Q+Q'$ جمع می شود تا بار سیستم ثابت باشد. (قانون بقای بار الکتریکی)

ب) ① میدان داخل رسانا [illegible] است. $E = \frac{KQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

② میدان درون پوسته نیز صفر است.

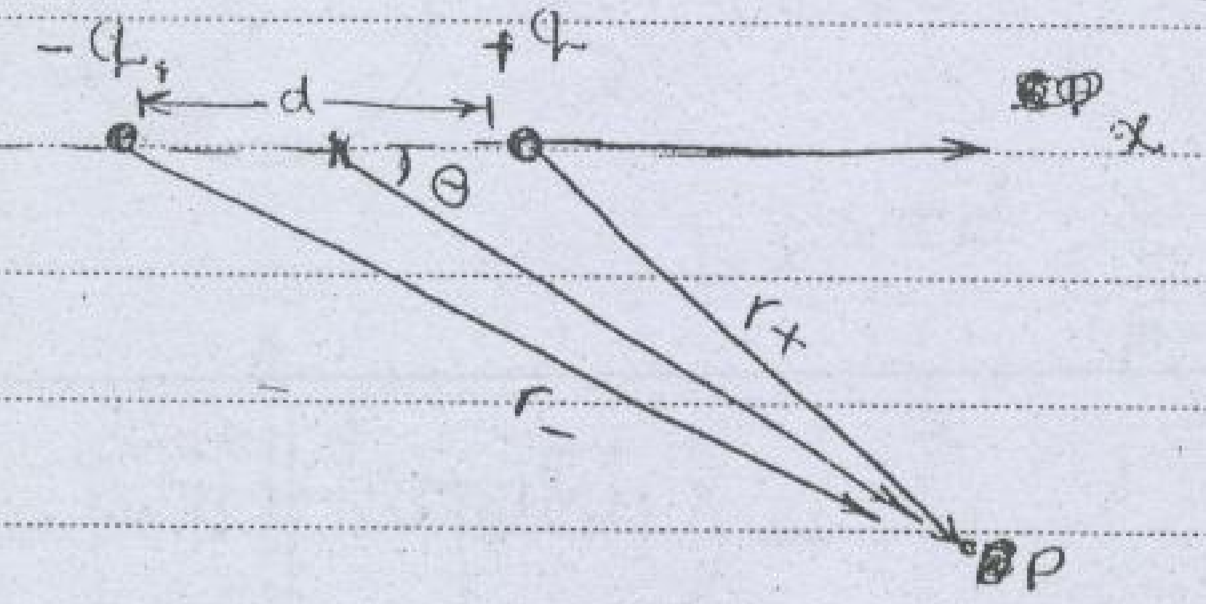
③ میدان خارج پوسته برابر $\frac{K(Q+Q')}{r^2}$ خواهد بود.

ج) الف همان است. ب: ② و ③ مثل قبل. قسمت ① مثل قبل نیست.

*مهم: مجموع بارها در سطح رسانا همیشه ثابت است و میدان در داخل پوسته رسانا صفر است نه
داخل قسمت خالی در داخل آن. اما در رسانا میدان صفر است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محاسبه میدان ناشی از یک دوقطبی الکتریکی در نقطه‌ای دور



$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

$$r_+ = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - 2r\frac{d}{2}\cos\theta} = r\left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_- = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} + 2r\frac{d}{2}\cos\theta} = r\left(1 + \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

بطاول : $r_\pm = 1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta$

$$\Rightarrow V_x = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

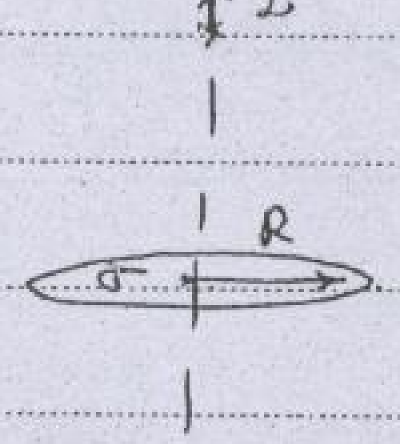
$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} = ?$$

داریم: $\vec{E} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{r} + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\theta} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right]$

میدان $\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) میدان این دیسک را بیابید

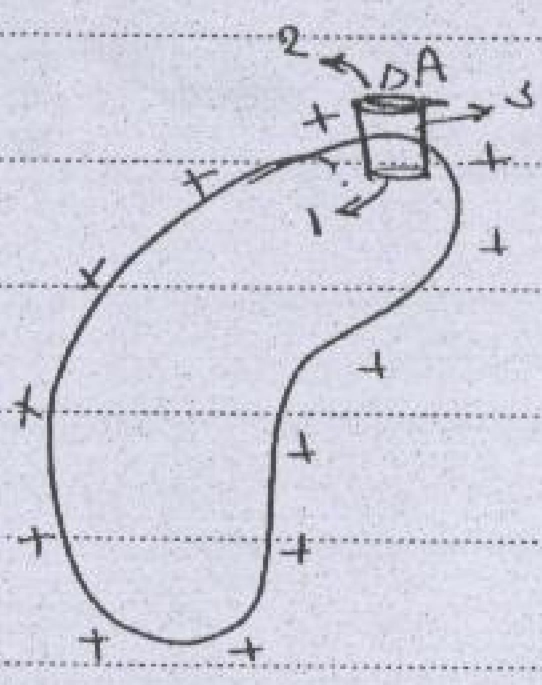


$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - z\right]$$

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\times\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - 1\right)\vec{k}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{k}$$ E نسبت به

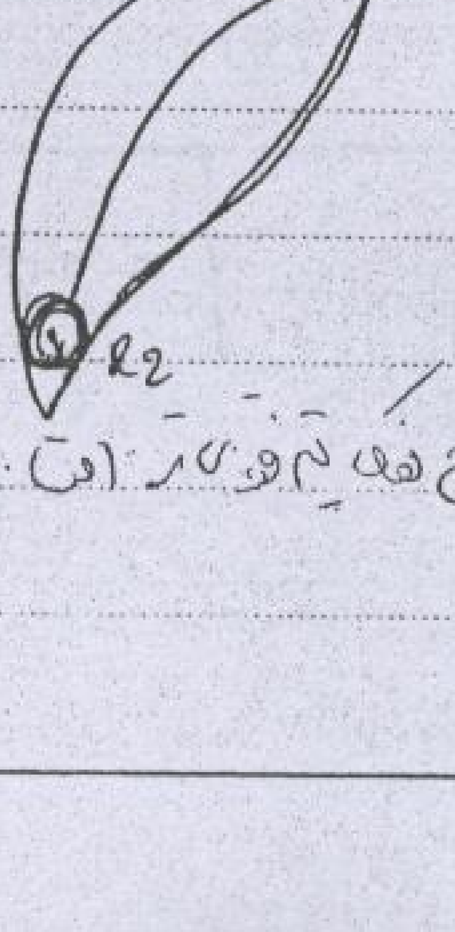
توزیع بار روی سطح جسم رسانا



$$\Phi = \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\cancel{\iint_1 \vec{E}\cdot d\vec{S}} + \iint_2 \vec{E}\cdot d\vec{S} + \cancel{\iint_3 \vec{E}\cdot d\vec{S}} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ میدان در روی سطح رسانا با σ می‌تواند تغییر کند



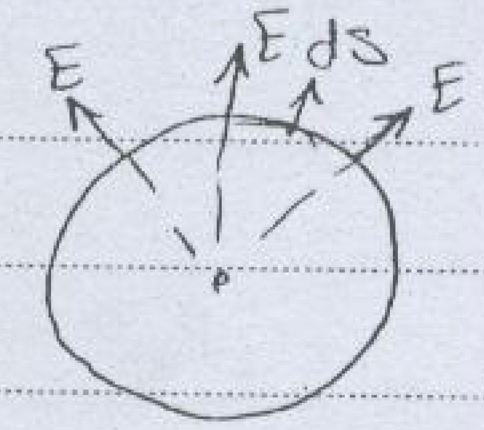
$R_1 > R_2$

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \Rightarrow \frac{kq_1R_1}{R_1^2} = \frac{kq_2R_2}{R_2^2}$$

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

σ در نقاط نوک تیز زیادتر است $\Leftarrow$ $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$ $\Rightarrow$ میدان در نقاط سطح های تیزتر بیشتر است

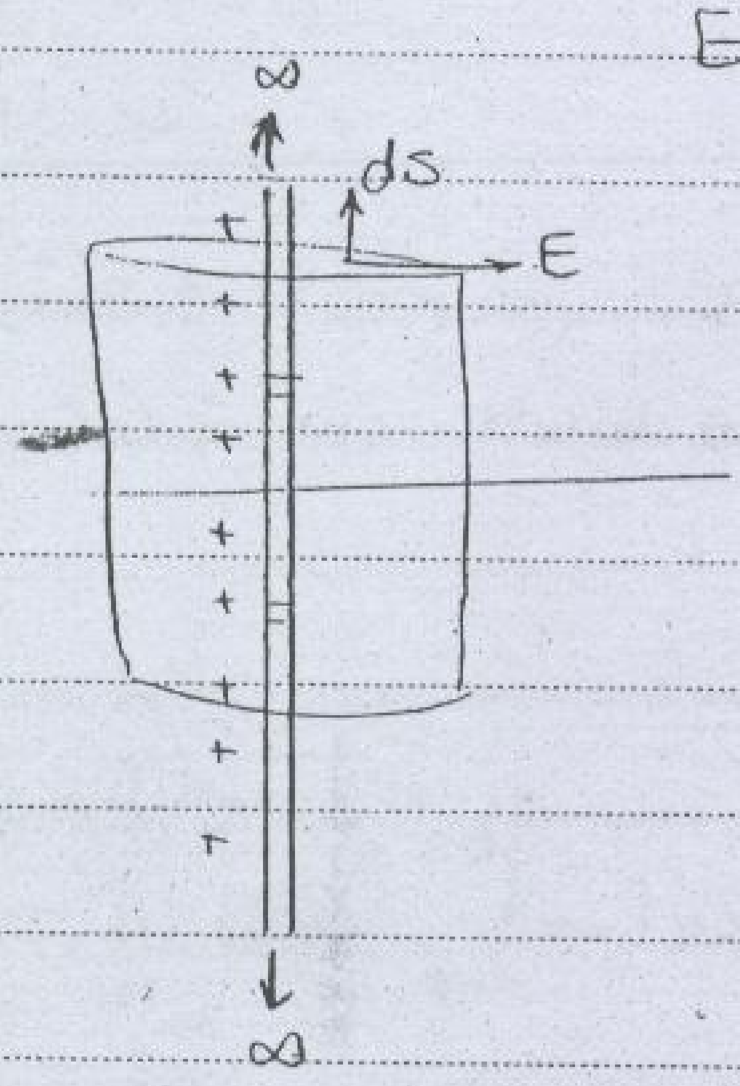
P4PCO



مثلاً قانون کولمب و بار نقطه‌ای:

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$ $\vec{E}$ ثابت است

$$E \times 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$$



مثال)

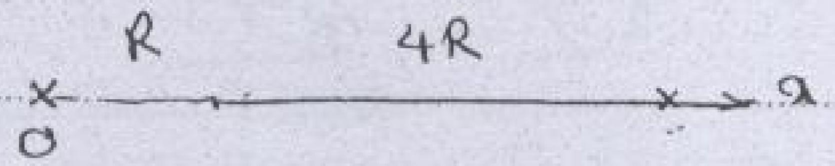
$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \cancel{\iint_1 \vec{E}\cdot ds} + \cancel{\iint_2 \vec{E}\cdot ds} + \iint_3 \vec{E}\cdot ds$$

$$= E\, 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi r \varepsilon_0 l}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین سری ۲

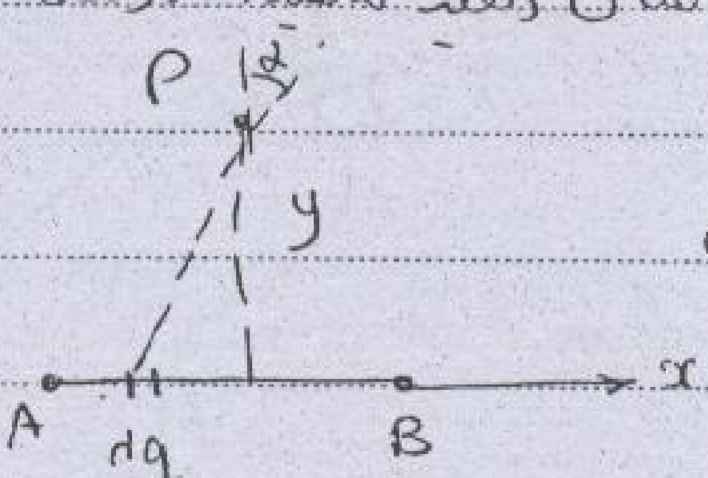
مثال) در شکل زیر با چگالی بار AB غیر یکنواخت توزیع شده به صورت $\lambda=\alpha x$ $(R<x<4R)$ است. α ثابت مثبت است. x فاصله نقطه از مبدأ است. میدان در مبدأ؟



حل)
$$dE=\frac{k\,dq}{r^2}=\frac{k\alpha x\,dx}{x^2}\Rightarrow E=k\alpha\ln x\Big]_{R}^{4R}=k\alpha\ln 4$$

مثال) میله باریک نارسانا به طول l به طور یکنواخت با چگالی بار است. نشان دهید که میدان در نقطه P روی عمود منصف میله است.

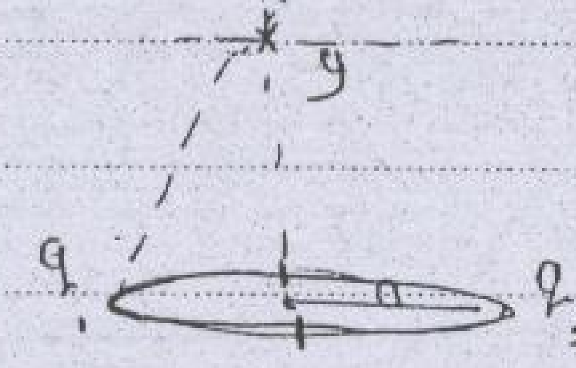
$$\lambda=\frac{q}{A}$$



حل)
$$dE_y=\frac{k\,dq\cos\alpha}{r^2}=\frac{k\,dq\cos\alpha}{y^2+x^2}$$

$$=\frac{k\,dq\,y}{(y^2+x^2)^{3/2}}\Rightarrow dE_y=\frac{k\frac{q}{A}dx\,y}{(y^2+x^2)^{3/2}}=\cdots$$

مثال) حلقه‌ای غیر یکنواخت باردار شده است. نصف حلقه با بار q_1 و نصف دیگر q_2 یکنواخت پخش شده است. اگر شعاع حلقه a باشد میدان الکتریکی را در فاصله y از مرکز حلقه به دست آورید.



$$E_y=E_{1y}+E_{2y}$$

$$E_{1y}=\frac{kq_1}{a^2+y^2}\cos\alpha \qquad E_{2y}=\frac{kq_2}{a^2+y^2}\cos\alpha\Rightarrow\frac{k(q_1+q_2)}{a^2+y^2}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

انرژی پتانسیل مجموعه ای بارهای نقطه ای

$$q_2 V_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = q_1 V_{21}$$

$$U_1 = W_1 = q_2 V_{12}$$

$$U_2 = W_2 = q_3 (V_{13} + V_{23})$$

$\vdots$

$$U_n = W_n = \dots$$

$$\Rightarrow U_1 = q_1 V_{21}$$

$$U_2 = q_1 V_{31} + q_2 V_{32}$$

$\vdots$

$$2U = q_1 (V_{21} + V_{31} + \dots) + q_2 (V_{12} + V_{32} + \dots) + q_3 (V_{13} + V_{23} + \dots) + \dots$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V_i$$ انرژی پتانسیل مجموع

انرژی پتانسیل هرجا بار هست

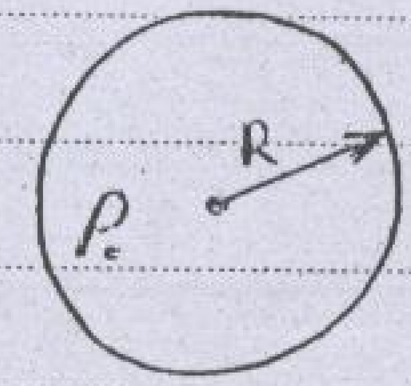
$$U = \frac{1}{2} \int V dq \qquad dq = \rho dv \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \frac{\rho dv}{\varepsilon_0}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \varepsilon_0 E^2 dv$$ انرژی پتانسیل هرجا میدان باشد باید انتگرال گیری شود

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ل) یک کره دارای چگالی بار یکنواخت ρ است. مطلوب است انرژی الکتریکی درون این توزیع بار.



$$0 \leqslant r < R \longrightarrow E_1 = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}$$

$$r \geqslant R \longrightarrow E_2 = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^R \varepsilon_0 E_1^2\, dv + \frac{1}{2}\int_R^\infty \varepsilon_0 E_2^2\, dv$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^R \varepsilon_0 \left(\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\right)^2 dv + \frac{1}{2}\int_R^\infty \varepsilon_0 \left(\frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 dv$$

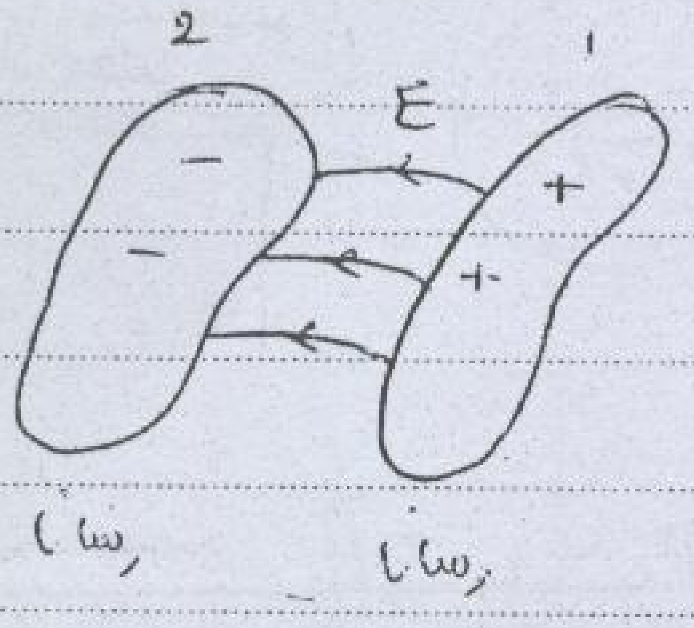
$$dv = 4\pi r^2 dr$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{\rho_0^2 r^2}{9\varepsilon_0} \times 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\int_R^\infty \frac{\rho_0 R^6}{9\varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr$$

$$U = \frac{1}{2}\int^R \frac{\rho_0 R^5 \times 4\pi}{9\times 5\varepsilon_0} + \cdots$$

$$U = 12\rho_0^2 \pi R^4 / 45\varepsilon_0$$ انرژی پتانسیل

خازن ها



$q\uparrow \rightarrow E\uparrow \rightarrow V\uparrow$

$q \propto V \Rightarrow q = CV$

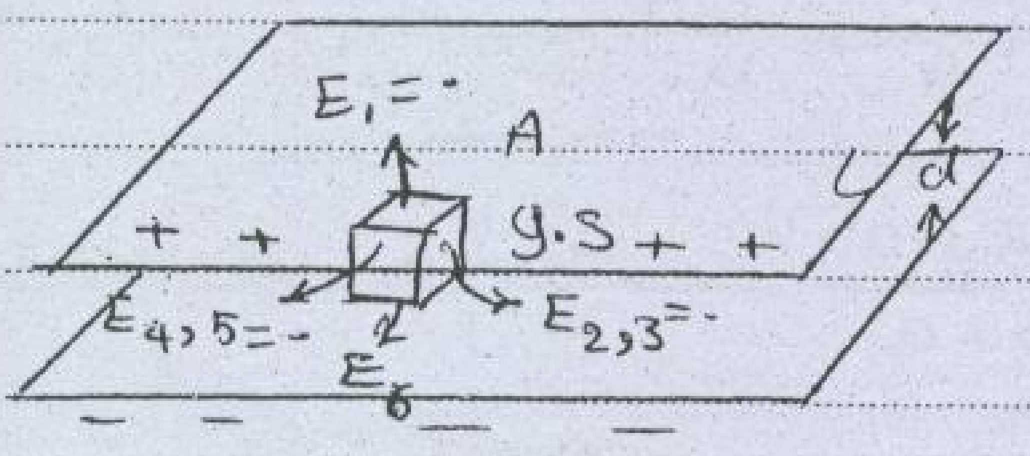
C ظرفیت خازن

محاسبه ظرفیت خازن

$q \xrightarrow{\text{گاوس}} E \longrightarrow \Delta V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} \longrightarrow V$

$C = q/V$

خازن مسطح



$L \gg d$

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int E_6\, dS = EA = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

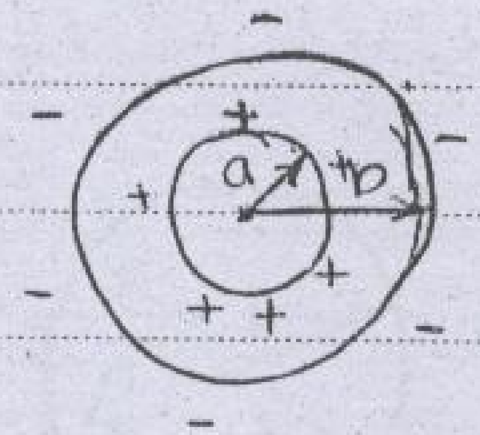
$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_i^f E\, dl = -\int_i^f \frac{q\, dl}{\varepsilon_0 A} = \frac{qd}{\varepsilon_0 A} = V$$

$$C = q/V = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \rightsquigarrow \text{مهم}$$

$$\boxed{C = \frac{\kappa \varepsilon_0 A}{d}} \rightsquigarrow \text{ظرفیت خازن}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

خازن کروی



$q \,,\, -q$

$r<a \quad r>b \longrightarrow E=0$

$$\Rightarrow a \leq r \leq b \Rightarrow \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E \times 4\pi r^2 = q/\varepsilon_0$$

$$V = \Delta V = -\int_2^{l} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_1^{l} \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \times dr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

$$V_+ - V_- = V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$C = q/V \Rightarrow C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} \Rightarrow b \gg a \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 a$$

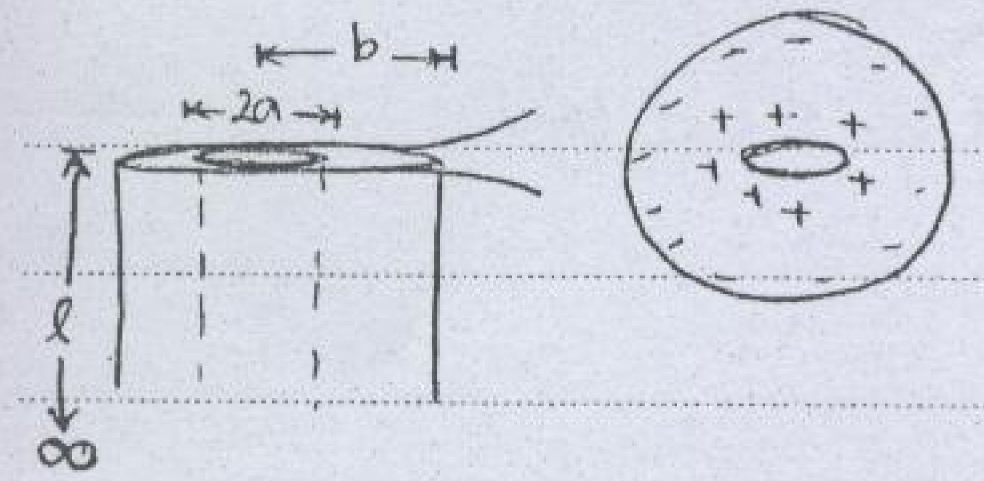
$$C = \frac{4K\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$ خازن کروی

$$C = 4\pi\varepsilon_0 K a$$ خازن منفرد $\quad b \gg a$

RAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )



خازن استوانه ای

$0 < r < a \quad \oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E A = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = 0$

$r > b \Rightarrow E = 0$

$a < r < b \quad \oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\, 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0}$

قاعده ها کار نداریم $\angle E, ds = 90^\circ \qquad E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l}$

$$v_+ - v_- = -\int_-^+ E\,dl = \int_{+(r=a)}^{-(r=b)} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\,dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a} = \Delta v$$

$$c = \frac{q}{v} \Rightarrow c = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{b}{a}}$$

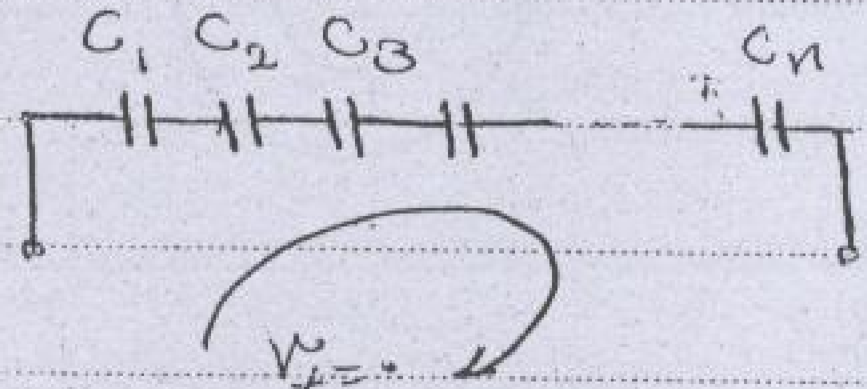
$$\frac{c}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}$$ ظرفیت خازن استوانه ای

$+q$, $-q$ مدل مداری خازن

P4PCO

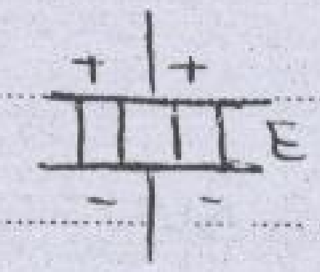
ظرفیت معادل خازن های سری و موازی

خازن های سری



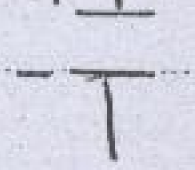
$\Longrightarrow C_{سری}$

* فرض می کنیم که ابتدا خود خازن ها بدون بار بوده اند یا بار متقارن داشته اند



$$\oint \vec{E}_q \cdot d\vec{x} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$V = -\int E \cdot dl = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 + \cdots + V_n = 0 \Rightarrow \sum V_i = 0$$



قطب دار

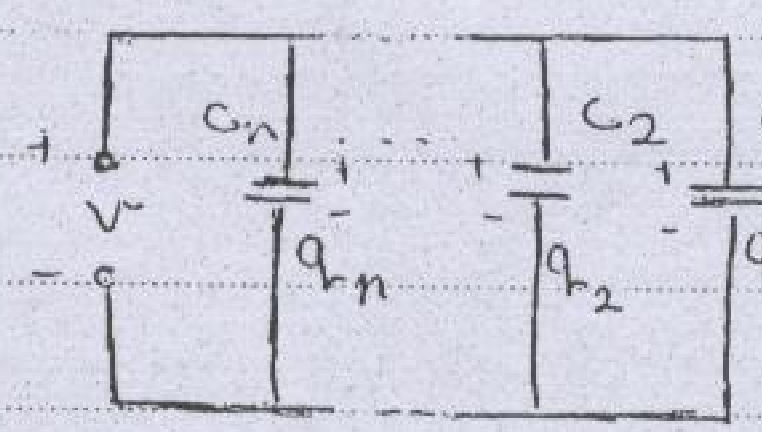
«قانون ولتاژ»

KVL

کیرشهف ولتاژ قانون

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{q_1}{C_1} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} V_i = 0 \Rightarrow \frac{1}{C_{ser}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

خازن های موازی



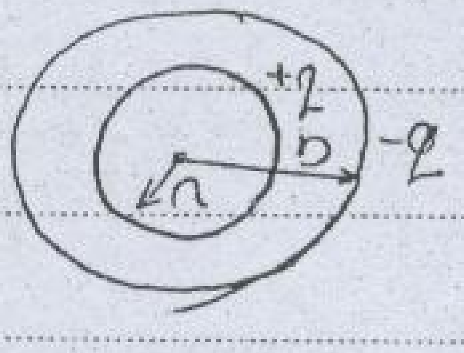
$$q_{Par} = q_1 + \cdots + q_n$$

$$q_{Par} = C_1 V_1 + \cdots + C_n V_n$$

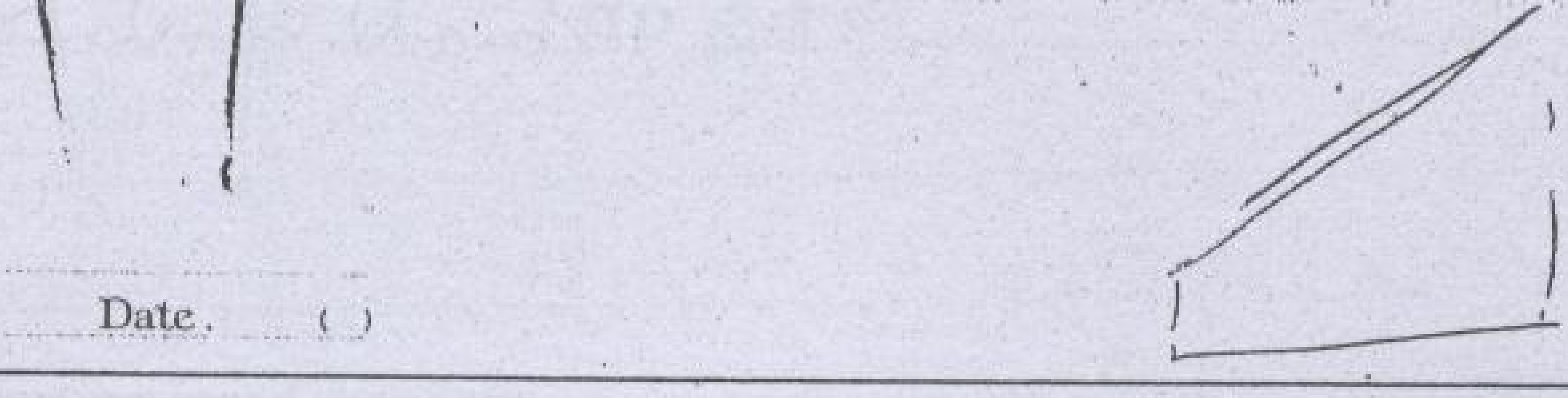
$$C_{Par} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \qquad V_i = V_j$$

مثال) یک خازن کروی شامل ۲ پوسته کروی هم‌مرکز به شعاع‌های a و b که $b > a$ است.
نشان دهید ظرفیت خازن $4\pi\varepsilon_0\, ab/b-a$.

مثال) ۲ کره فلزی به شعاع‌های a و b به وسیله سیم نازک به هم وصل شده اند. فاصله میان آن‌ها در مقایسه با ابعادشان زیاد است. پس از دادن بار Q به این دستگاه سیم قطع می‌شود.
الف/ چه بار روی هر کره باقی می‌ماند.
ب/ با توجه ظرفیت نشان دهید ظرفیت دستگاه عبارتست از $C = 4\pi\varepsilon_0(a+b)$

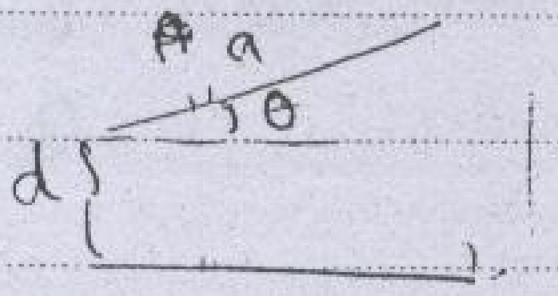


Subject:
Year. Month. Date. ( )

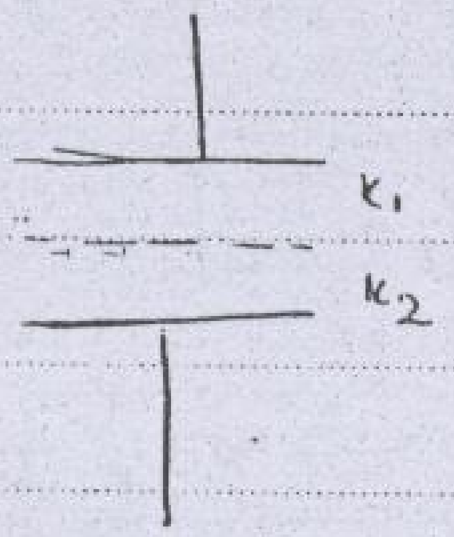


۱۰) خازنی دارای صفحات مربعی به ضلع a است. این صفحات با هم زاویه θ می‌سازند.
برای مقادیر کوچک θ ثابت کنید ظرفیت برابر:

$$C=\frac{\varepsilon_0 a^2}{d}\left[1-\frac{a\theta}{2d}\right]$$

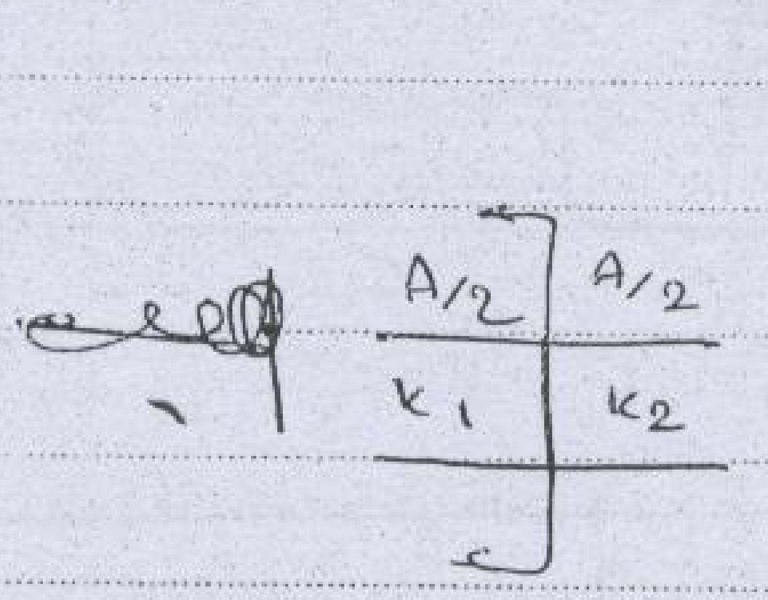


۱۱) یک خازن با صفحه موازی مطابق شکل با ۲ دی‌الکتریک پر شده است. نشان دهید ظرفیت خازن:



ثابت کنید این ۲ خازن مانند ۲ خازن متوالی اند.

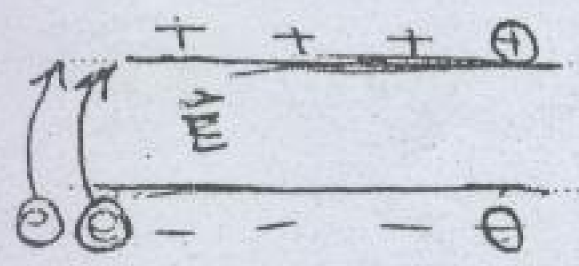
$$C=\frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\right)$$



$$C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}\left[\frac{k_1+k_2}{2}\right]$$

PAPCO

انرژی ذخیره شده در خازن



$F = qE$

$dw' = du = v'dq' \Rightarrow \int_0^U du = \int_0^q \frac{q'dq'}{C} \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}$

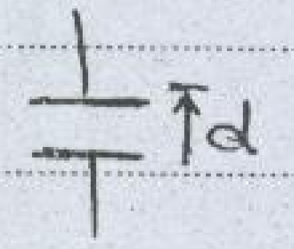
کار لازم برای بردن q' از صفحه
$-$ به $+$ ببرد.

$\boxed{U = \frac{1}{2} C v^2}$

چگالی :

$dU = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dv$

خازن مسطح $\Rightarrow U = \frac{1}{2} C v^2$



$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

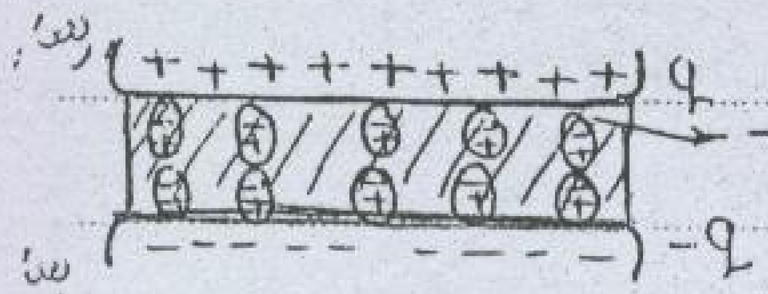
$v = Ed$

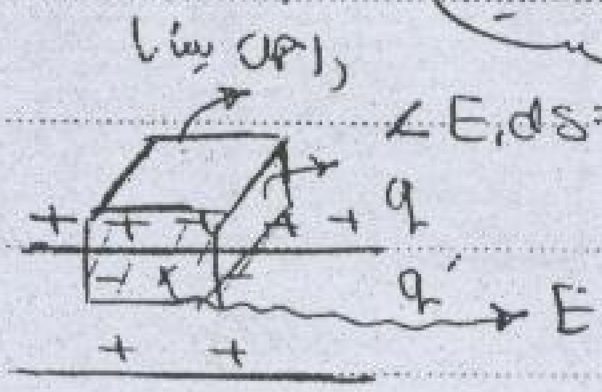
$\Rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} C v^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \underbrace{Ad}_{v\ \text{حجم}}$

چگالی انرژی الکتریکی

$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = u_E$ انرژی واحد حجم

قانون گوس در حضور یک دی الکتریک عایق





$\oint E \cdot ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$EA = \frac{q - q'}{\varepsilon_0}$ در حضور دی الکتریک

$E_0 A = \frac{q}{\varepsilon_0}$ خلأ

$K = \frac{E_0}{E} \Rightarrow E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow \frac{q}{q - q'} = K \quad \boxed{q - q' = q_0 \cdot K^{-1}}$

Subject: بار آزاد
Year. Month. Date. بار القایی (-)

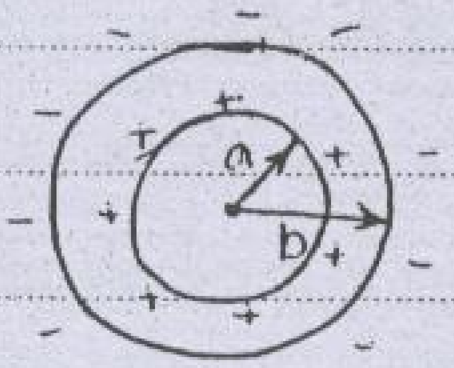
$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q-q'}{\varepsilon_0} = \frac{q}{K\varepsilon_0} \Longrightarrow \oiint K\vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow$$ بار های آزاد

قانون گاوس در حضور دی الکتریک K داخل انتگرال هم است

مثال) فضای بین صفحات یک خازن کروی با شعاع a و b با ضریب دی الکتریک $K = \frac{1}{r}$ پر شده است. که r در آن فاصله هر نقطه از مرکز کره است:

الف) ظرفیت خازن را حساب کنید.

ب) اگر این خازن تا بار Q پر شده باشد انرژی ذخیره شده بین صفحات را بیابید.



حل الف _

$$\oiint K E\, ds = KE \oint ds = q/\varepsilon_0$$

$$4\pi r^2 \frac{E}{r} = q/\varepsilon_0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

$$V_+ - V_- = \Delta V = -\int_-^+ E\,dl = \int_+^- E\,dl = \int_{+(b)}^{-(a)} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ln b/a$$

$$C = q/V \Rightarrow C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\ln b/a}$$

ب) راه ۱

$$\frac{1}{2} q^2/C = \frac{1}{2} q^2/4\pi\varepsilon_0 \ln b/a = \frac{q^2 \ln b/a}{8\pi\varepsilon_0} \quad q = Q$$

$$U = \int \frac{1}{2} K\varepsilon_0 E^2\, dv$$ در حضور دی الکتریک

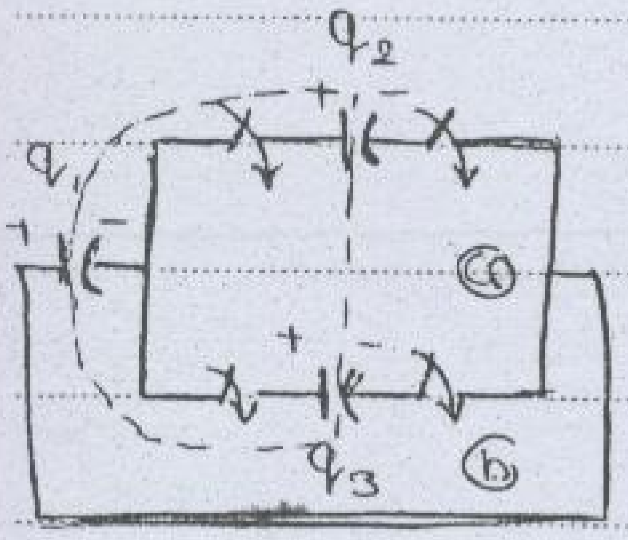
راه ۲

$$U = \int_a^b \frac{1}{2}\times\frac{1}{r}\times\varepsilon_0\times 4\pi r^2 dr \times \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^2} = \frac{Q^2 \ln b/a}{8\pi\varepsilon_0}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) خازن های c_1، c_2، c_3 مطابق شکل دارای بارهای q_1 و q_2 و q_3 هستند. بار روی هر یک از خازن ها را پس از بسته شدن کلیدها را بیابید.

* خازن و باتری و مقاومت با یکدیگر را تغییر دهد



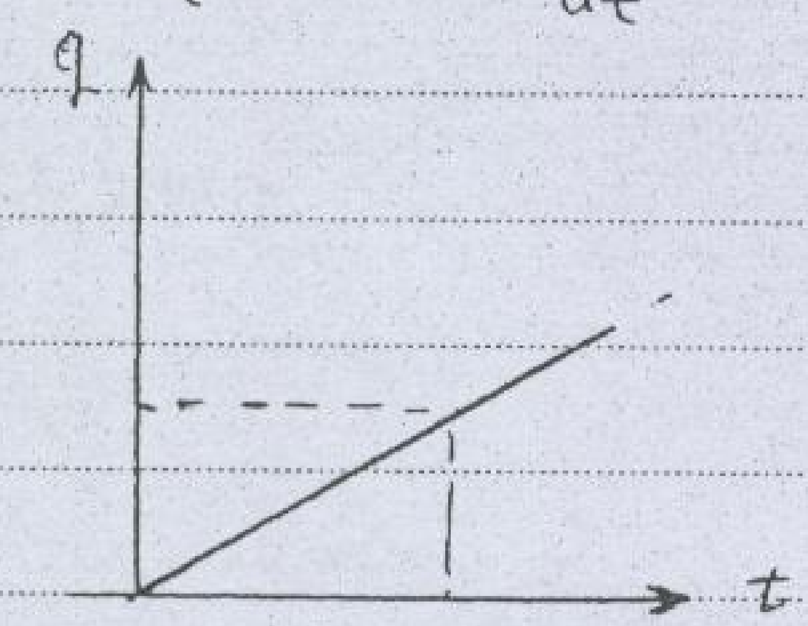
ans. ① $+q_2' - q_1' + q_3' = +q_2 - q_1 + q_3$

② a حلقه (kvl) $-\dfrac{q_2'}{C_2} + \dfrac{q_3'}{C_3} = 0$

③ b حلقه (kvl) $\dfrac{q_1'}{c_1} + \dfrac{q_3'}{c_3} = 0$

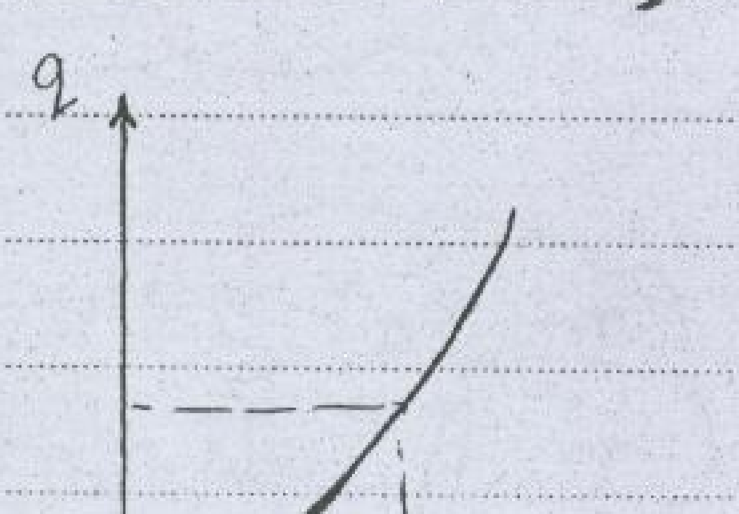
بارهای الکتریکی و جریان های الکتریکی

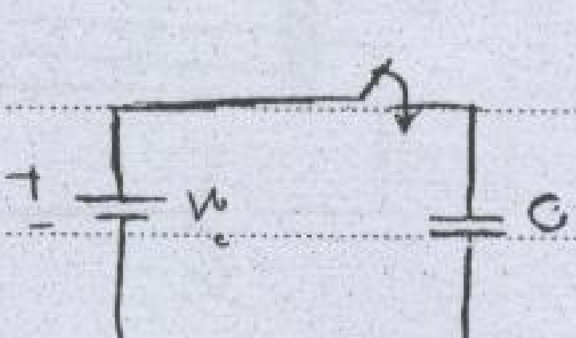
$\bar{I}_{\text{متوسط}} = \dfrac{q}{t}$ $\quad i_{\text{لحظه ای}} = \dfrac{dq}{dt}$



$I = q/t$

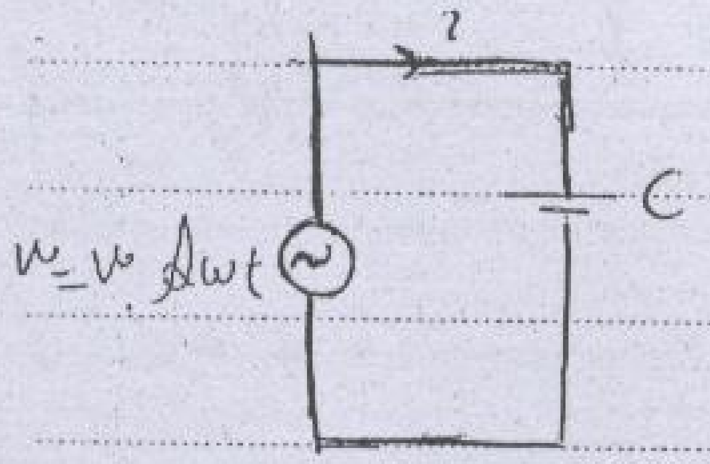
$i = dq/dt \Rightarrow I = i$





$i = \dfrac{dq}{dt} = c\dfrac{dv_c}{dt}$

$t \to \infty : v_c = cte \Rightarrow i\,(t \to \infty) = 0$

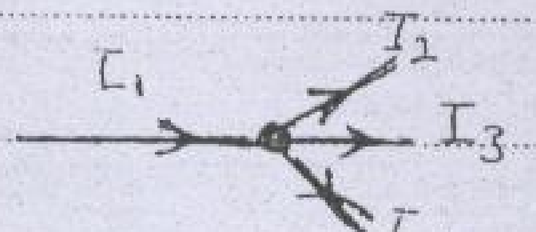


$v = v_0 \sin\omega t$

$$i = C\frac{dv_C}{dt} = C v_0 \omega \cos\omega t$$

$$v_C = v_0 \sin\omega t$$

قانون KCL :

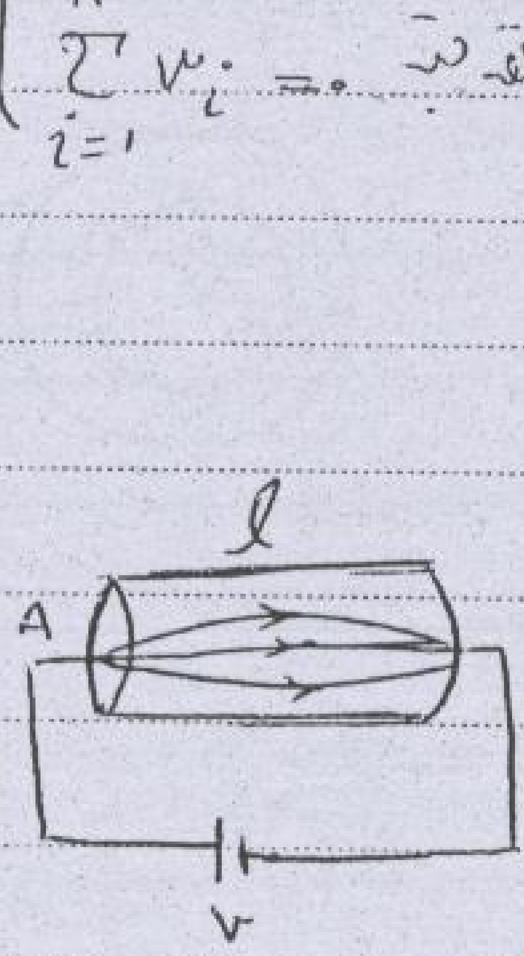


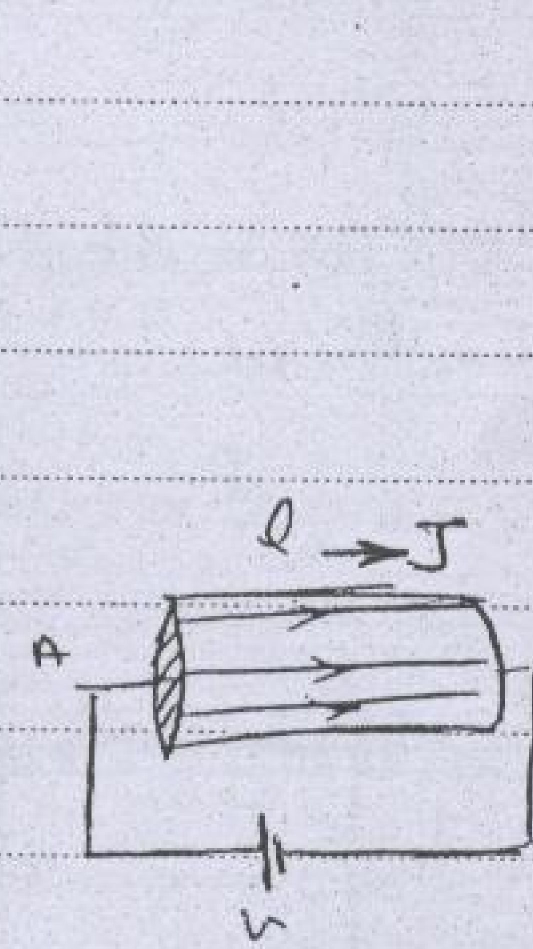
$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

قانون KVL :

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 0 \quad \text{در حلقه بسته}$$

در متن سیلندر سطح مقطع جریان





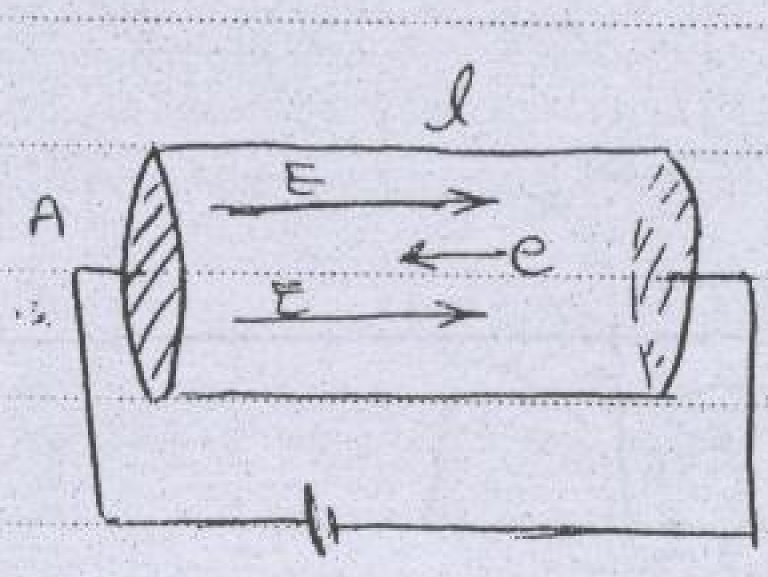
$I = JA$

$\vec{J}$ چگالی جریان

$I = JA$ چگالی جریان

$I = \iint \vec{J}\cdot\vec{dA}$

$$I = \iint \vec{J}\cdot d\vec{S}$$



$$i = \frac{dq}{dt} \simeq \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

n: تعداد الکترون آزاد در واحد حجم

$$\Delta t = \frac{l}{v_d}$$ سرعت رانش یا drift

$$\Delta q = q \times n \times A \times l$$

$$i \simeq q n A v_d \qquad J = \frac{I}{A} = -q n v_d = J$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$+q$ $+q'$ $+q$

O ——— x ——— O $\qquad x \ll a$

a $\qquad x \sim a$

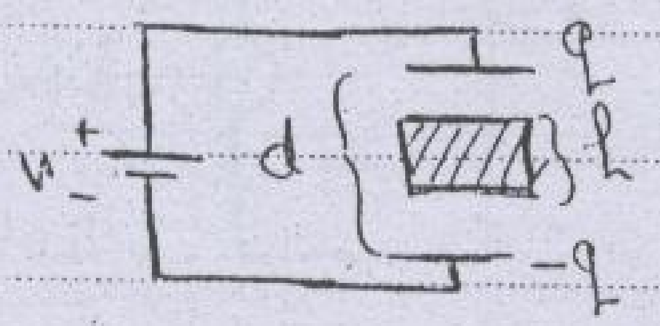
پتانسیل در فاصله x از کف صفحه بار.

پتانسیل در فاصله a از کره باردار با توجه به $V = -\int E \cdot dl$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال)



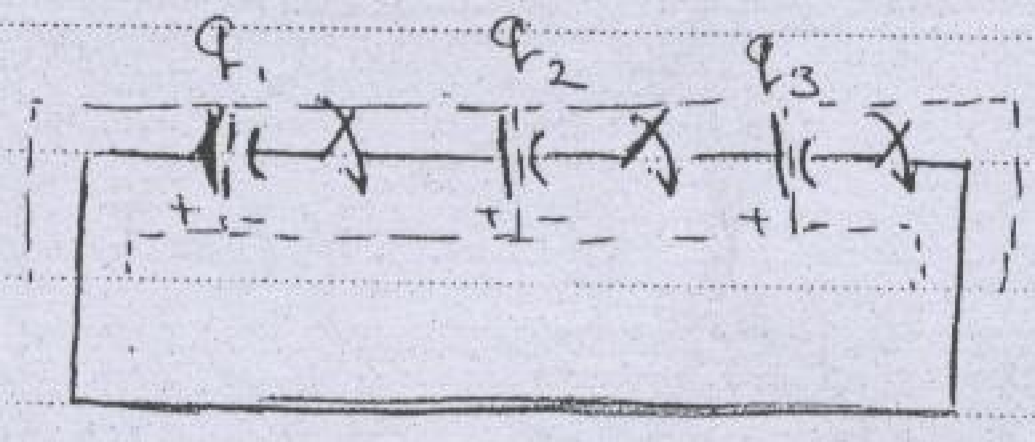
$$\left.\begin{aligned} E'_0 &= \frac{q}{\varepsilon_0 A} \\ E' &= \frac{q}{k\varepsilon_0 A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E' = E_0/k$$

$$V_0 = E'_0(d-h) + E'h$$

$$V_0 = E'_0\left((d-h) + \frac{h}{k}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0 A}\left((d-h) + \frac{h}{k}\right)$$

$$C = q/V_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d-h+\frac{h}{k}}$$ ظرفیت خازن

مثال) خازن‌های C_1، C_2 و C_3 را ابتدا با باتری تا بارهای q_1 و q_2 و q_3 شارژ کرده‌اند. اگر کلیدها به طور همزمان بسته شوند بار روی هر خازن چقدر خواهد شد؟



حل)

$$\left.\begin{aligned} -q_1 + q_2 &= -q'_1 + q'_2 \quad ① \\ -q_2 + q_3 &= -q'_2 + q'_3 \quad ② \end{aligned}\right\}$$ پایستگی بار

$$-\frac{q'_1}{C_1} - \frac{q'_2}{C_2} - \frac{q'_3}{C_3} = 0 \quad ③$$

KVL که شرط دوم مسئله را پیش می‌آورد

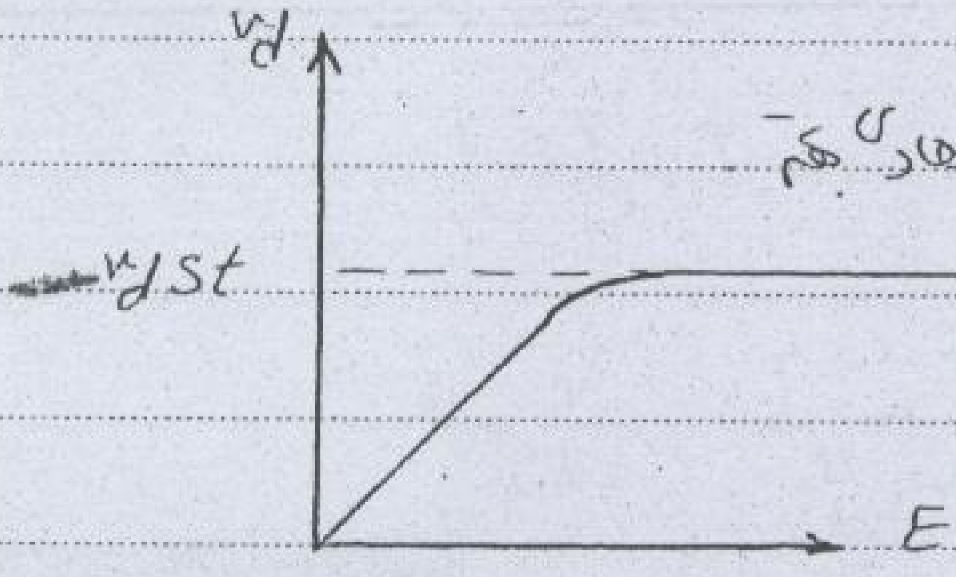
RaPCO

$\vec{v}_d \propto \vec{E} \Rightarrow \vec{v}_d = \mu \vec{E}$ بار مثبت

$\vec{v}_d = -\mu \vec{E}$ بار منفی

μ تابع ماده μ موبیلیتی

Si :



* همه‌ی الکترون‌ها در واحد سطح و یا بر بیته هادی هم

برای رسانا ایده‌آل $\sigma \to \infty$

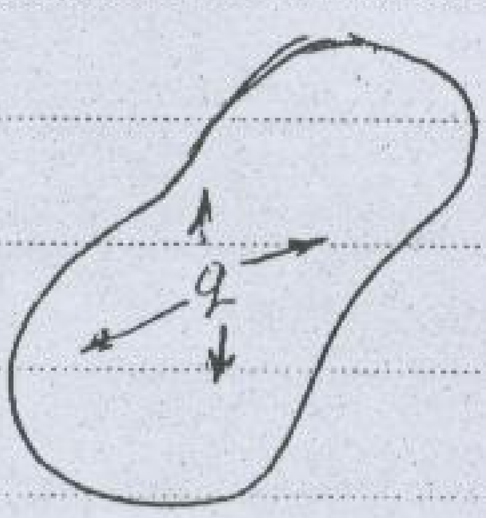
$\vec{J} = e\vec{E}n\mu$ $q = -e$ برای الکترون

$\vec{J} \propto \vec{E}$

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$ $\sigma = en\mu$ هدایت الکتریکی

$\sigma e = cte$

$e \to 0 \Rightarrow \sigma \to \infty$



رسانا کامل

J $\sigma \to \infty$ مقاومت ویژه $\rho = \frac{1}{\sigma}$

$I = \frac{q}{t}$ $C/S = A$

$J : A/m^2 \Rightarrow D(J) = \_$

$\mu = \frac{v_d}{E} = \frac{m/s}{v/m} = \frac{m^2}{vs}$

$$\frac{N_A}{N} = \frac{M}{m} \quad n = \frac{N}{v} \quad \frac{m}{v} = \rho$$ چگالی جرم ← بهم n

$$\frac{N_A}{n} = \frac{M}{\rho} \Rightarrow n = \rho N_A / M$$ ← به ازای هر اتم ۱ الکترون آزاد به رسانا می‌دهد

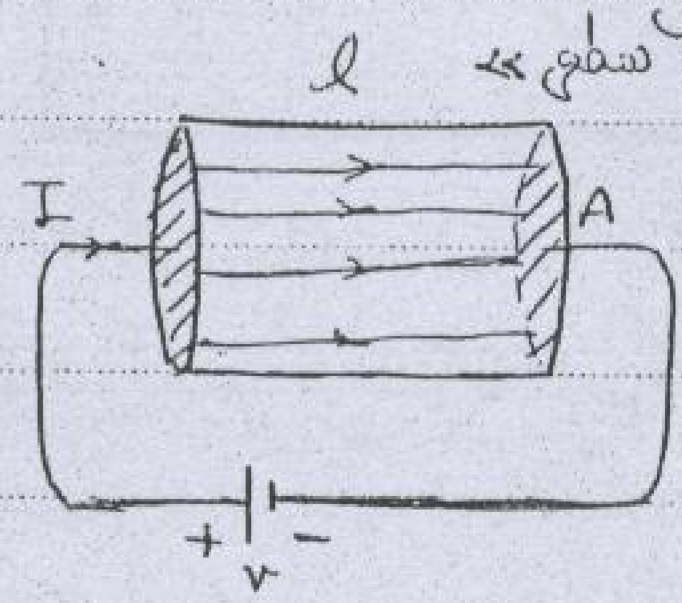
مثال) یک انتها از یک سیم آلومینیمی به قطر 2.5mm به انتهای یک سیم مسی به قطر 1.8mm جوش داده شده.
در این مجموعه سیم‌ها جریان پایدار 1.3 A است.
الف/ چگالی جریان را در هر سیم بیابید.
ب/ سرعت رانش الکترون‌ها در سیم مسی چقدر است؟

حل) الف/ $J_{Al} = \frac{1.3}{\pi d^2/4} = \frac{1.3 \times 4}{2.5 \times 2.5 \times 10^{-6} \times \pi}$, $J_{Cu} = $ ___

ب/ $n = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{6.02 \times 10^{23} \times 8.9 \times 10^{3}}{64 \times 10^{-3}} = 8.4 \times 10^{28}\ e/m^3$

$$v_{d_{Cu}} = \frac{J_{Cu}}{e n_{Cu}} = \frac{5.1 \times 10^{6}}{1.6 \times 10^{-19} \times 8.4 \times 10^{28}} = 14\ cm/h$$

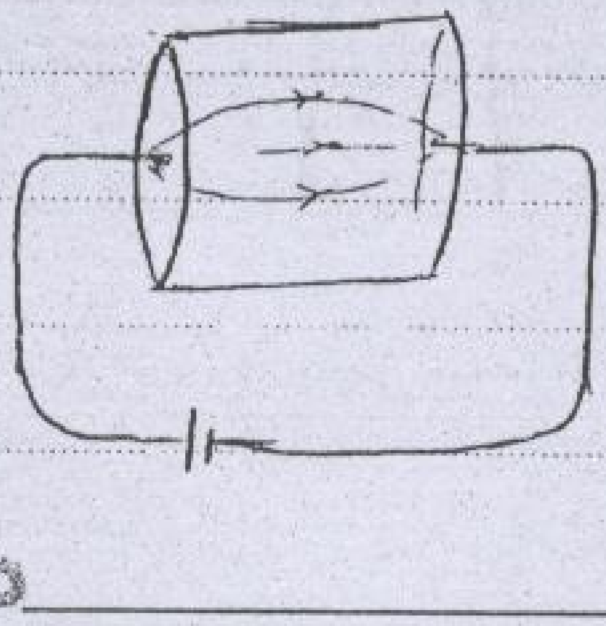
← مقاومت الکتریکی در انتها سطحی « l



$R = \frac{v}{I} \qquad v = -\int E\, dl = El$

$I = JA = \sigma E A$

$$\boxed{R = \frac{El}{\sigma E A} = \rho \frac{l}{A}}$$ ← رسانای الکتریکی



$R' > R$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مقاومت های سری و موازی

* مقاومت های سری:

$V=(R_1+R_2+\dots+R_n)I$

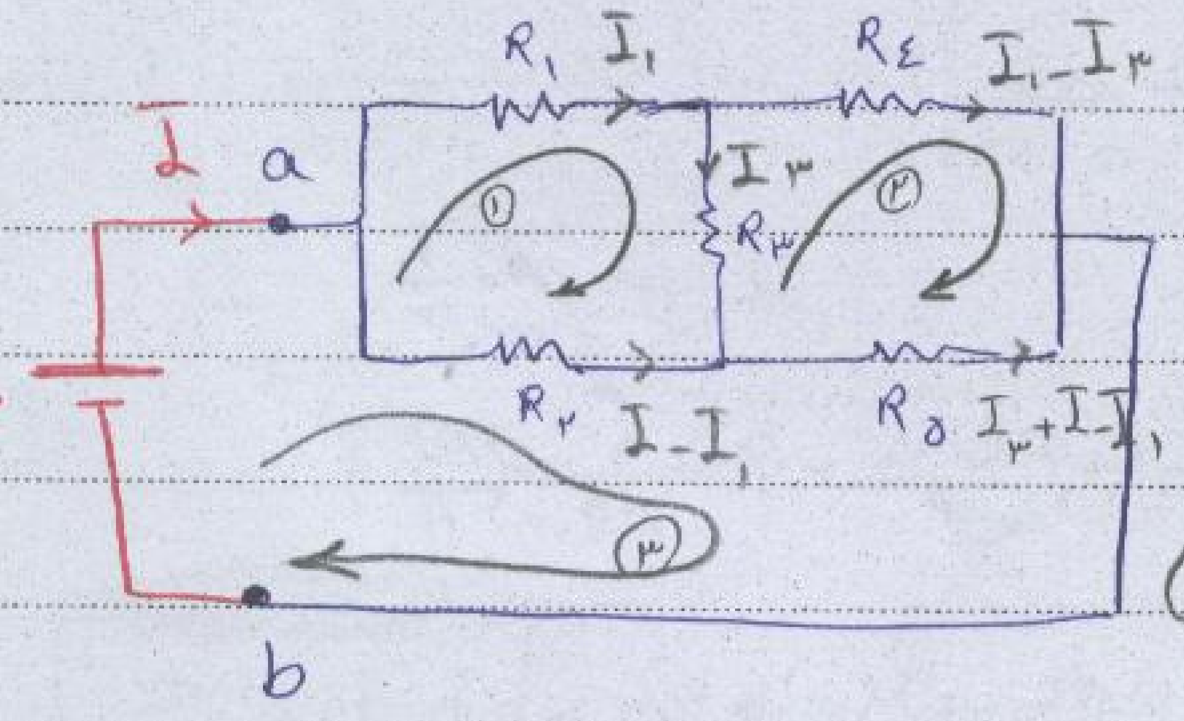
سری $R_{eq}=R_1+R_2+R_3+\dots+R_n$

مقاومت های موازی:

$I=I_1+I_2+\dots+I_n$

$I_1=\frac{V}{R_1}\ ,\ I_2=\frac{V}{R_2}\ ,\dots,\ I_n=\frac{V}{R_n}$

موازی $\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\dots+\frac{1}{R_n}$



(1): $-R_1I_1-R_3I_3+R_2(I-I_1)=0$

(2) $R_3I_3-R_4(I_1-I_3)+R_5(I_3+I-I$

(3) $-R_2(I-I_1)-R_5(I_3+I-I_1)+V=0$

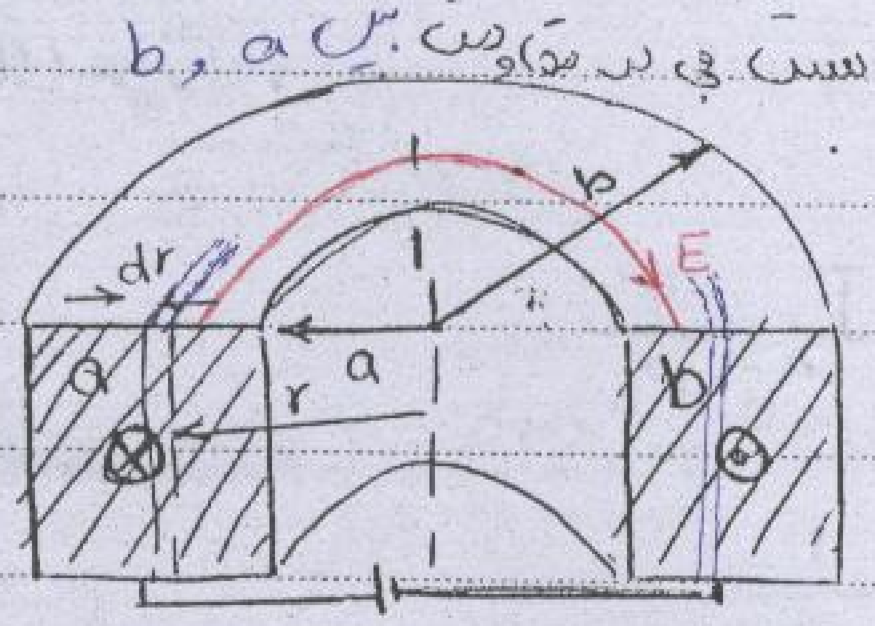
مثال: جریان از مقاومت استوانه‌ای شکل به ضخامت t، شعاع داخلی a و شعاع خارجی b می‌گذرد بطوریکه جهت جریان همواره از سوی مرکز استوانه بسوی خارج است. مقاومت استوانه را برحسب پارامترهای زیر بدست آورید.

پاسخ ۲ صفحه بعد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نیم استوانه

مثال) در شکل زیر پتانسیل بین صفحات a و b اعمال شده است مطلوبست مقاومت بین a و b



$v \to E \to J \to I$

حل) روش ①

$$v = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow v = E\,\pi r \Rightarrow E = \frac{v}{\pi r}$$

$$J = \sigma E \Rightarrow I = \int J \cdot dA \Rightarrow \int_a^b \frac{\sigma v}{\pi r} h\,dr = \frac{\sigma v h}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$R = \frac{\pi}{\sigma h \ln b/a} \quad \text{ans.}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

روش ②

ولتاژ دو سر همه‌ی المان ها برابر است

بنابراین المان ها موازی‌اند

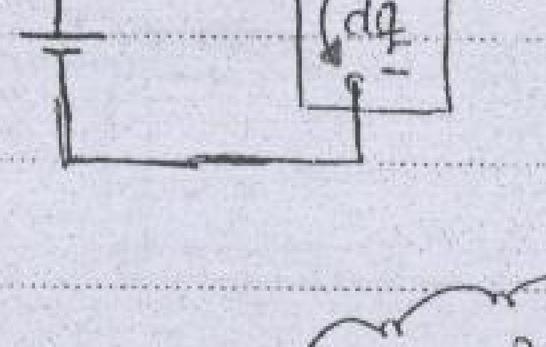
تعریف: $G = \frac{1}{R}$

G تغییر متغیر است برای توانستن استفاده کردن انتگرال

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i} \Rightarrow G = \sum G_i \Rightarrow R = \rho l / A \Rightarrow G = \frac{A}{\rho l} = \left(\frac{\rho l}{A}\right)^{-1}$$

$$dG = \frac{h\,dr}{\rho \pi r} \Rightarrow G = \int_a^b \frac{h}{\rho \pi} \frac{dr}{r} = \frac{h}{\rho \pi} \ln b/a \Rightarrow R = \frac{1}{G} = \frac{\pi}{\sigma h \ln b/a}$$

انرژی و توان الکتریکی



$$dU = v\,dq$$

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{v\,dq}{dt} = vI \qquad P = Iv \ (\text{watt}, J/s)$$

$$P = RI^2 = \frac{v^2}{R}$$

$$U = \int P\,dt = \int R\,i^2(t)\,dt$$

watt.h

PAPCO

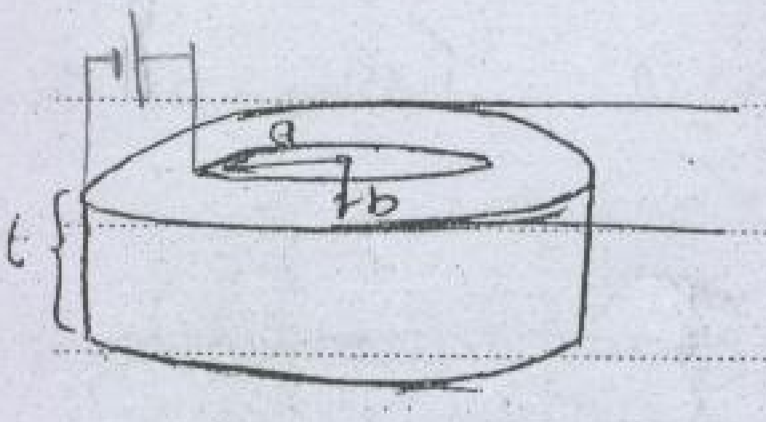
~~Subject~~. ۹/۲ ۹/۵
~~Year~~. ~~Month~~. ~~Date~~. ( )

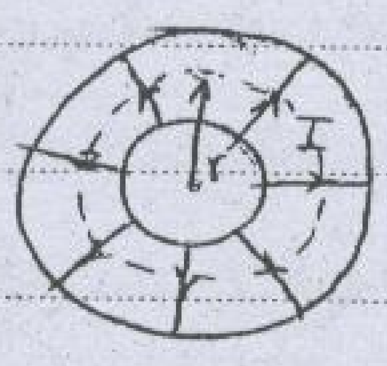
$I=\int J\,ds$

$I \rightarrow J \xrightarrow[J=\sigma E]{} E \xrightarrow{v=-\int E\,dl} v \quad \Rightarrow R=\dfrac{v}{I}$

و یا برعکس.

مثال) جریان از یک مقاومت استوانه‌ای شکل به ضخامت t و شعاع داخلی و خارجی a و b مطابق شکل می‌گذرد.
جهت جریان همواره از مرکز استوانه به سمت خارج آن می‌باشد.
مقاومت الکتریکی استوانه برحسب a ، b ، t ، σ را بیابید.





حل I)

$I=JA$

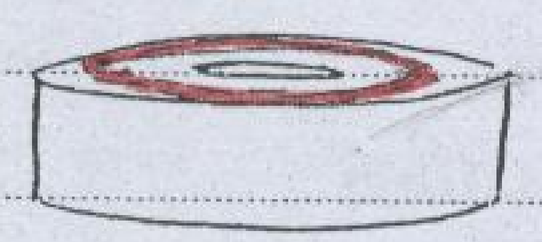
$A=2\pi r t$

$\dfrac{I}{2\pi r t}=J$

$\Rightarrow E=\dfrac{I}{2\pi r t\sigma} \quad \Rightarrow v=-\int \dfrac{I}{2\pi r t\sigma}\,dr \;=\dfrac{I}{2\pi t\sigma}\ln b/a$

$R=\dfrac{v}{I} \quad \Rightarrow R=\dfrac{\ln b/a}{2\pi t\sigma}$

روش (II)



چون مجموعی از مقاومت‌های سری اند المان‌ها جمع می‌شوند

$R=\rho\dfrac{L}{A} \Rightarrow dR=\rho\dfrac{dr}{2\pi r t} \quad \Rightarrow R=\int_a^b \rho\dfrac{dr}{2\pi r t}=\dfrac{\ln b/a}{2\pi t\sigma}$

$\boxed{\rho=\dfrac{1}{\sigma}}$

مثال) مثلثی مفروض است به ضلع a ، مطلوبست مقاومت معادل بین نقاط a,c ، a,d ، a,b

پاسخ در صفحه بعد

$\rho=\rho_0(1+\alpha\Delta T) \quad L=L_0(1+\lambda\Delta T) \quad A=A_0(1+2\lambda\Delta T)^{-1}$

$R=\dfrac{\rho_0 L_0}{A_0}\left[(1+\alpha\Delta T)(1+\lambda\Delta T)(1-2\lambda\Delta T)\right]$

$R\simeq\dfrac{\rho_0 L_0}{A_0}\left[1+\alpha\Delta T+\lambda\Delta T-2\lambda\Delta T\right]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

چکیده شماره ۳ :

① جز در مواقعی که ... باید ← هم مبدأ هم است و

$$v_f - v_i = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

* خطوط پتانسیل بر سطوح هم پتانسیل عمود بوده و جهت آن در جهت کاهش پتانسیل و در جهت dl در جهت افزایش پتانسیل.

$$\Delta v = \int \frac{k\,dq}{r}$$

② $E = -\nabla v$

باید فقط جهول باشد تا از آن گرادیان گرفت.

مختصات دکارتی: $\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial x} v\hat{i} - \frac{\partial}{\partial y} v\hat{j} - \frac{\partial}{\partial z} v\hat{k}$

مختصات استوانه: $\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r}\hat{r} - \frac{\partial}{r\partial\phi}\hat{\phi} - \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

مختصات کروی: $\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r}\hat{r} - \frac{\partial}{r\partial\phi\sin\theta}\hat{\phi} - \frac{\partial}{r\partial\theta}\hat{\theta}$

③ با تقریب $r_- r_+ \approx r^2$ و $r_- - r_+ \approx d\cos\theta$

$$\vec{E} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

④ در نقاط نوک تیز بار زیاد و میدان قوی‌تر و q کوچکتر و پتانسیل ثابت است.

⑤ Extra

$$U_{\text{میدان}} = -U = P\cdot E$$

در هر نقطه دارای میدان و هر نقطه دارای بار

$$U = \frac{1}{2}\sum q_i v_i = \frac{1}{2}\int v\,dq = \frac{1}{2}\int k\varepsilon_0 E^2\,dv$$

پتانسیل — کل حجم