کنترل فرآیند

فصل اول   تبدیل لاپلاس

فصل دوم   سیستم‌های کنترلی درجه اول

فصل سوم   سیستم‌های درجه اول متوالی و درجه دوم

فصل چهارم شیرهای کنترل، کنترلرها، ساده‌سازی بلاک دیاگرام‌ها و افت کنترل

فصل پنجم پایداری، آزمون روث، مکان هندسی ریشه‌ها

فصل ششم پاسخ فرکانسی، دیاگرام‌های بد و نایکویست

فصل هفتم نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد

سیم مقدمه صفحه ۱۴۰ :

فصل اول

تبدیل لاپلاس

۱ـ۱) تعریف

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\ell f(t) \qquad (1)$$

مثال ۱: لاپلاس تابع $f(t)=1$ برابر است با:

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}\times 1dt=\left.\frac{e^{-st}}{-S}\right|_0^\infty=\frac{1}{S}$$

نکات قابل توجه تبدیل لاپلاس:

۱ـ تبدیل لاپلاس هیچ اطلاعی در مورد رفتار تابع $f(t)$ به ازای $t<0$ به ما نمی‌دهد در بحث کنترل، t معرف زمان خواهد بود. و در زمان‌های منفی $f(t)=0$ خواهد بود. در تبدیل لاپلاس زمان از صفر شروع می شود .

۲ـ تبدیل لاپلاس توسط یک انتگرال معین تعریف شده است؛ لذا برای هر تابع $f(t)$، تبدیل لاپلاس وجود نخواهد داشت.

۳ـ تبدیل لاپلاس یک تبدیل خطی است.

$$\ell\{af(t)+bg(t)\}=af(s)+bg(s) \qquad (2)$$

۴ـ تبدیل لاپلاس تابعی از متغیر t را به تابعی از متغیر S تبدیل می‌کند.

در جدول (۱) لاپلاس توابع مختلف نشان داده شده است.

f (t)	f (s)
1	$\frac{1}{S}$
t	$\frac{1}{S^2}$
t^n	$\frac{n!}{S^{n+1}}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{S\mp a}$
$\mathrm{Sin}\omega t$	$\frac{\omega}{S^2+\omega^2}$
$\mathrm{Cos}\omega t$	$\frac{S}{S^2+\omega^2}$
$\mathrm{Sinh}\omega t$	$\frac{\omega}{S^2-\omega^2}$
$\mathrm{Cosh}\omega t$	$\frac{S}{S^2-\omega^2}$
$e^{\pm at}\mathrm{Sin}\omega t$	$\frac{\omega}{(S\mp a)^2+\omega^2}$
$e^{\pm at}\mathrm{Cos}\omega t$	$\frac{S\mp a}{(S\mp a)^2+\omega^2}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n f(s)}{dS^n}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty f(s)ds$
$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{f(s)}{S}$
$e^{\pm at}f(t)$	$f(S\mp a)$

جدول(۱): تبدیل لاپلاس توابع مختلف

مثال ۲: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=t\mathrm{Sin}\,3t$ کدام است؟

$$\ell t^n g(t)=(-1)^n\frac{d^n g(s)}{dS^n}$$ از جدول (۱) →

$$g(t)=\mathrm{Sin}3t$$

$$g(s)=\frac{3}{S^2+9}$$

در نتیجه از معادلات فوق داریم:

$$\ell f(t)=(-1)^1\frac{d\left[\frac{3}{S^2+9}\right]}{dS}=\frac{6S}{(S^2+9)^2}$$

مثال ۳: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\frac{\operatorname{Sin} t}{t}$ کدام است؟

$$\ell\frac{g(t)}{t}=\int_s^\infty g(s)ds$$ از جدول (۱) →

$$g(t)=\operatorname{Sin} t$$

$$g(s)=\frac{1}{S^2+1}$$

در نتیجه از معادلات فوق داریم:

$$f(s)=\int_s^\infty\frac{ds}{S^2+1}=\operatorname{Arctg}(S)\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}(S)$$

مثال ۴: تبدیل لاپلاس $f(t)=e^{-3t}\operatorname{Sin}h2t$ کدام است؟

$$\ell\operatorname{Sin}h\,2t=\frac{2}{S^2-4}$$

$$\ell e^{-3t}\operatorname{Sin}h\,2t=\frac{2}{(S+3)^2-4}=\frac{2}{S^2+6S+5}$$

۱ـ۲) لاپلاس مشتق

$$\ell\frac{df(t)}{dt}=?$$

حال از انتگرال‌گیری جز به جز انتگرال زیر را حل می‌کنیم:

$$u=e^{-St}\quad,\quad dV=\frac{df}{dt}dt\ \Rightarrow\ dV=df$$

$$\ell f'(t)=\int_0^\infty e^{-St}\frac{df(t)}{dt}dt=f(t)\,e^{-St}\Big|_0^\infty+S\int_0^\infty f(t)e^{-St}dt=0-f(0)+Sf(s)$$

در نتیجه

$$\ell f'(t)=Sf(s)-f(0) \qquad (۳)$$

لاپلاس مشتق دوم تابع برابر است با:

$$\ell f''(t)=S^2f(s)-Sf(0)-f'(0) \qquad (۴)$$

اثبات معادله(۴) مشابه اثبات معادله (۳) است.

نکته: لاپلاس مشتق n ام یک تابع در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\ell\frac{d^nf}{dt^n}=S^nf(s)-S^{n-1}f(0)-S^{n-2}f^{(1)}(0)-\dots-Sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0) \qquad (۵)$$

۱ـ۳) یافتن معکوس تبدیل لاپلاس

در این حالت می‌خواهیم بدانیم چگونه می‌توان تابع $f(t)$ را در صورتی که لاپلاس آن مشخص باشد، به‌دست آورد. در این صورت مسئله به دو حالت اصلی تقسیم می‌شود:

الف) توابعی که در جدول (۱) وجود دارند.

این حالت بسیار ساده است و با یک مراجعه ساده به جدول (۱) قابل محاسبه است.

مثال (۵): تبدیل لاپلاس تابعی $\frac{2}{S^3}$ است مقدار $f(t)$ برابر است با:

$$\text{از جدول (۱)} \rightarrow \quad f(t)=t^2$$

ب) یافتن معکوس تبدیل لاپلاس توابعی که در جدول (۱) وجود ندارند.

این قسمت در قالب چندین مثال توضیح داده خواهد شد.

مثال (۶): معکوس تبدیل لاپلاس $f(s)=\frac{1}{S(S+1)}$ کدام است؟

در این حالت نیاز به تجزیه کسر داریم:

$$\frac{1}{S(S+1)}=\frac{A}{S}+\frac{B}{S+1}$$

ابتدا ثابت‌های A و B را پیدا می‌کنیم:

$$\text{ضرب طرفین معادله فوق در S} \quad \rightarrow \frac{1}{S+1}=A+\frac{BS}{S+1}$$

سپس $S=0$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{1}=A+0 \rightarrow A=1$$

$$\text{ضرب طرفین معادله فوق در (S+1)} \rightarrow \frac{1}{S}=\frac{A(S+1)}{S}+B$$

با قراردادن $S=-1$ می‌توان B را محاسبه کرد:

$$-1=0+B \rightarrow B=-1$$

اکنون به راحتی می‌توان تابع $f(t)$ را محاسبه کرد:

$$f(t)=\ell^{-1}\left[\frac{1}{S}-\frac{1}{S+1}\right]=1-e^{-t}$$

مثال (۷): لاپلاس معکوس تابع $f(S)=\frac{1}{S(S+2)^2}$ کدام است؟

باز هم نیاز به تجزیه کسر داریم:

به برابر تعداد دفعات تکرار
آن را در نظر بگیریم

$$\frac{1}{S(S+2)^2}=\frac{A}{S}+\frac{B}{(S+2)^2}+\frac{C}{(S+2)}$$

$$\text{ضرب طرفین در S و } S=0 \rightarrow \quad A=\frac{1}{4}$$

$$\text{ضرب طرفین در } (S+2)^2 \text{ و } S=-2 \rightarrow \quad B=-\frac{1}{2}$$

اما برای محاسبه C روش محاسبه متفاوت است.

$$\text{ضرب طرفین در } (S+2)^2 \rightarrow \quad \frac{1}{S}=\frac{A}{S}(S+2)^2+B+C(S+2)$$

برای محاسبه C از معادله فوق مشتق می‌گیریم و سپس $S=-2$ قرار می‌دهیم:

$$-\frac{1}{S^2}=\left[\frac{A(S+2)^2}{S}\right]'+0+C$$

$$-\frac{1}{4}=0+0+C \rightarrow C=-\frac{1}{4}$$

نکته: دقت شود که در معادله بالا نیازی به گرفتن مشتق از عبارت داخل کروشه نیست چون به هرحال جمله $S+2$ پس از مشتق‌گیری هم در معادله باقی می‌ماند و لذا وقتی $S=-2$ قرار داده می‌شود اثری نخواهد داشت و مقدار آن صفر خواهد شد.

$$\ell^{-1}\frac{1}{S(S+2)^2}=\ell^{-1}\left[\frac{\frac{1}{4}}{S}-\frac{\frac{1}{2}}{(S+2)^2}-\frac{\frac{1}{4}}{(S+2)}\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}=\frac{1}{4}\left[1-(2t+1)e^{-2t}\right]$$

مثال(۸): لاپلاس معکوس تابع $\frac{2}{S(S^2+4)}$ کدام است؟

$$\frac{2}{S(S^2+4)}=\frac{C}{S}+\frac{a+bi}{S+2i}+\frac{a-bi}{S-2i}$$

دقت شود که ثابت‌های تجزیه کسر در اعداد مختلف مزدوج هم هستند.

ضرب طرفین در S و S =0 $\rightarrow \qquad C=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

ضرب طرفین در $(S+2i)$ $\rightarrow \qquad \frac{2}{S(S-2i)}=\frac{C(S+2i)}{S}+(a+bi)+\frac{(a-bi)(S+2i)}{S-2i}$

سپس $S=-2i$ قرار داده می‌شود.

$$\frac{2}{(-2i)(-4i)}=0+(a+bi)+0$$

$$-\frac{1}{4}=a+bi\rightarrow a=-1/4\ ,\ b=0$$

در نتیجه:

$$\ell^{-1}\frac{2}{S(S^2+4)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-2it}-\frac{1}{4}e^{2it}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}[Cos2t-iSin2t]-\frac{1}{4}[Cos2t+iSin2t]=\frac{1}{2}[1-Cos2t]$$

در حل مثال فوق از دو قضیه مربوط به اعداد مختلط به صورت زیر استفاده شده است:

$$e^{(a+bi)t}=e^{at}[Cosbt+iSinbt] \qquad (۶)$$

$$e^{-(a+bi)t}=e^{-at}[Cosbt-iSinbt] \qquad (۷)$$

مثال (۹): لاپلاس معکوس تابع $\frac{1}{(S+K_1+iK_2)(S+K_1-iK_2)}$ کدام است؟

$$\frac{1}{(S+K_1+iK_2)(S+K_1-iK_2)}=\frac{a+bi}{S+K_1+iK_2}+\frac{a-bi}{S+K_1-iK_2}$$

$$\ell^{-1}f(s)=(a+bi)e^{-(K_1+iK_2)t}+(a-bi)e^{-(K_1-iK_2)t}$$

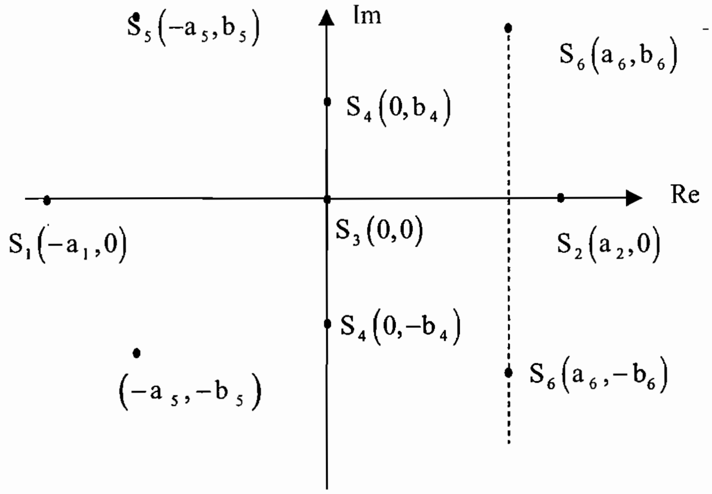
$$f(t)=2e^{-K_1t}\left[aCosk_2t+bSink_2t\right] \qquad (۸)$$

اثبات معادله (۸) به عهده خواننده است.

۴ـ۱) آنالیز کیفی ریشه‌ها

در این بخش می‌خواهیم بدانیم چگونه بر اساس دانستن موقعیت ریشه در صفحه مختصات موهومی می‌توانیم به طور کیفی رفتار پاسخ را پیش‌بینی کنیم.

در حالت کلی و چنان‌که در شکل (۱) نشان داده شده است، یکی از موقعیت‌های شش‌گانه نشان داده شده برای یک ریشه، در مختصات موهومی قابل تصور است.



S_1	$e^{-a_1 t}$	تابع نمایی میرا با زمان
S_2	$e^{+a_2 t}$	تابع نمایی غیر میرا با زمان
S_3	1	عدد ثابت
S_4	$C_1 \sin b_4 t + C_2 \cos b_4 t$	تابع نوسانی دایم
S_5	$e^{-a_5 t}\left[C_1 \sin b_5 t + C_2 \cos b_5 t\right]$	تابع نوسانی کاهنده با زمان
S_6	$e^{a_6 t}\left[C_1 \sin b_6 t + C_2 \cos b_6 t\right]$	تابع نوسانی با دامنه افزاینده با زمان

نکات مهم بحث کیفی ریشه‌ها عبارتند از:

- اگر ریشه دارای جز حقیقی مثبت، منفی و یا صفر باشد تغییرات دامنه آن با زمان به ترتیب غیرمیرا، میرا و با دامنه ثابت خواهد بود.
- اگر ریشه دارای جز موهومی باشد رفتار نوسانی خواهد داشت ودر غیر این‌صورت فاقد نوسان خواهد بود.

در نتیجه قرار گرفتن ریشه در سمت راست محور موهومی موجب غیر میراشدن آن و قرارگرفتن آن در سمت چپ محور موهومی موجب میرایی پاسخ می‌شود و داشتن و نداشتن جز موهومی معیار نوسانی یا غیر نوسانی بودن پاسخ است.

مثال (۱۰): رفتار کیفی پاسخ سیستمی که تابع تبدیل آن $\frac{1}{(S^2+S+1)}$ است چگونه است؟

$$S^2+S+1=0 \rightarrow S=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

جز حقیقی منفی است $\leftarrow$ دامنه تابع کاهنده با زمان است

ریشه جز موهومی دارد $\leftarrow$ نوسانی است

بنابراین به طور خلاصه می‌توان گفت رفتار پاسخ سیستم فوق یک تابع نوسانی با دامنه کاهنده با زمان خواهدبود.

۱ـ۵) حل معادلات دیفرانسیل به کمک تبدیلات لاپلاس

مراحل حل یک معادله دیفرانسیل به کمک تبدیل لاپلاس به صورت زیر است:

۱) از طرفین معادله دیفرانسیل، لاپلاس می‌گیریم.

۲) معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری بر حسب S تبدیل می‌شود. $(X(s))$

۳) گرفتن تبدیل معکوس از تابع تبدیل لاپلاس حاصل از مرحله فوق منجر به یافتن پاسخ معادله دیفرانسیل می‌شود.

مثال (۱۱): معادله دیفرانسیل روبرو را با شرط اولیه داده شده حل کنید.

$$x''+4x=2e^{-t}$$

$$x(0)=x'(0)=0$$

از معادله لاپلاس می‌گیریم $\quad S^2x(s)-Sx(0)-x'(0)+4x(s)=\frac{2}{(S+1)}$

$$x(s)=\frac{2}{(S^2+4)(S+1)}=\frac{A+Bi}{S+2i}+\frac{A-Bi}{S-2i}+\frac{C}{S+i}$$

$$C=2/5 \quad , \quad A=-\frac{1}{5} \quad , \quad B=\frac{1}{10}$$

$$X(t)=\frac{2}{5}e^{-t}-\frac{2}{5}\mathrm{Cos}\,2t+\frac{1}{5}\mathrm{Sin}\,2t$$

۱ـ۶) قضایای تبدیل لاپلاس

الف) قضیه مقدار نهایی

بیان قضیه فوق به صورت زیر است:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{S\to 0} Sf(S) \qquad (۹)$$

مثال (۱۲): اگر $f(s)=\frac{S^2+4}{S(S^2+3S+1)}$ باشد مقدار نهایی تابع $f(t)$ برابر است با:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{S\to 0} S\times\frac{S^2+4}{S(S^2+3S+1)}=4$$

ب) قضیه مقدار اولیه

بیان این قضیه به صورت زیر است:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{S\to\infty} Sf(S) \qquad (۱۰)$$

مثال (۱۳): مقدار اولیه تابع مثال (۱۲) را محاسبه کنید؟

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{S\to\infty} S\times\frac{S^2+4}{S(S^2+3S+1)}=1$$

ج) قضیه انتقال تابع

بیان این قضیه به صورت زیر است:

(۱۱)
$$\ell f(t-t_0)=e^{-St_0}f(S)$$

هنگامی‌که

$$\ell f(t)=f(S)$$

مثال (۱۴): لاپلاس تابع $\text{Sin}3(t-2)$ را محاسبه کنید؟

$$t_0=2$$

$$\ell f(t)=e^{-2S}\times\frac{3}{S^2+9}=\frac{3e^{-2S}}{S^2+9}$$

د) قضیه کانولوشن

اگر لاپلاس تابع $f(t)$ و $g(t)$ به ترتیب $f(s)$ و $g(s)$ باشد، لاپلاس معکوس حاصل‌ضرب آن‌ها چنین است:

(۱۲)
$$\ell^{-1}f(s)g(s)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

مثال (۱۵): لاپلاس معکوس تابع $\frac{1}{(S-1)(S-2)}$ را به کمک قضیه فوق محاسبه کنید.

$$f(s)=\frac{1}{S-1}\to f(t)=e^t$$

$$g(s)=\frac{1}{S-2}\to g(t)=e^{2t}$$

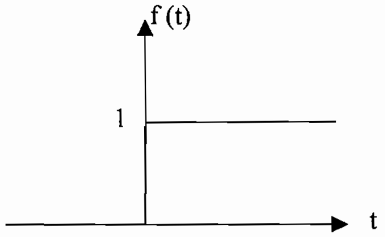
$$\ell^{-1}\frac{1}{(S-1)(S-2)}=\int_0^t e^{\tau}e^{2(t-\tau)}d\tau=e^{2t}-e^{t}$$

۱ـ۷) ورودی‌های استاندارد در کنترل فرآیند

الف) ورودی پله‌ای واحد: (unit step function)

(۱۳)
$$f(t)=u(t)\begin{cases}0 & t<0\\1 & 0<t\end{cases}\quad,\ f(s)=\frac{1}{S}$$

شکل تابع پله‌ای واحد به صورت زیر است:

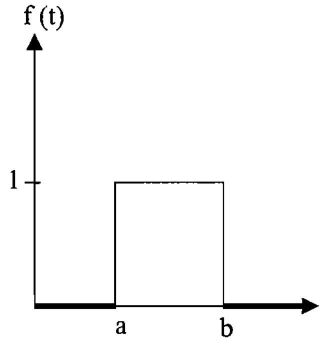


شکل (۲): نمودار تابع پله‌ای واحد

ب) ورودی پالسی:

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & a<t<b\\ 0 & b<t\end{cases}$$ (۱۴)

شکل تابع پالسی به فرم زیر است.



شکل (۳): نمودار تابع پالسی

$$f(t)=u(t-a)-u(t-b)$$ (۱۵)

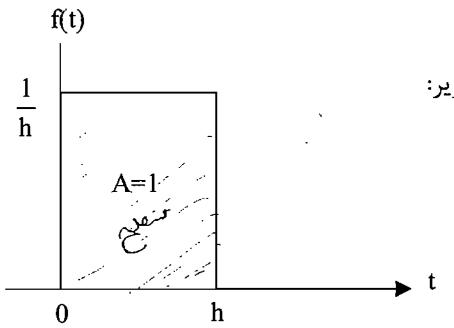
$$f(s)=\frac{e^{-as}}{S}-\frac{e^{-bs}}{S}$$ (۱۶)

ج) تابع ضربانی: (Impulse)

تابع $f(t)$ را به فرم زیر در نظر بگیرید: (حالت خاص از تابع پالسی)

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{h} & 0<t<h\\ 0 & h<t\end{cases}$$ (۱۷)

مطابق شکل زیر:



$$f(t)=\frac{1}{h}u(t)-\frac{1}{h}u(t-h)$$ (۱۸)

ویژگی تابع فوق آن است که سطح زیر نمودار آن واحد است. حال اگر h به سمت صفر میل کند خواهیم داشت:

$$f(s)=\frac{1}{hS}-\frac{e^{-hS}}{hS}$$

$$f(s)=\frac{1}{hS}\left[1-e^{-hS}\right]$$

حد $\lim\limits_{h\to 0} f(t) = \frac{0}{0}$ = مبهم = اعمال قاعده هوپیتال = حد $\lim\limits_{S\to 0}\frac{Se^{-hS}}{S}=1$

بنابراین: حد $\lim\limits_{h\to 0} f(t)=\delta(t)$ تابع ضربان ایده‌ال

$$\ell\,\delta(t)=1$$ (۲۱)

۱ـ۸) تست‌های تبدیلات لاپلاس

۱ ـ معکوس تبدیل $\frac{n!}{(S+a)^{n+1}}$ و همچنین تبدیل لاپلاس تابع Cos kt کدام است؟

۱) $e^{-nat}u(t)$, $\frac{S}{S^2+k^2}$
۲) $t^n e^{-at}$, $\frac{S}{k^2-S^2}$
۳) $t^n e^{-at}\,u(t)$, $\frac{S}{S^2+k^2}$
۴) $t^n e^{-at}$, $\frac{S}{S^2-k^2}$

۲ ـ تبدیل لاپلاس تابع $\int_0^t \sin k\,t\,dt$ کدام است؟

۱) $\frac{k}{S^2+k^2}$
۲) $\frac{S}{S^2+k^2}$
۳) $\frac{k}{S(S^2+k^2)}$
۴) $\frac{S}{k(S^2+k^2)}$

۳ ـ در مورد ریشه‌های واقع برمحور موهومی کدام جمله صحیح است؟

۱) به‌طور نمایی در طول زمان از بین می‌روند.
۲) به‌طور نمایی در طول زمان افزایش می‌یابند.
۳) با دامنه ثابت برحسب زمان نوسان می‌کنند. اگر ریشه‌ها تکراری باشند دامنه نوسان به صورت یک‌سری توانی با زمان افزایش می‌یابد.
۴) دامنه نوسان برحسب زمان کاهش می‌یابد.

۴ ـ قضیه مقدار نهایی کدام است؟

۱) $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{S\to 0} S\,f(S)$
۲) $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{S\to\infty} S\,f(S)$
۳) $\mathcal{L}\, e^{-at} f(t) = f(S+a)$
۴) $\mathcal{L}\, f(t-t_0) = e^{-St_0} f(s)$

۵ ـ لاپلاس تابع $e^{at}\,\mathrm{Cos}\left(\frac{t}{a}\right)$ برابر است با:

۱) $\frac{S(S-a)}{(a^2-aS)^2+1}$
۲) $\frac{S^2-a^2}{(s-a^2)^2+1}$
۳) $\frac{S-a^2}{(aS-a^2)^2-1}$
۴) $\frac{a^2(S-a)}{(aS-a^2)^2+1}$

۶ ـ لاپلاس توابع $t\,u(t)$ و t کدام هستند؟

۱) $\frac{1}{S}, \frac{1}{S^2}$
۲) $\frac{1}{S^2}, \frac{1}{S}$
۳) $\frac{1}{S^2}, \frac{1}{S^2}$
۴) $\frac{1}{S^2}, \frac{1}{S+1}$

۷ ـ معادله مشخصه معادله دیفرانسیل $x'''+3x''-3x'+4x=3e^t$ کدام است؟

۱) $S^3+3S=\frac{3}{S+1}$
۲) $(S+1)^2=0$
۳) $S^3+3S^2-3S+4=0$
۴) هیچکدام

۸ ـ مقدار $x(t)$ وقتی t در ناحیه $0.5<t<0.9$ قرار گرفته چقدر است؟ در صورتی‌که $x(S)=\frac{1-e^{-s}}{S}$ باشد.

۱) 1
۲) 2
۳) 0.5
۴) t

۹ـ لاپلاس $t^n u(t)$ کدام است؟

۱) $\frac{(n+1)!}{S^{n+1}}$ ۲) $\frac{n!}{S^n}$ ۳) $\frac{n!}{S^{n+1}}$ ۴) $\frac{n!}{S^{n-1}}$

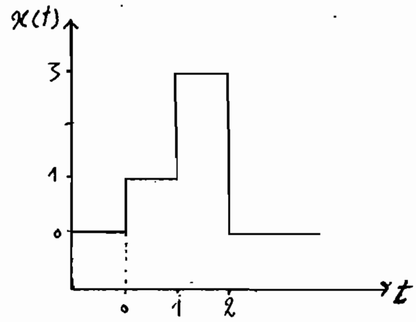
۱۰ـ لاپلاس تابع $f(t)=u(t)+u(t+b)-tu(t)$ کدام است؟

۱) $e^S+e^{-bS}+e^S$ ۲) $\frac{1}{S}+\frac{e^{+bS}}{S}-\frac{1}{S^2}$ ۳) $e^S+\frac{e^{-bS}}{S}-\frac{1}{S^2}$ ۴) $\frac{1}{S}\left[1+\frac{e^{-bS}}{s}-\frac{1}{S^2}\right]$

۱۱ـ تبدیل لاپلاس a و $a\,u(t)$ کدام است؟

۱) $a,\frac{a}{S}$ ۲) S,aS ۳) $\frac{a}{S},\frac{a}{S}$ ۴) $\frac{a}{S},a$

۱۲ـ نمودار تابعی مطابق شکل روبرو است، لاپلاس این تابع $(X(S))$ برابر است با:



۱) $\frac{1+3e^{-S}}{S}$

۲) $\left(1-e^{-S}-3e^{-2S}\right)/S$

۳) $\left(1+2e^{-S}+3e^{-2S}\right)/S$

۴) $\left(1+2e^{-S}-3e^{-2S}\right)/S$

۱ـ۹) پاسخ تست‌های تبدیل لاپلاس

۱ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۲ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\pounds\int_0^t f(t)\,dt=\frac{f(s)}{S}=\frac{1}{S}\frac{K}{S^2+K^2}$$

۳ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۴ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۵ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\pounds\, e^{at}f(t)=f(S-a)$$

$$\pounds\, \mathrm{Cos}\left(\frac{t}{a}\right)=\frac{S}{S^2+\frac{1}{a^2}}$$

$$\pounds\, e^{at}\mathrm{Cos}\left(\frac{t}{a}\right)=\frac{(S-a)}{(S-a)^2+\frac{1}{a^2}}=\frac{a^2(S-a)}{a^2(S-a)^2+1}$$

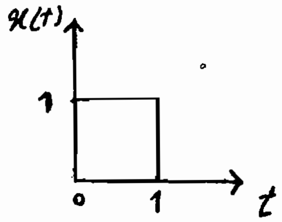
۶ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۷ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۸ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$X(S)=\frac{1-e^{-S}}{s}=\frac{1}{S}-\frac{e^{-S}}{s}\rightarrow x(t)=u(t)-u(t-1)$$

$$0.5<t<0.9\ \rightarrow x(t)=1$$



۹ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۱۰ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۱۱ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۱۲ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

پیشانی پله

محل پله محور

بالا یا پایین است پله

$$x(t)=u(t)+2u(t-1)-3u(t-2)$$

$$x(S)=\frac{1}{S}+\frac{2e^{-S}}{s}-\frac{3e^{-2S}}{S}$$

$$x(S)=\left(1+2e^{-S}-3e^{-2S}\right)/S$$

فصل دوم

سیستم‌های کنترلی درجه اول

۲ـ۱ـ سیستم درجه اول

سیستم درجه اول سیستمی است که معادله دیفرانسیل بیان کننده تغییرات در آن از درجه اول باشد.

مثال ۱: دماسنج درجه اول

اگر دماسنجی درون سیالی به دمای x قرار گیرد روند تغییرات دمای نشان داده شده توسط دماسنج چگونه است؟

با نوشتن بیلان انرژی داریم:

$$\text{Input} - \text{Out} = \text{Acc.} \qquad (۱)$$

$$h(x-y)-0 = mc\frac{dy}{dt} \qquad (۲)$$

که در معادله فوق:

x: دمای محیطی است که دماسنج در آن واقع است.

y: دمای نشان داده شده توسط دماسنج

h: ضریب انتقال حرارت کنوکسیونی محیط

A: سطح تماس دماسنج با محیط

معادله (۲) را برای حالت پایدار هم می‌نویسیم:

$$hA(x_s - y_s) = 0 \qquad (۳)$$

که x_s و y_s به ترتیب مقادیر x و y در حالت پایدار هستند. با تعریف متغیرهای انحرافی به صورت زیر:

$$X = x - x_s \qquad (۴)$$

$$Y = y - y_s \qquad (۵)$$

معادلات (۲) و (۳) را از هم کم می‌کنیم:

$$hA\left[\left(x-x_s\right)-\left(y-y_s\right)\right]=mc\frac{d\left(y-y_s\right)}{dt} \qquad (۶)$$

$$hA\left(X-Y\right)=mc\frac{dY}{dt} \qquad (۷)$$

$$X-Y=\frac{mc}{hA}\frac{dY}{dt} \qquad (۸)$$

$$X=Y+\tau\frac{dY}{dt} \qquad (۹)$$

که در معادله بالا τ ثابت زمانی این سیستم درجه اول است:

$$\tau=\frac{mc}{hA} \qquad (۱۰)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله بالا داریم:

$$X(S)-Y(S)=\tau SY(S) \qquad (۱۱)$$

$$\frac{Y(s)}{X(S)}=\frac{1}{\tau S+1} \qquad (۱۲)$$

عبارت $\frac{1}{\tau S+1}$ تابع انتقال سیستم درجه اول دماسنج است، که نسبت تغییرات دمای نشان داده شده توسط دماسنج را نسبت به دمای محیط نشان می‌دهد. و آن را با $G(S)$ نشان می‌دهیم. تابع انتقال $G(S)$ مشخصات دینامیکی سیستم را کاملاً تشریح می‌کند. اگر تغییری در دمای محیط $X(t)$ انجام شود به کمک تابع انتقال و از طریق معادله زیر می‌توان تغییرات دمای دماسنج را پیدا کرد:

$$Y(S)=X(S)\,G(S) \qquad (۱۳)$$

حال می‌توان پاسخ $Y(t)$ را به هر ورودی دلخواه $X(t)$ به‌دست آورد. در ادامه به بررسی پاسخ سیستم درجه اول به ورودی‌های استاندارد می‌پردازیم.

۲-۲-۱ پاسخ سیستم درجه اول به ورودی پله‌ای

اگر $X(t)=Au(t)$ باشد در نتیجه:

$$X(S)=\frac{A}{S} \qquad (۱۴)$$

از ترکیب معادلات (۱۳) و (۱۴) داریم:

$$Y(S)=\frac{A}{S}\cdot\frac{1}{\tau S+1} \qquad (۱۵)$$

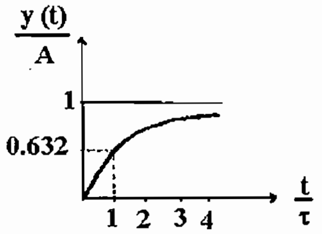
$$Y(S)=\frac{C_1}{S}+\frac{C_2}{\tau S+1} \qquad (۱۶)$$

که $C_1=A$ و $C_2=-A\tau$ است. با لاپلاس معکوس گرفتن از معادله (۱۶) داریم:

$$Y(t)=A\left[1-e^{-t/\tau}\right] \qquad (۱۷)$$

در شکل زیر منحنی تغییرات $Y(t)$ نسبت به زمان بی‌بعد $\left(\frac{t}{\tau}\right)$ نشان داده شده است.

اگر $X(t)=Au(t)$ باشد.



شکل (۱): پاسخ سیستم درجه اول به ورودی پله‌ای

نکته: ثابت زمانی، زمانی است که سیستم به 63.2 درصد مقدار نهایی خودش می‌رسد.

البته مقدار نهایی تابع برابر است با:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{S\to 0} SY(S) = \lim_{S\to 0} S\frac{A}{S(\tau S+1)} = A$$

هنگامی‌که زمان طی شده به τ، 2τ، 3τ و 4τ برسد، درصد پاسخ به ترتیب 86.5، 95 و 98 درصد مقدارنهایی‌اش می‌رسد. از این‌رو می‌توان گفت پس از سه یا چهار ثابت زمانی، پاسخ سیستم درجه اول را می‌توان کامل فرض کرد.

نکته: شیب تابع $\frac{Y(t)}{A}$ در لحظه صفر برابر $\frac{1}{\tau}$ است. به بیانی اگر شدت اولیه تغییرات ثابت بماند، پاسخ پس از یک ثابت زمانی کامل می‌شود.

مثال ۲: اگر دماسنجی به دمای $90^\circ F$ در لحظه صفر وارد محیطی با دمای $100^\circ F$ شود پس از چه زمانی دمای آن به $98^\circ F$ می‌رسد. (ثابت زمانی دماسنج 0.1 min است).

$A = 100 - 90 = 10$

$Y(t) = 98 - 90 = 8$

از معادله (۱۷) $\rightarrow 8 = 10\left[1 - e^{-t/0.1}\right]$

$t = 0.16 \quad min$

۲ـ۲ـ۲ـ پاسخ سیستم درجه اول به ورودی ضربانی

اگر $X(t)=\delta(t)$ باشد. داریم:

$X(S) = 1$

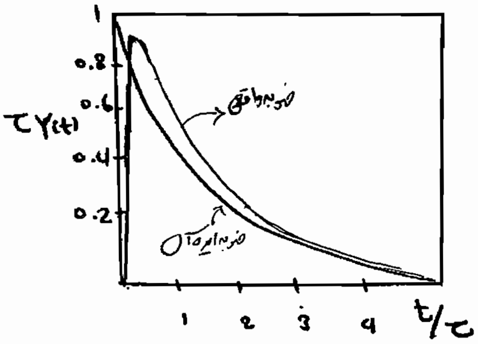
$$Y(S) = 1\times\frac{1}{\tau S+1} \qquad (۱۸)$$

با گرفتن لاپلاس معکوس، پاسخ سیستم درجه اول به ورودی ضربانی به دست می‌آید.

$$Y(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} \qquad (۱۹)$$

$$\tau Y(t) = e^{-t/\tau} \qquad (۲۰)$$

در شکل (۲) روند تغییرات $Y(t)$ برحسب t رسم شده است.



شکل (۲): پاسخ سیستم درجه اول به ورودی ضربانی

همان‌طور که در شکل (۲) ملاحظه می‌شود پاسخ سریعاً به 1 می‌رسد و سپس به‌صورت نمایی فروکش می‌کند. چنین افزایش دمایی از لحاظ فیزیکی غیرممکن است ولی در شرایط ایده‌آل می‌توان به آن نزدیک شد.

۲ـ۲ـ۳ـ پاسخ سیستم درجه اول به ورودی سینوسی

اگر $X(t) = A\sin\omega t$ باشد. داریم:

$$X(S) = \frac{A\omega}{S^2+\omega^2} \tag{۲۱}$$

$$Y(S) = \frac{A\omega}{S^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{\tau S+1} \tag{۲۲}$$

$$Y(t) = \frac{A\omega\tau e^{-t/\tau}}{\tau^2\omega^2+1} + \frac{A}{\tau^2\omega^2+1}\sin\omega t - \frac{A\omega\tau}{\tau^2\omega^2+1}\cos\omega t \tag{۲۳}$$

به کمک رابطه زیر خواهیم داشت:

$$p\cos A + q\sin A = r\sin(A+\theta) \tag{۲۴}$$

$$r = \sqrt{p^2+q^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{p}{q} \tag{۲۵}$$

$$Y(t) = \frac{A\omega\tau e^{-t/\tau}}{\tau^2\omega^2+1} + \frac{A}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}\sin(\omega t+\varphi) \tag{۲۶}$$

$$\Phi = \tan^{-1}(-\omega\tau) \tag{۲۷}$$

هنگامی‌که $t\to\infty$ اولین جمله سمت راست معادله (۲۶) صفر است و فقط جواب تناوبی باقی می‌ماند که آن را جواب حالت یکنواخت می‌نامیم.

برای رسیدن به پاسخ پایدار به صورت نهائی تقریبی 3τ نیاز داریم.

$$Y(t) = \frac{A}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}\sin(\omega t+\Phi) \quad : \ t\to\infty \tag{۲۸}$$

با مقایسه تابع محرک سینوسی ورودی و پاسخ آن متوجه می‌شویم:

الف) فرکانس پاسخ و ورودی یکسان است.

ب) دامنه پاسخ همواره از دامنه ورودی کوچکتر است.

ج) پاسخ دارای یک تأخیر زمانی به اندازه $\tan^{-1}(-\omega\tau)$ است.

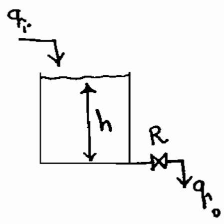
ترم تأخیر زمانی Φ را به صورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$\frac{|\Phi|}{360f} = \text{تأخیر (برحسب زمان)} \tag{۲۹}$$

که f فرکانس نوسان است.

۲ـ۳ـ۴ـ مثال‌های دیگری از سیستم درجه اول

مثال ۲: سیستم کنترل سطح مایع.



شکل (۳): سیستم کنترل سطح مایع

در شکل روبرو q_i و q_0 دبی‌های ورودی و خروجی از تانک می‌باشند و h ارتفاع مایع درون تانک است. R هم مقاومت شیر است و خطی فرض می‌شود بنابراین:

$$q = \frac{h}{R} \tag{۳۰}$$

بیلان جرم را برای این سیستم می‌نویسیم:

$$q_i - q_0 = A\frac{dh}{dt} \tag{۳۱}$$

معادله (۳۱) را برای حالت پایدار هم می‌نویسیم:

$$q_{is} - q_{0s} = 0 \tag{۳۲}$$

با کم کردن معادلات (۳۱) و (۳۲) از هم داریم:

$$Q_i - Q_0 = A\frac{dH}{dt} \tag{۳۳}$$

اکنون Q_0 را از معادله (۳۰) در معادله (۳۳) جایگزین می‌کنیم:

$$Q_i - \frac{H}{R} = A\frac{dH}{dt} \tag{۳۴}$$

با لاپلاس‌گیری از معادله فوق داریم:

$$Q_i(S) - \frac{H(S)}{R} = ASH(S) \tag{۳۵}$$

در نتیجه

$$\frac{H(S)}{Q_i(S)} = \frac{R}{RAS+1} \tag{۳۶}$$

با مقایسه معادله فوق با فرم استاندارد تابع تبدیل سیستم درجه اول یعنی $\frac{k}{\tau S+1}$ داریم:

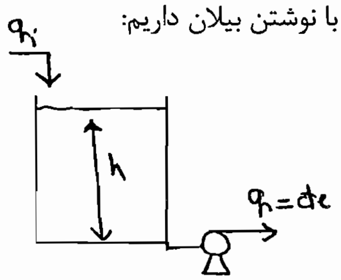
$$\tau = RA \quad , \quad K = R \tag{۳۷}$$

در معادله (۳۶) به‌جای $H(S)$ از معادله (۳۰) برحسب Q_0 جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{Q_0(S)}{Q_i(S)} = \frac{1}{RAS+1} \tag{۳۸}$$

ملاحظه می‌شود وقتی نسبت دبی خروجی به دبی ورودی نوشته شود، بهره حالت پایدار (K) برابر یک می‌شود. یعنی نسبت خروجی به ورودی در حالت پایدار برابر واحد است.

مثال۳: اگر در سیستم سطح مایع به‌جای شیر در خروجی یک پمپ نصب کنیم چون پمپ، دبی ثابتی را پمپ می‌کند. لذا مقدار دبی مایع خروجی همواره مقداری ثابت است لذا با نوشتن بیلان داریم:



شکل (۴): سیستم سطح مایع با نصب پمپ در خروجی

$$q_i - q_0 = A\frac{dh}{dt} \qquad (۳۹)$$

$$q_{is} - q_{0s} = 0 \qquad (۴۰)$$

که در معادلات فوق $q_0 = q_{0s}$ است لذا اگر معادلات (۳۹) و (۴۰) را از هم کم کنیم داریم:

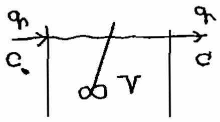
$$Q_i - 0 = A\frac{dH}{dt} \qquad (۴۱)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله فوق داریم:

$$\frac{H(S)}{Q_i(S)} = \frac{1}{AS} \qquad (۴۲)$$

که دیگر مانند فرم استاندارد سیستم درجه اول نیست.

مثال۴: مخزن اختلاط در شکل (۵) جریانی از مایع به غلظت C_0 وارد تانک اختلاط می‌شود با فرض جریان mixed_Well درون مخزن و نوشتن بیلان جرم داریم:



شکل (۵): مخزن اختلاط

$$qC_0 - qC = V\frac{dC}{dt} \qquad (۴۳)$$

$$qC_{0S} - qC_S = 0 \qquad (۴۴)$$

با کسر کردن معادلات فوق داریم:

$$qC_0 - qC = V\frac{dC}{dt} \qquad (۴۵)$$

که در معادله بالا

C_0: غلظت جریان ورودی به مخزن — C: غلظت درون مخزن

V: حجم مخزن — q: دبی حجمی خوراک و خروجی

معادله (۴۵) را به فرم زیر می‌توان نوشت:

$$C_0 - C = \frac{V}{q}\frac{dC}{dt} \qquad (۴۶)$$

و لاپلاس می‌گیریم:

$$C_0(S) - C(S) = \frac{V}{q}SC(S) \qquad (۴۷)$$

با مقایسه با فرم استاندارد معادله درجه اول داریم:

$$\tau = \frac{V}{q} \quad , \quad K = 1 \tag{۴۸}$$

و

$$\frac{C(S)}{C_0(S)} = \frac{1}{\tau S + 1} \tag{۴۹}$$

مثال۵: مخزن اختلاط به همراه واکنش شیمیایی درجه اول.

این مثال مانند مثال قبلی است فقط در آن واکنش شیمیایی درجه اول هم داریم، بنابراین:

$$qC_0 - qC - V(-r_A) = V\frac{dC}{dt} \tag{۵۰}$$

که معادله سرعت واکنش به فرم زیر است:

$$-r_A = kC \tag{۵۱}$$

در نتیجه داریم:

$$qC_0 - qC - VkC = V\frac{dC}{dt} \tag{۵۲}$$

$$C_0 - \left(1 + \frac{Vk}{q}\right)C = \frac{V}{q}\frac{dC}{dt} \tag{۵۳}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس داریم:

$$\frac{C(s)}{C_0(S)} = \frac{k_p}{\tau S + 1} \tag{۵۴}$$

که در معادله بالا مقادیر ثابت زمانی (τ) و بهره (K_p) عبارتند از:

$$\tau = \frac{\frac{V}{q}}{\left[1 + \frac{Vk}{q}\right]} \tag{۵۵}$$

$$k_p = \frac{1}{1 + \frac{Vk}{q}} \tag{۵۶}$$

مخزن با واکنش شیمیایی درجه اول

۲ـ۴ـ سیستم‌های درجه اول غیرخطی

مثال۶: اگر در مثال ۲ فرض کنیم ارتباط دبی خروجی و ارتفاع مایع درون مخزن به صورت زیر باشد:

$$q = C\sqrt{h} \tag{۵۷}$$

نتیجه بیلان به صورت زیر خواهد شد:

$$Q_i - \left(C\sqrt{h} - C\sqrt{h_S}\right) = A\frac{dH}{dt} \tag{۵۸}$$

ملاحظه می‌شود جمله دوم در سمت چپ معادله فوق غیرخطی است و باید خطی شود برای خطی‌سازی از بسط تیلور استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = f(x_S) + (x - x_S)\, f'(x_S) + \cdots \tag{۵۹}$$

بنابراین اگر $f = C\sqrt{h}$ باشد داریم:

$$C\sqrt{h} = C\sqrt{h_S} + (h - h_S)\frac{C}{2\sqrt{h_S}} \tag{۶۰}$$

$$C\sqrt{h} - C\sqrt{h_S} = \frac{CH}{2\sqrt{h_S}} \tag{۶۱}$$

با جایگذاری معادله (۶۱) در معادله (۵۸) داریم:

$$Q_i - \frac{CH}{2\sqrt{h_S}} = A\frac{dH}{dt} \tag{۶۲}$$

با مقایسه معادله (۶۲) با معادله (۳۵) داریم:

$$R = \frac{2\sqrt{h_S}}{C} \tag{۶۳}$$

که مقاومت فوق فرم خطی شده مقاومت شیر است، در نتیجه:

$$\frac{H(S)}{Q_i(S)} = \frac{R}{\tau S + 1} \tag{۶۴}$$

مثال۷: در مثال (۵) اگر واکنش انجام گرفته از درجه دو باشد در این صورت سیستم غیرخطی می‌شود.

$$-r_A = kC^2 \tag{۶۵}$$

و بیلان جرم به صورت زیر در می‌آید:

$$qC_0 - qC - VkC^2 = V\frac{dC}{dt} \tag{۶۶}$$

$$qC_{0S} - qC_S - VkC_S^2 = 0 \tag{۶۷}$$

بنابراین ترم VkC^2 باید خطی شود. طبق بسط تیلور داریم:

$$VkC^2 = VkC_S^2 + (C - C_S)(2VkC_S) \tag{۶۸}$$

با کسر کردن معادلات (۶۶) و (۶۷) از هم و جایگذاری $VkC^2 - VkC_S^2$ از معادله (۶۸) داریم:

$$qC_0 - qC - (2VkC_S)C = V\frac{dC}{dt} \tag{۶۹}$$

$$C_0 - \left(1 + \frac{2kVC_S}{q}\right)C = \frac{V}{q}\frac{dC}{dt} \tag{۷۰}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{2kVC_S}{q}}C_0 = C + \frac{\frac{V}{q}}{1 + \frac{2kVC_S}{q}}\frac{dC}{dt} \tag{۷۱}$$

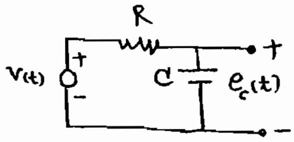
با مقایسه معادله (۷۱) با فرم استاندارد سیستم‌های درجه اول نتیجه می‌دهد:

$$\tau_p = \frac{\frac{V}{q}}{1 + \frac{2kVC_S}{q}} \tag{۷۱}$$

$$K_P = \frac{1}{1 + \frac{2kVC_S}{q}} \tag{۷۲}$$

اکنون می‌خواهیم به مقایسه ثابت زمانی فرآیندهای درجه اول شیمیایی، با مدار RC در الکتریسته بپردازیم.

در مدار RC روبه‌رو داریم:



(۷۳) $$\frac{E_C(s)}{V(S)}=\frac{1}{\tau S+1}$$

و ثابت زمانی τ برابر است با:

(۷۴) $$\tau = RC$$

بنابراین با توجه به مثال فوق، ثابت زمانی یک سیستم درجه اول را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

(۷۵) ظرفیت × مقاومت = ثابت زمانی

(۷۶) $$\text{مقاومت} = \frac{\text{نیروی محرکه}}{\text{جریان}}$$

(۷۷) $$\text{ظرفیت} = \frac{\text{ذخیره}}{\text{نیروی محرکه}}$$

بنابراین با توجه به معادلات (۷۵) تا (۷۷) می‌توان جدول زیر را برای ثابت زمانی سیستم‌های درجه اول بررسی شده، ارائه کرد.

ثابت زمانی	ظرفیت	ذخیره	مقاومت	جریان	نیروی محرکه	
RA	$\frac{hA}{h}=A$	$hA=V$	$R=\frac{h}{q}$	q	h	سطح مایع
$\frac{V}{q}$	$\frac{VC}{C}=V$	VC	$\frac{1}{q}$	qC	C	مخزن اختلاط
$\frac{mc}{hA}$	mc	$mc\Delta T$	$\frac{\Delta T}{hA\Delta T}=\frac{1}{hA}$	$hA\Delta T$	ΔT	دماسنج
RC	C	VC	$R=\frac{V}{I}$	I	V	مدار RC

جدول: مقادیر ثابت زمانی و مقاومت برای سیستم‌های کنترلی مختلف

۲ـ۵ـ تست‌های سیستم‌های درجه اول

۱ ـ پاسخ یک سیستم درجه اول به یک ورودی سینوسی $X(t)=A\,\mathrm{Sin}\,\omega t$ برابر است با:

۱) $y(t)=\dfrac{A}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}\,\mathrm{Sin}\,\omega t$

۲) $y(t)=\dfrac{A\omega\tau}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}\,\mathrm{Sin}(\omega t+\Phi)$

۳) $y(t)=\dfrac{A}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\sin\left(\omega^2 t\right)$

۴) $y(t)=\dfrac{A}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}\sin(\omega t+\phi)$

۲ ـ کدام یک از عبارات زیر صحیح است:

۱) دامنه پاسخ یک سیستم درجه اول به یک ورودی سینوسی همواره کوچکتر از دامنه ورودی است.

۲) دامنه پاسخ یک سیستم درجه دوم به یک ورودی سینوسی همواره کوچکتر از دامنه ورودی است.

۳) دامنه پاسخ یک سیستم درجه اول به یک ورودی سینوسی همواره بزرگتر از دامنه ورودی است.

۴) دامنه پاسخ یک سیستم درجه دوم به یک ورودی سینوسی همواره بزرگتر از دامنه ورودی است.

۳ ـ در یک سیستم درجه اول $\tau = 5\sec$ است پاسخ یک ضربان ایده‌آل به مقدار 5 پس از گذشت 3 ثانیه چه‌قدر است؟

۱) 0.4 ۲) 0.65 ۳) 1 ۴) 0.55

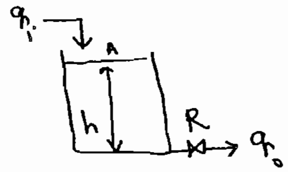
۴ ـ یک دماسنج به جرم مایع 4 gr و ظرفیت حرارتی $4000\ \dfrac{J}{kg^\circ k}$ و ضریب کنوکسیون $4\ \dfrac{w}{m^2\,^\circ k}$ و سطح $0.5m^2$ می‌باشد. اگر یک ورودی سینوسی با دامنه 5 و $w=2$ در دما حاصل شود؛ پاسخ سیستم درجه اول دارای چه دامنه‌ای خواهد بود؟

۱) 1 ۲) 0.5 ۳) 0.3 ۴) 1.5

۵ ـ اگر سیستم درجه اول با ثابت زمانی 1 تحت یک ورودی سینوسی به شکل $X(t)=2\sin(t)$ قرار گیرد، خروجی این سیستم پس از گذشت زمان نسبتاً طولانی چه خواهد شد.

۱) $y(t)=\sqrt{2}\cos\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)$ ۲) $\sqrt{2}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)$ ۳) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)$ ۴) $\sqrt{2}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right)$

۶ ـ در سیستم ارتفاع مایع مقابل نسبت $\dfrac{Q_o(S)}{Q_i(S)}$ برابر است با:



۱) $\dfrac{R}{\tau S+1}$ ۲) $\dfrac{1}{AS}$

۳) $\dfrac{1}{\tau S+1}$ ۴) $\dfrac{R}{AS'}$

۷ ـ اگر در یک سیستم سطح مایع، رابطه بین دبی مایع خروجی و ارتفاع مایع درون تانک به فرم $q=c\sqrt{h}$ باشد. و ارتفاع حالت پایدار h_s باشد ثابت زمانی خطی شده این سیستم برابر است با:

۱) $\tau=\dfrac{2A}{c\sqrt{h_s}}$ ۲) $\dfrac{A\sqrt{h_s}}{c}$ ۳) $\dfrac{c\sqrt{h_s}\,A}{2}$ ۴) $\dfrac{2A\sqrt{h_s}}{c}$

۸ـ تابع تبدیل بین ورودی و خروجی یک سیستم به صورت $\frac{y(S)}{x(S)}=\frac{1}{S+2}$ می‌باشد. اگـر ورودی $X(t)=2\sin 2t$ وارد آن شـود خروجی پس از زمان طولانی برابر است با:

۱) $y(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$

۲) $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$

۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)$

۴) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$

۹ـ در یک سیستم سطح مایع اگر ثابت زمانی برابر یک دقیقه و دبی حجمی مایع ورودی $4\ \frac{ft^3}{min}$ در حالـت یکنواخـت باشـد. در لحظه $t=0$ دبی حجمی به طور ناگهانی به $14\ \frac{ft^3}{min}$ افزایش یافته و پس از 0.2 دقیقه به مقدار اولیه‌اش باز گـردد. $H(s)$ برابـر است با:

۱) $H(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$

۲) $H(s)=10R(s+1)$

۳) $H(s)=10R(s+1)\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-0.2s}}{s+1}\right)$

۴) $H(s)=\frac{10R}{s+1}\left[\frac{1}{s}-\frac{e^{-0.2s}}{s}\right]$

۱۰ـ تابع تبدیل یک سیستم درجه اول به صورت $\frac{y(S)}{x(S)}=\frac{k}{S+a}$ می‌باشد، اگر یـک ورودی پلـه‌ای واحـد وارد آن شـود خروجـی سیستم به صورت $y(t)=1-e^{-2t}$ می‌شود. بنابراین می‌توان گفت:

۱) $\tau=2\ ,\ k=1$

۲) $\tau=\frac{1}{2}\ ,\ k=1$

۳) $\tau=\frac{1}{2}\ ,\ k=2$

۴) $\tau=2\ ,\ k=2$

۱۱ـ مقاومت کنترلی در سیستم مخزن اختلاط برابر است با:

۱) f

۲) $\frac{1}{f}$

۳) V

۴) $\frac{1}{V}$

۲ـ۶ـ پاسخ تست‌های سیستم درجه اول

۱ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۲ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۳ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$y(t)=\frac{A}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}=\frac{5}{5}e^{-0.6}=0.55$$

۴ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\tau=\frac{mc}{hA}=\frac{4\times4}{4\times0.5}=8$$

$$\text{دامنه خروجی}=\frac{A}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}=\frac{6}{\sqrt{64\times4+1}}=0.3$$

۵ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\text{دامنه پاسخ}=\frac{A}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{1\times1+1}}=\sqrt{2}$$

$$\text{تأخیر فاز}=\tan^{-1}(-\omega\tau)=\tan^{-1}(-1\times1)=-\frac{\pi}{4}$$

$$y(t)=\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

۶ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۷ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\text{خطی شده } R=\frac{2\sqrt{h_s}}{C}\quad\rightarrow\quad\text{خطی شده } \tau=\frac{2A\sqrt{h_s}}{C}$$

۸ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\frac{y(S)}{x(S)}=\frac{1}{S+2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}S+1}\quad\rightarrow\quad K=\frac{1}{2}\quad,\quad\tau=\frac{1}{2}$$

$$\text{دامنه خروجی}=\frac{Ak}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}\times4+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{تأخیر فاز}=\tan^{-1}(-\omega\tau)=\tan^{-1}\left(-2\times\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$$

۹ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\frac{H(s)}{Q(s)}=\frac{R}{\tau S+1}$$

$$Q(t)=(14-4)\left[u(t)-u(t-0.2)\right]=10\left[u(t)-u(t-0.2)\right]$$

$$Q(s)=\frac{10}{S}-\frac{10e^{-0.2S}}{S}$$

$$H(s)=\frac{10R}{S+1}\left(\frac{1}{S}-\frac{e^{-0.2S}}{S}\right)$$

۱۰ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\frac{y(s)}{X(s)}=\frac{\frac{k}{a}}{\frac{1}{a}S+1} \rightarrow K_p=\frac{K}{a} \quad , \quad \tau_p=\frac{1}{a}$$

$$X(t)=u(t) \rightarrow X(s)=\frac{1}{S} \rightarrow y(t)=K_p\left[1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

$$y(t)=\frac{K}{a}\left[1-e^{-at}\right]$$

$$\frac{K}{a}=1 \quad , \quad a=2 \rightarrow K=2 \quad , \quad \tau=\frac{1}{2}$$

۱۱ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

طبق جدول متن درس

فصل سوم

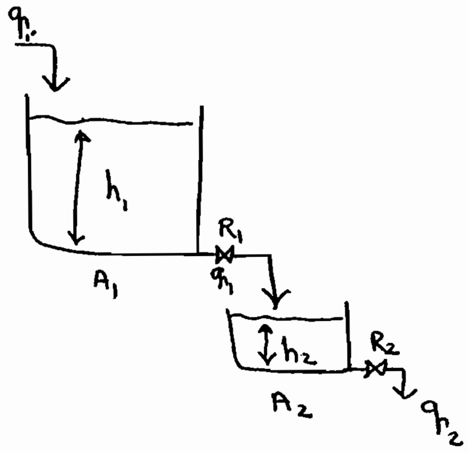
سیستم‌های درجه اول متوالی و درجه دوم

۳ـ ۱ـ سیستم‌های درجه اول متوالی

سیستم‌های درجه اول متوالی دو دسته‌اند:

الف) غیر تداخلی

سیستم غیر تداخلی سطح مایع مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۱: سیستم غیر تداخلی سطح مایع

با نوشتن بیلان برای تانک‌های اول و دوم داریم:

$$\frac{Q_1(s)}{Q_i(s)}=\frac{1}{\tau_1 S+1} \quad (1)$$

$$\frac{Q_2(s)}{Q_1(s)}=\frac{1}{\tau_2 S+1} \quad (2)$$

جایی که $\tau_1=R_1A_1$ و $\tau_2=R_2A_2$ به ترتیب ثابت زمانی دو تانک هستند. از طرفی برای یافتن نسبت $\frac{H_2(s)}{Q_i(s)}$ در معادله (۲) به جای Q از معادله (۱) جایگزین می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{Q_2(s)}{Q_i(s)}=\frac{1}{(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)}=\frac{1}{\tau_1\tau_2+(\tau_1+\tau_2)S+1} \quad (۳)$$

$$Q_2(s)=\frac{H_2(s)}{R_2} \quad (۴)$$

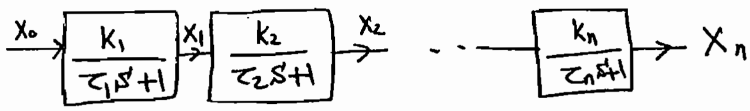
در نتیجه از معادلات (۳) و (۴) داریم:

$$\frac{H_2(s)}{Q_i(s)}=\frac{R_2}{(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)} \quad (۵)$$

حال اگر بخواهیم نسبت $\frac{H_2(s)}{H_i(s)}$ را محاسبه کنیم کافی است به جای $Q_2=\frac{H_2}{R_2}$ و به جای $Q_1=\frac{H_1}{R_1}$ قرار دهیم، در نتیجه معادله (۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{H_2(s)}{H_1(s)}=\frac{R_2/R_1}{(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)} \quad (۶)$$

به طور کلی با توجه به نتیجه به‌دست آمده از معادله (۳) برای n سیستم درجه اول متوالی و غیرتداخلی مطابق شکل زیر می‌توان تابع تبدیل بین خروجی از واحد n ام و ورودی به اول را بدست آورد:



$$\frac{X_n(s)}{X_0(s)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{K_i}{\tau_i S+1} \quad (۷)$$

یعنی در سیستم‌های غیر تداخلی تابع تبدیل کلی، حاصل‌ضرب تابع تبدیل هر یک از مراحل است.

پاسخ سیستم درجه اول متوالی غیرتداخلی، به یک ورودی پله‌ای را به روش زیر می‌توان پیدا کرد:

$$\frac{H_2(s)}{Q_i(s)}=\frac{R_2}{(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)}$$

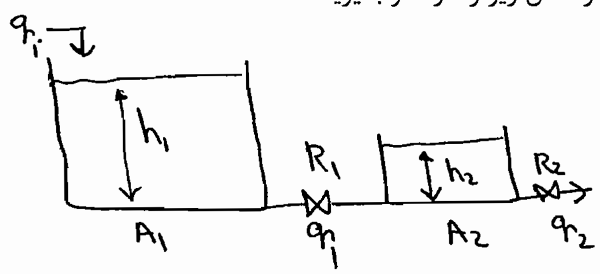
$$Q_i(s)=\frac{1}{S}$$

$$H_2(s)=\frac{1}{S}\cdot\frac{R_2}{(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)}$$

$$H_2(t)=R_2\left[1-\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\left(\frac{1}{\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\frac{1}{\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right] \quad (۸)$$

ب) تداخلی:

اکنون سیستم تداخلی نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.



در این حالت پاسخ تانک دوم روی پاسخ تانک اول اثر می‌گذارد. بیلان جرم برای هر یک از این دو تانک به صورت زیر است:

$$Q_i(t)-Q_1(t)=A_1\frac{dH_1}{dt} \qquad (۹)$$

$$Q_1(t)-Q_2(t)=A_2\frac{dH_2}{dt} \qquad (۱۰)$$

$$Q_1=\frac{H_1-H_2}{R_2} \quad , \quad Q_2=\frac{H_2}{R_2} \qquad (۱۱)$$

در این حالت چنان که از معادله (۱۱) مشاهده می‌شود، دُبی خروجی از تانک اول متناسب با اختلاف ارتفاع مایع در دوتانک (H_1-H_2) است. بنابراین پاسخ تانک دوم (H_2) روی پاسخ تانک اول (H_1) اثر می‌گذارد. لاپلاس‌گیری از معادلات فوق نتیجه می‌دهد:

$$Q_i(s)-\frac{H_1(s)-H_2(s)}{R_1}=A_1SH_1(s) \qquad (۱۲)$$

$$\frac{H_1(s)-H_2(s)}{R_1}-\frac{H_2(s)}{R_2}=A_2SH_2(s) \qquad (۱۳)$$

از حل هم‌زمان معادلات فوق (با حذف $H_1(S)$ از معادلات فوق) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{H_2(s)}{Q_i(s)}=\frac{R_2}{\tau_1\tau_2S^2+(\tau_1+\tau_2+A_1R_2)S+1} \quad , \quad \frac{Q_2(s)}{Q_i(s)}=\frac{1}{\tau_1\tau_2S^2+(\tau_1+\tau_2+A_1R_2)S+1} \qquad (۱۴)$$

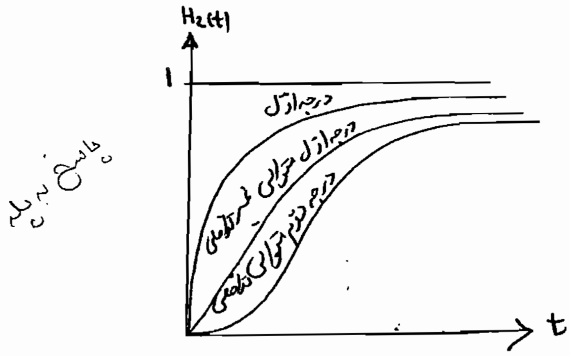
مثال: در صورتی که $\tau_1=\tau_2$ باشد پاسخ به یک ورودی پله‌ای دو تانک تداخلی و غیرتداخلی را به‌دست آورید؟

غیر تداخلی $\frac{Q_2(S)}{Q_i(S)}=\frac{1}{(\tau S+1)^2}\rightarrow Q_2(t)=1-e^{-t/\tau}-\frac{t}{\tau}e^{-t/\tau}$

تداخلی $\frac{Q_2(S)}{Q_i(S)}=\frac{1}{\tau^2S+3\tau S+1}\rightarrow Q_2(t)=1+0.17e^{-t/0.38\tau}-1.17e^{-t/2.62\tau}$

ورودی پله‌ای $Q_i(S)=\frac{1}{S}$

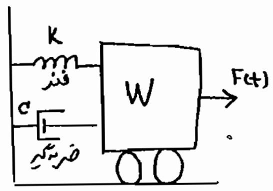
در شکل زیر به طور شماتیک پاسخ یک سیستم درجه اول، یک سیستم درجه اول غیر تداخلی و یک سیستم تداخلی بـه یـک ورودی پله‌ای نشان داده شده است.



نکته: در سیستم‌های متوالی (تداخلی یا غیرتداخلی) پاسخ سیستم به ورودی‌های غیرنوسانی، همواره غیرنوسانی است چون ضریب میرایی (ξ) در این سیستم‌ها همواره بزرگتر از یک است. ملاحظه می‌شود که در هر سه حالت رفتار پاسخ غیرنوسانی است. و در سیستم‌های متوالی شیب در لحظه صفر برابر صفر است. به عبارتی با ازدیاد درجه سیستم، پاسخ سیستم کندتر می‌شود.

۳ـ ۲ـ سیستم‌های درجه دوم

سیستم گلوله و فنر روبه‌رو را در نظر بگیرید.



۱ـ نیروی وارد شده توسط فنر $-Ky$

۲ـ نیروی اصطکاک ضربه‌گیر $-c\dfrac{dy}{dt}$

۳ـ $F(t)$ نیروی وارده برای حرکت جعبه روی سطح بدون اصطکاک

با نوشتن قانون حرکت نیوتن داریم:

$$F(t)-Ky-c\frac{dy}{dt}=\frac{W}{g_c}\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (۱۵)$$

$$\frac{W}{g_c}\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{dy}{dt}+Ky=F(t) \qquad (۱۶)$$

$$\frac{W}{g_cK}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{c}{K}\frac{dy}{dt}+y=\frac{F(t)}{K} \qquad (۱۷)$$

$$\tau^2\frac{d^2y}{dt^2}+2\xi\tau\frac{dy}{dt}+y=X(t) \qquad (۱۸)$$

فرم استاندارد درجه ۲

که معادله (۱۸) فرم استاندارد سیستم درجه دوم است. که در آن:

$$\tau=\sqrt{\frac{W}{g_cK}} \qquad (۱۹)$$

$$\xi=\sqrt{\frac{g_cc^2}{4WK}} \qquad (۲۰)$$

با لاپلاس‌گیری از معادله (۱۸) خواهیم داشت:

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{\tau^2 S^2+2\xi\tau S+1} \tag{۲۱}$$

که معادله (۲۱) بیان‌گر فرم استاندارد تابع ترانسفر سیستم درجه دوم است:

$$G(s)=\frac{1}{\tau^2 S^2+2\xi\tau S+1} \tag{۲۲}$$

ملاحظه می‌شود که در سیستم درجه دوم برخلاف سیستم درجه اول دو پارامتر داریم که عبارتند از: ثابت زمانی (τ) و ضریب میرایی (ξ).

اکنون پاسخ سیستم‌های درجه دوم را به ورودی‌های استاندارد بررسی می‌کنیم.

۳ـ ۲ـ ۱ـ پاسخ سیستم درجه ۲ به ورودی پله‌ای

$$\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{1}{\tau^2 S^2+2\xi\tau S+1} \tag{۲۳}$$

$$x(t)=u(t) \tag{۲۴}$$

$$x(S)=\frac{1}{S} \tag{۲۵}$$

$$y(S)=\frac{1}{S}\frac{1}{\tau^2 S^2+2\xi\tau S+1} \tag{۲۶}$$

$$y(S)=\frac{1/\tau^2}{S(S-S_1)(S-S_2)} \tag{۲۷}$$

$$S_1=-\frac{\xi}{\tau}+\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau} \tag{۲۸}$$

$$S_2=-\frac{\xi}{\tau}-\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau} \tag{۲۹}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود موقعیت ریشه‌ها در صفحه مختصات موهومی به مقدار ضریب میرایی (ξ) بستگی دارد. بنابراین پاسخ سیستم درجه ۲ به ورودی پله‌ای برای مقادیر مختلف (ξ) به فرم زیر است:

الف) $\xi>1$ (سیستم پرمیرا overdamped)

در این حالت هر دو ریشه حقیقی و منفی هستند و پاسخ غیرنوسانی و به صورت زیر است:

$$y(t)=1-e^{-\frac{\xi t}{\tau}}\left[\cosh\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau}t+\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\sinh\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau}t\right] \tag{۳۰}$$

ب) $\xi=1$ (میرایی بحرانی Critically damped)

در این حالت دو ریشه حقیقی، مضاعف و منفی داریم بنابراین پاسخ سیستم درجه ۲ در این حالت به صورت زیر است:

$$y(t)=1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{۳۱}$$

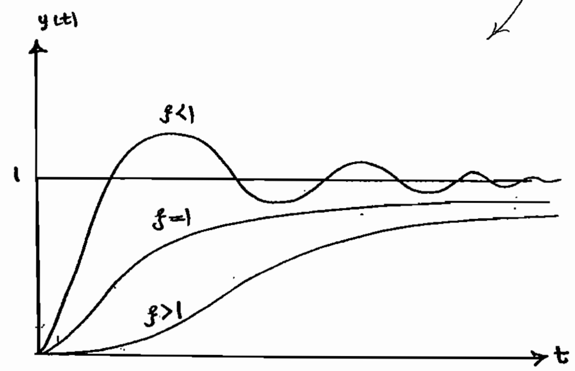
ج) $\xi<1$ (سیستم کم میرا underdamped)

در این حالت دو ریشه موهومی با جز حقیقی منفی داریم:

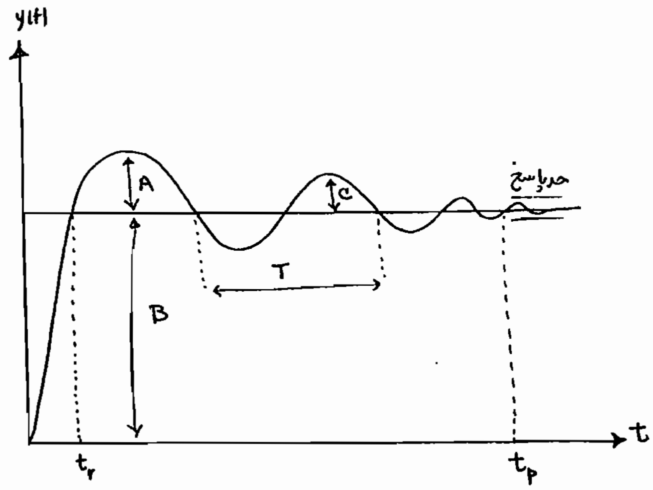
$$S_{1,2} = -\frac{\xi}{\tau} \pm i\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} \quad (۳۲)$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi t/\tau}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \quad (۳۳)$$

در شکل زیر نمودار تغییرات پاسخ سیستم درجه ۲ به یک ورودی پله‌ای نشان داده شده است:



در حالت $\xi < 1$ چنان‌که گفته شد؛ پاسخ سیستم درجه ۲ به یک ورودی پله‌ای به صورت نوسانات با دامنه کاهنده با زمان است. در ادامه به تعریف یک سری اصطلاحات خاص این فرم از پاسخ می‌پردازیم:



۱ـ فرارفت (overshoot)

$$\frac{A}{B} = \exp\left[-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right] \quad (۳۴)$$

با افزایش ξ فرارفت کاهش می‌یابد.

۲ـ نسبت فروکش (Decay Ratio)

$$\frac{C}{A} = \exp\left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = \left(\frac{A}{B}\right)^2 \quad (۳۵)$$

۳ـ زمان‌خیز (Rise Time)

زمانی است که برای اولین بار پاسخ سیستم به مقدار نهایی خودش می‌رسد بنابراین در معادله (۳۳) مقدار $y(t)$ را برابر یک قرار می‌دهیم:

$$1=1-\frac{e^{-\xi t/\tau}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}t+\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right] \quad (۳۶)$$

$$\frac{e^{-\xi t/\tau}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}t+\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right]=0 \quad (۳۷)$$

در نتیجه

$$\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}t+\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}=n\pi \quad (۳۸)$$

در معادله فوق $n = 1$ مربوط به زمان‌خیز می‌باشد.

$$t_r=\left[\pi-\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right]\frac{\tau}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (۳۹)$$

افزایش ξ موجب افزایش زمان‌خیز می‌شود.

۴ـ زمان پاسخ (Response Time)

زمانی است که پاسخ برای رسیدن به ± 5 درصد مقدار نهایی خود و باقی ماندن در این حدود نیاز دارد.

۵ـ زمان پیک (peak time)

زمانی است که پاسخ سیستم دارای ماکزیمم یا می‌نیمم است و با مشتق‌گیری از معادله (۳۳) و صفر قرار دادن آن بدست می‌آید:

$$t_{peak}=\frac{n\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (۴۰)$$

$T = 2t_p$

۶ـ دوره تناوب نوسان

$$\text{فرکانس رادیانی } \omega=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} \quad (۴۱)$$

$$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T} \quad (۴۲)$$

در نتیجه

$$f=\frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} \quad (۴۳)$$

۷ـ دوره طبیعی نوسان (Natural period of oscillation)

در حالت $\xi = 0$ طبق معادله (۳۳) دامنه نوسانات ثابت می‌ماند و اساساً با یک نوسان دایم با دامنه ثابت سر و کار داریم در این حالت داریم:

$$\text{فرکانس رادیانی طبیعی } \omega_n=\frac{1}{\tau} \quad (۴۴)$$

$$\text{فرکانس سیکلی طبیعی } f_n=\frac{1}{2\pi\tau} \quad (۴۵)$$

$$\frac{f}{f_n}=\sqrt{1-\xi^2} \quad (۴۶)$$

۳ـ ۲ـ ۲ـ پاسخ سیستم درجه ۲ به ورودی ضربانی

$$\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{1}{\tau^2 S^2+2\xi\tau S+1} \qquad (۴۷)$$

$$x(t)=\delta(t) \qquad (۴۸)$$

$$x(s)=1 \qquad (۴۹)$$

پیش‌تر و در بخش پاسخ سیستم درجه اول به ورودی ضربانی گفتیم: پاسخ یک سیستم به ورودی ضربانی مشتق پاسخ سیستم به ورودی پله‌ای است بنابراین با مشتق گرفتن از معادلات مربوط به پاسخ سیستم درجه ۲ به ورودی پله‌ای می‌توان پاسخ سیستم درجه ۲ را به ورودی ضربانی بدست آورد:

الف) $\xi < 1$

$$y(t)=\frac{1}{\tau}\frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}}e^{-\xi t/\tau}\sinh\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau}t \qquad (۵۰)$$

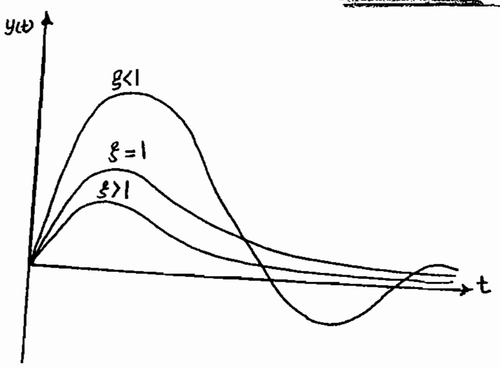
ب) $\xi = 1$

$$y(t)=\frac{1}{\tau^2}t e^{-t/\tau} \qquad (۵۱)$$

ج) $\xi < 1$

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{e^{-\xi t/\tau}}{\tau}\sin\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}t \qquad (۵۲)$$

در شکل زیر پاسخ یک سیستم درجه ۲ به ورودی ضربانی نشان داده شده است:



۳ـ ۲ـ ۳ـ پاسخ سیستم درجه ۲ به ورودی سینوسی

$$x(t)=A\sin\omega t \qquad (۵۳)$$

$$x(s)=\frac{A\omega}{S^2+\omega^2} \qquad (۵۴)$$

$$y(s)=\frac{A\omega}{S^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{\tau^2 S^2+2\xi\tau S+1} \qquad (۵۵)$$

در نتیجه پاسخ سیستم درجه ۲ به ورودی سینوسی پس از زمان طولانی به فرم زیر است:

$$y(t)=\frac{A}{\sqrt{\left[1-(\omega\tau)^2\right]^2+(2\xi\omega\tau)^2}}\sin(\omega t+\phi) \qquad (۵۶)$$

$$\phi=-\tan^{-1}\frac{2\xi\omega\tau}{1-(\omega\tau)^2} \qquad (۵۷)$$

مشاهده می‌شود که نسبت دامنه پاسخ به دامنه ورودی عبارت است از $\frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega\tau)^2\right]^2+(2\xi\omega\tau)^2}}$ که مقدار عبارت فوق بستگی به مقادیر ξ و $\omega\tau$ دارد و ممکن است کمتر یا مساوی و یا بیشتر از یک باشد.

به بیان دیگر به راحتی اثبات می‌شود اگر $\frac{\sqrt{2}}{2} > \xi$ باشد دامنه پاسخ بزرگ‌تر از دامنه ورودی است؛ و نیز در حالتی که $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$ است دامنه پاسخ کمتر از دامنه ورودی است.

۳ـ ۳ـ پسی انتقال (Transportation Lag)

اگر خروجی یک سیستم پس از زمان τ_d اندازه‌گیری شود همیشه اندازه‌گیری‌های انجام شده بیان‌گر موقعیت سیستم در τ_d دقیقه قبل‌تر است بنابراین:

$$y(t)=x(t-\tau_d) \tag{۵۸}$$

$$y(s)=e^{-\tau_d s}.x(s) \tag{۵۹}$$

$$\frac{y(s)}{x(s)}=e^{-\tau_d s} \tag{۶۰}$$

مثال: نشان دهید در سیستم‌های متوالی همواره $\zeta\geq 1$ است.

با مقایسه تبدیل سیستم‌های متوالی (معادله ۳) با فرم استاندارد سیستم درجه ۲ (معادله ۲) خواهیم داشت:

$$\tau=\sqrt{\tau_1\tau_2} \quad , \quad \zeta=\frac{\tau_1+\tau_2}{2\sqrt{\tau_1\tau_2}}>1$$

برای سیستم‌های تداخلی هم به طریق مشابه می‌توان اثبات کرد که $\zeta=\frac{\tau_1+\tau_2+A_1R_2}{2\sqrt{\tau_1\tau_2}}$ که همواره بزرگتر از یک است، لذا می‌توان گفت:

$$\zeta_{\text{تداخلی}} > \zeta_{\text{غیرتداخلی}} \geq 1$$

۳ـ ۴ـ تست‌های فصل سوم

۱ ـ اگر در یک سیستم گلوله و فنر تعداد سه فنر موازی با ثابت‌های هوک k_1 و k_2 و k_3 داشته باشیم، ثابت زمانی ایـن سیسـتم برابر است با:

۱) $\frac{M}{k_1}$ ‏ ۲) $\sqrt{\frac{M}{k_1 k_2 k_3}}$ ‏ ۳) $\sqrt{\frac{M}{k_1+k_2+k_3}}$ ‏ ۴) $\sqrt{\frac{M}{k_1}+\frac{M}{k_2}+\frac{M}{k_3}}$

۲ ـ در یک سیستم تداخلی نسبت $\frac{H_2(s)}{Q_i(s)}$ برابر است با:

۱) $\frac{R_2}{(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)}$

۲) $\frac{R_2}{\tau_1\tau_2 S^2+(\tau_1+\tau_2+A_1 R_2)S+1}$

۳) $\frac{R_1}{\tau_1\tau_2 S^2+(\tau_1+\tau_2+A_2 R_1)S+1}$

۴) $\frac{R_1}{\tau_1\tau_2 S^2+(\tau_1+\tau_2+A_1 R_2)S+1}$

۳ ـ در پاسخ فرکانسی یک سیستم درجه دوم کدام عبارت صحیح است؟

۱) همواره یک فرکانس رزونالس داریم.

۲) اگر ξ از حدی کمتر باشد نسبت دامنه‌ها دارای یک ماکزیمم است.

۳) بسته به مقدار ξ نسبت دامنه‌ها می‌تواند کوچکتر، مساوی یا بیشتر از یک باشد.

۴) هر سه.

۴ ـ اگر پاسخ یک سیستم به ورودی پله‌ای واحد به صورت $y(t)=1+0.2e^{-60t}-1.2e^{-10t}$ باشد ثابت زمانی سیستم برابر است با:

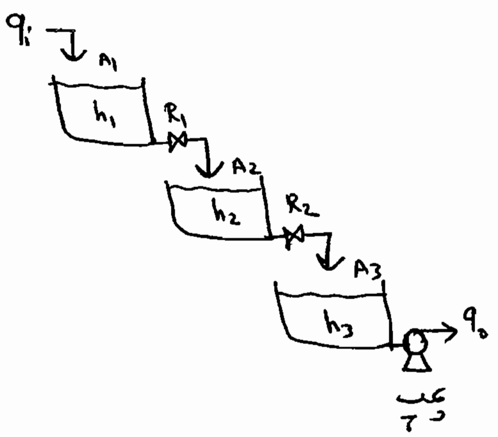
۱) $\tau=1$ ‏ ۲) 0.1 ‏ ۲) 0.04 ‏ ۴) 0.4

۵ ـ اگر تابع تبدیل سیستمی به صورت $G(s)=\frac{10}{S^2+1.6S+4}$ باشد. ماهیت پاسخ این سیستم به یک ورودی پله‌ای:

۱) سینوسی با دامنه ثابت است. ‏ ۲) میرایی بحرانی است.

۳) پرمیرا است. ‏ ۴) کم میرا است.

۶ ـ برای سیستم سه تانک غیرتداخلی روبه‌رو $\frac{H_3}{Q_i}$ برابر است با:



۱) $\frac{1}{A_3 S(\tau_1 S+\tau_2 S+1)}$

۲) $\frac{1}{A_3(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)}$

۳) $\frac{1}{A_3 S(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)}$

۴) $\frac{1}{(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)}$

۳ـ ۵ـ پاسخ تست‌های فصل سوم

۱ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$k_{\text{معادل}} = \sum k_i$$

۲ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۳ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۴ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$y(s)=\frac{1}{S}+\frac{0.2}{S+60}-\frac{1.2}{s+10}=\frac{F(s)}{S(S+60)(S+10)}=\frac{F(s)}{(S+60)(S+10)}=\frac{F(s)}{S^2+70S+600}$$

$$\text{مخرج کسر}=\frac{1}{600}S^2+\frac{70}{600}S+1$$

$$\tau=\sqrt{\frac{1}{600}}=0.04\ \text{sec} \qquad \xi=\frac{\frac{70}{600}}{2\times 0.04}=1.46$$

۵ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$G(s)=\frac{\frac{10}{4}}{\frac{1}{4}S^2+\frac{1.6}{4}S+1} \rightarrow \tau=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$2\xi\tau=\frac{1.6}{4} \rightarrow \xi=\frac{\frac{1.6}{4}}{2\times\frac{1}{2}}=0.4<1 \quad \text{کم میرا}$$

۶ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

فصل چهارم

شیرهای کنترل، کنترلرها، ساده‌سازی بلاک دیاگرام‌ها و افت کنترل

۴ـ ۱ـ انواع شیرهای کنترل

در واقع شیرهای کنترل به دودسته اصلی تقسیم می‌شوند:

۱ـ شیرهای کنترل پنوماتیکی

۲ـ شیرهای کنترل برقی

در شیرهای کنترل پنوماتیک دبی جریان سیال عبوری از خط لوله توسط فشار هوای ایجاد شده توسط کمپرسور کنترل می‌شود. فشار سرشیر کنترل در این حالات بین 3 psi تا 15 psi متغیر است. بر اساس نحوه ارتباط میان دبی (Q) و فشار (P) این شیرها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

الف) شیرهای پنوماتیک Air – to – open

در این شیرها با ازدیاد فشار سرشیر، دبی افزایش می‌یابد.

شیر کاملاً بسته $P = 3\ psi \longrightarrow$

شیر کاملاً باز $P = 15\ psi \longrightarrow$

ب) شیرهای Air – to – closed

در این شیرها با ازدیاد فشار سرشیر، دبی کاهش می‌یابد.

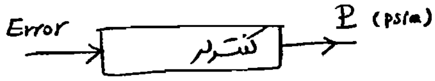
شیر کاملاً باز $P = 3\ psi \longrightarrow$

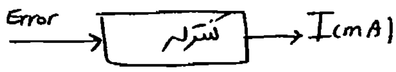
شیر کاملاً بسته $P = 15\ psi \longrightarrow$

در شیرهای کنترل برقی میزان دبی جریان سیال عبوری توسط شدت جریان الکتریسیته در سرشیر کنترل می‌شود. در محیط‌های آتش‌گیر شیرهای کنترل پنوماتیک از ایمنی بالاتری برخوردار هستند. در شیرهای کنترل برقی جریان سرشیر از 4 mA تا 20 mA تغییر می‌کند.

۴ـ ۲ـ کنترلرها و اقسام آن

بلاک مربوط در کنترلرها به صورت زیر است:





یعنی در کنترلرها با توجه به میزان خطای موجود در فرآیند (Error) تصمیم گرفته می‌شود که فشار سرشیر کنترل (در صورتی که شیر پنوماتیک است) یا جریان (در صورتی که شیر برقی است) به میزان مشخصی تغییر کند.
تنوع کنترلرها بر اساس تنوع رابطه میان P و ε می‌باشد.

۴ـ ۲ـ ۱ـ کنترلر تناسبی

در این کنترلر فشار اعمال شده به سرشیر کنترل متناسب با میزان خطا است:

$$P(t)=P_s+K_c\,\varepsilon(t) \qquad (1)$$

با لاپلاس‌گیری از معادله بالا خواهیم داشت:

$$\frac{P(s)}{\varepsilon(s)}=K_c \qquad (2)$$

که در معادله بالا K_c بهره کنترلر تناسبی است. واحد K_c در شیرهای کنترل پنوماتیک $\frac{psi}{Error}$ و در شیرهای برقی $\frac{mA}{Error}$ می‌باشد.
به عنوان مثال، اگر در فرآیندی کنترل دما صورت گیرد دیمانسیون K_c برای شیر کنترل پنوماتیک و برقی به ترتیب $\frac{psi}{^\circ C}$ و $\frac{mA}{^\circ C}$ خواهد بود.
نسبت $\frac{P(s)}{\varepsilon(s)}$ تابع تبدیل کنترلر $(G_c(s))$ می‌باشد.

پهنای تناسبی

یکی از مباحث مهم در کنترلرهای تناسبی بحث پهنای تناسبی یا Proportional Bond است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$PB\%=\frac{Error}{Range}\times 100 \qquad (3)$$

در حالی که K_c برای یک شیر کنترل برقی و پنوماتیک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_c=\frac{(15-3)\,psi}{Error}=\frac{12}{Error} \qquad (4)$$

$$K_c=\frac{(20-4)\,mA}{Error}=\frac{16}{Error} \qquad (5)$$

بنابراین ارتباط میان PB % و K_c طبق معادلات زیر بیان می‌شود:

$$PB\%=\frac{12\times 100}{K_c\,.\,Range} \qquad (6)$$

$$PB\ \% = \frac{16 \times 100}{K_c\,.\,Range} \tag{۷}$$

چنان‌که ملاحظه می‌شود $PB\ \%$ و K_c با هم نسبت عکس دارند.

$$PB\% \sim \frac{1}{K_c} \tag{۸}$$

از این رو هنگامی که $K_c = \infty$ است، $PB\% = 0$ است و این کنترلر یک کنترلر قطع و وصلی (on – off) نامیده می‌شود.

مثال: اگر کنترل دمای سیستمی در محدوده $71-75^\circ C$ مورد نظر باشد و محدوده کلی تغییرات دما در این سیستم از $60-100^\circ C$ باشد مطلوب است مقادیر $PB\ \%$ و نیز K_c برای شیرهای کنترل برقی و پنوماتیک؟

$$PB\ \% = \frac{75-71}{100-60} \times 100 = \frac{4}{40} \times 100 = 10$$

شیر پنوماتیک $K_c = \frac{12}{75-71} = 3\ \frac{psi}{^\circ C}$

شیر برقی $K_c = \frac{16}{75-71} = 4\ \frac{mA}{^\circ C}$

۴ـ ۲ـ ۲ـ کنترلر تناسبی مشتقی (PD)

در این حالت فشار سرشیر کنترل هم به میزان خطا $(\varepsilon(t))$ و هم به روند تغییرات آن $\left(\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right)$ بستگی دارد، لذا:

$$P(t) = P_S + K_c\left[\varepsilon(t) + \tau_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right] \tag{۹}$$

$$\frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_c\left(1 + \tau_D S\right) \tag{۱۰}$$

بنابراین تابع تبدیل کنترلر تناسبی مشتقی به صورت زیر است:

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \tau_D S\right) \tag{۱۱}$$

که در معادله بالا τ_D زمان مشتقی نامیده می‌شود.

۴ـ ۲ـ ۳ـ کنترل تناسبی انتگرالی (PI)

در این کنترلرها فشار سرشیر کنترل هم به میزان خطا $(\varepsilon(t))$ هم به انتگرال کلی خطا $\int_0^t \varepsilon(t)\,dt$ بستگی دارد، لذا:

$$P(t) = P_S + K_c\left[\varepsilon(t) + \frac{1}{\tau_I}\int_0^\infty \varepsilon(t)\,dt\right] \tag{۱۲}$$

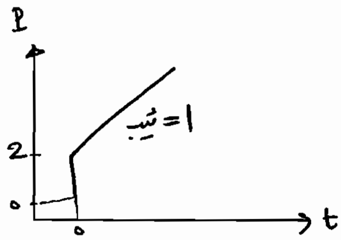
$$\frac{P(s)}{\varepsilon(S)} = K_c\left[1 + \frac{1}{\tau_I S}\right] \tag{۱۳}$$

که در معادله بالا τ_I زمان انتگرال نامیده می‌شود.

درجدول زیر تابع تبدیل انواع کنترلرها ارائه شده است:

نوع کنترلر	تابع تبدیل $G_c(s)$
P	K_c
PD	$K_c(1+\tau_D S)$
PI	$K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I S}\right)$
PID	$K_c\left(1+\tau_D S+\frac{1}{\tau_I S}\right)$

مثال: پاسخ یک کنترلر به ورودی خطی خطا به صورت $\varepsilon(t)=0.5t$ مطابق شکل زیر است نوع کنترلر و پارامترهای آن را تعیین کنید.



حل: کنترلر را PID فرض می‌کنیم: (که یک حالت کلی است)

$$P(s)=k_c\left(1+\tau_D S+\frac{1}{\tau_I S}\right)\times\frac{0.5}{S^2}$$

$$P(t)=0.5k_c t+\frac{k_c.t^2}{4\tau_I}+0.5K_c\tau_D$$

چون فرم پاسخ خطی است پس کنترلر عامل انتگرالی ندارد لذا:

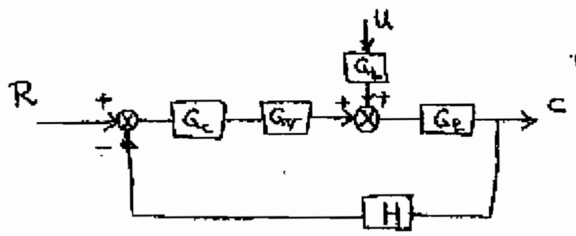
عرض از مبدا $=2=0.5\,k_c\tau_D$

شیب $=1=0.5K_c$

در نتیجه کنترلر تناسبی مشتقی است با $K_c=2$ و $\tau_D=2$.

۴ـ ۳ـ توابع انتقال مدار بسته

می‌خواهیم در سیستم مدار بسته روبه‌رو نسبت‌های $\frac{C}{R},\frac{C}{u}$ را بدست آوریم.



$$\underbrace{\{R-CH\}G_cG_vG_f=C}$$

$$\frac{C}{R}=\frac{G_cG_vG_p}{1+G_cG_vG_pH}=\frac{\Pi_f}{1+\Pi_L} \qquad (14)$$

که در معادله بالا Π_f حاصل‌ضرب توابع انتقال بین C و R در مسیر پیشرو و Π_L حاصل‌ضرب توابع انتقال موجود در حلقه است. به همین روش نسبت $\frac{C}{u}$ به فرم زیر محاسبه می‌شود:

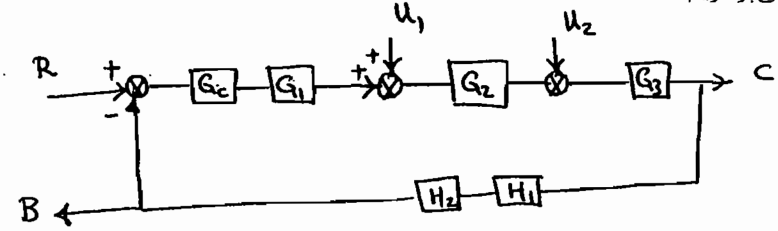
$$\frac{C}{u}=\frac{G_L G_P}{1+G_C G_V G_P H} \qquad (۱۵)$$

پس به طور ساده تابع ترانسفر سیستم مدار بسته را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{C}{R}=\frac{G}{1\pm GH} \qquad (۱۶)$$

که در معادله بالا علامت مثبت برای فیدبک منفی و علامت منفی برای فیدبک مثبت به کار می‌رود در ادامه به حل مثال‌هایی از ساده‌سازی بلاک دیاگرام‌ها می‌پردازیم:

مثال:



$$\frac{C}{R}=\frac{G_C G_1 G_2 G_3}{1+G}$$

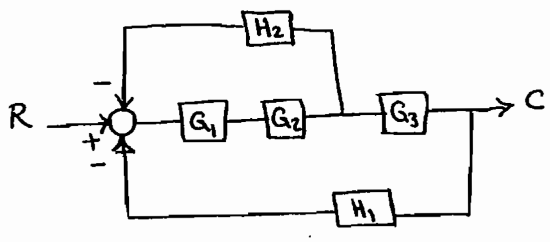
$$\frac{C}{u_1}=\frac{G_2 G_3}{1+G}$$

$$\frac{C}{u_2}=\frac{G_3}{1+G}$$

$$\frac{B}{u_2}=\frac{G_3 H_1 H_2}{1+G}$$

$$G=G_1 G_2 G_3\ H_1 H_2\ G_c$$

مثال: در شکل‌های روبه‌رو نسبت $\frac{C}{R}$ برابر است با (کنکور ۸۲)



۱) $\frac{G_1 G_2 G_3}{1+G_1 G_2 H_2 - G_1 G_2 G_3 H_1}$

۲) $\frac{G_1 G_2 G_3}{1+G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2 G_3 H_2}$

۳) $\frac{G_1 G_2 G_3}{1+G_1 G_2 H_2 + G_2 G_3 H_1}$

۴) $\frac{G_1 G_2 G_3}{1+G_1 G_2 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1}$

حل:

$$\left[R - CH_1 - \frac{C}{G_3}H_2\right] G_1 G_2 G_3 = C$$

$$\frac{C}{R}=\frac{G_1 G_2 G_3}{1+G_1 G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 H_2}$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

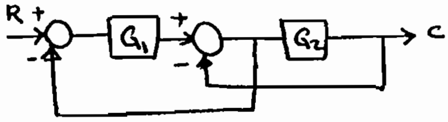
راه‌حل کنکوری:

اگر H_2 را صفر قرار دهیم در نتیجه:

$$\frac{C}{R}=\frac{G_1G_2G_3}{1+G_1G_2G_3H_1}$$

با مقایسه با گزینه‌ها معلوم می‌شود فقط گزینه ۴ می‌تواند درست باشد.

مثال: در نمودار جعبه‌ای روبه‌رو تابع انتقال $\frac{C}{R}$ کدام است؟



۱) $\frac{G_1+G_2}{1+G_1+G_2}$ ۲) $\frac{G_1G_2}{1+G_1+G_2}$

۳) $\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2}$ ۴) $\frac{G_1+G_2}{1+G_1G_2}$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{C}{R}=\frac{G_1G_2}{1+G_1+G_2}$$

$$\left[\left\{R-\frac{C}{G_2}\right\}G_1-C\right]G_2=C$$

۴ـ۴ـ افت کنترل (offset)

افت کنترل یا خطای حالت ماندگار مطابق معادله زیر تعریف می‌شود:

$$offset=R(\infty)-C(\infty)$$

با اعمال قضیه مقدار نهایی داریم:

$$offset=\underset{S\to 0}{\text{حد}}\ SR(s)-SC(s)$$

در کنترل فرآیند با دو نوع مسئله سروکار داریم:

۱) حالتی‌که تغییر در مقدار مقرر ایجاد می‌شود که به مسئله سروو معروف است.

در این حالت افت کنترل به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$offset=\underset{S\to 0}{\text{حد}}\ SR(s)\left[1-\frac{C}{R}\right]$$

۲) حالتی‌که تغییر در بار داریم که به مسئله تنظیم کننده معروف است. در این حالت افت کنترل مطابق معادله زیر بیان می‌شود:

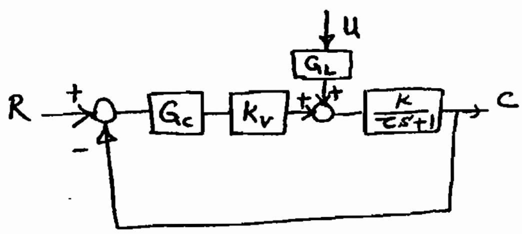
$$R(s)=0\quad,\quad u(s)\neq 0$$

$$offset=-SC(s)=-Su(s)\ \frac{C(s)}{u(s)}$$

مثال: افت کنترل سیستم مدار بسته روبه‌رو را محاسبه کنید در صورتی‌که:

۱) یک تغییر پله‌ای واحد در مقدار مقرر حاصل شود.

۲) یک تغییر پله‌ای واحد در بار ایجاد شود.



$$G_c=K_c \qquad G_L=\frac{K_L}{\tau_L S+1}$$

در محاسبه offset دقت شود چون در انتها S=0 قرار داده می‌شود، پس بهتر است از همان ابتدا S را برابر صفر قرار دهیم.

$$offset=\underset{S\to 0}{S\times\frac{1}{S}}\times\left[1-\frac{K_ck_vK}{1+K_cK_vK}\right]=\frac{1}{1+K_cK_vK}$$

چنان‌که از معادله بالا معلوم است با ازدیاد بهره کنترلر (K_c) افت کنترل کاهش می‌یابد. اگر تغییر در بار باشد:

$$\text{offset} = -S\times\frac{1}{S}\times\frac{C}{u} = -S\times\frac{1}{S}\times\frac{K_L K}{1+K_c K_v K} = -\frac{K_L K}{1+K_c K_v K}$$

مثال: مثال قبلی را در صورتی‌که کنترلر را با یک کنترلر تناسبی مشتقی عوض کنیم حل کنید.

حل: در این حالت افت کنترل تغییر نخواهد کرد چرا که حد $K_c(1+\tau_D S)$ با حد K_c وقتی $S\to 0$ برابر است، بنابراین می‌توان گفت عامل مشتقی اثری بر offset ندارد.

مثال: مثال قبلی را با کنترلر تناسبی انتگرالی حل کنید.

در این حالت در معادله مربوط به کنترلر یعنی $K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I S}\right)$ نمی‌توان از ابتدا S را مساوی صفر قرار داد چون مقدار تابع بی‌نهایت می‌شود بنابراین قرار دادن $S=0$ را به انتهای حل منتقل می‌کنیم:

$$\text{offset} = \lim S\times\frac{1}{S}\left[1-\frac{K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I S}\right)K_v K}{1+K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I S}\right)K_v K}\right] = \lim_{S\to 0} 1\times\left[1-\frac{K_c K_v K(\tau_I S+1)}{\tau_I S+K_c K_v K\,\tau_I S+K_c K_v K}\right]=1-1=0$$

نکته: عامل انتگرالی $\left(\frac{1}{S}\right)$ موجب حذف offset می‌شود.

مثال: اگر تابع تبدیل مدار بسته سیستمی به صورت $\frac{K}{\tau S+1}$ باشد اگر یک تغییر خطی در ورودی به صورت $R(t)=t$ ایجاد شود افت کنترل را محاسبه کنید.

$$\text{offset} = \lim_{S\to 0} SR(s)\left[1-\frac{C}{R}\right] = \lim S\times\frac{1}{S^2}\left[1-\frac{K}{\tau S+1}\right] = \lim \frac{1}{S}\times\frac{\tau S+1-K}{\tau S+1}$$

اکنون دو حالت را در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $K=1$ باشد در این صورت:

$$\text{offset} = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\,\frac{\tau S}{\tau S+1} = \tau$$

۲) اگر $K\neq 1$ باشد در این صورت

$$\text{offset} = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\,\frac{\tau S+1-K}{\tau S+1} = \pm\infty$$

$+\infty$ برای $K<1$ و $-\infty$ برای $K>1$ می‌باشد.

مثال: مثال فوق را برای حالتی‌که $\frac{C}{R}=\frac{K}{\tau^2S^2+2\xi\tau S+1}$ حل کنید.

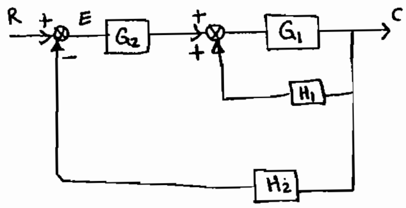
$$\text{offset} = \lim_{S\to 0} S\times\frac{1}{S^2}\times\left[1-\frac{K}{\tau^2S^2+2\xi\tau S+1}\right] = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\,\frac{\tau^2S^2+2\xi\tau S+1-K}{\tau^2S^2+2\xi\tau S+1}$$

۱) اگر $K=1$ باشد در این صورت: $\text{offset} = 2\xi\tau$

۲) اگر $K\neq 1$ باشد در این صورت: $\text{offset} = \pm\infty$

۴ـ ۵ـ تست‌های فصل چهارم

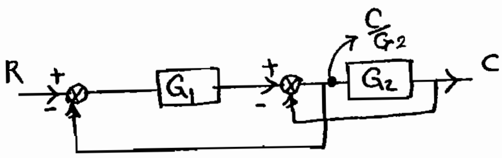
۱ ـ برای سیستم کنترل روبه‌رو نسبت $\frac{E}{R}$ برابر است با:



۱) $\frac{1-G_1H_1}{1-G_1H_1+G_1G_2H_2}$ ‏ ۲) $\frac{G_1G_2}{1-G_1H_1+G_1G_2H_2}$

۳) $\frac{G_1G_2H_1}{1-G_1H_1+G_1G_2H_1}$ ‏ ۴) $\frac{G_1G_2H_2}{1+G_1H_1-G_1G_2H_2}$

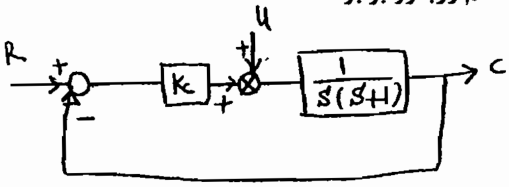
۲ ـ در شکل روبه‌رو نسبت $\frac{C}{R}$ برابر است با:



۱) $\frac{G_1+G_2}{1+G_1+G_2}$ ‏ ۲) $\frac{G_1G_2}{1+G_1+G_2}$

۳) $\frac{G_1+G_2}{1+G_1G_2}$ ‏ ۴) $\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2}$

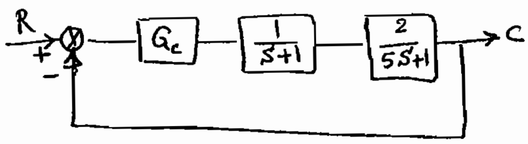
۳ ـ مقدار افت کنترل برای یک تغییر پله‌ای به اندازه 3 واحد در مقدار مقرر سیستم روبه‌رو برابر است.



۱) صفر ‏ ۲) 3

۳) $|\text{offset}|<3$ ‏ ۴) $|\text{offset}|>0$

۴ ـ در شکل روبه‌رو از یک کنترلر تناسبی استفاده می‌شود در صورتی‌که یک تغییر پله‌ای واحد در مقدار مقرر افت کنترلی به اندازه 0.2 ایجاد کند بهره کنترلر عبارت است از:



۱) $K_c=1$ ‏ ۲) $K_c=2$

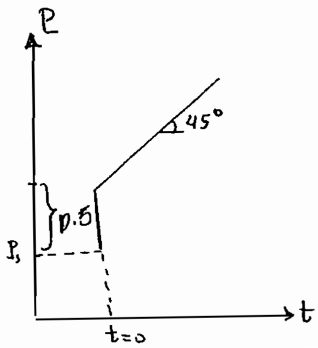
۳) $K_c=3$ ‏ ۴) $K_c=4$

۵ ـ نحوه تغییرات میزان جریان عبوری از یک شیر کنترلر و فشار اعمال شده بر موتور شیر کنترل به صورت $Q=3(P-3)$ اسـت. نوع شیر و حداکثر دبی عبوری برابر است با:

۱) $Q=51\frac{\text{lit}}{\text{min}}$, Air to open ‏ ۲) $Q=36\frac{\text{lit}}{\text{min}}$, Air to close

۳) $Q=51\frac{\text{lit}}{\text{min}}$, Air to close ‏ ۴) $Q=36\frac{\text{lit}}{\text{min}}$, Air to open

۶ ـ عکس‌العمل یک کنترلر به یک ورودی خطی خطا بـه صـورت $\varepsilon(t)=t$ مطـابق شـکل روبه‌رو است نوع کنترلر و بهره آن عبارتند از:



۱) کنترلر PI با بهره 2

۲) کنترلر PI با بهره 1

۳) کنترلر PD با بهره 0.5

۴) کنترلر PD با بهره 2

$R - CH_2 = E$

۴ـ ۶ـ پاسخ تست‌های پاسخ فصل چهارم

$\frac{C}{E} = \frac{G_2 G_1}{1+G_1 H_1} \Rightarrow C = \frac{EG_1G_1}{1-G_1H_1} \Rightarrow R - \frac{EG_1G_2H_2}{1+G_2H_1} = E$

۱ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد

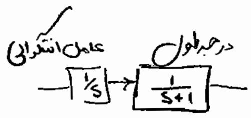
راه‌حل کوتاه: اگر $H_2 = 0$ قرار داده شود $\frac{E}{R} = 1$ خواهد شد که نشان می‌دهد فقط گزینه ۱ می‌تواند صحیح باشد.

۲ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد

$$\left\{\left(R - \frac{C}{G_2}\right)G_1 - C\right\}G_2 = C$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1\,G_2}{1+G_1+G_2}$$

۳ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد



$$\text{offset} = SR(s)\left(1 - \frac{C}{R}\right) = S \times \frac{3}{S}\left[1 - \frac{\frac{K_c}{S(S+1)}}{1 + \frac{K_c}{S(S+1)}}\right] = 0$$

راه‌حل کوتاه: چون سیستم دارای غامل انتگرالی است پس offset=0 می‌شود.

۴ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد

$$\text{offset} = SR(s)\left[1 - \frac{C}{R}\right] = S \times \frac{1}{S}\left[1 - \frac{2K_c}{1+2K_c}\right] = \frac{1}{1+2K_c} = 0.2 \to K_c = 2$$

۵ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد

$P \uparrow \Rightarrow Q \uparrow$ Air to open

$Q_{max} = 3(15-3) = 36\, \text{lit}/\text{min}$

۶ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد

$$\frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_c\left[1 + \tau_D S + \frac{1}{\tau_I S}\right]$$

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{s^2} \to P(s) = K_c\left[\frac{1}{S^2} + \frac{\tau_D}{S} + \frac{1}{\tau_I S^3}\right]$$

چون جواب خطی است، پس کنترلر از نوع PD است.

$K_c = 1$ شیب $=1$

عرض $=$ $\tau_D K_c = 0.5 \to \tau_D = 0.5$

فصل پنجم

پایداری، آزمون روث، مکان هندسی ریشه‌ها

پایداری

سیستم پایدار سیستمی است که به ازای تمام ورودی‌های محدود، پاسخ خروجی محدودی داشته باشد و به ازای یک ورودی نامحدود پاسخ نامحدودی داشته باشد.

یک سیستم کنترل زمانی ناپایدار است که یکی از ریشه‌های معادله مشخصه آن روی محور موهومی یا در سمت راست محور موهومی قرار گرفته باشد. در غیر این صورت سیستم پایدار خواهد بود.

معادله مشخصه سیستمی که تابع مدار باز آن برابر GH باشد به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\text{معادله مشخصه} = 1+GH(s)$$

که در واقع همان مخرج تابع مدار بسته است. برای بررسی پایداری روش‌های مختلفی وجود دارد. که عبارتند از:

۱ـ آزمون روث (Routh Test)

۲ـ مکان هندسی ریشه‌ها (Root Locus)

۳ـ پاسخ فرکانسی و دیاگرام بد (Bode Diagram)

۴ـ دیاگرام نایکویست (Nyquist Diagram)

۲ـ ۵ـ آزمون روث *(Routh Test)*

آزمون روث یک روش صرفاً جبری برای تعیین عده ریشه‌های ناپایدار سیستمی است که معادله مشخصه آن یک چند جمله‌ای با ضرایب ثابت می‌باشد.

$$1+GH = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots\dots + a_1 S + a_0$$

که در آن a_n عددی مثبت است در غیر این صورت باید طرفین معادله در (-1) ضرب می‌شود تا ضریب S^n مثبت باشد.

معیار پایداری روث به شرح ذیل بیان می‌شود:

۱ـ چند جمله‌ای 1+GH را به صورت نزولی مرتب می‌کنیم.

۲ـ ضرایب جملاتی را که نداریم صفر قرار می‌دهیم.

۳ـ جدول روث را به فرم زیر تشکیل می‌دهیم.

1	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
2	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
3	b_1	b_2	b_3
$\vdots$	c_1	c_2	
$n-1$	$\vdots$		
n	$\vdots$		
$n+1$	$\vdots$		

عناصر هر سطر در جدول روث به وسیله دو سطر قبلی محاسبه می‌شوند از این رو:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3}a_n}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_{n-5}a_n}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1a_{n-3} - b_2a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1a_{n-5} - b_3a_{n-1}}{b_2}$$

۱) شرط لازم و کافی برای پایداری آن است که تمام عناصر ستون اول آزمون روث، یعنی a_n, a_{n-1}, b_1, c_1 ...... همگی مثبت باشند.

۲) اگر بعضی از عناصر ستون اول منفی باشند به تعداد تغییر علامت‌های ستون اول، ریشه ناپایدارکننده داریم.

۳) اگر سطر n ام جدول روث صفر شود، سیستم در مرز پایداری و ناپایداری است و در این حالت مقدار این ریشه‌های واقع بر روی محور موهومی از حل معادله $CS^2 + D = 0$ بدست می‌آید که در آن C و D ضرایب سطر $n-1$ ام جدول روث هستند.

مثال: تابع تبدیل مدار بسته سیستمی به صورت $1+GH = S^4 + 3S^3 + 2S^2 + 1$ می‌باشد در مورد پایداری این سیستم بحث کنید.

طبق آزمون روث و با تشکیل جدول روث داریم:

1	2	1
3	0	
$\frac{3\times2-0\times1}{3}$	$\frac{3\times1-0\times1}{3}$	
$-\frac{3}{2}$		
1		

$\rightarrow$

1
3
2
$-\frac{3}{2}$
1

با توجه به عناصر ستون اول جدول روث در می‌یابیم که دوبار تغییر علامت داریم، در نتیجه می‌توان گفت این سیستم دارای دو ریشه ناپایدار کننده است.

مثال: تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $\dfrac{K}{S(S+1)(S+2)}$ است. در مورد K پایداری سیستم مدار بسته بحث کنید.

$$1+GH=1+\frac{K}{S(S+1)(S+2)}=0$$

$$S(S+1)(S+2)+K=0$$

$$S^3+3S^2+2S+K=0$$

با تشکیل جدول روث داریم:

$$\begin{array}{l|ll}
 & 1 & 2 \\
 & 3 & k \\
 & \dfrac{6-K}{3} & \\
 & K &
\end{array}
\qquad \begin{array}{l} \to 6-K>0 \to K<6 \\ K>0 \end{array}$$

بنابراین سیستم مدار بسته در صورتی پایدار است که:

$$0<K<6$$

مثال: در مثال فوق K مرز پایداری و نیز ریشه‌های مرز پایداری را محاسبه کنید.

سطر n ام $=0$ $\rightarrow$ سیستم در مرز پایداری است

$$6-K=0 \to K=6$$

از سطر $n-1$ ام $\to 3S^2+6=0$

$$S=\pm 2i$$

مثال: اگر معادله مشخصه سیستمی به صورت $1+GH=S^4+2S^3+2S^2+4S+1$ باشد، در مورد پایداری آن بحث کنید.

با تشکیل جدول روث خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l|lll}
 & 1 & 2 & 1 \\
 & 2 & 4 & \\
 & 0 & 1 &
\end{array}$$

با تشکیل جدول روث متوجه می‌شویم که در ستون اول سطر سوم صفر ظاهر می‌شود، بنابراین ادامه تشکیل جدول روث غیرممکن است. برای حل این مشکل چون تمام اعضای این سطر صفر نشده است صفر را به ε (کوچکترین عدد حقیقی و مثبت) تبدیل می‌کنیم و در انتهای تشکیل جدول روث برای پایداری $\varepsilon \to 0$ میل می‌دهیم.

$$\begin{array}{l|lll}
 & 1 & 2 & 1 \\
 & 2 & 4 & \\
 & \varepsilon & 1 & \\
 & \dfrac{4\varepsilon-2}{\varepsilon} & & \\
 & 1 & &
\end{array}
\qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{4\varepsilon-2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 4-\frac{2}{\varepsilon}=-\infty$$

در نتیجه می‌توان گفت $\dfrac{4\varepsilon-2}{\varepsilon}$ عددی منفی است و بنابراین دو ریشه ناپایدار کننده داریم.

مثال: اگر معادله مشخصه سیستمی به صورت $1+GH=S^5+2S^4+2S^3+4S^2+S+2$ باشد در مورد پایداری آن بحث کنید.

S^5	1	2	1
S^4	2	4	2
	0	0	

با تشکیل جدول به فرم بالا در می‌یابیم که یک سطر صفر ظاهر می‌شود در این حالت چون همه اعضای سطر سوم صفر شده است با تبدیل صفر به ε مشکل حل نمی‌شود. بنابراین P(s) (چند جمله‌ای متناظر سطر ماقبل سطری که همه اعضای آن صفر شده است) را تشکیل می‌دهیم:

$$P(s)=2S^4+4S^2+2$$

از این چند جمله‌ای مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dP(s)}{dS}=8S^3+8S$$

اکنون ضرایب چند جمله‌ای حاصل از $\frac{dP}{dS}$ را به جای ضرایب سطری که صفر شده است قرار می‌دهیم؛ و جدول روث را ادامه می‌دهیم:

1	2	1
2	4	2
8	8	
2	2	
0		
2		

چون سطر n ام صفر شده است، پس سیستم در مرز پایداری و ناپایداری است.

نکته: توجه شود که آزمون روث فقط برای بررسی پایداری سیستم‌هایی کاربرد دارد که معادله مشخصه آنها یک چندجمله‌ای با ضرایب ثابت از S باشد و به عنوان مثال اگر معادله مشخصه حاوی ترم‌هایی چون $e^{-\tau S}$ باشد پایداری آن با آزمون روث قابل بررسی نیست.

۵ـ ۳ـ مکان هندسی ریشه‌ها

ترسیم مکان هندسی ریشه‌ها یک روش کیفی برای بررسی وضعیت ریشه‌های معادله $1+GH=0$ در صفحه مختصات موهومی است.

قواعد رسم مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستم فیدبک منفی به شرح ذیل است:

قاعده ۱: تابع مدار باز سیستم (GH(s)) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$GH(s)=\frac{KN(s)}{D(s)}$$

که در آن با صفر قرار دادن N(s) صفرهای مکان (Zero) را به دست می‌آوریم؛ و با صفر قرار دادن D(s) قطب‌های مدار باز (Pole) را به دست می‌آوریم:

$$N(s)=(S-Z_1)...(S-Z_m)$$
$$D(s)=(S-P_1)...(S-P_n)$$

یعنی مکان هندسی دارای m تا صفر و n تا قطب می‌باشد. صفرها را در مکان با علامت o و قطب‌ها را با علامت × نشان می‌دهیم.

قاعده ۲: مکان از قطب آغاز می‌شود و به صفر ختم می‌شود. اما چون عده صفرها و قطب‌ها مساوی نیستند لذا $(n-m)$ تا از قطب‌ها به صفرهایی در بی‌نهایت ختم می‌شوند و در امتداد مجانب‌ها قرار می‌گیرند. لذا مکان دارای m_n مجانب است.

قاعده ۳: زاویه مجانب‌ها با محور حقیقی از معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\theta=\frac{(2K+1)\pi}{n-m}$$

که در معادله فوق:

$$K=0,1,.....,n-m$$

قاعده ۴: محل همرسی مجانب‌ها از معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\gamma=\frac{\sum P_i-\sum Z_i}{n-m}$$

محل همرسی مجانب‌ها همواره بر روی محور حقیقی واقع است. (اثبات به عهده خواننده)

قاعده ۵: آن قسمت از محور حقیقی جز مکان است که تعداد صفرها و قطب‌های سمت راست آن فرد باشد.

قاعده ۶: نقطه جدایی، نقطه‌ای است که در آن مکان هندسی ریشه‌ها که از قطب‌های مجاور ورودی محور حقیقی شروع شده‌اند به هم برخورد کرده و سپس محور حقیقی را ترک می‌کنند این نقطه از حل معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\sum\frac{1}{S-Z_i}=\sum\frac{1}{S-P_i}$$

مثال: تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s)=\frac{k}{S(S+1)(S+2)}$ می‌باشد مکان هندسی آن رسم کنید:

تعداد صفرها $=0$

قطب‌ها $-2\ ,\ -1\ ,\ 0$

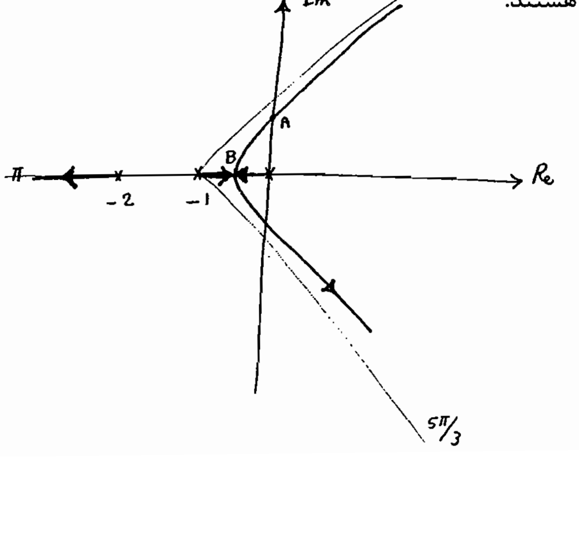
تعداد قطب‌ها $=3$

بنابراین سیستم دارای $n-m=3$ مجانب می‌باشد که زاویه محل همرسی آنها به ترتیب برابر است با:

$$\theta=\frac{(2K+1)\pi}{3-0}=\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}$$

$$\gamma=\frac{(0-1-2)-0}{3-0}=-1$$

نقاط $-1<S<0$ و $S<-2$ از محور حقیقی جزو مکان هندسی ریشه‌ها هستند.



تحلیل مکان

الف) در مورد پایداری این سیستم می‌توان گفت:

سیستم پایدار است $0<K<K_A \Rightarrow$

سیستم دارای 2 ریشه ناپایدار است $K_A<K \Rightarrow$

که K_A (K مرز پایداری) از جدول روث بدست می‌آید. (در مثال‌های قبلی بررسی نشد و مقدار آن برابر 6 است.)

ب) در مورد نوسانی و غیر نوسانی بودن سیستم می‌توان گفت:

پاسخ سیستم غیر نوسانی است، چون ریشه‌ها حقیقی هستند $0<K<K_B \Rightarrow$

پاسخ سیستم نوسانی است، چون دو ریشه مکان موهومی هستند $K_B<K \Rightarrow$

K_B همان K در نقطه جدایی است که مختصات آن از حل معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{S}+\frac{1}{S+1}+\frac{1}{S+2}=0$$

توجه شود که معادله فوق دارای سه ریشه است. اما آن ریشه‌ای قابل قبول است که بین صفر و 1− باشد.

مثال: مکان هندسی ریشه‌های سیستمی که تابع مدار باز آن به صورت $GH(s)=\frac{K(S+6)}{S(S+2)}$ است را رسم کنید.

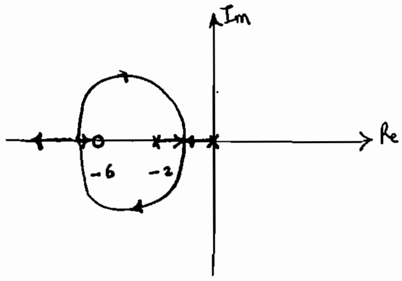
صفرهای مکان $S+6=0 \rightarrow S=-6$

قطب‌های مکان $S(S+2)=0 \rightarrow S=0,-2$

تعداد مجانب‌ها $=n-m=2-1=1$

$$\theta=\frac{(2K+1)\pi}{n-m}=\pi$$

نقاط ناحیه $-2<S<0$ و $S<-6$ جز مکان هندسی است.



تحلیل مکان:

ـ با توجه به مکان فوق می‌توان گفت: که به ازای جمیع مقادیر K سیستم پایدار است. این امر با آزمون روث هم قابل بررسی است.

ـ پاسخ سیستم مدار بسته در بهره‌های خیلی کم و خیلی زیاد غیرنوسانی است، ولی در بهره‌های متوسط پاسخ سیستم نوسانی است. (با توجه به داشتن ریشه‌های موهومی در این ناحیه)

مثال: مکان هندسی ریشه‌های سیستمی که تابع مدار باز آن به صورت $\frac{K(S+1)}{S^2}$ می‌باشد را رسم کنید.

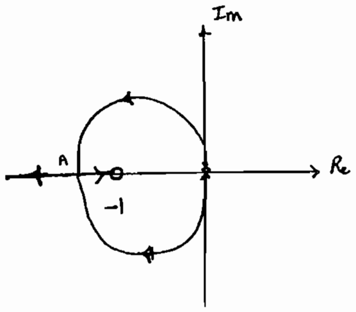
صفرهای مکان $m=1$ ، $S+1=0 \rightarrow S=-1$

قطب‌های مکان $n=2$ ، $S^2=0 \rightarrow S=0,0$

تعداد مجانب‌ها $=n-m=2-1=1$

$$\theta=\frac{(2K+1)\pi}{n-m}=\pi$$

ناحیه $S<-1$ روی محور حقیقی جز مکان هندسی ریشه‌ها است.



مختصات نقطه A از معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\sum\frac{1}{S-Z_i}=\sum\frac{1}{S-P_i}$$

$$\frac{1}{S+1}=\frac{1}{S}+\frac{1}{S}$$

$$\frac{1}{S+1}=\frac{2}{S}$$

$$S=2S+2$$

$$S_A=-2$$

مقدار K نقطه A با قرار دادن مقدار S_A در معادله مشخصه حاصل می‌شود:

$$1+GH=0\rightarrow 1+\frac{K(S+1)}{S^2}=0$$

$$1+\frac{K_A(-2+1)}{(-2)^2}=0$$

$$K_A=4$$

تحلیل مکان:

- سیستم مدار بسته به ازای جمیع مقادیر K پایدار است چون ریشه‌ای در سمت راست محور موهومی ندارد.
- سیستم مدار بسته در بهره‌های کم $(0<K<4)$ نوسانی و در بهره‌های زیاد $(K>4)$ غیرنوسانی است.

قواعد رسم مکان هندسی سیستم فیدبک مثبت

$(2K+1)\pi \Rightarrow (2K)\pi$

در این حالت قواعد مشابه فیدبک منفی است به جز دو استثنا (قاعده ۳ و ۵)

قاعده۳: زاویه مجانب‌ها با محور حقیقی از معادله زیر حاصل می‌شود.

$$\theta=\frac{2K\pi}{n-m}\qquad ,\ K=0,1,\dots,n-m$$

قاعده ۵: آن قسمت از محور حقیقی جز مکان هندسی است که تعداد قطب‌ها و صفرهای سمت راست آن زوج باشد.

قواعد رسم مکان هندسی برای سیستم‌های دارای ترم تأخیر زمانی

اگر سیستم دارای ترم تأخیر زمانی $\left(e^{-\tau_d S}\right)$ باشد. از تقریب pad به فرم زیر استفاده می‌کنیم:

$$e^{-\tau_d S}=\frac{e^{-\frac{\tau_d}{2}S}}{e^{\frac{\tau_d}{2}S}}=\frac{1-\frac{\tau_d}{2}S}{1+\frac{\tau_d}{2}S}=-\frac{S-\frac{2}{\tau_d}}{S+\frac{2}{\tau_d}}$$

اولاً: ملاحظه می‌شود که ترم تأخیر زمانی یک صفر در $\frac{2}{\tau_d}$ و یک قطب در $-\frac{2}{\tau_d}$ به مکان هندسی ریشه‌ها اضافه می‌کند و نیز علامت فیدبک را هم عوض می‌کند.

ثانیاً: با توجه به اضافه شدن صفر در سمت راست محور موهومی $\left(\frac{2}{\tau_d}\right)$ و نظر به آن‌که مکان هندسی به صفر ختم می‌شود، لذا وجود ترم تأخیر زمانی برپایداری سیستم اثر خواهد داشت، به این ترتیب که، یا به‌طور کل پاسخ سیستم را ناپایدار می‌کند یا K حد پایداری را کاهش می‌دهد.

اثر کنترل‌ها بر مکان هندسی ریشه‌ها

الف) اثر عامل مشتقی $\left(K_C\left(1+\tau_D S\right)\right)$

عامل مشتقی موجب افزوده شدن یک صفر به مکان در $\left(-\frac{1}{\tau_D}\right)$ می‌شود.

لذا:

۱ـ عامل مشتقی موجب بهبود پایداری سیستم می‌شود یعنی یا به‌طور کل سیستم را پایدار می‌کند یا K حد پایداری را افزایش می‌دهد.

۲ـ عامل مشتقی موجب ازدیاد سرعت رسپونس می‌شود.

۳ـ عامل مشتقی موجب کاهش تعداد مجانب ها و افزایش زاویه آن‌ها با محور حقیقی می‌شود.

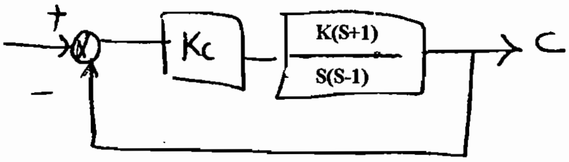
ب) عامل انتگرالی

$$K_C\left(1+\frac{1}{\tau_I S}\right)=K_C\frac{1+\tau_I S}{\tau_I S}$$

عامل انتگرالی موجب افزوده شدن یک صفر در $\left(-\frac{1}{\tau_I}\right)$ و یک قطب در صفر، به مکان می‌شود؛ لذا تعداد مجانب‌ها و زاویه آن‌ها را تغییر نمی‌دهد، ولی محل همرسی مجانب‌ها را به سمت راست محور موهومی شیفت می‌دهد.

۵-۴- تست‌های فصل پنجم

۱- در مدار روبه‌رو کدام عبارت صحیح‌تر است؟



۱) سیستم همواره پایدار است.

۲) سیستم همواره ناپایدار است.

۳) در بهره کم پایدار و در بهره زیاد ناپایدار است.

۴) سیستم در بهره کم ناپایدار در بهره زیاد پایدار است.

۲- معادله مشخصه سیستمی به صورت $S^4+S^3+S^2+4S+6=0$ است کدام مورد در مورد پایداری آن صحیح است؟

۱) همواره پایدار

۲) همواره ناپایدار

۳) دو ریشه ناپایدار کننده

۴) سیستم در بهره‌های پایین ناپایدار و در بهره‌های بالا پایدار می‌باشد.

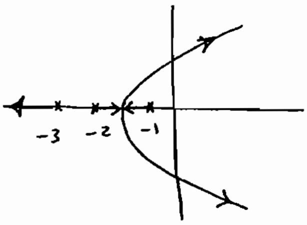
۳- تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $\frac{K}{S(S+2)(S+3)}$ است K حد پایداری این سیستم برابر است با:

۱) $K>0$ ۲) $K>30$ ۳) $0<K<30$ ۴) $K<5$

۴- در مسئله قبل ریشه‌های مرز پایداری عبارتند از:

۱) $\pm\sqrt{6}i$ ۲) $\pm\sqrt{30}i$ ۳) $\pm\sqrt{5}i$ ۴) $\pm 6i$

۵- مکان هندسی ریشه‌های سیستمی مطابق شکل روبه‌رو است در مورد پایداری این سیستم می‌توان گفت:



۱) همواره پایدار است.

۲) همواره ناپایدار است

۳) در بهره کم پایدار در بهره زیاد ناپایدار است

۴) در بهره کم ناپایدار در بهره زیاد پایدار است.

۶- در مسئله فوق در مورد نوسانی و غیرنوسانی بودن پاسخ می‌توان گفت:

۱) همواره نوسانی است. ۲) همواره غیرنوسانی است.

۳) در بهره کم نوسانی در بهره زیاد غیرنوسانی ۴) در بهره زیاد نوسانی در بهره کم غیرنوسانی

۷- در مسئله فوق محل همرسی مجانب‌ها کجاست؟

۱) $S=-1$ ۲) $S=-2$ ۳) $S=-3$ ۴) مجانب ندارد

۸- در مسئله فوق نقطه جدایی کجاست؟

۱) بین صفر و -1 ۲) بین -1 و -2 ۳) بین -2 و -3 ۴) نقطه جدایی ندارد

۹- محل همرسی مجانب‌ها؟

۱) همواره روی محور حقیقی است ۲) همواره روی محور موهومی است

۳) گاهی روی محور حقیقی و گاهی روی محور موهومی است ۴) نمی‌توان قضاوت کرد

پاسخ تست‌های فصل پنجم

۱ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

جدول روث	
1	k
1_k	
k	

$$1+GH=1+\frac{K(S+1)}{S(S-1)}=0$$

$$S(S-1)+K(S+1)=0$$

$$S^2+(K-1)S+K=0$$

شرط پایداری $\therefore\begin{cases}K>0\\K-1>0\end{cases}\rightarrow K>1$

در بهره‌های کم ناپایدار $(0<K<1)$ و در بهره‌های زیاد پایدار است.

۲ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

1	1	6
1	4	
_3	6	
6		
6		

سیستم دارای ۲ ریشه ناپایدار کننده است. $\rightarrow$

۳ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

1	6
5	K
$\frac{30-K}{5}$	
K	

$$1+GH=1+\frac{k}{S(S+2)(S+3)}$$

$$S(S+2)(S+3)+K=0$$

$$S^3+5S^2+6S+K=0$$

شرط پایداری $\therefore\begin{cases}30-K>0\\K>0\end{cases}$

در نتیجه $0<K<30$

۴ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

سطر $n-1$ ام $=0\rightarrow 5S^2+30=0\rightarrow S=\pm\sqrt{6}i$

۵ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۶ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۷ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\gamma=\frac{\sum P_i-\sum Z_i}{n-m}=\frac{(-1-2-3)-0}{3-0}=-2$$

۸ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۹ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

اگر در محاسبه $\sum P_i$ و $\sum Z_i$ قطب مختلط و صفر مختلط داشته باشیم از آنجا که مـزدوج آن قطـب و صـفر هـم حضـور دارنـد، بنابراین $\sum P_i$ و $\sum Z_i$ همواره اعدادی حقیقی هستند.

فصل ششم

پاسخ فرکانسی، دیاگرام‌های بد و نایکویست

پاسخ فرکانسی

پاسخ فرکانسی در واقع پاسخ یک سیستم به یک ورودی سینوسی است.

$$\frac{y(s)}{x(s)}=G(s)$$

$$x(t)=A\sin\omega t$$

$$x(s)=\frac{A\omega}{S^2+\omega^2}$$

$$y(t)=?$$

برای یافتن $y(t)$ باید لاپلاس معکوس $y(s)$ محاسبه شود:

$$y(s)=\frac{A\omega}{S^2+\omega^2}G(s)$$

در حالت کلی پاسخ‌گذرای هر سیستم به یک ورودی سینوسی به فرم زیر است:

$$y(t)=AR.A\sin(\omega t+\phi)$$

که در معادله فوق:

AR: نسبت دامنه پاسخ به دامنه ورودی است.

ϕ : تقدم و تاخیر پاسخ نسبت به ورودی می‌باشد.

AR و ϕ به روش زیر محاسبه می‌شوند:

۱ـ در تابع تبدیل باز سیستم g(s) به جای $S=i\omega$ قرار دهید.

۲ـ مقادیر AR و ϕ از معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\left.\begin{aligned}&S=i\omega \Rightarrow G(i\omega)=a+bi\\&AR=\left|G(i\omega)\right|=\sqrt{a^2+b^2}\\&\phi=\measuredangle G(i\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}\right\}$$

مثال: پاسخ یک سیستم درجه اول را به یک ورودی سینوسی به فرم $x(t)=A\sin\omega t$ را محاسبه کنید.

$$G(S)=\frac{1}{\tau S+1}$$

$$G(i\omega)=\frac{1}{\tau\omega i+1}=\frac{1}{1+\tau\omega i}\times\frac{1-\tau\omega i}{1-\tau\omega i}=\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}-\frac{\omega\tau}{1+\tau^2\omega^2}i$$

$$AR=\sqrt{\left[\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}\right]^2+\left[\frac{-\omega\tau}{1+\tau^2\omega^2}\right]^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{-\omega\tau}{1+\tau^2\omega^2}}{\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}}\right)$$

$$\phi=\tan^{-1}(-\omega\tau)$$

در نتیجه:

$$y(t)=\frac{A}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\sin\left[\omega t+\tan^{-1}(-\omega\tau)\right]$$

نکته: دامنه پاسخ یک سیستم درجه اول به یک ورودی سینوسی همواره از دامنه ورودی کوچک‌تر است.

مثال: پاسخ یک سیستم درجه ۲ را به یک ورودی سینوسی پیدا کنید.

$$G(S)=\frac{1}{\tau^2S^2+2\xi\tau S+1}$$

$$G(i\omega)=\frac{1}{-\tau^2\omega^2+2\xi\tau\omega i+1}=\frac{1}{(1-\tau^2\omega^2)+2\xi\tau\omega i}\times\frac{(1-\tau^2\omega^2)-2\xi\omega\tau i}{(1-\tau^2\omega^2)-2\xi\omega\tau i}$$

$$=\frac{1-\tau^2\omega^2}{(1-\tau^2\omega^2)^2+(2\xi\omega\tau)^2}-\frac{2\xi\omega\tau}{(1-\tau^2\omega^2)^2+(2\xi\omega\tau)^2}i=a+bi$$

در نتیجه:

$$AR=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{(1-\tau^2\omega^2)^2+(2\xi\omega\tau)^2}}$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)=-\tan^{-1}\frac{2\xi\omega\tau}{1-\tau^2\omega^2}$$

$$y(t)=\frac{A}{\sqrt{(1-\tau^2\omega^2)^2+(2\xi\omega\tau)^2}}\sin(\omega t+\phi)$$

نکته: دامنه پاسخ یک سیستم درجه ۲ به یک ورودی سینوسی می‌تواند بزرگ‌تر، مساوی و یا کوچک‌تر از دامنه ورودی باشد. (بسته به مقدار ξ)

$\xi<\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow$ دامنه ورودی < دامنه پاسخ $\rightarrow AR>1$

$\xi>\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow$ دامنه ورودی > دامنه پاسخ $\rightarrow AR<1$

مثال: پاسخ سیستمی که تابع تبدیل آن به صورت $G(S)=e^{-\tau_d S}$ است را به یک ورودی سینوسی پیدا کنید.

$$G(S)=e^{-\tau_d S}$$

$$G(i\omega)=e^{-\tau_d \omega i}=\cos(\omega\tau_d)-i\sin(\omega\tau_d)$$

$$AR=\sqrt{\cos^2(\omega\tau_d)+\sin^2(\omega\tau_d)}=1$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{-\sin\omega\tau_d}{\cos\omega\tau_d}\right)=-\omega\tau_d$$

$$y(t)=A\sin(\omega t-\omega\tau_d)$$

نکته: ترم تاخیر زمانی اثری بر دامنه پاسخ ندارد.

مثال: اگر $\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{e^{-\pi S}}{S+1}$ باشد و $x(t)=\sin t$ باشد مقدار $y(t)$ را پیدا کنید.

$$G(s)=\frac{e^{-\pi S}}{S+1} \qquad G(i\omega)=\frac{e^{-\pi\omega i}}{i\omega+1}$$

از قضایای اعداد مختلط داریم:

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

$$|Z_1 Z_2|=|Z_1||Z_2|$$

$$\measuredangle\frac{Z_1}{Z_2}=\measuredangle Z_1-\measuredangle Z_2$$

$$\measuredangle Z_1 Z_2=\measuredangle Z_1+\measuredangle Z_2$$

در نتیجه:

$$AR=|G(i\omega)|=\frac{|e^{-\pi\omega i}|}{|i\omega+1|}=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\phi=\measuredangle G(i\omega)=\frac{\measuredangle e^{-\pi\omega i}}{\measuredangle(i\omega+1)}=-\pi\omega-\tan^{-1}\omega=-\pi-\tan^{-1}1=-\pi-\frac{\pi}{4}=-\frac{5\pi}{4}$$

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t-\frac{5\pi}{4}\right)$$

مثال: اگر $G(s)=\frac{2(S+1)e^{-\frac{\pi}{4}S}}{S(S+2)}$ باشد مقادیر AR و ϕ را محاسبه کنید.

$$G(i\omega)=\frac{2(i\omega+1)e^{-\frac{\pi}{4}\omega i}}{(i\omega)(i\omega+2)}$$

طبق قضایای پیش گفته تبدیلات لاپلاس داریم:

$$AR=|G(i\omega)|=\frac{|2||i\omega+1|\left|e^{-\frac{\pi}{4}i\omega}\right|}{|i\omega||i\omega+2|}$$

$$AR=\frac{2\sqrt{\omega^2+1}\times}{\omega\sqrt{\omega^2+4}}=\frac{2\sqrt{\omega^2+1}}{\omega\sqrt{\omega^2+4}}$$

$$\phi=\measuredangle G(i\omega)=\left\{\measuredangle 2+\measuredangle(i\omega+1)+\measuredangle e^{-\frac{\pi}{4}\omega i}\right\}-\{\measuredangle i\omega+\measuredangle(i\omega+2)\}=0+\tan^{-1}\omega-\frac{\pi}{4}\omega-\tan^{-1}\frac{\omega}{0}-\tan^{-1}\frac{\omega}{2}$$

$$=\tan^{-1}\omega-\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\omega}{2}$$

۶ـ ۲ـ نمودارهای بُد *(Bode Diagram)*

چنان‌که از مثال‌های قبلی برمی‌آید مقادیر AR و ϕ تابع ω (فرکانس نوسان) هستند. نمودارهای بد در واقع نمودارهایی هستند که در آن‌ها تغییرات AR و ϕ برحسب ω نشان داده شده است. در یک منحنی لگاریتم AR برحسب لگاریتم فرکانس رسم شده است و در منحنی دیگر زاویه فاز بر حسب لگاریتم فرکانس رسم می‌شود.

مثال: دیاگرام بد سیستم درجه اول را رسم کنید.

چنان‌که گفته شد:

$$AR=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

$$\phi=-\tan^{-1}\omega\tau$$

$$\log AR=0-\log\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$$

$$\log AR=-\frac{1}{2}\log\left(1+\tau^2\omega^2\right)$$

$\omega\tau\to 0 \Rightarrow \log AR=0\to AR=1$ مجانب Bode در فرکانس‌های کم

$$\omega\tau\to\infty \Rightarrow \omega\tau\gg 1 \Rightarrow \log AR=-\frac{1}{2}\log(\omega\tau)^2$$

$\log AR=-\log\omega\tau$ مجانب Bode در فرکانس‌های زیاد

یعنی AR برحسب $\omega\tau$ در مختصات لگاریتمی خطی با شیب (-1) می‌باشد.

محل تلاقی مجانب‌های بد در فرکانسی به نام فرکانس گوشه اتفاق می‌افتد که مقدار آن از معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases}AR=1\\ \log AR=-\log\omega\tau\end{cases}\rightarrow \omega_{c_0}=\frac{1}{\tau}$$

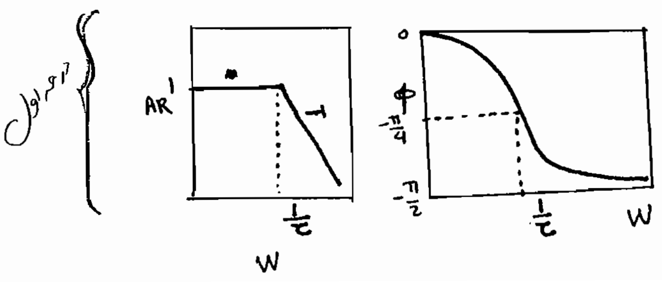
و برای زاویه فاز هم در ω های کم، زیاد و گوشه داریم:

$$\omega\to 0 \Rightarrow \phi=-\tan^{-1}(0)=0$$

$$\omega\to\infty \Rightarrow \phi=\tan^{-1}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\omega=\frac{1}{\tau} \Rightarrow \phi=\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

در شکل زیر دیاگرام مجانب‌های Bode نشان داده شده است.



مثال: دیاگرام Bode سیستم درجه ۲ را به‌دست آورید.

$$AR = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\tau^2\omega^2\right)^2 + \left(2\xi\omega\tau\right)^2}}$$

$$\log AR = -\frac{1}{2}\log\left[\left(1-\tau^2\omega^2\right)^2 + \left(2\xi\omega\tau\right)^2\right]$$

$$\omega \to 0 \quad \Rightarrow \quad \log AR = 0 \quad \Rightarrow \quad AR = 1$$

$$\omega \to \infty \quad \Rightarrow \quad \log AR = -\frac{1}{2}\log(\omega\tau)^4 = -2\log(\omega\tau)$$

یعنی دیاگرام مجانب Bode در فرکانس‌های زیاد $(\omega \to \infty)$ خطی با شیب (-2) می‌باشد.

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega\tau}{1-\tau^2\omega^2}\right)$$

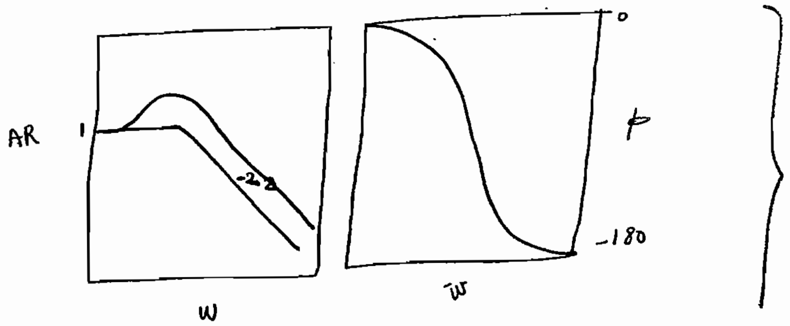
$$\omega \to 0 \Rightarrow \phi = 0$$

$$\omega \to \infty \Rightarrow \phi = -180$$

$$\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \phi = -90$$

$$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad AR > 1$$

$$\xi > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad AR \cancel{>} 1$$

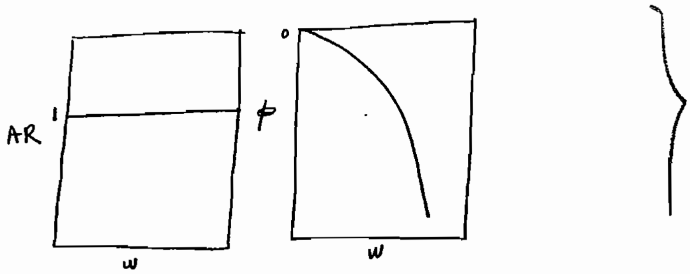


درجه ۲

مثال: دیاگرام Bode سیستمی که تابع تبدیل آن $e^{-\tau_d s}$ است را رسم کنید.

$$AR = 1$$

$$\phi = -\omega\tau_d$$



$\omega \to \infty \Rightarrow \phi \to -\infty$

نکته: ترم تاخیر زمانی اثری بر منحنی AR ندارد.

مثال: دیاگرام بد سیستم درجه اول به فرم $G(s) = 1 + \tau S$ را رسم کنید.

$$G(i\omega) = 1 + \tau\omega i$$

$$AR = \sqrt{1 + \tau^2\omega^2}$$

$$\log AR = \frac{1}{2}\log\left[1 + \tau^2\omega^2\right]$$

$$\omega \to 0 \quad \Rightarrow \quad \log AR = 0 \quad \Rightarrow \quad AR = 1$$

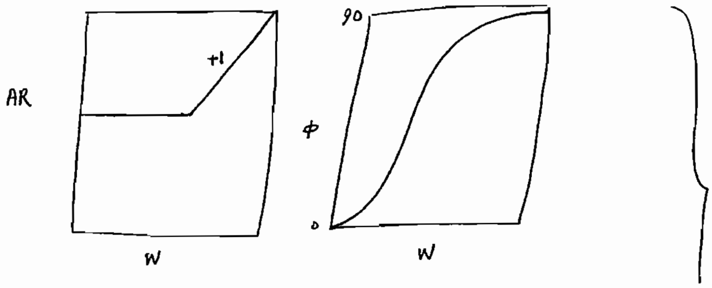
$$\omega \to \infty \quad \Rightarrow \quad \log AR = \frac{1}{2}\log(\omega\tau)^2$$

$$\log AR = \log(\omega\tau)$$

یعنی دیاگرام مجانب بُد در فرکانس‌های بالا خطی با شیب (+1) می‌باشد.

$$\begin{cases} \phi = \tan^{-1}(\omega\tau) \\ \omega \to 0 \Rightarrow \phi = 0 \\ \omega \to \infty \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$



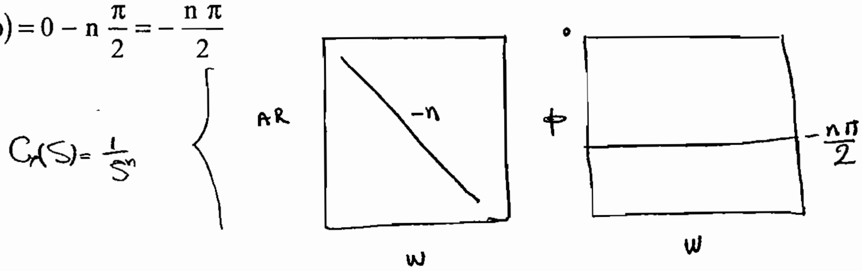
مثال: دیاگرام Bode سیستم $G(s) = \frac{1}{S^n}$ را رسم کنید.

$$G(s) = \frac{k}{(i\omega)^n}$$

$$AR = \frac{k}{\omega^n} \to \log AR = -n \log \omega$$

یعنی دیاگرام مجانب بد همواره خطی با شیب $(-n)$ و بدون نقطه شکست می‌باشد.

$$\phi = \measuredangle G(i\omega) = 0 - n\frac{\pi}{2} = -\frac{n\pi}{2}$$

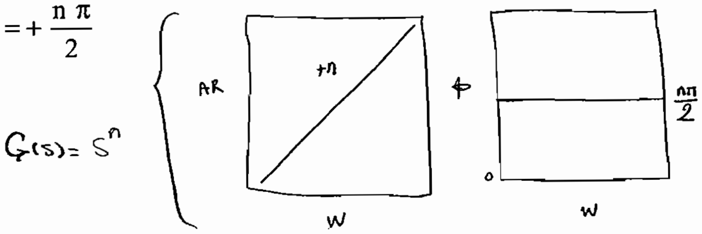


مثال: دیاگرام بد سیستمی با تابع تبدیل $G(s) = S^n$ را رسم کنید.

$$\begin{cases} G(i\omega) = (i\omega)^n \\ AR = |G(i\omega)| = \omega^n \\ \log AR = n \log \omega \end{cases}$$

یعنی دیاگرام مجانب بد همواره خطی است با شیب $+n$ و بدون شکست.

$$\phi = \measuredangle G(i\omega) = +\frac{n\pi}{2}$$



مثال: دیاگرام بد $\frac{(S+1)}{S(2S+1)}$ را رسم کنید.

$$G(s) = \frac{S+1}{S(2S+1)}$$

$$G(i\omega) = \frac{i\omega + 1}{i\omega(2i\omega + 1)}$$

$$AR = \left| G\,(i\omega) \right| = \frac{|i\omega + 1|}{|i\omega||2\omega + 1|} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\omega\sqrt{4\omega^2+1}}$$

$$\phi = \measuredangle\, G(i\omega) = \measuredangle(i\omega+1) - \measuredangle(i\omega) - \measuredangle(2\omega i + 1) = \tan^{-1}\omega - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} 2\,\omega$$

$$\log AR = \log\sqrt{1+\omega^2} - \log\omega - \log\left(1+4\omega^2\right)$$

با توجه به قضایای اعداد مختلط داریم:

$$G(i\omega) = \frac{Z_1 Z_2 \cdots Z_n}{Z_m \cdots Z_p}$$

$$AR = \left|G(i\omega)\right| = \frac{|Z_1||Z_2|\ldots|Z_n|}{|Z_m|\ldots|Z_p|}$$

$$\log AR = \left\{\log|Z_1| + \log|Z_2| \ldots + \log|Z_n|\right\} - \left\{\log|Z_m| + \ldots + \log|Z_p|\right\}$$

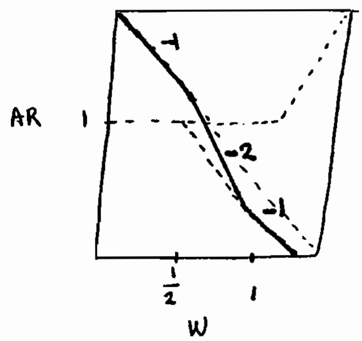
یعنی شیب مجانب‌های بد برای اجزا یک سیستم مرکب از مجموع و تفاضل شیب‌های اجزا این سیستم حاصل می‌شود.

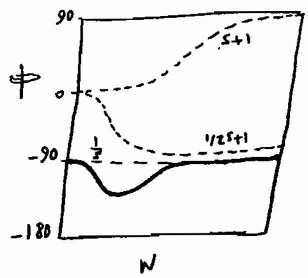
فرکانس‌های گوشه:

$S+1 \rightarrow \omega_{c_0} = 1$

$2S+1 \rightarrow \omega_{c0} = \frac{1}{2}$

$S \rightarrow$ فرکانس شکست ندارد





دیاگرام بد کنترلرها

الف) دیاگرام بد کنترلر *PD*

$$G_c(s)=K_c(1+\tau_D S)$$

$$G_c(i\omega)=K_c(1+\tau_D\,\omega i)$$

$$AR=|G(i\omega)|=K_c\sqrt{1+\tau_D^2\omega^2}$$

$$\phi=\tan^{-1}(\omega\tau_D)$$

$$\log\frac{AR}{K_c}=\frac{1}{2}\log\left(1+\tau_D^2\,\omega^2\right)$$

$$\omega\to 0\Rightarrow\log\frac{AR}{K_c}=0\Rightarrow\frac{AR}{K_c}=1$$

$$\omega\to\infty\Rightarrow\log\frac{AR}{K_c}=\log\omega\tau_D$$

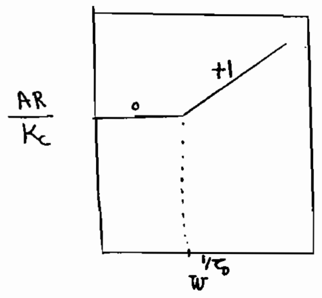
یعنی دیاگرام مجانب، خطی است با شیب (+1) و فرکانس گوشه (محل تلاقی مجانب‌ها) که برابر است با $\omega_{c_0}=\dfrac{1}{\tau_D}$

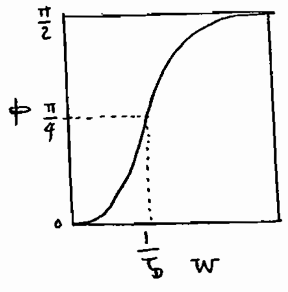
$$\omega=0\to\phi=0$$

$$\omega=\infty\to\phi=\frac{\pi}{2}$$

$$\omega=\frac{1}{\tau_D}\to\phi=\frac{\pi}{4}$$

PD



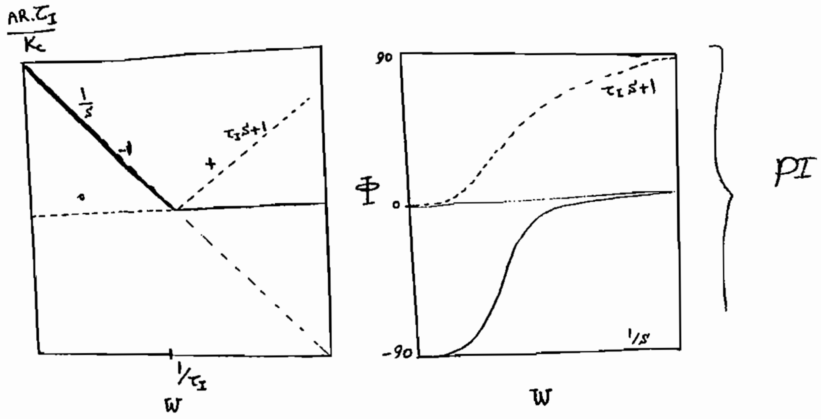


ب) دیاگرام بد کنترلر *PI*

$$G_c = K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I S}\right)=\frac{K_c}{\tau_I}\frac{\tau_I S+1}{S}$$

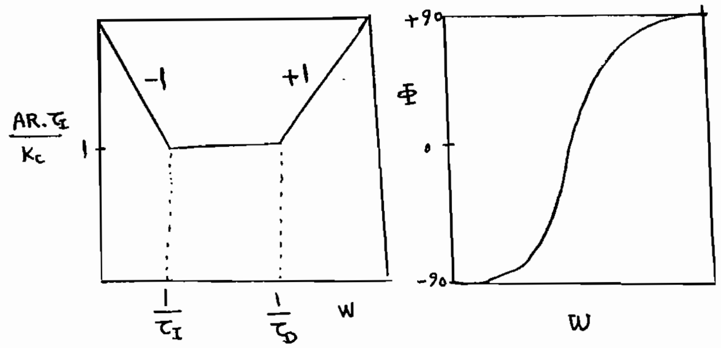
$$G_c(i\omega)=\frac{K_c}{\tau_I}\frac{\tau_I\,\omega i+1}{i\omega}$$

$$AR=\frac{K_c}{\tau_I}\frac{\sqrt{1+\tau_I^2\omega^2}}{\omega} \qquad \phi=\tan^{-1}\omega\tau_I-\frac{\pi}{2}$$



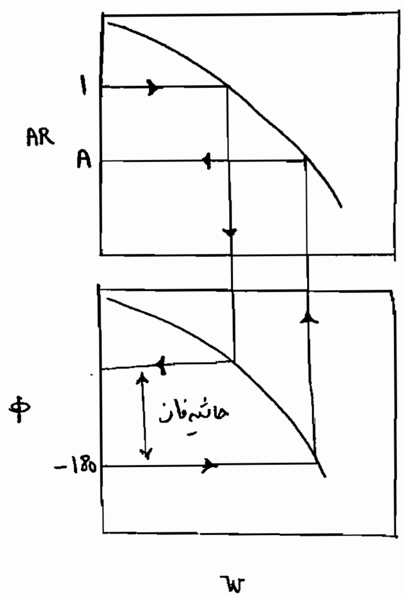
ج) دیاگرام بد کنترلر *PID*

مشابه قسمت الف و ب دیاگرام‌های بد کنترلر PID به شکل زیر است.



۶ـ ۳ـ بررسی پایداری به کمک دیاگرام بد

برای بررسی پایداری ابتدا لازم است به معرفی حاشیه بهره (gain margine) و حاشیه فاز (phase margine) بپردازیم. در شکل روبه‌رو حاشیه بهره و حاشیه فاز به طور شماتیک نشان داده شده است.



حاشیه بهره: عکس نسبت دامنه‌ها $\left(\frac{1}{A}\right)$ در فرکانسی که در آن زاویه فاز -180^0 است حاشیه بهره گفته می‌شود.

حاشیه فاز: اختلاف میان زاویه فاز $\left(\phi_g-(-180)\right)$ در فرکانسی که نسبت دامنه‌ها واحد است با -180° حاشیه فاز نامیده می‌شود.

در شکل روبه‌رو حاشیه بهره و حاشیه فاز به صورت شماتیک نشان داده شده است. حال اگر به‌جای دیاگرام بد تابع تبدیل سیستم داده شده باشد به صورت زیر عمل می‌شود:

$G(s) =$ تابع مدار باز

$$S=i\omega \rightarrow G(i\omega)=a+bi$$

$$AR=\left|G(i\omega)\right|=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ \phi=\measuredangle G(i\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

محاسبه gain margine:

۱) $\phi=-180$ قرار داده می‌شود.

۲) فرکانسی که در آن ϕ مساوی -180° شده محاسبه می‌شود.

۳) مقدار $AR=|G(i\omega)|$ در فرکانس حاصل از قسمت قبل محاسبه می‌شود.

۴) عکس AR حاصل از قسمت قبل $\left(\frac{1}{AR}\right)$ همان حاشیه بهره است.

محاسبه Phase Margine:

۱) $AR=1$ قرار داده می‌شود.

۲) فرکانسی که در آن AR مساوی یک است؛ محاسبه می‌شود.

۳) زاویه فاز در فرکانس حاصل از قسمت قبل (ϕ_g)، محاسبه می‌شود.

۴) $\text{Phase Margin}=\phi_g-(-180)$

مثال: تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s)=\frac{2e^{-\frac{\pi}{4}s}}{S(S+1)}$ است مقدار حاشیه بهره و حاشیه فاز را محاسبه کنید.

$$G(i\omega)=\frac{2e^{-\frac{\pi}{4}\omega i}}{(i\omega)(i\omega+1)}$$

$$\phi=-\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\omega$$

$$AR=\frac{2\times 1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$$

محاسبه حاشیه بهره:

$$1)\ \phi=-180=-\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\omega$$

$$2)\ \omega=1$$

$$3)\ AR=\frac{2\times 1}{1\times\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$$

$$4)\ \text{gain margine}=\frac{1}{AR}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

محاسبه حاشیه فاز:

$$1)\ AR=1=\frac{2}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$2)\ \omega=1.25$$

$$3)\ \phi_g=-\frac{\pi}{4}\times 1.25-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}1.25=-56.25-90-51.34=-197.56$$

$$4)\ \text{Phase margine}=-197.56-(-180)=-17.56$$

اکنون که با تعاریف حاشیه بهره و حاشیه فاز آشنا شدیم، معیار پایداری بد به صورت زیر بیان می‌شود:

معیار تئوری $\begin{cases} \text{gain Margine} > 1 \\ \text{Phase Margine} > 0 \end{cases}$

معیار عملی $\begin{cases} g.M > 1.7 \\ P.M > 30 \end{cases}$

نکته: در کنکور معیار تئوری موردنظر است.

مثال: تابع تبدیل مدار باز سیستمی به فرم $G(s)=\dfrac{Ke^{-\frac{\pi}{4}S}}{S(S+1)}$ می‌باشد. حد پایداری K برابر است با:

$$G(i\omega)=\frac{Ke^{-\frac{\pi}{4}\omega i}}{(i\omega)(i\omega+1)}$$

$$1)\ \phi=-180=-\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\omega$$

$$2)\ \omega=1$$

$$3)\ AR=\frac{k\times 1}{1\times\sqrt{1^2+1}}=\frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$4)\ g.m=\frac{1}{AR}=\frac{\sqrt{2}}{K}$$

شرط پایداری $\rightarrow g.m>1\rightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{K}>1\rightarrow K<\sqrt{2}$

مثال: تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s)=\dfrac{\sqrt{2}\,e^{-\tau_d S}}{S(S+1)}$ می‌باشد مقدار، τ_d پایداری را محاسبه کنید.

$$G(i\omega)=\frac{\sqrt{2}\,e^{-\tau_d\omega i}}{(i\omega)(i\omega+1)}$$

$$AR=\frac{\sqrt{2}\times 1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} \qquad \phi=-\tau_d\,\omega-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\omega$$

$$1)\ AR=1=\frac{\sqrt{2}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$2)\ \omega=1$$

$$3)\ \phi_g=-\tau_d-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(1)=-\tau_d+\frac{\pi}{4}$$

$$4)\ p.m=\phi_g-(-180)=-\tau_d-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\pi$$

$$p.m=-\tau_d+\frac{\pi}{4}$$

شرط پایداری $\rightarrow p.m>0\rightarrow -\tau_d+\dfrac{\pi}{4}>0$

$$\tau_d<\frac{\pi}{4}$$

نکته: به طور کلی در بررسی پایداری زیر از الگوریتم زیر استفاده می‌شود:

۱) اگر سیستم فاقد ترم تأخیر زمانی است از آزمون روث استفاده کنید.

۲) اگر سیستم دارای ترم تأخیر زمانی است دو حالت داریم:

الف) اگر K پایداری خواسته شده است از معیارپایداری g. m>1 استفاده کنید.

ب) اگر τ_d پایداری خواسته شده است از معیار پایداری p.m>0 استفاده کنید.

۶ـ ۴ـ میزان کننده‌های زیگلر نیکولز

یکی از روش‌های تعیین پارامترهای یک کنترلر از قبیل τ_I, τ_D, K_c استفاده از جدول تنظیمات زیگلرـ نیکولز است. اساس روش زیگلرـ نیکولز به فرم زیر است:

۱) از تابع ترانسفر سیستم مدار باز جمله مربوط به کنترلر را کنار بگذارید.

۲) حاشیه بهره (g.m) سیستم بدون کنترلر را حساب کنید.

۳) $P_u = \frac{2\pi}{\omega}, K_u = g.m$ که در آن ω فرکانسی است که در آن $\phi = -180$ است.

۴) اکنون با توجه به مقادیر P_u, K_u از جدول زیر مقادیر $\tau_I\, K_C$ و τ_D را می‌توانید محاسبه کنید.

τ_D	τ_I	K_c	$G_c(s)$	نوع کنترلر
-	-	$0.5K_u$	K_c	P
-	$\frac{P_u}{1.2}$	$0.45K_u$	$K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I S}\right)$	PI
$\frac{P_u}{8}$	$\frac{P_u}{2}$	$0.6K_u$	$K_c\left(1+\tau_D S+\frac{1}{\tau_I S}\right)$	PID

مثال: اگر برای کنترل سیستمی که تابع تبدیل مدار باز آن به صورت $G(s)=\frac{K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I S}\right)e^{-\frac{\pi}{4}S}}{S(S+1)}$ است از یک کنترلر PI استفاده شود. مقادیر بهینه K_C, τ_I طبق جدول زیگلرـ نیکولز کدام است؟

$G_1(s)=\frac{e^{-\frac{\pi}{4}S}}{S(S+1)}$ (سیستم بدون کنترلر)

$1)\ \phi=-180=-\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\omega$

$2)\ \omega=1$

$3)\ AR=\frac{1}{1\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$4)\ g.m=\frac{1}{AR}=\sqrt{2}$

$5)\ K_u=\sqrt{2}\ ,\ P_u=-\frac{2\pi}{1}=2\pi$

طبق جدول زیگلر- نیکولز داریم:

$$K_c = 0.45\times\sqrt{2} = 0.363$$

$$\tau_I = \frac{P_u}{1.2} = \frac{2\pi}{1.2} = 5.233$$

۶-۵- دیاگرام نایکویست

در بخش پاسخ فرکانسی گفته شد برای بررسی پاسخ فرکانسی یک سیستم در تابع ترانسفر آن $S=i\omega$ قرار داده می‌شود و سپس AR و ϕ به فرم زیر تعریف می‌شوند:

$$G(i\omega) = a + bi$$

$$AR = |G(i\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\phi = \measuredangle G(i\omega) = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

آنگاه دیاگرام‌های AR و ϕ بر حسب ω (دیاگرام‌های Bode) رسم شد. یکی از راه‌های دیگر بررسی پاسخ فرکانسی رسم خود عدد مختلط $G(i\omega)=a+bi$ در مختصات قطبی است.

مثال: دیاگرام نایکویست سیستمی که تابع تبدیل آن به صورت $\frac{1}{\tau S+1}$ می‌باشد رسم کنید.

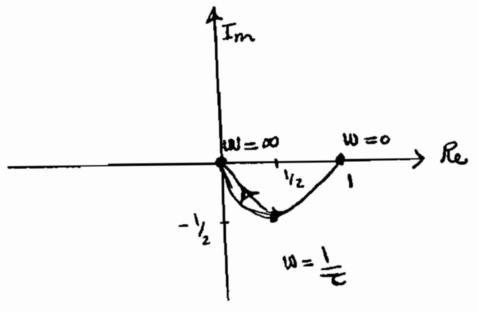
$$G(i\omega) = \frac{1}{\tau\omega i+1} = \frac{1}{1+\tau^2\omega^2} - \frac{\omega\tau}{1+\tau^2\omega^2}i$$

$$\omega = 0 \to G(i\omega) = 1 - 0i$$

$$\omega = \frac{1}{\tau} \to G(i\omega) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\omega = \infty \to G(i\omega) = 0 - 0i$$

اکنون مختصات سه نقطه فوق در صفحه مختصات موهومی ترسیم می‌شود. مکان هندسی که از به هم وصل کردن این نقاط حاصل می‌شود، دیاگرام نایکویست سیستم درجه اول نامیده می‌شود.



مثال: دیاگرام نایکویست سیستم درجه 2 را رسم کنید.

$$G(s) = \frac{1}{\tau^2 S^2 + 2\xi\omega\tau S + 1}$$

$$G(i\omega) = \frac{1}{(1-\tau^2\omega^2) + 2\xi\omega\tau i}$$

با ضرب کردن در مزدوج مخرج داریم:

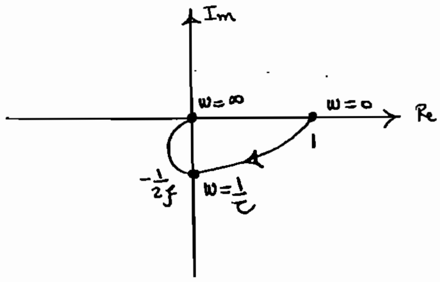
$$G(i\omega)=\frac{1-\tau^2\omega^2}{\left(1-\tau^2\omega^2\right)^2+(2\xi\omega\tau)^2}-\frac{2\xi\omega\tau}{\left(1-\tau^2\omega^2\right)^2+(2\xi\omega\tau)^2}i$$

$$\omega=0\rightarrow G(i\omega)=1-0i$$

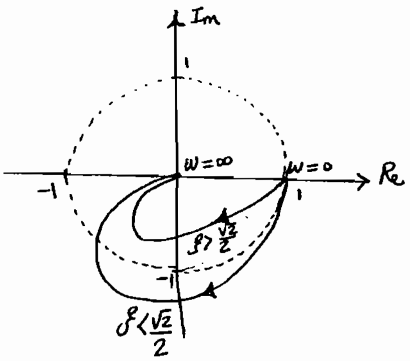
$$\omega=\frac{1}{\tau}\rightarrow G(i\omega)=0-\frac{1}{2\xi}i$$

$$\omega=\infty\rightarrow G(i\omega)=0-0i$$

در نمودار زیر سه نقطه فوق به هم متصل شده و دیاگرام نایکویست سیستم درجه 2 به صورت کیفی نشان داده شده است.



در شکل زیر اثر ξ بر دیاگرام نایکویست سیستم درجه 2 نشان داده شده است.



چنان‌که ملاحظه می‌شود هنگامی که $\xi<\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، شعاع نایکویست (که همان AR است) بزرگ‌تر از یک می‌شود.

مثال: دیاگرام نایکویست $e^{-\tau_d s}$ را رسم کنید.

$$G(i\omega)=e^{-\tau_d\omega i}=\cos\omega\tau_d-i\sin\omega\tau_d$$

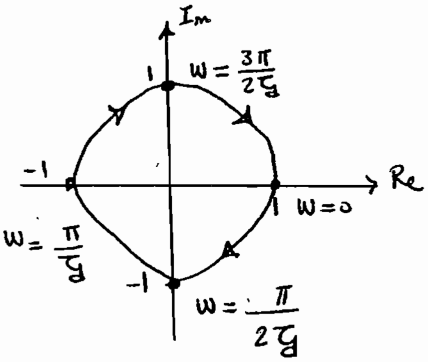
$$\omega=0\rightarrow G(i\omega)=1-0i$$

$$\omega=\frac{\pi}{2\tau_d}\rightarrow G(i\omega)=0-i$$

$$\omega=\frac{\pi}{\tau_d}\rightarrow G(i\omega)-1-0i$$

$$\omega=\frac{3\pi}{2\tau_d}\rightarrow G(i\omega)=0+i$$

در شکل زیر دیاگرام نایکویست ترم تاخیر زمانی رسم شده است.



چنان‌که ملاحظه می‌شود دیاگرام نایکویست دایره‌ای به شعاع یک می‌باشد.

مثال: دیاگرام نایکویست $\frac{1}{S^n}$ را رسم کنید.

$$G(i\omega)=\frac{1}{(i\omega)^n}$$

برای حالت n=1

$$G(i\omega)=\frac{1}{i\omega}=-\frac{1}{\omega}i$$

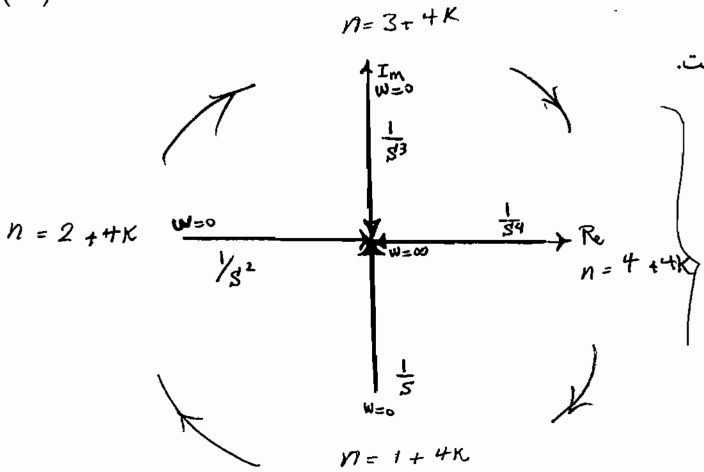
برای حالت n=2

$$G(i\omega)=\frac{1}{(i\omega)^2}=-\frac{1}{\omega^2}$$

برای حالت n=3

$$G(i\omega)=\frac{1}{(i\omega)^3}=\frac{1}{\omega^3}i$$

در شکل زیر دیاگرام نایکویست $\frac{1}{S^n}$ ترسیم شده است.



مثال: دیاگرام نایکویست S^n چگونه است؟

$$G(i\omega)=(i\omega)^n$$

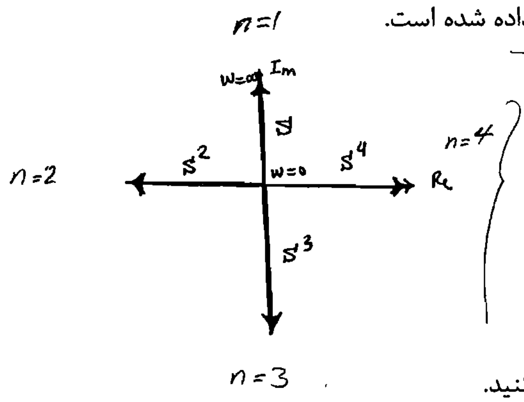
$$n=1\rightarrow G(i\omega)=i\omega$$

$$n=2\rightarrow G(i\omega)=-\omega^2$$

$$n=3\rightarrow G(i\omega)=(i\omega)^3=-\omega^3 i$$

$$n=4\rightarrow G(i\omega)=(i\omega)^4=\omega^4$$

در شکل زیر دیاگرام نایکویست S^n نشان داده شده است.



مثال: دیاگرام نایکویست $\frac{e^{-\tau_d S}}{\tau S+1}$ را رسم کنید.

$$G(i\omega)=\frac{e^{-\tau_d \omega i}}{\tau\omega i+1}$$

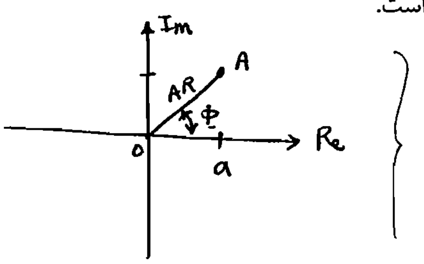
قبل از توضیح نحوه ترسیم دیاگرام نایکویست این سیستم به توضیح دو نکته می‌پردازیم:

۱ـ شعاع دیاگرام نایکویست همان AR است.

$$G(i\omega)=a+bi$$

$$AR=\left|G(i\omega)\right|=\sqrt{a^2+b^2}$$

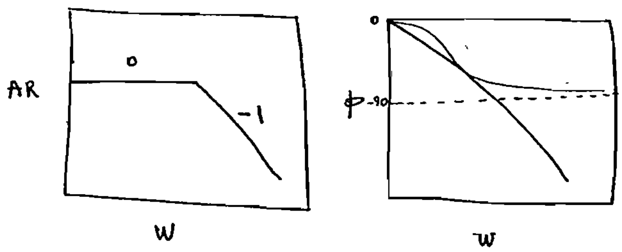
$$\phi=\measuredangle G(i\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$



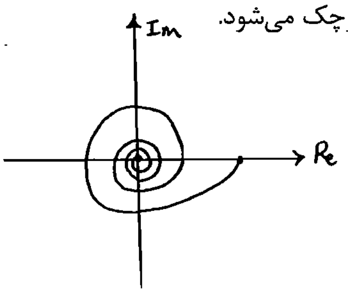
۲ـ زاویه شعاع واصل به دیاگرام نایکویست و محور حقیقی همان Φ (زاویه فاز) است. بنابراین دیاگرام نایکویست چیزی جز دیاگرام بد در مختصات قطبی نیست، پس ابتدا دیاگرام بد این سیستم را رسم می‌کنیم.

$$AR=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$ (چون $e^{-\tau_d S}$ اثری بر منحنی AR ندارد)

$$\phi=-\omega\tau_d-\tan^{-1}(\omega\tau_d)$$



همان‌طور که ملاحظه می‌شود زاویه فاز به عدد مشخصی میل نمی‌کند و معنای $\phi=-\infty$ وقتی $\omega\to\infty$ می‌کند چیزی جز دور خوردن مبدا به دفعات بی‌شمار توسط دیاگرام نایکویست نیست. با نگاه کردن به منحنی AR می‌توان فهمید که AR با ازدیاد ω کم می‌شود. یعنی شعاع نایکویست با ازدیاد ω کم می‌شود و منحنی ϕ نشان دهنده آن است که نایکویست به دفعات زیاد مبدا را دور می‌زند، در نتیجه می‌توان گفت که دیاگرام نایکویست دایره‌ای است که به تدریج شعاع آن کوچک می‌شود.



۶ـ۶ـ بررسی پایداری به کمک دیاگرام نایکویست

برای بررسی پایداری یک سیستم به کمک دیاگرام نایکویست به صورت زیر عمل می‌شود:

۱) قرینه آینه‌ای دیاگرام نایکویست نسبت به محور حقیقی رسم می‌شود (رسم مکان در ناحیه $\omega=-\infty$ تا $\omega=0$) تا یک دیاگرام بسته حاصل شود.

۲) در جهت افزایش ω از $-\infty$ تا $+\infty$ تعداد دور خوردن‌های نقطه $(-1,0)$ در صفحه مختصات موهومی شمارش می‌شود. منظور از دور خوردن آن است که منحنی یک دور کامل (360°) حول نقطه $(-1,0)$ بچرخد.

۳) تعداد قطب‌های مدار باز که در سمت راست محور موهومی هستند شمارش می‌شود. چنان‌چه در صورت سؤال در مورد تعداد قطب‌های مدار باز صحبتی نشده باشد. و تابع ترانسفر هم داده نشده باشد. تعداد آن‌ها صفر منظور می‌شود.

۴) تعداد ریشه‌های ناپایدار کننده از معادله مقابل حاصل می‌شود:

$N+P=$ تعداد ریشه‌های ناپایدار کننده

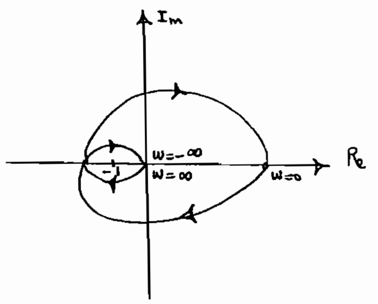
که در معادله فوق

N: تعداد دور خوردن‌های نقطه $(-1,0)$ در جهت ساعت‌گرد است.

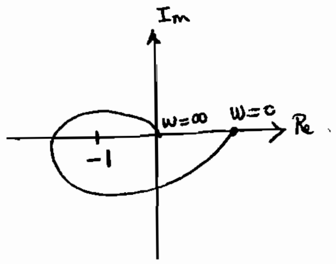
P: تعداد قطب‌های مدار باز که در سمت راست محور موهومی هستند.

مثال: دیاگرام نایکویست سیستمی که تابع مدار باز آن هیچ قطبی در سمت راست موهومی ندارد مطابق شکل زیر است. در مورد پایداری آن بحث کنید. (شکل الف)

ابتدا قرینه آینه‌ای دیاگرام نایکویست را رسم می‌کنیم تا یک منحنی بسته تشکیل شود. (شکل ب)



شکل «ب»



شکل «الف»

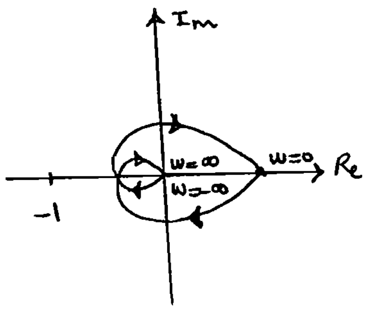
اگر ناظری در نقطه $(-1,0)$ ایستاده باشد هنگامی‌که ω از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند. دوبار به دور خود در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد.

N=2

P=0 (در صورت سؤال ذکر نشده است)

$2 = 0 + 2 =$ تعداد ریشه‌های ناپایدار

در این مثال اگر بهره سیستم کاهش یابد شعاع نایکویست (AR) کم می‌شود و در نتیجه ممکن است نقطـه (1,0−) خـارج از مکـان نایکویست قرار گیرد. در این حالت دیاگرام نایکویست و قرینه آن به فرم زیر است:

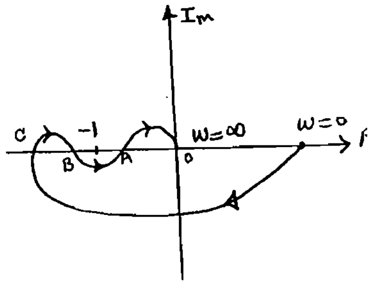


در این حالت همان‌طور که ملاحظه می‌شود اگر ناظری، در نقطه (1,0−) بایستد هنگامی‌که ω از ∞− تا ∞+ تغییر می‌کند، بـه دور خود نمی‌چرخد:

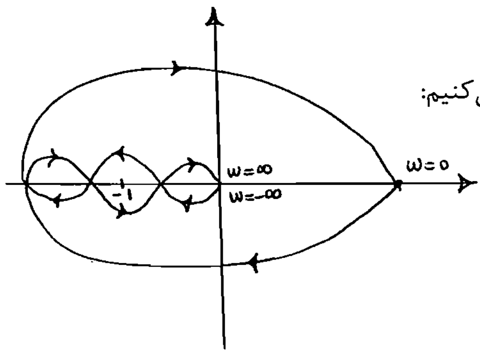
N=0
P=0
0=0+0= تعداد ریشه‌های ناپایدار

یعنی سیستم پایدار است. بنابراین می توان گفت این سیستم در بهره‌های کم (هنگامی‌که شعاع نایکویست کم است و 1 − خارج مکان است) این سیستم پایدار است و در بهره‌های بالا (هنگامی‌که 1 − داخل مکان است) دو ریشه ناپایدار کننده دارد.

مثال: دیاگرام نایکویستی مطابق شکل روبه‌رو است در مورد پایداری آن بحث کنید.



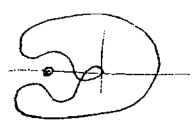
ابتدا با رسم دیاگرام نایکویست را کامل می‌کنیم:



اگر ناظری روی نقطه (1,0−) ایستاده باشد، هنگامی‌که ω از ∞− تا ∞+ تغییر می‌کند مکان یک‌بار در جهت عقربـه‌هـای سـاعت و یک‌بار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دور می‌زند، بنابراین تعداد دور زدن‌ها خالص صفر است.

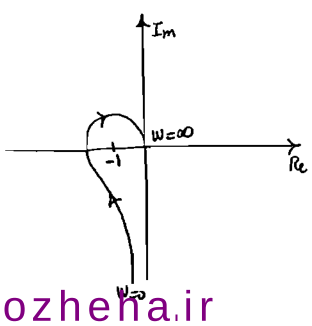
N=0
P=0
0= تعداد ریشه‌های ناپایدار کننده

در این مثال ظاهراً اصلاً (-1,0) را دور نمی‌زند

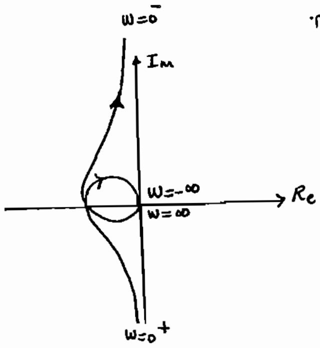


بنابراین سیستم پایدار است. بررسی شود زمانی‌که (1,0−) در ناحیه OA یا BC است دارای دو ریشه ناپایدار کننده اسـت. (اثبـات بـه عهده خواننده)

مثال: دیاگرام نایکویست سیستمی به صورت روبه‌رو است. در مورد پایداری آن بحث کنید.



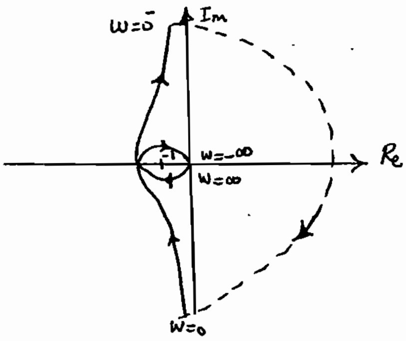
ابتدا مکان را با رسم قرینه تکمیل می‌کنیم.



ملاحظه می‌شود که مکان به یک منحنی بسته تبدیل نشد. در این حالات از یک نیم دایره فرضی استفاده می‌کنیم که دارای دو ویژگی است:

۱ـ ساعت‌گرد است.

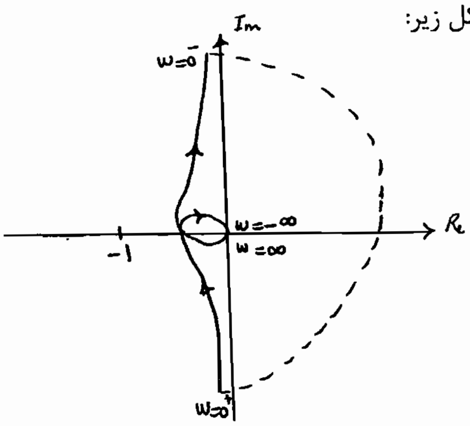
۲ـ در جهت افزایش ω است. (از صفر منفی 0^- به صفر مثبت 0^+ وصل می‌شود)



اگر ناظر در نقطه $(-1,0)$ بایستد، ملاحظه می‌کند که مکان نایکویست ۲ بار این نقطه را دور می‌زند بنابراین

$2 =$ تعداد ریشه‌های ناپایدار کننده

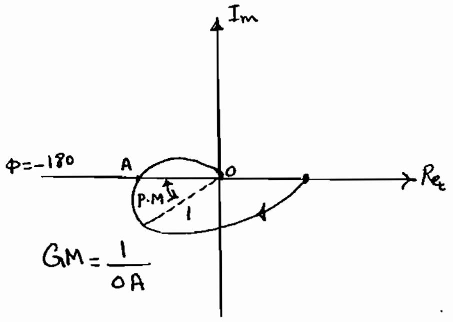
در مثال فوق اگر $(-1,0)$ خارج از مکان باشد (یعنی در بهره‌های کم) مطابق شکل زیر:



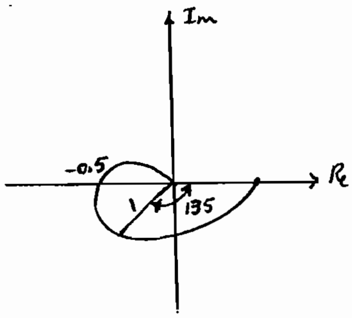
در این حالت ملاحظه می‌شود اگر ناظری روی نقطه $(-1,0)$ بایستد مکان ناکوئیست نقطه $(-1,0)$ را دور نمی‌زند.

حاشیه بهره و حاشیه فاز در دیاگرام نایکویست

در شکل روبه‌رو حاشیه بهره و حاشیه فاز به صورت شماتیک نشان داده شده است.



مثال: در شکل زیر مقادیر حاشیه بهره و حاشیه فاز را محاسبه کنید.

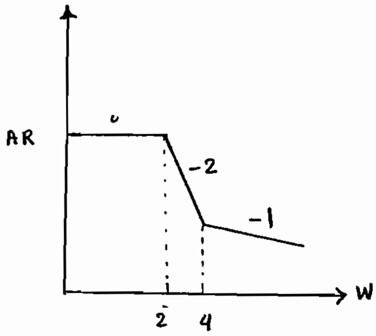


$$\phi=-180 \rightarrow AR=0.5 \rightarrow GM=\frac{1}{0.5}=2$$

$$AR=1 \rightarrow \phi_g=-135 \rightarrow P.M=-135-(-180)=45^\circ$$

۶ـ۷ـ تست‌های فصل ششم

۱ ـ دیاگرام مجانب‌های بد سیستمی به صورت روبه‌رو است تابع تبدیل این سیستم برابر است با ....



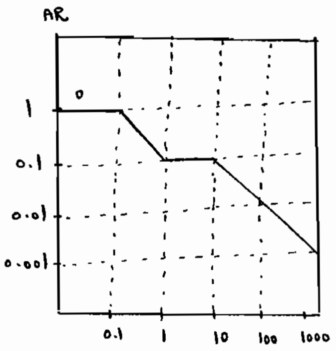
۱) $\frac{K}{(S+2)(S+4)}$ ۲) $\frac{K(S+15)}{(S+2)(S+4)}$

۳) $\frac{K(0.25S+1)}{(0.5S+1)}$ ۴) $\frac{K(S+4)}{(S+2)^2}$

۲ ـ تابع تبدیل فرآیندی به صورت $\frac{y(S)}{x(S)}=\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}S}}{S+1}$ است. اگر $x(t)=\sin t$ باشد پاسخ ماندگار خروجی برابر است با ....

۱) $-\cos t$ ۲) $\sin t$ ۳) $\sqrt{2}\sin t$ ۴) $-\sqrt{2}\cos t$

۳ ـ دیاگرام مجانب‌های بد سیستمی مطابق شکل است تابع تبدیل این سیستم کدام است؟



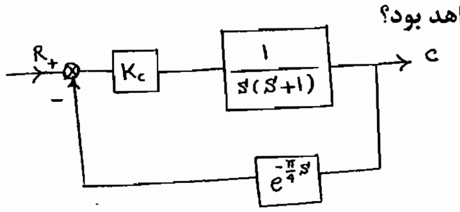
۱) $\frac{10S+1}{(0.1S+1)(S+1)}$ ۲) $\frac{0.1S+1}{(S+1)(10S+1)}$

۳) $\frac{S+1}{(0.1S+1)(10S+1)}$ ۴) $\frac{S+1}{(0.1S+1)(10S+1)^2}$

۴ ـ تابع تبدیل سیستمی به صورت $\frac{y(S)}{x(S)}=\frac{e^{-\tau_1 S}}{S(\tau_2 S+1)}$ است. اگر $x(t)=2\sin t$ باشد خروجی به صورت $y(t)=\sqrt{2}\sin(t-180)$ است. مقادیر τ_1 و τ_2 عبارتند از ....

۱) $\tau_2=2 \;,\; \tau_1=1$ ۲) $\tau_2=\frac{\pi}{4} \;,\; \tau_1=2$ ۳) $\tau_2=1 \;,\; \tau_1=\frac{\pi}{4}$ ۴) $\tau_2=2 \;,\; \tau_1=2$

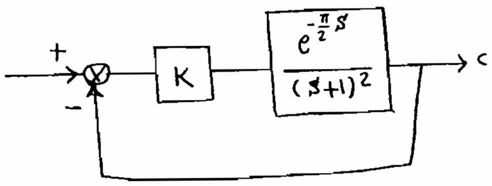
۵ ـ در مدار زیر برای این‌که Gain Margine برابر $\sqrt{2}$ باشد مقدار K_C برابر چند خواهد بود؟



۱) $K_C=1$ ۲) $K_C=2$

۳) $K_C=\sqrt{2}$ ۴) $K_C=\frac{\sqrt{2}}{2}$

۶ ـ در سیستم مدار بسته روبه‌رو برای آن‌که حاشیه بهره برابر 2 باشد مقدار K_C باید برابر چند باشد؟



۱) $k=1$ ۲) $K=\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $K=\sqrt{2}$ ۴) $K=2\sqrt{2}$

۶ـ۸ـ پاسخ تست‌های فصل ششم

۱ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$\omega_1 = 2 \to \tau_1 = \frac{1}{2} \to (0.5S+1)^2$ در مخرج $\to$ است -2 چون شیب

$\omega_2 = 4 \to \tau_2 = \frac{1}{4} \to (0.25S+1)$ در صورت $\to$ تغییر کرده -1 به -2 چون شیب از

$$G(S) = \frac{K(0.25S+1)}{(0.5S+1)^2} = \frac{K(S+4)}{(S+2)^2}$$

۲ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$G(i\omega) = \frac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}\omega i}}{i\omega+1}$$

$$AR = \frac{\sqrt{2}\times 1}{\sqrt{\omega^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+1}} = 1$$

$$\phi = -\frac{\pi}{4}\omega - \tan^{-1}\omega = -\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$y(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos t$$

۳ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$\omega_1 = 0.1 \to \tau_1 = \frac{1}{0.1} = 10 \to$ است -1 چون شیب $\to (10S+1)$ در مخرج داریم

$\omega_2 = 1 \to \tau_2 = 1 \to$ به صفر تبدیل شده -1 چون شیب از $\to (S+1)$ در صورت

$\omega_3 = 10 \to \tau_3 = 0.1 \to$ تبدیل شده -1 چون شیب از صفر به $\to (0.1S+1)$ در مخرج

$$G(S) = \frac{K(S+1)}{(10S+1)(0.1S+1)}$$

۴ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$G(i\omega) = \frac{e^{-\tau_1\omega i}}{(i\omega)(\tau_2\omega i+1)}$$ و $\omega = 1$

$$AR = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2\tau_2^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_2^2+1}} = \frac{\text{دامنه پاسخ}}{\text{دامنه ورودی}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tau_2 = 1$$

$$\phi = -\tau_1\omega - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega\tau_2) = -180$$

$$-\tau_1 \times 1 - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(1\times 1) = -180$$

$$\tau_1 = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

۵ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$G(S)=\frac{K_C e^{-\frac{\pi}{4}S}}{S(S+1)}$$

$$G(i\omega)=\frac{K_C e^{-\frac{\pi}{4}\omega i}}{(i\omega)(i\omega+1)}$$

$$1)\ \phi=-\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\omega=-180$$

$$2)\ \omega=1$$

$$3)\ AR=\frac{K_C\times 1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}=\frac{K_c}{\sqrt{2}}$$

$$4)\ q.M=\frac{1}{AR}=\frac{\sqrt{2}}{K_C}=\sqrt{2}$$

$$K_C=1$$

۶ـ گزینه ۱ صحیح است.

$$G(S)=\frac{Ke^{-\frac{\pi}{2}S}}{(S+1)^2}$$

$$G(i\omega)=\frac{Ke^{-\frac{\pi}{2}\omega i}}{(i\omega+1)^2}$$

$$1)\ \phi=-180=-\frac{\pi}{2}\omega-2\tan^{-1}\omega$$

$$2)\ \omega=1$$

$$3)\ AR=\frac{K\times 1}{\left(\sqrt{\omega^2+1}\right)^2}=\frac{K}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{K}{2}$$

$$4)\ g.M=\frac{1}{AR}=\frac{2}{K}=2$$

$$K=1$$

فصل هفتم

نمونه سؤالات کنکور کارشناسی ارشد

۷ـ۱ـ سؤالات آزمون سراسری سال ۸۳

۱ـ برای سه مخزن سطح مایع سری یکسان بدون تأثیر متقابل چنان‌چه $R=1$ و $A=1$ باشد به ازای یک تغییر ضربه‌ای بـه انـدازه سه $(3\delta(t))$ در جریان ورودی به تانک اول، تابع تغییرات ارتفاع $H_2(t)$ عبارت است از:

۱) $1-2e^{-1}$ ‏ ۲) $\frac{3}{2}t^2e^{-t}$ ‏ ۳) $1-\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)$ ‏ ۴) $\frac{3}{2}e^{-t}t^2u(t-1)$

۲ـ حداکثر پاسخ یک سیستم درجه اول با ثابت زمانی τ به یک ورودی ضربه‌ای واحد $(X(t)=\delta(t))$ برابر 2 واحد مـی‌باشـد. زمان وقوع مقدار حداکثر پاسخ این سیستم به یک ورودی ضربه‌ای به اندازه 2 واحد برابر است با:

۱) صفر و 9 واحد ‏ ۲) 5τ و 9 واحد ‏ ۳) τ و 3 واحد ‏ ۴) 5τ و 1 واحد

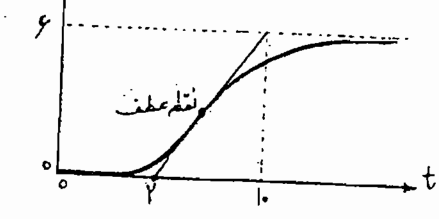
۳ـ جهت تخمین تابع انتقال یک سیستم یک ورودی ضربه‌ای واحد به آن داده شده و خروجی سیستم به دقت اندازه‌گیـری شـده است. این خروجی را می‌توان به صورت تابع $y(t)=te^{-t}$ نشان داد. پاسخ این سیستم نسبت به یک ورودی پله‌ای عبارت است از:

۱) $y(t)=1-e^{-t}$ ‏ ۲) $y(t)=te^{-1}$ ‏ ۳) $y(t)=e^{-t}(1-t)$ ‏ ۴) $y(t)=1-e^{-t}(1+t)$

۴ـ برای سیستمی با تابع انتقال $\frac{Ke^{-t_d s}}{\tau s+1}$ به ازای ورودی پله‌ای با دامنه 2 پاسخ زیر حاصل شده است. تابع انتقال سیستم کـدام گزینه است؟

۱) $\frac{8e^{-2s}}{2s+1}$ ‏ ۲) $\frac{10e^{-2s}}{8s+1}$

۳) $\frac{3e^{-2s}}{8s+1}$ ‏ ۴) $\frac{6e^{-2s}}{10s+1}$



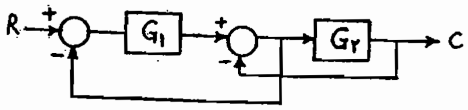
۵ـ وقتی یک ترموکوپل را با یک لایه محافظ بپوشانیم پاسخ آن:

۱) کندتر و نوسانی است
۲) تندتر ونوسانی است.
۳) کندتر و غیرنوسانی است.
۴) تندتر ولی غیرنوسانی می‌باشد.

۶ـ کدام جمله در مورد تابع انتقال یک سیستم غیر تداخلی متشکل از دو سیستم درجه اول متوالی (با ثوابت زمانی ($\tau_1 \neq \tau_2 , \tau_2 , \tau_2 , \tau_1$) صحیح است؟

۱) تابع انتقال سیستم کم میرا خواهد بود ($\zeta<1$)
۲) تابع انتقال سیستم میرای بحرانی خواهد بود. ($\zeta=1$)
۳) تابع انتقال سیستم همواره پرمیرا خواهد بود. ($\zeta>1$)
۴) بسته به مقدار τ_2 , τ_1 ممکن است سیستم پرمیرا، کم میرا یا میرای بحرانی باشد.

۷ـ در نمودار جعبه‌ای شکل زیر تابع انتقال $\frac{C}{R}$ کدام است؟



۱) $\frac{G_1+G_2}{1+G_1+G_2}$
۲) $\frac{G_1G_2}{1+G_1+G_2}$
۳) $\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2}$
۴) $\frac{G_1+G_2}{1+G_1G_2}$

۸ـ اگر بخواهیم فرآیند درجه اولی $\left(\frac{K}{s+1}\right)$ را توسط سیستم کنترل پس‌خور منفی کنترل نماییم، برای آن‌که رفتار مدار بسته سیستم، از نوع درجه دوم باشد چه کنترل‌کننده‌هایی می‌تواند استفاده شود؟

۱) تناسبی (P) و تناسبی انتگرالی مشتقی (PID)
۲) تناسبی مشتقی (P D) و تناسبی (P)
۳) تناسبی انتگرالی (PI) و تناسبی مشتقی (P D)
۴) تناسبی انتگرالی (PI) و تناسبی انتگرالی مشتقی (PID)

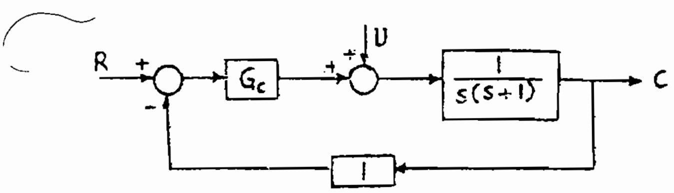
۹ـ برای کنترل دمای یک راکتور پلیمریزاسیون که در جداره آن بخار جریان دارد، کدام کنترل کننده را پیشنهاد می‌کنید؟

۱) PID با بهره بالا
۲) PD با بهره بالا
۳) PI با بهره پایین
۴) P با بهره پایین

۱۰ـ در سیستم کنترل یک مبدل حرارتی گرمکن، چنان‌چه ثابت زمانی فرآیند τ_p باشد، شیر کنترل بادی که بر روی خط بخار (با فشار بالا) استفاده می‌شود بایستی:

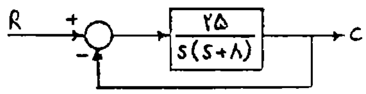
۱) شیر کنترل از نوع Air to close با بهره $0.1\tau_p$
۲) شیر کنترل از نوع Air to open با بهره $0.1\tau_p$
۳) شیر کنترل از نوع Air to open با بهره $0.01\ \tau_p$
۴) شیر کنترل از نوع Air to close با بهره $0.01\tau_p$

۱۱ـ مقدار افت کنترل (offset) برای سیستم کنترلی شکل زیر با کنترل کننده تناسبی (P) برای یک تغییر پله‌ای به اندازه 3 واحد در مقدار مقرر (Set Point) برابر است با:



۱) صفر
۲) 2
۳) $|\text{offset}|<2$
۴) $|\text{offset}|>0$

۱۲ ـ مدار زیر را در نظر بگیرید:



اگر R یک تغییر پله‌ای واحد کند ضریب میرایی (ζ) برابر است با:

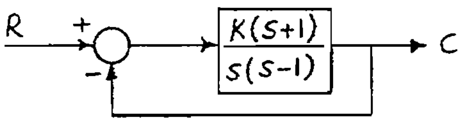
۱) $\zeta=0.4$ ۲) $\zeta=0.6$ ۳) $\zeta=0.5$ ۴) $\zeta=0.8$

۱۳ ـ در یک سیستم کنترل مدار بسته، تابع انتقال فرآیند $\frac{1}{2s}$ می‌باشد. اگر تابع انتقال کنترل کننده $\frac{1}{\tau_1 s}$ باشد، آن‌گاه بر اثر تغییر پله در مقدار مقرر پاسخ متغیر تحت کنترل به چه صورت خواهد بود؟

۱) پاسخ پر میرا (Over damped) ۲) پاسخ کم میرا (Under damped)

۳) پاسخ نوسانی میرا (Undamped) ۴) میرایی بحرایی (Critically damped)

۱۴ ـ مدار زیر را در نظر بگیرید. کدام عبارت صحیح است؟



۱) سیستم همواره پایدار است.

۲) پاسخ همواره ناپایدار است.

۳) سیستم در بهره‌های پایین پایدار و در بهره‌های بالا ناپایدار است.

۴) سیستم در بهره‌های پایین ناپایدار و در بهره‌های بالا پایدار است.

۱۵ ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s)=\frac{K(s+1)}{s^2}$ است. نقطه جدایی مکان هندسی ریشه‌ها برابر است با:

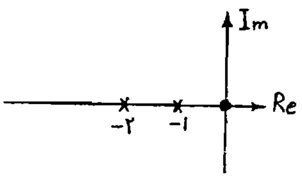
۱) $s=-3$ ۲) $s=-2$ ۳) $s=-2.5$ ۴) $s=-1$

۱۶ ـ معادله مشخصه سیستمی به صورت $s^4+s^3+s^2+4s+6=0$ است. کدام عبارت در مورد پایداری سیستم فوق صحیح است؟

۱) سیستم همواره پایدار است. ۲) سیستم دارای سه ریشه ناپایدار کننده است.

۳) سیستم دارای دو ریشه ناپایدار کننده است. ۴) سیستم دارای یک ریشه ناپایدارکننده است.

۱۷ ـ در نمودار مکان هندسی ریشه‌های سیستمی، محل صفر و قطب‌ها مطابق شکل است. نقطه جدایی مکان (Break Away Point) کدام است؟



۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$

۳) -3 ۴) نقطه جدایی ندارد

۱۸ ـ سیستمی دارای تابع انتقال $G(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s+1}$ است. اگر ورودی سیستم به صورت یک تابع سینوسی $X(t)=\sin t$ تغییر نماید پاسخ سیستم برابر خواهد بود با:

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t-2\pi)$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t-\frac{5\pi}{4}\right)$ ۳) $\frac{1}{2}\sin(t-2\pi)$ ۴) $\frac{1}{2}\sin\left(t-\frac{5\pi}{4}\right)$

۱۹ ـ برای تابع انتقال مدار باز $\frac{e^{-s}}{s(s+1)}$ ، روابط AR و ϕ در پاسخ فرکانسی کدام است؟

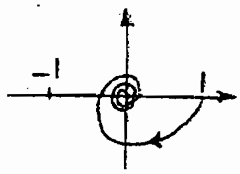
۱) $AR=\frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}$ ، $\phi=-90-\tan^{-1}\omega-57.2\omega$ (درجه)

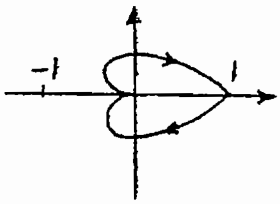
۲) $AR=\frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$ ، $\phi=-90-\tan^{-1}\omega-57.2\omega$ (درجه)

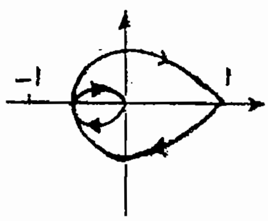
۳) $AR=\frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$ ، $\phi=90-\tan^{-1}\omega+57.3\omega$ (درجه)

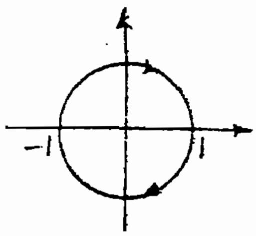
۴) $AR=\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\omega}$ ، $\phi=-90-\tan^{-1}\omega-57.3\omega$ (درجه)

۲۰ ـ نمودار نایکویست برای تابع انتقال مدار باز مقابل عبارت است از: $G(s)=\frac{e^{-2s}}{0.5s+1}$

۱)


۲)


۳)


۴)


۷ـ۲ـ پاسخ سؤالات کنترل آزمون سراسری ۸۳

۱ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{H_3(s)}{Q_i}=\frac{R_3}{(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)(\tau_3 S+1)}$$

چون $\tau_1=\tau_2=\tau_3=1$ بنابراین

$$\frac{H_3(s)}{Q_i(s)}=\frac{1}{(S+1)^3}$$

$$Q_i(t)=3\delta(t) \quad \rightarrow \quad Q_i(s)=3$$

در نتیجه .

$$H_3(s)=\frac{3}{(S+1)^3} \quad \rightarrow \quad H_3(t)=L^{-1}H_3(s)$$

$$H_3(t)=\frac{3}{2}t^2 e^{-t}$$

۲ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

پاسخ سیستم درجه اول به ورودی ضربانی به اندازه A واحد $y(t)=\frac{A}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}$

حالت اول: $A=1$, $\frac{A}{\tau}=3$ (حداکثر پاسخ در لحظه صفر اتفاق می‌افتد)

$$\frac{1}{\tau}=3 \quad \rightarrow \quad \tau=\frac{1}{3}$$

حالت دوم: $A=3$

زمان وقوع حداکثر پاسخ همان لحظه صفر است. و مقدار حداکثر پاسخ برابر است با:

$$\text{حداکثر پاسخ} =\frac{A}{\tau}=\frac{3}{\frac{1}{3}}=9$$

۳ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

نکته: پاسخ سیستم به یک ورودی ضربانی مشتق پاسخ سیستم به ورودی پله‌ای است و بالعکس پاسخ یک سیستم به ورودی پله‌ای برابر انتگرال پاسخ سیستم به ورودی ضربانی است.

$$y_2(t)=\int y_1(t)dt=\int_0^t te^{-t}dt=-(1+t)e^{-t}+C \Rightarrow y_2(0)=0 \Rightarrow C=+1 \Rightarrow y_2(t)=1-e^{-t}(1+t)$$

۴ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مقدار نهایی تابع $=2K=6 \Rightarrow k=3$

میزان تأخیر زمانی $\tau_d=2$

ثابت زمانی سیستم $=10-2=8$

دقت شود که ثابت زمانی طبق تعریف زمانی است که سیستم به 63.2 درصد مقدار نهایی‌اش برسد، یا این‌که اگر با همان شیب اولیه به صورت خطی ادامه یابد سیستم پس از یک ثابت زمانی به جواب می‌رسد.

۵ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

ازدیاد ضخامت موجب ازدیاد مقاومت حرارتی و در نتیجه افزایش ثابت زمانی می‌شود، بنابراین پاسخ کندتر می‌شود. و چون دماسنج سیستم درجه اول است پس پاسخ آن غیرنوسانی است.

۶ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

چنان‌که در متن درس هم گفته شد در سیستم‌های متوالی (چه تداخلی و چه غیرتداخلی) همواره $g>1$ است بنابراین پاسخ همواره غیرنوسانی است.

۷ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\left[\left\{R-\frac{C}{G_2}\right\}G_1-C\right]G_2=C$$

$$\frac{C}{R}=\frac{G_1G_2}{1+G_1+G_2}$$

۸ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۹ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۱۰ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

در سیستم های Air to open وقتی که دبی هوای ابزار دقیق کم شد، جریان خروجی از شیر کم می‌شود.

۱۱ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

نکته: وجود عامل انتگرال $\left(\frac{1}{S}\right)$ موجب حذف offset می‌شود البته این امر برای تغییر در بار (Load) همواره صادق است. ولی برای تغییر در مقدار مقرر (Set Point) فقط زمانی صادق است که تابع ترانسفر مسیر برگشت واحد باشد که البته در این تست تابع مسیر برگشت واحد است.

۱۲ ـ گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{C}{R}=\frac{\frac{25}{S(S+8)}}{1+\frac{25}{S(S+8)}}=\frac{25}{S^2+8S+25}=\frac{1}{\frac{1}{25}S^2+\frac{8}{25}S+1}$$

$$\tau^2=\frac{1}{25}\quad\rightarrow\quad\tau=\frac{1}{5}$$

$$2\zeta\tau=\frac{8}{25}\quad\rightarrow\quad\zeta=\frac{4}{5}=0.8$$

۱۳ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\frac{C}{R}=\frac{\frac{1}{\tau+S}\cdot\frac{1}{2S}}{1+\frac{1}{\tau_I S}\cdot\frac{1}{2S}}=\frac{1}{2\tau_I S^2+1}$$

$\zeta=0\Rightarrow$ پاسخ نوسانی و نامیرا است.

۱۴ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مخرج مدار بسته $=1+GH=S(S-1)+K(S+1)=S^2+(K-1)S+K$

با تشکیل جدول آزمون روث داریم:

شرط پایداری : $k-1>0 \rightarrow k>1$

$k>0$

1	K
K−1	
K	

بنابراین سیستم در بهره‌های پایین $(k<1)$ ناپایدار و بهره‌های بالا $(k>1)$ پایدار است.

۱۵ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

برای محاسبه نقطه جدایی از معادله زیر استفاده می‌شود:

$$\sum\frac{1}{S-P_i}=\sum\frac{1}{S-Z_i}$$

$$\frac{1}{S}+\frac{1}{S}=\frac{1}{S+1} \rightarrow \frac{2}{S}=\frac{1}{S+1}=\frac{1}{S+1} \rightarrow 2S+2=S$$

$S=-2$

۱۶ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با تشکیل آزمون روث داریم:

1	1	6
1	4	
−3	6	
6		
6		

این سیستم دارای دو ریشه ناپایدار کننده است.

۱۷ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

این سیستم نقطه جدایی ندارد، چون سیستم زمانی دارای نقطه جدایی است که فاصله بین دو قطب مجاور جزو مکان هندسی باشد اما در این مسئله چنین نیست.

۱۸ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$G(i\omega)=\frac{e^{-\pi\omega i}}{i\omega+1}$$

$$AR=|G(i\omega)|=\frac{1}{\sqrt{W^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\phi=\measuredangle G(i\omega)=-\pi-\tan^{-1}(\omega)=-\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{4}$$

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t-\frac{5\pi}{4}\right)$$

۱۹ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$G(i\omega)=\frac{e^{-i\omega}}{(i\omega)(i\omega+1)}$$

$$AR=\frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$\phi=-\omega\times57.3-90-\tan^{-1}(\omega)$$

۲۰ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۷ـ ۳ـ سؤالات کنترل آزمون سال ۸۴

۱ ـ دو تانک متوالی با اثر متقابل که سطوح آن‌ها A_1, A_2 و مقاومت شیرهای آن‌ها R_1, R_2 است در نظر بگیرید. تحت چه شرایطی پاسخ ارتفاع تانک دوم به تغییر پله‌ای در دبی ورودی به تانک اول نوسانی می‌شود؟

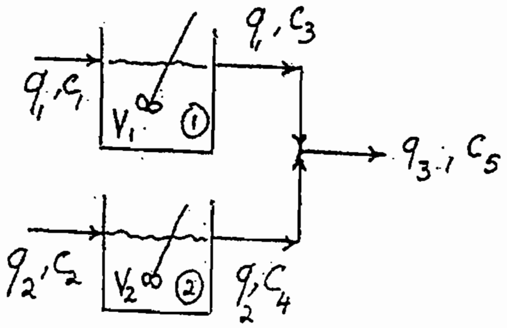
۱) اگر $A_1 = A_2 \;,\; R_1 = R_2$ باشد.

۲) اگر $A_1 > A_2 \;,\; R_1 > R_2$ باشد.

۳) اگر $A_1 < A_2 \;,\; R_1 < R_2$ باشد.

۴) تحت هیچ شرایطی نوسانی نمی‌شود.

۲ ـ چنان‌چه جریان‌های ورودی به دو تانک اختلاط ۱ و ۲ ثابت باشد و جریان‌های خروجی با هم مخلوط شوند (شکل زیر) تابع انتقالی کلی سیستم عبارت است از: $\tau_2 = \frac{v_2}{q_2} \;,\; \tau_1 = \frac{v_1}{q_1}$



۱) $c_1 = \frac{q_1}{\tau_1 s+1} c_1(s) + \frac{q_2}{\tau_2 s+1} c_2(s)$

۲) $c_5 = \frac{\frac{q_1}{q_3}}{\tau_1 s+1} c_1(s) + \frac{\frac{q_2}{q_3}}{\tau_2 s+1} c_2(s)$

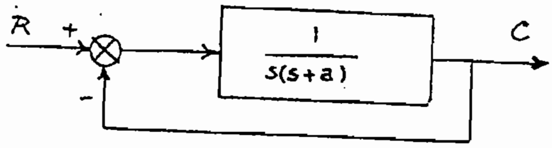
۳) $c_5 = \frac{q_1}{\tau_1 s+1} c_1(s) + \frac{1}{\tau_2 s+1} c_2(s)$

۴) $c_5 = \frac{q_1}{\tau_1 s+1} c_1(s) + \frac{q_2}{\tau_2 s+1} c_2(s)$

۳ ـ تابع انتقال یک سیستم به صورت زیر داده شده است، در چه شرایطی مقدار اولیه پاسخ پله بزرگ‌تر از مقدار نهایی پاسخ می‌شود؟ $G(s) = k\frac{\zeta s+1}{\tau s+1}$

۱) $\zeta < \tau$ ۲) $\zeta = k\tau$ ۳) $\zeta > \tau$ ۴) $\frac{k\zeta}{\tau} << 1$

۴ ـ در سیستم کنترل زیر یک ورودی پله‌ای وارد می‌شود مقدار a جهت داشتن یک پاسخ غیرنوسانی با حداکثر سرعت عبارت است از:



۱) 1

۲) 2

۳) 1ـ

۴) $\sqrt{2}$

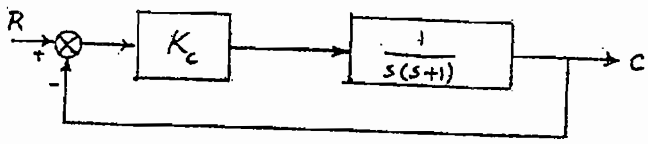
۵ ـ پاسخ پله‌ای واحد یک سیستم درجه دوم میرای بحرانی $y(t) = 3\left[1-(1+2t)e^{-2t}\right]$ است پاسخ آن سیستم به ازای ورودی ضربان ایده‌آل با بزرگی 4 $(4\delta(t))$ کدام است؟

۱) $48e^{-2t}$ ۲) $48\left(1-e^{-2t}\right)$ ۳) $48te^{-2t}$ ۴) $48t\left(1-e^{-2t}\right)$

۶ـ در یک کنترل‌کننده PI اگر فشار یکنواخت $P_s = 5psig$ باشد به ازای ورودی خطای پله‌ای واحد $e(t)=u(t)$ میزان فشار خروجی از آن پس از دو دقیقه چقدر است؟ $k_c = 1 \ , \ \tau_I = 0.5$

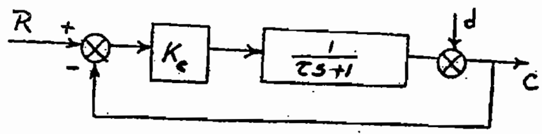
۱) $6psig$ ۲) $9psig$ ۳) $10psig$ ۴) $11psig$

۷ـ مدار کنترل زیر را در نظر بگیرید. اگر R یک تغییر پله‌ای واحد کند مقدار افت کنترل (offset) چقدر است؟



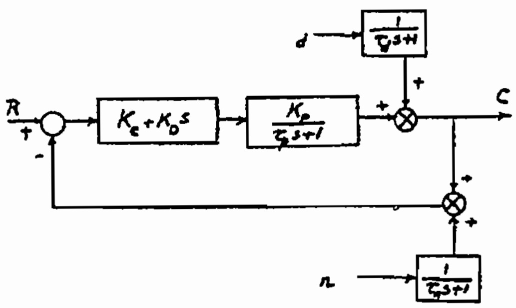
۱) صفر
۲) 0.2
۳) 0.4
۴) 0.6

۸ـ در سیستم مقابل که در آن k_c مثبت است، برای پاسخ خروجی به تغییر پله واحد در اغتشاش (d) کدام عبارت صحیح است؟



۱) سیستم مدار بسته سریع‌تر است.
۲) سیستم مدار باز سریع‌تر است.
۳) پاسخ بدون خطای ماندگار (offset) است.
۴) به ازای مقادیر خاصی از K_c، پاسخ مدار بسته نوسانی می‌شود.

۹ـ افت کنترل (offset) سیستم مقابل به ازای یک تغییر پله‌ای واحد در اغتشاش (d) و به‌طور هم‌زمان ارنویز (n) برابر است با:



۱) صفر
۲) $\frac{1-k_c k_p}{1+k_c k_p}$
۳) $k_c k_p$
۴) $\frac{k_c k_p}{1+k_c k_p}$

۱۰ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به این صورت است: $G(s)=\frac{k}{s(s+2)(s+5)} \ k>0$ محل تلاقی مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه با محور موهومی و شرط پایداری کدام است؟

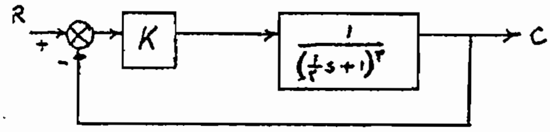
۱) $k<80 \ , \ s=\pm\sqrt{10}j$ ۲) $k<70 \ , \ s=\pm 4j$
۳) $k<70 \ , \ s=\pm 3j$ ۴) $k<70 \ , \ s=\pm\sqrt{10}\,j$

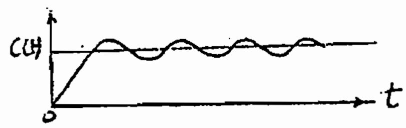
۱۱ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به این صورت است: $G(s)=\frac{k}{s(s+3)(s^2+s+1)}$ به ازا چه مقدار از k پاسخ سیستم به ورودی پله نوسانی دائمی می‌شود؟

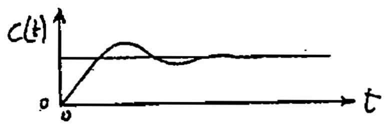
۱) $k=\frac{16}{39}$ ۲) $k=\frac{9}{36}$ ۳) $k=\frac{36}{19}$ ۴) $k=\frac{39}{16}$

۱۲ ـ پاسخ سیستم ارائه شده به ازای $k = 3$ در قبال یک افزایش پله‌ای واحد در R کدام گزینه است؟

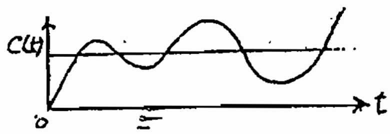
۱۶



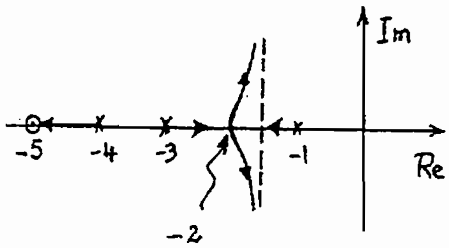
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۳ ـ با استفاده از مکان هندسی ریشه‌های سیستم مدار بسته (در شکل مقابل)، بگویید برای آن‌که پاسخ پله سیستم، غیرنوسانی باشد حداکثر مقدار k چقدر است؟



۱) $k=\frac{1}{3}$ ۲) $k=\frac{2}{5}$

۳) $k=\frac{2}{3}$ ۴) $k=\frac{3}{4}$

۱۴ ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s)=\dfrac{k(s+1)}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$ است. محل تلاقی مجانب‌ها و زاویه آن‌ها برابر است با:

۱) $\gamma=-2 \quad , \quad \alpha=\begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{cases}$

۲) $\gamma=-1 \quad , \quad \alpha=\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \\ \pi \end{cases}$

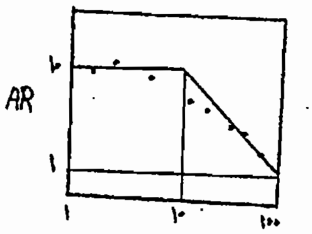
۳) $\gamma=0 \quad , \quad \alpha=\begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{cases}$

۴) $\gamma=-1 \quad , \quad \alpha=\begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{cases}$

۱۵ ـ اگر تابع انتقال مدار باز یک سیستم به صورت $G(s)=\dfrac{\frac{4(s+2)}{2}}{(s+1)(s^2+4s+4)}$ باشد، در فرکانس $4\dfrac{rad}{min}$، شیب (مجانب) دیاگرام Bode کدام است؟

۱) صفر ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

۱۶ ـ با توجه به نمودار Bode ارائه شده، اطلاعات کدام گزینه در موارد ثابت زمانی (τ) و تاخیر زمانی (τ_d) به طور کامل درست است؟



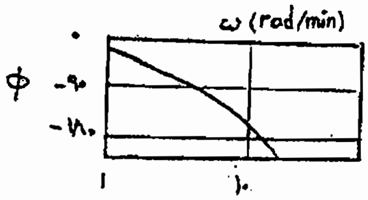
۱) ثانیه $\tau=6$ ، $\tau_d>0$

۲) ثانیه $\tau=6$ ، $\tau_d=0$

۳) دقیقه $\tau=10$ ، $\tau_d>0$

۴) دقیقه $\tau=10$ ، $\tau_d=0$

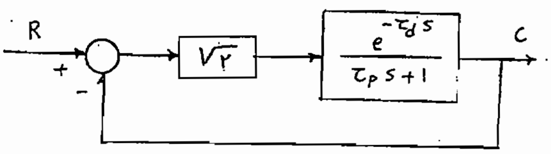
۱۷ ـ تابع انتقال یک فرآیند به صورت $\dfrac{y(s)}{x(s)}=\dfrac{9e^{-\frac{\pi s}{2}}}{4s+3}$ می‌باشد، اگر ورودی فرآیند به صورت $x(t)=\sin\left(\dfrac{3t}{4}\right)$ باشد، پاسخ ماندگار خروجی عبارت است از:



۱) $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{3t}{4}\right)$ ۲) $-\sin\left(\dfrac{3t}{4}\right)$

۳) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}\cos\left(\dfrac{3t}{4}\right)$ ۴) $\dfrac{3}{2}\sin\left(\dfrac{3t}{4}\right)$

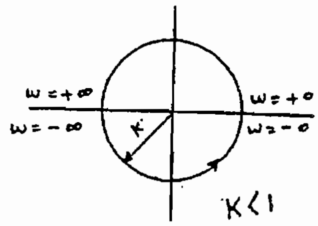
۱۸ ـ در مدار روبه‌رو، حد پایداری مدار بسته به ازا چه مقداری از $\dfrac{\tau_d}{\tau_p}$ حاصل می‌شود؟

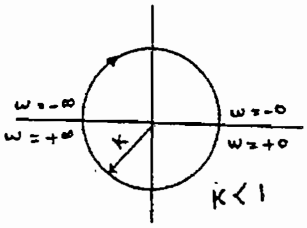


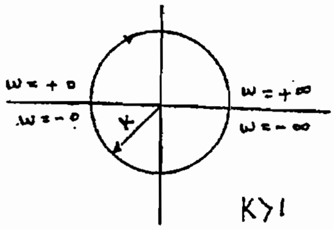
۱) $\dfrac{\pi}{4}$ ۲) $\dfrac{\pi}{2}$

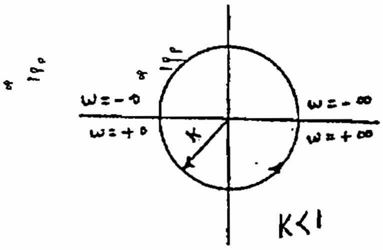
۳) $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$ ۴) $\dfrac{3\pi}{4}$

۱۹ ـ منحنی نایکویست و شرط پایداری برای سیستم کنترل با تابع انتقال مدار باز $G(s)=\frac{k(1-s)}{s+1}$ کدام گزینه است؟

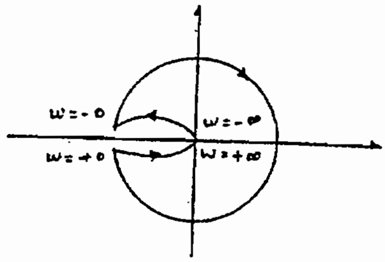
۱)


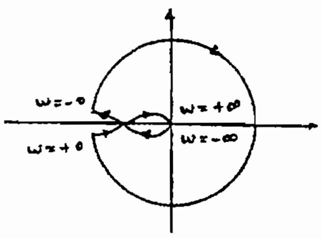
۲)


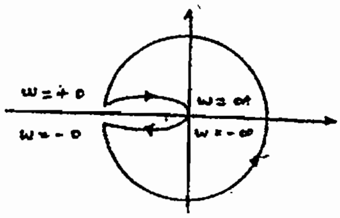
۳)


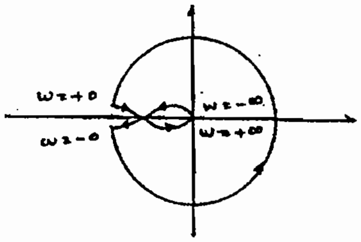
۴)


۲۰ ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $G(s)=\frac{k(s+1)}{s^2(0.1s+1)}$ است. نمودار نایکویست آن کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۷ـ۴ـ پاسخ سؤالات کنترل آزمون ۸۴

۱ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

هم‌چنان‌که گفته شد در سیستم‌های متوالی تحت هیچ شرایطی پاسخ نوسانی نخواهد شد و همواره $\zeta > 1$ است.

۲ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$q_1 C_3 + q_2 C_4 = q_3 C_5$$

$$C_5 = \frac{q_1}{q_3} C_3 + \frac{q_2}{q_3} C_4$$

$$\frac{C_3}{C_1} = \frac{1}{\tau_1 S + 1} \quad , \quad \frac{C_4}{C_2} = \frac{1}{\tau_2 S + 1}$$

در نتیجه:

$$C_5 = \frac{\frac{q_1}{q_3}}{\tau_1 S + 1} C_1 + \frac{\frac{q_2}{q_3}}{\tau_2 S + 1} C_2$$

۳ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\text{مقدار اولیه} = \lim_{S \to \infty} G(s) \times \frac{1}{S} = \frac{K(\zeta S + 1)}{\tau S + 1} = \frac{K\zeta}{\tau}$$

$$\text{مقدار نهایی} = \lim_{S \to 0} G(s) \times \frac{1}{S} \times S = \lim_{S \to 0} \frac{K(\zeta S + 1)}{\tau S + 1} = K$$

برای آن‌که مقدار اولیه بزرگ‌تر از مقدار نهایی باشد:

$$\frac{K\zeta}{\tau} > K \quad \to \quad \zeta > \tau$$

۴ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

نکته: حداکثر سرعت حداقل نوسان معادل $\zeta = 1$ است.

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{1}{S(S+a)}}{1 + \frac{1}{S(S+a)}} = \frac{1}{S^2 + aS + 1}$$

$$\tau^2 = 1 \quad \to \quad \tau = 1$$

$$2\zeta\tau = a \quad \to \quad 2 \times 1 \times 1 = a \quad \to \quad a = 2$$

۵ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

نکته: پاسخ ضربه برابر مشتق تابع پله است.

$$y_2(t) = 4t \frac{dy_1}{dt} = 4 \times \left[3(1+2t)(2)e^{-2t} - 3(2)e^{-2t} \right] = 48te^{-2t}$$

۶ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$P(t)=P_s+K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I}t\right) \rightarrow P_{(t)}=5+1\left(1+\frac{1}{0.5}t\right)$$

$$P_{(2)}=5+\left(1+\frac{2}{0.5}\right)=10\,psig$$

۷ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

به علت وجود ترم $\frac{1}{S}$ در بلاک دیاگرام offset = 0 است.

۸ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۹ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\underset{S\to 0}{offset}=\underset{S\to 0}{SR(s)}-SC(s) \quad \text{همواره}$$

$$R(S)=0$$

$$\underset{s\to 0}{offset}=-SC(s)=-S\left[\frac{c}{d}\times d+\frac{c}{n}\times n\right]$$

$$offset=-S\times\left[\frac{1}{1+K_cK_p}-\frac{K_cK_p}{1+K_cK_p}\right]\times\frac{1}{S}=-\frac{1-K_cK_p}{1+K_cK_p}$$

پاسخ صحیح گزینه ۲ است اما یک علامت منفی کم دارد.

۱۰ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

جدول روث را تشکیل می‌دهیم.

$$1+GH=S(S+2)(S+5)+K$$

$$1+GH=S^3+7S^2+10S+K$$

	1	10
	7	K
	$\frac{70-K}{7}$	
	K	

شرط پایداری:

$$70-K\geq 0 \rightarrow k\leq 70$$

محل تلاقی با محور موهومی:

سطر n_1 ام $\leftarrow 7S^2+70=0 \Rightarrow S=\pm i\sqrt{10}$

۱۱ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$1+GH=S(S+3)\left(S^2+S+1\right)+K=S^4+4S^3+4S^2+3S+K$$

$$\begin{array}{l|lll} & & & \\ \hline & 1 & 4 & K \\ & 4 & 3 & \\ & \frac{13}{4} & K & \\ & \frac{39-16K}{13} & & \\ & K & & \end{array}$$

نوسان دایم زمانی است که ریشه‌ها موهومی با جز حقیقی صفر باشند یعنی همان محل تلاقی مکان با محور موهومی:

سطر n ام $=0 \rightarrow 39-16k=0$

$$K=\frac{39}{16}$$

۱۲ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تابع سیستم مدار بسته برابر است با:

$$\frac{C}{R}=\frac{K}{\left(\frac{1}{2}S+1\right)^2+K}=\frac{3}{\frac{1}{4}S^2+S+4}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}S^2+\frac{1}{4}S+1}$$

$$\tau^2=\frac{1}{16} \rightarrow \tau=\frac{1}{4}$$

$$2\zeta\tau=\frac{1}{4} \rightarrow \zeta=\frac{1}{2} \rightarrow$$ پاسخ سیستم نوسانی با دامنه کاهنده با زمان است.

۱۳ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تا نقطه $S=-2$ روی محور موهومی پاسخ غیرنوسانی است.

$$1+GH=1+\frac{K(S+5)}{(S+1)(S+3)(S+4)}$$

$$(S+1)(S+3)(S+4)+K(S+5)=0$$

$$(-2+1)(-2+3)(-2+4)+K(-2+5)=0$$

$$K=\frac{2}{3}$$

۱۴ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\gamma=\frac{\Sigma P_i-\Sigma Z_i}{n-m}=\frac{[0-2-1+i-1-i]-[-1]}{4-1}$$

$$\gamma=-1$$

$$\alpha=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\frac{(2k+1)}{4-1}=\frac{(2k+1)}{3}=\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}$$

۱۵ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با محاسبه فرکانس‌های گوشه $\omega=1, 2, 3$ و رسم دیاگرام Bode می‌توان فهمید در $\omega=4$ شیب مجانب برابر -2 است.

۱۶ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\omega=\frac{1}{\tau}=10 \quad \rightarrow \quad \tau=\frac{1}{10}\min=6\sec$$

$$\text{if} \quad -90<\phi<0 \quad \rightarrow \quad \tau_d=0$$

$$\text{if} \quad \phi<-90 \quad \rightarrow \quad \tau_d>0$$

۱۷ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$G(i\omega)=\frac{9e^{-\frac{\pi i\omega}{3}}}{4\omega i+3}$$

$$AR=\frac{9\times1}{\sqrt{16W^2+9}}=\frac{9}{\sqrt{16\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+9}}=\frac{9}{3\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\phi=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{2}$$

$$\phi=-\frac{\pi\omega}{3}-\tan^{-1}\left(\frac{40}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{4}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\right)$$

$$y(t)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{3t}{4}\right)$$

۱۸ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

از روش gain margin استفاده می‌کنیم:

$$\phi=-180=-\pi$$

$$-\tau_d\omega-\tan^{-1}\omega\tau_p=-\pi$$

$$\omega\tau_d+\tan^{-1}\omega\tau_p=\pi \qquad (1)$$

$$AR=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\tau_p^2\omega^2+1}} \quad \rightarrow \quad g.M=\frac{1}{AR}=\frac{\sqrt{\tau_p^2\omega^2+1}}{\sqrt{2}}$$

در حد پایداری $\rightarrow \quad gM=1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\tau_p^2\omega^2+1}=\sqrt{2}$

$$\tau_p^2\omega^2+1=2 \quad \rightarrow \quad \tau_p\omega=1 \qquad (2)$$

جای‌گذاری معادله (۲) در معادله (۱) نتیجه می‌دهد:

$$\omega\tau_d+\tan^{-1}1=\pi \quad \rightarrow \quad \omega\tau_d+\frac{\pi}{4}=\pi$$

$$\omega\tau_d=\frac{3\pi}{4} \qquad (3)$$

از تقسیم معادله (۳) بر معادله (۲) داریم:

$$\frac{\tau_d}{\tau_p}=\frac{3\pi}{4}$$

۱۹ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

بنابراین دیاگرام نایکویست دایره‌ای به شعاع $AR=\frac{K\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+\omega^2}}=K \rightarrow$

K است.

$$\phi=\tan^{-1}(-\omega)-\tan^{-1}\omega \rightarrow \begin{cases}\omega=0 & \rightarrow \phi=0\\ \omega= & \rightarrow \phi=-\pi\end{cases}$$

شرط پایداری : $GM>1 \quad , \quad AR<1 \rightarrow K<2$

۲۰ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

وجود S^n در مخرج موجب ایجاد $n\times(-180)$ اختلاف زاویه بین $\omega=0^+$, $\omega=0^-$ می‌شود:

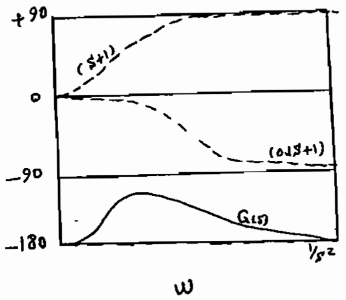
$n=2 \rightarrow$ اختلاف زاویه $=2(-180)=-360$

$$\phi=\tan^{-1}(\omega)-\pi-\tan^{-1}(0.1\omega) \rightarrow \begin{cases}\omega=0 & \rightarrow \phi=-\pi\\ \omega=\infty & \rightarrow \phi=-\pi\end{cases}$$

$$AR=\frac{K\sqrt{\omega^2+1}}{\omega^2\sqrt{(0.1\omega)^2+1}} \rightarrow \begin{cases}\omega=0 & \rightarrow AR=\infty\\ \omega=\infty & \rightarrow AR=0\end{cases}$$

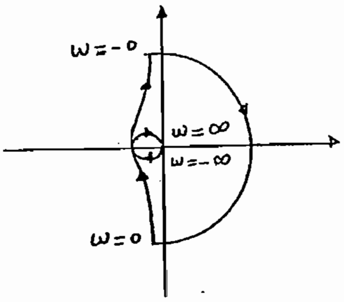
اما در مورد روند زاویه باید دیاگرام Bode، ϕ رسم شود:

ملاحظه می شود که ϕ از -180 شروع شده و به $+90$ ختم می‌شود اما روند تغییرات زاویه مطابق شکل زیر است.



۷ـ ۵ـ سؤالات آزمون سال ۸۵

۱ ـ نمودار نایکویست سیستمی به‌صورت زیر است تابع تبدیل مدار باز آن برابر است با:



۱) $G(s)=\dfrac{k}{s^2(\tau s+1)}$

۲) $G(s)=\dfrac{k(\tau_1 S+1)}{S(\tau_2 S+1)(\tau_3 S+1)}$

۳) $G(s)=\dfrac{k}{S(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)}$

۴) $G(s)=\dfrac{k}{(\tau_1 S+1)(\tau_2 S+1)(\tau_3 S+1)}$

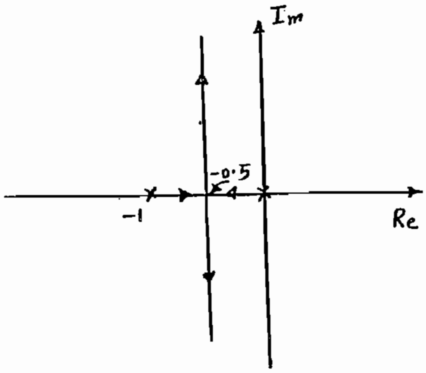
۲ ـ مقدار حاشیه فاز (Phase Margin) سیستم کنترلی با تابع انتقال مدار باز $GH(s)=\dfrac{2e^{-\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi S}}{S+1}$ **بر حسب درجه برابر است با:**

۱) 30 ۲) 40 ۳) 45 ۴) 60

۳ ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به‌صورت $GH(s)=\dfrac{1}{S(S+1)^2}$ **است. حاشیه بهره سیستم برابر است با:**

۱) 0.5 ۲) 1 ۳) 1.5 ۴) 2

۴ ـ مکان هندسی ریشه‌های سیستم با مدار باز $GH(s)=\dfrac{2k_c}{S(S+1)}$ **مطابق شکل زیر است.** k_C **مربوطه، جهت داشتن** $\zeta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **کدام است؟**



۱) 0.25

۲) 0.5

۳) 1

۴) 1.25

۵ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به‌صورت $GH(s)=\frac{k(s+1)(s+3)}{s(s-1)(s+2)}$ است. کدام عبارت صحیح است؟

۱) سیستم همواره پایدار است.

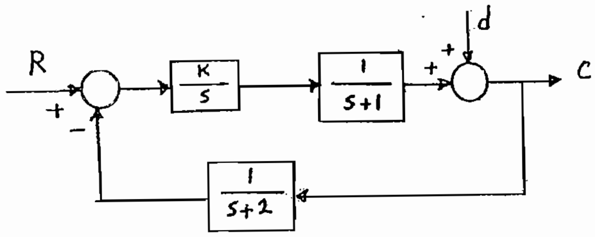
۲) سیستم همواره ناپایدار است.

۳) سیستم در بهره‌های کم ناپایدار و در بهره‌های بالا پایدار است.

۴) سیستم در بهره‌های کم پایدار و در بهره‌های بالا ناپایدار است.

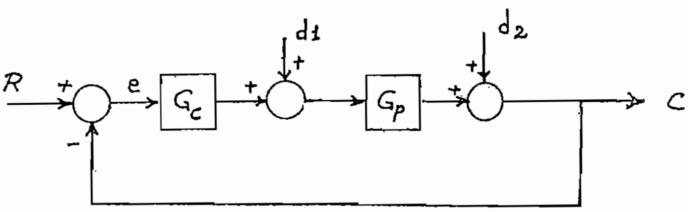
۶ـ سیستم مدار بسته زیر را در نظر بگیرید. به ازای چه مقداری از k، وقتی اغتشاش (d) تغییر پیدا کند، خروجی در آستانه (c) ناپایداری قرار می‌گیرد؟

۱) $k=1$
۲) $k=2$
۳) $k=3$
۴) $k=6$



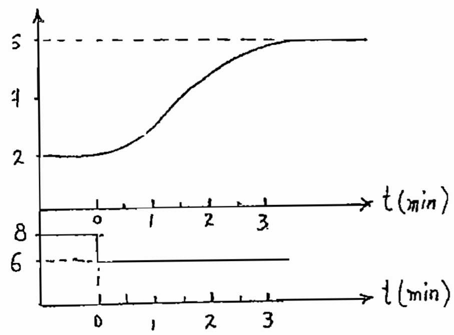
۷ـ در نمودار جعبه‌ای زیر، تابع تبدیل مدار بسته بین بار d_2 و خطا $\left(\frac{e(s)}{d_2(s)}\right)$ عبارت است از:

۱) $\frac{1}{1+G_cG_p}$
۲) $-\frac{1}{1+G_cG_p}$
۳) $-\frac{G_p}{1+G_cG_p}$
۴) $\frac{G_cG_p}{1+G_cG_p}$

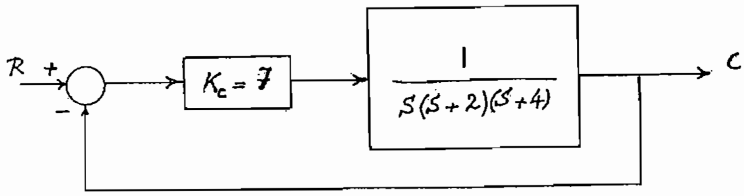


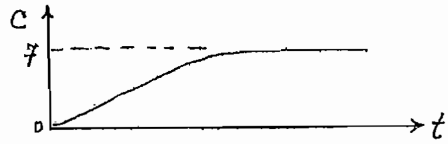
۸ـ پاسخ مدار باز یک فرآیند به یک ورودی پله‌ای مانند شکل زیر است. با در نظر گرفتن یک مدل درجه اول به‌صورت $\frac{K_p e^{\tau_d s}}{\tau_p s+1}$ برای این فرآیند مقادیر k_p، τ_d و τ_p عبارت است از:

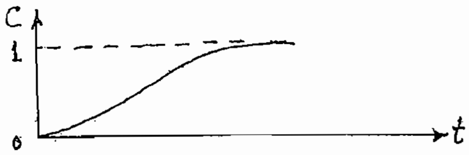
۱) $\tau_p=3, \tau_d=0, k_p=-1$
۲) $\tau_p=2.5, \tau_d=0.5, k_p=2$
۳) $\tau_p=2.5, \tau_d=0, k_p=3$
۴) $\tau_p=2, \tau_d=0.5, k_p=-2$

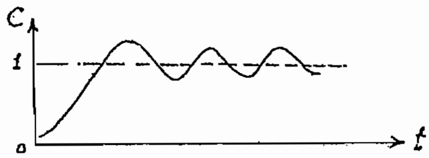


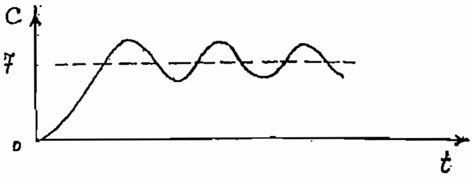
۹ـ پاسخ پله‌ای واحد سیستم کنترلی زیر عبارت است از:



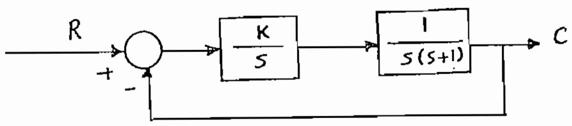
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۰ـ در مدار زیر اگر R(t) یک تغییر خطی به‌صورت $R(t)=t$ کند مقدار افت کنترل (Off set) چقدر است؟



۱) صفر

۲) $\frac{1}{k}$

۳) $\frac{2}{k}$

۴) $\frac{1}{1+k}$

۱۱ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به‌صورت $GH(s)=\frac{20}{(s+1)(s+2)(s+10)}$ است. این سیستم را با یک سیستم درجه دو که بهره حالت یکنواخت آن با سیستم فوق برابر است تقریب می‌زنیم. تابع تبدیل سیستم تقریب زده برابر است با:

۱) $G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$

۲) $G(s)=\frac{20}{(s+2)(s+10)}$

۳) $G(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)}$

۴) $G(s)=\frac{10}{(s+1)(s+10)}$

۱۲ـ واکنش زنجیره‌ای کاتالیستی مرتبه اول $A\xrightarrow{k_1}B\xrightarrow{k_2}C$ در یک راکتور ناپیوسته هم‌دمای ایده‌آل با حجم واحد انجام می‌شود. چنان‌چه محلول اولیه تنها شامل A با غلظت C_{Ao} باشد تابع انتقال راکتور عبارت است از:

۱) $C_A(s)=\frac{C_{Ao}}{s+k_1}$

۲) $C_A(s)=\frac{C_{Ao}}{s+k_2}$

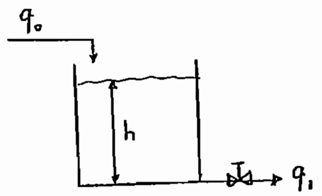
۳) $C_A(s)=\frac{k_2 C_{Ao}}{(s+k_1)(s+k_2)}$

۴) $C_A(s)=\frac{k_1 C_{Ao}}{(s+k_1)(s+k_2)}$

۱۳ ـ یک مخزن اختلاط، با حجم 200lit با شدت حجمی ورودی ثابت $50\frac{\text{lit}}{\text{min}}$ عمل می‌نماید. اگـر غلظـت ورودی از مقـدار ثابـت $50\frac{\text{gr}}{\text{lit}}$ به طور ناگهانی $100\frac{\text{gr}}{\text{lit}}$ گردد، غلظت داخل مخزن بعد از 4 دقیقه چقدر خواهد بود؟

۱) $18.5\frac{\text{gr}}{\text{lit}}$ ۲) $31.5\frac{\text{gr}}{\text{lit}}$ ۳) $68.5\frac{\text{gr}}{\text{lit}}$ ۴) $81.5\frac{\text{gr}}{\text{lit}}$

۱۴ ـ در سیستم سطح مایع زیر مقادیر یکنواخت $q_{0s}=q_{1s}=10$ و $h_s=1$ می‌باشد. اگر در لحظه $t=0^+$، شدت جریـان ورودی را سریعاً نصف کنیم و در همان حال نگهداریم، آن‌گاه نحوه تغییر ارتفاع به چه صورت است؟ مقادیر مقاومت شیر و سطح مقطـع در زیر داده شده است. $R=0.2\ ,\ A=10\ ,\ q_1=\frac{h}{R}$



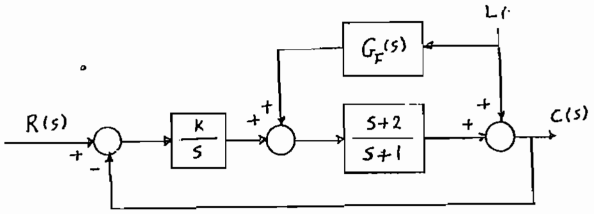
۱) $-e^{-t}$ ۲) $e^{-\frac{t}{2}}$

۳) $1-e^{-t}$ ۴) $1-e^{-\frac{t}{2}}$

۱۵ ـ در یک کنترلر PID، خروجی از کنترلر به ازای خطای ورودی $E(t)=t$ برابر است بـا: $C(t)=2+t+t^2$. پارامترهـای کنترلـر (k_c,τ_I,τ_D) کدام است؟

۱) $(0.5,1,2)$ ۲) $(1,2,0.5)$ ۳) $(1,0.5,2)$ ۴) $(2,0.5,1)$

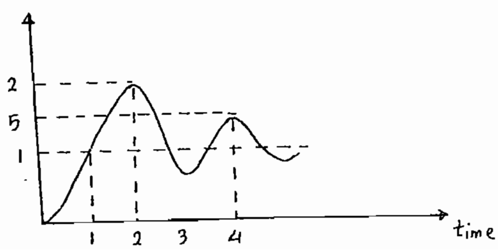
۱۶ ـ در سیستم نشان داده شده در شکل زیر برای آن‌که اثر بار $L(s)$ بر خروجی $C(S)$ حذف شود، تابع $G_F(s)$ باید برابر باشد با:



۱) $G_F(s)=-\frac{k}{s+1}$ ۲) $G_F(s)=\frac{s+2}{s+1}$

۳) $G_F(s)=-\frac{s+1}{s+2}$ ۴) $G_F(s)=\frac{s+1}{s+2}$

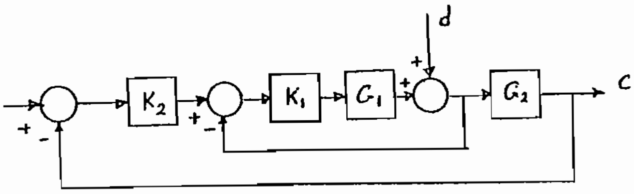
۱۷ ـ پاسخ پله‌ای واحد یک سیستم درجه دوم به صورت زیر رسم شده است، به ترتیب زمـان تـأخیر (Rise Time)، زمـان پیـک (Peak Time) نسبت فرا رفت (Over shoot) و نسبت میرایی (Decay Ratio) کدام است؟



۱) 0.5 , 1 , 2, 1 ۲) 3 , 2 , 1 , 0.5

۳) 1 , 2, 0.5 , 1 ۴) 1.5 , 2, 4,1

۱۸ ـ برای سیستم کنترلی زیر پاسخ خروجی c به تغییر پله و احد در اغتشاش d، عبارت است از:



۱) $\dfrac{G_2}{s\left(1+K_1G_1+K_1K_2G_1G_2\right)}$

۲) $\dfrac{G_1G_2}{s\left(1+K_1G_1+K_2G\right)}$

۳) $\dfrac{G_1}{s\left(1+K_1K_2G_1G_2+K_2G_2\right)}$

۴) $\dfrac{G_1G_2}{s\left(1+K_1K_2G_1G_2\right)}$

۱۹ ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت $GH(s)=\dfrac{K(s+2)}{(s+1)^2}$ است. نقطه جدایی مکان ریشه‌های معادله مشخصه برابر است با:

۱) $S=-2.5$ ۲) $S=-3$ ۳) $S=-3.5$ ۴) $S=-4$

۲۰ ـ معادله مشخصه سیستمی به‌صورت زیر است، کدام عبارت صحیح است؟ $s^4+s^2+s+6=0$

۱) سیستم همواره پایدار است.
۲) سیستم فقط یک ریشه ناپایدار کننده دارد.
۳) سیستم دارای سه ریشه ناپایدار کننده است.
۴) سیستم دارای دو ریشه ناپایدار کننده است.

۷ـ ۶ـ پاسخ سؤالات آزمون ۸۵

۱ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$\omega=0 \quad \rightarrow \quad \phi=-90$ مطابق شکل

$\omega=\infty \quad \rightarrow \quad \phi=-270$ مطابق شکل

۲ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$AR=1=\frac{2\times1}{\sqrt{\omega^2+1}} \quad \rightarrow \quad \omega=\sqrt{3}$$

$$\phi=\left[-\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi\times\sqrt{3}\right]-\left\{\tan^{-1}\sqrt{3}\right\}=-\frac{12\pi}{27}-\tan^{-1}\sqrt{3}=-80-60=-140$$

$$\text{Phase Margine}=\phi-(-180)=-140+180=40$$

۳ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\phi=-180=-90-2\tan^{-1}\omega \quad \rightarrow \quad \omega=1$$

$$AR=\frac{1}{1\times\left(\sqrt{1+1}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$$GM=\frac{1}{AR}=2$$

٤ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مخرج تابع مدار بسته $=S(S+1)+2K_c=S^2+S+2K_c=\frac{1}{2K_c}S^2+\frac{1}{2K_c}S+1$

با مقایسه با فرم استاندارد سیستم درجه دوم داریم:

$$\tau^2=\frac{1}{2K_c} \quad , \quad 2\xi\tau=\frac{1}{2K_c}$$

در نتیجه:

$$\xi=\frac{1}{2\sqrt{2K_c}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad K_c=\frac{1}{4}$$

۵ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.
با تشکیل $1+GH=0$ و استفاده از آزمون روث داریم:

$$S(S-1)(S+2)+K(S+1)(S+3)=0$$

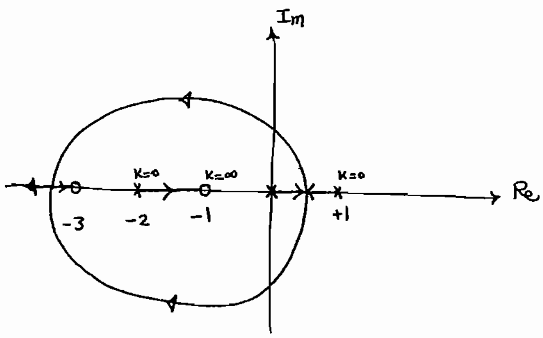
$$S^3+(K+1)S^2+(4K-2)+3K=0$$

$$\begin{array}{l|ll} & 1 & 4K-2 \\ & K+1 & 3K \\ & \frac{4K^2-K-2}{K+1} \longrightarrow & \\ & 3K & \end{array}$$

که در $K<\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ عدد منفی است، بنابراین در بهره‌های کم ناپایدار و در بهره‌های زیاد پایدار است.

راه حل دوم:

اگر در رسم مکان هندسی دارای تسلط و سرعت عمل کافی باشیم می‌توانیم به کمک مکان این کار را انجام دهیم:



که ملاحظه می‌شود در بهره‌های کم سیستم ناپایدار است ولی در بهره‌های زیاد پایدار است.

۶ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با تشکیل $1+GH=0$ و آزمون روث داریم:

$$1+\frac{K}{S(S+1)(S+2)}=0 \quad \Rightarrow \quad (S+1)(S+2)+K=0$$

$$S^3+3S^2+2S+K=0$$

$$\begin{array}{l|ll} & 1 & 2 \\ & 3 & K \\ & \frac{6-K}{3} & \longrightarrow \quad 6-K=0 \quad \rightarrow \quad K=6 \end{array}$$

۷ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$R-C=e$$

چون R تغییر نمی‌کند پس $R=0$ است در نتیجه:

$$-C=e \quad \rightarrow \quad \frac{e}{d_2}=-\frac{c}{d_2}$$

$$\frac{c}{d_2}=\frac{1}{1+G_cG_p} \quad \to \quad \frac{e}{d_2}=-\frac{1}{1+G_cG_p}$$

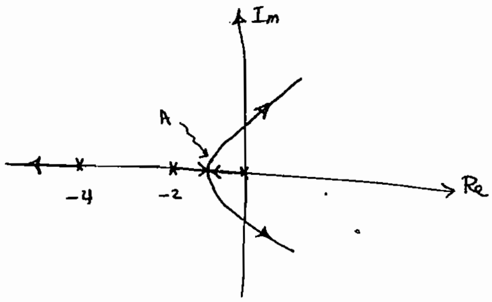
۸ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} \text{مقدار نهایی تابع}=AK_p=6-2=4 \\ \text{مقدار تغییر در ورودی}=A=6-8=-2 \end{array}\right\} \to K_p=-2$$

۹ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$=\underset{S\to 0}{SC(s)}=\underset{S\to 0}{S\times R(s)}\times\frac{C}{R}=S\times\frac{1}{S}\times\frac{\frac{7}{8S}}{1+\frac{7}{8S}}=1$$

اما نوسانی یا غیر نوسانی بودن پاسخ بستگی به موهومی یا غیر موهومی بودن ریشه‌های تابع مدار بسته دارد با رسم مکان داریم:



نقطه A همان مرز نوسانی شده است که S_A از حل معادله زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{1}{S}+\frac{1}{S+2}+\frac{1}{S+4}=0 \quad \to \quad S_A=-2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

با قرار دادن S_A در معادله مشخصه سیستم مقدار K_c مرز نوسان به‌دست می‌آید.

$$S(S+2)(S+4)+K_c=0 \quad \to \quad K_c=2.66$$

چون K_c داده شده $(K_c=7)$ بزرگ‌تر از 2.66 است پس ریشه‌های مدار بسته موهومی است. پس پاسخ نوسانی است.

۱۰ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\text{offset}=\underset{S\to 0}{SR(s)}\left[1-\frac{C}{R}\right]=S\times\frac{1}{S^2}\left[1-\frac{\frac{K}{S^2}}{1+\frac{K}{S^2}}\right]=\frac{1}{S}\left[1-\frac{K}{S^2+K}\right]=\underset{S\to 0}{\frac{1}{S}.\frac{S^2}{S^2+K}}=\underset{S\to 0}{\frac{S}{S^2+K}}=0$$

۱۱ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

جمله $(S+10)$ ایجاد ترم e^{-10t} می‌کند که به سرعت با زمان از بین می‌رود. K هم باید برابر یک باشد.

۱۲ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\text{In}-\text{out}+\text{gen}=\text{acc}$$

$$0-0-V\left(K_1C_A\right)=V\frac{dC_A}{dt}$$

$$-K_1 C_A = \frac{dC_A}{dt}$$

با لاپلاس‌گیری از معادله فوق و با توجه به این‌که $C_A(0)=C_{Ao}$ لذا:

$$-K_1 C_A(S) = SC_A(s) - C_{Ao}$$

$$C_A(s) = \frac{C_{Ao}}{S+K_1}$$

۱۳ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\frac{C_A(s)}{C_{Ai}(s)} = \frac{1}{\tau S+1} \quad , \quad \tau = \frac{V}{q} = \frac{200}{50} = 4\,\text{min}$$

$$C_{Ai}(t) = (100-50)u(t) \quad \rightarrow \quad C_{Ai}(s) = \frac{50}{S}$$

$$C_A(s) = \frac{50}{S}\cdot\frac{1}{4S+1} \quad \rightarrow \quad C_A(t) = 50\left[1-e^{-\frac{t}{4}}\right]$$

$$C_A(4) = 50\left[1-e^{-1}\right] = 31.5\frac{gr}{lit}$$

غلظت فوق یک متغیر انحرافی است، لذا مقدار واقعی غلظت برابر است با:

$$C_A(4) = 31.5+50 = 81.5\frac{gr}{lit}$$

۱۴ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{H(s)}{Q_0(s)} = \frac{R}{\tau S+1} = \frac{0.2}{0.2\times 10S+1} = \frac{0.2}{2S+1}$$

$$Q_0(s) = -\frac{5}{S} \quad \rightarrow \quad H(s) = -\frac{5\times 0.2}{S(2S+1)}$$

$$H(t) = -\left[1-e^{-\frac{t}{2}}\right] \quad \rightarrow \quad H(t) = h_s - \left[1-e^{-\frac{t}{2}}\right]$$

$$h(t) = e^{-\frac{t}{2}}$$

۱۵ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\frac{P(s)}{E(s)} = K_c\left[1+\tau_D S+\frac{1}{\tau_I S}\right]$$

$$E(s) = \frac{1}{S^2} \quad \rightarrow \quad P(s) = K_c\left[\frac{1}{S^2}+\frac{\tau_D}{S}+\frac{1}{\tau_I S^3}\right]$$

$$P(t) = K_c\left[t+\tau_D+\frac{t^2}{2\tau_I}\right] = K_c\tau_D + K_c t + \frac{K_c}{2\tau_I}t^2$$

با مقایسه با جواب $\left(2+t+t^2\right)$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} K_c\tau_D=2 \\ K_c=1 \\ \dfrac{K_c}{2\tau_I}=1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad K_c=1\ ,\ \tau_I=\frac{1}{2}\ ,\ \tau_D=2$$

۱۶ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$LG_F\times\frac{S+2}{S+1}+L=0 \quad \rightarrow \quad G_F(s)=-\frac{S+1}{S+2}$$

۱۷ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\text{Rise Time}=1$$
$$\text{Peak Time}=2$$
$$\text{Over shoot}=\frac{2-1}{1}=1$$
$$\text{Decay Ratio}=\frac{1.5-1}{2-1}=0.5$$

۱۸ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

در این حالت چون $\frac{c}{d}$ را می‌خواهیم، لذا $R=0$ فرض می‌شود:

$$\left[\left\{[0-C]K_2-\frac{C}{G_2}\right\}K_1G_1+d\right]G_2=C$$

با تقسیم طرفین بر d نسبت $\frac{c}{d}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{c}{d}=\frac{G_2}{1+K_1K_2G_1G_2+K_1G_1}\ ,\ d(s)=\frac{1}{S}$$
$$C(s)=\frac{G_2}{S\left(1+K_1G_1+K_1K_2G_1G_2\right)}$$

۱۹ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{1}{S+2}=\frac{1}{S+1}+\frac{1}{S+1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{S+2}=\frac{2}{S+1}$$
$$S+1=2S+4 \quad \rightarrow \quad S=-3$$

۲۰ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

جدول روث را تشکیل می‌دهیم ملاحظه می‌شود که دو ریشه ناپایدار کننده داریم، چون در ستون اول دوبار تغییر علامت داریم:

1	1
1	6
-5	
6	

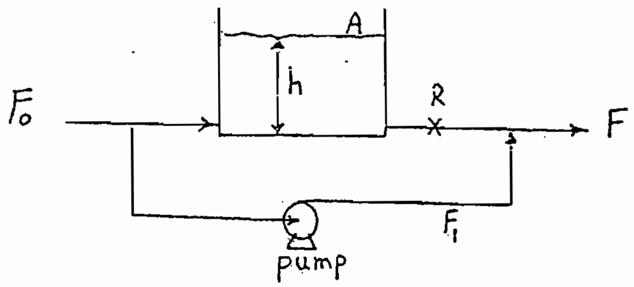
۷ـ۷ـ سوالات آزمون ۸۶

۱ـ در چه شرایطی، مقدار اولیه پاسخ پله‌ای سیستم زیر مساوی مقدار نهایی آن می‌شود؟

$$G(s)=k\frac{(s+\alpha)(s+\beta)}{s^2+2s+1}$$

۱) $\alpha\beta=1$ ۲) $\frac{\alpha}{\beta}=1$ ۳) $\alpha+\beta=1$ ۴) $\alpha^2+\beta^2=1$

۲ـ تابع انتقال سیستم زیر عبارت است از ($\tau=AR$، دبی F_1 ثابت است)



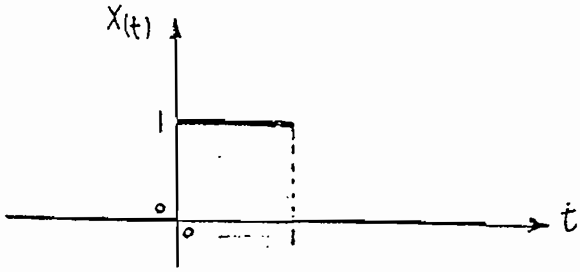
۱) $\frac{H(s)}{\bar{F}_o(s)}=\frac{R+\frac{F_1}{\tau}}{\tau S+1}$

۲) $\frac{\bar{F}(s)-F_1}{\bar{F}_o(s)-F_1}=\frac{1}{\tau S+1}$

۳) $\frac{H(s)}{\bar{F}_o(s)}=\frac{R}{\tau S+R}$

۴) $\frac{\bar{F}(s)}{\bar{F}_o(s)}=\frac{1}{\tau S+1}$

۳ـ اگر به یک سیستمی با تابع انتقال $\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s+1}$ ورودی زیر اعمال گردد، مقدار پاسخ سیستم در لحظه $t=2$ چند است؟



۱) $\frac{2}{e}$

۲) $\frac{1}{e^2}$

۳) $\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}$

۴) $\frac{2}{e}-\frac{2}{e^2}$

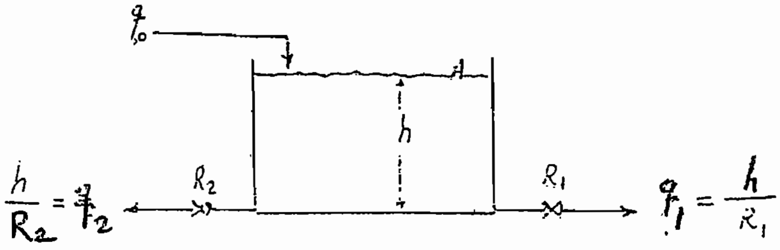
۴ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت زیر است:

$$GH(s)=\frac{K\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{(s+1)^2(0.1s+1)}$$

شیب مجانب‌های نمودار Bode در $\omega=5$ برابر کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) صفر ۴) $+1$

۵ـ در تانک زیر که حاوی یک سیال تراکم‌ناپذیر می‌باشد، در صورت خطی بودن شیرهای موجود بر روی جریان‌های خروجی، ثابت زمانی فرآیند عبارت است از: (دبی حجمی = q_0, q_1, q_2 و مقاومت شیرها = R_1, R_2):



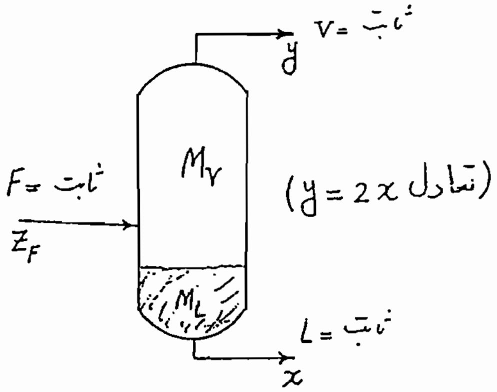
۱) $\tau = \frac{AR_1R_2}{R_1+R_2}$

۲) $\tau = A(R_1+R_2)$

۳) $\tau = 2A(R_1+R_2)$

۴) $\tau = \frac{A(R_1+R_2)}{2}$

۶ـ مخلوط دوجزئی A و B (A جزء فرارتر) در یک ظرف جداسازی تعادلی به دو محصول بخار و مایع تقسیم می‌شود. تابع تبدیل مربوط به تغییرات کسر مولی جزء فرارتر $(X(s))$ در محصول مایع نسبت بـه تغییـرات کسـر مـولی جـزء فرارتـر در خـوراک $(Z_F(s))$ عبارت است از: (مول‌های گاز داخل ظرف) ناچیز= M_V، (مول‌های مایع داخل ظـرف) ثابـت= M_L، رابطـه تعـادلی: $y=2x$ (V, F و L : دبی مولی می‌باشند)



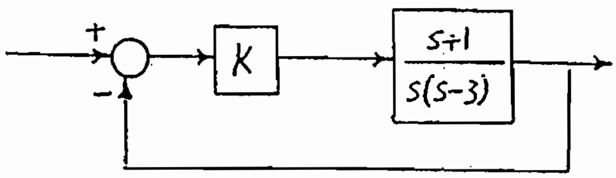
۱) $\frac{X(s)}{Z_F(s)} = \frac{F}{M_Ls+L}$

۲) $\frac{X(s)}{Z_F(s)} = \frac{F}{M_Ls+2V+L}$

۳) $\frac{X(s)}{Z_F(s)} = \frac{2V}{M_Ls+F}$

۴) $\frac{X(s)}{Z_F(s)} = \frac{L+V}{M_Ls+F}$

۷ـ در سیستم مدار باز ناپایدار زیر، جهت پایدارسازی سیستم، مقدار k چقدر باشد تا قطب‌های مدار بسته برابر -2 و 5 گردند؟



۱) 1

۲) 2

۳) 5

۴) 10

۸ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت زیر است؟

$$GH(s) = \frac{k}{s^2(s+2)} \qquad k>0$$

اگر γ محل تلاقی مجانب‌های مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه باشد کدام گزینه صحیح است؟

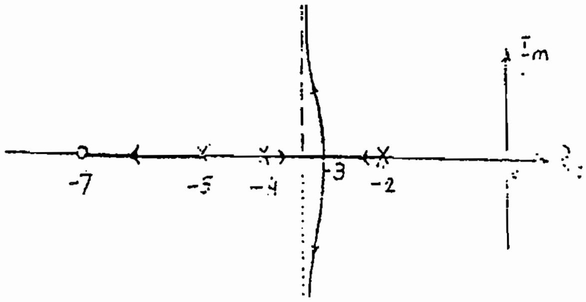
۱) $\gamma = -\frac{2}{3}$ و سیستم در بهره‌های کم‌پایدار است.

۲) $\gamma = -\frac{2}{3}$ و سیستم همواره ناپایدار است.

۳) $\gamma = -\frac{2}{3}$ و سیستم همواره پایدار است.

۴) $\gamma = -\frac{1}{3}$ و سیستم همواره ناپایدار است.

۹ـ مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم در شکل زیر نشان داده شده است. برای آن‌که پاسخ پلـه سیســتم، غیرنوســانی باشــد، حداکثر مقدار k چقدر است؟



۱) 1

۲) $\frac{1}{2}$

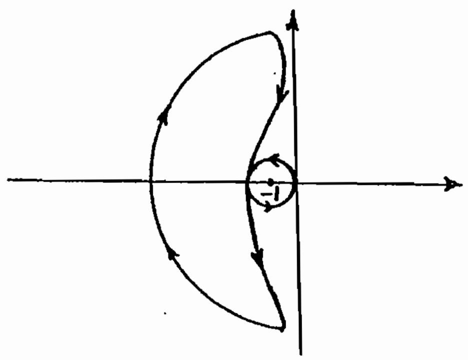
۳) $\frac{1}{3}$

۴) $\frac{1}{4}$

۱۰ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت زیر است:

$$GH(s)=\frac{2(s+3)}{s(s-1)}$$

نمودار نایکوئیست (Nyquist) طبق شکل مقابل است. کدام عبارت صحیح است؟



۱) سیستم پایدار است.

۲) سیستم ناپایدار است و یک ریشه ناپایدارکننده دارد.

۳) سیستم ناپایدار است و دو ریشه ناپایدارکننده دارد.

۴) سیستم در مرز ناپایداری است.

۱۱ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت زیر است:

$$GH(s)=\frac{K(s+3)}{s(s-1)}$$

زاویه فاز (ϕ) و نسبت دامنه‌ها (AR) در پاسخ فرکانسی برابر است با:

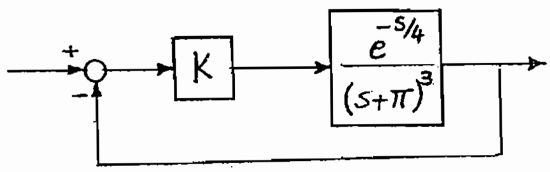
۱) $\phi=\tan^{-1}\frac{\omega}{3}+\tan^{-1}\omega-\frac{3\pi}{2}$, $AR=\frac{3K\sqrt{\omega^2+9}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$

۲) $\phi=\tan^{-1}\frac{\omega}{3}+\tan^{-1}\omega-\frac{\pi}{2}$, $AR=\frac{K\sqrt{\omega^2+9}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$

۳) $\phi=\tan^{-1}\frac{\omega}{3}+\tan^{-1}\omega-\frac{3\pi}{2}$, $AR=\frac{K\sqrt{\omega^2+9}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$

۴) $\phi=\tan^{-1}\frac{\omega}{3}+\tan^{-1}\omega-\frac{\pi}{2}$, $AR=\frac{K\sqrt{\omega^2+9}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$

۱۲ـ در سیستم مدار بسته زیر با $\omega_{co}=\pi$، برای داشتن حاشیه بهره (Gain Margin) برابر 2 داریم:



۱) $\sqrt{2}\pi$

۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

۳) π

۴) 2π

۱۳ ـ پاسخ پله‌ای واحد یک سیستم کنترل به صورت $y(t)=3-3e^{-t}+e^{-\frac{t}{3}}$ است. مقدار نهایی پاسخ این سیستم به یـک ورودی ضربه ناگهانی (Impulse) به اندازه 3 واحد برابر است با:

۱) 9
۲) 8
۳) $2\frac{2}{3}$
۴) صفر

۱۴ ـ معادله مشخصه سیستمی به صورت زیر است:

$$S^4+S^3+2S^2+2S+3=0$$

کدام عبارت صحیح است؟

۱) سیستم دارای سه ریشه ناپایدارکننده است.
۲) سیستم همواره پایدار است.
۳) سیستم دارای یک ریشه ناپایدارکننده است.
۴) سیستم دارای دو ریشه ناپایدارکننده است.

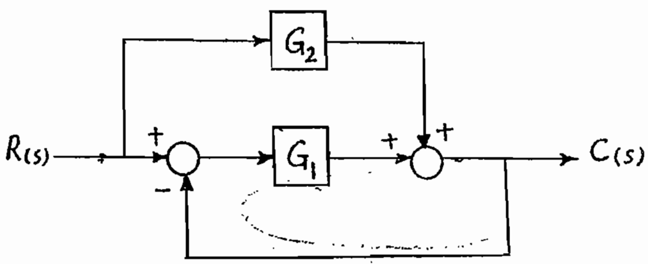
۱۵ ـ پاسخ یک PID به ازای ورودی خطای پله‌ای به بزرگی 7، به صورت زیر درآمده است:

$$P(t)=3+21(1+t)u(t)+42\tau_D\delta(t)$$

پارامترهای کنترلر کدامند؟

۱) $K_c=3$, $\tau_I=1$, $\tau_D=2$
۲) $K_c=3$, $\tau_I=\frac{1}{3}$, $\tau_D=6$
۳) $K_c=21$, $\tau_I=1$, $\tau_D=2$
۴) $K_c=21$, $\tau_I=\frac{1}{3}$, $\tau_D=6$

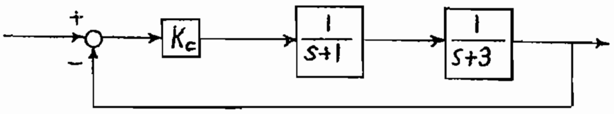
۱۶ ـ نمودار جعبه‌ای زیر را در نظر بگیرید:



تابع تبدیل بین $C(s)$ و $R(s)$ برابر است با:

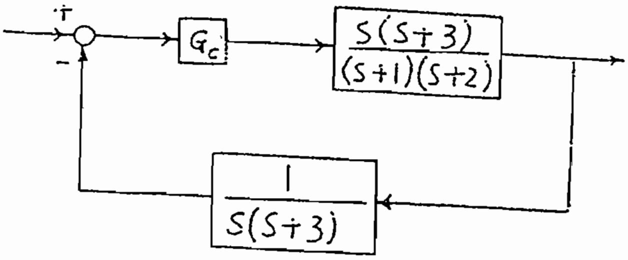
۱) $G(s)=\frac{G_1G_2}{1+G_1}$
۲) $G(s)=\frac{G_1+G_2}{1+G_1G_2}$
۳) $G(s)=\frac{G_1-G_2}{1+G_1}$
۴) $G(s)=\frac{G_1+G_2}{1+G_1}$

۱۷ ـ برای چه مقادیری از بهره کنترل‌کننده، پاسخ سیستم مدار بسته زیر غیرنوسانی است؟



۱) $K_c \le 1$
۲) $K_c \le 3$
۳) همواره غیرنوسانی است چون دو سیستم تحت کنتـرل غیرتداخلی هستند.
۴) همواره نوسانی اسـت چـون دو سیسـتم تحـت کنتـرل غیرتداخلی هستند.

۱۸ ـ آفت کنترل (OFFSET) ناشی از پاسخ پله‌ای واحد سیستم کنترلی زیر شامل یک کنترل‌کننده تناسبی (P) برابر است با:



۱) بستگی به مقدار برداشت (GAIN) کنترل‌کننده دارد.
۲) افت کنترل‌کننده ندارد.
۳) 1
۴) $\frac{1}{3}$

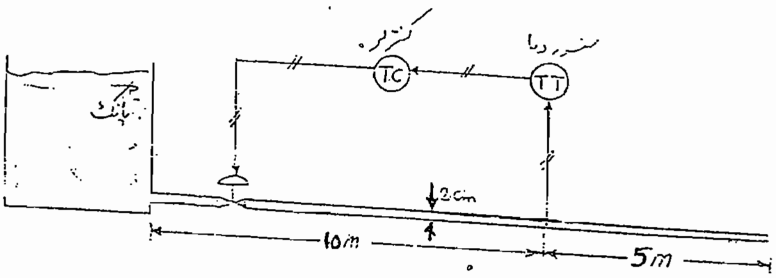
۱۹ ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت زیر است:

$$GH(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+3}$$

نقطه جدایی مکان هندسی برابر است با:

۱) $s=-1-\sqrt{3}$ ۲) $s=-2-\sqrt{3}$ ۳) $s=-2\sqrt{3}$ ۴) $s=-3-\sqrt{3}$

۲۰ ـ دمای سیالی تراکم‌ناپذیر پس از خروج از تانک و عبور از شیر کنترل در فاصله 10 متری توسط یک ترموکوپل اندازه‌گیری می‌شود. در صورتی که حداکثر دبی عبوری از شیر کنترل $1\frac{lit}{min}$ و حداقل آن $0.01\frac{lit}{min}$ باشد، حداقل و حداکثر ثابت زمانی ترم تاخیر انتقالی برابر است (جریان داخل لوله را قالبی plug flow در نظر بگیرید.)



۱) 0 تا 10 دقیقه
۲) 0.003 تا 0.318 دقیقه
۳) 3.14 تا 314 دقیقه
۴) 4.7 تا 470 دقیقه

۷ـ ۸ـ پاسخ سوالات آزمون ۸۶

۱ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$x(s)=\frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad y(s)=\frac{k(S+\alpha)(S+\beta)}{S\left(S^2+2S+1\right)}$$

$$\underset{S\to 0}{\text{حد}}\ Sy(s)=\underset{S\to\infty}{\text{حد}}\ Sy(s)$$

$$K\alpha\beta=K \quad \rightarrow \quad \alpha\beta=1$$

۲ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

موازنه جرم را برای مخزن می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\left(F_0-F_1\right)-\dfrac{h}{R}=A\dfrac{dh}{dt}\\ \left(F_{0s}-F_{1s}\right)-\dfrac{h_s}{R}=0\end{cases}$$

با استفاده از متغیرهای انحرافی $H=h-h_s$ ، $\overline{F}_0=F_0-F_{0s}$ و با توجه به معادلات فوق داریم:

$$\left(F_o-F_{os}\right)-\left(F_1-F_{1s}\right)-\frac{h-hs}{R}=A\frac{d(h-hs)}{dt}$$

استفاده از پمپ باعث ثابت ماندن دبی جریان F_1 می‌شود لذا $F_1=F_s$ خواهد شد بنابراین:

$$\overline{F}_0-\frac{H}{R}=A\frac{dH}{dt}$$

با مقایسه معادله دیفرانسیل فوق با سیستم استاندارد درجه اول یا به کمک تبدیلات لاپلاس داریم:

$$\frac{H(s)}{\overline{F}_o(s)}=\frac{R}{\tau S+1} \quad , \quad \tau=RA$$

از طرفی چون $F=\dfrac{h}{R}+F_1$ است لذا $\overline{F}(s)=\dfrac{H(s)}{R}$ (کماکان $F_1=F_{1s}$ است):

$$\frac{\overline{F}(s)}{\overline{F}_o(s)}=\frac{1}{\tau S+1}$$

نکته: چون جریان F_1 توسط پمپ انجام می‌شود لذا مقدار آن همواره ثابت بوده و در نوشتن موازنه جرم در قالب متغیرهای انحرافی تاثیری ندارد لذا می‌توان از روابط سیستم درجه اول سطح مایع نیز استفاده نموده و به نتایج فوق دست یافت.

۳ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

(با توجه به شکل سوال)

$$x(t)=u(t)-u(t-1)$$

$$X(s)=\frac{1}{S}-\frac{1}{S}e^{-s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{S(S+1)}-\frac{1}{S(S+1)}e^{-s}$$

$$Y(t)=L^{-1}y(s)=\left[1-e^{-t}\right]-\left[1-e^{-(t-1)}\right]$$

$$Y(t)=e^{-(t-1)}-e^{-t}$$

$$Y(2)=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}$$

نکته: در هنگام گرفتن لاپلاس معکوس می‌توان از روابط پاسخ سیستم درجه اول به ورودی پله‌ای استفاده نمود.

۴ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

ابتدا فرکانس‌های شکست را یافته و صعودی مرتب می‌کنیم:

$$(S+1) \rightarrow \omega=1$$

$$\left(\frac{1}{2}S+1\right) \rightarrow \omega=2$$

$$(0.1S+1) \rightarrow \omega=10$$

لذا شیب مجانب Bode در فاصله $\omega=0$ تا $\omega=\infty$ به قرار زیر خواهد بود:

$0<\omega<1 \rightarrow$ شیب $=0$

$1<\omega<2 \rightarrow$ شیب $=-2$

$2<\omega<10 \rightarrow$ شیب $=0$

$10<\omega<\infty \rightarrow$ شیب $=-1$

بنابراین در $\omega=5$ شیب برابر صفر خواهد بود.

۵ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با نوشتن بیلان برای مخزن داریم:

$$q_0-\frac{h}{R_1}-\frac{h}{R_2}=A\frac{dh}{dt}$$

$$q_0-\frac{h}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}=A\frac{dh}{dt}$$

با مقایسه با فرم استاندارد سیستم درجه اول داریم:

$$\tau=A\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

۶ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با نوشتن موازنه جرم جزء فرار داریم:

$$FZ_F-Vy-Lx=M_L\frac{dx}{dt}$$

با جایگزینی رابطه تعادلی $y=2x$ خواهیم داشت:

$$FZ_F-(L+2V)x=M_L\frac{dx}{dt}$$

با مقایسه معادله فوق با فرم استاندارد سیستم درجه اول خواهیم داشت:

$$\tau=\frac{M_L}{L+2V} \qquad K=\frac{F}{L+2V}$$

بنابراین:

$$\frac{X(s)}{Z_F(s)}=\frac{\frac{F}{L+2V}}{\frac{M_L}{L+2V}S+1}=\frac{F}{M_L S+L+2V}$$

۷ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

قطب‌های سیستم مدار بسته همان ریشه‌های مخرج تابع انتقال سیستم مدار بسته هستند.

$$\text{مخرج تابع انتقال مدار بسته}=1+GH$$

$$=1+\frac{K(S+1)}{S(S-3)}$$

$$S(S-3)+K(S+1)=0$$

با قرار دادن $S=-2$ یا $S=-5$ در معادله فوق $K=10$ به‌دست می‌آید.

۸ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\gamma=\frac{\sum P_i-\sum Z_i}{n-m}=\frac{(0+0+(-2))}{3-0}=-\frac{2}{3}$$

پایداری این سیتسم را به کمک آزمون روث می‌توان بررسی نمود:

$$1+GH=S^2(S+2)+K$$

$$1+GH=S^3+2S^2+0S+K$$

ملاحظه می‌شود به ازای جمیع مقادیر K یک عنصر منفی در ستون اول جدول روث داریم لذا این سیستم همواره ناپایدر است.

1	0
2	k
$-\frac{K}{2}$	
k	

۹ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

حداکثر مقدار K مربوط به نقطه $S=-3$ است. چرا که از این نقطه به بعد ریشه‌های مکان هندسی موهومی شده و لذا رفتار نوسانی خواهند داشت. بنابراین برای محاسبه K کافی است $S=-3$ در معادله مشخصه $1+GH=0$ قرار داده شود:

$$1+\frac{K(S+7)}{(S+2)(S+4)(S+5)}=0$$

$$(S+2)(S+4)(S+5)+K(S+7)=0$$

$$(-3+2)(-3+4)(-3+5)+K(-3+7)=0$$

$$K=\frac{1}{2}$$

۱۰ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$P=1$ عده قطب‌های مدار باز که در سمت راست محور موهومی قرار دارند.

$N=-1$ عده دفعاتی که مکان نقطه $(-1,0)$ را دور می‌زند (در جهت عقربه‌های ساعت)

سیستم پایدار است $\quad \rightarrow \quad Z=N+P=-1+1=0$ عده ریشه‌های ناپایدارکننده

۱۱ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$GH(i\omega)=\frac{K(i\omega+3)}{i\omega(i\omega-1)}$$

$$\phi=\left\{0+\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right)\right\}-\left\{\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{-1}\right)+\pi\right\}$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right)+\tan^{-1}\omega-\frac{3\pi}{2}$$

$$AR=\frac{K\sqrt{\omega^2+9}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$$

نکته: زاویه $S-1$ برابر $\pi+\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{-1}\right)$ است.

۱۲ ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

$$\text{gain margin}=\frac{1}{AR\Big|_{\text{when }\phi=-\pi}}$$

$$AR=\frac{K\times 1}{\left(\sqrt{\omega^2+\pi^2}\right)^3}=\frac{K}{\left(\pi\sqrt{2}\right)^3}$$

$$2=\frac{1}{\dfrac{K}{\left(\pi\sqrt{2}\right)}} \quad \rightarrow \quad K=\frac{\left(\pi\sqrt{2}\right)^3}{2}=\sqrt{2}\,\pi^3$$

۱۳ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$y_2=3\times\frac{dy}{dt}$ پاسخ به ورودی ضربانی به اندازه 3 واحد

$$y_2(t)=3\times\left(0+3e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}\right)$$

$$y_2(\infty)=0$$

۱۴ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

از آزمون روث استفاده می‌کنیم:

1	2	3
1	2	
0	3	

چون در ستون اول سطر سوم صفر ظاهر شده برای آن‌که تشکیل جدول روث را بتوان ادامه داد بایستی صفر را با a (عدد بسیار کوچک مثبت) جایگزین کنیم.

$$\begin{array}{|lll}
\hline
1 & 2 & 3 \\
1 & 2 & \\
a & 3 & \\
\frac{2a-3}{a} & & \\
3 & &
\end{array}$$

$$\underset{a\to 0^{+}}{\text{حد}}\ \frac{2a-3}{a}=-\infty$$

بنابراین در ستون اول جدول روث دوبار تغییر علامت داریم و لذا دو ریشه ناپایدار کننده خواهیم داشت.

۱۵ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

در صورت این سوال یک اشتباه وجود دارد. τ_D در تابع $P(t)$ ظاهر شده در حالی‌که τ_D بایستی از حل این سوال به‌دست آید. برای حل سوال ابتدا فرم کلی تابع انتقال کنترلر PID را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{P(S)}{E(S)}=K_c\left(1+\tau_D S+\frac{1}{\tau_I S}\right)$$

$$E(S)=\frac{7}{S}$$

$$P(S)=\frac{7K_c}{S}\left(1+\tau_D S+\frac{1}{\tau_I S}\right)$$

با گرفتن لاپلاس معکوس از معادله فوق داریم:

$$P(t)=P_s+7K_c u(t)+7K_c\tau_D\delta(t)+\frac{7K_c}{\tau_I}tu(t)$$

$$P(t)=P_s+\left(1+\frac{t}{\tau_I}\right)(7K_c)u(t)+7K_c\tau_D\delta(t)$$

با مقایسه معادله فوق با معادله $P(t)=3+21(1+t)u(t)+42\delta(t)$ داریم:

$$P_s=3$$

$$7K_c=21 \quad\rightarrow\quad K_c=3$$

$$\frac{1}{\tau_I}=1 \quad\rightarrow\quad \tau_I=1$$

$$7K_c\tau_D=42 \quad\rightarrow\quad \tau_D=2$$

که همان گزینه ۳ پاسخ صحیح خواهد بود. البته به شرطی که از صورت مسئله τ_D حذف شود.

۱۶ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$(R-C)G_1+RG_2=C$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1+G_2}{1+G_1}$$

۱۷ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$1+GH=1+\frac{K_c}{(S+1)(S+3)}=0$$

$$(S+1)(S+3)+K_c=0$$

$$S^2+4S+3+K_c=0$$

$$\Delta=16-4\left(3+K_c\right)$$

$$\Delta=4\left(1-K_c\right)$$

برای داشتن پاسخ غیرنوسانی بایستی ریشه‌ها حقیقی بوده و لذا $\Delta>0$ باشد.

۱۸ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\text{offset}=\lim_{S\to 0} SR(s)\left[1-\frac{C}{R}\right]$$

$$=\lim_{S\to 0} S\times\frac{1}{S}\left[1-\frac{K_c\frac{S\times 3}{1\times 2}}{1+K_c\frac{S\times 3}{1\times 2}\times\frac{1}{S\times 3}}\right]=1$$

۱۹ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$GH=\frac{K(S+2)}{S^2+2S+3}$$

$$1+GH=0 \quad\rightarrow\quad K=-\frac{S^2+2S+3}{S+2}$$

$$\frac{dk}{dS}=0 \quad\rightarrow\quad -\left[\frac{(2S+2)(S+2)-1\times\left(S^2+2S+3\right)}{(S+2)^2}\right]=0$$

$$S^2+4S+1=0 \quad\rightarrow\quad S=-2\pm i\sqrt{3}$$

۲۰ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

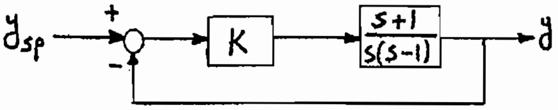
$$\tau_d=\frac{V_{pipe}}{q}=\frac{\left(\frac{\pi D^2}{4}L\right)}{q}$$

$$\tau_{d_1\,min}=\frac{\pi\times(0.02)^2\times 10}{4\times 1\times 10^{-3}}=\pi=3.14$$

$$\tau_{d_1\,max}=\frac{\pi\times(0.02)^2\times 10}{4\times 0.01\times 10^{-3}}=100\pi=314$$

۷ـ ۹ـ سوالات آزمون ۸۷

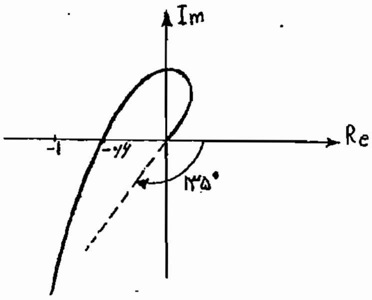
۱ ـ یک فرآیند با تابع انتقال $\frac{S+1}{S(S-1)}$ در نظر بگیرید. برای کنترل آن از یک کنترلر تناسبی استفاده می‌کنیم. برای این‌که حتماً یکی از قطب‌های مدار بسته (در آرایش پسخور منفی) در -3 قرار بگیرد، مقدار بهره کنترلر (K) چه باشد؟



۱) $K=1$ ۲) $K=2$

۳) $K=3$ ۴) $K=6$

۲ ـ دیاگرام نایکوئیست برای یک سیستم کنترل مطابق شکل زیر می‌باشد، مقدار حاشیه فاز و حاشیه بهره به ترتیب عبارتند از:



۱) 45° , $\frac{5}{3}$ ۲) 45° , $\frac{5}{2}$

۳) 30° , $\frac{5}{3}$ ۴) 30° , $\frac{5}{4}$

۳ ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به‌صورت $G(s)=\frac{K(s+2)}{(s-1+j)(s-1-j)}$ است با استفاده از نمودار مکان هندسی ریشه‌ها، پاسخ سیستم به ورودی پله‌ای چگونه است؟

۱) در تمام بهره‌های نوسانی است.

۲) در تمام بهره‌ها غیرنوسانی است.

۳) در بهره‌های پایین غیرنوسانی و در بهره‌های بالا نوسانی است.

۴) در بهره‌های پایین نوسانی و در بهره‌های بالا غیرنوسانی است.

۴ ـ پاسخ پله‌ای واحد سیستم درجه یک تاخیری با تابع انتقال $\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{e^{-3s}}{s(s+4)}$ کدام است؟

۱) $\left(1-e^{\frac{-t-3}{4}}\right)u(t-3)$ ۲) $0.25\left(1-e^{-4t+12}\right)u(t-3)$

۳) $\left(1-e^{-0.25t}\right)u(t-3)$ ۴) $0.25\left(1-e^{-4t}\right)u(t-3)$

۵ ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به‌صورت $GH(s)=\frac{K(s+4)}{s(s+1)(s+2)}$ می‌باشد. با توجه به نمودار مکان هندسی ریشه‌ها کدام عبارت صحیح است؟

۱) در بهره‌های بالا سیستم ناپایدار می‌گردد. ۲) به ازاء مقادیر بهره، سیستم پایدار است.

۳) به ازاء تمام مقادیر بهره، سیستم ناپایدار است. ۴) به ازاء تمام مقادیر بهره ریشه‌ها حقیقی می‌باشند.

۶ـ معادله مشخصه سیستمی به‌صورت زیر است:

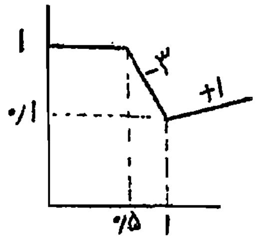
$$S^3+0.5S^2+(3+K)s+K+1=0$$

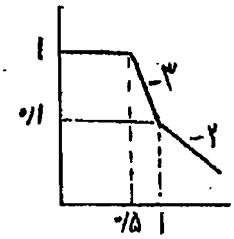
برای آن‌که پاسخ ماندگار سیستم یک موج پریودیک با فرکانس $\omega=\frac{2rad}{s}$ باشد باید مقدار k برابر باشد با:

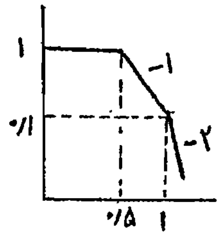
۱) $K=\frac{1}{4}$ ۲) $K=\frac{1}{2}$ ۳) $K=1$ ۴) $K=2$

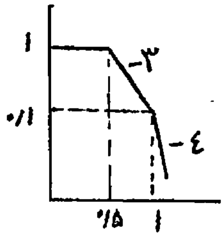
۷ـ تابع انتقال مدار باز یک سیستم کنترل به‌صورت زیر داده شده است. دیاگرام مجانب‌های Bode این سیستم کدام است؟

$$G(s)=\frac{(s-1)e^{-0.4s}}{(2s+1)^3}$$

۱)


۲)


۳)


۴)


۸ـ در مورد سیستمی با معادله مشخصه $1+GH=S^4+3S^3+3S+6=0$ می‌توان نتیجه گرفت که سیستم:

۱) پایدار است.
۲) دارای یک ریشهٔ ناپایدارکننده است.
۳) دارای دو ریشهٔ ناپایدارکننده است.
۴) دارای سه ریشهٔ ناپایدارکننده است.

۹ـ برای تابع انتقال $\frac{1-e^{-s}}{s}$ مقدار AR و ϕ کدام است؟

۱) $\phi=\tan^{-1}\frac{\sin\omega}{\cos\omega-1}$, $AR=\sqrt{\frac{\omega^2}{2(1-\cos\omega)}}$

۲) $\phi=\tan^{-1}\frac{\cos\omega-1}{\sin\omega}$, $AR=\sqrt{\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}}$

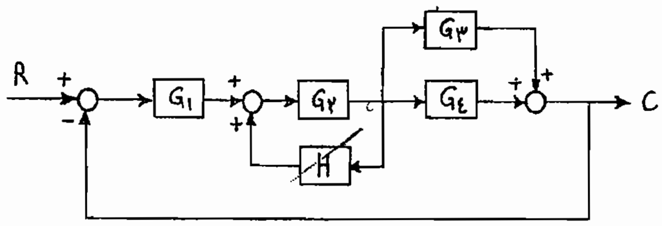
۳) $\phi=\tan^{-1}\frac{\cos\omega-1}{2\sin\omega}$, $AR=\sqrt{\frac{\omega}{2(1-\cos\omega)}}$

۴) $\phi=\tan^{-1}\frac{2(\cos\omega-1)}{\sin\omega}$, $AR=\sqrt{\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}}$

۱۰ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی برابر است با $G(s)=\frac{1}{s(s-1)}$. اگر از یک کنترلر PI برای کنترل استفاده شود و تابع تبدیل مسیر برگشت واحد باشد کدام عبارت صحیح است؟

۱) سیستم مدار بسته همواره ناپایدار است.
۲) سیستم مدار بسته در بهره‌های کم ناپایدار و در بهره‌های بالا پایدار است.
۳) سیستم مدار بسته در بهره‌های کم پایدار و در بهره‌های بالا ناپایدار است.
۴) با انتخاب مناسب K_c و τ_I می‌توان سیستم مدار بسته را پایدار کرد.

۱۱ ـ نمودار جعبه‌ای زیر را در نظر بگیرید:



تابع تبدیل $\frac{C(s)}{R(s)}$ برابر است با:

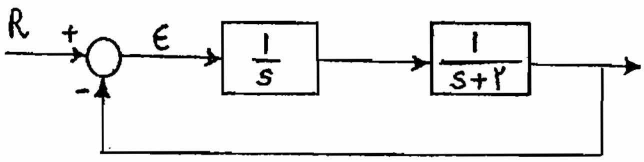
۱) $\frac{G_1G_2(G_3+G_4)}{1-G_2H-G_1G_2(G_3+G_4)}$

۲) $\frac{G_1G_2(G_3+G_4)}{1-G_2H+G_1G_2(G_3+G_4)}$

۳) $\frac{G_1G_2(G_3+G_4)}{1+G_2H-G_1G_2(G_3+G_4)}$

۴) $\frac{G_1G_2(G_3+G_4)}{1+G_2H+G_1G_2(G_3+G_4)}$

۱۲ ـ مدار کنترل زیر را در نظر بگیرید:



مطلوبست افت کنترل (off-set)، اگر $R(t)=t$ باشد، کدام است؟

۱) $\text{off}-\text{set}=0.5$ ۲) $\text{off}-\text{set}=0$ ۳) $\text{off}-\text{set}=1$ ۴) $\text{off}-\text{set}=2$

۱۳ ـ اگر توابع انتقال دو سیستم کنترل به صورت $G_2=\frac{10}{10s^2+8s+10}$ ، $G_1=\frac{5}{5s^2+8s+5}$ باشد، کدام سیستم نسبت به ورودی پله، نوسانی‌تر است؟

۱) G_1

۲) هر دو به یک اندازه نوسانی هستند.

۳) G_2

۴) هیچ‌کدام نوسانی نیستند.

۱۴ ـ در چه شرایطی، مقدار اولیه پاسخ به سیستم زیر مساوی مقدار نهایی آن می‌شود؟ $G(S)=K\frac{(S^2+\alpha)(S+\beta)}{S^3+2S+1}$

۱) $\alpha\beta=1$ ۲) $\alpha^2+\beta^2=1$ ۳) $\alpha=\beta$ ۴) $\alpha+\beta=1$

۱۵ ـ تغییرات دمای یک کوره نسبت به میزان سوخت ورودی به آن به صورت $\frac{T(s)}{Q(s)}=\frac{K}{\tau^2s^2+2\xi\tau s+1}$ است. به ازای افزایش پله‌ای در میزان سوخت به میزان $0.1\frac{kg}{s}$ دمای کوره از $80^\circ C$ نهایتاً به $82^\circ C$ می‌رسد، بهره سیستم چقدر است؟

۱) $K=5$ ۲) $K=1$ ۳) $K=10$ ۴) $K=20$

۷ـ ۱۰ـ پاسخ سوالات آزمون ۸۷

۱ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

قطب‌های مدار بسته همان ریشه‌های مخرج تابع مدار بسته هستند $(1+GH=0)$

$$1+GH=1+\frac{K(s+1)}{S(S-1)}=0$$

$$S(S-1)+K(S+1)=0$$

$S=-3$ درمعادله فوق قرار داده می‌شود تا K به‌دست آید.

$$-3(-3-1)+K(-3+1)=0$$

$$K=6$$

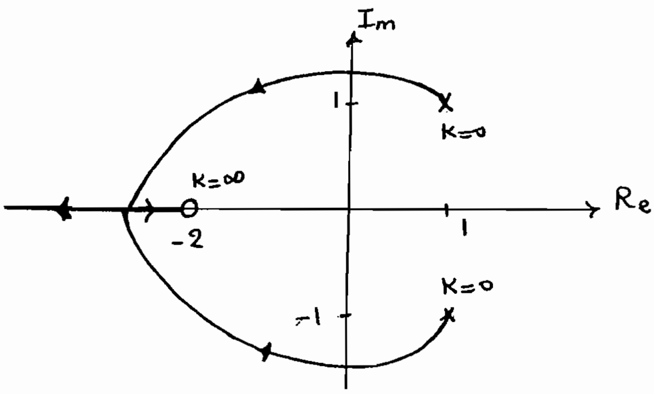
۲ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\text{حاشیه بهره } GM=\frac{1}{AR\Big|_{\text{when }\phi=-180}}=\frac{1}{0.6}=\frac{5}{3}$$

$$\text{حاشیه فاز } PM=\phi_g\Big|_{\text{when }AR=1}-(-180)=-135-(-180)=45^\circ$$

۳ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مکان هندسی این سیستم در شکل زیر رسم شده است. با توجه به شکل معلوم است که بهره‌های کم سیستم نوسانی است (ریشه مختلط) و در بهره‌های زیاد غیرنوسانی است (ریشه حقیقی)



۴ ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$X(t)=u(t) \rightarrow X(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{e^{-3s}}{S^2(S+4)}=\left[\frac{A}{S^2}+\frac{B}{S}+\frac{C}{S+4}\right]e^{-3S}$$

$$Y(t)=\left[A(t-3)+B+Ce^{-4(t-3)}\right]u(t-3)$$

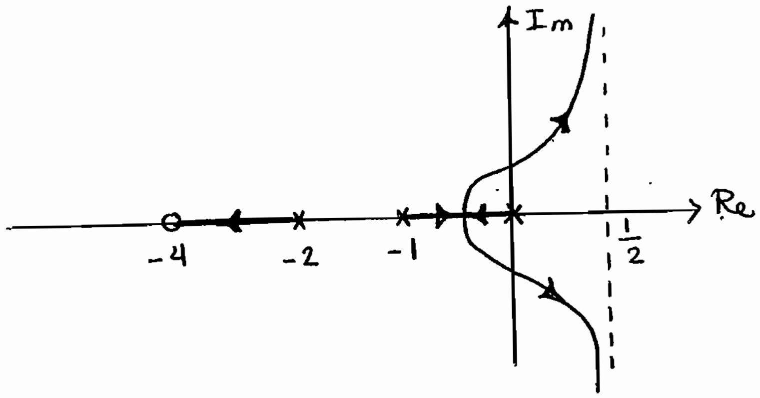
جمله At در هیچ‌کدام از گزینه‌ها وجود ندارد. اگر S از مخرج تابع انتقال در صورت مسئله حذف شود:

$$Y(s)=\frac{e^{-3s}}{S(S+4)} \rightarrow Y(t)=0.25\left[1-e^{-4t+12}\right]u(t-3)$$

که همان گزینه ۲ خواهد بود.

۵ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مکان هندسی این سیستم مطابق شکل زیر است:



$$\gamma=\frac{(0-1-2)-(-4)}{3-1}=\frac{1}{2}$$

با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که در بهره‌های کم سیستم پایدار و در بهره‌های بالا ناپایدار است. البته به کمک آزمون روث هم این مسئله قابل حل بود:

$$1+GH=S(S+1)(S+2)+K(S+4)=0$$

$$S^3+3S^2+2S+K(S+4)=S^3+3S^2+(2+K)S+4K$$

	1	2+K
	3	4K
	$\frac{6-K}{3}$	
	4K	

شرط پایداری:

$$6-K>0$$
$$4K>0$$

در نتیجه:

$$0<K<6$$

۶ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$S=i\omega=2i$ را در معادله مشخصه جایگزین می‌کنیم تا K به‌دست آید:

$$(2i)^3+0.5(2i)^2+(3+K)(2i)+K+1=0$$

$$(2K-2)i+(K-1)=0 \rightarrow K=1$$

۷ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

فرکانس‌های شکست به ترتیب زیر هستند:

$$2S+1 \rightarrow \omega=\frac{1}{2}$$

$$S-1 \rightarrow \omega=1$$

شیب مجانب Bode در فاصله $\omega=0$ تا $\omega=\infty$ به قرار زیر خواهد بود:

$0<\omega<\frac{1}{2} \rightarrow$ شیب $=0$

$\frac{1}{2}<\omega<1 \rightarrow$ شیب $=-3$

$1<\omega<\infty \rightarrow$ شیب $=-2$

۸ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$1+GH=S^4+3S^3+0S^2+3S+6$$

1	0	6
3	3	
−1	6	
21		
6		

این سیستم دارای دو ریشه ناپایدارکننده است چون در ستون اول جدول روث دوبار تغییر علامت داریم.

۹ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$G(i\omega)=\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}=\frac{1-\cos\omega+i\sin\omega}{i\omega}$$

$$G(i\omega)=\frac{\sin\omega}{\omega}-\frac{(1-\cos\omega)}{\omega}i$$

$$AR=\sqrt{\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\omega}{\omega}\right)^2}$$

$$AR=\sqrt{\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}}$$

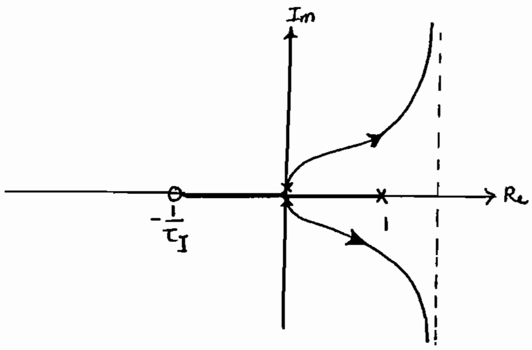
$$\phi=\tan^{-1}\left[\frac{-\left(\frac{1-\cos\omega}{\omega}\right)}{\frac{\sin\omega}{\omega}}\right]$$

$$\phi=\tan^{-1}\left[\frac{\cos\omega-1}{\sin\omega}\right]$$

۱۰ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$GH=\frac{K\left(1+\frac{1}{\tau_I S}\right)}{S(S-1)}=\frac{K\left(\tau_I S+1\right)}{\tau_I S^2(S-1)}$$

پایداری این سیستم هم به کمک مکان هندسی و هم به کمک آزمون روث قابل بررسی است. در شکل زیر مکان هندسی این سیستم رسم شده است:



$$\gamma=\frac{(0+0+1)-\left(\frac{-1}{\tau_I}\right)}{3-1}=\frac{1+\frac{1}{\tau_I}}{2}>0$$

ملاحظه می‌شود دو شاخهٔ مکان که از قطب‌های $S=0$ شروع می‌شوند همواره در سمت راست محور موهومی هستند لذا سیستم مدار بسته همواره ناپایدار است.

۱۱ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

G_2 و H با هم یک حلقه فیدبک مثبت تشکیل داده‌اند لذا G_2H با علامت منفی در مخرج باید باشد. G_1 و G_2 و G_3 هم با هم یک حلقه فیدبک منفی تشکیل داده‌اند لذا ترم $G_1G_2\left(G_3+G_4\right)$ باید با علامت مثبت درمعادله ظاهر شود.

روش تشریحی:

$$\left[(R-C)G_1+\frac{C}{G_3+G_4}H\right]G_2\times\left(G_3+G_4\right)=3$$

$$\frac{C}{R}=\frac{G_1G_2\left(G_3+G_4\right)}{1-G_2H+G_1G_2\left(G_3+G_4\right)}$$

۱۲ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\text{offset}=\underset{S\to 0}{S\times\frac{1}{S^2}}\left[1-\frac{\frac{1}{S}\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{S}\times\frac{1}{2}}\right]=2$$

۱۳ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$G_2\begin{cases}\tau_2=1\\ \xi_2=\frac{4}{10}\end{cases}$

G_2 نوسانی‌تر است. $\rightarrow\quad \xi_2<\xi_1$

۱۴ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$(s) \rightarrow K\alpha\beta=K \rightarrow \alpha\beta=1$

۱۵ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$AK=82-80 \rightarrow AK=2$

$0.1 \rightarrow K=20$

۵ ـ تابع تبدیل فرآی

با:

۱) $-\cos t$

۶ ـ برای سیستم کنت

۱) $k_c=\sqrt{2}$

۲) $k_c=2\sqrt{2}$

۳) $k_c=1$

۴) $k_c=2$

۷ ـ سیستم کنترلی

می‌کند؟

۱) $k_c>4$

۸ ـ مقدار نهایی پاسخ

۱) $\frac{1}{16}$

۳) $\frac{15}{16}$

۹ ـ کدام یک از سیس

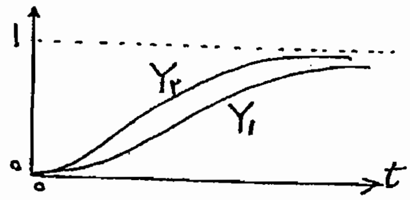
۱) $G=\frac{1}{2s+1}$

۳) $G=\frac{2}{3s+1}$

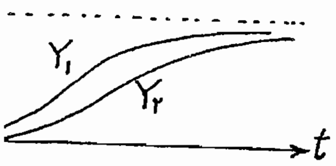
۱۰ ـ اگر $Y_1(s)=\frac{1}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$ و $Y_2(s)=\frac{\tau_3 s+1}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$ باشد، کدام یک از نمودارهای زیر ممکن

فرآیند به ورودی پله‌ای واحد در یک مدار پس‌خور با کنترلر تناسبی باشد؟

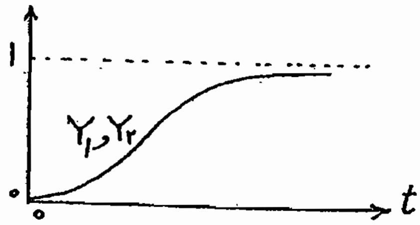
۱)



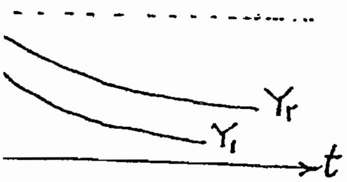
۲)



۳)



۴)

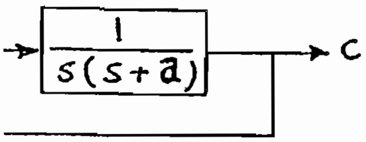


۱۱ ـ تابع انتقال مدار بسته یک سیستم پس خور واحد منفی بصورت $\frac{(s+2)^2}{1-(s+2)^2}$ می‌باشد. تابع انتقال مدار با

۱) $(s+2)^2$ ۲) $\frac{1}{(s+2)^2}$ ۳) $\frac{(s+2)^2}{1-2(s+2)^2}$ ۴) $\frac{1-2(s+2)^2}{(s+2)^2}$

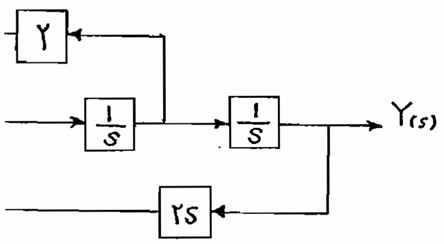
۱۲ ـ در شکل زیر در صورت یک تغییر پله‌ای در ورودی R پاسخ سیستم C(t) بدون نوسان و با بیشترین سرع

می‌رسد. در این صورت مقدار a چقدر است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۱۳ ـ در نمودار جعبه‌ای نشان داده شده، تابع تبدیل $\frac{Y(s)}{X(s)}$ عبارتست از:



۱) $\frac{1}{s}$ ۲) $\frac{1}{s^2}$

۳) $\frac{1}{s^3}$ ۴) $\frac{1}{s+1}$

۷ـ۱۱ـ سؤالا

۱ ـ تابع تبدیل مد

نمودار نیکوئیست (t

۱)

۳)

۲ ـ معادله مشخصه

برای آنکه پاسخ ماند

۱) k=3

۳ ـ به یک سیستم

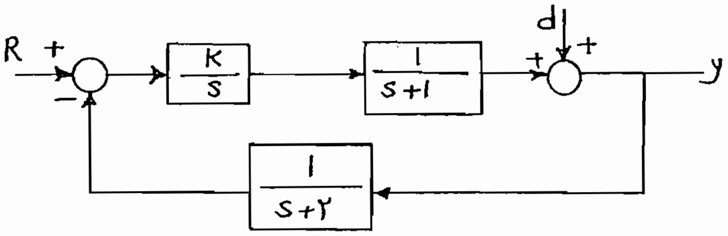
۱) $y(t)|_{t=1}=0$
۲) $y(t)|_{t=1}=1$
۳) $)|_{t=1}=e-1$
۴) $_{t=1}=1-e^{-1}$

۴ ـ تابع تبدیل مدار

با استفاده از مکان هن

۱) به ازاء تمام به
۲) در بهره‌های پا
۳) در بهره‌های پا
۴) به ازاء تمام به

۱۴ ـ سیستم مدار بسته زیر را در نظر بگیرید. به ازای چه مقداری از k، وقتی اغتشاش (d) تغییر پله‌ای کند، خروجی (y) در آستانه ناپایداری قرار می‌گیرد؟



۱) k=1
۲) k=2
۳) k=3
۴) k=6

۱۵ ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی به صورت زیر است:

$$G(s) = k\frac{(s+1)e^{-2s}}{s^2+1}$$

زاویه فاز این سیستم در پاسخ فرکانسی برای $\omega > 1$ برابر است با:

۱) $\phi = \tan^{-1}\omega - 2\omega - \frac{\pi}{4}$
۲) $\phi = -\tan^{-1}\omega + 2\omega + \frac{\pi}{2}$
۳) $\phi = \tan^{-1}\omega - 2\omega - \frac{\pi}{2}$
۴) $\phi = \tan^{-1}\omega - 2\omega - \pi$

۷-۱۲- پاسخ سؤالات کنترل آزمون سراسری ۱۳۸۸

۱- گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{w}{2}\right)-\left[\tan^{-1}w+\pi+\tan^{-1}\left(\frac{w}{-1}\right)\right]$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{w}{2}\right)-\pi$$

$$w=0 \quad\rightarrow\quad \phi=-\pi$$

$$w=\infty \quad\rightarrow\quad \phi=-\frac{\pi}{2}$$

ملاحظه می‌شود وقتی W از صفر تا ∞ تغییر می‌کند زاویه دیاگرام نایکویست از $-\pi$ تا $-\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند. لذا گزینه ۲ صحیح است.

۲- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

در معادله مشخصه $s=3i$ را قرار می‌دهیم:

$$(3i)^3+(3i)^2+k(3i)+k=0$$

$$(-27+3k)i+(k-9)=0$$

$$k=9$$

۳- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$X(t)=tu(t)-(t-1)u(t-1)$$

$$X(s)=\frac{1}{S^2}-\frac{1}{S^2}e^{-S}$$

$$Y(s)=\frac{1}{S^2(S+1)}e^{-2S}-\frac{1}{S^2(S+1)}e^{-3S}$$

$$Y(t)=\left[(t-2)-1+e^{-(t-2)}\right]u(t-2)-\left[(t-3)-1+e^{-(t-3)}\right]u(t-3)$$

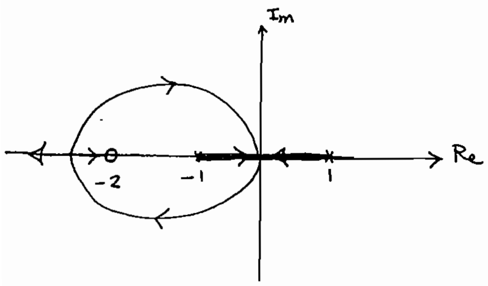
$$Y(1)=0$$

روش ساده:

چون در تابع انتقال e^{-2S} داریم لذا پاسخ در $u(t-2)$ ضرب خواهد شد. مقدار $u(t-2)$ در لحظه $t=1$ (که کوچکتر از ۲ است) برابر صفر خواهد شد.

۴- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با توجه به شکل روبرو معلوم است که در بهره‌های پایین ناپایدار و در بهره‌های بالا پایدار است. البته از آزمون روث هم می‌توانستیم استفاده کنیم:



$$1+GH=(S^2-1)+K(S+2)$$

$$1+GH=S^2+KS+(2K-1)$$

شرط پایداری:

1	2k−1
k	
2k−1	

$$2k-1>0$$
$$k>\frac{1}{2}$$

لذا در بهره‌های بالا پایدار و در بهره‌های پایین ناپایدار است.

۵ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$AR=\frac{\sqrt{2}\times 1}{\sqrt{W^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+1}}=1$$

$$\phi=\left\{0-\frac{\pi}{4}W\right\}-\left\{\tan^{-1}W\right\}=-\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}1=-\frac{\pi}{2}$$

$$y(t)=1\times \mathrm{Sin}(t-\frac{\pi}{2})=-\cos t$$

۶ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$PM=45=\phi_g-(-180)\ \rightarrow\ \phi_g=-135$$

$$-135=\{0\}-\left\{3\tan^{-1}w\right\}\ \rightarrow\ w=1$$

$$AR=1=\frac{K}{(\sqrt{\omega^2+1})^3}\ \rightarrow\ \frac{K}{(\sqrt{2})^3}\ \rightarrow\ K=2\sqrt{2}$$

۷ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

پاسخ زمانی نوسانی می‌شود که ریشه‌ها موهومی شوند لذا:

$$1+GH=(S+1)(S+2)+K_c=0$$

$$S^2+3S+2+K_c=0$$

$$\Delta=9-4(2+K_c)$$

شرط ریشه موهومی $\Delta<0$ است:

$$9-4(2+K_c)<0\ \rightarrow\ K_c>0.25$$

۸ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$C(t=\infty)=\lim_{S\rightarrow 0} SC(s)$$

$$C(s)=R(S)\times\frac{C}{R}=\frac{1}{S}\times\frac{K_c\times\frac{3}{2}}{1+K_c\times\frac{3}{2}}$$

$$K_c=10$$

از معادلات فوق خواهیم داشت:

$$C(\infty)=\frac{15}{16}$$

لازم به ذکر است که در محاسبه تابع انتقال $\frac{C}{R}$ مقدار S برابر صفر قرار داده شده است که این امر برای کوتاه کردن مراحل محاسبات انجام شده است چون در نهایت باید S=0 قرار داده شود.

۹ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.
هر کدام τ کوچکتر و K بزرگتر داشته باشند.

$\tau_1 = 2 \quad , \quad K_1 = 1$

$\tau_2 = 3 \quad , \quad K_2 = 1$

$\tau_3 = 3 \quad , \quad K_3 = 2$

$\tau_4 = 2 \quad , \quad K_4 = 2$

۱۰ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.
چون درجه نسبی سیستم Y_2 کوچکتر از سیستم Y_1 است لذا پاسخ آن سریعتر است.

درجه صورت- درجه مخرج= درجه نسبی یک سیستم

Y_1 درجه نسبی سیستم =3-0=3

Y_2 درجه نسبی سیستم =3-1=2

منظور از درجه سیستم توان S در معادله مربوط به آن سیستم است.

۱۱ ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\text{مدار بسته} = \frac{C}{R} = \frac{GH}{1-GH} = \frac{(S+2)^2}{1-(S+2)^2}$$

$$\text{مدار باز} = GH = (S+2)^2$$

۱۲ ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.
حداکثر سرعت و حداقل نوسان یعنی $\xi = 1$ (میرائی بحرانی)

$$\text{مخرج مدار بسته} = S(S+a)+1$$

$$= S^2 + as + 1$$

$$\tau = 1 \quad , \quad 2\xi\tau = a \rightarrow 2\times1\times1 = a \rightarrow a = 2$$

۱۳ ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\left[X + 2\frac{Y}{\frac{1}{S}} - 2SY\right]\frac{1}{S}\frac{1}{S} = Y$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{S^2}$$

۱۴ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.
از آزمون روث استفاده می‌کنیم:

$$1+GH = 1 + \frac{K}{S(S+1)(S+2)}$$

$$1+GH = S(S+1)(S+2)+K$$

$$1+GH = S^3 + 3S^2 + 2S + K$$

شرط پایداری:

$$6-k>0$$
$$k<6$$

مرز پایداری:

$$6-k=0$$
$$k=6$$

1	2
3	k
$\frac{6-k}{3}$	
k	

۱۵ ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$G=\frac{k(S+1)e^{-2S}}{(S+i)(S-i)}$$

$$\phi=\left\{0+\tan^{-1}(w)-2w\right\}-\left\{\tan^{-1}(w)+\Pi+\tan^{-1}\left(\frac{w}{-1}\right)\right\}$$

$$\phi=\tan^{-1}(w)-2w-\pi$$

نکته : زاویه $\tau S-1$ برابر $\pi+\tan-1\left(\frac{w\tau}{-1}\right)$ است.

یادداشت

ورودی: هر چیزی که موازنه جرم، انرژی یا مومنتم را تحت تأثیر قرار دهد ورودی است.

در کنترل هدف این است که خروجی دارای مقدار معین مورد نظر ما (set point) باشد به وسیله ورودی هایی که قابل تنظیم اند.

ورودی ها دو دسته اند. ۱) دسته اول قابل تنظیم manipulated input

۲) دسته دوم غیر قابل تنظیم که به آن بار (load) و یا اغتشاش (Disturbance) گویند.

هر فرآیند دو دسته ورودی دارد: اغتشاش که بیرون سیستم اند (که قابل تغییر اند اما قابل تنظیم نیست) و قابل تنظیم که بر سر راه آنها شیر ~~[illegible]~~ وجود دارد.

یادداشت

یادداشت

یادداشت

یادداشت