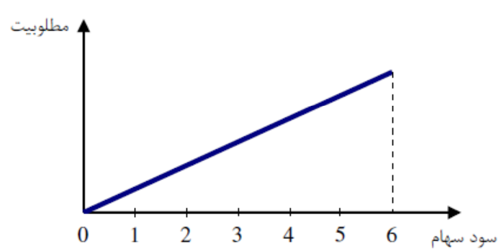
CHAPTER 10

FUZZY MULTI CRITERIA DECISION MAKING

Hassan Shavandi
Industrial Engineering dept.
Sharif University of Technology

مقدمه

مثال (۱-۸) - فرض کنید هیأت مدیره یک شرکت درصدد تعیین مقدار بهینه سود سهام است. تابع مطلوبیت آن ها، حداکثر کردن سود سهام است. محدودیت مسئله که در فضای تصمیم گیری تعریف می شود این است که سود سهام مابین صفر تا شش درصد می تواند باشد؛ در نتیجه مقدار بهینه سود سهام شش درصد است. (شکل(۱-۸))



شکل (۱-۸)- تابع مطلوبیت سود سهام

مقدمه

- در سال ۱۹۷۰ بلمن و زاده، این مدل کلاسیک تصمیم گیری را در نظر گرفته و یک مدل تصمیم گیری در شرایط فازی ارایه کردند که دانشمندان دیگری آن را توسعه دادند.
- آن ها شرایطی را در نظر گرفتند که تصمیم گیری تحت شرایط قطعی است، اما تابع هدف و محدودیت های مسئله فازی هستند.
- تابع هدف فازی با تابع عضویت خود مشخص می شود و همین طور محدودیت های فازی مسئله نیز با تابع عضویت خود معرفی می شوند.
- در تصمیم گیری فازی، اشتراک («و» منطقی) بین محدودیت ها و تابع هدف جهت انتخاب بهینه تابع هدف مطرح می شود.
- در نتیجه «یک تصمیم» در شرایط فازی از اشتراک بین تابع هدف فازی و محدودیت‌های فازی مسئله به دست می آید.

مقدمه

مثال (۲-۸)- تابع هدف یک مسئله، به صورت جمله « x می‌بایست اساساً بزرگتر از ۱۰ باشد» و توسط تابع عضویت ذیل تعریف می شود :

$$\mu_O(x)=\begin{cases}0 & x\le 10\\ (1+(x-10)^{-2})^{-1} & x>10\end{cases}$$

محدودیت «x می بایست در مجاورت ۱۱ باشد» نیز توسط تابع عضویت ذیل مطرح می‌شود :

$$\mu_{\tilde{C}}(x)=(1+(x-11)^4)^{-1}$$

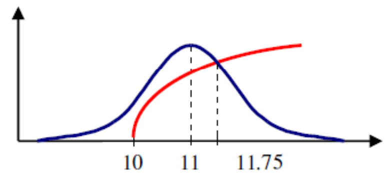
در نتیجه تابع عضویت تصمیم $\mu_{\tilde{D}}(x)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$\mu_{\tilde{D}}(x)=\mu_{\tilde{O}}(x)\wedge\mu_{\tilde{C}}(x)$$

$$\mu_{\tilde{D}}(x)=\begin{cases}\min\{(1+(x-10)^{-2})^{-1},(1+(x-11)^4)^{-1}\} & x>10\\ 0 & x\le 10\end{cases}$$

مقدمه

$$\mu_{\tilde{D}}(x)=\begin{cases}(1+(x-11)^4)^{-1} & x>11.75\\ (1+(x-10)^{-2})^{-1} & 10<x\le 11.75\\ 0 & x\le 10\end{cases}$$



شکل (۲-۸)- فضای تصمیم گیری فازی مثال (۲-۸)

در واقع نقطه بهینه ۱۱.۷۵ از حداکثر کردن مطلوبیت تصمیم به دست می آید که طبق رابطه ذیل تعیین می شود.

$$x_{\max}=\arg(\max_x \min\{\mu_{\tilde{G}}(x),\mu_{\tilde{C}}(x)\})$$

تصمیم گیری چند معیاره

- در برخی از مسایل تصمیم گیری، شرایطی وجود دارد که جواب بهینه با در نظر گرفتن بیش از یک معیار می بایست تعیین گردد.
- یعنی فاکتورها و معیارهای مختلفی برای تعیین جواب بهینه لازم است بررسی گردند به این گونه موارد، مدل های تصمیم گیری چند معیاره گفته می شود.
- تصمیم گیری چند معیاره به دو طبقه عمده تقسیم می شود :

- **تصمیم گیری چند هدفه** (MODM)

Multi Objective Decision Making

- **تصمیم گیری چند شاخصه** (MADM)

Multi Attribute Decision Making

تصمیم گیری چند معیاره

- مدل های تصمیم گیری چند هدفه بیشتر به منظور طراحی به کار گرفته می شوند و عمدتاً با مدل سازی ریاضی در فضای پیوسته همراه هستند.
- در حالی که مدل های تصمیم گیری چند شاخصه برای انتخاب یک گزینه برتر در بین چندین گزینه کاندید و عموماً با در نظر گرفتن معیارهای کیفی استفاده می شوند.
- در هر دو مدل تصمیم گیری چند معیاره، مفهوم اطلاعات نادقیق و فازی در برآورد پارامترها و ساختار مدل می تواند به کار گرفته شود.
- خصوصاً در مدل های تصمیم گیری چند شاخصه، که معیارها کیفی هستند و نظر انسان در تعیین میزان اهمیت معیارها و دسته بندی گزینه ها مطرح است، نظریه فازی می تواند به کار گرفته شود.

تصمیم گیری چند هدفه فازی

۲-۸- تصمیم گیری چند هدفه فازی

در تصمیم گیری چند هدفه فازی، تعداد n هدف فازی وجود دارد که می بایست در مواجهه با m محدودیت فازی به طور همزمان بهینه شوند. تعریف (۱-۸) که توسط بلمن و زاده در سال ۱۹۷۰ ارایه شده است از تعاریف اساسی در تصمیم گیری چند هدفه است که در ذیل شرح داده می شود.

تعریف (۱-۸)- فرض کنید یک هدف فازی $\tilde{G}$ و یک محدودیت فازی $\tilde{C}$ در فضای X داده شده است. آن گاه ترکیب $\tilde{G}$ و $\tilde{C}$ تشکیل یک تصمیم، $\tilde{D}$، می دهند که یک مجموعه فازی حاصل از اشتراک $\tilde{C}$ و $\tilde{G}$ است. یعنی داریم :

$$\tilde{D} = \tilde{G} \cap \tilde{C}$$

$$\mu_{\tilde{D}} = \min\{\mu_{\tilde{C}}, \mu_{\tilde{G}}\}$$

تصمیم گیری چند هدفه فازی

در حالت عمومی فرض کنید n هدف فازی به صورت $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, ..., \tilde{G}_n$ و m محدودیت فازی به صورت $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, ..., \tilde{C}_m$ تعریف شده اند. آن گاه مجموعه فازی تصمیم از اشتراک اهداف فازی و محدودیت های فازی به دست می آید.

$$\tilde{D} = (\tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap ... \tilde{G}_n) \cap (\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \cap ... \tilde{C}_m)$$

$$\mu_{\tilde{D}} = \min\{\mu_{\tilde{G}_1}, \mu_{\tilde{G}_2}, ..., \mu_{\tilde{G}_n}, \mu_{\tilde{C}_1}, \mu_{\tilde{C}_2}, ..., \mu_{\tilde{C}_m}\}$$

$$\mu_{\tilde{D}} = \min\{\mu_{\tilde{G}_i}, \mu_{\tilde{C}_j}\} \quad , \quad i = 1, ..., n \ , \ j = 1, ..., m$$

- در این روش فرض بر این است که همه اهداف و محدودیت ها از یک درجه اهمیت یکسانی برخوردار هستند.

تصمیم گیری چند هدفه فازی

- نوع دیگر تصمیم گیری چند هدفه فازی وجود دارد که در آن، توابع هدف به صورت کلاسیک تعریف می شوند منتهی بهینه سازی آن ها به طور فازی انجام می شود که در حالت عمومی ساختار مسئله به شرح ذیل است: (در این مدل حداکثر کردن حدودی اهداف مد نظر است.)

$$\begin{aligned}
&\tilde{\max} \ \ f_1(x) \\
&\tilde{\max} \ \ f_2(x) \\
&. \\
&. \\
&. \\
&\tilde{\max} \ \ f_n(x) \\
&s.t. \\
&\quad x \in S
\end{aligned}$$

$f_i(x)$، هدف i ام مسئله و S فضای جواب مسئله است.

تصمیم گیری چند هدفه فازی

- برای حل مسئله فوق ابتدا می بایست تابع عضویت اهداف در راستای حداکثر شدن به دست آید.
- در این حالت تابع عضویت برای حداکثر کردن فازی به معنی درجه ارضا شدن آن هدف از حداکثر شدن است.
- برای به دست آوردن تابع عضویت اهداف، ابتدا مقدار حداکثر یا همان مقدار بهینه هر هدف که به طور مجزا از سایر اهداف در مواجهه با محدودیت ها حل می شود به دست می آید.

مقدار حداکثر هدف i ام را M_i نامیده و به صورت ذیل به دست می آید :

$$\begin{aligned} M_i = \max \ & f_i(x) \\ s.t. \ & \\ & x \in S \end{aligned}$$

Fuzzy Sets and Applications
shavandi@sharif.edu

تصمیم گیری چند هدفه فازی

سپس مقدار حداقل تابع هدف i ام به عنوان بدترین مقدار که با m_i نشان داده می شود به صورت ذیل محاسبه می شود :

$$\begin{aligned} m_i = \min \ & f_i(x) \\ s.t. \ & \\ & x \in S \end{aligned}$$

در نتیجه برای تابع هدف i ام همیشه رابطه ذیل برقرار است :

$$m_i \le f_i(x) \le M_i$$

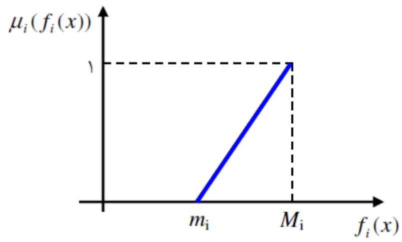
با محاسبه M_i و m_i برای اهداف مسئله، می توان طبق رابطه ذیل تابع عضویت حداکثر شدن هر هدف را به دست آورد :

$$\mu_i(f_i(x)) = \frac{f_i(x) - m_i}{M_i - m_i}$$

Sharif University of Technology
Industrial Engineering Dept.

تصمیم گیری چند هدفه فازی

منحنی تابع عضویت تابع هدف i ام در شکل (۳-۸) به تصویر کشیده شده است.



شکل (۳-۸) – تابع عضویت هدف i ام

در نهایت جواب بهینه مسئله طبق تعریف (۱-۸) با رابطه ذیل به دست می آید :

$$\begin{aligned} &\max \ \min_i \{f_i(x)\} \\ &\quad s.t. \\ &\qquad x \in S \end{aligned}$$

تصمیم گیری چند هدفه فازی

مثال (۳-۸)– فرض کنید مسئله تصمیم گیری چند هدفه فازی به صورت ذیل تعریف شود :

$$\begin{aligned} &\widetilde{\max} \ \ f_1(x) = 2x + 1 \\ &\widetilde{\max} \ \ f_2(x) = -3x + 5 \\ &\quad s.t. \\ &\qquad 0 \le x \le 2 \end{aligned}$$

مقادیر حداکثر و حداقل توابع هدف به شرح ذیل محاسبه می شوند :

$$\begin{aligned} M_1 &= \max_{0 \le x \le 2} \{2x + 1\} = 5 \\ M_2 &= \max_{0 \le x \le 2} \{-3x + 5\} = 5 \\ m_1 &= \min_{0 \le x \le 2} \{2x + 1\} = 1 \\ m_2 &= \min_{0 \le x \le 2} \{-3x + 5\} = -1 \end{aligned}$$

تصمیم گیری چند هدفه فازی

در نتیجه تابع عضویت اهداف به صورت ذیل به دست می آیند :

$$\mu_1(f_1(x)) = \frac{2x+1-1}{5-1} = 0.5x$$

$$\mu_2(f_2(x)) = \frac{-3x+5-(-1)}{5-(-1)} = -0.5x+1$$

در نتیجه مسئله تصمیم گیری چند هدف فازی تبدیل به مسئله ذیل می شود :

$$\begin{aligned} &\max\ \min\{0.5x, -0.5x+1\} \\ &\quad s.t. \\ &\qquad 0 \le x \le 2 \end{aligned}$$

تصمیم گیری چند هدفه فازی

پس از اعمال تبدیل های لازم مسئله فوق به یک مسئله برنامه ریزی خطی دو بعدی به شرح ذیل تبدیل می شود :

$$\begin{aligned} &\max\ \lambda \\ &\quad s.t. \\ &\qquad \lambda \le 0.5x \\ &\qquad \lambda \le -0.5x+1 \\ &\qquad 0 \le x \le 2 \\ &\qquad 0 \le \lambda \le 1 \end{aligned}$$

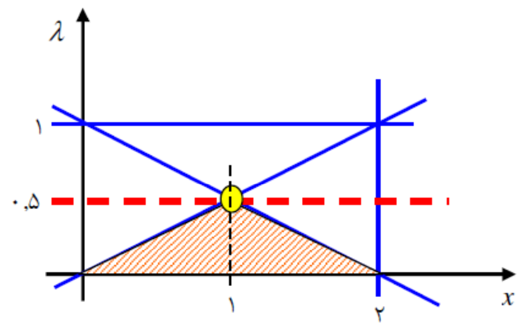
جواب بهینه مسئله برنامه ریزی خطی فوق برابر ، $x=1$ و $\lambda=0.5$ است. با استفاده از روش ترسیمی، فضای جواب و نقطه بهینه در شکل (۴-۸) به تصویر کشیده شده است. با داشتن جواب بهینه، مقدار بهینه توابع هدف به شرح ذیل است :

$$f_1^*(x) = 3$$

$$f_2^*(x) = 2$$

تصمیم گیری چند هدفه فازی

در جواب بهینه که مقدار $\lambda = 0.5$ به دست آمده بیانگر این است که اهداف مسئله با درجه ۰،۵ در راستای بهینه شدن همزمان ارضاء می شوند.



شکل (۴-۸)- جواب بهینه مسئله با روش ترسیمی

تصمیم گیری چند هدفه فازی

در حالت عمومی فرض بر این است که اهداف و محدودیت های مسئله از درجـه اهمیـت یکسـانی برخوردار هستند. در حالی که ممکن است اهمیت اهداف و محدودیت هـای مسـئله بـرای تصـمیم گیرنده متفاوت باشد. برای این حالت، یاگر در سال ۱۹۷۶ ، روشی بر مبنای اهمیت مختلف اهداف و محدودیت ها ارائه نمود.

در این روش از وزن های نمایی برای اهداف و محدودیت ها استفاده می شود. به نظر می رسد کـه این روش واقعی تر و عملی تـر از حالـت عمـومی اسـت. فـرض کنیـد وزن اهمیـت هـر هـدف یـا محدودیت با ضریب α_i $(\alpha_i > 0)$ مشخص شود. آن گـاه تـاثیر وزن اهمیـت بـرای هـر هـدف یـا محدودیت، با استفاده از رابطه به توان رساندن یک عدد یا مجموعه فازی که در فصـل دوم تشـریح گردید، به دست می آید به طوری که داریم :

$$G_i(x)^{\alpha_i} = \{\mu_{G_i}(x)^{\alpha_i}\}$$

آن گاه برای تابع عضویت تصمیم خواهیم داشت :

$$D(x) = \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=m+1,\dots,n}} \{G_i(x)^{\alpha_i}, C_i(x)^{\alpha_i}\}$$

در نتیجه در این روش اهداف یا محدودیت هایی که اهمیت بیشتری دارند تاثیر بیشتری در جواب بهینه خواهند داشت.

تصمیم گیری چند شاخصه فازی

در تصمیم گیری چند شاخصه، هدف انتخاب گزینه برتر بین چندین گزینه با در نظر گرفتن معیارهای مورد نظر است. در حالت عمومی، m گزینه وجود دارد که می بایست با در نظر گرفتن n معیار بررسی و گزینه برتر انتخاب شود. در ساده ترین حالت فرض بر این است که معیارها از درجه اهمیت یکسانی برخوردار هستند. از تعریف (۱-۸) در اینجا نیز می توان برای تحلیل استفاده کرد. در این خصوص به مثال (۴-۸) توجه نمایید.

تصمیم گیری چند شاخصه فازی

مثال (۴-۸) – مسئله طراحی دامنه الکترونیکی داده های سرعت اتوبوس را در نظر بگیرید. در این مسئله، ما سعی می کنیم پروتکل ارتباطی مناسبی را از بین سه گزینه انتخاب کنیم. سه گزینه عبارتند از :

- CSMA/CD
- MAADS
- TP

فرض کنید این گزینه ها در یک سیستم با معیارهای عملکردی سلسله مراتبی با در نظر گرفتن فاکتورهایی مانند موارد ذیل ارزیابی می شوند :

۱- یکپارچگی سیستم
۲- پاسخ
۳- ساختار پیام
۴- استراتژی کنترل شبکه منعطف
۵- هزینه و پیچیدگی
۶- سازگاری
۷- دامنه خطا

تصمیم گیری چند شاخصه فازی

در این مثال، یکی از معیارهای مطرح شده مجدداً تجزیه می شود؛ در سطح بعدی، دامنه خطا به چهار معیار در سطح پایین تر تقسیم می‌شود که دارای اهمیت یکسانی هستند و عبارتند از :

- ردیابی خطا (FD)
- شمولیت خطا (FC)
- تجزیه خطا (FI)
- اصلاح سیستم (RC)

تصمیم گیری چند شاخصه فازی

- ما قصد انتخاب بهترین پروتکل از بین سه گزینه مطرح شده را داریم که در این راستا با توجه به فاکتورهای مطرح شده، چهار هدف به شرح ذیل تعریف می شود:
- پروتکل می بایست توانایی تعیین ردیابی عملیات اشتباه را داشته باشد. (ردیابی خطا [FD])
- پروتکل می بایست توانایی اندازه گیری وسعت و اندازه خطاهای ممنوع در سیستم را که از کل سیستم نشأت می گیرد، داشته باشد (شمولیت خطا [FC])
- پروتکل می بایست توانایی تجزیه یک خطا را در سطح مورد نیاز برای سازگاری با قسمت معیوب یا از دور خارج کردن آن را داشته باشد. (تجزیه خطا [FI])
- پروتکل می بایست توانایی مهیا کردن مکانیزم مناسب با توجه به نتایج تجزیه خطا را داشته باشد. به طوری که با تخصیص فعالیت و پردازش مناسب جایگزین و تخصیص گردش داده های مناسب، مشکل را رفع نماید. (اصلاح سیستم [RC])

تصمیم گیری چند شاخصه فازی

بنابراین مجموعه X برای این مثال که شامل گزینه های تصمیم گیری است به صورت ذیل تعریف می شود:

X={CSMA/CD, MAADS , TP}

اهداف تصمیم گیری نیز به صورت ذیل هستند :

$G_1 = FD \quad , G_2 = FC \quad , \quad G_3 = FI \quad , \quad G_4 = RC$

در این مسئله تصمیم گیری، محدودیتی وجود ندارد و صرفاً اهداف تعریف شده برای تصمیم گیری مد نظر قرار می گیرند. فرض کنید گزینه های تعریف شده توسط یک تیم متخصص و خبره برای هر معیار ارزیابی شده و نتایج ذیل به دست آمده است :

میزان رضایت فازی از توانایی FD : $G_1 = \{0.5, 0.7 , 0.3\}$

میزان رضایت فازی از توانایی FC : $G_2 = \{0.5, 0.4 , 0.8\}$

میزان رضایت فازی از توانایی FI : $G_3 = \{0.2, 0.01 , 0.6\}$

میزان رضایت فازی از توانایی RC : $G_4 = \{0.6, 0.4 , 0.9\}$

Fuzzy Sets and Applications
shavandi@sharif.edu

تصمیم گیری چند شاخصه فازی

با در نظر گرفتن روش تعیین تصمیم مناسب، تابع عضویت با اشتراک اهداف به دست می آید :

$$D(x) = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4$$

$$\mu_{D(x)} = \min_x \{G_i(x)\} = \{\min_{x_1}(0.5,0.5,0.2,0.6),$$
$$\min_{x_2}(0.7,0.4,0.01,0.4), \min_{x_3}(0.3,0.8,0.6,0.9)\}$$

$$\mu_{D(x)} = \{0.2, 0.01, 0.3\}$$

تصمیم بهینه معادل حداکثر درجه عضویت در تابع عضویت تصمیم است که به صورت ذیل به دست می آید :

$$x^* = \arg\{\max_x D(x)\}$$

$$x^* = \arg\{\max_x (0.2, 0.01, 0.3)\}$$

$$x^* = \arg\{0.3\}$$

$$x^* = x_3$$

در نتیجه تصمیم بهینه، پروتکل سوم یعنی (TP) است.

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : تعیین وزن شاخص ها

- روش های مختلفی برای تعیین وزن معیارها بر اساس اهمیت آن ها وجود دارد.
- یکی از معروف ترین و کاربردی ترین روش ها، روش مقایسه نسبی و زوجی معیارها است و در روش فرآیند سلسله مراتبی تحلیل مورد استفاده قرار می گیرد که توسط توماس ال ساتی ارایه شده است.

در این روش در هر زمان دو عنصر با همدیگر مقایسه می شوند. در نتیجـه بـه تعـداد $\frac{n(n-1)}{2}$ مقایسه نسبی زوجی در حالتی که n معیار داشته باشیم انجام می‌شود. در ایـن روش وقتـی ارزش مقایسه معیار i با j (a_{ij}) به دست می آید آن گاه خواهیم داشت:

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$$

ارزش مقایسه زوجی دو عنصر نسبت به هم، بـا توجـه بـه میـزان ارجحیـت و بـین اعـداد ۱ تـا ۹ تخصیص می یابد. عبارت ارجحیت یک عنصر به عنصر دیگر بـه شـرح جـدول (۱-۸) اسـت.

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : تعیین وزن شاخص ها

جدول (۱-۸)- مقادیر ارجحیت در مقایسه های زوجی

ارزش مقایسه زوجی با توجه به اهمیت	تعریف اهمیت
۱	اهمیت معادل
۳	اهمیت ضعیف یک گزینه نسبت به دیگری
۵	اهمیت قوی یک گزینه نسبت به دیگری
۷	اهمیت خیلی قوی یک گزینه نسبت به دیگری
۹	اهمیت مطلق یک گزینه نسبت به دیگری
۸ ،۶ ،۲،۴	ارزش های میانی بین دو ارزش مجاور

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : تعیین وزن شاخص ها

- اگر تعداد معیارها را p فرض کنیم آن گاه یک ماتریس $p \times p$ که ارزش مقایسه زوجی معیارها را نسبت به هم نشان می دهد به دست خواهد آمد.

- پس از تکمیل ماتریس، با جمع عناصر هر سطر و تقسیم آن بر جمع کل عناصر ماتریس وزن معیار مربوط به سطر به دست می آید.

- وزن به دست آمده از این روش خیلی نزدیک به وزن حاصل از مقادیر بردار ویژه است لذا به دلیل سادگی محاسبات از روش ذکر شده استفاده می شود.

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : تعیین وزن شاخص ها

مثال (۵-۸)- مثال (۴-۸) را در نظر بگیرید. فرض کنید برای به دست آوردن وزن اهمیت معیارها، ماتریس مقایسه نسبی معیارها با یکدیگر به صورت ذیل به دست آمده باشد :

$$B = \begin{array}{c} FD \\ FC \\ FI \\ RC \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & 7 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

سپس طبق روش گفته شده یا با استفاده از بردار ویژه، بردار وزن معیارها به صورت ذیل به دست می آید :

$$W = \begin{bmatrix} 0.31 \\ 0.05 \\ 0.27 \\ 0.37 \end{bmatrix} \begin{array}{c} FD \\ FC \\ FI \\ RC \end{array}$$

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : تعیین وزن شاخص ها

فرض کنید تابع عضویت تامین ارزش مورد نظر گزینه ها در مواجهه با هر معیار معادل ارزش هـای مثال (۴-۸) باشد آن گاه تابع عضویت تصمیم به صورت ذیل به دست خواهد آمد :

$$D(CSMA/CD)=\{\min(0.5^{0.31},0.5^{0.05},0.2^{0.27},0.6^{0.37})\}$$
$$=\{\min(0.80,\ 0.96,\ 0.65,\ 0.83)\}=0.65$$
$$D(MAADS)=\{\min(0.7^{0.31},0.4^{0.05},0.01^{0.27},0.4^{0.37})\}$$
$$=\{\min(0.89,\ 0.95,\ 0.29,\ 0.71)\}=0.29$$
$$D(TP)=\{\min(0.3^{0.31},0.8^{0.05},0.6^{0.27},0.9^{0.37})\}$$
$$=\{\min(0.69,\ 0.99,\ 0.87,\ 0.96)\}=0.69$$
$$x^*=TP=\arg\{\max_x D(x)\}$$

که جواب بهینه گزینه سوم یعنی TP است.

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : مرتب کردن فازی

- در تصمیم گیری چند شاخصه، اغلب لازم است گزینه ها با توجه به معیارهای مورد نظر مرتب شوند و سپس به ترتیب اولویت جهت انتخاب و پیاده سازی در نظر گرفته شوند.

اغلب تصمیم ها بر اساس رتبه یا رتبه بندی آلترناتیوها ساخته می شوند. به عنوان مثـال در حالـت کلاسیک فرض کنید ($y_1=5$) و ($y_2=2$) آن گاه به وضوح مشخص است که y_1 از y_2 بزرگتـر است ($y_1 \ge y_2$) و هیچ ابهامی در این رتبه بندی وجود نـدارد در حـالی کـه اگـر شـرایط عـدم قطعیت حاکم باشد آن گاه مرتب کردن نتایج با ابهام همراه خواهد بود. ایـن ابهـام هـم در شـرایط تصادفی و هم در شرایط فازی وجود دارد.

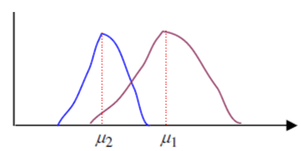
در حالت تصادفی، فرض کنید یک متغیر تصادفی X_1 با تابع احتمال گوسی که میانگین آن μ_1 و انحراف استاندارد آن σ_1 است و متغیر تصادفی دیگری به نام X_2 که آن هم گوسی و با میـانگین μ_2 و انحـــراف اســـتاندارد σ_2 در دســـت مـــی باشـــند . فـــرض کنیـــد داریـــم : ($\sigma_1>\sigma_2$ و $\mu_1>\mu_2$) حال اگر با این شرایط به منحنی شکل تابع احتمال این دو متغیر تصادفی در شکل (۵-۸) توجه نمایید. ملاحظه می کنید که هنوز در تشخیص این که کدام متغیـر بزرگتر است ابهام وجود دارد.

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : مرتب کردن فازی

به عنوان مثال فرض کنید متغیر X_1 مربوط به قد سوئدی ها و X_2 متغیر تصادفی قد ایتالیایی ها باشد. به دلیل عدم قطعیت امکان پاسخ به این سئوال که آیا سوئدی ها از ایتالیایی ها بلند قدترند، نیست البته می توان به طور متوسط گفت که سوئدی ها از ایتالیایی ها بلند قدترند و یا این که فراوانی قد بلند در سوئدی ها نسبت به ایتالیایی ها چیست؟ می توان احتمال این که یک سوئدی از یک ایتالیایی بلندقدتر باشد را محاسبه کرد. به عنوان مثال با احتمال ۷۰٪ سوئدی ها از ایتالیایی ها بلند قدترند. احتمال بزرگتر بودن یک متغیر تصادفی از یک متغیر تصادفی دیگر به صورت ذیل محاسبه می شود.

$$P(X_1 \geq X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{x_2}(x_1) dx_1$$

جاییکه F تابع توزیع تجمعی است.



شکل (۵-۸) مقایسه دو متغیر تصادفی

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : مرتب کردن فازی

- همانطور که ملاحظه می شود در حالت تصادفی نمی توان به طور قطعی بر بزرگتر بودن یک متغیر تصادفی نسبت به متغیر تصادفی دیگر حکم کرد و لذا احتمال بزرگتر بودن آن محاسبه می شود.

- در حالت فازی نیز مشابه حالت تصادفی نمی توان به طور قطعی در مقایسه دو عدد فازی حکم کرد ولی می توان میزان درستی یا صحت این که یک عدد فازی از یک عدد فازی دیگر بزرگتر است را محاسبه کرد.

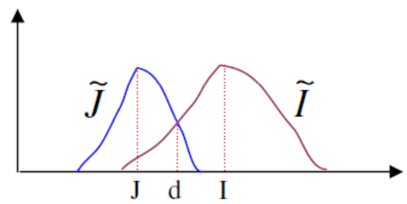
- این روش توسط دوبویس و پرید در سال ۱۹۸۰، ارایه شده است.

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : مرتب کردن فازی

فرض کنید دوعدد فازی $\tilde{I}, \tilde{J}$ وجود دارند. میزان درستی یا صحت بزرگتر بودن عدد فـازی $\tilde{I}$ از عدد فازی $\tilde{J}$ به صورت ذیل محاسبه می شود :

$$T(\tilde{I} \geq \tilde{J}) = \sup_{x \geq y} \min\{\mu_{\tilde{I}}(x), \mu_{\tilde{J}}(y)\}$$

در شکل (۶-۸) توابع عضویت دو عدد فازی $\tilde{I}, \tilde{J}$ نشان داده شده اند.



شکل (۶-۸) مقایسه دو عدد فازی

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : مرتب کردن فازی

با توجه به شکل (۶-۸) همیشه روابط ذیل برقرار است :

الف) اگر رابطه $I \geq J$ برقرار باشد، آن گاه داریم : $T(\tilde{I} \geq \tilde{J}) = 1$

ب) در غیر این صورت داریم :

$$T(\tilde{I} \geq \tilde{J}) = h(\tilde{I} \cap \tilde{J}) = \max(\tilde{I} \cap \tilde{J}) = \mu_{\tilde{I}}(d) = \mu_{\tilde{J}}(d)$$

در حالت عمومی برای مقایسه K عدد فازی، مشابه دو عدد فازی به صورت ذیل عمل می شود :

$$T(\tilde{I} \geq \tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \ldots \tilde{I}_K) = T(\tilde{I} \geq \tilde{I}_1) \text{ and } T(\tilde{I} \geq \tilde{I}_2) \text{ and } \ldots \text{ and } T(\tilde{I} \geq \tilde{I}_K)$$

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : مرتب کردن فازی

مثال (۶-۸) - فرض کنید سه عدد فازی $\tilde{I}, \tilde{J}$ و $\tilde{K}$ به صورت ذیل داده شده باشند :

$$\tilde{I} = \{\frac{1}{3} + \frac{0.85}{7}\}\ ,\ \tilde{J} = \{\frac{0.7}{4} + \frac{1}{6}\}\ ,\ \tilde{K} = \{\frac{0.8}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0.5}{8}\}$$

میزان صحت بزرگتر یا مساوی بودن عدد فازی $\tilde{I}$ از $\tilde{J}$ به صورت ذیل محاسبه می شود.

$$\begin{aligned} T(\tilde{I} \geq \tilde{J}) &= \max_{x_1 \geq x_2} \{\min(\mu_{\tilde{I}}(x_1), \mu_{\tilde{J}}(x_2))\} \\ &= \max_{x_1 \geq x_2} \{\min(\mu_{\tilde{I}}(7), \mu_{\tilde{J}}(4)), \min(\mu_{\tilde{I}}(7), \mu_{\tilde{J}}(6))\} \\ &= \max\{\min(0.8, 0.7), \min(0.8, 1)\} \\ &= \max\{0.7, 0.8\} \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

Fuzzy Sets and Applications
shavandi@sharif.edu

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : مرتب کردن فازی

حال فرض کنید با روش مشابه داشته باشیم :

$$T(\tilde{I} \geq \tilde{K}) = 0.8$$

آن گاه می توان $T(\tilde{I} \geq \tilde{J}, \tilde{K})$ را محاسبه کرد که به شرح ذیل خواهد بود :

$$\begin{aligned} T(\tilde{I} \geq \tilde{J}, \tilde{K}) &= \min\{T(\tilde{I} \geq \tilde{J}), T(\tilde{I} \geq \tilde{K})\} \\ &= \min\{0.8, 0.8\} \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

Sharif University of Technology
Industrial Engineering Dept.

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : روش ارجحیت

- در برخی از حالت های مقایسه ای، وقتی دو شیء به صورت فازی مقایسه می شوند خاصیت انتقال وجود ندارد.
- به عنوان مثال فرض کنید می خواهیم رنگ ها را بر اساس ارجحیت مرتب نماییم وقتی قرمز با آبی مقایسه می شود ما رنگ قرمز را ترجیح می دهیم و وقتی رنگ آبی با رنگ زرد مقایسه می شود ما رنگ آبی را ترجیح و اما وقتی که بین رنگ قرمز و زرد مقایسه می کنید ما ممکن است که رنگ زرد را انتخاب نماییم.
- لذا خاصیت انتقال ممکن است وجود نداشته باشد زیرا ترجیح قرمز به آبی و سپس ترجیح آبی به زرد ممکن است ترجیح قرمز به زرد را همراه نداشته باشد .
- برای این شرایط که خاصیت انتقال وجود ندارد رابطه دیگری توسط شیمورا در سال ۱۹۷۳، برای محاسبه نسبت ارجحیت معرفی شده است.

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : روش ارجحیت

فرض کنید x و y دو متغیر در فضای X و توابع زوج ذیل تعریف شده باشند.

$f_y(x)$: تابع عضویت x در مواجهه با y

$f_x(y)$: تابع عضویت y در مواجهه با x

آن گاه تابع ارجحیت به صورت ذیل محاسبه می شود :

$$f(x|y) = \frac{f_y(x)}{\max[f_y(x), f_x(y)]}$$

که یک مقیاس اندازه گیری برای درجه عضویت انتخاب x نسبت به y (x در مواجهه با y) است. در تابع ارجحیت، ارجحیت x نسبت به y بررسی می شود. برای توسعه رابطه فوق، فرض کنید n متغیر ($x_1, x_2, \dots, x_n$) در فضای X تعریف شوند که در مجموعه A قرار می گیرند یعنی داریم :

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$$

حال فرض کنیدمجموعه دیگری به نام A' ، که فاقد متغیر x_i است به صورت ذیل تعریف شود.

$$A' = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n\}$$

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : روش ارجحیت

و فرض کنید می خواهیم تابع ارجحیت x_i، نسبت به سایر متغیرهای مجموعه را به دست آوریم که به صورت ذیل می شود .

$$f\left(x_i \middle| A'\right)= f\left(x_i \middle| \{x_1, x_2,\dots, x_{i-1}, x_{i+1},\dots, x_n\}\right)$$
$$= \min\{ f\left(x_i|x_1\right), f\left(x_i|x_2,\dots\}\right)$$

از آنجائیکه ارجحیت یک متغیر نسبت به خودش برابر ۱ است یعنی :

$$f\left(x_i|x_i\right)=1$$

لذا داریم :

$$f\left(x_i|A'\right)= f\left(x_i|A\right)$$

حال می توانیم ماتریس ارجحیت را بامقادیر $f\left(x_i|x_j\right)$ ($i, j=1,2,\dots,n$) ایجاد نماییم. ماتریس ارجحیت یک ماتریس مربعی $n\times n$ است و ماتریس C نامیده می شود. ماتریس C می تواند برای رتبه بندی مجموعه های فازی نیز استفاده شود. برای تعیین ارجحیت کلی، می بایست حداقل هر سطر از ماتریس به دست آید که بیانگر ارجحیت متغیر مربوط به آن سطر نسبت به سایر متغیر هاست و به صورت ذیل است :

$$C_i' = \min\{ f\left(x_i|X\right)\} \quad , \quad i=1,2,\dots,n$$

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : روش ارجحیت

مثال (۶-۸) - فرض کنید در یک شرکت قرار است سخت افزاری جهت سیستم ایمنی سالن تولید خریداری گردد. چهار گزینه x_1، x_2، x_3، x_4 مطرح هستند .فاکتورهایی مانند هزینه، عملکرد، در دسترس بودن قطعات، نرم افزارهای مورد نیاز و... جهت بررسی مد نظر می باشند.

برای انتخاب گزینه مناسب ، ابتدا توابع عضویت مقایسه دودویی گزینه ها مشخص می شوند که به صورت ذیل است :

$$\begin{array}{llll}
f_{x_1}(x_1)=1 & f_{x_1}(x_2)=0.5 & f_{x_1}(x_y)=0.3 & f_{x_1}(x_4)=0.2 \\
f_{x_2}(x_1)=0.7 & f_{x_2}(x_2)=1 & f_{x_2}(x_3)=0.8 & f_{x_2}(x_4)=0.4 \\
f_{x_3}(x_1)=0.5 & f_{x_3}(x_2)=0.3 & f_{x_3}(x_3)=1 & f_{x_3}(x_4)=0.7 \\
f_{x_4}(x_1)=0.3 & f_{x_4}(x_2)=0.1 & f_{x_4}(x_3)=0.3 & f_{x_2}(x_1)=1
\end{array}$$

تصمیم گیری چند شاخصه فازی : روش ارجحیت

حال تابع ارجحیت گزینه ها نسبت به یکدیگر محاسبه و ماتریس C تشکیل می شود. که به عنوان نمونه محاسبه یکی از تابع های ارجحیت شرح داده می شود.

$$f(x_2|x_1)=\frac{f_{x_1}(x_2)}{\max\{f_{x_1}(x_2), f_{x_2}(x_1)\}}=\frac{0.5}{\max\{0.5,0.7\}}=0.71$$

$$C=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.71 & 1 & 0.38 & 0.11 \\ 0.6 & 1 & 1 & 0.43 \\ 0.67 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \min = f(x_i|x) \\ 1 \\ 0.38 \\ 0.43 \\ 0.67 \end{array}$$

درنتیجه گزینه x_1 بادرجه عضویت ۱ به سایر گزینه ها ارجحیت دارد و پس از آن، گزینه x_4، با درجه عضویت ۰/۶۷ نسبت به سایر گزینه ها ارجحیت دارد. در واقع اولویت بندی گزینه ها به صورت ذیل خواهد بود :

$X_1>X_4>X_3>X_2$

رویکرد عمومی در تصمیم گیری چند شاخصه فازی

- در مسایل تصمیم گیری چند شاخصه ، مجموعه ای از گزینه ها وجود دارند که می بایست با توجه به مجموعه ای از معیارها ارزیابی گردند.
- در مواجهه با هر معیار، گزینه ها می توانند اولویت بندی شوند در نتیجه ما نیاز داریم که با توجه به تمام معیارها ، یک اولویت بندی جامع از گزینه ها داشته باشیم.
- تعداد معیارها معمولاً متناهی فرض شده و در این بخش ما فرض می کنیم که تعداد گزینه ها نیز محدود و متناهی هستند .

رویکرد عمومی در تصمیم گیری چند شاخصه فازی

فرض کنید $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ مجموعه گزینه ها و $C=\{c_1,c_2,...,c_n\}$ مجموعه معیارهای تصمیم گیری باشند. آن گاه اطلاعات پایه جهت تصمیم گیری چند معیاره می تواند توسط یک ماتریس به نام R نمایش داده شود .

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ R=\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{array} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

در ابتدا فرض کنید عناصر ماتریس اعداد حقیقی هستند . که هر عنصر r_{ij} عددی بین صفر و یک بوده و میزان درجه تامین هر گزینه در مواجهه با هر معیار را نشان می دهد . در مسائل تصمیم گیری چند معیاره ، بردار دیگری به نام W وجود دارد که وزن معیارها را نشان می دهد.

$W=\{w_1,w_2,...,w_m\}$

رویکرد عمومی در تصمیم گیری چند شاخصه فازی

حال روش های مختلفی وجود دارد که با داشتن ماتریس R و بردار W می توان گزینه برتر را انتخاب نمود. رایج ترین روش، تبدیل مسئله به حالت تصمیم گیری یک معیاره است.
یعنی به وسیله یک تابع ، امتیاز هر گزینه نسبت به کل معیارها محاسبه می شود سپس با توجه به ماهیت مسئله ، گزینه برتر انتخاب گردد. به عنوان مثال یکی از کاربردی ترین روش ها، روش میانگین وزنی است که برای هر گزینه میانگین موزون امتیاز آن با توجه به تمام معیارها محاسبه می شود.

$$r_j=\frac{\sum_{i=1}^{m} w_i r_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} w_i},(j\in N_n)$$

رویکرد عمومی در تصمیم گیری چند شاخصه فازی

سپس با توجه به ماهیت مسئله تصمیم گیری ، حداکثر یا حداقل r_j ها معرف گزینه برتر خواهد بود. البته لازم به ذکر است که قبل از به کارگیری این روش ها، ماتریس R می بایست نرمال شود. یکی از روش های نرمالیزه کردن R می تواند به شرح ذیل باشد :

$$r'_{ij} = \frac{r_{ij} - \min\limits_{j \in N_n} r_{ij}}{\max\limits_{j \in N_n} r_{ij} - \min\limits_{j \in N_n} r_{ij}}$$

حال تصور کنید عناصر ماتریس R به صورت متغیرهای کلامی (اعداد فازی) و وزن معیارها نیز با متغیرهای کلامی (اعداد فازی) بیان شوند. استفاده از تابع عضویت مثلثی برای اعداد فازی حاصل از متغیرهای کلامی، بسیار مفید و کاربردی خواهد بود ولی هر عدد فازی پیوسته یا گسسته نیز می تواند استفاده شود. برای حل مسئله با استفاده از عملیات ریاضی تعریف شده در اعداد فازی، عدد فازی $\tilde{r}_j$ ، که بیانگر میانگین موزون امتیاز گزینه i ام است به صورت ذیل محاسبه می شود :

$$\tilde{r}_j = \sum_{i=1}^{m} \tilde{w}_i \tilde{r}_{ij}$$

رویکرد عمومی در تصمیم گیری چند شاخصه فازی

پس از محاسبه مقادیر فازی $\tilde{r}_j$، برای تمام گزینه ها، حاصل m عدد فازی است که بیانگر امتیاز فازی گزینه ها در مواجهه با معیارها است. برای تشخیص گزینه برتر نیاز به مرتب کردن m عدد فازی است که با استفاده از روش گفته شده در بخش (۲-۳-۸) می توان آن ها را مرتب کرد و گزینه های برتر را به ترتیب اولویت به دست آورد.

مثال (۷-۸)- شرکتی قصد استخدام چند کارمند را دارد معیارهای انتخاب کارمند مناسب از بین افراد متقاضی استخدام ، عبارتند از :

- قابلیت در پاسخ به سوالات
- اعتماد به نفس
- رفتار فیزیکی
- هوش و استعداد
- شخصیت اجتماعی

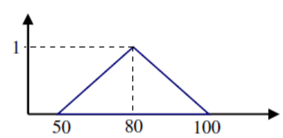
فرض کنید امتیازهای داده شده به افراد براساس هر معیار به شرح جدول (۲-۸) است.

رویکرد عمومی در تصمیم گیری چند شاخصه فازی

جدول (۲-۸)- ماتریس R

شخص/ معیار	شخص A	شخص B	شخص C
قابلیت در پاسخ به سوالات	عالی	متوسط	متوسط
اعتماد به نفس	خوب	بد	متوسط
رفتار فیزیکی	خوب	خوب	خوب
هوش و استعداد	متوسط	خوب	خوب
شخصیت اجتماعی	متوسط	خوب	خوب

مقادیر کلامی فوق با اعداد فازی مثلثی قابل نمایش هستند . به عنوان مثال مقدار کلامی خوب می تواند به صورت شکل (۷-۸) باشد.



شکل (۷-۸)- عدد فازی مثلثی مقدار کلامی خوب

رویکرد عمومی در تصمیم گیری چند شاخصه فازی

حال با استفاده از روش تشریح شده در بخش (۲-۶) می تواند اعداد فازی مثلثی معادل با سایر مقادیر کلامی را به دست آورد. لذا عناصر جدول فوق که همان $\tilde{r}_{ij}$ ها هستند، اعداد فازی مثلثی خواهند بود. مشابه روش فوق، درجه اهمیت هر یک از معیارها نیز به شرح ذیل تعیین می شود :

معیار	پاسخ به سوالات	اعتماد به نفس	رفتار	هوش و استعداد	شخصیت اجتماعی
درجه اهمیت	مهم	عادی	عادی	خیلی مهم	مهم

طبق روش بیان شده مقادیر کلامی فوق قابل تبدیل به اعداد فازی مثلثی هستند. حال امتیاز هر شخص ($\tilde{r}_j$) که حاصل آن نیز یک عدد فازی مثلثی خواهد بود به شرح ذیل محاسبه می شود :

$$\tilde{r}_j = \sum_{i=1}^{m} \tilde{w}_i \tilde{r}_{ij}$$

سپس با استفاده از روش مرتب کردن اعداد فازی که در بخش (۲-۳-۸) ارایه شد، اعداد فازی حاصل ($\tilde{r}_j$) که امتیاز نهایی فازی اشخاص هستند مرتب می شوند تا به ترتیب اولویت اشخاص برتر مشخص شوند.

روش تحلیل سلسله مراتبی فازی (Fuzzy AHP)

- **روش تحلیل سلسله مراتبی کلاسیک:**
- اساس این روش بر مقایسات زوجی استوار است.
- این روش با ایجاد درخت تصمیم شروع می شود که در سطح اول، هدف؛ در سطح دوم، معیارهای تصمیم گیری و در سطح سوم، گزینه های تصمیم قرار دارند.
- برای n معیار داده شده طبق روش شرح داده شده در بخش (۱-۳-۸) با مقایسه زوجی معیارها، وزن هر معیار به دست می آید.
- برای ارزیابی گزینه ها در مواجهه با معیارها نیز به طریق مشابه عمل می شود. یعنی گزینه ها به طور زوجی و در مواجهه با هر معیار به طور مستقل ارزیابی شده و درجه ارجحیت بین اعداد ۱ تا ۹ تخصیص می یابد.
- طبق روش گفته شده امتیاز هر گزینه در مواجهه با هر معیار محاسبه می شود. بدین ترتیب ماتریس R و بردار W ساخته می شوند و در نهایت با ضرب بردار W در ماتریس R امتیاز کلی گزینه ها به دست می آید که با مرتب کردن گزینه ها، گزینه برتر انتخاب می شود.

روش تحلیل سلسله مراتبی فازی (Fuzzy AHP)

- اولین روش تحلیل سلسله مراتبی فازی در سال ۱۹۸۳ و توسط لارهون و پدریک ایجاد شد که به دلیل پیچیدگی محاسباتی مورد استقبال قرار نگرفت.
- در سال ۱۹۹۶ روش دیگری توسط یک محقق چینی به نام یونگ چانگ ارایه شد که کاربردهای مناسبی داشته است. در ادامه روش مورد نظر برای تحلیل سلسله مراتبی فازی شرح داده می شود.
- در این روش فرض بر این است که در مقایسات زوجی، ارزش مقایسات به صورت تقریبی و با اعداد فازی مثلثی بیان می شوند.
- فرض کنید ماتریس مقایسه زوجی معیارها با اعداد فازی مثلثی به دست آمده است.

روش تحلیل سلسله مراتبی فازی (Fuzzy AHP)

سپس با استفاده از محاسبات ریاضی در اعداد فازی مثلثی مقدار ($\tilde{S}_i$) برای هر سطر ماتریس محاسبه می شود که رابطه آن به شرح ذیل است :

$$\tilde{S}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij}}$$

توجه داشته باشید که ارزش های $\tilde{A}_{ij}$ اعداد فازی مثلثی هستند، در نتیجه $\tilde{S}_i$، نیز یک عدد فازی مثلثی خواهد بود. پس از محاسبه $\tilde{S}_i$ ها، باید درجه صحت بزرگی آن ها نسبت به هم به دست آیند. این امر با استفاده از روش گفته شده در مرتب کردن فازی (بخش (۲-۳-۸)) انجام می شود. با استفاده از مفهوم روش گفته شده، برای دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A}_1 = (l_1, m_1, u_1)$ و $\tilde{A}_2 = (l_2, m_2, u_2)$ داریم :

اگر $m_1 \ge m_2$: $T(\tilde{A}_1 \ge \tilde{A}_2) = 1$

در غیر این صورت : $T(\tilde{A}_1 \ge \tilde{A}_2) = \dfrac{u_1 - l_2}{(u_1 - l_2) + (m_2 - m_1)}$

روش تحلیل سلسله مراتبی فازی (Fuzzy AHP)

درجه صحت بزرگی یک عدد فازی نسبت به سایر اعداد فازی نیز مشابه قبل (بخش (۲-۳-۸)) و به صورت ذیل محاسبه می شود :

$$w'_i = \min\{T(\tilde{S}_i \ge \tilde{S}_k)\} \qquad k = 1,2,\ldots,n\,, k \ne i$$

پس از محاسبه w'_i ها، بردار وزن معیارها (W)، با نرمالیزه کردن بردار W' به دست می آید. مشابه این اقدام برای به دست آوردن ماتریس R انجام می شود. پس از محاسبه بردار W و ماتریس R، طبق حالت کلاسیک، گزینه ها مرتب می شوند.