به نام خدا

جمع 31
44
collection اعظمی 53

* کاربرد ریاضیات *

جلسه اول
۸۸/۷/۲۰

Ref:

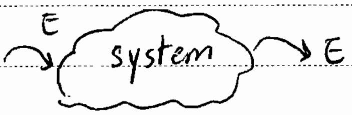
۱- انتشارات امیرکبیر دکتر فراد

مقدمه:
تعاریف

Introduction

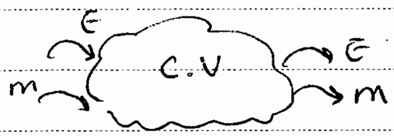
system : محدوده مشخص جرم مشخص در فضا

سیستم در تعریف کلاسیک فقط ورود انرژی را دارد جرم ورود و خروجی ندارد
پس با این تعریف هر جسم موجود زنده می‌تواند سیستم باشد.



Control volume

جرم مشخص در فضا یا محدوده مشخص در فضا cont vo گفته می‌شود که
علاوه بر انرژی جرم هم وارد و خارج می‌شود.



هر sys یا control volume یک فرآیند است یعنی با یک ورود و یک پاسخ مشخص را انجام دهد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یک سیستم را که یک input مشخص یک output مشخص داشته باشد.
یک رفتار مشخص ندارد و اگر این طو

Homogenous:
Hetrogenous:

همگن یا homogenous:

سیستم همگن سیستمی است که اگر از هر نقطه آن نمونه برداریم خواص یکسانی دارد یعنی position یا مکان در رفتار مولکولها تاثیر ندارد.
تمام مواد خالص که در زمین هستند رفتار همگنی دارند.
یک سیستم همگن یک سیستم real یا واقعی است سیستمی است که رفتار طبیعی و خودش نشان می‌دهد.

ناهمگن یا Hetrogenous

اگر از هر نقطه آن نمونه بگیریم خواص مختلفی را به ما می‌دهد:

Steady State:

هیچ خاصیتی با زمان تغییر نکند $\frac{\partial(\text{property})}{\partial t}=0$

Equilibrium:

Equilibrium = No flux Transfer

این تعادل یک تعادل مطلق است

$$\text{Flux} = \begin{cases} \text{Mass Flux} \\ \text{Heat Flux} \\ \text{Momentum Flux} \end{cases}$$

در هر بررسی تعادل مربوط به آن مطرح می‌شود مثلاً در تعادل گرمایی، دما ثابت است اما اینها همزمان هم است.

$\Delta C=0$

$\Delta t=0$

$\Delta p=0$ or $\Delta F=0$

البته این تعادل وجود ندارد هیچ سیستمی بطور دائم نمی‌تواند در این تعادل باشد.

در کاربرد ریاضیات، مدل سازی انجام می‌دهیم. فیزیک مسئله را به ما می‌دهند باید آن را تبدیل به معادلات ریاضیات می‌کنیم.

مدل سازی :

Modeling

1) Formulation

تبدیل کردن فیزیک مسئله به یک رابطه ریاضی قابل فهم

2) Solution } Conclation

حل مسئله که الان با آن سر و کار داریم

3) Explanation

بعد از حل مسئله باید آن را توجیه کنیم باید منطقی داشته باشد

4) Comparing

مقایسه کردن با Data های دیگران مقایسه کنیم ← خطا
و Data خودمان با مدل دیگران مقایسه کنیم ← خطا
اگر خطا قابل قبول باشد پس مدل را درست آورده‌ایم

Formulation :

1) Definition of problem

① تعریف مسئله :

* input و output ها مشخص، دما و فشار مشخص، یک طرح ساده از sys که با آن کار می‌کنیم

* geometry مسئله

* variable ها پارامترها } 1) dependant u, C_A, T ; 2) independant (x, y, z, t)، (r, θ, z, t)، (r, θ, ϕ, t)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اینکه کدام یک از این متغیرها وجود دارند بستگی به تعریف مسئله است.

انتخاب متغیرها به ما کمک میکند

2) Choose of Apropriat Element

انتخاب المان مناسب

هر مسئله بسته به جهت عمل indepedet variable

دو بعدی است x,y سه بعدی است x,y,z و یا ...

3) General law $\quad IN - out + Gen - Cos = Acc$

برحسب نوع فرآیند اگر انتقال جرم یا حرارت است

جرم خروجی − جرم ورودی = جرم مثال

بر اساس اینکه چه مسئله ای حل کنیم یکی از پدیده های انتقال داریم

4) Specific law
1) حرارت — قانون فوریه یا نیوتن
2) جرم — قانون فیک
3) مومنتوم — قانون نیوتن

5) Governing Equation → ODE
→ PDE

با انجام عملیات بالا معادله حاکم به دست می آید

6) Initial condition &
Boundary Cond

در مورد کار بر معادلات PDE و ODE درست کنیم که به سراغ مدل سازی می رویم
ترکیب معادلات زنجیره ای heat transfer , Momentum transfer , mass tranfer
از این رو مثلاً نظیر سازی این ها را داریم

PAPCO

Subject: 3

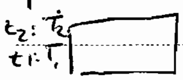
Year. Month. Date. ( )

Formulation :

دو نوع خاص دارد { lumped for / distributed to { Differential / Integral

در این درس با فرمولاسیون دیفرانسیلی بیشتر سروکار داریم.

lumped for : خصوصیات جسم با مکان بستگی ندارد فقط به زمان بستگی دارد برای مثال در کل جسم دما فقط با زمان تغییر می‌کند.



شرایط لازم برای فرض lump :

$\boxed{Bi < 0.1}$

در انتقال حرارت بسته به ساختار مولکولی جسم است. اگر ساختار مولکولی جسم به گونه‌ای خاص باشد از یکی از انتقال‌ها می‌توان صرف نظر کرد مثلاً انتقال تابش.

یکی از پارامترها ابعاد جسم است. مثلاً اگر جسم خیلی کوچک باشد خیلی نسبت نمی‌توانیم دما را به صورت مکانی حساب کرد.

* ابعاد جسم

thermal conductivity

* در حرارت K باید خیلی بزرگ باشد. در سیالات Turbulancy
در جرم ضریب نفوذ خیلی بزرگ باشد.

$\alpha_H = \frac{K}{\rho \cdot C_p}$ در حرارت ضریب داریم α_H : Heat difusivity
شدت نفوذ حرارتی

$\alpha_D = ?$

در انتقال جرم α_D داریم ، Mass

$\alpha_u = \nu$ در سیالات α_u داریم ، Momentum

هر سیستم که اجزایش به ساختار مولکولی بستگی دارد اگر شدت انتقال بالا باشد می‌توانیم جسم را lump
فرض کنیم پس عدد Bi خیلی تعریف خوبی نیست در Ref کسی آن را تعریف کرده

Distributed Formulation :

تابع ما تابعی است از مکان | ss هم به زمان بستگی ندارد
| uss به زمان هم بستگی دارد.

$\boxed{Ref}$:

کتاب: مدل‌سازی پدیده‌های انتقال
نوشته دکتر ابوالقاسمی

برای قواعد این پدیده‌ها در مدل

مقدمه‌ای در معادلات دیفرانسیل.

Differential ← distributed Formulation

: ODE

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x) \rightarrow$$ [illegible]

بیشترین max درجه‌ای که در معادله پیدا می‌کند درجه ۲ است.

این یک معادله دیفرانسیل درجه ۲ است. معادلات { همگن / غیرهمگن — این معادله غیرهمگن است.

معادله همگن معادله‌ای است که در همه جملاتش یا y و یا مشتقاتش را داشته باشد

if $f(x) = 0 \Rightarrow$ Homogeneous

Subject: 4
Year. Month. Date. ( )

همیشه این معادلات بوده‌اند که فلج حل آن را کرده‌اند.

چرا به این معادله همگن گفته‌اند؟

if $f(x)=0 \Rightarrow$ Homogenous

چه وقتی که معادله یک عامل غیرهمگن پیدا می‌کند؟

یعنی پاسخی که از این معادله به دست می‌آوریم رفتار واقعی سیستم است. یعنی تحت شرایط مختلف قرار نگرفته‌ایم محیط و شرایط و آزمایش‌های آن تأثیر نمی‌گذارند.

if $f(x)\neq 0 \Rightarrow$ Hetrogenous

نشان می‌دهد که این جسم یک اتفاق برایش افتاده، رفتاری که ما از آن می‌بینیم در شرایط واقعی این رفتار را ندارد

مثلاً عامل تولید حرارت یا در دیوار قرار داریم انرژی تولید کرده

عامل غیرهمگن یک عاملی است که از جسم خارجی آمده D: به آن وارد شده.

حل:

پاسخ معادله غیرهمگن به صورت پاسخ معادله همگن بیان می‌کنیم به صورت خاصی که از آن بیان می‌شود

چرا؟

چون که جسم ما همان جسم سابق نیست قرار است رفتار غیرطبیعی داشته باشد

پس غیرطبیعی یک صورتی دارد.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

PAPCO

Subject: 5
Year. Month. Date. ( )

جلسه دوم ۸۸,۷,۲۴

درصورت یک پاسخ داریم که ربطی به معادله ندارد. این پاسخ در ناپایسته بودن یا پایسته بودن بسیار مؤثر است.

α_H : Heat Diffusity $= K/\rho C_p$

α_D : Mass " $= D$

α_u : Mom " $= \nu$

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

if $f(x) = 0 \rightarrow$ همگن Homogeneous = Real

if $f(x) \neq 0 \rightarrow$ ناهمگن Response

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases} \leftarrow y = e^{\lambda x} \leftarrow$$ حل معادله

همگن $y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$y_g = y_h + y_p$ ناهمگن Particular

داریم:

if $f(x) = e^{\alpha x} \rightarrow y_p = ke^{\alpha x}$

if $f(x) = \sin\alpha x$ or $\cos\alpha x \rightarrow y_p = k_0 \sin\alpha x + k_1 \cos\alpha x$

if $f(x) = x^n \rightarrow y_p = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + k_n x^n$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$y = \sum c_i y_i$

سوال: چرا y_h ها با y_{nh} جمع می‌کنیم ← علت اصل super position principle

ناهمگن است، ضرایب ثابت باشد یا متغیر

اگر معادله دارای چند جواب باشد، مجموع جواب‌ها هم جواب معادله است.

زیرا جمع شدگی تمام رفتارهای یک سیستم را به صورت جواب معادله به کار می‌بریم. گاهی ممکن است بعضی رفتارها به وسیله برخی رفتارها اثرشان کم و زیاد می‌شود. این ویژگی جمع است که می‌توانند هم را در کنار هم قرار دهند.

دقت کنید: ماهیت ۲ جواب همگن و ناهمگن باید مثل هم باشد تا جمع پذیر باشد.

$y = y_h + y_{nh} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3(x) y_3 = \sum c_i y_i$

دقت: پاسخ ج همگن باشد ج غیرهمگن ← مفروض است از ذات آن معادله

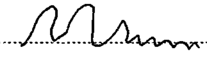
عامل غیر همگن توسط یک جسم خارجی (انسان) به سیستم اعمال می‌شود.

if $\lambda_1 \neq \lambda_2$: Real

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

if $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta j$

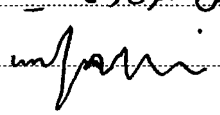
$$y_h = e^{\alpha x}\left[A \sin \beta x + B \cos \beta x\right]$$: damped Oscillation Response



پاسخ نوسانی میرا ← $\alpha < 1$ وقتی رخ می‌دهد

این رفتار در واقعیت بسیار شبیه است یعنی وقتی α منفی است سیستم Real است

و اگر α مثبت باشد سیستم بی‌ثبات است unreal است و قابل کنترل و اعمال نیست



PAPCO

if $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \rightarrow y_1 = y_2 = e^{\lambda x}$

$$y_h = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} \qquad c_2 = c(x) = x$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول با ضرایب ثابت :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = r(x)$$

فاکتور انتگرال ساز : $\mu = e^{p(x)}$

در اینجا هم معادله ما جواب همگن دارد هم ناهمگن

$$y = y_h + y_p \rightarrow \begin{cases} dy/dx + p(x)\, y = 0 \\ y_h(x) = c_1 e^{-\int p(x) dx} \\ y_p = c(x)\, y_h \end{cases}$$

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[\int e^{\int p(x) dx} \times r(x)\, dx + c \right]$$

?

روش دیگر حل معادلات :

variation of Parameters:

اساس آن این است که پاسخ هر معادله بر اساس ذات آن تعیین می‌شود :

$$\left[a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x) \right] \div a$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b}{a}\frac{dy}{dx} + \frac{c}{a} y = \frac{f(x)}{a} \qquad y = y_h + y_p$$

$$\begin{cases} y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ y_p = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2 \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

y_p هم هست مطلوبی است از پاسخ قسمت همگن ولی ضرایب تابعی از x است پیدا می‌گردد

(۲ معادله ۲ مجهول)

$$C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 = 0$$

$$C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = \frac{f(x)}{a}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x \qquad y_h: \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda = \pm j$$

$$y_h = C_1 \underbrace{\sin x}_{y_1} + C_2 \underbrace{\cos x}_{y_2}$$

$$y_p = C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = 0 & \times \sin x \\ C_1'(x)\cos x - C_2'(x)\sin x = \frac{\sec x}{1} \times \cos x \end{cases}$$

$$C_1'(x)\left[\sin^2 x + \cos^2 x\right] = 0 + \frac{1}{\cos x} \times \cos x = 1$$

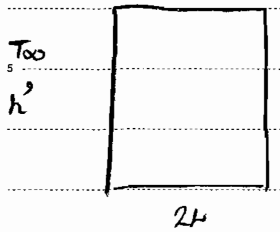
$$C_1'(x) = 1 \rightarrow C_1(x) = \int C_1'(x)\,dx = \int dx = x$$

$$C_2'(x) = -1 \times \frac{\sin x}{\cos x} \qquad C_2(x) = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \ln|\cos x|$$

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x \sin x + \ln|\cos x| \times \cos x$$

$$= (C_1 + x)\sin x + (C_2 + \ln|\cos x|)\cos x$$

مثال) دیواره‌ای با ضخامت $2L$ در ابتدا در دمای محیط قرار دارد. سپس در یک لحظه خاص $t=0^+$
انرژی u'' در جسم تولید می‌شود. مسئله را به کمک lumped فرمول کنید؟



T_∞ , h $\begin{cases} t=0 & T=T_\infty \\ t=0^+ & u=u''' \end{cases}$ (تولید انرژی داخل جسم)

انتقال انرژی ← کتاب یونوس سی

مکانیسم

Conduction (هدایت، داخل جسم جامد)

فوریه $q=-kA\dfrac{\partial T}{\partial x}$

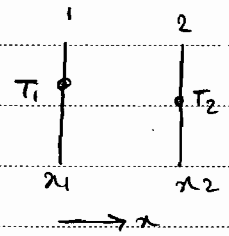
Convection (جابجایی) — HT — مفاهیم حرارتی

دیواره با محیط یا سیال در تماس باشد

(نیوتن) $q=hA\Delta T$ — Radiation (تابش)

(استفان و بولتزمن) $q=\sigma\varepsilon\dfrac{T^4-T_\infty^4}{T-T_\infty}$

Conduction heat transfer



$T_1 > T_2$

اساس کار فوریه:

در حرارت برعکس جرم انتقال انرژی از مولکول به مولکول است
(هر چه مولکولها نزدیکتر شوند HT بیشتر می‌شود. اما در جرم هر چه مولکولها
از هم دورتر شوند MT بیشتر است.

مشاهدات فوریه:

$q \propto (T_1 - T_2)$

$q \propto A$

$q \propto 1/\Delta x$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Δ هفته ۲ میدهای کد

d هفته ۱ تا ۲

براساس مشاهدات تجربی $q \propto \dfrac{A(T_2 - T_1)}{\Delta x}$

که همچنین عامل تناسب کننده این تناسب جنس جسم یا K است

$$q = KA\frac{\Delta T}{\Delta x} \longrightarrow q = -KA\frac{dT}{dx}$$

به علت این فیزیکی نیست بلکه بخاطر تعریف Δ است.

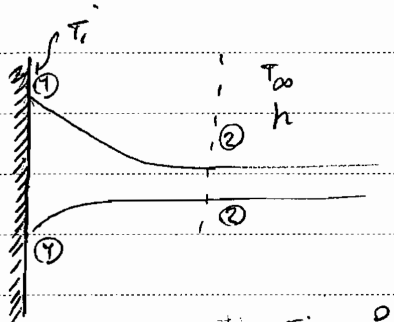
جهت انتقال حرارت، مومنتوم و جرم هیچ تشابهی در کد معادلات دیفرانسیلی مشابه یکسان دارد.

PAPCO

Subject: 8
Year. Month. Date. ( )

جلسه ۸۸٫۷٫۲۷

Convection Heat transfer



در انتقال حرارت برعکس جرم هرچه مولکولها هم نزدیکتر باشند انتقال حرارت بیشتر خواهد شد.

$q \propto (T - T_\infty)$ $\qquad$ $q \propto A(T - T_\infty)$

$q \propto (T_\infty - T)$ $\qquad$ $q = hA(T - T_\infty)$

$q \propto A$

جهت انتقال مهم است. در مبحث Convection و Conduction جهت را اختیاری انتخاب می‌کنیم ولی

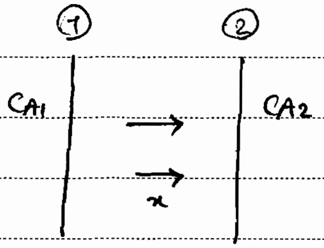
$\xrightarrow{q_x}$ در Conduction جهت محور مختصات و انتقال حرارت یکسان باشد

نباید محور مختصات روی کنوکسیون تاثیر بگذارد زیرا اختیاری است

Mass transfer:

Conduction mass transfer = Diffusional M.T

همان انتقال جرم داخل جرم است. بوسیله حرکت کاتوره‌ای انجام شده



$C_{A1} > C_{A2}$

در انتقال جرم لازم است همیشه مرزهای انتقال ~~...~~ را مشخص کنیم.

J_{Ax}: (میزان جرم انتقال یافته در واحد سطح در واحد زمان)

$$\left.\begin{array}{l} J_{Ax} \propto (C_{A1} - C_{A2}) \\ J_{Ax} \propto A \\ J_{Ax} \propto 1/\Delta x \end{array}\right\} \quad J'_{Ax} \propto A \frac{-\Delta C_A}{\Delta x}$$

$$\dot{m}_A = J'_{Ax} = -D_{AB} A \frac{\partial C_A}{\partial x} \qquad J_{Ax} = \frac{J'_{Ax}}{A} = -D_{AB} \underset{\sim}{\frac{\partial C_A}{\partial x}}$$

مرتبه ۲

J_{Ax}: $\frac{\text{mole}}{\text{time.Area}}$ or $\frac{\text{mass}}{\text{time.area}}$

فرق انتقال جرم با انتقال حرارت این است که وقتی جسم جابجا باشد Convection می‌تواند در آن صورت بگیرد که دو حالت دارد Forced / Natural

Convection Mass transfer $\begin{cases} \text{Free conve} \\ \text{Force conve} \end{cases}$

Bulk M.T

free: انتقال جرم به علت اختلاف دانسیته یا اختلاف غلظت است.
اگر حلالیت یا غلظت یا دانسیته زیاد باشد.

Convection: در جاهایی سیال حرکت داشته باشد.

$$N_{Ax} = \underset{\text{condu}}{J_{Ax}} + \underset{\text{free conv}}{x_A \sum N_{iz}}$$

$x_A = y_A$ = mole frac

Subject: 9

Year. Month. Date. ( )

$$N_{Az} = J_{Az} + x_A \sum C_i u_i$$

force conv

فرق جرم و حرارت:

در جرم تمام مولکول حرکت میکنند پس هم Cond داریم هم Conve و با جرم بررسی میکنیم ↑ در صورتی

که در حرارت جدا بررسی میکنیم. اگر بوسیله عامل خارجی باشد force میشود ΔP یا ΔF عامل شده

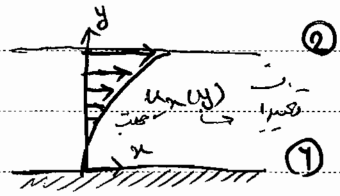
اگر یکی در مقابل دیگری خیلی کوچک باشد صرفنظر میکنیم.

قانون فیک مشکلاتی دارد که هنوز حل نشده بود

Momentum trasfer:

Conduction Mom trasfer → تنش برشی

Convection " " (Bulk)



داشتیم سیال ساکن بین دو صفحه یکی ساکن و یکی متحرک قرار میدهیم

سیالات نزدیک‌تر از دو تا کار دیگر است

$$\tau = \pm \mu \frac{du}{dy}$$

جهت تنش را تماما بنویسید

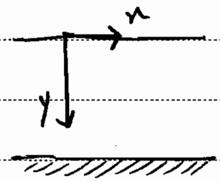
$\tau = F/A$

τ را هم + و هم - میتوان انتخاب کرد بستگی به انتخاب محورهای مختصات دارد.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \leftarrow \Delta y > 0 \quad \Delta u > 0$$

: در شکل بالا با افزایش Δy

حال اگر برعکس محور مختصات را انتخاب کنیم.



تعریف Δ فرق می‌کند: $\left.\begin{array}{l}\Delta y<0\\ \Delta u>0\end{array}\right\}$ ولی τ ها نمی‌تواند منفی باشد

$$\tau = -\mu\frac{\partial u}{\partial y}$$

چون تغییر سرعت در جهت y نسبت به x را ثابت جهت حرکت سیال می‌گیریم.

Bulk Mo :

$$F_{BM} = \dot{m}u \qquad \dot{m} = \rho u A$$

Mom transfer: را به صورت نیرو داریم

$$\Sigma F = ma$$

$$\Sigma F = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} v\rho \, d\forall}_{m\frac{dv}{dt}} + \underbrace{\int_{C.S} v\rho \vec{v}\cdot \vec{dA}}_{F_{BM}}$$

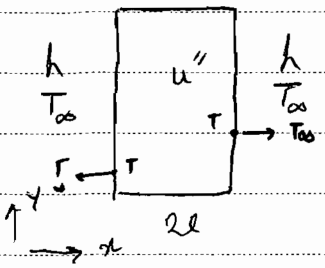
این علامت همان منفی است.

علامت نیرو عکس علامت جابجایی است پس علامت را عوض می‌کنیم.

$$\Sigma F + F_{BM} = m\frac{dv}{dt}$$

Subject: 10
Year. Month. Date. ( )

مثال جلسه قبل :



$t=0 \quad T=T_\infty$

ساده‌ترین نوع فرمولاسیون Lumped formulation که شرایطی دارد :

$\alpha_H \gg Large \begin{cases} K \gg large \\ \text{and} \\ Dimension \ll small \end{cases}$

یک سری مفاهیم — وقتی ضریب K بسیار بزرگ است پس از انتقال حرارت در آن راستا صرف نظر می‌کنیم
یعنی در فرمولاسیون اگر یک جهت را نداد از آن صرف نظر می‌کنیم.

مسئله صفحه را به عنوان المان یا سیستم در نظر می‌گیریم. در این حالت: تعریف lump یعنی $T(t)$

مرحله دوم: انتخاب element، سیستم، input, output

$$IN - out + Gen - Cons = ACC$$

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{Gen} - \dot{E}_{Cons} = \frac{dE}{dt} \rightsquigarrow mCT$$

$$0 - hA(T-T_\infty) - hA(T-T_\infty) + u''' \underbrace{2l\cdot A}_{\forall \text{ حجم}} = \rho(2lA)C\frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{2hA}{2\rho lAC}(T-T_\infty) = \frac{u'''}{\rho C}$$

$$\theta = T - T_\infty$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \underbrace{\frac{h}{\rho lc}}_{m}\theta = \underbrace{\frac{u'''}{\rho C}}_{n}$$

$$\frac{d\theta}{dt} + m\theta = n$$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول فرض K_0 $\quad 0 + mK = n \quad K_0 = n/m$

$$\theta(t) = Ce^{-mt} + n/m$$

حل: $\frac{d\theta}{dt} = n - m\theta$

$\frac{d\theta}{n-m\theta} = dt \quad -\frac{1}{m}\ln(n-m\theta) = t+c$

$\ln(n - m\theta) = -m(t+c)$

$-mc = \ln n$

$\ln(n - m\theta) = -mt + \ln n$

$n - m\theta = ne^{-mt}$

$$T(t) = T_\infty + \frac{n}{m} + Ce^{-mt}$$

at $t=0 \quad T = T_\infty \quad C = -n/m$

$$\boxed{T(t) = T_\infty + \frac{n}{m}\left[1 - e^{-mt}\right]}$$

تعادل

at S.S or Equil

فرض SS است اما زمان تعادل بینهایت است

تعریف ریاضی کاملا ثابت — تعادل در ریاضی ثابت

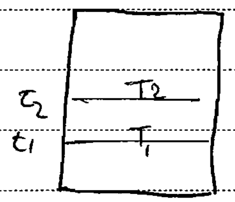
ولی SS همین الان هم میتواند باشد

$t \to \infty$

$T = T_\infty + n/m[1-0]$

$$\boxed{T = T_\infty + \frac{u''L}{h}}$$

پس اگر سیستم به صورت Lump فرض کنیم تغییرات به صورت exp است.

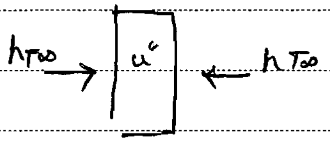


t	T
t_1	T_1
t_2	T_2
t_3	T_3
⋮	⋮

همین طوری هم می‌توان مختصات را انتخاب کرد

convection منجر به انتقال گرما

اگر جهت را برعکس هم انتخاب کنیم فرقی نمی‌کند $T_\infty > T$



$hA(T_\infty - T) + hA(T_\infty - T) + u'' = \frac{d\, mcT}{dt}$

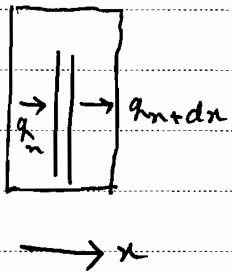
$-[+2hA(T - T_\infty)]$

PAPCO

همین مسئله را می‌توانیم در قالب فرمولاسیون دیفرانسیلی هم حل کنیم.

فرمولاسیون دیفرانسیلی : اینجا

نتایج:
(۱) حل $2x$ راه بعد ندارد پس مسئله یک بعدی است
(۲) سیستم اول در دمای T_∞ بوده مستقیماً از initial استفاده شده است.



وسط انتقال dx است

بار جهت هم مثبت چون در رسم یک همچین حالتی داریم
پس هر طرف جهت انتقال بگیرم یک طرف اشتباه می‌شود

مبدأ مختصات را مشخص می‌کنیم برای نوشتن boundry Condition

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{Gen} - \dot{E}_{Cons} = \frac{dE}{dt}$$

روی کل المان می‌نو

$$\underbrace{q_x - q_{x+dx}}_{-\frac{dq_x}{dx}dx} + \underbrace{u''' \Delta V}_{\text{حجم المان}} - 0 = \frac{d(\rho \Delta V . C . T)}{dt}$$

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq}{dx}dx + \frac{d^2q}{dx^2}dx^2 + \cdots$$

$$q_x = -KA_x \frac{\partial T}{\partial x}$$

نکته: وقتی فرمولاسیون انجام می‌دهیم تمام جملات در یک بعدی باید یک dx داشته باشند اگر دو بعدی است همه جملات $dxdy$ داشته باشند.

$$\boxed{-\frac{\partial q_x}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-KA_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(KA_x\frac{\partial T}{\partial x}\right) = q_x - q_{x+dx}}$$

همیشه همین می‌شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$q_y - q_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(kA_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) dx$$

$$q_z - q_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(kA_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) dz$$

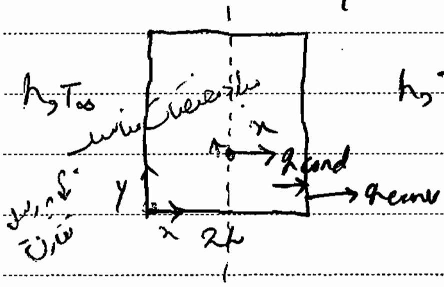
$$q_x - q_{x+dx} + u''' \Delta V = \rho \Delta V c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(kA_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + u''' A dx = \rho C A dx \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{u'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}}$$

عامل غیر همگن شدن معادله

اگر عامل غیر همگن را برابر با رفتار صفحه هم در نظر بگیریم. ولی چون عامل خارجی را داشتیم غیرهمگن شود
حال شرایط مرزی را می‌خواهیم که مبدا مختصات را مشخص کنیم.



مناسب‌ترین جا برای مبدا مختصات جایی است که ویژگی‌های مشترک دارد: مرکز جسم اثر تقارن وجود دارد Min یا Max
در یک جا مثل که محدود است دارم، جایی که عایق است.
البته اختیاری است.

در جهت محور y شرایط جسم یکسان است. اگر ورقه کوچک بود و شرایط اطراف جسم کاملاً یکسان بود یک خط محور x
یک خط محور y جایی که جسم را قطع کند و اثر سه بعدی هم همینطور.

$$BC \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \\[2ex] -k \dfrac{\partial T}{\partial x}(L, t) = h\left[T(L, t) - T_\infty\right] \end{cases}$$

$$IC \quad T(x, 0) = T_\infty$$

این مسئله را به روش seperation می‌توان حل کرد. روش seperation محدودیت دارد:

(۱) معادله همگن باشد که به اینجا هست

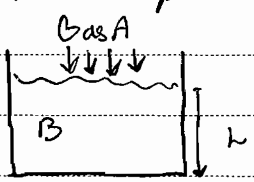
(۲) برای سیستم U.S همه شرایط مرزی باید همگن شوند و شرط اولیه غیرهمگن

(۳) برای سیستم‌های S.S از بین شرایط مرزی فقط یک شرط مرزی غیرهمگن باشد و بقیه شرط‌ها همگن

جلسه ۸۸/۸/۳

مثال: فرض کنید مایع B با سطح مقطع A و ارتفاع h موجود می‌باشد. گاز A توسط مایع B جذب می‌گردد و واکنش درجه اول است یعنی (A ⟵ محصولات) در داخل فاز مایع انجام می‌شود. با فرض انتقال یک بعدی مسئله را فرموله کنید و پروفایل غلظت را بدست آورید؟

$A \longrightarrow$ product



فرضیات:

(۱) از تغییرات سطح فاز مایع صرفنظر می‌کنیم

(۲) فرض می‌کنیم ماده A در B نفوذ می‌کند و واکنش انجام می‌شود

(۳) سیستم را رقیق فرض می‌کنیم، یا تولید محصولات واکنش را ناچیز یا از آن صرفنظر می‌کنیم.

ابتدا مرز انتقال جرم را مشخص می‌کنیم: مرز (۱) ← انتقال از آنجا شروع می‌شود

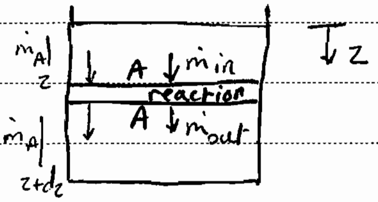
مرز (۲) ← چه حالت خاصی دارد؟

مولکول‌های A باید فرصت کافی برای رسیدن از مرز (۱) به (۲) را داشته باشند

فرض (۱) : مولکولهای A فرصت کافی برای رسیدن از مرز (۱) به (۲) را دارند.

فرض (۲) : مولکولهای A فرصت کافی برای رسیدن به مرز ۲ را پیدا نکنند

فرض (۱) :



$$\dot m_{in} - \dot m_{out} + \dot m_{Gen} - \dot m_{Cons} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{=0 \; SS}$$

همیشه + بنویسید در فرمول واکنش $\dot m_{Gen}$ مربوط به واکنش خودش درست می‌شود.

فرض : سیستم را تک فازی فرض می‌کنیم.

$$\dot m_A = N_A \cdot A \cdot M_A$$

$$\frac{kg}{time} \quad \frac{mol}{time.A} \quad A \quad \frac{kg}{mol}$$

حجم المان

$$\dot m_A\Big|_z - \dot m_A\Big|_{z+dz} + r_A V M_A = 0 \qquad \boxed{-\frac{\partial (N_{Az}\cdot A_z \cdot M_A)}{\partial z}\, dz + r_A V M_A = 0}$$

مصرف یا تولید چون داریم :

همیشه به همین صورت بنویسید، دقت کنید بسط تیلور در انتقال نمی‌خواهد

$$A \longrightarrow D \qquad -r_A = k_1 C_A \quad \text{مصرف}$$

$$r_D = k_1 C_A \quad \text{تولید}$$

$$N_{Az} = J_{Az} + \underbrace{x_A \sum N_{iz}} = -\overset{D_{Am}}{D_{AB}} \frac{\partial C_A}{\partial z}$$

Free convection : وقتی اختلاف حلالیت یا غلظت یا دانسیته زیاد داریم می‌توانیم بگذاریم یا نه، دل به خواه است.

در سیستم‌های با واکنش عامل انتقال جرم اکثراً همان دیفیوژن است و می‌توانیم از آن صرف‌نظر کنیم.

در اکثر کارهای تجربی سیستم را دوجزئی فرض می‌کنیم حتی اگر چند جزئی باشد به دلیل سختی به دست آوردن D_{Am} و پارامترهایی که بعداً به وجود می‌آیند.

$$D_{AB} A_z M_A \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} + (-k_1 C_A) A_z dz \cdot M_A = 0$$

Subject: 13
Year.　　Month.　　Date.　　(　)

$$\boxed{\frac{d^2C_A}{dz^2} - \frac{K_1}{D} C_A = 0} \quad *$$

از اینجا به بعد ۲ سری حل را بررسی می‌کنیم:

فرض ۱:

$$BC \begin{cases} C_A(0) = C_A^* \text{ or } C_A^{sat} \text{ or } C_{Ai} \\ C_A(L) = \text{limited} = \text{bounded} = \text{finit} = \left(\frac{dC_A}{dz} = 0\right) \end{cases}$$

یعنی غلظت محدود است بی‌نهایت نمی‌شود $J_z = 0$ است در مرز ۲. اینجا فرض را داریم که مولکولها به سطح ۲ هم می‌رسند ولی به B تبدیل شده و مصرف می‌شوند.

* یک معادله دیفرانسیل ساده است

$e^{\lambda z}$

پاسخ مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$\lambda^2 = \frac{K_1}{D} \qquad \lambda = \pm\sqrt{\frac{K_1}{D}} \qquad C_A(z) = C_1 e^{\sqrt{K_1/D}\, z} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{K_1}{D}}\, z}$$

$$C_A(z) = C_3 \sinh\sqrt{\frac{K_1}{D}}\, z + C_4 \cosh\sqrt{\frac{K_1}{D}}\, z$$

زمانی که طول نامحدود است به شکل exp برود

« « محدود « « به شکل Sinh می‌رود زودتر به جواب می‌رسید.

$$C_A(z) = C_5 \sinh\sqrt{\frac{K_1}{D}}\,(L - z) + C_6 \cosh\sqrt{\frac{K_1}{D}}\,(L - z) \checkmark$$

شکل بهتر: از این راحت‌تر به نتیجه می‌رسید.

فرض ۲: مولکولهای A فرصت رسیدن به مرز ۲ را نداشته باشند یا در مرز ۲ هیچ مولکولی از A نداشته باشیم.

$$\frac{d^2C_A}{dz^2} - \frac{K_1}{D} C_A = 0$$

معادله‌ها همان معادله قبلی است

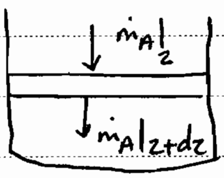
$$B.C \begin{cases} C_A(0) = C_{Ai} \text{ or } C_A^* \\ \text{at } z = L \quad C_A(L) = 0 \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

البته فرضها به همین ها محدود نمی شود. فرضهای بسیاری برای آن می توان در نظر گرفت.

فرض ۳) سیستم u.s.s :

در مراحل خارج تعادل همه مولکولهای A را داریم لذا فرضها این است که (۱) تعداد مولکولهای جزء بسته زیاد باشد (۲) سرعت واکنش بسیار کم باشد (۳) فقط برای زمانهای اولیه سیستم صادق است چون اگر طولانی باشد A وارد می شود و هم B را به P تبدیل می کند پس ظرف پر از A می شود.



$$\rho_A \forall = C_A M_A \forall$$

$$-\frac{\partial(N_{Az} A M_A)}{\partial z}dz + r_A \Delta\forall M_A = \frac{\partial(m_A)}{\partial t}$$

$$D_{AB} A_z M_A \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} - K_1 C_A A_z dz M_A = \overbrace{(A_z dz)}^{\Delta\forall} M_A\, \partial C_A/\partial t$$

نکته: همه جمله ها باید شامل dz و M_A باشند که در هنگام تقسیم از بین برود.

$$\boxed{D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} - K_1 C_A = \frac{\partial C_A}{\partial t}}\quad \text{Homog}$$

اگر reaction نبود
$$D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} = \frac{\partial C_A}{\partial t}$$

در حالت u.s فرض اول بهتر است که مولکولها به ته ظرف نرسند

$$BC\begin{cases} C_A(0,t) = C_A^* \text{ or } C_{Ai} \\ C_A(L,t) = \text{limited or } \frac{\partial C_A}{\partial z}(L,t)=0 \end{cases}$$

$$IC \quad C_A(z,0) = 0 \rightarrow$$ نمی تواند C_{A0} باشد چون reaction داریم

$$C_A(z,0) = C_{A0} \rightarrow$$ برای وقتی واکنش نداریم

در شرایط مرزی که غیرهمگن است برای no reaction با همگن کردن حل می‌شود ولی در روش دیگر داریم
با تغییر متغیر:

$u_A = C_A - C_A^*$

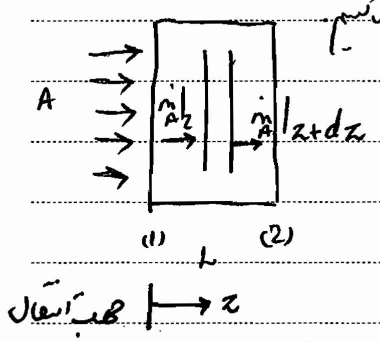
در این صورت معادله غیرهمگن می‌شود.

$$D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} - k_1 C_A = \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad \Big| \, *$$

no reaction: $C_A(z,t) = \sum A_n e^{-D\lambda_n t} \sin\sqrt{\lambda_n}\, z \qquad \lambda_n = \left(\frac{(n+1/2)\pi}{L}\right)^2$

HW: معادله * را حل کنید. چه روشی را ارائه می‌دهید؟ امتیازی

مثال: دیواره‌ای داریم، مولکول‌های A در حال جذب شدن به فاز جامد هستند
می‌تواند مثالی در مورد membrane ها باشد. استانداردها را انتخاب می‌کنیم



حالت ۱) S.S

$$\dot m_A|_z - \dot m_A|_{z+dz} \pm 0 = 0$$

$$-\frac{d(N_{Az} M_A A_z)}{dz}\, dz = 0$$

$$N_{Az} = J_{Az} + x_A \sum N_{iz}$$

فرض:
در سیستم membrane قرار دارد

$$BC \begin{cases} C_A & \text{at } z=0 \quad C_A = C_{A1}^* \\ & \text{at } z=L \quad C_A = C_{A2}^* \end{cases}$$

حالت ۲) U.S.S. $\quad D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} = \frac{\partial C_A}{\partial t} \qquad BC \begin{cases} C_A(0,t) = C_{A1}^* \\ C_A(L,t) = C_{A2}^* \end{cases}$

IC: $C_A(z,0) = C_{A0}$ or ۰ در pure solid

Subject:
Year. Month. Date. ( )

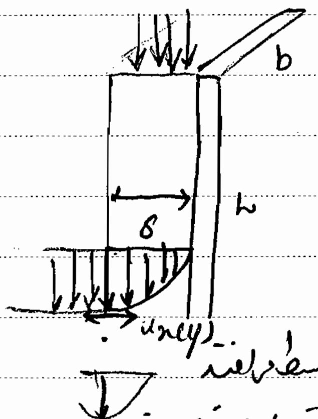
if $C_{A1}^* = C_{A2}^* = C_A^*$ $u_A = C_A - C_A^*$ ✓ شرایط اطراف جسم یکسان باشد

$$C_A = \sum A_n e^{-D\lambda_n t} \cdot \sin\sqrt{\lambda_n}\, z \qquad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

if $C_{A1}^* \neq C_{A2}^*$ ⟹ بررسی شود.   (Hw 2

مثال سیالات:

- یک دیواره محوری که با ارتفاع L به گونه‌ای است که سیال نیوتنی از بالای دیواره به جهت پایین در حال حرکت می‌باشد ضخامت فیلم بر روی این دیواره δ می‌باشد.
رابطه توزیع سرعت را برای این سیال بدست بیاورید.



حل:
هرچه از دیواره دور می‌شویم علت کم شدن نیروهای چسبندگی سرعت به سرعت اولیه نزدیک‌تر می‌شود.

فرضیات:
(۱) از اصطکاک هوای اطراف سیال صرف‌نظر می‌کنیم. با اصطکاک Max سرعت در وسط اتفاق می‌افتد.
(۲) در بالای سیال توزیع سرعتی نداریم و شیب آن در L برابر صفر. می‌دانیم این فقط وقتی درست است که ضخامت δ به گونه‌ای باشد که در دیگر از تنش دیواره تاثیر نپذیرد و بعد از آن سرعت ثابت بماند.
ضخامت δ مطابق یکسری آزمایشات از قبل تعیین شده.
لذا این یک سیال تکامل یافته از کارهای تجربی است.

بدست آوردن تحلیلی:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

انواع مختلف F:
(۱) $F_{DM} = \tau A$: Diff Mom
(۲) $F_{BM} = m u$: bulk Mom
(۳) body Force: ΔP : Pressure Force ; $F = mg$ gravity Force
(۴) نیروهای سطحی: نیروی اصطکاک

از بسیاری نیروها صرف نظر می‌کنیم مثلاً اصطکاک

نیروهای فشاری در کانالها و سیستم‌های بسته وجود دارند.

Diff Mom , bulk Mom در همه سیالات وجود دارند.

یکی از مشکلات اصلی تنش‌های برشی نوشتن جهت آنها در مدل‌سازی سیالاتی است Bird

را حل کرده. این روش کلی برای حل مسئله‌های سیالات است.

bulk Mom را از ΣF جدا می‌کنیم.

$$\Sigma F + F_M = ma$$

$$\Sigma F + \underbrace{\dot{M}_{in} - \dot{M}_{out}}_{Mom} = ma$$

نیروها را بصورت نوشتیم

$$\Sigma F \begin{cases} Mom \\ pressure\ Mom \\ gravity \\ Friction \end{cases}$$

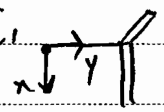
$$\tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

روش Bird فقط وقتی درست است که τ همواره مثبت باشد

تنش برشی در این مسئله مثبت باشد.

پس همواره مبدا مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که τ مثبت شود

اینجا مبدا را بصورت



انتخاب می‌کنیم تا ابتدا مثل اول آن شیب مثبتی را دارد

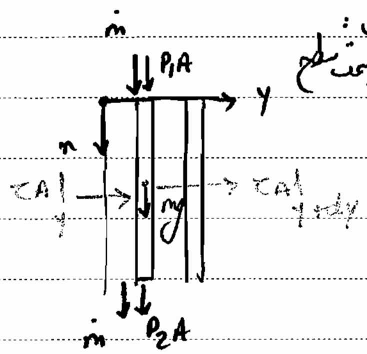
اگر مبدا مختصات در اختیار خودمان است همواره از روش Bird می‌رویم. Bird تنش‌ها را بصورت ورودی و خروجی تعریف کرده و از لحاظ فرمولاسیون کار راحت‌تری است.

u را می‌خواهیم و تابع y است.

$u_x(y)$ ← نوع ابعاد را مشخص کند

جهت نیرو را مشخص کنیم

$$\Sigma F_x = m a_x$$



نیروی فشاری : عمود بر سطح و به سمت سطح

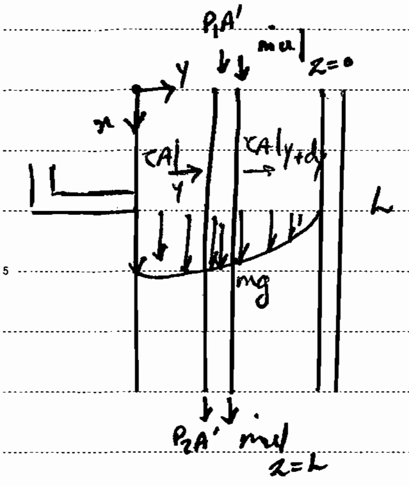
بردار سطح

جهت سطح : عمود بر سطح و به سمت بالا

تنش برشی تنها زمانی است در حالتیکه ... ندارد. مولکولهای یک سیال در کنار هم هستند و جهت حرکت آنها مخالف هم است پس چون نقطه به نقطه فرق دارد تنش را نقطه ای تعریف می‌کنیم

البته میدانیم تنش بصورت تماسی است

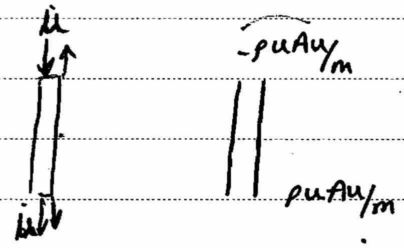
جلسه ۸۸/۸/۴



تقسیم بر مساحت مقطع تا آن را ... مومنتوم به تنش تبدیل شود

bulk Mom هم input و output دارد.

$$\text{Bulk mom} = \int_{cv} u\rho\vec{u}\,d\vec{A}$$



در ورودی bulk Mom منفی است چون بردار سطح با u مخالف هستند

bird دو کار انجام داد:
۱. تنش‌ها را به صورت input تعریف کرد فقط برای نشان دادن جهت واقعیت
۲. علامت bulk Mom (+ و −) را حذف کرد به صورت ورودی و خروجی تعریف کرد.

$\Sigma F_x = ma$ $\quad\quad \Sigma F_x + M_{in} - M_{out} = ma_x$

$\tau = \mu \frac{du}{dy}$

$M \begin{cases} \text{shear stress or Diff Mom} \\ \text{Bulk mom} \end{cases}$

$\Sigma F_x \begin{cases} \text{pressure force} \\ \text{gravity "} \\ \text{Firiction} \\ \text{surface} \end{cases}$

$$mg + P_1A' - P_2A' + \dot m u\Big|_{z=0} - \dot m u\Big|_{z=l} + \tau A\Big|_y - \tau A\Big|_{y+dy} = 0$$

($\frac{Kg\,m}{m\,s^2} \times m^2$, $\frac{Kg}{s} \times \frac{m}{s}$)

$+\frac{1}{\rho}$?

SS در نظر می‌گیریم چون پروفایل سرعت با زمان تغییر نمی‌کند

مسائلی در تماس با هوا است فشارش را صفر در نظر می‌گیریم. همچون سیال‌هایی در ظرف‌هایی که بسته هستند فشار دارند

چون سرعت تغییر نمی‌کند یا روی یک streamline ثابت است پس سرعت در بالا و وسط و پایین لایه یکی است

$$\begin{cases} P_1A - P_2A_2 = 0 \\ \dot{m}u\big|_{z=0} = \dot{m}u\big|_{z=h} \end{cases}$$

$$\tau A\Big|_{y+dy} = \tau A\Big|_{y} + \frac{\partial(\tau y)}{\partial y}dy + \frac{\partial^2(\tau A)}{\partial y^2}dy^2 + \dots$$ سط تیلور

dy خیلی کوچک است از جمله دوم به بعد را صفر در نظر می‌گیریم هرچی dy کوچکتر فرض شود صحیح تر

$$\underbrace{mg}_{8.4} - \frac{\partial(\tau A)}{\partial y}dy = 0 \qquad A = L.b$$

$$\gamma A\,dy - A\frac{\partial \tau}{\partial y}dy = 0 \qquad \overset{(1)}{\frac{d\tau}{dy} = \rho g} \qquad \overset{(2)}{\boxed{\tau = \rho g y + c_1}}$$

$$\tau = -\mu\frac{du}{dy}$$

$$-\mu\, du/dy = \rho g y + c_1 \qquad \frac{du}{dy} = \frac{-\rho g}{\mu}y + \frac{-c_1}{\mu}$$

$$\boxed{u(y) = \frac{-\rho g}{2\mu}y^2 - \frac{c_1}{\mu}y + c_2}$$

پس توزیع سرعت این سیستم

$$BC\begin{cases} \text{at } y = 0 & u = u_{max} \\ & \text{or } du/dy = 0 \\ \text{at } y = \delta & u \approx 0 \quad (\text{or } u = v_{slip}) \end{cases}$$

با کمک این دو شرط ضرایب را بدست می‌آوریم

$$\boxed{C_1 = 0}$$

$$0 = \frac{-\rho g}{2\mu}\delta^2 + C_2 \qquad \boxed{C_2 = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu}}$$

$$\boxed{u(y) = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]}$$ رابطه توزیع سرعت

at $y = 0$, $u = u_{max}$ $\Rightarrow$ $u_{max} = \dfrac{\rho g \delta^2}{2\mu}$

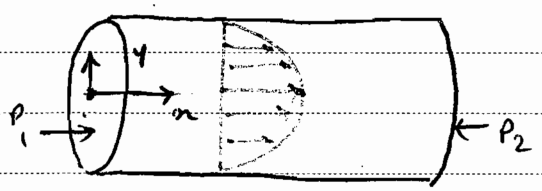
$$Q = \vec{u}.A = \int_A u\,dA \qquad \bar{u} = \frac{\int u\,dA}{A} = \frac{\int_0^{\delta} u_{max}\left[1-(y/\delta)^2\right] b\,dy}{b.\delta}$$

$$\bar{u} = \frac{2}{3}u_{max} = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu} \qquad u_{max} = 1.5\bar{u}$$

در لوله‌ها سرعت Max ۲ برابر سرعت متوسط بود.

روش Bird آسانترین روش برای بدست آوردن معادله سرعت است ← روش‌های دیگر: استفاده از ناویه استوکس ← معادله استرتیر.

HW) در داخل لوله‌ها سیستم مختصات را استوانه‌ای انتخاب کنیم



+ به کمک روش bird رابطه توزیع سرعت را برای داخل لوله بدست بیاورید.

داخل لوله فشار ثابت نیست

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$$

نسبت به قبل یک اختلاف فشار اضافه می‌شود که باید آن را در نظر گرفت

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Numerical Modeling

مدل‌سازی عددی:

فرع روش‌هایی است که در کارهای آزمایشگاهی کاربرد زیادی دارد. اصول این روش بر مبنای انجام آزمایش‌هایی که مختلف در آزمایشگاه و به دست آوردن اطلاعات اولیه است

- مثلاً دمای یک تانک را در زمان‌های مختلف به دست می‌آوریم
- حالت پیچیده‌تر این است که چند متغیر را اندازه‌گیری کنیم

مثلاً برای یک بستر مشخص 100 تا داده داریم.

t	0	t_1	t_2
T			
Q_d			
Q_c			
C_A	Concentration		
ϕ hold up			

نرم افزارهای مورد استفاده: excel ، ... ، می‌توانیم مقدار حاکم را به دست بیاوریم

اگر تعداد متغیرها بیشتر شد چه کنیم؟ در آنالیز ابعادی اعداد بدون بعد تعریف می‌کردیم

$$Sh = K Re^n Sc^m \qquad f(A, \mu, d, \phi, \dots) = 0$$

به کمک نرم افزارهای آماری مثل SPSS و یا Eviews ضرایب را به دست آوریم

یا با برنامه‌نویسی در Matlab و Minitab این کار را انجام دهیم.

در مدل‌سازی تحلیلی حل معادله دیفرانسیل به تنهایی برای مدل‌سازی کفایت نمی‌کند. بلکه باید داده‌های آزمایشگاهی خود را در آن بگذاریم و چک کنیم correlation بعد

مدل‌سازی عددی یک گام جلوتر است چون از خود داده‌های تجربی به آن می‌رسیم

مزیت تحلیلی این است که دقیق می‌دانیم شکل تابع چگونه است sin، e و یا تابع توان چند متغیر است.

PAPCO

Numerical solution of O.D.E : حل عددی معادلات دیفرانسیل

معمولاً چند پارامتر را در نظر می‌گیریم : ۱) روش حل معادله که هر روشی یک خطایی دارد

1. Method of solution

2. Error
   1. Inhert error
   2. Round of error
   3. Touncation "
   4. propogation "

4. Stability

3. Step size control , h

۲) خطا :

① خطای ذاتی : وابسته به چشم ما و وسایل اندازه‌گیری ماست مثلاً دماسنج گرون و ارزون اعداد متفاوتی می‌دهد . نحوه خواندن ما

② خطای گرد کردن اعداد : مثلاً 2.38567 2312 را یکی تا 3 رقم اعشار گرد می‌کند یکی تا 4 رقم . یکی از دلایل این خطا اهمیت فرآیند است . اگر فرآیند برای ما خیلی مهم است رقم اعشار زیادی را در نظر می‌گیریم .

قدرت اندازه‌گیری‌ها : Max رقم اعشار ، تا چند رقم گرد می‌کنند نشان می‌دهد

③ خطای ناشی از بریدن سری‌ها : در کار ، خطای هندسی جمله اول را با یک تا 8 تا جمله دوم را برای پاسخ می‌پذیرند .

④ خطای کلی مجموع همه خطاها

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معمولاً هرچه پله‌ها کوچک‌تر، خطاهای ما کمتر
زمان بیشتر

شاید بخواهیم ۱۰۰ هزار نقطه را انتخاب کنیم پس h باید به گونه‌ای انتخاب بشود که زمان محاسبات خیلی طولانی نشود

۴_ پایداری:

باید مقدار پاسخ مشخص باشد یعنی ∞ نباشد $\lim_{x \to \infty} y(x) \neq \infty$

اگر نشود هرچه زمان بدهیم محاسبات تمام نمی‌شود

این ۴ تا را باید روش‌های Numerical بررسی کنند.

1) Taylor Method

روش تیلور

وقتی معادله‌ای را که به صورت کلی می‌خواهیم حل کنیم به صورت روبرو مرتب می‌کنیم

$dy/dx = f(x,y)$

Num solution of $dy/dx = f(x,y)$

$$\begin{cases} \text{Single Step: Taylor, Eulor, Rung-Kutta} \\ \text{Multi step: Milens method, Adams} \end{cases}$$

Initial value problem

در Single step، Δx را می‌توانیم متغیر انتخاب کنیم و پله پله جلو می‌رویم

در Multistep، Δx ثابت است و چند پله را با هم جلو می‌رویم.

از نظر زمانی وقت کمتری می‌برد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

: Initial value problem

مسائل مقدار اولیه مسائلی هستند که مقدار تابع در زمان صفر معلوم است.

boundry value problem : مسائلی هستند که مقدار تابع در مرزها معلوم است.

همه روشهای دیگر base آنها بر اساس Taylor است در Analytical هم اشتقاق‌پذیر است کارهایش کافی است.

در x_0 ، y معلوم است ، Δx ثابت خودش است داریم $dy/dx = f(x,y)$

ال مجهول است تا y_n

$$\overset{\checkmark}{y_0} \quad h=\Delta x \quad \overset{?}{y_1} \quad \Delta x \quad \overset{?}{y_2} \quad \overset{?}{y_3} \quad \ldots$$
$$x_0 \qquad x_1 = x_0+h \qquad x_2 \qquad x_3$$

$y_1 =$ مقدار تابع در x_0+h $= y(x_0+h) = y(x_0) + y'(x_0)h + y''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \ldots$

تا چه جمله‌ای را در نظر بگیریم ؟ خطایی که می‌پذیریم و تعداد جملات بسط تیلور را در نظر می‌گیریم بسته به دقتی که می‌خواهیم. دقت خطای اول فقط در صورتی که دیواره بپذیریم مثل رنگ دیوار اتاق)

در روش تیلور محدودیتی که وجود دارد این است مشتق پذیر بودن تابع، مشتقی به اسم اویلر روشی را ابداع کرده و فقط تا جمله دوم را در نظر گرفته.

نکته : در هر مسئله‌ای که حل می‌کنیم به روش عددی باید مقدار عددی h کوچکتر از 1 باشد $h<1$

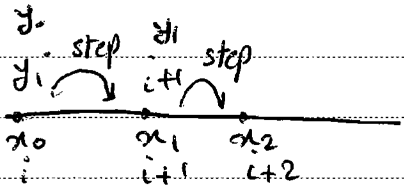
بسته به مقیاسی که کار می‌کنیم $\Delta x<1$

چون اگر بزرگتر از 1 باشد در بسط تیلور دقتی جلوتر برویم جملات بزرگتر می‌شوند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y(x_0+h) = y(x_0) + h f(x_0, y_0) + E(h^2)$$
or $O(h^2)$

$$y(x_0+h) = y(x_0) + h f(x_0, y_0)$$



$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)}$$

h را میتوانیم متغیر بگیریم ولی پیشنهاد این است که این کار را نکنیم و ثابت بگیریم

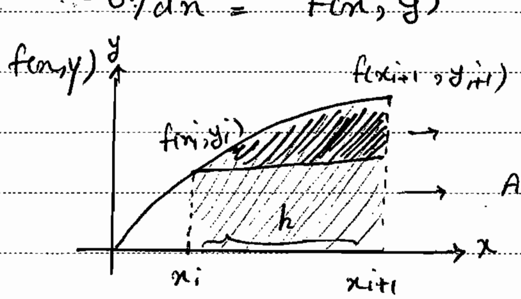
Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه ۹/۸/۱۰

Euler method

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + E(h^2)$$

$$dy/dx = f(x, y)$$



$$dy/dx = f(x,y) \qquad \int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\,dx$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\,dx}$$

* در روش اویلر خطای زیادی وجود دارد زیرا با تقریبی که استفاده کردیم در مثال بالا سطح زیر منحنی تابع f

مثلا اگر در سمت‌های اویلر : سطح زیر منحنی برابر سطح مستطیل بیشتر از سطح واقعی خواهد شد برعکس روش بالا

در این روش y_{i+1} خودش مجهول است :

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Implicit Euler

* دو رابطه را با هم جمع می‌کنیم اویلر بهتری پیدا کرد

$$2y_{i+1} = 2y_i + h\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

Modified Euler Method

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h/2\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]}$$

این روش همان روش ذوزنقه است برای بدست آوردن سطح زیر منحنی به خطای کمتری نسبت به روش قبل وارد ولی مشکلش مجهول بودن y_{i+1} است دو راه داریم :

① حدس y_{i+1} ② استفاده از مقدار اول و بدست آوردن y_{i+1} و سپس جایگزین کردن آن

الان از این روشها استفاده نمی‌شود و بیشتر رانج کوتا مورد استفاده است.

مثال :

$dy/dx - y = x$ $\qquad y(0) = 1$

جواب با همان $k_0 - k_1 x$

x		
y	✓	✓

1) $y_{Analytical} = 2e^{x} - x - 1$

2) Numerical: $h = \Delta x = 0.02$ $\qquad y(0.1) = ?$

$y_0 = 1$	$y_1?$	$y_2?$	$y_3?$	$y_4?$	$y_5?$
$x_0 = 0$	$x_1 = 0.02$	$x_2 = 0.04$	$x_3 = 0.06$	$x_4 = 0.08$	$x_5 = 0.1$

1) ابتدا تابع را مرتب کرده تا $f(x,y)$ مشخص شود

$dy/dx = \underbrace{x+y}_{f(x,y)}$ $\qquad i=0 \qquad y_1 = y_0 + h f(x,y)$

$= 1 + 0.02(0+1) = 1.02$

$i=1 \qquad y_2 = y_1 + h f(x_1,y_1) = 1.02 + 0.02(0.02+1.02) = \dots$

$\vdots$

$\boxed{y_5 = 1.1081}$

$y_{Ana} = 2e^{0.1} - 0.1 - 1 = \boxed{1.1103}$ جواب دقیق

خطا نسبت به Analytical

$\%\ Error = \left|\frac{y_{An} - y_{Nu}}{y_{An}}\right| = \left|\frac{1.1103 - 1.1081}{1.103}\right| \times 100$

در این نوع خطاها relative error Absolut می‌گویند

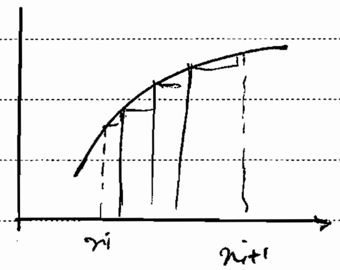
خطا از نوع مهم دارد:

اشتباه خطا هم دقیق نیست چون از ارقام اعشار صرف‌نظر کردیم. $\boxed{E \approx \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y_i)}$

Hw همین مسئله را با $h=0.02$, $h=0.04$, $h=0.05$ در $y(0.2)$ به دست بیاورید و با روش Ana خطای هر یک را حساب کرده و تأثیر h را بررسی کنید

هرچه h کمتر باشد روش دقیق‌تر است.

روش Runge-kutta



از همان روش مستطیل‌ها استفاده کرده ولی مستطیل‌ها را کوچک‌تر کرده پس خطا کمتر می‌شود.

$$y_{i+1} = y_i + \sum w_i k_i$$

همه روش اویلرها را دارد، که بعداً اصلاح شده

Runge-kutta { 2nd order, 3d order, forth order

2nd order:

$$y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2 + E(h^2)$$

مقادیر w_1 و w_2 خودکوتا به دست می‌آیند با تعریف Rung-kutta

$k_1 = h f(x,y)$

$k_2 = h f(x_i + ch, y_i + a_1 k_1)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4 + E(h^4)$$

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = h f(x_i + c_1 h, y_i + a_1 k_1)$$
$$k_3 = h f(x_i + c_2 h, y_i + b_1 k_1 + b_2 k_2)$$
$$k_4 = h f(x_i + c_3 h, y_i + d_1 k_1 + d_2 k_2 + d_3 k_3)$$

ضرایب c_1 و c_2 و c_3 ... c_n در اختیار خودماست.
پس قوت کار رانج کوتا است
w و a و b و k خودبخود بدست می‌آیند.

first order → یعنی فقط w_1 و k_1

$$y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 = y_i + w_1 h f(x_i, y_i)$$ مقایسه با رابطه اویلر

$$\boxed{w_1 = 1}$$

تمام روش‌های Numerical همشان یک تیلور است پس دقیق‌ترین آنها همان تیلور است

$$\underbrace{y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y_i)}_{RK2 \text{ دقیقاً معادل}} + \frac{h^3}{3!} f''(x_i, y_i)$$

خطای رانج کوتا مرتبه ۲

$$\xrightarrow{\text{تیلور}} \quad y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{h^2}{2!} f'_i \qquad \text{(I)}$$

$$\xrightarrow{RK2} \quad y_{i+1} = y_i + w_1 h f(x_i, y_i) + w_2 h f(x_i + a h, y_i + a_1 k) \qquad \text{(II)}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ضرایب جز I و II باید با هم برابر باشند:

بسط توابع ۲ متغیره: $f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\Delta x}{1!}$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\Delta y}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{2!} + \frac{2\Delta x\Delta y}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

$$+ \cdots$$

$\rightarrow$

$$f(x_i+c_1h, y_i+a_1k_1) = \underbrace{f(x_i, y_i)}_{f_i} + c_1h\frac{\partial f}{\partial x} + a_1k_1\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots$$

$$(\mathrm{I}) \rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + w_1hf_i + w_2hf_i + w_2c_1h^2f_x + w_2a_1\underbrace{k_1}_{hf_i}hf_y \quad \mathrm{II}$$

$$y' = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\overbrace{\frac{dy}{dx}}^{f}$$

$$\mathrm{I} \rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + hf_i + h^2/2\,(f_x + f_y f_i) \quad \mathrm{III}$$

$$\mathrm{II} = \mathrm{III}$$

روش RK $\quad \boxed{c_1 = 1}$

$$\begin{cases} w_1 = 1/2 \qquad a_1 = 1 \\ w_2 = 1/2 \\ y_{i+1} = y_i + 1/2(k_1+k_2) \\ k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf(x_i+h, y_i+k_1) \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

RK 4

فرضیات $\begin{cases} c_1 = 1/2 \\ c_2 = 1/2 \\ c_3 = 1 \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} RK2 \\ RK3 \\ RK4 \end{matrix}\right\}$ خطا ?

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] + E(h^5)}$$

روش بسیار دقیق تا ۵ رقم اعشار

$c_1 \ldots c_n$ را بر اساس سادگی روابط خودش انتخاب کرده.

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = h f(x_i + h/2 , y_i + k_1/2)$$
$$k_3 = h f(x_i + h/2 , y_i + k_2/2)$$
$$k_4 = h f(x_i + h , y_i + k_3)$$

استفاده از ۴ : یک ورژن ایده‌آل می‌دهد.

بیش از این دقت این روابط با اضافه کردن روابط بسیار پیچیده‌تری به دست آورد که مرسوم نیست!

RK3:

$\begin{cases} c_1 = 1/2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \quad \begin{cases} k_1 = h f(x_i, y_i) \\ k_2 = h f(x_i + h/2 , y_i + k_1/2) \\ k_3 = h f(x_i + h , y_i + 2k_2 - k_1) \end{cases}$$

برای توابع پیچیده از Numerical خیلی خوب می‌توان استفاده کرد. در مقدمات آن باید رسم کنیم.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

با استفاده از روش Rung-kutt محاسبه کنید:

$dy/dx = \overset{f(x_i,y_i)}{\widehat{x+y}}$ $y(0)=1$ $y(0.02)=?$

* $y_{i+1} = y_i + 1/2(K_1+K_2)$ $K_1 = hf(x_i,y_i)$ $K_2 = hf(x_i+h, y_i+K_1)$

$y_1 = y_0 + 1/2(K_1+K_2)$

$K_1 = hf(x_0,y_0) = 0.02[0+1] = 0.02$

$K_2 = hf(\underbrace{x_0+h}_{0.02}, \underbrace{y_0+K_1}_{1.02}) = 0.02[0.02+1.02]$

در RK اگر مرحله را از قبلیش کم کنید خطا را به ما نشان می‌دهد.

$RK_4 - RK_3 \Rightarrow E = 1/6(K_1+2K_2+2K_3+K_4) - 1/6(K_1+4K_2+K_3)$

برای n-1 رفتیم n-1 بار و حفظ n تعریف شود n دقت بیشتر

۱_ هر مرحله را از مرحله قبل کم کنیم

۲_ خطای relative error * بهترین با Analytical

$E(h^5)$

۳_ تیلور

جلسه ۸۸,۸,۱۲

solution of sys of ODE:

در حل دستگاه معادلات می‌خواهیم استفاده کنیم.

فرض کنید n معادله مثل روبه رو داشته باشیم.

این ۲ معادله شکل استاندارد را دارد

حالا از روش RK (در حالت همزمان) استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} dy/dx = f_1(x,y,z) \\ dz/dx = f_2(x,y,z) \end{cases}$$

I $y_{i+1} = y_i + 1/6(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$ K: increament for y

l: increament for z

II $z_{i+1} = z_i + 1/6(l_1+2l_2+2l_3+l_4)$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

1) $k_1 = h f_1(x_i, y_i, z_i)$

2) $l_1 = h f_2(x_i, y_i, z_i)$

3) $k_2 = h f_1(x_i + h/2,\ y_i + \frac{k_1}{2},\ z_i + \frac{l_1}{2})$

4) $l_2 = h f_2(x_i + h/2,\ y_i + k_1/2,\ z_i + l_1/2)$

5) $k_3 = h f_1(x_i + h/2,\ y_i + k_2/2,\ z_i + l_2/2)$

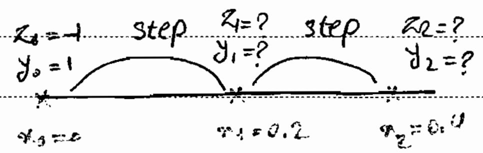
6) $l_3 = h f_2(x_i + h/2,\ y_i + k_2/2,\ z_i + l_2/2)$

7) $k_4 = h f_1(x_i + h,\ y_i + k_3,\ z_i + l_3)$

8) $l_4 = h f_2(x_i + h,\ y_i + k_3,\ z_i + l_3)$

:مثال

$$\begin{cases} dy/dx = zy + x & y(0) = 1 & y(0.2) = ? \\ & z(0) = -1 & y(0.4) = ? \\ dz/dx = xz + y & h = \Delta x = 0.2 & z(0.2) = ? \\ & & z(0.4) \end{cases}$$



← 4 م، R.K

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + 1/6\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ z_1 = z_0 + 1/6\,(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \end{cases}$$

$k_1 = h f_1(x_0, y_0, z_0) = 0.2\,[-1 \times 1 - 0] = -0.2$

$l_1 = h f_2(x_0, y_0, z_0) = 0.2\,[0 \times -1 + 1] = 0.2$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$K_2 = hf_1\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right) = 0.2 f_1\left(0.1, (\overbrace{1-0.1}^{0.9}), (\overbrace{-1+0.1}^{-0.9})\right)$

$= 0.2(-0.18 + 0.1) = -0.016$

$l_2 = 0.2\, f_2(0.1, 0.9, -0.9) = 0.2(0.1 \times -0.9 + 0.9) = 0.162$

$K_3 = hf_1\left(0.1, 1 + \frac{-0.016}{2}, -1 + \frac{0.162}{2}\right) = \checkmark$

$l_3 = hf_2\left(0.1, 1 + \frac{-0.016}{2}, -1 + 0.162/2\right) = \checkmark$

روشهایی که تاکنون استفاده کردیم برای معادلات غیرخطی نیز صادق است.

For example:

$dy/dx + y^2 = x$

$\hookrightarrow y \times y$ — این یک معادله غیرخطی است. روشهایی که گفته شد برای آن قابل اجراست

non_linear = عامل

Higher order Diffrential Equation:

تا حالا شکل معادلات ما استاندارد بود ولی حالا

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y = x^2$$

البته Max درجه‌ای که در امتحان برای آن می‌آوریم درجه ۲ است.

$f_1(x, y, z, u)$

حالا به چه صورت است که باید این order را کاهش دهیم؟

$\frac{dy}{dx} = z$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = u \quad \hookrightarrow f_2(x, y, z, u)$ $\qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2z}{dx^2} = du/dx$

(در امتحان RK2 یا RK4 را می‌خواهند)

PaPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$ $du/dx + 2u - z - y = x^2$

$\xrightarrow{\text{شکل استاندارد}}$ $du/dx = \underbrace{x^2 + y + z - 2u}_{f_3(x, y, z, u)}$

$$\begin{cases} 1)\ dy/dx = f_1(x, y, z, u) = z \\ 2)\ dz/dx = f_2(x, y, z, u) = u \\ 3)\ du/dx = f_3(x, y, z, u) = x^2 + y + z - 2x \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + 1/6\,(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ z_{i+1} = z_i + 1/6\,(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\ u_{i+1} = u_i + 1/6\,(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1 = hf_1(x_i, y_i, z_i, u_i) \\ l_1 = hf_2(x_i, y_i, z_i, u_i) \\ m_1 = hf_3(x_i, y_i, z_i, u_i) \end{cases} \qquad \begin{cases} K_2 = hf_1(x_i + h/2, y_i + K_1/2, z_i + l_1/2, u_i + \frac{m_1}{2}) \\ l_2 = hf_2(\quad) \\ m_2 = hf_3(\quad) \end{cases}$$

K_3, l_3, m_3, ... به همین ترتیب بایستی بدست آیند.

مثال:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 64y = 16\cos 8x \qquad y(0) = y'(10) = 0$$

$$h = 0.1$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$dy/dx = 0 \qquad y' = 2$

$y_0 = 0 \qquad y = ?$

$x_0 = 0 \qquad x_1 = 0.1$

این مسئله‌ها را که فقط در یک نقطه شروع در یک نقطه اطلاعات به ما داده شده را Initial value گویند:

$$dy/dx = z = f_1(x, y, z) = y'$$

$$dz/dx + 64y = 16\cos 8x$$

$$dz/dx = 16\cos 8x - 64y = f_2(x, y, z)$$

$$\begin{cases} dy/dx = z = f_1(x, y, z) \\ dz/dx = 16\cos 8x - 64y = f_2(x, y, z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + 1/6\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ z_{i+1} = z_i + 1/6\,(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \end{cases}$$

for $i = 0$

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + 1/6\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ z_1 = z_0 + 1/6\,(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = hf_1(x_0, y_0, z_0) = 0.1 \times [0] = 0 \\ l_1 = hf_2(0, 0, 0) = 0.1 \times [16 - 64 \times 0] = 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_2 = hf_1(x_0 + h/2,\ y_0 + k_1/2,\ z_0 + l_1/2) = 0.1 \times f_1(0.05, \overset{0.08}{0.08}) = 0.1 \times 0.8 = \\ l_2 = hf_2(0.05,\ 0.8) = 0.1\{16\cos 8(0.5) - 64 \times 0\} = 1{,}47 \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} k_3 = 0.0735 \\ l_3 = 1.22 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_4 = 0.122 \\ l_4 = 0.644 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 + 1/6\,[0 + 2\times 0.08 + 2\times 0.0735 + 0.122] = 0.0715 \\ z_1 = 0 + 1/6\,[1.6 + 2\times 1.47 + 2\times 1.22 + 0.644] = 1.27 \end{cases}$$

$y_1 = y(0.1) = 0.071$

$z_1 = y'(0.1) = 1.27$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x_1 = 0.1 \\ y_1 = 0.0715}} = 16\cos(8\times 0.1) - 64\times 0.0715 =$$

$y_{analytical} = ?$ همین مسئله را با روش Analytical حل کنید

$\left. y_{analytical} \right|_{x=0.1} = ?$

$$\%ARD = \left|\frac{y_{ana} - y_{num}}{y_{ana}}\right| \times 100$$ خطا را هم حساب کنیم

هر چه قدر از شرایط مرزی مسئله دور شویم یعنی از نقطه شروع دور شویم خطا بیشتر می‌شود در نقطه شروع خطا صفر است

(اصلا روش خوبی نیست)

ایراد مسائل initial این است که انتهای مسئله مشخص نیست جواب‌هایی که در نهایت به دست می‌آوریم قابل اعتماد نیستند برعکس مسائل Boundry con که جوابشان خیلی دقیق است

هیچ گاه شرط مرزی روی مسئله تاثیری نمی‌گذارد مگر مسئله Lumped باشد.

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Merson Method:

$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_5) + E(h^6)$$

$\quad\quad\quad\quad\quad 1 \quad 4 \quad 1$

مجموع ضرایب نیز برابر ۶ است

$k_1 = hf(x_i, y_i)$

$k_2 = hf(x_i + h/3,\ y_i + k_1/3)$

$k_3 = hf(x_i + h/3,\ y_i + k_1/6 + k_2/6)$

$k_4 = hf(x_i + h/2,\ y_i + k_1/8 + 3/8\, k_3)$

$k_5 = hf(x_i + h/2,\ y_i + k_1/2 - 3/2\, k_3 + 2k_4)$

فرض کرده: $c_1 = 1/3 \quad c_3 = 1/2$

$c_2 = 1/3 \quad c_4 = 1$

خطای پیشنهادی: $E \approx \frac{1}{30}(2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5)$

و الان این خطای درجه ۴ ، بیشتر در یک درجه کمتر است

این بود روش ODE و نکاتش

نکات مهم :

(۱) اثبات روش RK را نمی‌خواهد

$\quad$ یک step $\quad$ تا step

(۲) روشهای حل ODE ← اویلر ← RK2 ← RK4

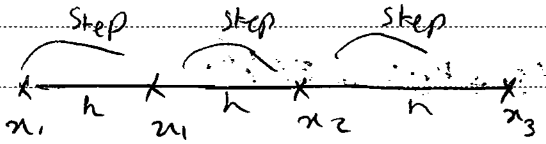
(۳) محاسبه خطای ARD را بدانیم

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Step size Control

انتخاب مقدار h.



h را می‌توان متغیر فرض کرد

$h =$ متغیر

$y(x)$

همراه

هرچه h کوچکتر باشد مقدار عددیش کوچکتر از ۱ باشد) $\Delta x = h < 1$ و به صفر نزدیکتر باشد

دقت محاسبه بالاتر است. عیب: زمان، خطای گسسته‌سازی و محاسبات طولانی‌تر

if $h =$ بزرگ (زمان محاسبه کوتاه ⇐ خطا ↑ ⇐ دقت محاسبه ↓ (زیرا ...)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه ۸۸٫۸٫۱۷

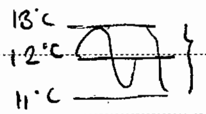
Step _ size control:

E_u : upper limit error $\qquad E_l < E < E_u$

E_L : Lower limit error

$|E| < \underbrace{\text{Tolerance}}_{\varepsilon}$ محدوده خطای ما باید در آن محدوده قرار داشته باشیم

$|\varepsilon| < 10^{-3} \qquad -0.001 < \varepsilon < 0.001$



محدوده کاری ما

برای مثال روی فشارسنج ها و دماسنج ها داریم $^{\circ}C \pm 1^{\circ}C$ اصطلاحاً یک بازه‌ای وجود دارد که در آن خطا limit می‌گویند. در آن محدوده با کنترل عدد مورد نظر تغییر می‌کند.

مثلاً اگر بخواهیم باشد $|E| < 10^{-10}$ یعنی: اول باید وسیله‌ای داشته باشیم تا ۱۰ رقم اعشار را بخواند. در ترازوی حساس تا ۲ رقم اعشار می‌توانیم داشته باشیم. برای طول تا (0.01^{mm})

در کارهای مهندسی معمولاً تا سه رقم اعشار کفایت می‌کند. عدد مهندسی برای هر مسئله تفاوت دارد.

Colletz method:

برای درجه ۳ و ۴ جواب باید همیشه کمتر از یک باشد تا ... شود.

$$C = \left| \frac{K_3 - K_2}{K_2 - K_1} \right|$$

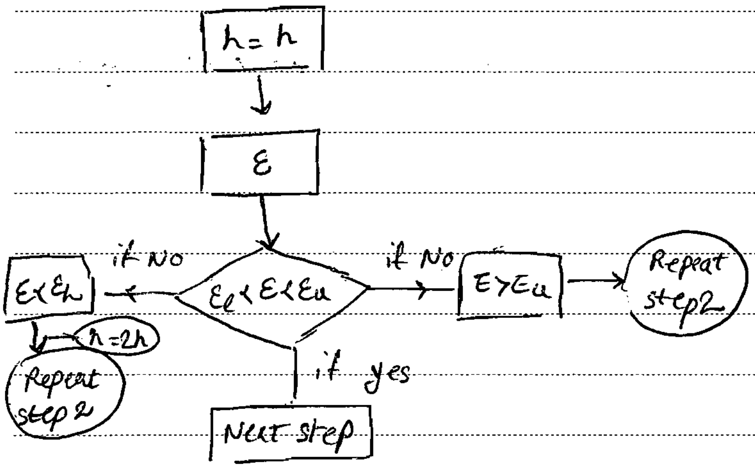
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مراحل:

۱) انتخاب h

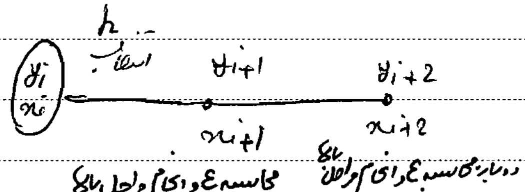
۲) محاسبه خطا

۳) شرط تلورانس را بررسی کنید



اگر h را خیلی کوچک انتخاب کنیم مقدار خطا خیلی کم می‌شود ولی محاسبات خیلی طولانی می‌شود و کمکی نیست

همه برنامه‌نویس‌ها این مراحل را رعایت می‌کنند



هر step که حرکت می‌کنیم باید خطای آن نقطه را حساب کنیم و مجموع هم نمی‌توان گفت، ممکن است علامت خطاها مخالف باشد. باید قدر مطلق خطاها را بنویسیم و با هم جمع کنیم.

Stability:

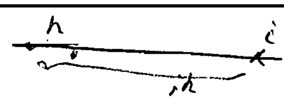
یک پاسخ پایدار پاسخی است که مقدار خطای آن عدد مشخص باشد و یا مخالف بی‌نهایت باشد. در آن صورت سیستم stable است.

در یک Numerical هم همین صورت است

$\lim_{x\to\infty} y(x)$ = bounded limited or finite

$x_i = i\Delta x$ or ih

$\lim_{hi\to\infty} y_i \neq \infty$ stable



البته با رجوع می‌توانیم قطعی بگوییم این جواب است.

Multiple step solution :

$h = \Delta x = Const$

IVP ↗ single step sol

IVP ↘ Multiple step sol

در یکسری روش‌ها singlestep h های ثابت است. گام های اول را با استفاده از روش‌های Singlestep Scheme با گام یکسان برداریم. روش‌های مختلفی برای multiplestep وجود دارد.

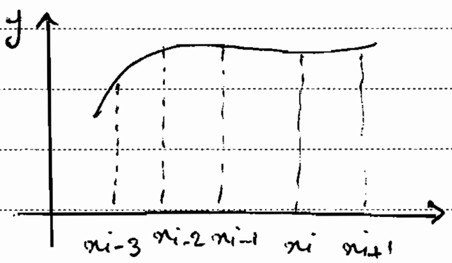
Milen's solution method:

$$y_{i+1,p} \approx y_{i-3} + \frac{4h}{3}\left(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i\right) + E(h^5) \quad (I)$$

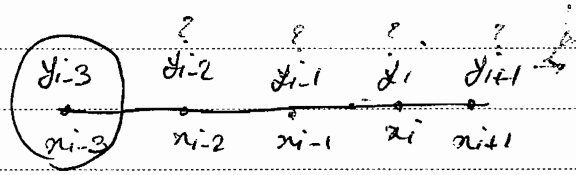
$$y_{i+1,c} \approx y_{i-1} + \frac{h}{3}\left(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}\right) + E(h^5) \quad (II)$$

چرا این روش y_{i+1} را predict میکنیم بجای f_{i+1} ، corrected y_{i+1}

$dy/dx = f(x,y)$ $\quad f_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$



برای روش ۴ step اول را باید داشته باشیم تا step از این روش جلو برویم.



نقطه مورد نظر

حالا فرض میکنیم ۴ نقطه که معلوم است از قبل در نظر داریم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

		Δf	Δf
x_{i-3}	f_{i-3}	>	
x_{i-2}	f_{i-2}	>	
x_{i-1}	f_{i-1}	>	
x_i	f_i	>	
x_{i+1}	f_{i+1}	>	

ملاحظه ۱: به دست آوردن مقادیر با استفاده از این جدول و روش forward Newton

ملاحظه ۲: همچنین برای سطح زیر منحنی از روش سیمپسون استفاده کرده که خطای کمتری نسبت به ذوزنقه دارد.

روش RK 4

اگر تند تر باشد سوالی دار شود step ها را جا می‌دهند.

مراحل حل:

در مراحل اول ۳ نقطه مجهول وجود دارد

پیشنهاد Milen: این نقاط را به روش Singlestep به دست بیاوریم

1) Compute y_{i-2}, y_{i-1}, y_i by single step Method (ie RK^4)

نقطه‌ای است که از " " استفاده می‌کنیم

چون خطا کمتر است از RK4

معمولاً کمتر از 10^{-3} خوب است خیلی سخت بگیریم 10^{-4}

2) Compute $y_{i+1,p}$ by Equation (I)

حل Analytical داریم

3) Compute f_{i+1} $f_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1,p})$

حل مسئله را از روش RK4 داریم

4) Comput $y_{i+1,c}$ by Equation (II)

مسئله converge نشود

$\frac{dy}{dx} + y = x$

$y(5)$

$h = 0.01$

0.05

برای بار دوم از همین مراحل استفاده می‌کنیم - با روش RK4 حل کنیم

5) Check $|y_{i+1,c} - y_{i+1,p}| \leq tol$ $\xrightarrow{ok}$ Next step (y_{i+2})

$\downarrow$ NO

6) $y_{i+1,p} = y_{i+1,c}$

PAPCO

7) Repeat step ③ until converge solution

روش مرتبه ۵ ، Millen's بود هست . دو روش دیگر :

Hamming's method

Adam's Hilton

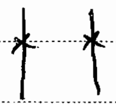
استفاده: روش اویلر RK1 ، RK2 ← 3step ، RK4 ← ... 2step

مثلاً: روش predictor collect ، روش RK جور ، RK3 - RK4

multiple step سؤال بصورت عددی داده می‌شود یا اینکه در استفاده step ها را خودمان تعیین می‌کنیم.

Boundary value problem (BVP)

مسائلی با یک متغیر تابع و مقدار تابع در ۲ نقطه داده شده که این دو نقطه مرزهای مسئله هستند.



مثلاً دیواره‌ای که داریم دو سر دیواره مرزهای ما است.

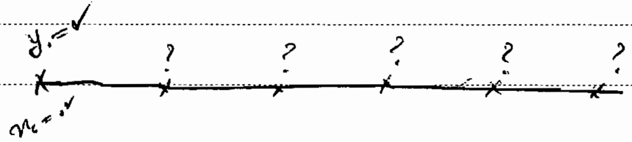
این نقاط حداقل ۲ تا هستند که به جواب مسئله برسیم.

این مسائل وقتی پیش می‌آید که معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ را داشته باشیم (می‌تواند مسئله درجه اول باشد ولی ۲ شرط داشته باشد یکی برای رسیدن به جواب یکی برای ثابت کردن آن!)

از نقطه نظر مهندسی درست است حداقل ۲ جواب

از نظر ریاضی بی‌نهایت جواب

در مسائل مهندسی ۲ تا مقدار برای تابع باید داشته باشیم تا ثابت کنیم در Data آزمایشگاهی هم استفاده از ۲ تا نقطه اضافی برای ثابت کردن. مثلاً بدست آوردیم که معادله بدست آوردن مکان و حل نمی‌کنیم ولی آن را ثابت کنیم



در مسائل ریاضی مهندسی علی‌الخصوص Numerical باید حتماً ۲ شرط را داشته باشیم

Subject:

Year. Month. Date. ( )

برای حل مسائل Boundary دو راه حل کلی وجود دارد.

1) shooting Method (or try & error) value

2: Finite difference Method

95% از نرم افزارها از روش Finite استفاده می‌کنند

1) shooting Method (or try & error)

مسئله BV را به IV تبدیل می‌کنیم

Base کار همان Initial value است.

چون Boundary است احتمالاً درجه دوم است البته می‌توان درجه اول را هم (در مهندسی فرآیندی) بررسی کرد.

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

or $\quad b\,dy/dx + cy = f(x)$

$y_0 = A \quad h \quad h \quad h \quad h \quad y_L = B$

$y'(x_0) = \text{حدس} = P_1$ (در این روش باید یک حدس بزنیم (اگر درجه ۲ باشد) مثلاً همان $y(0)=A$ را برای y' هم انتخاب بکنیم.)

step1

RK4 → RK4 → RK4 → y_L calculated $= P_2$ → بررسی کنید

if $|y_L(\text{cal}) - y_L(\text{Real})| < \text{Tol}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

پس حدس‌ها درست بوده اما اگر $|y_{L_{calcu}} - y_L| > \varepsilon$ حدس باید تغییر کند

step 2 $\begin{cases} y'(x_0) = P_3 \\ \text{single step} \quad y_{Lcal} = P_4 \\ \text{if } |y_{Lcal} - y_L| < tol \\ \text{if } |y_{Lcal} - y_L| > tol \end{cases}$

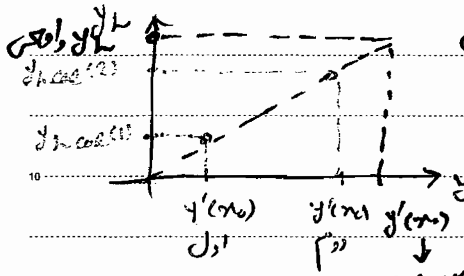
جواب نهایی $y_2\ y_3\ y_4 \dots$

حدس دوم درست

حدس سوم

روش میان‌یابی

روش خطی بودن



معمولاً ۲ حدس برای این پیش‌بینی‌ها می‌باشد

$\begin{cases} y'(x_0) \xrightarrow{RK} y_2\ y_3\ y_4 \dots \\ \text{if} \quad |y_{Lcal} - y_{L\,واقعی}| < Tol \end{cases}$

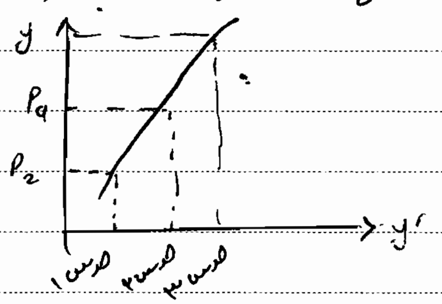
معمولاً به جواب برسیم.

اگر نشد حدس سوم که $y_{L}cal$ حساب بردیم $y_{Lcal} = P_5$ دوباره

۱) سه نقطه را رسم کنیم.

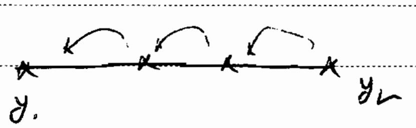
۲) معادله رابطه خطی نبوده پس سهمی رسم می‌کنیم

$y_L = a + b'y + c'y^2$



اگر باز هم به جواب نرسیدیم چی؟ روش RK را معکوس با y_L معلوم شروع می‌کنیم تا به y_0 برسیم و بسته به پیچ y را حساب کنیم

$y_L = ?$



هفته دوم: H به جواب برسیم

Subject:

Year. Month. Date. ( )

جلسه ۹۲/۸/۱۸

Finite Difference Method

این روش ساده‌ترین روش برای حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی است.

مشکل این روش:

به صورت بلوکی حجم جواب‌ها را بدست نمی‌آوریم و n معادله و n مجهول خواهیم داشت

مزیت:

سادگی، احتیاج به حفظ کردن معادلات نیست

$$y_{i+1} = y_i + y'_i \frac{\Delta x}{1!} + y''_i \frac{\Delta x^2}{2!}$$

$$y(x+\Delta x) = y(x) + y'(x) \frac{\Delta x}{1!} + \dots$$

base این روش در حالت اول بسط تیلور است

$$y_{i+1} = y_i + y'_i \Delta x + y''_i \frac{\Delta x}{2!}$$

$$y'_i = \left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x} - y''_i \frac{\Delta x}{2!}$$

خطا

$i-1 \quad i \quad i+1 \quad i+2$

$$\left(dy/dx\right)_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x} + E(\Delta x) \qquad \text{Forward Finite Diff}$$

dy را اگر بخواهیم مشتق را بر اساس نقطه جلویی بنویسیم ← روش forward
اگر بر اساس نقطه عقبی باشد ← روش backward
بر اساس دو نقطه کناری باشد

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} + E(\Delta x)\ ?$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} + E(\Delta x^2) \quad \text{central}$$

$$y_{i-1} = y(x - \Delta x) = y(x) - y'(x)\frac{\Delta x}{1!} + y''(x)\frac{\Delta x^2}{2!} - \dots \qquad (I)$$

$$(II)$$

$$y(x+\Delta x) = y(x) + y'(x)\frac{\Delta x}{1!}$$

$$(I) + (II)$$

خطای روش central درجه ۲ ، Δx است.

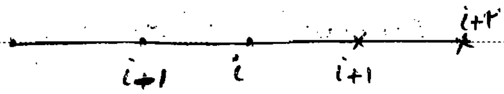
این ۳ رابطه را حفظ باشید !!!

بین این ۳ روش ، کمترین خطا را central دارد. اگر درامتحان گفتیم با بهترین روش حل کنید یا اصلا صحبتی از روش نشده باشد از روش central بریم.

برای درجه ۲ هم این روش را میتوان بکار برد:

Forward:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{d}{dx}\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right] = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{dy_{i+1}}{dx} - \frac{dy_i}{dx}\right]$$



$$= \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{\Delta x} - \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right] = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\Delta x^2} + E(\Delta x^2)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

خطای Max که در روشهای Finite Diff داریم 10^{-2} است. اگر فرآیند خیلی حساس باشد با خطا روبرو هستیم
به دلیل اعتبار نتوانیم روش مناسبی نیست

$$Tol \geq 10^{-2}$$

backward:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{d}{dx}\left[\frac{y_{i-1}-y_i}{\Delta x}\right] = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x} + E(\Delta x^2)$$

در این روش به این صورت است که بین ۲ نقطه متوسط گرفتیم نقطه وسط، متوسط بالا و پایین است
که تابع در جهت x کاملا خطی است پس بعبارتی اگر تغییرات x زیاد و خطی نباشد
این روش دقت خیلی بالایی ندارد برای افزایش دقت ممکن است Δx را خیلی کوچک انتخاب کنیم

$\Delta x = 0.001$ یا $\Delta x = 0.0001$

ولی اگر در روشهای single step
Δx را خیلی کوچک انتخاب کنیم ساعتها طول می‌کشد.
از لحاظ دقت خیلی ساده‌ترین روشهای single step خیلی اولیه است. که تابع را در جهت x
برای هر ۳ نقطه تغییرات خطی است

Central:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + E(\Delta x^2)$$

پس central چون هم قبل و هم بعد را در نظر می‌گیرد برای کارهای کمکی مناسب‌تر است.

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 \qquad y(0)=0 \qquad y(1) = -0.4 \qquad \Delta x = 0.2$$

حل:

$y_i = 0$ $\quad x_1 = 0.2 \quad x_2 = 0.4 \quad x_3 = 0.6 \quad$ $y_L = -0.4$

$x_0 = 0 \quad ? \quad ? \quad ? \quad x_4 = 0.8 \quad ? \quad x_L = 1$

$x \longrightarrow$

مسئله از نوع boundry است شرایط در دو نقطه مشخص است (میدان نقاط با ما است) حالا مسیر را انتخاب می‌کنیم.

طبق جلسات قبل داریم می‌نویسیم

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2\right)_i$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i + (y_i) = (x^2)_i$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} = x_i^2$$

$$y_{i+1} + (\Delta x^2 - 2)y_i + y_{i-1} = \Delta x^2 x_i^2$$

$x_i = i\Delta x$ Finite Difference equation

۴ معادله برای ۴ مجهول باید بنویسیم

اگر $\Delta x = 0.01$ بود 100 تا معادله داشتیم

$$\begin{cases} i=1 & y_2 - 1.96y_1 + y_0 = 0.04 \times 0.04 = 0.0016 \\ i=2 & y_3 - 1.96y_2 + y_1 = 0.04 \times 0.16 = \\ i=3 & y_4 - 1.96y_3 + y_2 = 0.04 \times 0.36 = \\ i=4 & y_5 - 1.96y_4 + y_3 = 0.04 \times 0.64 \end{cases}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با این روش بیشتر از 2-1 دقیقه کامپیوتر جواب نمی‌دهد حتی برای 1000 مجهول
ولی با روش گوس شاید ساعت‌ها طول بکشد.

Homework :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - y = 2x$$

$y(0) = 0 \qquad y(1) = 2 \qquad \Delta x = 0.1$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

PAPCO

جلسه ۸۸/۸/۲۴

Ex:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0 \qquad \frac{dy}{dx}(0) = 2.35 \qquad \frac{dy}{dx}(1) = 20.04$$

$\Delta x = 0.$

y_0 فرضی $\qquad$ y_6 $\qquad$ $y'(1) = 20.04$

x_0 — x_0 ($i=1$) — $x_2 = 0.25$ — $x_3 = 0.5$ — $x_4 = 0.75$ — $x_5 = 2$ ($i=5$) — x_6

فرق این مسئله boundry conditionها این است که در نقاط ابتدایی و انتهایی مشتق را داریم نه مقدار تابع
اگر به صورت مسئله روش گفته بود از آن می‌بردیم در غیر این صورت

central Method:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0 \qquad \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} - 4y_i = 0$$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - 4\Delta x^2 y_i = 0 \qquad \boxed{y_{i+1} - 2.25 y_i + y_{i-1} = 0}$$

Finite Diff Eq

۵ تا مجهول داریم پس باید ۵ تا معادله بنویسیم از $i=1$ شروع کنیم آخرش یک معادله کم می‌آید

در مسائل قبلی مقدار y_0 و y_6 مشخص بود
جایگزین می‌کردیم.

$i=1 \qquad y_2 - 2.25 y_1 + y_0 = 0$

$i=2 \qquad y_3 - 2.25 y_2 + y_1 = 0$

$i=3 \qquad y_4 - 2.25 y_3 + y_2 = 0$

$i=4 \qquad y_5 - 2.25 y_4 + y_3 = 0$

$i=5 \qquad y_6 - 2.25 y_5 + y_4 = 0$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

اینجا برای به دست آوردن y_0 و y_6 از شرایط مرزی داده شده استفاده می‌کنیم.

$$BC\,1: \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x_1=0\\ i=1}} = 2.35 \qquad BC\,2: \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x_0=\\ i=5}} = 20.04$$

Central

$$\frac{y_2 - y_0}{2\Delta x} = 2.35 \qquad \frac{y_6 - y_4}{2\Delta x} = 20.04$$

$$y_2 - y_0 = 0.5 \times 2.35 \qquad y_6 = 10.02 + y_4$$

$$y_0 = y_2 - \frac{2.35}{2}$$

$$\begin{cases} 2y_2 - 2.25y_1 = \frac{2.35}{2} \\ y_3 - 2.25\,y_2 + y_1 = 0 \\ y_4 - 2.25\,y_3 + y_2 = 0 \\ y_5 - 2.25\,y_4 + y_3 = 0 \\ -2.25\,y_5 + 2y_5 = 10.02 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -2.25 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2.25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2.25 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.25/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10.02 \end{bmatrix}$$

قطر اصلی تغییر نمی‌کند قطرهای کناری (المان اول و آخر) چون در ارتباط با B.C هستند عوض می‌شن
است اعداد ایشان با بقیه فرق کنه

Thomas Method,

$y_1 = 1.55$ $\qquad y_3 = 3.70$ $\qquad y_5 = 9.75$

$y_2 = 2.33$ $\qquad y_4 = 5.99$

: Homework

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0 \qquad BC\begin{cases} y(0) = 1.55 \\ \dfrac{dy}{dx} = 20.04 \end{cases}$$

هر نقطه‌ای که معلوم است از آنجا شروع می‌کنیم برای حل
این نقطه شروع ما $i=2$ بود.

سه نوع مسئله با شرایط مرزی مختلف تعریف کنیم

حالت سوم) $\frac{dy}{dx}(1) = 2y(1)$

حالتی در انتقال حرارت

conduction = convection

در ۴ حالت دیگر انواع شرایط مرزی هایی که گفته شد خواهد بود.

معادلات غیرخطی :

Non-Linear Equation:

برای مثال در واقع در واکنشهای غیر درجه یک داریم.

$-r_A = kC_A^n \qquad n \neq 0,1 \Rightarrow$ non linear equation

$K = K(T)$: Heat transfer $\Rightarrow$ Non Linear

در حالت سیالاتی وقتی وارد تحت تاثیر میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد.

فرم کلی یک معادله غیرخطی به صورت زیر است:

فرم استاندارد معادله دیفرانسیل خطی درجه ۲

$$a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = f(x)$$

$a(x), b(x), c(x), f(x) =$ Const or variable $\forall x$: linear equation

Subject:
Year. Month. Date. ( )

if $a(x), b(x), c(x) : f(y, y', y'' \dots)$ Non linear equ

if $f(x) = [y, y', y'' \dots]^n \quad n \neq 1$: Non linear equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 3y + 2$$

این معادله غیرخطی نیست چون $f(x)$ ما توان ندارد.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 3y^2 \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - y(4+2y) = 0$$

این معادله غیرخطی است چون c ما تابعی از y شده $C = 4 + 2y$

(* بعد از این مبحث وارد مدل‌سازی PDE می‌شویم)

روش حل معادلات غیرخطی برای یک مثال داریم

مثال) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4y = 2y^2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \underbrace{(4+2y)}_{\text{عامل غیرخطی شدن}} y = 0$$

تفاوت روش Numerical نسبت به Analytical

حل معادلات غیرخطی است تنها در چند نوع محدود Analytical حل می‌شود

Central

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2} - \underbrace{(4+2y)}_{c} y\right]_i = 0$$

اگر c یک عدد بود یا تابعی از x روش حل مثل قبل خواهد بود.

ولی در اینجا c که یکی از نقطه‌های مجهول است پس روش ما بر اساس حدس و خطا است

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Try & error,

روش حل

عامل غیرخطی شدن را در تکرار قبل از k (itterationk) می‌نویسیم

بقیه را در iteration k+1 می‌نویسیم

وقتی k=1 ، یعنی حدس اول

$$\left[\frac{d^2 \overset{new}{y}^{K+1}}{dx^2} - (4 + 2\overset{old}{y}^{K})\, \overset{new}{y}^{K+1}\right] = 0$$

$$\frac{\overset{New}{y_{i+1}} - 2\overset{new}{y_i} + \overset{new}{y_{i-1}}}{\Delta x^2} - (4 + 2\overset{old}{y_i})\, \overset{new}{y_i} = 0$$

or

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x} - c_i y_i = 0$$

$$\overset{New}{y_{i+1}} - \left[2 + (4 + 2\overset{old}{y_i})\,\Delta x^2\right] \overset{new}{y_i} = 0$$

or

$$y_{i+1} - (2 + \Delta x^2 C_i)\, y_i + y_{i-1} = 0$$

حال به تعداد نقاط مجهول معادله را می‌نویسیم

$y_1 = 7$	?	?	?	?	?
$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

$i=2$ $\quad y_3 - (2 + \Delta x\, C_2)\, y_2 + \overset{A}{\cancel{y_1}} = 0$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$i=3 \quad y_4 - (2+\Delta x^2 C_3)\, y_3 + y_2 = 0$

$i=4 \quad y_5 - (2+\Delta x^2 C_4)\, y_4 + y_3 = 0$

$i=5 \quad y_6 - (2+\Delta x^2 C_5)\, y_5 + y_4 = 0$

$y_6 \to B$

$$\begin{bmatrix} -(2+\Delta x^2(4+2y_2^{k,\,old})) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -[2+\Delta x^2(4+2y_3^{k,\,old})] & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -[2+\Delta x^2(4+2y_4^{k,\,old})] & 1 \\ 0 & 0 & 1 & [-2+\Delta x^2(4+2y_5^{k,\,old})] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}^{New}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -A \\ 0 \\ 0 \\ -B \end{bmatrix}$$

y^2 باید حدس زده شود

باید کاسته شود

مراحل :

۱) حدس

1) Assume value $y_1^{k,\,old} \quad y_2^{k,\,old} \quad y_3^{k,\,old} \quad y_4^{k,\,old} \quad y_5^{k,\,old}$

بهتر است با توجه به شرایط مرزی در نظر بگیریم و حدس در اختیار ماست.

2) Compute y_i^{New} or y_i^{k+1} by Matrix Solution

$y_2^{k+1} \quad y_3^{k+1} \quad y_4^{k+1} \quad y_5^{k+1}$

3) check for Convergancy

$|y_i^{k+1} - y_i| < Tol$

این تلورانس بستگی به دقت ما دارد

10^{-3} در کارهای مهندسی

10^{-4} به صورت دقیق‌تر باشد

مثلاً هر جا 0.01 بگذار $1 = 1.01$

دما ← 0.1

Subject:
Year. Month. Date. ( )

4) if no converge solution

$y_i^{K} = y_i^{K+1}$ مقادیری که بدست آوردیم جایگزین می‌کنیم که جدید ما می‌شود.

5) Repeat step ② until convergency

تا به جواب همگرا برسیم.

تمامی معادلات PDE که غیرخطی هستند

سؤال امتحان: مسئله‌ای که داده می‌شود، مراحل را بنویسیم و ماتریس را بدست بیاوریم.

• Homework

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3xy\frac{dy}{dx} + y^3 = e^x$$

در اینجا ۲ تا ترم غیرخطی داریم،

۲ معادله داریم،

۱) از y فاکتور بگیریم

$$BC\begin{cases} y(0) = 7 \\ y(7) = 3 \end{cases}$$

$\Delta x = 0.1$

درجه اولیه: 1

*

100 نمره

امتحان میان‌ترم تا پایان اینها.

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Partial Differential Equation (PDE)

۲ تا مثال Analytical را بررسی میکنیم و بقیه را عددی حل میکنیم

$$\begin{cases} 1)\ u(x,t) \\ 2)\ u(x,y) \end{cases}$$

معادلات نوع اول $u(x,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q \qquad \text{Parabolic P.D.E}$$ حرارت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + Q \qquad \text{Wave P.D.E}$$ موج

معادلات نوع دوم $u(y,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Q \qquad \text{Laplace Equation}$$ در مختصات کارتزین

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = Q \qquad \text{Laplace}$$ (در مختصات کروی)

if $Q = 0$ Homogenous

if $Q \neq 0$ Non-Hom

شرح مختصری در کلاس میدهم.

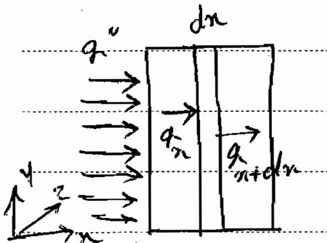
Subject:
Year. Month. Date. ( )

unsteady state one dimentional equation (or Parabolic)

دیواره‌ای که ضخامت L داریم که در ابتدا دارای دمای محیط است (ابتدا، کلمات initialy سیستم ها را تعریف کنند)

و بطور ناگهانی شار حرارتی q'' از یک طرف وارد و دیگر طرف را با انتقال حرارت سمت آن h و ∞ به مقدار برسانیم

با فرض انتقال یک بعدی مسئله را حل کنید و توزیع دما را هم بدست بیاورید



h, T_∞

at $t=0$ $T=T_\infty$ کتاب ایستا فصل اول

طول L مشخص است با ضخامت ها نیست ولی در جهت y ارتفاع خیلی زیاد است از انتقال در جهت y صرف‌نظر می‌کنیم

در جهت z هم اطلاعی نداریم پس آن را خیلی بزرگ در نظر گرفته

حرارت ساده‌ترین مسیر را برای عبور پیدا می‌کند

(معادلات فقط دمایی که داری در دیواره را می‌خواهیم B.C را بنویسیم)

$T(x,t)$ داخل جسم هستیم پس فقط cond داریم

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{Gen} - \dot{E}_{con} = \frac{dE}{dt} \rightarrow mcT \quad (\rho V)$$

در راستای انتقال مستقیم نمی‌نویسیم

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(kA_x\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho \underbrace{\Delta V}_{A.dx} C \frac{\partial T}{\partial t}$$

وقتی ساده کنید باید ترم اضافی dx و dx با هم حذف شوند.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{K}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\alpha = \text{Heat Diffusity} = \frac{k}{\rho c}$$

PaPCO

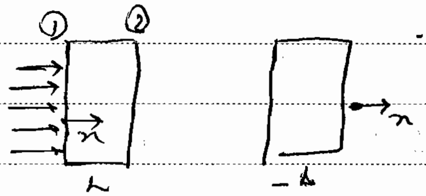
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{1}{\alpha}\, dT/dt$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \frac{d^2T}{dx^2} \quad , \text{ parabolic Homogen}$$

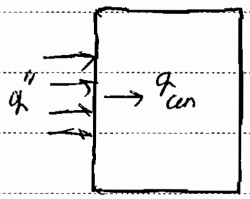
if (اثر زایش / تولید بیشتر) ⇒ غیرهمگن می‌باشد

زمانی می‌خواهیم B.C بنویسیم باید سراغ مختصات مکانی برویم
[illegible]



در این مسئله مرز ۱ و ۲ فرقی ندارد چون رفتار یکسانی دارد.

در هر مورد این را هم می‌توانیم بنویسیم تا BC داشته باشیم
در مرز ما تقارن نداریم.



$$IN - OUT + GEN = C_S$$

مرز ۱ $\left\{ q'' = -K \frac{dT}{dx}\Big|_{t=0} \quad \text{or} \quad \frac{dT}{dx} = \frac{-q''}{K} \right.$ ⇒ x direction non homogen

مرز ۲ $\quad -K \frac{dT}{dx}\Big|_{t=L} = h\left[T(L,t) - T_\infty\right]$

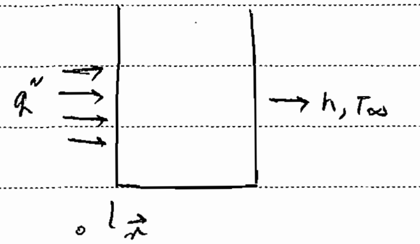
$$IC : \quad T(x,0) = T_\infty$$

یک معادله همگن داریم با دو شرط مرزی غیرهمگن.
جهت x غیرهمگن است

در نوشتن شرایط مرزی هر یک از جهت‌ها غیرهمگن باشد می‌گوییم آن جهت غیرهمگن است

روش seperation برای این مسئله قابل استفاده نیست چون شرایط مرزی

جلسه ۸۸/۸/۲۵



$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = -q''/K \\ -K\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=L} = h\left[T(L,t) - T_\infty\right] \end{cases}$$

$IC: \ T(x,0) = T_\infty$

تصمیم داریم مسئله را به روش Seperation حل کنیم:

۱) معادله حاکم باید همگن باشد

۲) اگر معادله unsteady باشد شرایط مرزی باید همگن باشد فقط IC غیرهمگن باشد

۳) اگر معادله s.s باشد آنگاه در بین شرایط مرزی باید یکی غیرهمگن و بقیه هم همگن باشند

روش همگن‌سازی: ۱) تغییر متغیر ۲) روش [illegible]

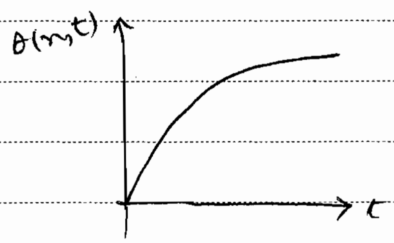
تغییر متغیر

قبل از بیان این روش تابع را باید همگن کنیم

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad \theta = T - T_\infty$$

$$BC: \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{-q''}{K} \\ -K\frac{\partial \theta}{\partial x}\Big|_{x=L} = h\,\theta(L,t) \end{cases}$$

$IC: \ \theta(x,0) = 0$



مثال:

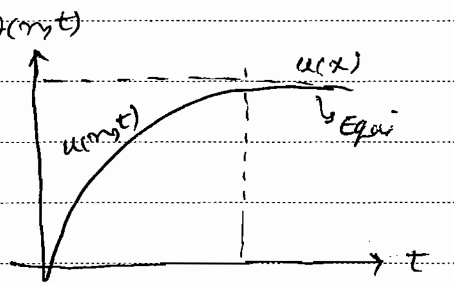
اگر تابع $\theta(x,t)$ تابعی از دو متغیر t, x باشد

در حالت t_∞ به حالت تعادلی می‌رسیم

اگر مسئله واقعی باشد پاسخ معادله یک مقدار محدود است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )



پاسخ را به ۲ قسمت می‌توانیم تقسیم کنیم:

۱) پاسخ هم به x و هم به t بستگی دارد

۲) پاسخ فقط به x بستگی دارد

$$\theta(x,t) = u(x,t) + u_E(x)$$

یا اینکه $\theta(x,t) = u(x,t) + \theta_E(x)$

superposition principle

اصل جمع پذیری جواب‌ها

اگر معادله‌ای دارای n جواب باشد آنگاه مجموع جواب‌ها جواب معادله می‌شود. مجموع جواب‌ها با هر ضریبی (ضریب ثابت یا غیر ثابت)

جواب معادله $\begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{cases}$ $\quad u = \sum_{i=1}^{n} u_i$

$$u' = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

c_i ثابت یا غیر ثابت

این قضیه را داریم که در ریاضیات می‌خوانیم.

$$y = y_h + y_{nh}$$
$$= c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots$$

$$\theta(x,t) = \theta_1(x,t) + \theta_e(x)$$

$$\theta(x,t) = \theta_1(x,t) + \theta_2(x,t) + \theta_3(x) + \theta_4(t) + Ke \ldots$$

که بسته به نوع مسئله از این حالات انتخاب می‌کنیم

$T(x,t) = \theta(x,t) + T_\infty$ $\qquad$ T_∞ OK است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

پس میتوان به دلخواه یکی از این ترم‌ها را برداشت.

۱) اصل superposition کاربردی ندارد

۲) بعضی از این ترم‌ها در حالتی خودکه در روش تحلیلی متوجه میشویم کدام ترم را برداریم

$$\theta(x,t) = u(x,t) + \theta_E(x)$$

انتخاب باید به صورتی شود که شرایط مرزی همگن شود

از معادله مشتق میگیریم

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial \theta_E}{\partial t}} = \alpha\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d^2\theta_E}{dx^2}\right] \quad (I)$$

روش تحلیلی برای معادلات حرارتی (map) در حالت SS با زمان تغییر نمیکند (چون ترم t نداریم)

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_{Equi} \Rightarrow \left(\frac{\partial \theta_E}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta_E}{\partial x^2}\right)$$

$$\alpha \frac{d^2\theta_E}{dx^2} = 0 \qquad \boxed{\frac{d^2\theta_e}{dx^2} = 0} \quad (II)$$

معادله باید در همه شرایط صادق باشد حتی در زمان تعادل

$$(I, II) \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{d^2\theta_E}{dx^2} = 0 \qquad \theta_E(x) = c_1 x + c_2$$

شرایط مرزی برای هر جوابی از معادله باید صادق باشد

در زمان تعادل باید صادق باشند

$$BC \text{ at } Equi \begin{cases} \left.\dfrac{d\theta_e}{dx}\right|_{x=0} = -q''/k \Rightarrow c_1 = -\dfrac{q''}{k} \\ -k\left.\dfrac{d\theta_e}{dx}\right|_{x=L} = h\theta_{EL} \Rightarrow c_2 \quad (III) \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

c_1, c_2 بدست آید

θ_E معلوم درنظر بدست بیاورید { مقادیر همگن باشند ← θ_E تابع خطی است به x وابسته می‌شود.
مقادیر غیرهمگن باشند ← θ_E تابع درجه ۲ است به x وابسته می‌شود

حال شرایط مرزی $\frac{\partial u}{\partial t}$ را بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$BC \begin{cases} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=0} - \left.\frac{\partial \theta_E}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{-q''}{k} - \left(\frac{-q''}{k}\right) = 0 \\ -k\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} + \left.\frac{d\theta_E}{dx}\right|_{x=L}\right) = h\left(u(L,t) + \theta_E\right) \\ \left.\frac{d\theta_E}{dx}\right|_{x=L} = \theta_E(L) \quad \text{II} \text{ طبق} \\ -K\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = u(L,t) \end{cases}$$

پس ترم همگن، همگن باقی می‌ماند و ترم ناهمگن را با این روش همگن کردیم.

$$IC: \quad u(x,0) = \theta(x,0) - \theta_E(x) = -\theta_E(x)$$

$$T|_{x=L} = T_\infty$$ مواقعی مسائل ساده‌تر است مثلاً h خیلی بزرگ

حل مسائل:

product Rule: اگر تابعی از n متغیر تشکیل شده باشد می‌توان آن را به صورت حاصلضرب n تابع
تک متغیره نوشت یا به یک متغیر و $(n-1)$ متغیر و شکل‌های دیگر.

$$u(x,y,z,t) = f(x)\, g(y)\, h(z)\, B(t)$$
$$= f(x)\, v(y,z,t)$$
$$h(x,y)\, V(z,t)$$

$$u(x,t) = f(x) \cdot G(t)$$

$$u(x,t) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \xrightarrow{\div \alpha G}$$

$$\frac{1}{\alpha G}\frac{dG}{dt} = \frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2} = -\lambda$$

* اگر جنس در یک راستا همگن باشد
آنگاه باید پاسخ در آن جهت یک پاسخ پریودیک باشد

پاسخ پریودیک: Sin , Cos , P_n , Q_n , J (بسل نوع اول)، Y (بسل نوع دوم)

مجموعه‌ای از توابع متعامد‌اند

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda f = 0$$

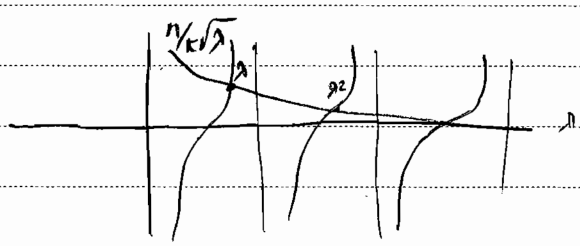
$$y(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}\, x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\, x$$

$$B.C \begin{cases} \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ -K \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = h\, u(L,t) \qquad C_2 K\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\, L = h C_2 \cos\sqrt{\lambda}\, L \end{cases}$$

c_2 از دو طرف حذف می‌شود. نمی‌تواند صفر باشد چون در این صورت جواب صفر می‌شود

$$K\sqrt{\lambda}\tan\sqrt{\lambda}\, L = h \qquad \tan\sqrt{\lambda}L = \frac{h}{K\sqrt{\lambda}} \qquad \lambda_n =$$

صفرهای Sin، Cos می‌رسیم $\left\{ \text{Sin} : (\ ,\ ) \pi/2 \right.$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

نقاط تقاطع را که هستند ریشه‌های این مقادیر را میشوند

پس به λ خواهیم داشت $\qquad \lambda_1 < \lambda_2 \ldots\ldots < \lambda_n$

$$\boxed{f(x) = C_2 \cos\sqrt{\lambda_n}\, x}$$

$$\frac{1}{\alpha G}\frac{dG}{dt} = -\lambda_n \qquad \frac{dG}{dt} = -\alpha\lambda_n G \qquad \frac{dG}{G} = -\alpha\lambda_n dt$$

$$\boxed{G(t) = C e^{-\alpha\lambda_n t}}$$

اگر در یک کدام از آنها را به هم ضرب شود پس

با هم جمع میشود

مطابق اصل جمع پذیری که وجود دارد

$$\boxed{u(x,t) = \sum \underbrace{A_n}_{\text{ضریب}} e^{-\alpha\lambda_n t} \cos\sqrt{\lambda_n}\, x}$$

برای بدست آوردن ضریب A_n از IC استفاده میکنیم

$$\left(u(x,0) = -\theta_E(x) = \sum A_n \times 1 \times \cos\sqrt{\lambda_n}\, x\right) \times \cos\sqrt{\lambda_n}\, x\, dx \int_0^L$$

سری فوری $\qquad$ Eigen function $\qquad$ تابع ویژه

λ_n : Eigen variable $\qquad$ مقادیر ویژه

$$A_n = \frac{\int_0^L \left[-\theta_E(x)\right] \cos\sqrt{\lambda_n}\, x\, dx}{\int_0^L \cos^2\sqrt{\lambda_n}\, x\, dx} \qquad \neq L/2$$

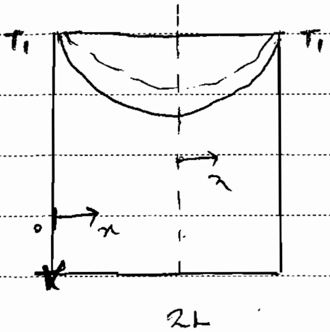
$\hookrightarrow$ حتماً حل باید بشود

PaPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Homework :

یک دیوار به ضخامت L است در محیط T_∞ قرار دارد سپس ناگهان دمای دو طرف دیواره به T_1 افزایش می‌یابد
مسئله را حل کرده و توزیع دما را بدست بیاورید.



در حالت مسئله را بررسی کنید
۱) مبدا مختصات را از * مشخص می‌کنیم
۲) مبدا مختصات را در وسط

$\theta = T - T_1$

جواب کلی $\quad T(x,t) = T_\infty + \theta_E(x) + u(x,t)$

در مسئله قبلی ۲ عامل غیرهمگن داشتیم $\left\{ \begin{array}{l} q''/k \\ T_\infty \text{ شرط مرزی دوم} = \\ IC \end{array} \right.$

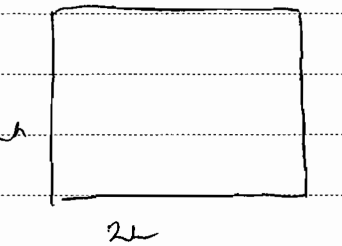
* هر ترم غیرهمگن در مسئله پایدار و IC یک پاسخ در جواب می‌دهد *

$u(x,t)$ اثر IC

مسائل غیرهمگن ← مسائل در جواب اصلی
$u(x,t)$ اثر IC را نشان می‌دهد
$\theta_E(x)$ اثر q'' را نشان می‌دهد
و T_∞ هم همین T_∞

اگر همه همگن باشد پاسخ مسئله صفر می‌شود

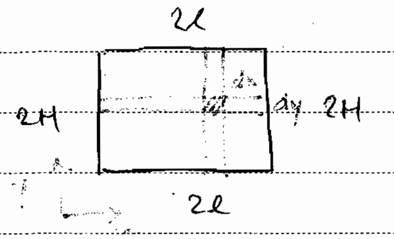
مثال: یک صفحه رسانا با ابعاد $2L$ و $2h$ در محیطی با ضریب انتقال حرارت بسیار بزرگ قرار دارد. با فرض انتقال رسانایی در داخل صفحه مطلوب توزیع دما را بدست آورید. در داخل صفحه انرژی به مقدار u''' $\left(\frac{\ }{m^3}\right)$ تولید میشود.



Subject:
Year. Month. Date. ( )

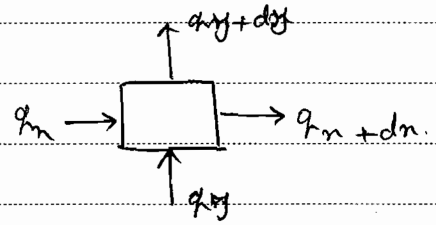
جلسه ۸۸/۲/۱

مسئله جلسه قبل:



مسئله دو بعدی دیسک:
چون 2l و 2l دارد و جهت z را نگفته چون نشان نداده و این دیسک
که در جهت z خیلی بزرگ است

دیسک ⎨ دو صفحه عمود بر محور x / دو صفحه عمود بر محور y ⎬ که با هم این دو المان همدیگر را قطع کنند



هر کدام محورهای مختصات را مشخص کردیم در همان جهت q rand

$$q_x - q_{x+dx} \qquad q_y - q_{y+dy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(KA_x\frac{dT}{dx}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(KA_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy + u'''\Delta V = 0$$

A در هر جهت = حاصلضرب المان‌ها در همان جهت

$A_x = dy\,dz'$ — dz را ما برابر ۱ یا هر چیز دیگری
$A_y = dx\,dz'$ — می‌گذاریم چون سیستم حالت دو بعدی دارد
$\Delta V = dx\,dy\,dz$ — حذف می‌شود

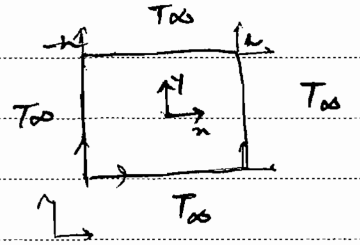
ساده سازی →
$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{u'''}{K} = 0}$$

که عامل غیر همگن شدن مسئله

معادله لاپلاس
بصورت غیر همگن

Subject:

Year. Month. Date. ( )



چون منبع حرارت، بیشترین دما را داشته باشد.

چون در مورد h صحبت نشده، در همه اطراف T_∞

متقارن هستیم { وسط x جایی است برای مرکز حرارت

وسط y چون در اطراف T_∞ و وسط یا Min یا Max

$$BC \begin{cases} x=0 \quad \frac{\partial T}{\partial x}(0,y)=0 \qquad y=0 \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x,0)=0 \\ x=L \quad T(L,y)=T_\infty \ \text{غیرهمگن} \qquad y=H \quad T(x,H)=T_\infty \ \text{غیرهمگن} \end{cases}$$

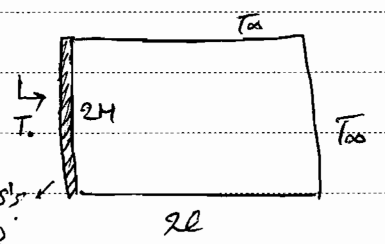
$\theta = T - T_\infty$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{u''}{K}=0$$

$$BC \begin{cases} \frac{\partial\theta}{\partial x}(0,y)=0 \\ \theta(L,y)=\underbrace{T(L,y)}_{T_\infty}-T_\infty=0 \end{cases} \text{جهت } x \text{ همگن}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\theta}{\partial y}(x,0)=0 \\ \theta(x,H)=T(x,H)-T_\infty=0 \end{cases} \text{جهت } y \text{ همگن}$$

مثال: یک صفحه مستطیلی با ابعاد $2L\times 2H$ موجود است در یک طرف آن دمای T_0 ثابت شده است با فرض اینکه ضریب انتقال حرارت محیط بسیار بزرگ است توزیع دما برای این سیستم



برای اینکه نشان دهیم T_0 ثابت ...

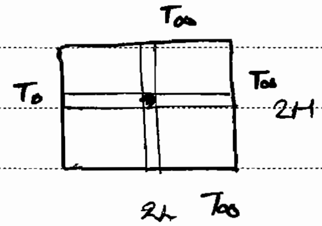
Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$4.2\ \frac{J}{g\,^{\circ}C} \times \frac{1\,Btu}{1055\,J} \times \frac{454\,g}{1\,lb} \times \frac{\cancel{1.8}\ \Delta T_C}{\cancel{1.8}\,F}$$

جلسه ۸۸/۹/۲ 1.8

$$T_C \times 1.8 + 32 = T_F$$



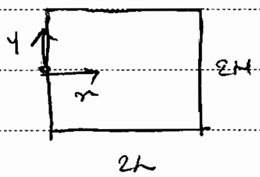
مسئله حل شد؟ : $\Delta T_C \times 1.8 = \Delta T_F$

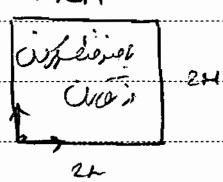
$$\frac{\Delta T_C}{\Delta T_F} = \frac{1}{1.8} \qquad 1.8\,\Delta T_C = \Delta T_F$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(KA_x \frac{\partial T}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(KA_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy = 0 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

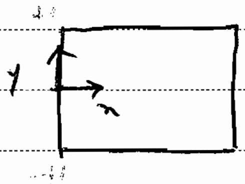
$y = 2H$

در مسائل که محور تقارن داریم بهتر است یکی از گوشه ها $y = H$ مبدا را انتخاب بکنیم با توجه به تقارن

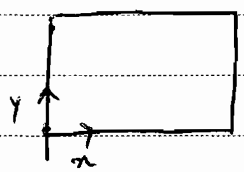




با در نظر گرفتن :



$$BC \begin{cases} T(0,y) = T_o \\ T(2L,y) = T_\infty \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x,0) = 0 \quad \text{or} \quad T(x,0) = \text{finite or bounded} \\ T(x,H) = T_\infty \end{cases}$$



$$\begin{cases} T(0,y) = T_o \\ T(2L,y) = T_\infty \\ T(x,0) = T_\infty \\ T(x,2H) = T_\infty \end{cases}$$

با توجه به تقارن فرم پاسخ در این نوع انتخاب جواب های ساده تر می شود.

معادله همگن { دارای سه شرط مرزی : سه تا همگن
دارای سه شرط مرزی: ۲ تا همگن

$8\ (1, 1 + 1, 2)$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

superposition اصل $\quad \theta = T - T_\infty$

$$T(x,y) = \theta(x,y) + T_\infty$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0$$

$$BC \begin{cases} \theta(0,y) = \overset{T_0}{\cancel{T(0,y)}} - T_\infty = \theta_0 \\ \theta(2l,y) = T(2l,y) - T_\infty = 0 \\ \frac{\partial\theta}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial T}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial T_\infty}{\partial y} = 0 \\ \theta(x,H) = \underset{T_\infty}{T(x,H)} - T_\infty = 0 \end{cases}$$

x direction : غیرهمگن

y direction : homog Dir

پاسخ پریودیک یا نوسانی

$$\theta(x,y) = f(x)\,g(y)$$

$$\frac{1}{f}\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{g}\frac{d^2g}{dy^2} = 0$$

λ به عنوان ثابت جداسازی گونه‌ای انتخاب می‌شود که در جهت y همگن دو جواب بدهد

$$-\frac{1}{g}\,\frac{d^2g}{dy^2} = \frac{1}{f}\frac{d^2f}{dx^2} = \lambda$$

$$\frac{1}{g}\,\frac{d^2g}{dy^2} = -\lambda \qquad \frac{d^2g}{dy^2} + \lambda g = 0$$

$$g(y) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}\,y + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\,y$$

$\lambda > 0 \qquad \lambda$: Eigen value or charectristic value

BC3:

$$dg/dy\,(0) = 0 \qquad C_1 = 0$$

BC4:

$$g(H) = 0 \qquad C_2 \cos\sqrt{\lambda}\,H = 0$$

$$\cos\sqrt{\lambda}H = 0 = \cos(n\pi + \pi/2) \quad n = 0, 1, \ldots$$

or

$$\cos(n\pi - \pi/2) \quad n = 1, 2$$

$$\sqrt{\lambda}H = (n - 1/2)\pi$$

$$\lambda_n = \left[\frac{(n - 1/2)\pi}{H}\right]^2 \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_n = \left[\frac{(n + 1/2)\pi}{H}\right]^2 \quad n = 0, 1$$

$$g(y) = \underbrace{C_2 \cos\sqrt{\lambda_n}\, y}_{\phi(y)} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Eigen function

$$\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2} = \lambda_n \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} - \lambda_n f = 0$$

ریشه‌ها : $\pm\sqrt{\lambda_n}$

$$f(x) = C_3 e^{\sqrt{\lambda_n}x} + C_4 e^{-\sqrt{\lambda_n}x} \quad (1)$$

or

$$C_5 \sinh\sqrt{\lambda_n}x + C_6 \cosh\sqrt{\lambda_n}x \quad (2)$$

$$C_7 \sinh\sqrt{\lambda_n}(2l - x) + C_8 \cosh\sqrt{\lambda_n}(2l - x) \quad (3)$$

بسته به نیاز یکی از اینها استفاده می‌کنیم

اگر [illegible] شرط مرزی [illegible] باشد [illegible]

اگر [illegible]

اگر [illegible] (2) [illegible]

HW : تا شماره ۲ را بررسی کنید

91

طول محدود ← ۳۲۲

در $x=0$ تابع محدود است
در $2l$ صفر است ۳ ، ۴

$$f(x) = C_7 \sinh\sqrt{\lambda_n}(2l-x) + C_8 \cosh\sqrt{\lambda_n}(2l-x)$$

$$\theta(2l, y) = 0 \Rightarrow f(2l) = 0 \qquad \boxed{C_8 = 0}$$

$$f(x) = C_7 \sinh\sqrt{\lambda_n}(2l-x) + \cancel{C_8 \cosh\sqrt{\lambda_n}}$$

طبق اصل superposition اگر مشترک را که دو جواب باشد مجموع آنها یا هر ترکیبی
هم جواب خواهد بود.

$$\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\sqrt{\lambda_n}(2l-x)\cos\sqrt{\lambda_n}\,y$$

$$\lambda_n = \left[\frac{(n-1/2)\pi}{H}\right]^2$$

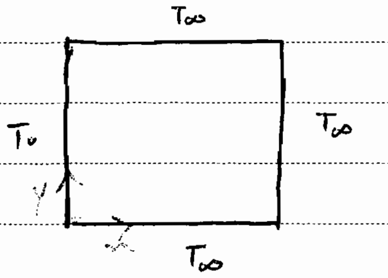
for A_n : from BC 4 :

$$\theta(0,y) = \theta_0 = \sum A_n \sinh\sqrt{\lambda_n}(2l)\cos\sqrt{\lambda_n}\,y \quad : \int \cos\sqrt{\lambda_n}\,y\,dy$$

$$A_n \sinh\sqrt{\lambda_n}(2l) = \frac{\int_0^H \theta_0 \cos\sqrt{\lambda_n}\,y\,dy}{\int_0^H \cos^2\sqrt{\lambda_n}\,y\,dy}$$

$$A_n = \frac{2\theta_0}{H\sinh(\lambda_n 2l)}\int_0^H \sqrt{\lambda_n}\,y\,dy = \frac{2\theta_0}{H\sinh\sqrt{\lambda_n}2l} \times \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}\,y\Big]_0^H$$

باید بتوانید جوابها را پیش بینی کنید.



فرم دوم مسئله مختلطات :

شرط مرزی [illegible]

تست: [illegible]

$$BC\begin{cases}\theta(0,y)=\theta_0 \\ \theta(2L,y)=0\end{cases} \Big\rangle \ \text{جهت } x \ \ \text{non-hom}$$

$$\begin{cases}\theta(x,0)=0 \\ \theta(x,2H)=0\end{cases} \Big\rangle \ \text{جهت } y \ \ \text{homog}$$

$$y:\quad \phi(y)=\sin\sqrt{\lambda_n}\,y \qquad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{2H}\right)^2 \qquad n=1,2,\dots,\infty$$

$$x:\quad f(x)=C_3\sinh\sqrt{\lambda_n}\,(2L-x)$$

$$\theta(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\sqrt{\lambda_n}\,(2L-x)\,\sin\sqrt{\lambda_n}\,y \qquad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{2H}\right)^2$$

$\theta(1,1)$: HW
$\theta(1,2)$

برای هر دو جواب با ۴ تا بسط بیاورید

مقدمه‌ای برای حل عددی معادلات PDE :

PDE → Error
PDE → Stability

در این معادلات در مبحث بالا را باید در نظر بگیریم

Error
- Data Error → BC, IC
- truncation Error
- Method of solution { explicit, Implicit

خطا وابسته به چند عامل است :

* ممکن است خطا دارای خطای ذاتی باشد. BC را ما اندازه‌گیری کرده‌ایم باید وسیله‌ای که با آن اندازه‌گیری کرده خطا دارد
خود این اعداد وابسته به دستگاه‌ها و تجهیزات

* خطای برش ناشی از بریدن بسط تیلور است. Max آن از درجه ۲ است.

* بر حسب نوع روشی که استفاده می‌کنیم هر کدام یک خطای مخصوص به خود دارد.

P.D.E
- Finite Difference * عددی درس
- Finit elemet

$$\text{PDE} \xrightarrow[\text{Expansion}]{\text{Taylor}} \text{Finite D.A equation}$$

هر چه تعداد جملات بیشتر خطای ما کمتر است. معادلات PDE را با این روش‌ها بررسی می‌کنیم.

PDE
- explicit Method :
  روش سریع : هر نقطه را بر اساس سه نقطه معلوم بدست می‌آورد.
- Implicit Method :
  با سه نقطه مجهول و یک نقطه‌ی معلوم

Richardson Method

Cranle-Nicdson

مقدمه حل :

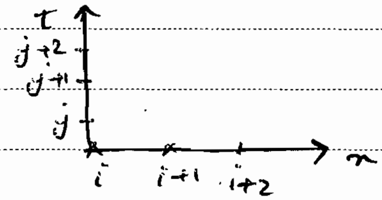
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

شبکه بندی دو بعدی را داریم

و دو جهت برای آن تعریف می‌کنیم

و x, t به فواصل مجزا تقسیم می‌شود با فاصله آن کار نداریم)

$u(x,t)$



$$\begin{cases} x_i = i\Delta x \\ t_j = j\Delta t \end{cases}$$

Δx و Δt باید طوری انتخاب شوند خطا در حد قابل قبول قرار گیرد.

ساده نویسی : $u(i\Delta x, j\Delta t) \rightarrow u(i,j) \rightarrow u_{ij}$

$\rightarrow$ شیوه نوشتن حل

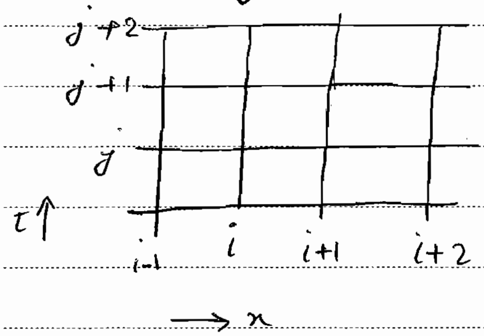
Subject:

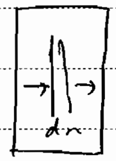
Year. Month. Date. ( )

جلسه ۸۸,۹,۸

Explicit Method:

$$u(x,t)_{i,j} \Rightarrow u(x_i, t_j) \Rightarrow u(i\Delta x, j\Delta t) \Rightarrow u(i,j) \Rightarrow u_{ij}$$





در حل سوال Analytical تمام یک جا حل می‌کردیم
ولی در نقاط نظیر Finite difference روی یک نقطه متمرکز هستیم step ها به صورت جهش‌های زمانی است
وصل میشه Line by Line اتفاق می‌افتد. زمان به عنوان متغیر سوم در نظر گرفته می‌شود. پس در معادلات
تحلیلی زمان را به عنوان یک پارامتر در نظر نمی‌گیریم و صرفاً در زمان‌های مختلف با حالت ss پاسخ را بدست می‌آوردیم)

i: increament for x-direction — با افزایش رشد
j: increament " t " — برای جهت

$$\begin{cases} \Delta x = \text{const} \\ \Delta t = \text{const} \end{cases}$$

* یادآوری: ODE (point by point)

! مقدار Δx, Δt روی stability تاثیر دارد. باید با دقت انتخاب شوند

! $\Delta t < 1$, $\Delta x < 1$

↑ Control step size

بعداً روشی گفته می‌شود که محدوده Δx , Δt را مشخص کنند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

و IC, BC ها Data Error ها را مشخص می‌کنند

روش حل مسئله هم رو پایداری مؤثر است که باید بسیار مهم باشد

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$BC \begin{cases} u(0,t) = A \\ u(L,t) = B \end{cases}$$

یکی از تحلیلی‌ترین روشها یا بهترین روشها برای حل معادلات PDE روش Seperation است.

چون

را برحسب نوع متغیرها رفتار تابع را ارائه می‌دهد در حالی که روشهای تحلیلی مثل laplace، یک همچین مطالبی را ارائه نمی‌دهد

در روش Numerical شرایط مرزی و IC در روش حل مسئله تأثیری ندارد همانطور که از طول محدوده یا با محدوده‌ها نوع روش عوض نمی‌شود. اگر طول مد باشد روش combination مشخص شده است.

در روش تحلیلی نوع IC, BC نوع حل مسئله را تعیین می‌کند.

این یک ضعف برای روش Numerical است از نقطه نظر ریاضی در تحلیلات مهندسی این یک مزیت است وابسته به زمینه هم محسوب است چون هر مسئله‌ای را با F.D حل می‌کند)

پس یک ضعف تحلیلی در حل عددی: ضعف ناشی از نادیده گرفتن نوع شرایط مرزی در حل مسئله

حل مسئله:

$$u(x,t) \to u$$

هر روشی قواعد خاص خود را دارد:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}$$

روش Exp

وقتی $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}$ را می‌نویسیم t تغییر نمی‌کند چون x دارد تغییر می‌کند

$$\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j\right)_i = \alpha\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i\right)_j$$

(از نظر تیلور هیچ فرقی با ODE ندارد (n آن مشتق جزئی اول ثابت است)

$$\left(\frac{u_{j+1}-u_j}{\Delta t}\right)_i = \alpha\left(\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta x^2}\right)_j + |E(\Delta t)| + |E(\Delta x^2)| \quad *$$

وقتی محاسبات را می‌نویسیم خطا را هم باید بنویسیم

(می‌بینیم که خطا برابر دو با ۲ است، و خطای بالا کمتر است (max tol: 10^{-2} است در روش FiniteDiff)
پس خطای روش FD از بسیاری روش‌ها بیشتر است ولی اکثر کارهای تحقیقاتی با این روش است پس ما چه کار کنیم تا هم $Tol = 0.1$ / 0.01 باشد و هم خطا کم باشد.

پس انتخاب مناسب Δx و Δt مهم است هرچه کوچکتر ← خطا ↓ ← زمان پاسخ‌دهی ↑

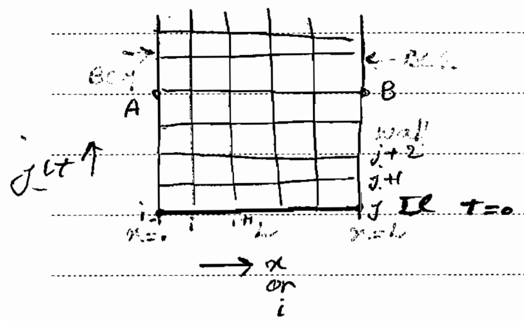
معادله PDE ≠ معادله F.D

$$\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} > 0$$

رابطه * را مرتب کنیم

$$\boxed{u_{i,j+1} = \underbrace{\lambda u_{i+1,j}}_{\text{معلوم}} + \underbrace{(1-2\lambda)u_{i,j}}_{\text{معلوم}} + \underbrace{\lambda u_{i-1,j}}_{\text{معلوم}}}$$

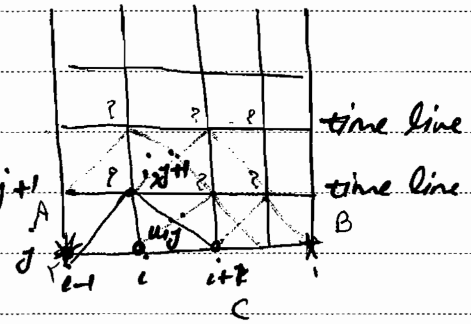
مجهول: $u_{i,j+1}$



خطوط افقی ← زمان
سمت بالا باز است چون زمان بی‌پایان است و زمان تا هر جا می‌رود
تا به S.S برسد.
مثل همان خطی قرمز است که بالا ...

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

گسترش پیدا می‌کند. در مسائل داریم همان IC می‌شود، اگر (۱-۵) داریم از آنجا شروع کنیم.



پس برای هر نقطه مجهول ۴ بار معادله را می‌نویسیم
در مثلث صفحه قبل از هر ۴ نقطه سه تا که آن معلوم است
پس تولید مثلث می‌کند و هر نقطه به تنهایی محاسبه می‌شود

در هر time line نقاط مجهول از هم مستقل هستند

روش الگوریتم explicit در شکل اساسی دارد:

۱- Tol در حد Δx^2 است.

۲- از نظر هندسی فرمت گفته شده در رابطه یک نقطه خیلی نزدیک است چون مقدار تابع در همه موقعیت‌ها کنار هم وابسته است و این روش این وابستگی را در نظر نمی‌گیرد و باعث می‌شود خطا کسب شده زیاد داشته باشیم.

explicit: آسان‌ترین و سریع‌ترین روش حل معادلات PDE

C: initial condition

$\left.\begin{matrix} B \\ A \end{matrix}\right\} \Rightarrow B.C$

در این نقاط علامت گذاشته شده * هم می‌توانند B, C یا A, C باشند.

$u(0,t) = A$

$u(x,0) = C$

این مسئله باید در همه جاها و خطاها مربوط باشند.
در حالت کلی A و C با هم برابر نیستند.

اگر BC ها ثابت باشند از ابتدا به آنها خواهیم رسید.
IC را ثابت داریم در حقیقت مسئله به روش separation حل کردیم (چون در روش تحلیلی BC را همگن کردیم برای IC)

که فرمت کدام ترجیح دارد؟ ← فرمت‌ها ← عوامل نام دارد 1-2

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مقدار دما در زمان 0.06 را بدست بیاورید؟

مثال: $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ $\quad 0<t<\infty \quad 0<x<1$ زمانی را بیابیم step 6

$$\begin{cases} T(0,t) = 100^\circ C \\ T(1,t) = 100^\circ C \end{cases} \qquad IC \quad T(x,0) = 0 \qquad \Delta t = 0.01 \quad \Delta x = 0.2$$

Stability   دو روش برای بررسی stability معادلات Finit diff وجود دارد:

1) positive Rule *

2) Fouries - von Neuman Method

این روش معمولاً برای معادلاتی که separation و سری فوریه... را می‌توان انجام داد (...)

$$u_{i,j+1} = A u_{i+1,j} + B u_{ij} + C u_{i-1,j} \quad \ldots\ldots$$

قاعده positive Rule می‌گوید:

1) $A, B, C \geq 0$ باید مثبت باشند

2) $\begin{cases} A+B+C \leq 1 \\ \text{مساوی در نقطه نظر نیست که گاهی اوقات فرض شود معنی ندارد ...} \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$ $\quad (A, B, C \geq 0 \quad \lambda \neq 0)$

برای معادلات ساده می‌توان به کار برد ولی در معادلات پیچیده‌تر مشکل دارد.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda > 0 \\ 1-2\lambda > 0 \\ \lambda \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \lambda \leq \tfrac{1}{2}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

پس یک محدودیت با شرط کرانت شد:

روش explicit را پایدار مشروط می‌گویند conditionally stable

$$\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} < 1/2$$

پس نمی‌توانیم هر چه دلمان خواست انتخاب کنیم

[illegible] $\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ [illegible]

* Δt را چگونه انتخاب کنیم با Δx ؟

در این $E(\Delta t)$ و $E(\Delta x^2)$ ، Δt را چگونه انتخاب می‌کنیم چون نوع خطایش درجه اول است

Year. Month. Day. Subject.

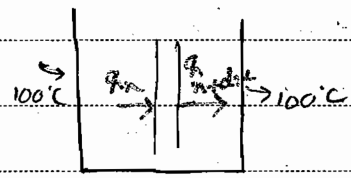
جلسه ۸۸/۹/۹

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$BC\begin{cases} T(0,t) = 100\,^\circ C \\ T(1,t) = 100\,^\circ C \end{cases} \qquad IC\{T(x,t) = 0\,^\circ C \qquad \begin{array}{l}\Delta t = 0.01 \\ \Delta x = 0.2\end{array}$$

دیواره ای با ضخامت ۱ داریم که ابتدا در دمای محیط بوده و یکباره بطور ناگهانی دمای دو طرف جسم تبدیل به 100 می شود

$$T\Big|_{t=0.06} = ?$$



$$V = A\,dx$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(kA\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx = \rho V c\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

مسئله را به روش Analytical و عددی حل کنید

حل) $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j}$

For   Cen

$j \to t$

$i \to x$

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + E|\Delta t| + |E(\Delta x^2)|$$

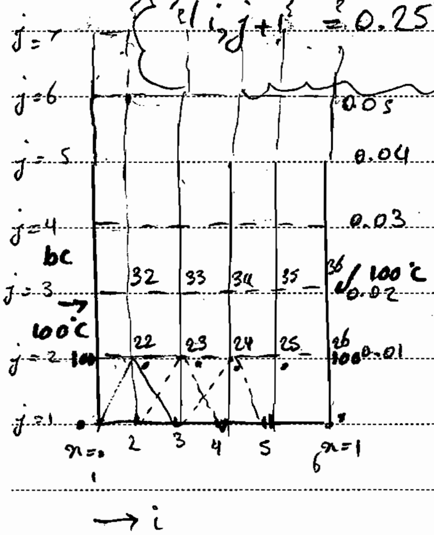
$\lambda = \Delta t / \Delta x^2$

$$T_{i,j+1} = \lambda T_{i+1,j} + (1-2\lambda)T_{i,j} + \lambda T_{i-1,j}$$

$$\lambda = \frac{0.01}{0.04} = 1/4 = 0.25 < 1/2 \quad : \text{stable}$$

Year. Month. Day. Subject.

$$T_{i,j+1} = 0.25\,T_{i+1,j} + 0.5\,T_{i,j} + 0.25\,T_{i-1,j}$$



مطابق شکل i تا ۶ time step را باید پیدا کنیم تا برسیم

چهار نقطه مجهول ۴

i و j ها را با شماره گذاری می‌کنیم

اگر شماره‌ها نقطه اول را از initial condition حساب می‌کند

با بقیه حالت حساب کنید.

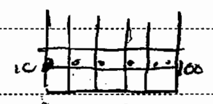
اگر از initial condition استفاده کنیم جواب مناسب‌تر خواهد بود به شرطی که Δt خیلی کوچک باشد

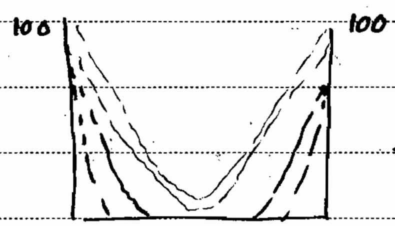
اگر از شرایطی که به صورت مسئله می‌گردد از تأثیر شرط مرزی بیشتر استفاده کرده‌ایم

اگر از initial condition استفاده کنیم و Δt خیلی کوچک نباشد اثر 100 را در لایه اول اعمال می‌کنیم

IC BC

پس یکی از شرایط انتخاب بین این دو حسن مسئله است اگر x کوچک باشد درست است پس شرایط حاکم بر مسئله مهم است.





توزیع دما درون میله در زمان‌های مختلف

ولی اگر BC استفاده کنیم اثر آن را در step اول می‌بینیم

New Classic

Year. Month. Day. Subject.

$$\begin{cases} T_{22} = 0 \\ T_{32} = 0 \\ T_{42} = 0 \\ T_{52} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T_{23} = 0 + 0 + 100 \times 0.25 = 25^\circ C \\ T_{33} = 0 \\ T_{43} = 0 \\ T_{53} = 0 + 0 + 100 \times 0.25 = 25^\circ C \end{cases}$$

در سوال یک مسئله مشابه این خواهیم داشت بار time line ها که مقایسه می‌کنیم

روش explicit ← IC ← همه time line (1) صفر

نقاط اسپیلی T.L 2 از BC اثر می‌پذیرند

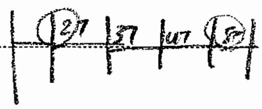
یکی از ایرادهای این روش: دیرک time line طول می‌کشد تا به 25 برسد مخصوصاً اگر Δt کوچک باشد

طول می‌کشد 0.0015 از صفر به 25 برسد.

همچنین مسئله‌ای که تقارن در دو سمت دیواره داریم اعداد هم تقارن دارند

$T_{2,7} = 56.05$ $\qquad$ $T_{4,7} = 29.19$

$T_{3,7} = 29.19$ $\qquad$ $T_{5,7} = \longrightarrow$ تقارن $= T_{27} = 56.05$



پس نتیجه گرفتیم که روش حل خوبی است

نتایج:

۱/ روش explicit یک روش شرطی است محدودیتی دارد

۲/ در TL های اول (خصوصاً با در نظر گرفتن IC) اثر BC ها را نمی‌بینیم

۳/ با این فرضیات انتخاب شده خطای زیادی دارد

Year. Month. Day. Subject.

Analytical:

$\theta = T - 100$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$BC \begin{cases} \theta(0,t) = 0 \\ \theta(1,t) = 0 \end{cases} \qquad IC: \ \theta(x,0) = 100^\circ C$$

$\phi(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}\, x$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{1}\right)^{1/2} \qquad \theta(x,t) = \sum_1^\infty A_n e^{-\lambda_n t} \sin\sqrt{\lambda_n}\, x$$

$$A_n = \frac{2}{1}\int_0^1 -100 \sin\sqrt{\lambda_n}\, x\, dx = \longrightarrow$$ جز

از کجا ده عددها رو بنویسم جواب؟

$$\theta(x,t) = A_1 e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + A_2 e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x + A_3 e^{-9\pi^2 t} \sin$$

$$A_n = \frac{-200}{-\sqrt{\lambda_n}} \cos(\sqrt{\lambda_n}\, x)\Big]_0^1 = \frac{200}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos 0\right) =$$

$$\frac{200\,[(-1)^n - 1]}{n\pi} \quad \begin{cases} \text{زوج } n & A_n = 0 \\ \text{فرد } n & = \dfrac{-400}{n\pi} \end{cases}$$

$A_2 = 0$

A_4

$\vdots$

$$\theta(x,t) = \frac{-400}{\pi} e^{-\pi^2 t} \sin \pi x - \frac{400}{3\pi} e^{-9\pi^2 t} \sin 3\pi x \ldots$$

$T = 100 + \theta$

New Classic

Year. Month. Day. Subject.

می‌نویسیم این سری‌ها را می‌نویسیم، $e^{-O\pi t}$ هرچه جلوتر می‌رویم این عدد بزرگ‌تر شده e کوچک‌تر می‌شود

و ضریب سطح بزرگ می‌شود. پس جملات هم با اینکه مقدار با توان exp کوچک می‌شوند سپس

جملاتی که در n های بزرگتر حاصل می‌شوند خیلی کوچک می‌شوند پس به راحتی می‌توان از آنها صرف‌نظر کرد.

در اینجا یکی از کارهای مهندسی جمع اول و در حالت جمع اول و دوم را برای دقت خیلی بالا در نظر می‌گیرند.

$x = 0.2 \qquad t = 0.06 \qquad \theta(0.2, 0.06) = \frac{-400}{3.14} e^{-(3.14)^2(0.06)} \sin \pi(0.2)$

$x = 0.4 \qquad t = 0.06 \qquad \theta(0.4, 0.06)$

$x = 0.6 \qquad t = 0.06 \qquad \theta(0.6, 0.06)$

$x = 0.8 \qquad t = 0.06 \qquad \theta(0.8, 0.06)$

$$\%\,error = \left| \frac{\overset{\text{Exp}}{T_{exp}} - \overset{\text{Analytical}}{T_{exact}}}{T_{exact}} \right| \times 100$$

که از پاسخ‌هایی که در تمام مقالات فوریه استفاده می‌شود درصد خطای نسبی است

Year. Month. Day. Subject.

روش Implicit :

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{j} = \alpha\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{i,j+1}$$

Forward

پرکاربردترین روش حل مسائل PDE.

کاربرد بقیه روش‌ها صرفاً برای مقایسه بین آن روش و Implicit و شبیه‌سازی است.

$\frac{d^2u}{dx^2}$ را در افق $j+1$ بنویسید و تعداد مجهولات را زیاد می‌کند.

$t \rightarrow j$ Forward

$x \rightarrow i$ central

$$\Rightarrow \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{\Delta x^2} + E(\Delta x) + E(\Delta x^2) \quad *$$

j : initial condition معلوم

در یک زمان

بقیه i ها : مجهولها

طبق * را برای تمام i ها بنویسیم بر حسب مجهولات معلوم ها

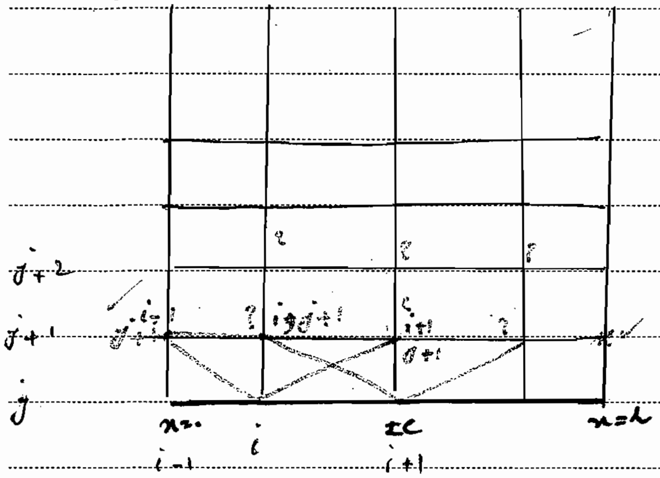
مجهولات زیاد است !!!

$$\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\lambda u_{i+1,j+1} - (1+2\lambda) u_{i,j+1} + \lambda u_{i-1,j+1} = -u_{i,j}$$

New Classic

$$\overset{?}{-\lambda u_{i+1,j+1}} + (1+2\lambda)\overset{?}{u_{i,j+1}} - \overset{?}{\lambda u_{i-1,j+1}} = u_{ij} \quad *$$



فقط مقادیر اولیه و مرزی ۳ تا مجهول داریم چون روی BC داریم.

ولی در سطر بعد نقاط بیشتری داریم که نوشتن معادله برای هر نقطه

در هر time line تعداد نقاط مجهول مقادیر را بدست می‌آوریم.

هر time line مجهول یک ماتریس سه قطری به ما می‌دهد

مزیت‌ها: ۱. نقاط وسط را که بیشتر داشته باشیم از نظر می‌برد چون هیچ نقطه‌ای سلک ... نیست.

۲. هم از INCO و هم از BC

تنها ایراد روش این است که تعداد مجهولات زیاد باشد

Year. Month. Day. Subject.

: Stability

positive Rule

$A=0 \quad B=1 \quad C=0$

۱) طبق روش Positive Rule $\quad A, B, C \geq 0 \quad A \neq 0$

۲) $A+B+C \leq 1 \rightarrow$

این روش خوب نیست چون بعد از هر بار ضرب فاصله‌ها را ضرب می‌کنیم و رق مکرر تقسیم !

کدام را انتخاب کنیم . باید طرفین را در λ ضرب کرد یا بر $1+2\lambda$ تقسیم کنیم

طبق روشی که آن را می‌توانیم

این sys شرطی پایدار نیست به ازای تمام مقادیر $2\lambda \leq 1$. پایدار است شرطی نیست

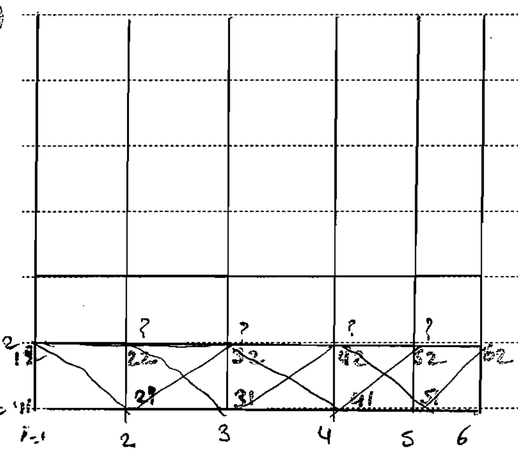
unconditionally stable

هر چقدر که انتخاب کنیم sys پایدار است و برای مقادیر $\Delta x < 1$ ، $\Delta t < 1$ و این هیچ ربطی به λ ندارد

در تمام روش‌های عددی $\Delta x < 1$ ، $\Delta t < 1$

مسئله‌های کارشناسی روش بالا و پایین ایجاد کرده است

همه‌ی اصلی هم یکی در است مثلاً الان ضریب $(1+2\lambda$



time line 1

$$
\begin{cases}
2,2: & -\lambda u_{1,2} + (1+2\lambda) u_{22} - \lambda u_{32} = u_{21} \\
3,2: & -\lambda u_{22} + (1+2\lambda) u_{32} - \lambda u_{42} = u_{31} \\
4,2: & -\lambda u_{32} + (1+2\lambda) u_{4,2} - \lambda u_{52} = u_{41} \\
5,2: & -\lambda u_{42} + (1+2\lambda) u_{5,2} - \lambda u_{62} = u_{51}
\end{cases}
$$

BC   BC

۱) با توجه به BC معلوم مقادیر را ... کرد

۲) مستقیماً به خود این نقاط مربوط باشند

در اینجا همین طور که در به سمت جلو داریم

شیب در مسئله‌ی کلی

روش central نقاط فرضی می‌نویسیم

$2 \dots 1$

$$
\begin{bmatrix}
1+2\lambda & -\lambda & 0 & 0 \\
-\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 \\
0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\
0 & 0 & -\lambda & 1+2\lambda
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{22} \\ u_{32} \\ u_{42} \\ u_{52}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
u_{21}+\lambda u_{1,2} \\ u_{31} \\ u_{41} \\ u_{51}+\lambda u_{62}
\end{bmatrix}
$$

در حل این مسئله‌ها به چنین ماتریسی تبدیل می‌شود که قطر اصلی ... قطرهای کناری $-\lambda$.

درامتحان بنویسید شکل ماتریسی معادله را بدست بیاورید
خودتان Δt و Δx بدهید

در هر timeline یک ماتریس سه‌قطری بدست آورده، با روش توماس مسئله را حل کنیم

Year. Month. Day. Subject.

New Classic

جلسه ۸۸/۹/۲۹

Ex:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

در روش Implicit جواب این مسئله را بدست بیاورید؟

$\Delta t = 0.01$ $\quad T(0.02) = ?$

$\Delta x = 0.2$ $\quad T(0.03) = ?$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j+1}$$

For $\quad$ Cent

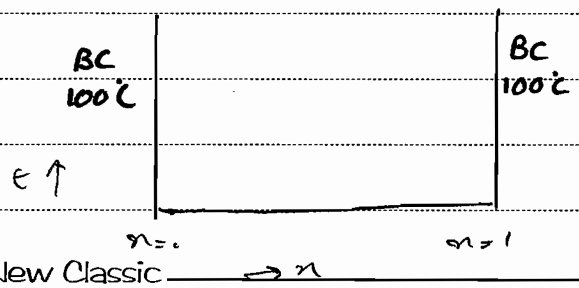
$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = \frac{T_{i+1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i-1,j+1}}{\Delta x^2}$$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{0.01}{0.04} = 1/4 = 0.25$$

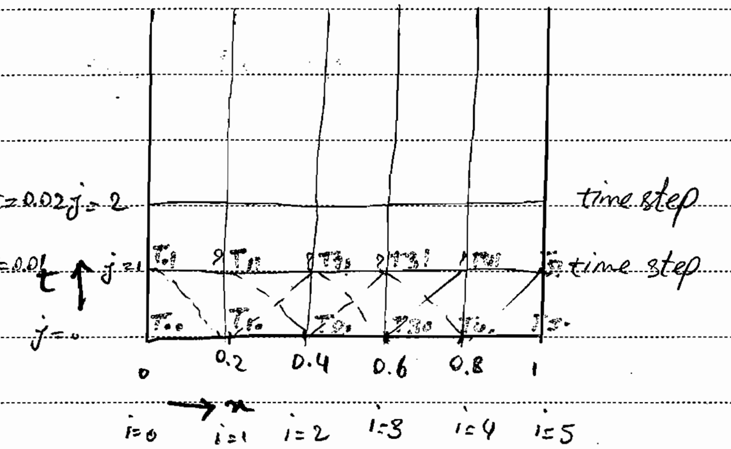
$$-\lambda T_{i+1,j+1} + (1+2\lambda) T_{i,j+1} - \lambda T_{i-1,j+1} = T_{i,j}$$

$$-0.25\, T_{i+1,j+1} + 1.5\, T_{i,j+1} - 0.25\, T_{i-1,j+1} = T_{i,j}$$

$$BC \begin{cases} T(0,t) = 100\,^\circ C \\ T(1,t) = 100\,^\circ C \end{cases}$$



Year. Month. Day. Subject.



در امتحان شکل را بکشید

تا ماتریس را بدست بیاورید

هر line یک ماتریس سه قطری بدهد

در هر time step، ۴ معادله داریم و ۴ مجهول.

$$\underbrace{-0.25\,T_{01}}_{BC:100} + 1.5\,T_{11} - 0.25\,T_{21} = \cancel{T_{10}}$$

$$-0.25\,T_{11} + 1.5\,T_{21} - 0.25\,T_{31} = \cancel{T_{20}}$$

$$-0.25\,T_{21} + 1.5\,T_{31} - 0.25\,T_{41} = \cancel{T_{30}}$$

$$-0.25\,T_{31} + 1.5\,T_{41} - \underbrace{0.25\,T_{51}}_{BC:100} = \cancel{T_{40}}$$

$$\begin{cases} 1.5\,T_{11} - 0.25\,T_{21} = 25 \\ 0.25\,T_{11} + 1.5\,T_{21} - 0.25\,T_{31} = 0 \\ -0.25\,T_{21} + 1.5\,T_{31} - 0.25\,T_{41} = 0 \\ -0.25\,T_{31} + 1.5\,T_{41} = 25 \end{cases}$$

New Classic

$$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 1.5 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

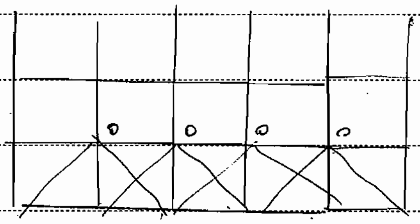
قطر میانی متفاوت با دو قطر کناری

در روش Implicit دو قطر کناری مجدداً یکسان است

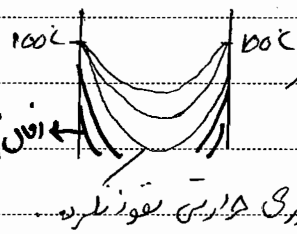
By Thomas:

$$\begin{cases} T_{11} = 17.24 \\ T_{21} = 8.451 \\ T_{31} = 8.451 \\ T_{41} = 17.24 \end{cases}$$

مقایسه با روش Implicit :

$t=$  $t=0$

حتی اگر به جای استفاده در IC در گوشه‌ها
استفاده کنیم بین مقادیر لحظه اول هم الگو باشد
حتی اگر $\Delta x = 0.001$ هم انتخاب بکنیم در timeline
$\Delta t = 0.001$
تا اول اصلاً اثری از $100°C$ را نمی‌بینیم



روش تحلیلی توزیع دما را به این صورت می‌دهد

پس برای زمان‌های اولیه می‌توانیم فرض کنیم هیچ اثری حرارتی نفوذ نکرده.

برعکس این روش، روش Implicit نوسانات را در تایم‌های اول نشان می‌دهد.

روش Implicit روش دقیقی است. بهترین روش برای حل معادلات PDE عددی

برای کارهای تحقیقاتی از این روش و روش‌هایی که base آن همین Implicit است استفاده می‌شود

Crank-Nicolson method:

این روش ادغام Implicit و explicit است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

این معادله را به کمک دو روش نوشته.

$$\text{Exp:} \quad \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}}_{\text{For}} = \alpha \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}}_{\text{Cent}}$$

$$\text{Imp:} \quad \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}}_{\text{For}} = \alpha \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j+1}}_{\text{Cent}}$$

$$2\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}}_{\text{For}} = \alpha \left[\underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}}_{\text{Cent}} + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j+1}}_{\text{Cent}}\right]$$

Year. Month. Day. Subject.

$$\underset{For}{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij}} = \alpha\left[\frac{1}{2}\underset{Cent}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}} + \frac{1}{2}\underset{Cent}{\left(\partial^2 u/\partial x^2\right)_{i,j+1}}\right]$$

هم دقت implicit را دارد و هم سرعت explicit :

بعداً جمله‌های جبران اضافه و کم کرده و به این صورت درآمده :

$$\underset{For}{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij}} = \alpha\left\{\theta\underset{cent}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij}} + (1-\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j+1}\right\}$$

$$\text{if}\begin{cases}\theta = 1 & \text{explicit method}\\ \theta = 0 & \text{Implicit } \text{"}\\ \theta = 1/2 & \text{Crank\_Nicolson } \text{"}\end{cases}$$

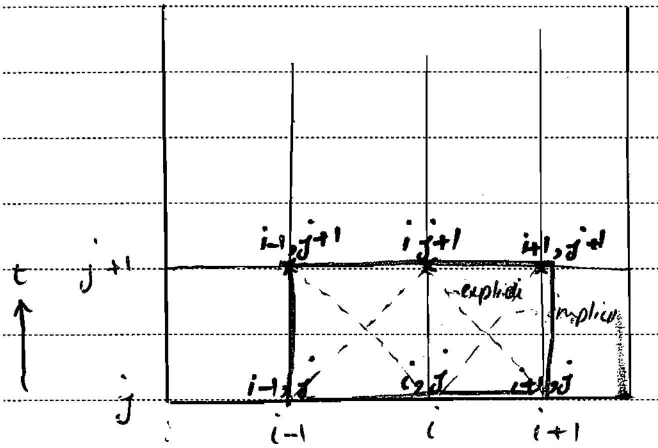
$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2}\left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{\Delta x^2}\right]$$

$$\lambda = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{2\lambda}{2}\right)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}u_{i+1,j+1} - \frac{\lambda}{2}u_{i-1,j+1}}_{\text{مشابه ضریب روش implicit}} = \frac{\lambda}{2}u_{i+1,j} + \underbrace{(1-\lambda)u_{ij} + \lambda/_2\, u_{i-1,j}}_{\text{مشابه ضریب روش explicit}}$$

جواب این مسئله یک ماتریس سه قطری است که به جای اینکه ـــ ؟

Year. Month. Day. Subject.



محاسبات در روش crank nicolson بر اساس یک مستطیل است که یک ضلع آن معلوم و یک ضلع مجهول است.

x

۱) در این روش به جای یک نقطه مجهول از سه نقطه معلوم در مقایسه با implicit استفاده می‌کند پس خطای کمتری دارد.

۲) در این روش از نقاط گوشه هم استفاده می‌شود در صورتی که در روش implicit نمی‌شد

۳) نقطه ضعف آن تعداد نقاط زیاد است. ولی خطای آن خیلی کم است. مشکل آن وقت‌گیر بودن آن است اگر λ Implicit را خیلی مناسب انتخاب کنیم دقت آن به این روش نزدیک‌تر

خلاصه

Explicit: دقت محاسبات پایین، زمان کم، ماتریس نمی‌خواهد.

Implicit: دقت محاسبات بالا، زمان محاسبات طولانی (در هر timeline یک ماتریس ۳ قطری می‌دهد)، خطا پایین، سرعت محاسبات

crank_N: از تمام نقاط اطراف یک نقطه مجهول استفاده می‌کند، از بیشترین تعداد نقاط معلوم استفاده می‌کند از گوشه‌ها استفاده می‌کند ولی زمان محاسبات خیلی بالا است

هرچه هم که حلقه‌ها باشد استفاده از روش crank به نسبت روش‌ها ترجیح داده می‌شود (از گوشه‌ها استفاده) ولی مشکل روش Implicit را استفاده نمی‌شد

پایداری روش Crank_Nicolson :

اینجا هم روش positive Rule خیلی مناسب نیست ولی صدق می‌کند.

شرط اول) $\lambda \geq 0 \quad 1-\lambda \geq 0 \quad \lambda/2 \geq 0$

$A+B+C \leq 1 \quad \lambda/2 + 1 - \lambda + \lambda/2 \leq 1 \quad \lambda \geq 0$

شرط دوم) $\lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda$ محدوده $0 \leq \lambda \leq 1$

↳ Conditionally stable

بصورت شرطی stable است پس مشابه روش explicit شد

این روش مناسب نیست چون اگر بر عکس عمل کنیم همه ضرایب منفی می‌شود و stable نبود

$(\frac{\lambda}{2}) u_{i+1,j} \ldots = -(1+\frac{2\lambda}{2}) \ldots$

روش دیگر که می‌خوانیم و مناسب‌تر است Fourier_Von Naeman

برای بررسی پایداری است که ابداع فوریه است.

Year. Month. Day. Subject.

مثال:

مثال: همان مسئله را به روش Crank_Nicolson حل کنید

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \Delta t = 0.01 \qquad \Delta t = 0.2$$

$$BC\begin{cases} T(0,t) = 100 \\ T(1,t) = 100 \end{cases} \qquad IC\{T(x,0) =$$

$$T|_{t=0.02} = ? \begin{cases} Exp \\ Imp \\ Crank\ Ni \end{cases}$$

خطا:

وقتی خطا را می‌خواهیم حساب کنیم یک روش را باید بدانیم اگر حل Analytical داریم
آن را قرار میدهیم اگر نه یکی از روشها کافی است

% ARD or % ARE

Absolute Relative deviation

" " Error

$$\%ARD = \left| \frac{T_{imp} - T_{exp}}{T_{imp}} \right| \times 100$$

اگر بخواهیم مثلا روش implicit و explicit را باهم مقایسه کنیم:

$$\%ARD = \left| \frac{T_{imp} - T_{exp}}{T_{imp}} \right| \times 100$$

اگر خطا را بخواهیم هر یک از نقاط را حساب کنیم
اگر میانگین بگیریم

$$\%\ AARD = \frac{1}{N} \Sigma \left| \frac{T_{imp} - T_{exp}}{T_{imp}} \right| \times 100\%$$

چون مش ۳ جمین مش است نسبتاً با 1000 تا نقطه؛ با روش نومانس مسئله قبلی را برنامه نویسی شده
و مقادیر خطاهم نیاز داریم! مثلاً جواب Analytical هم حل می‌شود.

در HW صفحه قبل: جواب Analytical را حساب کنید تا اول Σ کافی است.

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha \lambda_n t} \sin\sqrt{\lambda_n}\, x \qquad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L (-100)\sin\sqrt{\lambda_n}\, x\, dx \qquad \begin{matrix} n=1 \\ n=2 \\ L=1 \end{matrix}$$

جواب را به ازای $x=0.2$, $t=0$ ... $x=0.4$, $t=0.01$ ... بدست می‌آورید و خطا را هم با روش‌های
عددی بدست می‌آورید، برای هر مرحله ۸ تا نقطه است و خطای متوسط را بدست می‌آورید و می‌نویسیم کدام
روش دقیق‌تر است

روش Crank_N از نظر پایداری به (Exp) محدوده λ را ۲ برابر روش ~~Implicit~~ explicit است

برای برنامه‌نویسی باید عددی حساب کنیم.

Year. Month. Day. Subject.

New Classic

جلسه ۸۸/۹/۳۰

Richardson Method:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}$$

central   central

برای اینکه در جهت t هم خطا هم درجه آن x هم بصورت central نوشته

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + E|\Delta t^2| + E|\Delta x^2|$$

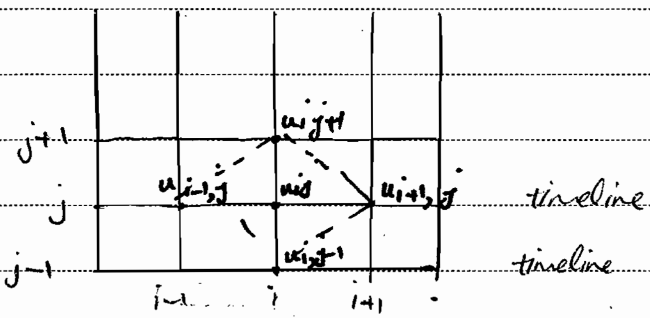
خطا در جهت t، جهت x

همسایه

j+1 را بعنوان مجهول در نظر می‌گیریم و بقیه بعنوان معلومها

$$\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$u_{i,j+1} = 2\lambda u_{i+1,j} - 4\lambda u_{i,j} + 2\lambda u_{i-1,j} + u_{i,j-1}$$



پس برای timeline باید معلوم باشند تا نقطه مجهول را حساب کنیم. j−1 ، IC است معلوم است

خط بعدی u است که مجهول است و مقدار آن را نداریم پس

1) $u_j \rightarrow$ By expilic , inpilicit

u_j را فقط یک مرحله از روشهای دیگر استفاده میشود. مثل روش Millen's در مسائل ODE

پس ۱ مشکل دارد : اول یک step را با یکی از روشهای دیگر بدست می آورد

همچنین با استفاده از قاعده positive rule این روش یک روش unstable

روش دوم حل مسائل Richardson :

در $j+1$ مجهول و j معلوم است

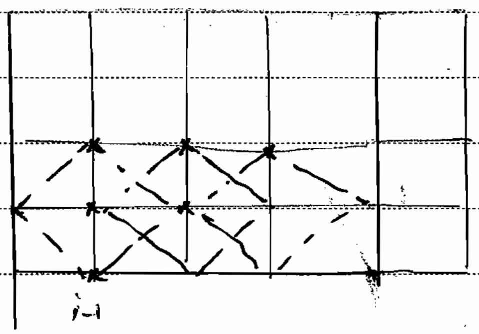
$$u_{i,j+1} + \lambda u_{i+1,j} + 4\lambda u_{ij} - 2\lambda u_{i-1,j} = u_{i,j-1}$$

با این روش حل با استفاده از قاعده positive Rule ، stable میشود.

و گفته بودیم نتایج قاعده positive Rule مطلق نیست حتماً باید با روش Neuman کنترل شود

مثل زمانی است که اگر دو طرف معادله را در منفی ضرب کنیم سیستم unstable میشود.

FC



$i-1$

همچنین زمانی در رابطه $+$ تا یک بار و λ با مجهول

شکلهای جواب میدهد که در زمانهای قبل مقدار نتایج معلوم باشد

Year. Month. Day. Subject.

فرق Richardson با Implicit

اگر ۱۰۰ نقطه مجهول داریم باید همه ۱۰۰ تا را با هم بنویسیم ۱۰۰ معادله ۱۰۰ مجهول
و مقدار $u|_{t=\infty}$ معلوم باید باشد

پس در پیش روش Richardson روش ضمنی بهتر است چون دستگاه معادلات داریم که حل مشکلات پیچیده خواهیم داشت.

در مسائل مهندسی معمولاً استفاده کاربردی خواهیم پس این روش بکار برده نمی‌شود.

Defune Method:

از روش Richardson ما تغییر داده:
چون $u_{i,j}$ در معادله Richardson باعث ناپایداری می‌شود؛
از u_{ij} میانگین جایگزین کرده:

$$u_{ij} = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{2}$$

البته این روش با فرض Δt حل پایدار بدست می‌آید چون در معادله‌ای که داریم ۳ یا ۴ مجهول نقطه مجهول
مشترک کم را می‌توان با یک خط هم حل کرد.

$\Delta t \ll$ small $\longrightarrow$ خطا کم خواهد شد $\xrightarrow{\text{اما}}$ مدت زمان محاسبات افزایش می‌یابد

$$u_{i,j+1} = 2\lambda u_{i+1,j} - 4\lambda\left(\frac{u_{ij+1} + u_{ij-1}}{2}\right) + 2\lambda u_{i-1,j} + u_{ij-1}$$

$$(1+2\lambda)\, u_{ij+1} = 2\lambda u_{i+1,j} + 2\lambda u_{i-1,j} + (1-2\lambda)\, u_{i,j-1}$$

u.

Year. Month. Day. Subject.

$$u_{i,j+1} = \frac{2\lambda}{1+2\lambda} u_{i+1,j} + \frac{2\lambda}{1+2\lambda} u_{i-1,j} + \frac{1-2\lambda}{1+2\lambda} u_{i,j-1}$$

$1-2\lambda \geq 0$ $\lambda \leq 1/2$ $0 < \lambda \leq 1/2$ Conditionally stable

7) u_{ij} By Imp or exp

این روش نقطه به نقطه حل می‌شود.

روش Defurt [illegible] بدست می‌آید.

روش Implicit [illegible]

[illegible] BDA
CDA
CDCA

(HW ~~HW~~ حل مسئله قبل را با روش defurt حل کنید و با روش Imp، exp مقایسه کنید.

معادلات غیرخطی :

برای یک مثال در بحث Heat Transfer داریم :

اجسام را به دو نوع تقسیم می‌کنند :

- Homogenous
- Hetrogenous - non-Homogenous

اجسام همگن : در بحث heat T اجسامی هستند که K آنها در همه جهات یکسان است

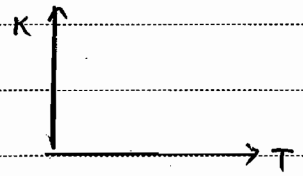
اجسام ناهمگن : " " " " در جهات مختلف متفاوت است

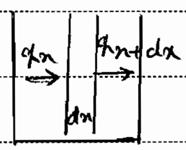
مثل چوب که اگر در جهت الیاف یا عمود بر آن برش دهیم K متفاوتی خواهد داشت.

$K = f($ فشار , دما , ساختار مولکولی $)$

به طور کلی K تابع این پارامترها است. فشار برای اجسام جامد تغییری در K ایجاد نمی‌کند چون فشرده نمی‌شوند
به طور ساده تابعیت K را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$K = K_0 + K_0 \beta t = K_0(1+\beta t) = K(T)$$





$$q_x - q_{x+dx} = \frac{dE}{dt} \quad (E \to mCT)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K A_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx = \rho \Delta V C \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}}$$

Non linear Eq (Z.)

در چنین مباحثی اگر K تابع دما باشد و قرار دهیم در معادله صفحه قبل در نهایت به یک معادله غیرخطی می‌رسیم

$$K = K_0(1+\beta T)$$

$$K_0 \frac{\partial}{\partial x}\left((1+\beta T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\boxed{K_0\left[\beta \frac{\partial T}{\partial x} + (1+\beta T)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}} \quad \text{II}$$

غیرخطی هستند، مشتق با تابع در

Non linear term

معادله I مناسب‌تر از معادله II می‌باشد.

$i-2$ — $i-1$ — Δx — i — Δx — $i+1$ — $i+2$

$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,j} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right)_{i,j} \quad \text{Exp}$$

For cent

$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,j} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right)_{i,j+1} \quad \text{Imp}$$

For cent

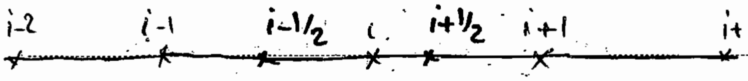
$K\frac{\partial T}{\partial x}$ را ابتدا به عنوان یک ترم ثابت w در نظر می‌گیریم

$$\rho c \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{i,j}$$

cent

در این روش به سادگی جلو برویم و با ... از نقطه فاصله می‌گیریم و جبهه را از خود نقطه دورتر شویم خطا بیشتر می‌شود تمام سعی تا ... باشد به اندازه یک گام جلو برویم.

Year. Month. Day. Subject.



سپس نقاط فرضی را در نظر می‌گیریم.

$$\rho c \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = \frac{w_{i+1/2,j} - w_{i-1/2,j}}{2\times\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$\frac{(k\,\partial T/\partial x)_{i+1/2,j} - (k\,\partial T/\partial t)_{i-1/2,j}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(K_{i+1,j}\frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{\Delta x} - K_{i-1/2,j}\frac{T_{i,j}-T_{i-1,j}}{\Delta x}\right)$$

وقتی که cent می‌زنیم دو گام یا cent (وسط‌ها) بزنیم

$$K = K(T) \Rightarrow K_{i+1/2,j} = K(T_{i+1/2,j})$$

برای محاسبه K دو راه داریم:

$$K_{i+1/2,j} = \frac{K_{i+1/2,j} + K_{i,j}}{2}$$

$$K_{i-1/2,j} = \frac{K_{i,j} + K_{i-1,j}}{2}$$

Δx باید کوچک باشد تا این فرض درست باشد

$$K_{i+1,j} = K(T_{i+1,j}) = K_0(1+\beta T_{i+1,j})$$
$$K_{i,j} = K(T_{i,j}) = K_0(1+\beta T_{i,j})$$

در این روش نیازی به حدس زدن [illegible] نداریم

حالت دوم: نقاط میانی را تعریف می‌کنیم.

$$\rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,j} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\overbrace{K\frac{\partial T}{\partial x}}^{w}\right)\right]_{i,j}$$

$i-2 \qquad i-1 \qquad i \qquad i+1 \qquad i+2$

$$\rho C \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{i,j} = \underset{cent}{} \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2\Delta x} =$$

$$\frac{1}{2\Delta x}\left[\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+1,j} - \left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-1,j}\right] = \frac{1}{2\Delta x}\left(K_{i+1,j}\frac{T_{i+2,j} - T_{i,j}}{2\Delta x} - K_{i-1,j}\frac{T_{i,j} - T_{i-2,j}}{2\Delta x}\right)$$

نکته: برای K مقدار متوسط می‌خواهیم

عیب: در نقطه i دو گام از هر طرف فاصله گرفتیم برای اینکه در نقطه i تابع w مشتق بگیریم تا نقطه ۴ با نقطه را باید مشتق بگیریم و در عین حال $h = 2\Delta x$ پس خطا بیشتر است

$i-2 \xrightarrow{h=2\Delta x} i \xrightarrow{h=2\Delta x} i+2$

$\Delta x \uparrow \rightarrow \text{Error} \uparrow$

خطای بزرگتر شدن Δx بیشتر از خطای K متوسط است پس بهتره از روش قبلی استفاده کنیم

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

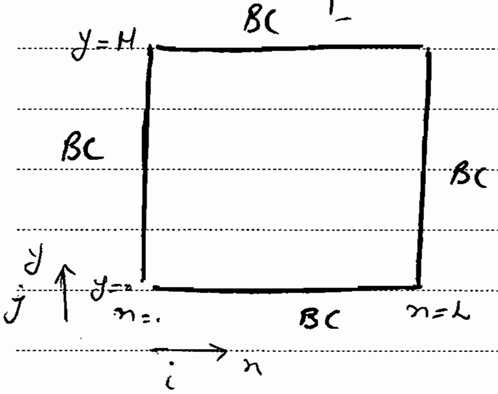
جلسه ۸۸/۱۰/۱۳

Laplace Equation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

این معادله را با روش seperation هم می‌توان حل کرد. ولی ما بررسی می‌کنیم

در جهت x دو شرط مرزی داریم در جهت y هم دو شرط مرزی داریم



جهت x و y محدود هستند.

در صورتی که در t داشتیم انتهای t معلوم نبود ابتدای t و دو طرف x معلوم بودند.

$$u(x,y)_{i,j} \rightarrow u(x_i, y_j) \rightarrow u(i\Delta x, j\Delta y) \rightarrow u(i,j) \rightarrow u_{ij}$$

معادله نسبت به x و y درجه ۲ است و ⇐ فقط روش Finite difference داریم روش explicit, Implicit

قابل قبول نیست

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = 0$$

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

فرض $\Delta x = \Delta y$

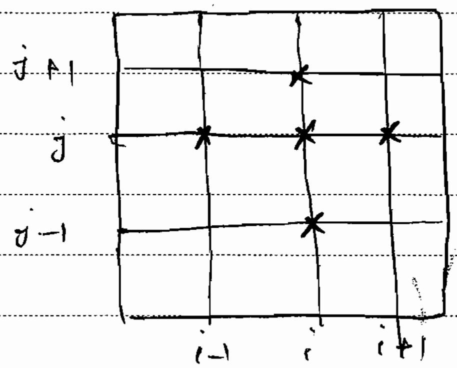
چون درجه x و y یکسان است، در ۹۰٪ مواقع Δx و Δy مساوی است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

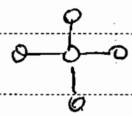
$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = 0 \qquad Eq\ I$$

معادله دارای 5 تا مجهول است.



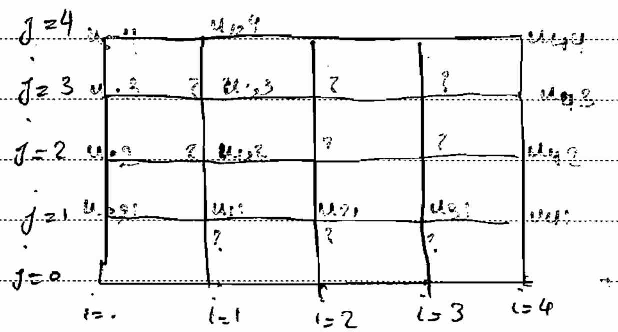
این ۵ نقطه با هم در ارتباط هستند

فرمول مولکولی با



برای هر نقطه از ۵ تا مجهول داریم. پس اگر برای یک خط line معادله بنویسیم مثلاً از معادلات بالا حل نمی‌شود چون تعداد مجهولات بیشتر

اگر بخواهیم از معادله بالا استفاده بکنیم باید برای تمام نقاط مجهول معادلات را بنویسیم و تنها یک ماتریس بدست می‌آید. مثل روش richardson



باید ۹ معادله برای هر ۹ نقطه بنویسیم و ۹ تا مجهول خواهیم داشت

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} \cancel{u_{01}} + u_{21} + u_{12} + \cancel{u_{10}} - 4u_{1} = 0 \\ u_{11} + u_{31} + u_{20} + u_{22} - 4u_{21} = 0 \\ u_{21} + u_{41} + u_{30} + u_{32} - 4u_{31} = 0 \\ u_{02} + u_{22} + u_{23} + u_{11} - 4u_{12} = 0 \\ u_{12} + u_{32} + u_{21} + u_{23} - 4u_{22} = 0 \end{cases}$$

بقیه معادلات را بنویسید

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{01} - u_{10} \\ -u_{20} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

شکل ماتریس ها را بدست بیاورید.

5 قطر که می‌شود بین همه قطرها صفر است.

(استقرا، ماتریس لاپلاس را بدست بیاورید دیگر به تعداد 4 مجهول)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای حل ماتریس ۵ قطری روش توماس مورد استفاده نیست مگر اینکه ۳ قطری شود. (حل ماتریس ۵ قطری راه حل مستقیمی به نام گوس دارد)

به کمک روش گوس جابجایی ماتریس ۵ قطری را به ۳ قطری تبدیل کنید. بین قطرهای وسط و قطر کناری فاصله‌ای می‌افتد.

در حالت‌های چند بعدی مجموعه ماتریس‌های ما باید ۵ قطری باشد ولی در اکثر کارهای مهندسی این ماتریس‌ها را تبدیل به ماتریس سه قطری می‌کنند چون مقدار نقاط آنقدر زیاد است زمان محاسبات با روش غیر توماس طولانی‌تر می‌شود.

HW) شکل ماتریس لاپلاس.

* مشکل این روش این است که برای هر مجهولات یک ماتریس داریم. روش غیر از روش ماتریسی وجود دارد.

Relaxation Method:

(trial & error) این روش بر اساس حدس و خطاست.

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right) + u_{ij} - u_{ij}$$

Eq II
$$\underset{\text{new}}{u_{ij}^{k+1}} = \underset{\text{old}}{u_{ij}^{k}} + \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k} - 4u_{ij}^{k}\right)$$

Eq I

u_{ij} را حدس بزنیم. اگر حدس ما درست باشد پرانتز باید صفر باشد.

ولی مشکلاتی دارد چون اعدادی که در این رابطه صدق می‌کنند در اصل جواب نیست مثلاً عدد ۱

حل Relaxation Method :

1) Assume some value for u_{ij}^{k} . پیشنهاد می‌شود روی مرزها برای u_{ij} ها کمترین باشد

2) Comput u_{ij}^{k+1} By Eq II

convergency condition

3) $|u_{i,j}^{k+1} - u_{ij}^{k}| \leq Tol \xrightarrow{Yes} OK$

شرط

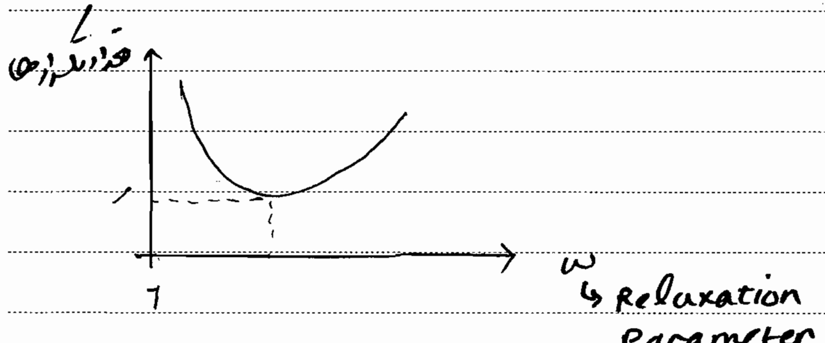
$\xrightarrow{NO}$ 4) if NO $u_{ij}^{k} = u_{i,j}^{k+1}$ مرزها کاهش یابد

5) Repeat Step 2 still converge solution

ولی از این روش استفاده نمی‌کنند.

۱) مکان‌های بالا بین کلی است پس اگر یک بار برنامه بنویسیم برای ماتریس‌ها بار دوم دیگر نیازی ندارد چون فقط BC ها تغییر می‌کنند.

۲) روش ماتریس‌ها و این روش را مقایسه کردند دیدند اگر مرزها ... برای حل یک معادله ODE مثلاً 1000 بار تکرار کرد.



در ω ی خاصی تعداد تکرارها کمینه است و این ω را برای مسائل مختلف حساب کردند

$\omega = 1.5$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\boxed{u_{i,j}^{K+1} = u_{i,j}^{K} + \frac{w}{4}\left(u_{i+1,j}^{K} + u_{i-1,j}^{K} + u_{i,j+1}^{K} + u_{i,j-1}^{K} - 4u_{i,j}^{K}\right)}$$

در اینجا در w ضرب می‌کنیم که در اینجا زودتر همگرا می‌شود و نام این ضریب را ضریب Relaxation گذاشته‌اند.

w را با تغییر داده‌اند (1, 2, 0.5, 1.5, ...) مشاهده شده در $w = 1.5$ تعداد تکرارها کم می‌شود

$1 < w < 2$ بین دو مقدار [illegible]

چرا به روش Relaxation می‌گویند؟

ما آنجا روی ضریب برده‌ایم که در سیستم به پایداری رسید

if $w < 1$: under relaxation

این حالت معمولاً برای سیستم‌های غیرخطی پیش می‌آید.

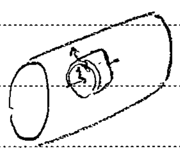
if $w > 1$: over relaxation

w = relaxation parameter

acceleration parameter پارامتر شتاب

چون که باعث افزایش شتاب و بعد از آن کاهش شتاب می‌شود.

مثال استوانه :



$$q_r - q_{r+dr} + q_z - q_{z+dz} =$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(KA_r\frac{\partial T}{\partial r}\right)dr + \frac{-\partial}{\partial z}\left(KA_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz = 0$$

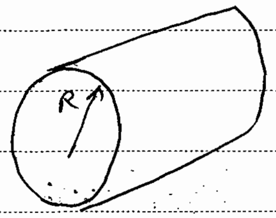
$A_z = 2\pi r\,dr$ $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

$A_r = 2\pi r\,dz$

PAPCO

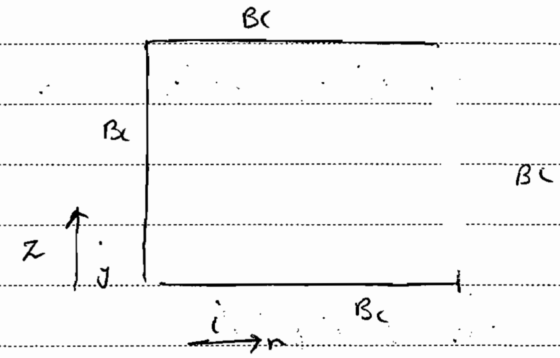
معادله لاپلاس در مختصات استوانه ای :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$



این معادله وقتی پیش می آید که شرایط اطراف جسم یکسان باشد.

$u(r,z) \to u_{ij}$



ترم اول را اگر بخواهیم بسط بدهیم باید ببریم یک مشتق درجه اول و یک مشتق درجه دوم خواهیم داشت پس ما همیشه روش central را به کار میبریم

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\overbrace{r\frac{\partial u}{\partial r}}^{w}\right)\right]_{ij}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{ij}=0$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{ij}$$

$$\frac{1}{r_i}\,\frac{w_{i+1,j}-w_{i-1,j}}{2\Delta r}+\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{\Delta z^2}=0$$

$$\frac{1}{2\Delta r\,\underbrace{r_i}_{i\Delta r}}\left[\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i+1,j}-\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i-1,j}\right]+\;''\;=0$$

$$\frac{1}{2\Delta r^2 i}\left[r_{i+1}\left(\frac{u_{i+2}-u_i}{2\Delta r}\right)_j-r_{i-1}\left(\frac{u_i-u_{i-2}}{2\Delta r}\right)_j\right]+\;''\;=0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{1}{2\times ri\, \Delta r^2}\left[(i+1)(u_{i+2,j}-u_{i,j})-(i-1)(u_{i,j}-u_{i-2,j})\right]+\cdots=0$$

نقاط میانی هم میتوان در نظر گرفت:

$i-2$ — $i-1$ — $i-1/2$ — i — $i+1/2$ — $i+1$ — $i+1$

معادلات دو بعدی unsteady state:

Multi Dimentional P.D.E:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y}\right)$$

متغیر به صورت هم مشتق مکان داریم هم زمان.

روش حل $\begin{cases}\text{Explicit}\\ \text{emplicit}\\ \vdots\end{cases}$

این معادلات ۲ نوع روش حل دارد.

Explicit Method:

در این روش:

$$\underset{\text{For}}{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j,n}}=\alpha\underset{\text{Cent}}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j,n}}$$

مشتق $\begin{cases}\text{برای مکان Central}\\ \text{برای زمان Forward}\end{cases}$

$u(x, y, t)$
$\;\;\;\;\;\;i\;\;\; j\;\;\; n$

$$\frac{u_{i,j,n+1}-u_{i,j,n}}{\Delta t}=\alpha\left(\frac{u_{i+1,j,n}-2u_{i,j,n}+u_{i-1,j,n}}{\Delta x^2}+\frac{u_{i,j+1,n}-2u_{i,j,n}+u_{i,j-1,n}}{\Delta y^2}\right)+E|\Delta t|+E|\Delta x^2|+E|\Delta y^2|$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

جلسه ۸۸/۱۰/۲۰

Divided difference Table Method:

در این روش هم تفاضل و هم تقسیم کردن را استفاده می‌کنند ← در این روش فاصله بین x ها می‌تواند یکسان نباشد

اما در Difference table باید فاصله بین x ها یکسان باشد

در آزمون‌ها یک سری کارها باید بدست بیاوریم:

x_i	f_i	$f[x_i\ x_{i+1}]$	$f($
x_0	f_0 (a_0)	$F_0[x_0, x_1]$ (a_1)	$F_0(x_0, x_1, x_2)$ (a_2)
x_1	f_1	$F_1(x_1, x_2)$	$F_1(x_1, x_2, x_3)$
x_2	f_2	$F_2[x_2, \ldots x_3)$	
x_3	f_3		
$\vdots$	$\vdots$		$F_{(n-2)}[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$
x_{n-1}	f_{n-1}	$F_{(n-1)}[x_{n-1}, x_n$	
x_n	f_n		

$$F_0(x_0, x_1) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \qquad f_0(x_0, x_1, x_2) = \frac{F_1(x_1, x_2) - f_0(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$F(x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \qquad F_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{F_2(x_2, x_3) - f_1(x_2, x_1)}{x_3 - x_1}$$

$$F_{n-1}[x_{n-1}, x_n] = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در این روش جدول Max درجه‌ای که می‌توانیم برای چندجمله‌ای انتخاب کنیم چی است.

به کمک جملاتی که با یک جدول ایجاد می‌شود ضرایب را تعیین می‌کنیم

مثال: تابع درون‌یابی را بنویسید

x_i	f_i			
0	1 (a_0)			
		2 (a_1)		
2	5		0 (a_2)	
		2		$\frac{1/6-0}{6-0}=1/36$ (a_3)
3	7		$\frac{8/3-2}{4}=1/6$	
		$8/3$		
6	15			

داده‌های گسسته

در این جا چهار داده داریم پس چندجمله‌ای می‌تواند با درجه
Max درجه ۴ بعد از ستون ۵ دیگر ادامه پیدا نمی‌کند

$$P_n(x) = 1 + a_1(x-0) + a_2(x-0)(x-2) + \tfrac{1}{36}(x-0)(x-2)(x-3)$$

$n=3$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Difference table Method:

دربارهٔ فاصله‌ها یک کار را درست می‌آوریم.

در استفاده از این روش‌ها دقت کنید: فاصله xها ثابت باشند. با روش‌هایی که قبلاً حل می‌کردیم این روش می‌توان حل کرد. چون Δx ها مساوی نیستند.

فاصله xها ثابت است چون ما در این روش همان divided difference است. فقط چون Δxها یکسان است از Δx فاکتور گرفته شده

$\Delta x =$ ثابت } حل با Divided Difference، difference هیچ فرقی ندارد یکی است.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	
x_0	f_0			
		Δf_0		
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$
x_3	f_3			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
				$\Delta^3 f_{n-3}$
			$\Delta^2 f_{n-2}$	
x_{n-1}	f_{n-1}			
		Δf_{n-1}		
x_n	f_n			

ستون اول $\Delta f_0 = f_1 - f_0$ $\qquad \Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 \qquad \Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$

$\Delta f = f_2 - f_1 \qquad \Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1 \qquad \Delta^3 f_1 = \Delta^2 f_2 - \Delta^2 f_1$

$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

این دو روش مشتق بر مبنای بسط تیلور است که مقادیر تقریبی آنها را استفاده می‌کنند

$\Delta f / \Delta x$:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}\Delta x + \frac{d^2 f}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{2!}$$

نام این روش (Newton-gregory method)

فرق این روش با روش قبل:

۳ فرمول برای آن تعریف شده

روش اول ۱) با تفریق

$$P_n(x) = f_0 + u\Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$u = \frac{x - x_0}{h} \qquad h = \Delta x$$

اگر نقاط ابتدای جدول استفاده شود:

نام روش: N forward new-greg method

تعریف دوم بر اساس نقاط پایین جدول

روش دوم)

Backward N.G method

$$P_n(x) = f_n + w\Delta f_{n-1} + \frac{w(w+1)}{2!}\Delta^2 f_{n-2} + \frac{w(w+1)(w+2)}{3!}\Delta^3 f_{n-3} + \dots$$

$$w = \frac{x - x_n}{h}$$

بر اساس نقاط میانی هم روشهایی وجود دارد.

مثال :

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
0	3 f_0				
		4 Δf_0			
1	7		1		
		5		−4	
2	12		−3		11 → Farward
		2		7	
3	14		4		
		7			
4	20				

← backward

$$u = \frac{x-0}{1} = x$$

$$P_n(x) = \overbrace{3 + 4x + 1\times\frac{x(x-1)}{2} + (-4)\,\frac{x(x-1)(x-2)}{6}}^{P_3(x)} +$$

$$\Downarrow \qquad 11\,\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4\times3\times2\times1} + \underbrace{0 + 0}_{\text{Truncation Error}}$$

$\boxed{n=4}$

درجه Max : توان ۴ :

طبق این روش اگر تا آخر بنویسیم خطای ما صفر خواهد بود.

اما در صورت سؤال $P_3(x)$ را خواسته

$$\text{Error}: \quad 11\,\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} = e(x)$$

$$\begin{cases} P_2(x) = 3 + 4x + \dfrac{x(x-1)}{2} \\ e(x) = -4\,x(x-1)(x-2) + \dfrac{11}{24}\,x(x-1)(x-2)(x-3) \end{cases}$$

جمله اول بیشترین تأثیر را روی خطا دارد.

در این جا هم دو جایی که بیشتر کرد از بین می‌رود هم بیشترین تأثیر را در خطا دارد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

همین مسئله را بر این divided هم حل کنید جواب باید یکسان بیاورید؟
difference

جواب باید عین هم باشند کوچکترین تغییر به اشتباه ماست.

گاهی اوقات دیتا خیلی زیاد می‌شود مثلاً 50 تا داده داریم و بعد ... چون اعداد بزرگ به تابعی از آن
... هستند با تشکیل این جدول Max را باید ... خواهیم کرد.

همین کار را Excell انجام می‌دهد و بحث خطاها را بررسی می‌کنند
یکی از کارهایی که در مقالات انجام می‌دهند، محاسبه خطای ARD ... سوال می‌آید
و خطای local

برای خطای local از این روشها استفاده می‌توانیم محاسبه کنیم خطای local هم ... را
به کار ببریم

AARD / Average Absolute ...

AARE /
کل خطاها را به صورت قدر مطلق جمع می‌کنیم تقسیم بر تعداد

local /

Global error
propagen
نوع دیگر خطا هم داریم: کل خطاها را با هم جمع می‌کنند
این خطا به چند چیز بستگی دارد.

ولی Relative نسبت را نشان می‌دهد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Lagrange polynomial Approximation Method

روش تقریب چندجمله‌ای لاگرانژ :

این روش، روش وقت گیر است

بهترین روش، روش least square است چون مثلاً base را خطی دارد و ترکیب نکرده

x_i	f_i
x_0	
x_1	
$\vdots$	

اینجا P_n را با صورت چندجمله‌ای تعریف کرده

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f_i = L_0 f_0 + L_1 f_1 + L_2 f_2 + \dots + L_n f_n$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$L_0 = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_0 - x_j} \right) = \overbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) \dots \left(\frac{x - x_n}{x_0 - x_n} \right)}^{n \text{ جمله}}$$

$$L_1 = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_1 - x_j} \right) = \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) \dots \left(\frac{x - x_n}{x_1 - x_n} \right)}_{n \text{ جمله}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در این روش باید برای هر یک حالت ها را در هم ضرب کنیم.

روی این مسئله فکر کنید

فرض کنید یک سیستم دو متغیره داریم $T = T(n, t)$ یا $T = T(n, y)$ (1) در زمانهای مختلف در $n = 1$ T را بدست می آوریم. تا آزمایش t انجام شده باید

t	T
0	0
1	1
2	3
3	10
5	20

حال برای n های دیگر داده ها را بدست می آوریم

$n = 2$

t	T

برای کل n ها این کارها را انجام دهیم

(2) در n های مختلف در t ثابت در نقاط مختلف ترموکوپل بگذاریم داده ها را بخوانیم

n	0.1	0.2
T	...	...

n	
T	

در آزمایشگاهها هیچ وقت چند تا متغیر داریم.
یکی از کارهایی که انجام می دهیم طراحی آزمایش است طوری که با کمترین تعداد آزمایش ، داده ها را بدست بیاوریم

چطور می توانیم تابع مناسبی برای n و t بدست بیاوریم ؟
چند تا کد در متلب هست که سیستم را انتخاب کنید ، تابع را بدست بیاورید مثال جدول کامل می خواهد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

polynomial approximation Method:

x_i	f_i
x_0	f_0
x_1	f_1
$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n

ساده‌ترین روش انتخاب یک چندجمله‌ای
فیت کردن داده‌ها در یک چندجمله‌ای

$\rightarrow$ $(n+1)$ بار داده داریم

تعداد بارها : تعداد ضرایب

$n+1$ ضریب : ترتیب

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$: $n+1$ مجهول

$$\begin{cases} f_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n \\ f_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n \\ \vdots \\ f_n = a_0 + a_1 x_n + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n \end{cases}$$

$n+1$ معادله و $n+1$ مجهول

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

این روش خوبی نیست چون هیچ ایده‌ای به ما نمی‌دهد

ممکن است 1000 جمله داشته باشیم و دیگر جوابی نباشد که ۱۰۰٪ مطمئن به دست بیاوریم

روش جدول max را به ما می‌دهد.

نکته:

۱) روش‌های توقف چندجمله‌ای در مدل‌سازی‌ها به درد ما می‌خورد. ... آزمایشگاه‌ها و کارهای عملی

۲) حل تمام معادلات یک سری از فرم است   * $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

در مهندسی نمی‌توانیم فرم معادله را تغییر بدهیم.

آخر فصل کتاب:

توابعی که ما در نظر می‌گیریم شکل استانداردی دارند مثل sin

مثلاً $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda = \pm j$

$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

فرق دو طرف معادله با هم چیست؟

در سمت چپ یک ضریب یا دو تا داریم | چون ضرایب هم وابسته هستند.

سمت راست ∞ ضریب داریم.

پس به جای اینکه کل سری را حل کنیم * می‌توانیم بر اساس الگویی از sin و cos ... بنویسیم قرار دهند.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$P_n(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 J_m(x) + C_4 Y_m(x) + C_5 P_n(x)$$

$$+ C_6 D_n(x)$$

$$Q_n^1(x)$$

حال می‌توانید هر این روش‌هایی که با چند جمله‌ای رفتید با این توابع بروید.

عمل: همین $P_n(x)$ را به جای تابع اصلی بگذارید و مقدار مجهولات را حساب کنید

مثال)

	مقادیر داده
0	1
1	5
3	10
4	20

Divide

مقادیر جدید Differend

روش حل Sin Cos Sinh Cosh

روش Lagrange

$$P_n(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 \sinh x + C_4 \cosh x$$

تابع تشکیل شده

روش‌های بالا مقایسه شوند و خطا را حساب کنید

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

جلسه آخر ۸۸/۱۰/۲۱

Non Linear Algebra Equation:

$\underbrace{\cos x - x}_{f(x)} = 0$ — یک معادله غیرخطی است چون x را به طور صریح نمی‌توان بدست آورد

$\cos x = x$

باید x را آنقدر حدس زد تا اینکه ۲ طرف برابر شوند

یکی از کاربردهای این قسمت در معادلات حدس و خطای است مثلاً در کنترل در رسم فاز نمودارهای BODE حدس و خطا خیلی کمک می‌کند.

$\varphi = -tg^{-1}(\omega) + tg^{-1}(2\omega)$

می‌بایست بتوانیم ریشه‌های این معادله را با حدس و خطا یا همراه با تکرار بیابیم

* یادآوری شرط مرزی جابجایی بر سیستم cond = conv

$$BC \left\{ -K\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_L = h(T|_L - T_\infty) \atop T - T_\infty = \theta \right\} \Rightarrow -K\frac{\partial \theta}{\partial x}(L,t) = h\theta(L,t)$$

$\theta(x,t) = F(x)G(y)$ $\quad F(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda_n}\, x + C_2 \cos\sqrt{\lambda_n}\, x$

بسته به شرایط مرزی Cos یا Sin یکی حذف می‌شود

$BC_2 \rightarrow K C_1 \sqrt{\lambda_n} \cos\sqrt{\lambda_n} L = h C_1 \sin\sqrt{\lambda_n} L$

$tg\sqrt{\lambda_n} L = \frac{K}{h}\sqrt{\lambda_n}$ $\quad \sqrt{\lambda_n} L = \xi$

$tg\,\xi = \frac{-k}{hh}\xi$ در اینجا یک بار دیگر خط را رسم

حل معادلات غیرخطی:

۱) جستجوی نقطه بر حسب تغییر است

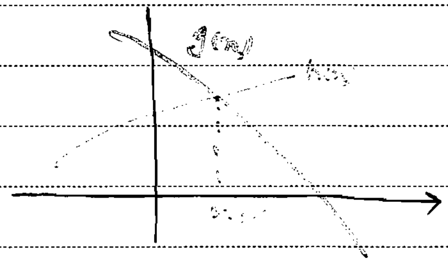
۲) ترسیم

اگر تابعی مثل $f(x)=0$ را داشته باشیم می‌توانیم آن را به دو تابع تبدیل کنیم:

$g(x) = h(x)$

$y_1 \quad y_2$

$$\begin{cases} y_1 = g(x) \\ y_2 = h(x) \end{cases}$$

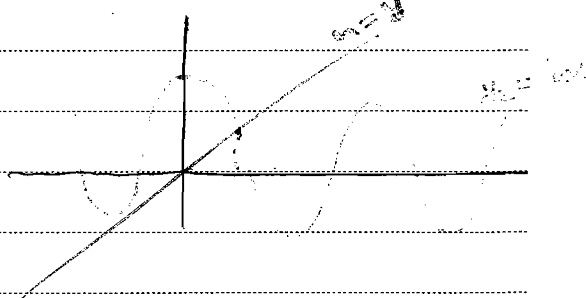


مثال $f(x) = \cos x - x$

$\cos x = x$

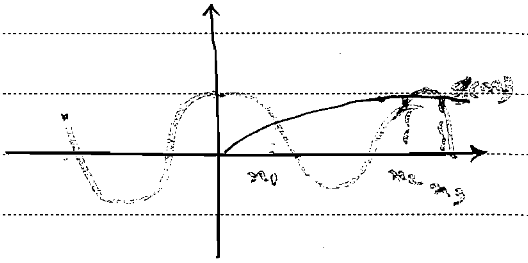
$g(x) = h(x)$

$$\begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = x \end{cases}$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: $f(x) = \cos x - 1 + e^{-x}$



$$\begin{cases} y_1 = g(x) = \cos x \\ y_2 = h(x) = 1 - e^{-x} \end{cases}$$

Newton-Raphson Method.

$f(x) = 0$

یکی از روشهای بدست آوردن ریشه‌ها است

از ۲ ایده استفاده می‌کند ۱) ریشه‌ای که با اسم θ وجود دارد در ریشه واقعی است ⇐ در معادله قرار دهیم صفر می‌شود

$f(\theta) = 0$

۲) ریشه‌ای که با اسم x_n که ریشه تقریبی مسئله است

$\theta = x_n + \varepsilon_n$

$\varepsilon_n = \theta - x_n$ با فرض $x_n < \theta$

$\varepsilon_n = x_n - \theta$ با فرض $x_n > \theta$

$\varepsilon_n = |\theta - x_n|$

$f(\theta) = 0 \Rightarrow f(x_n + \varepsilon_n) = 0$

$$f(x_n + \varepsilon_n) = 0 = f(x_n) + f'(x_n)\frac{\varepsilon_n^{(1)}}{1!} + f''(x_n)\frac{\varepsilon_n^2}{2!} + \cdots$$

فرض: صرفنظر
کوچک ε_n
خطا کم باشد

$$\varepsilon_n = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\theta = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

A را اصلاح شده باریش اصلاح شده نقد

$$\boxed{x_{n+1} = \underbrace{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{g(x_n)}} \quad (1)$$

شرط استفاده از این روش: تابع f باید مشتق پذیر باشد، $f'(x_n) \neq 0$

شرط همگرایی نقطه x_n: $|g'(x_n)| < 1$

$$g'(x_n) = 1 - \frac{[f'(x_n)]^2 - f''(x_n)\cdot f(x_n)}{[f'(x_n)]^2} = \frac{+f(x_n) f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}$$

$$\left| \frac{f(x_n)\cdot f''(x_n)}{(f'(x_n))^2} \right| < 1$$

مراحل حل:

1) Assum x_n
2) check $|g'(x_n)| < 1$
3) compute x_{n+1} by equation (1)
4) check $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$
5) Replace $x_n = x_{n+1}$ یعنی نقطه بدست آمده را جایگزین کن
6) Repeat step 3 to converge soln برسیم

مثال: $f(x) = \cos x - x = 0$

$x_0 = 0.7$ (واحد رادیان باشد)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.7 - \frac{\cos 0.7 - 0.7}{-\sin 0.7 - 1} = 0.7394$$

$|x_1 - x_0| \not< tol$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.7394 - \frac{\cos 0.7394 - }{} = 0.7391$$

PAPCO

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.7391 \Rightarrow \text{خطا} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0.7391}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

این بهترین روش است. برنامه با همین ۵ تا step نوشته باشد فقط شرط این است f صفر نشود به
اینکه x_n مشکل ایجاد کند

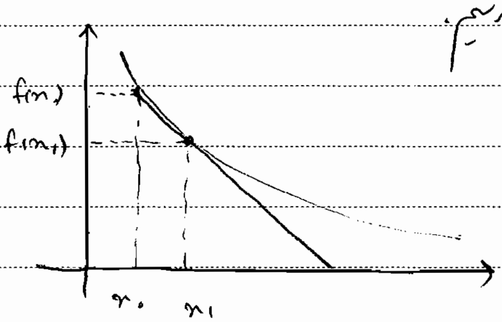
سرعت همگرایی Newton Rapson از همه روش‌های دیگر بیشتر است

extrapolation

Linear Interpolation Method:

$f(x)=0$

روش میان یابی و برون یابی براساس یک خط را توضیح میدهیم.



معادله خطی که از این دو نقطه عبور میکند را می‌نویسیم
این معادله محور xها را در نقطه x_2 قطع میکند

معادله را می‌نویسیم

$$\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \qquad x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$

دو مزیت دارد
۱. اگر محاسبه مشتق‌ها راحت نباشد این روش کمتر از روش قبلی است
۲. مخرج صفر نمی‌شود (چون باید $f(x_1)$ و $f(x_0)$ برابر باشند که حالت خاص است)

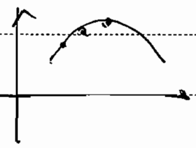
عیب: اگر نقطه‌ها طوری باشند که خط محور افقی را خیلی دور قطع کند زمان محاسبات طولانی‌تر می‌شود

عیب: برای این روش زمان طولانی باشد عیب ۲) دو نقطه نیاز دارد عیب ۳) از روش Newton کندتر است و همگرایی کندتر دارد
وقتی خیلی کند می‌شود

195

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ولی بیشتر روشهای نرم افزاری از روش newton رفته اند.



این روش عین روش سیمپسون است :
۳ نقطه در نظر میگیرد یک تابع درجه ۲ را با ۳ نقطه fit میکند

در اینجا تقریب خطی در نظر گرفتیم اگر f(x) روی نوار باریکه درست است دیگر $(f(x) = ax + b)$
ادامه میدهیم

$f(x) = \cos x - x$

$x_0 = 0.7$

$x_1 = 0.73$

$x_2 = 0.7390$

$x_3 = 0.7391$

$\boxed{x_4 = 0.7391}$

روشهای تکیه :
مشتق بردن تابع
تکرار تابع

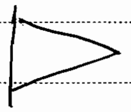
سوال ← Newton Rapson

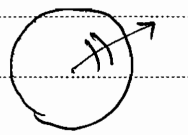
Subject :
Year . Month . Date . ( )

روش انتگرال گیری عددی

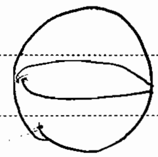
معادلات بسل :

در مختصات استوانه‌ای و کروی با پره‌های با سطح مقطع متغیر به این معادلات برخورد می‌کنیم.





سطح مقطع در جهت r متغیر است



استوانه‌ای داریم به درازای L و در دمای T است. این استوانه را به صورت ناگهانی در هوای با دمای T_∞ قرار می‌دهیم
فرض کنید دمای تمام بدنه و h یکسانی دارد.

ابتدا :

$$\frac{d}{dr}\left(K A_r \frac{dT}{dr}\right) dr = \rho \cdot c \, \Delta V \frac{dT}{dt}$$

انتقال در جهت z را صرف نظر می‌کنیم.

$A_r = 2\pi r \cdot 1$

$\Delta V = 2\pi r dr$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$BC\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial r}(0,t)=0 \quad or \quad T(0,t)=\text{محدود}\\ T(R,T)=T_\infty\end{cases}$$

$$IC:\ T(r,0)=T_0 \qquad \theta=T-T_\infty$$

متغیر θ

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

$$BC\begin{cases}\theta(0,t)=\text{محدود}\\ \theta(R,t)=0\end{cases}\rightarrow$$ r dire : Homo gened

پاسخ پریودیک

$$\theta(r,t)=f(r)\,G(t)$$

$$\frac{1}{rf}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)=\frac{1}{\alpha G}\frac{dG}{dt}=-\lambda$$

$$r^2\frac{d^2f}{dr^2}+r\frac{df}{dr}+\lambda r^2 f=0$$

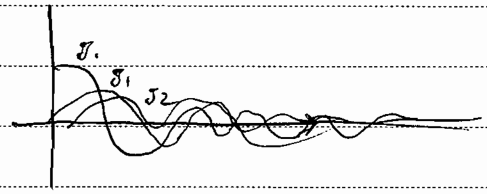
شکل عمومی معادلات بسل

$$r^2\frac{d^2f}{dr^2}+r\frac{df}{dr}+(\underbrace{\lambda r^2}_{z^2}-m^2)f=0$$

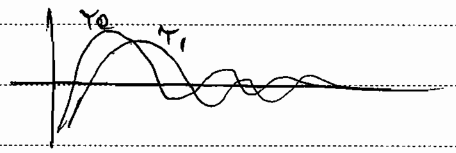
درجه معادله

$z=\sqrt{\lambda}r$ با یک تابع بسل

$$f(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda}\, r) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda}\, r)$$



تابع J. در r=0 محدود است



ولی Y. نامحدود است

BC 1 $\quad f(0) =$ محدود $\quad c_2 = 0$

BC 2 $\quad C_1 J_0 \sqrt{\lambda} R \qquad J_0(\sqrt{\lambda} R) = 0 \qquad \lambda_n$ ✓

$$G(\alpha) = c e^{-\alpha \lambda_n t}$$

$$\theta(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha \lambda_n t} J_0(\sqrt{\lambda_n}\, r)$$

For A_n from IC:

$$\left\{ \theta_0 = \sum A_n \cdot 1 \cdot J_0(\sqrt{\lambda_n}\, r) \right\} \quad \int_0^R J_0(\sqrt{\lambda_n}\, r)\, \underbrace{r}_{\text{weighting For}}\, dr$$

$$A_n = \frac{\int_0^R \theta_0 J_0(r\sqrt{\lambda_n})\, r\, dr}{\int_0^R (J_0 \sqrt{\lambda_n}\, r)^2\, r\, dr}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسائل پایان ترم

۱) مثلاً سیستم حجم با سیالات یا حرارت و مدل‌سازی کنیم و بتوانیم مدلش ODE یا PDE

۲) مسئله را مدل کنیم معادلات را بدست آوریم و مدلش را numerical حل کنیم

۳) روش difference table ، newton یک سوال ... یک سری داده را تابع به دست بیاوریم
← خطی

۴) معادلات غیرخطی ← روش

Subject: کاربرد

Year. 88 Month. 10 Date. 14 ( )

چند روش برای مدل سازی عددی وجود دارد.

1) Graphical Method :

2) Straight line Method

3) Least square Method { SPSS software, Eview "

4) Divided Difference table

5) Difference table

6) روش تکرار :

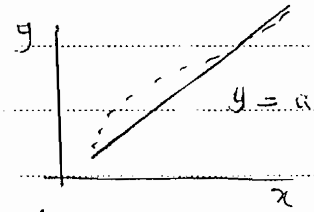
7) روش تقریب منحنی ((

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
⋮	⋮
x_n	y_n

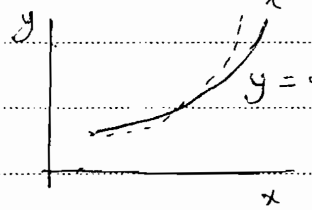
→ مقادیر experiment یا مقادیر واقعی :

Experiment = Real → چون تحلیل نمی‌کنیم پس واقعی است

1) Graphical Method :



$y = a + bx$ → straight line method



$y = ax^2 + bx + C$

ولی اگر متغیر ما تابع عوامل گوناگونی باشد : (Q_c و Q_d و ......) یا ضریب انتقال جرم

در این حالت نمی‌توانیم ارتباط بین پارامترها را بفهمیم و کار سخت و پیچیده و تعداد آزمایشات زیاد

می‌شود. ادغام کردن پارامترها نیاز به ایده‌های ریاضی دارد. یکی از روش‌ها آنالیز ابعادی است

یعنی رابطه را بصورت بدون بعد در می‌آوریم

$$Sh = K_1 Re^n Sc^m Wb^D \ldots$$

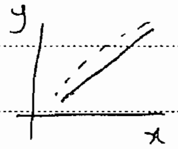
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲) Straigh line Method:

x	y

$y = bx + a$ $\xrightarrow{\text{یا}}$



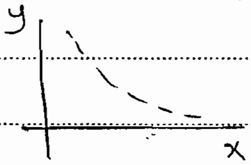
از طریق رسم به این شیب می‌رسیم

$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y_{\text{ابتدایی}} - y_{\text{انتهایی}}}{x_{\text{ابتدایی}} - x_{\text{انتهایی}}}$

گاه هم بین هر دو نقطه یک خط در نظر می‌گیرند و در آخر

متوسط a ها و متوسط b ها را در نظر می‌گیرند:

گاه هم مشاهده می‌شود که تابع ما شبیه خط راست نبوده مثلاً شبیه exp بود:



$y = ae^{bx} \Rightarrow$

$\ln y = \ln a + bx$

$Y = A + bx \Rightarrow$

x	y	ln y

گاه هم تغییر به صورت توانی است:

$y = ax^n$

$\ln y = \ln a + n \ln x$

$Y = A + nX$

x	y	ln x	ln y

if $R^2 = 1$ or 100 $\rightarrow$ حتماً تابع ما درست انتخاب شده

if $R^2 < 0.9$ or 90 $\rightarrow$ تابع حدس زده شده خوب نیست

نرم افزارهای جاری تمام اطلاعات مورد نیاز برای اصلاح تابع داده شده را در اختیار ما قرار می‌دهند.

مثلاً در $Sh = K_1 Re^n Sc^m Wb^D$ ... می‌گوییم چون n کوچک است می‌توان از Re

صرف نظر کرد.

Subject:

Year.   Month.   Date.   ( )

جلسه   ۸۸/۱۰/۱۵

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j,n} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j,n}$$

for   cent

$$\frac{u_{i,j,n+1} - u_{i,j,n}}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{u_{i+1,j,n} - 2u_{i,j,n} + u_{i-1,j,n}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1,n} - 2u_{i,j,n} + u_{i,j-1,n}}{\Delta y^2}\right]$$

$$\begin{cases} \lambda_x = \alpha \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ \lambda_y = \alpha \dfrac{\Delta t}{\Delta y^2} \end{cases}$$

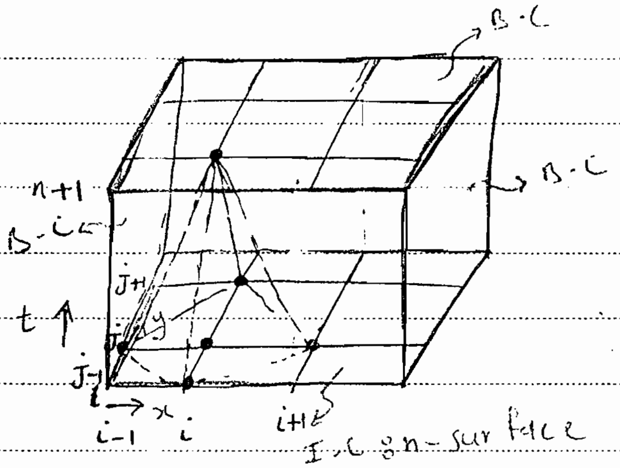
معمولاً $\Delta x = \Delta y \Rightarrow \lambda_x = \lambda_y = \lambda$

$$\boxed{u_{i,j,n+1}^{?} = \underbrace{\lambda}_{A} u_{i+1,j,n} + \underbrace{\lambda}_{B} u_{i-1,j,n} + \underbrace{\lambda}_{C} u_{i,j+1,n} + \underbrace{\lambda}_{D} u_{i,j-1,n} + \underbrace{(1-4\lambda)}_{E} u_{i,j,n}}$$

possitive Rule:

شرط اول) $A, B, C, D, E > 0 \Rightarrow 1-4\lambda > 0 \Rightarrow 0 < \lambda < \frac{1}{4}$: conditionally Stable

شرط دوم) $A+B+C+D+E \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1$ ✓



هشت نقطه معلوم وسط یک نقطه مجهول داریم

قبلاً line به line داشتیم ولی الان سطح به سطح داریم

کل سطح پایین = I.C

این دفعه به منشور مثلثی شد

وقتی تعداد ابعاد زیاد شود، محدوده‌ی ابعاد کوچکتر شود

x, t دوبعدی $0 < \lambda < 1/2$

x, y, t سه‌بعدی $0 < \lambda < 1/4$

x, y, z, t چهاربعدی $0 < \lambda < 1/6$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روش Implicit هم دقیق‌تر از Explicit است با این تفاوت که به یک ماتریس خواهیم رسید:

Implicit:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j,n} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j,n+1}$$

for cent

$$\frac{u_{i,j,n+1} - u_{i,j,n}}{\Delta t} = \alpha\left[\frac{u_{i+1,j,n+1} - 2u_{i,j,n+1} + u_{i-1,j,n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1,n+1} - 2u_{i,j,n+1} + u_{i,j-1,n+1}}{\Delta y^2}\right]$$

$$+E|\Delta t| + E|\Delta x^2| + E|\Delta y^2|$$

(فرض) $\Delta x = \Delta y \Rightarrow \lambda_x = \lambda_y = \lambda$

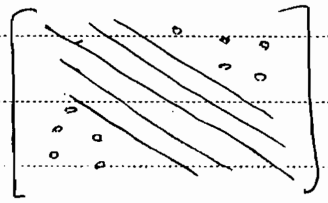
$$(1+4\lambda)\,u_{i,j,n+1} - \lambda u_{i+1,j,n+1} - \lambda u_{i-1,j,n+1} - \lambda u_{i,j+1,n+1} - \lambda u_{i,j-1,n+1} = u_{i,j,n}$$

الآن ۵ تا مجهول و یک نقطه معلوم داریم.

Possitive Rule:

همه ضرایب صفر یا مثبت است $\Rightarrow$ Always Stable : $0 < \lambda < \infty$

چون ۵ تا مجهول داریم به یک ماتریس ۵ قطری خواهیم رسید:



دوباره باید به ماتریس ۳ قطری تبدیل شود و بعد حل گردد.

Numerical Modeling:

دو نوع مدل‌سازی داریم ← تحلیلی: با انتگرال‌گیری، معادله حاکم را بدست آورده و آن را حل می‌کنیم

عددی: به کارهای آزمایشگاهی مربوط است.

P4PCO

Subject: کاربرد
Year. 88 Month. 10 Date. 14

3) Least square Method :

x	y or f
x_0	y_0
x_1	y_1
⋮	⋮
x_n	y_n

چند جمله‌ای $P(x) = \sum_{k=0}^{n \text{ or } \infty} a_k x^k$

چرا چند جمله‌ای‌ها را می‌گیریم؟

پاسخ تمام معادلات (چه خطی و چه غیرخطی) یک سری جبری است برحسب x.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

or

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots$$

Example) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots$

ساده‌ترین حالت این است که P را تابع خطی در نظر بگیریم:

$$P(x) = a_0 + a_1 x$$

$y_0, y_1, \ldots, y_n \leftarrow$ مقادیر واقعی

$e_i = \text{error} =$ خطا $= P($در نقطه$) - y($در همان نقطه$) = P(x_i) - y_i$

این e_i گاهی $\oplus$ و گاهی $\ominus$ است. مهم این است که مجموع خطاها min باشد. و این همان ایده‌ی Least square است که مجموع توان دوم تمامی خطاها را min می‌کند.

① $e_i = \text{error} = P(x_i) - y_i$

② $E' = (e_i)^2 = [P(x_i) - y_i]^2$

③ $E = \sum E' = \sum_{i=1}^{n} [P(x_i) - y_i]^2 \rightarrow$ الآن درون براکت a_0, a_1 مجهول است

کلی: $E = f(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$

برای بدست آوردن نقاط ext باید مشتق تابع را صفر کنیم:

④ $\frac{dE}{da_0} = 0$

$\frac{dE}{da_1} = 0$

$\frac{dE}{da_2} = 0$

⋮

(درجه اول) دو تا معادله و دو تا مجهول $\leftarrow a_0, a_1$ بدست می‌آید.

(درجه دوم) سه تا معادله و سه تا مجهول $\leftarrow a_0, a_1, a_2$ بدست می‌آید.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مزیت: از تمامی نقاط استفاده می‌کند:

$$E=\sum_{i=1}^{n}\left[a_0+a_1x_i-y_i\right]^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0}=0 \Rightarrow 2\sum_{1}^{n}\left(a_0+a_1x_i-y_i\right)^1=0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1}=0 \Rightarrow 2\sum_{1}^{n}\left(x_ia_0+a_1x_i^2-y_ix_i\right)^1=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overbrace{\sum_{1}^{n} a_0}^{na_0}+a_1\sum_{1}^{n}x_i-\sum_{1}^{n}y_i=0 \\ a_0\sum x_i+a_1\sum x_i^2-\sum x_iy_i=0 \end{cases} \rightarrow a_0, a_1 \checkmark$$

x	y	e	e^2

توان ۶ و ۷ و ۸ ← هر نوع داده‌ای را با خود منطبق می‌کند.
و حداکثر ۱۰

این روش بسیار خوب و دقیق است

تحویل پروژه: ۱۵/۱۱/88

(پروژه)

$$\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

۳ یا ۴ نمره

$$B.C\begin{cases}\frac{\partial T}{\partial r}(0,t)=0\\ T(1,t)=100^\circ C\end{cases} \qquad I.C: T(r,0)=20^\circ C$$

ماتریس را مطلب حل می‌کند ↓

$\Delta r=0.05$, $\Delta t=0.01$

at $t=0.5 \rightarrow T=?$

با کمک روش EXP و Imp پاسخ این مسئله را بدست آورید ← با برنامه‌نویسی Matlab

با مقادیر خطا و

خطای %ARE

$$\frac{\sum|\ \ |}{N}$$

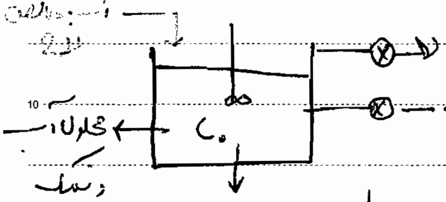
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تمرین کاربرد ریاضیات

جلسه اول ۱۵/۷/۸۸

مخزنی به حجم V_0 در نظر بگیرید. در نصف حجم مخزن محلول آب و نمک وجود دارد و غلظت نمک در آن C_0 است. این مخزن مجهز به دو شیر است. در زمان $t=0$ هر دو شیر باز می‌شوند. آب خالص با شدت حجمی 2ν وارد مخزن می‌شود.
شیر اول هنگامی که حجم محلول $\frac{V_0}{2}$ است باز می‌شود. $V > V_0$ شیر دوم
و شیر دوم هنگامی باز می‌شود که حجم آب نمک برابر $\frac{V_0}{2} < V$ ... شیر اول ...
شدت جریان خروجی سیال از هر شیر به اندازه ν است.



الف) ثابت کنید تغییرات غلظت محلول خروجی تا قبل از پر شدن کامل محلول $t=0 \quad V=\frac{V_0}{2}$ تابع ... زیر است:

$$\frac{C}{C_0} = \left(\frac{V_0/2\nu}{t+\frac{V_0}{2\nu}}\right)^{2}$$

الف) $\frac{V_0}{2} < V < V_0$

اگر دانسیته سیال ثابت باشد بیلان جرم به بیلان حجم تبدیل می‌شود.

بیلان کل جرم : ورودی − خروجی = تجمع

$$\rho = cte \Rightarrow 2\nu - \nu = \frac{dV}{dt} \qquad \boxed{\frac{dV}{dt} = \nu}$$

$$\int^{t} \nu\, dt = \int_{V_0/2}^{V} dV \qquad \nu t = V - \frac{V_0}{2}$$

$$\boxed{V = \frac{V_0}{2} + \nu t}$$

بیلان جزء نمک $\quad \frac{d(CV)}{dt} = 0 - \nu C$

$$\underbrace{V}_{\frac{V_0}{2}+\nu t}\frac{dC}{dt} + C\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\nu} = -\nu C$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$-\nu C = \left(\frac{V_0}{2} + \nu t\right)\frac{dc}{dt} + C\nu$$

$$dc/dt = \frac{-2C\nu}{V_0/2 + \nu t} \qquad \int_{C_0}^{C} \frac{dc}{dt} = \int^{t} \frac{-2dt}{t + \frac{V_0}{2\nu}}$$

$$\ln C/C_0 = -2\ln \frac{t + V_0/2\nu}{2\nu} + A$$

شرایط اولیه $\quad t=0 \quad C=C_0 \qquad C/C_0 = \left(\dfrac{V_0/2\nu}{t_0 + \frac{V_0}{2\nu}}\right)^2$

ب) ثابت کنید زمان رسیدن مخزن از حالت $t_f = V_0/2\nu$ محاسبه می شود.

$$V = \frac{V_0}{2} + \nu t$$

زمان رسیدن پایدار : $t_f \Rightarrow V_0 = \dfrac{V_0}{2} + \nu t_f \qquad \nu t_f = \dfrac{V_0}{2} \qquad \boxed{t_f = \dfrac{V_0}{2\nu}}$

$V = V_0$

$$C/C_0 = \left(\frac{V_0/2\nu}{t + V_0/2\nu}\right)^2 \quad \text{at} \quad t_f \Rightarrow \frac{C_f}{C_0} = \left(\frac{V_0/2\nu}{\frac{V_0}{2\nu} + V_0/2\nu}\right)^2 = 1/4$$

$$\boxed{C_f = C_0/4}$$

ج) تحقیق کنید که تغییرات غلظت محلول پس از رسیدن مخزن از حالت پایدار چگونه تغییر می کند؟

$$C = \frac{C_0}{4}\exp\left(1 - \frac{2\nu t}{V_0}\right)$$

$t_f > \dfrac{V_0}{2\nu}$ $\quad$ بیلان جرم $\rho = cte \quad \Rightarrow \quad 2\nu - \nu - \nu = \dfrac{dV}{dt} \qquad \dfrac{dV}{dt} = 0$

$V = V_0$ حجم ثابت می ماند

PAPCO

بیلان جرم نمک : $0 - 2vc = \frac{d(cV)}{dt}$ حجم ثابت است $-2vc = V_0 \, dc/dt$

$$\int_{C_0/4}^{c} dc/c = \frac{-2v}{V_0} \int_{t_f = V_0/2v}^{t} dt$$

$$\ln \frac{c}{C_0/4} = \frac{-2v}{V_0}\left(t - \frac{V_0}{2v}\right) \qquad c = \frac{C_0}{4} \exp\left(1 - \frac{2vt}{V_0}\right)$$

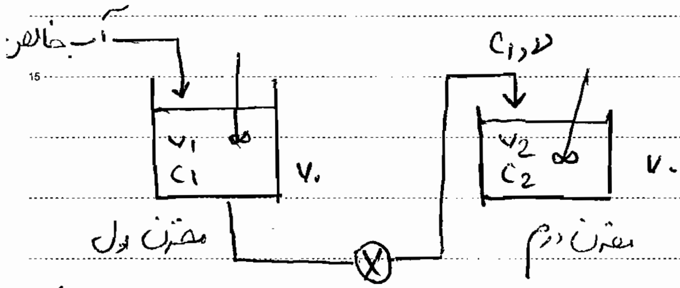
مدل کردن سیستم منجر به این دو رابطه می‌شود :

$$V = \begin{cases} V_0/2 + vt & t < V_0/2v \\ V_0 & t > V_0/2v \end{cases} \qquad c = \begin{cases} C_0 \left(\frac{V_0}{t + V_0/2v}\right)^2 \\ C_0/4 \, \exp\left(1 - \frac{2vt}{V_0}\right) \end{cases}$$

برای اینکه از صحت مدل مطمئن بشویم :

if $t \to \infty$ $\boxed{C = 0}$

مثال ۲ :



دو مخزن با اختلاط کامل از نظر شکل یکسان که به صورت سری به یکدیگر اتصال دارند. مخزن اول دارای آب نمک به حجم V_0 است که در ابتدا خالی می‌باشد با غلظت C_0 است. مخزن دوم که حجم آن V است.

در لحظه $t=0$ آب خالص با سرعت جریان حجمی v وارد مخزن اول می‌شود و در همان لحظه با سرعت v از مخزن اول به مخزن دوم پمپ می‌گردد. در این هنگام هیچ سیالی از مخزن دوم خارج نمی‌شود.

الف) ثابت کنید تغییرات غلظت نمک در مخزن اول از رابطه زیر است :

$C_1/C_0 = \exp(-vt/V_0)$

استفاده از این گونه مسائل تغییرات حجم را مشخص کنید.

بیلان جرم مخزن اول $\quad \nu - \nu = \frac{dV_1}{dt} \quad V_1 = V_0 = cte$

بیلان $\quad \nu x_0 - \nu C_1 = \frac{d(V_1 C_1)}{dt}$

$-\nu C_1 = V_0\, dC_1/dt \quad \int_{C_0}^{C_1} \frac{dC_1}{C_1} = \int_0^t \frac{-\nu}{V_0}\, dt \quad \ln\frac{C_1}{C_0} = -\frac{\nu}{V_0} t$

$$\frac{C}{C_0} = \exp\left(\frac{-\nu t}{V_0}\right)$$

ب) ثابت کنید تغییرات غلظت نمک در مخزن دوم به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{C_2}{C_0} = \frac{V_0}{\nu t}\left[1 - \exp\left(\frac{-\nu t}{V_0}\right)\right]$$

بیلان جرم کلی $\Rightarrow \quad \nu - 0 = \frac{dV_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \nu\, dt = \int_0^{V_2} dV_2 \quad \boxed{V_2 = \nu t}$ (II)

$\rho = cte$

بیلان جرم نمک $\quad \underbrace{\nu C_1}_{I} - 0 = \frac{d(\overbrace{V_2}^{II} C_2)}{dt}$

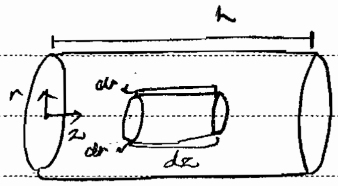
$$C_2/C_0 = \frac{V_0}{\nu t}\left(1 - \exp\left(\frac{-\nu t}{V_0}\right)\right)$$

پ) ثابت کنید غلظت نمک در مخزن دوم در لحظه پر شدن از رابطه زیر بدست می آید؟

$$\left.\begin{array}{ll} C_2 = 0.63 C_0 & V_2 = \nu t \\ t = t_f & V_2 = V_0 \end{array}\right\} \Rightarrow V_0 = \nu t_f \Rightarrow t_f = \frac{V_0}{\nu}$$

$$C_2/C_0 = V_0/\nu t\left(1 - \exp\left(\frac{-\nu t}{V_0}\right)\right) \Rightarrow C_{2f} = C_0(1 - 1/e) = 0.63 C_0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$P_1(2\pi r dr) \rightarrow \quad \tau A|_{r+dr} \quad \leftarrow P_2(2\pi r dr)$$
$$\tau A|_r$$
$$\dot{m}u|_z \rightarrow \qquad \rightarrow \dot{m}u|_{dz}$$

$$\dot{m}u|_{z=0} = \dot{m}u|_{dz} \qquad \frac{P_1 - P_2}{L}$$

$$P_1(2\pi r dr) - P_2(2\pi r dr) + \tau A|_r - \tau A|_{r+dr} = 0$$

$$P_2 = P_1 + \frac{\partial P}{\partial z} dz \qquad \tau A|_{r+dr} = \tau A|_r + \frac{\partial(\tau A)}{\partial r} dr$$

$$\Rightarrow \frac{-\partial P}{\partial z} dz \times 2\pi r dr - \frac{\partial(\tau A)}{\partial r} dr = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} dz\, 2\pi r dr + \frac{\partial}{\partial r}(\tau \times 2\pi r\, dz) dr = 0$$

$$\frac{dP}{dz} \times r + \frac{d(\tau r)}{dr} = 0 \Rightarrow \tau r = -\int \frac{dP}{dz} r dr$$

$$\tau r = -\frac{dP}{dz} \times \frac{r^2}{2} + C \qquad \tau = \frac{-dP}{dz} \times \frac{r}{2} + C/r$$

$$r = 0 \qquad T = \text{محدود} \rightarrow C = 0$$

$$\tau_{rz} = \frac{-dP}{dz} \times \frac{r}{2} \qquad \int_{v_z=0}^{v_z} dv_z = \int_{r=R}^{r} \frac{dP}{dz \times 2\mu} r dr$$

$$v_z = \frac{dP}{dz \times 2\mu}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right] = \frac{dP}{4\mu dz}\left[r^2 - R^2\right]$$

$$v_z = \frac{-dP R^2}{4\mu dz}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad \Delta P = P_1 - P_2$$

PAPCO

۸۲۰۹۴۳۱۹

۵

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$r = 0 \quad v_z = v_{z\,max}$

$$v_{z(max)} = \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2$$

$$\bar{v}_z = \frac{\int v_z dA}{A} = \frac{\int v_{z\,max}(1-(r/R)^2)\, 2\pi r dr}{\pi r^2}$$

$$\bar{v}_z = \frac{v_{z\,max} \times 2\pi \times r^2/2 - v_{z\,max} \times 2\pi r^4/4R^2 \big|}{\pi R^2} = v_{z\,max}\left(1 - \frac{R^2}{2R^2}\right)$$

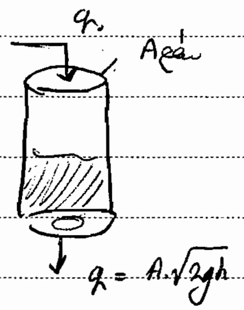
$$\frac{\bar{v}_z}{v_{z\,max}} = 1/2 \quad v_{z\,max} = 2\bar{v}_z$$

TA کاربرد ریاضیات

جلسه اول

جریانی از مایع به شدت q_0 به درون مخزن خالی استوانه‌ای شکل به سطح مقطع A می‌ریزد در انتهای کف مخزن سوراخی سطح مقطع کوچکتر به سطح مقطع A_0 ایجاد شده است چنانچه خروج مایع از سوراخ مخزن با قانون $q = A\sqrt{2gh}$ برابر باشد

حل)



تجمع = خروجی − ورودی

$$q_0 - q = \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow q_0 - A_0\sqrt{2gh} = A\,dh/dt \qquad \frac{q_0}{A} - \frac{A_0}{A}\sqrt{2gh} = \frac{dh}{dt}$$

$$\sqrt{h} = x \qquad dh = 2x\,dx$$

$$\frac{q_0}{A} - \frac{A_0}{A}\sqrt{2g}\,x = 2x\,dx/dt \qquad dt = \frac{2x}{B - Cx}dx$$

$$\Rightarrow t = -2/C\int_0^x \frac{Cx - B - B}{Cx - B} = -2/C\left(x + B/C\ \ln(Cx - B)\right) =$$

$$\frac{2B}{C^2}\ln\left(\frac{1}{Cx - B}\right) - 2/C\ x$$

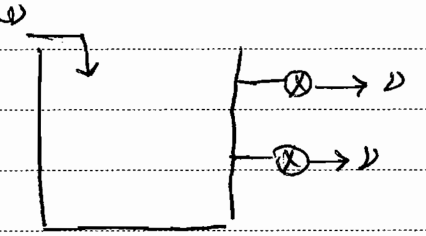
$$\text{زمان تخلیه} = \frac{q_0 A}{A_0^2 g}\ln\left(\frac{A}{A_0\sqrt{2gh} - q_0}\right) - 2A/A_0\sqrt{h/2g}$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

۲- مدل سازی تورلیک: مخزنی به حجم V_0 با مقاطع شکل در نظر بگیرید. در نصف حجم مخزن مخلوط آب و نمک وجود دارد و غلظت نمک در آب c_0 است. این مخزن مجهز به دو شیر است. در زمان صفر جریانی با شدت جریان $2v$ وارد مخزن می‌شود. شیر اول هنگامی که حجم مخزن $\frac{V_0}{2}$ است باز می‌شود و شیر دوم هنگامی باز می‌شود که حجم آب نمک به V_0 برسد. شدت جریان خروجی از شیرها v باشد. ثابت کنید غلظت تا قبل از پر شدن مخزن از معادله زیر پیروی می‌کند



$$\frac{c}{c_0} = \left(\frac{V_0/2v}{t+\frac{V_0}{2v}}\right)^2$$

مرحله اول:

$$2(0)v - cv = \frac{d(cV)}{dt}$$

آب خالص

V هم با زمان متغیر است

$$-cv = V\frac{dc}{dt} + c\frac{dV}{dt}$$

موازنه کلی حجم

$$2v - v = dV/dt \qquad V = vt + cte$$

$$\begin{cases} t=0 \\ V = V_0/2 \end{cases} \Rightarrow cte = \frac{V_0}{2}$$

$$\left(vt + \frac{V_0}{2}\right)\frac{dc}{dt} = -2cv$$

$$\frac{dt}{(vt+V_0/2)} = \frac{dc}{-2cv} \qquad \frac{1}{v}\ln\left(vt+\frac{V_0}{2}\right)\Big|_0^t = \frac{-1}{2v}\ln c\Big]_{c_0}^{c}$$

$$\ln\left(\frac{c}{c_0}\right)^{-1/2} = \ln\left(\frac{vt+V_0/2}{V_0/2}\right) \Rightarrow c/c_0 = \frac{\frac{V_0}{2}}{vt+\frac{V_0}{2}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(۲) ثابت کنید زمان پرشدن مخزن از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید

$$t_f = \frac{v_0}{2\nu}$$

داشتیم $\quad v = \nu t + \frac{v_0}{2} \qquad v_0 = \nu t + \frac{v_0}{2} \qquad \boxed{t_f = \frac{v_0}{2\nu}}$

(۳) تغییرات غلظت محلول پس از پرشدن را بدست آورید؟

شیر دوم باز می‌شود که مخزن پر می‌شود

$$\frac{dv}{dt} = 2\nu - 2\nu = 0 \qquad \frac{d(cv)}{dt} = \underbrace{c_i \cancel{\nu}}_{\text{آب خالص}} - 2c\nu$$

$$v\frac{dc}{dt} + c\cancel{\frac{dv}{dt}} = -2c\nu$$

$$v_0 \frac{dc}{dt} = -2c\nu \qquad \ln c \Big]_{\underbrace{c_f}_{\text{غلظت در لحظه پرشدن}}}^{c} = \frac{2\nu t}{v_0}\Big]_{t_f}^{t}$$

غلظت در لحظه پرشدن

$$\frac{c_f}{c_0} = \left(\frac{v_0/2\nu}{t_f + v_0/2\nu}\right)^2 = 1/4 \qquad c_f = \frac{c_0}{4}$$

$$\ln \frac{c}{c_0/4} = \frac{-2\nu t}{v_0}\Bigg|_{v_0/2\nu}^{t} = 1 - \frac{2\nu}{v_0} t$$

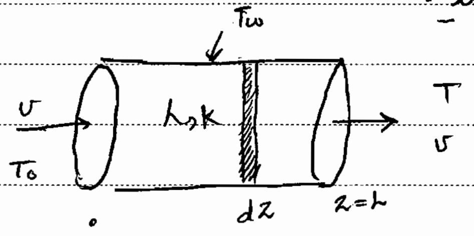
$$c = \frac{c_0}{4} \exp\left(1 - \frac{2\nu}{v_0} t\right)$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

جریانی از هوای سرد با عبور از یک میله‌ی استوانه‌ای داغ مطابق شکل گرم می‌شود. شعاع و طول لوله به ترتیب R و L است. دمای دیواره استوانه مقدار ثابت T است و ضریب انتقال حرارت لوله h است. ضریب هدایت حرارتی و ظرفیت گرمایی ویژه و چگالی هوا K و ρ و C_p است. هوا با سرعت ثابت u در لوله حرکت می‌کند. اگر دمای هوای ورودی T_0 باشد تغییرات دمای هوا در طول لوله در شرایط پایا را تعیین کنید.



خروجی − ورودی $= 0$

$$q_z A\big|_z - q_z A\big|_{z+dz} + (\rho v c_p T A)\big|_z - (\rho v c_p T A)\big|_{z+dz} - hs(T-T_w) = 0$$

$$A = \pi R^2$$

$$S = 2\pi R dz$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}(q_z A)dz - \frac{\partial}{\partial z}(\rho u c_p T A)dz - hs(T-T_w) = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(-K\frac{\partial T}{\partial z}\pi R^2\right)dz - \frac{\partial}{\partial z}(\rho u c_p T \pi R^2)dz - h2\pi R dz(T-T_w) = 0$$

$$K\frac{d^2T}{dz^2} - \rho u c_p \frac{\partial T}{dz} - \frac{2h}{R}(T-T_w) = 0 \qquad \alpha = \frac{K}{\rho c_p}$$

$$\alpha\frac{d^2T}{dz^2} - u\frac{dT}{dz} - \frac{2h}{\rho c_p R}(T-T_w) = 0$$

$$\begin{cases} z=0 & T = T_0 \\ z=L & \frac{dT}{dz} = 0 \end{cases} \qquad T - T_w = \theta$$

$$\underbrace{\frac{\alpha}{v}}_{A}\frac{d^2\theta}{dz^2} - \frac{d\theta}{dz} - \underbrace{\frac{2h}{\rho u c_p R}}_{B} = 0$$

$$An^2 - n - B = 0 \qquad r_1, r_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4AB}}{2A}$$

$$\theta = E\exp(r_1 z) + F\exp(r_2 z)$$

$$BC\begin{cases} z=0 & \theta = E+F \\ z=L & 0 = E r_1 \exp(r_1 L) + F r_2 \exp(r_2 L) \end{cases}$$

PAPCO

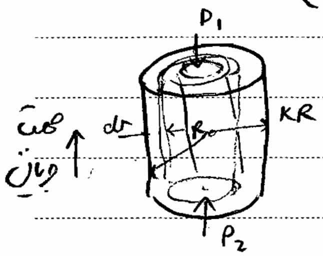
7) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 64y = 16\cos 8x \qquad y(0) = y'(0) = 0$ (Hw

$y = y_H + y_p$

$y_H = A\cos 8x + B\sin 8x \qquad y_p = x(A'\sin 8x + B'\cos 8x)$

$r^2 + 64 = 0 \qquad r = \pm 8$

جابجایی سیال میان دو استوانه با شعاع r, KR جریان با سیال به سمت بالا و رو به توزیع



$A = 2\pi r l$

$A' = \pi r^2 \qquad dA' = 2\pi r dr$

$\Sigma F = M_{in} - M_{out}$

$\Sigma F = P_1 A' - P_2 A' +$

$(P_1 - P_2)\, 2\pi r\, dr = \partial/\partial r\,(2\pi \tau r l)\, dr + g\rho\, 2\pi r l\, dr$

$\left(\dfrac{P_1 - P_2}{l} + \rho g\right) r = \partial/\partial r\,(\tau r)$

$\cancel{(P_1 - P_2) r + \rho d r = \frac{\partial}{\partial r}(l \tau r)}$

$\displaystyle\int \left(\frac{P_1 - P_2}{l} + \rho g\right) r\, dr = \int d(\tau r)$.

$\left(\dfrac{P_1 - P_2}{l} + \rho g\right) r = c_1/r$

$r = \lambda R \qquad \tau = 0$

$\dfrac{(P_1 - P_2)}{2l}\lambda R + \dfrac{\rho g}{2}\lambda R + \dfrac{c}{\lambda R} = 0$

$\boxed{c = \dfrac{P_2 - P_1}{2l}\lambda^2 R^2 - \dfrac{\rho g}{2}\lambda^2 R^2} \Rightarrow \dfrac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{2l}\lambda^2 R^2 = c$

$P + \rho g z = \mathcal{P}$

$P_2 + \rho g_0 = \mathcal{P}_2$

$P_1 + \rho g l = \mathcal{P}_1$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\tau_{rz} = \frac{P_2 - P_1}{2l}\left[(r/R) - \lambda^2 (R/r)\right]$$

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{P_2 - P_1}{2l}\left[\left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2\left(\frac{R}{r}\right)\right]$$

$$u = \int_{r=2R}^{r=R} \frac{(P_1 - P_2)R}{2\mu L}\left[\left(\frac{r}{R}\right) + \lambda^2 (R/r)\right] dr$$

$$u = \left(\frac{P_1 - P_2}{2\mu}\right) R \left[\frac{r^2}{R} + \lambda^2 R \, 2\ln r\right] + C_2$$

$$\begin{cases} r = R & 0 = \left(\frac{P_1 - P_2}{4\mu L}\right) R \left[1 + 2\lambda^2 R \ln R\right] + C_2 \\ r = KR & 0 = \left(\frac{P_1 - P_2}{4\mu L}\right) R \left[K^2 + 2\lambda^2 R \ln KR\right] + C_2 = 0 \end{cases}$$

$$u = \left(\frac{P_1 - P_2}{4\mu L}\right) R^2 \left[(r/R)^2 + 2\lambda^2 \ln r/R + C_2\right]$$

ش.م: $r = KR \Rightarrow u = 0$

$r = R \Rightarrow u = 0$

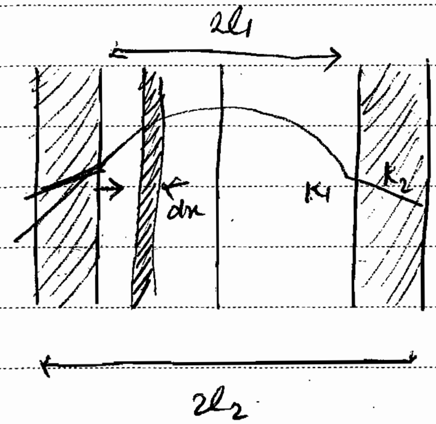
$$\begin{cases} K^2 - 2\lambda^2 \ln K + C_2 = 0 \\ 1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -1 \end{cases}$$

$$2\lambda^2 = \frac{1 - K^2}{\ln(1/K)} \qquad u_2 = \frac{P_1 - P_2}{4\mu L} R^2 \left[1 - (r/R)^2 - \frac{1 - K^2}{\ln(1/K)} \ln\left(\frac{R}{r}\right)\right]$$

$r = \lambda R \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow v = v_{max}$

$$v_{max} = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{4\mu L}\left(1 - \lambda^2 (1 - \ln \lambda^2)\right)$$

وقتی یک راکتور اتمی از صفحاتی که به ضخامت $2l_1$ تشکیل شده است برای صفحه پوششی به ضخامت $l_2 - l_1$ قرار داده شده است. برای سوخت انرژی یکنواخت u''' تولید می‌شود و ضریب هدایت K_1، K_2 و سیال بیرون T_∞ و h_∞ توزیع دما کجاست:



سوخت: $q_x A|_x - q_x A|_{x+dx} + u''' dV = 0$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(q_x A)dx + u''' dx = 0$$

$$K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u''' = 0$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = -\frac{u'''}{K}x + C \qquad \boxed{T_1 = -\frac{u'''}{2K}x^2 + C_1 x + C_2}$$

$$q_x A|_x - q_x A|_{x+dx} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = 0 \qquad \boxed{T_2 = C_1' x + C_2'}$$

$$BC\begin{cases} -K\,\partial T_2/\partial x = h(T - T_\infty) & x = l_2 \\ T_1 = T_2 & x = l_1 \end{cases}$$

$$B.C\begin{cases} x = l_1 & -K\,\partial T_1/\partial x = -K_2\,\partial T_2/\partial x \\ x = 0 & \Rightarrow \partial T_1/\partial x = 0 \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

1 $\left.\frac{dT_1}{\partial x_1}\right|_{L_1} = \frac{u''}{K} L + C_1$ $\left.\frac{\partial T_2}{\partial x}\right|_{L_1} = C_1'$

2 $-K_1\left(\frac{u'' L}{k} + C_1\right) = K_2 C_1'$

3 $-K_2(C_1') = \cancel{h(T_2 - T_\infty)} = h(C_1 L_2 + C_2 - T_\infty)$

4 $\frac{u''}{2K_1} L_1^2 + C_1 L + C_2 = C_1' L + C_2'$

۴ معادله

۴ مجهول پس قابل حل

$$\frac{T_1 - T_\infty}{u'' L_1^2 / 2K_1} = 1 - \frac{2K_1}{K_2} - (x/L_1)^2 + \frac{2K_1}{L_1 h_\infty} + \frac{2K_1 L_2}{K_2 L_1}$$

$$\frac{T_2 - T_\infty}{u'' L_1^2 / K_2} = (1 - x/L_1) + \frac{K_2}{L_1 h_\infty} + L_2/L_1$$

$y(0.5) = ?$ معادله زیر را با روش Rung Kutta مرتبه ۴ حل کنید

$dy/dx = \underbrace{-2x - y}_{f(x,y)}$ $y(0) = -1$ $h = 0.1$

R.K4: $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

$K_1 = hf(x_i, y_i) = 0.1\, f(0, -1) = 0.1$

$K_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k}{2}) = 0.1\, f(0.05, -0.95)$ $K_2 = 0.0850$

$K_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$

$K_3 = 0.1\, f(0.5, -1 + \frac{0.085}{2}) = 0.0858$

$K_4 = hf(x_i + h, y_i + K_3) = 0.1\, f(0.1, -1 + 0.0858) = 0.0714$

$y(0.1) = \underbrace{y(0)}_{-1} + \frac{1}{6}(0.1 + 2 \times 0.085 + 0.0714)$

Subject:

Year.　Month.　Date.　( )

$y(0.1) = -0.9145$

x_i	y_i	K_1	K_2	K_3	K_4
0	-1	0.1	0.085	0.0852	0.0714
0.1	-0.9145	0.0715	0.0519	0.0586	0.0456
0.2	-0.8562	0.0456	0.0333	0.034	0.022
0.3	-0.8225	0.0222	0.0111	0.0117	0.0011
0.4	-0.8110	0.0011	-0.0090	-0.0085	-0.0181
0.5	-0.81959				

$y = -3e^{-x} - 2x + 2$

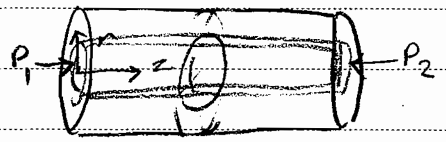
$y = -0.81959$

$$\begin{cases} \dfrac{dC_A}{dt} = -20\, C_A C_c + 2C_B \\[2ex] \dfrac{dC_B}{dt} = 20\, C_A C_c - 2C_B \end{cases}$$

در تمرین ۱ را اصلاح شده حل کنید

$dC_c/dt = -20\, C_A C_c - 20\, C_c$

$$t = 0 \quad \begin{cases} C_A = 500 \\ C_B = 0 \\ C_c = 500 \end{cases} \qquad h = 10^{-5}$$



$\rho u u\big|_{z=0} - \rho u u\big|_{dz}$

$$(P_1 - P_2)\, 2\pi r\, dr - \frac{\partial}{\partial r}(\tau A)\, dr = 0 \qquad 2\pi r L$$

$$\frac{(P_1 - P_2) r}{L} - \partial/_{\partial r}(\tau r) = 0 \qquad \tau r = \frac{(P_1 - P_2)}{L}\frac{r^2}{2} + C_1$$

$$\tau = \frac{(P_1 - P_2)}{L}\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \qquad \tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{(P_1 - P_2) r}{-\mu \quad 2} \qquad A \qquad \int du = \int A r$$

$$u = \frac{A r^2}{2} + C_2 \quad \text{at} \quad \begin{matrix} R = R \\ u = 0 \end{matrix} \quad C_2 = -\frac{A R^2}{2} \quad u = \frac{A}{2}(r^2 - R^2)$$

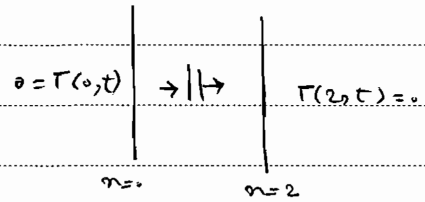
$$u = \frac{(P_1 - P_2)}{-2\mu \times 2}(r^2 - R^2) =$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

۲۳۸/ تاریخ : ۲۰/۱۰/۸۸

(۱ Δt را طوری پیدا کنیم



$\Delta x = 0.25$

$K = 0.13$

$C = 0.11$

$\rho = 7.8 \ g/cm^3$

شرط مرزی دیریکله است

شرط اولیه $T(x) = 100x \ ; \ 0 < x < 1$

$T(x) = 200 - 100x$

$1 < x < 2$

explicit

$$\underset{\text{central}}{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} = \frac{1}{\alpha} \underset{\text{Forward}}{\frac{\partial T}{\partial t}} \qquad \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} = r$$

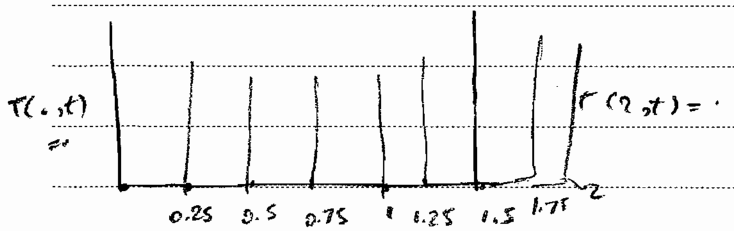
$$\alpha \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t}$$

$$T_{i,j+1} = r(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) + \underbrace{(1-2r)}_{=0} T_{i,j}$$

برای پایدار بودن

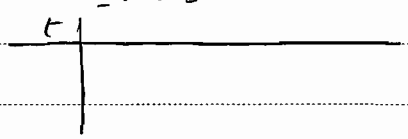
جواب

$$r = 1/2 \Rightarrow 1/2 = \frac{K \Delta t}{\rho C (\Delta x)^2} \qquad \Delta t = 0.206$$



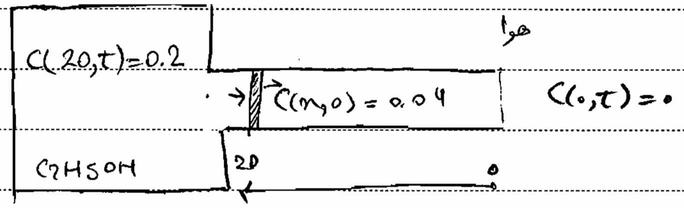
0 25 50 75 100 75 50 25 0

شرط اولیه برای همه نقاط یکسان نبود
هر نقطه را به طور جدا پیدا کنید.



۲) مخزنی حاوی مخلوط مایع آب و اتانول است غلظت اتانول $0.2\ \frac{g}{cm^3}$ است. لوله موئین به طول 20cm مخزن را به هوای اطراف متصل می‌سازد. غلظت اتانول در لحظه صفر درون لوله 0.04 است.

در لحظه t=0 شیر مخزن باز شده و هوای اطراف نفوذ کند توزیع غلظت در 33.67s در لوله موئین را با روشهای explicit, implicit, crank nicolson و defurt محاسبه کنید



لوله موئین → فقط نفوذ در راستای ماکزیمم

ورود − خروج = تجمع

$$N_A A\big|_{x} - N_A A\big|_{x+dx} = \frac{d(CV)}{dt} \qquad N_A = J_A = -D\frac{\partial C}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial N_A}{\partial x} A\,dx = \underbrace{V}_{A\,dx}\frac{dC}{dt} \qquad D\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

$$BC\begin{cases} x=0 & C(0,t)=0 \\ x=20 & C(20,t)=0 \end{cases}$$

$IC \Rightarrow t=0 \Rightarrow C(x,0)=0.04$

explicit:

$\Delta x = 4\,cm$

$$D\,\frac{C_{i+1,j} - 2C_{i,j} + C_{i-1,j}}{\Delta x^2} = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{\Delta t} \qquad \lambda = r = \frac{D\overset{33.67}{\Delta t}}{\underset{4}{\Delta x^2}} = 0.25$$

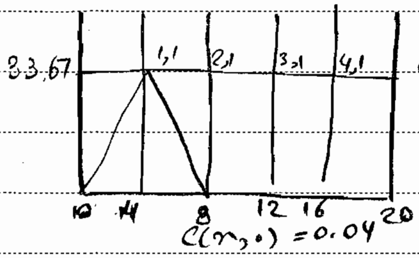
PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$C_{i,j+1} = r(C_{i+1,j} + C_{i-1,j}) + (1-2r)C_{i,j}$$

$$C_{i,j} = 0.25(C_{i+1,j} + C_{i-1,j}) + 0.5\,C_{i,j}$$



$C(20,0) = 0.2$

$C_{1,1} = 0.03$

$C_{2,1} = 0.04$

$C_{3,1} = 0.04$

$C_{4,1} = 0.08$

Implicit:

$$D\,\frac{C_{i+1,j+1} - 2C_{i,j+1} + C_{i-1,j+1}}{\Delta x^2} = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{\Delta t}$$

$$-r\,C_{i+1,j+1} + (1+2r)\,C_{i,j+1} - r\,C_{i-1,j+1} = C_{i,j}$$

$$-0.25C_{2,1} + 1.5C_{1,1} - 0.25\,\cancel{C_{0,1}} = C_{1,0} = 0.04$$

$$-0.25C_{3,1} + 1.5C_{2,1} - 0.25\,C_{1,1} = C_{2,0} = 0.04$$

$$-0.25C_{41} + 1.5C_{31} - 0.25\,C_{21} = C_{3,0} = 0.04$$

$$-0.25\,C_{51} + 1.5C_{4,1} - 0.25\,C_{3,1} = C_{4}.$$

$$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 1.5 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \\ C_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.04 \\ 0.04 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

$C_{11} = 0.033272$

$C_{21} = 0.03963$

$C_{31} = 0.044508$

$C_{41} = 0.067418$

A

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Crank - Niclson:

$$2\frac{C_{i+1,j}-C_{i,j}}{\Delta t} = D\left[\frac{C_{i+1,j+1}-2C_{i,j+1}+C_{i-1,j+1}}{\Delta x^2}+\frac{C_{i+1,j}-2C_{i,j}+C_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right]$$

$$\frac{r}{2}C_{i+1,j}+(1-r)C_{i,j}+r/_2\,C_{i-1,j}=\frac{r}{2}C_{i+1,j+1}+(r+1)C_{i,j+1}$$

$$-r/_2\,C_{i-1,j+1}$$

$$-0.125\,C_{2,1}+1.25\,C_{11}=0.035$$
$$-0.125\,C_{3,1}+1.25\,C_{2,1}-0.125\,C_{1,1}=0.04$$
$$-0.125\,C_{4,1}+1.25\,C_{3,1}-0.125\,C_{2,1}=0.04$$

$$1.25\,C_{4,1}-0.125\,C_{3,1}=0.084$$

$$\begin{bmatrix}1.25 & -0.125 & 0 & 0\\ -0.125 & 1.25 & -0.125 & \cdot \\ 0 & -0.125 & 1.25 & -0.125\\ 0 & 0 & -0.125 & 1.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{1,1}\\ C_{21}\\ C_{31}\\ C_{41}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.035\\ 0.04\\ 0.04\\ 0.065\end{bmatrix}$$

$C_{11} = 0.031951$

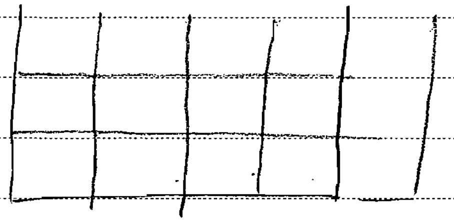
$C_{31} = 0.03951$

$C_{3,1} = 0.043183$

$C_{41} = 0.07231$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



67.2

central ↑ central ↑

deturt ون → step $j,1$ → explicit ون $\quad D\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \dfrac{\partial c}{\partial t}$

$$\frac{C_{i,j+1} - C_{i,j-1}}{2\Delta t} = D\,\frac{C_{i+1,j} - C_{i,j+1} - C_{i,j-1} + C_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$c_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} + C_{i,j-1}}{2}$$

$$C_{i,j+1} = \frac{2r}{1+2r} C_{i+1,j} + \frac{2r}{1+2r} C_{i-1,j} + \frac{1-2r}{1+2r} C_{i,j-1}$$

$$C_{i,j+1} = 1/3\, C_{i+1,j} + 1/3\, C_{i-1,j} + 1/3\, C_{i,j-1}$$

$$C_{1,2} = \frac{1}{3} \underbrace{C_{2,1}}_{0.03463} + 1/3\, C_{0,1} + 1/3\, C_{1,0}$$ 0.04 شرایط

$$C_{2,2} = 1/3 \underbrace{C_{3,1}}_{0.044508} + 1/3 \underbrace{C_{1,1}}_{0.03327} + 1/3 \underbrace{C_{2,0}}_{0.04}$$

$$C_{3,2} = 1/3\, C + 1/3\, C_{2,1} + 1/3\, C_{3,0}$$

$$C_{4,2} = 1/3\, C_{5,1} + 1/3\, C_{3,1} + 1/3\, C_{4,0}$$

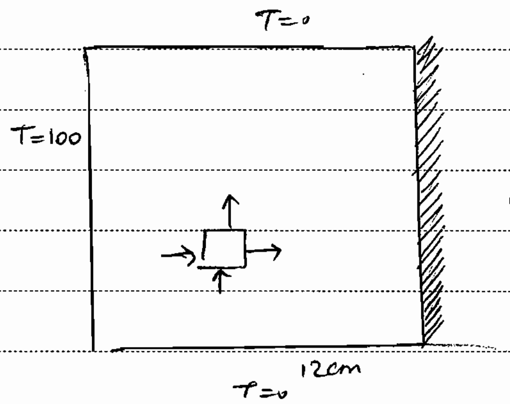
$$\begin{cases} C_{1,2} = 0.02654 \\ C_{2,2} = 0.03533 \\ C_{3,2} = 0.04411 \\ C_{4,2} = 0.085 \end{cases}$$

جواب تمرین :

$$C(x,t) = \frac{x}{2} + \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-0.01175 n^2 t) \sin \frac{n\pi x}{10}$$

$$- \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-0.00244 (2n-1)^2 t \sin \pi \frac{(2n-1)x}{20})$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 4\,cm = 0.04\,m \\ t = 33.67 \end{array}\right\} \Rightarrow C_{1,1} = 0.052$$



توزیع دما در سطح این صفحه بدست بیاورید

$\Delta x = \Delta y = 4\,cm$

عایق

SS :

$$q_x A|_x - q_x A|_{x+dx} + q A|_y - q A|_{y+dy} = 0$$

$$-\frac{\partial q A|_x}{\partial x}dx - \frac{\partial q A|_y}{\partial y}dy \qquad A_x = 1 \times dy$$

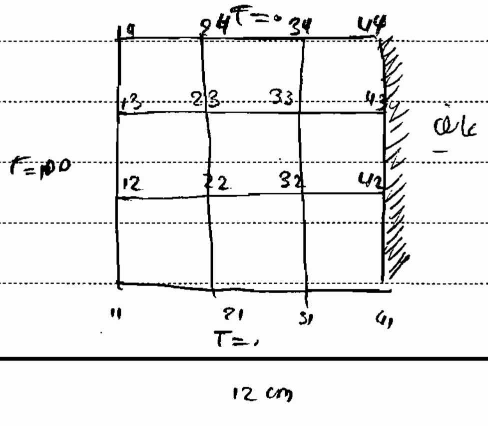
$$A_y = 1 \times dx$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{بیضوی}$$

$\Delta x = \Delta y = 4\,cm$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{هذلولوی}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{سهموی}$$



PAPCO

central تف : $\dfrac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta x^2} + \dfrac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$

$\Delta x = \Delta y$

$T_{i,j} = 1/4\left(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}\right)$

$T_{2,3} = 1/4\left[T_{33} + \cancel{T_{13}}^{100} + \cancel{T_{24}}^{0} + T_{22}\right]$

$T_{3,3} = \frac{1}{4}\left[T_{2,3} + T_{3,2} + \cancel{T_{3,4}}^{0} + T_{4,3}\right]$

$T_{2,2} = \frac{1}{۴}\left[\cancel{T_{2,1}}^{0} + T_{2,3} + \cancel{T_{1,2}}^{100} + T_{3,2}\right]$

$T_{3,2} = \frac{1}{4}\left[T_{۴,۲} + T_{۲,۲} + \cancel{T_{۳,۱}}_{0} + T_{۳,۳}\right]$

Back $\hookrightarrow \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 \Rightarrow \dfrac{T_{۴,۳} - T_{۳,۳}}{\Delta x} = 0 \Rightarrow T_{۴,۳} = T_{۳,۳}$

$T_{۴,۲} = T_{۳,۲}$ و

الان ۴ معادله داریم و ۴ مجهول :

$$\begin{bmatrix} 1 & -۰٫۲۵ & -۰٫۲۵ & ۰ \\ -۰٫۲۵ & ۰٫۷۵ & ۰ & -۰٫۲۵ \\ -۰٫۲۵ & ۰ & 1 & -۰٫۲۵ \\ ۰ & -۰٫۲۵ & -۰٫۲۵ & ۰٫۷۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{۲,۳} \\ T_{۳,۳} \\ T_{۲,۲} \\ T_{۳,۲} \end{bmatrix} \Big[\quad \Big]$$

$T_{۲,۳} = ۴۰$,

Subject :

Year . Month . Date . ( )

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

TA۶ دور ۳.۱۰.۲۸

۱) از روش نیوتن حل شود

$f(x) = 3x + \sin x - e^{x}$

$f'(x) = 3 + \cos x - e^{x}$

$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0, 1, \ldots$

$x_0 = 0 \qquad x_1 = 0 - \dfrac{-1}{3} = 0.333$

$x_2 = \qquad x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.333 - \dfrac{-0.0684}{2.54434} = 0.36017$

$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.36017 - \dfrac{-6.279 \times 10^{-4}}{2.50226} = 0.36042$

$\Rightarrow x_2 = x_3$ جواب $= 0.36$

۲) از سه روش نقاط منفرد ① ۲ لاگرانژ ③ divided difference

تابع درجه ۳ را پیدا کنید

مقدار تابع در $x = 3$ را بیابید

	x	$f(x)$	
x_0	3.2	22	f_0
x_1	2.7	17.8	f_1
x_2	1	14.2	f_2
x_3	4.8	38.3	f_3
	5.6	51.7	

درجه ۳ $\quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

PAPCO

251

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x = 3.2 \quad a(3.2)^3 + b(3.2)^2 + c(3.2) + d = 22$

$x = 2.7 \quad a(2.7)^3 + b(2.7)^2 + c(2.7) + d = 17.8$

$x = 1 \quad a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = 14.2$

$a(4.8)^3 + b(4.8)^2 + c(4.8) + d = 38.3$

$$f(x) = -0.5275x^3 + 6.4952x^2 - 16.1177x + 24.3849$$

$$\boxed{f(3) = 20.2}$$

$$\begin{cases} a = 0.5275 \\ b = 6.4952 \\ c = -16.1177 \\ d = 24.3399 \end{cases}$$

روش لاگرانژ:

$$f_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3$$

مقادیر حاصل را جایگزین می‌شود،

$x = 3$

$$f_3(3) = \frac{(3-2.7)(3-1)(3.48)}{(3.2-2.7)(3.2-1)(3.2-4.8)} \times 22.0 + \dots = 20.21$$

برای کوتاه شدن کار جاها را ننوشتیم ادامه بدهیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

divided diff:

x_i	f_i	$F[x_i\ x_{i+1}]$	$F[x_i \cdots x_{i+2}]$	$F[x_i \cdots x_{i+3}]$	$F[x_i, \cdots x_{i+4}]$
3.2	22	8.4	2.856	-0.528	0.256
2.7	17.8	2.118	2.012	0.0865	
1	14.2	6.342	2.263		
4.8	38.3	16.750			
5.6	51.7				

$$F[x_0\ x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{17.8 - 22}{2.7 - 3.2} = 8.4$$

$$F[x_1\ x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = 2.118$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{F[x_1, x_2] - F[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$F[x_1, x_2, \ldots x_n] = \frac{F[x_1, x_2 \cdots, x_n] - F[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

$$F[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{F(x_1, x_2, x_3) - F(x_0, x_1, x_2)}{x_4 - x_0} =$$

$$\frac{0.0865 - (-0.528)}{5.6 - 3.2} = 0.256$$

$$f_3(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)(x - x_1)a_2 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)a_3$$

اعشاری →
$$f_3(x) = 22.0 + 8.4(x - 3.2) + 2.856(x - 3.2)(x - 2.7) - 0.528(x - 3.2)(x - 2.7)(x - 1)$$

$$f_3(3) = 21.1$$

PAPCO

27

Subject:

Year. Month. Date. ( )

۳) روش جدول ایتکن Diffrence table Method

فاصله‌ها برابر

x	y	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
0.5	1.181				
		Δf_0 0.125			
0.8	1.306		$\Delta^2 f_0$ 0.012		
		Δf_1 0.137		$\Delta^3 f_0$ -0.197	
1.1	1.443		$\Delta^2 f_1$ -0.185		$\Delta^4 f_0$ 0.797
		Δf_2 -0.048		$\Delta^3 f_1$ 0.6	
1.4	1.392		$\Delta^2 f_3$ 0.415		
		Δf_3 0.367			
1.7	1.762				

$\Delta f_0 = f_1 - f_0$ $\qquad \Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$

$\Delta f_0 = f_1 - f_0$ $\qquad \Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$

$\Delta^4 f_0 = \Delta^3 f_1 - \Delta^3 f_0$

$$P_n(x) = f_0 + u\Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 f_0$$

$$u = \frac{x - x_0}{h}$$

$n = 4 \qquad h = 0.8 - 0.5 = 0.3$

$$u = \frac{x - 0.5}{0.3} = \frac{10}{3}x - \frac{5}{3}$$

$$P_4(x) = 1.181 + \left(\tfrac{10}{3}x - \tfrac{5}{3}\right) \times 0.125 + \frac{\left(\frac{10}{3}x - \frac{5}{3}\right)\left(\frac{10}{3}x - \frac{8}{3}\right)}{2} 0.012$$

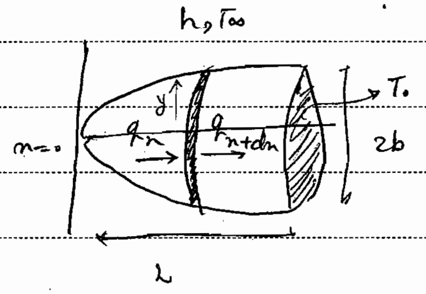
PAPCO

Year. Month. Day. Subject.

$$+\ \frac{\left(\frac{10}{3}x-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{10}{3}x-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{10}{3}x-\frac{11}{3}\right)}{3!}\times(0.197)\ +$$

$$\frac{\left(\frac{10}{3}x-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{10}{3}x-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{10}{3}x-\frac{11}{3}\right)\left(\frac{10}{3}x-\frac{14}{3}\right)}{4!}\times 0.747$$

پره سوزنی شکل در شکل نشان داده شده است. ضریب هدایت حرارتی k، ضخامت پایه $2b$، طول پره L، دما و ضریب انتقال حرارت T_∞ و h، توزیع دما در طول پره.



$y = cx^{1/2}$ معادله پره سهمی

c عدد ثابت

$$q_x A\Big|_x - q_x A\Big|_{x+dx} - hS(T-T_\infty)=0$$

$$A=\pi y^2 \qquad -\frac{\partial}{\partial x}\left(-K\frac{\partial T}{\partial x}\pi y^2\right)-h2\pi y(T-T_\infty)$$

$$S = 2\pi y\,dx$$

$$K\pi\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\frac{\partial T}{\partial x^2}\right)-h2y(T-T_\infty)=0$$

$$\theta=\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)-\frac{2h}{K}y\theta=0 \longrightarrow y=cx^{1/2}$$

New Classic

c ثابت : $\quad b=c(L)^{1/2} \qquad c=\frac{b}{\sqrt{L}} \longrightarrow y=\frac{b}{\sqrt{L}}x^{1/2}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)-m^2x^{1/2}\theta=0$$

فرم کلی معادله بسل

$$m^2=\frac{2h}{Kb}L^{1/2}\qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\alpha}\frac{dy}{dx}\right)+\delta^2x^2y=0}$$

$\alpha=1$

$\delta^2=-m^2$

$\beta=1/2$

$$\begin{cases}\beta-\alpha+2=0\\ \mu=\dfrac{2}{\beta-\alpha+2}=4/3\end{cases}$$

$$\nu=\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha+2}=0$$

چون معادله بسل مرتبه‌ی صفر

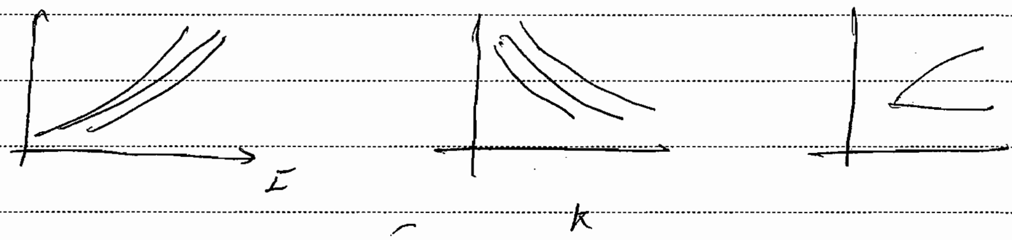
δ: موهومی است

$$\left\{\begin{array}{l}\delta\ \text{موهومی}\ \longrightarrow I, K\\ \qquad\Longrightarrow I_0, K_0\end{array}\right.$$

$\nu=0\qquad \theta(x)=C_1I_0\left(4/3\,m x^{3/4}\right)+C_2K_0\left(4/3\,m x^{3/4}\right)$

$x=0\quad T=$ محدود

$x=L\quad T=T_0$



$\Rightarrow C_2=0$ آخرش بی‌نهایت است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

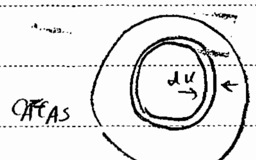
یک کاتالیست در محلول بر روی سطح آن واکنش درجه اول $A \to B$ انجام میشود

در سطح کاتالیست در جریان گاز اطراف دانه ها که غلظت ثابت C_{AS} میباشد ضریب

انتقال جرم بالا A از لایه گازی اطراف دانه ها بالاست مکانیزم سرعت واکنش بصورت $-r_A = K C_A$

بطوری که K ثابت سرعت واکنش درجه یک میباشد کاتالیست در میباشد D_{AB} ضریب نفوذ موثر توزیع غلظت A

داخل کاتالیست



$$(\text{نرخ مولی ورودی } A - \text{نرخ مولی خروجی } A)_{\text{بدلیل نفوذ}} - \text{نرخ مصرف } A = 0$$

$$N_{Ar}A\Big|_r - N_{Ar}A\Big|_{r+dr} - \overset{max}{K C_A} V = 0$$

$$-r_A = K C_A$$

$$A = 4\pi r^2 \qquad V = 4\pi r^2 dr$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}(N_{Ar}A)\,dr - K C_A V = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(-D_e \frac{\partial C_A}{\partial r} 4\pi r^2\right)dr - K C_A 4\pi r^2\, dr = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial C_A}{\partial r}\right) - \frac{K}{D_e} C_A = 0 \qquad \text{راه حل با استفاده} \quad f(r) = r C_B$$

$$f(r) = r C_A$$

$$\frac{d^2 C_A}{dr^2} + \frac{2r}{r^2}\frac{dC_A}{dr} - \frac{K}{D_e} C_A = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial r} = r\frac{\partial C}{\partial r} + C_A$$

$$r\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial C_A}{\partial r}$$

$$\underbrace{r\frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + \frac{2\partial C_A}{\partial r}}_{\frac{d^2 f(r)}{dr^2}} - K/D_e \underbrace{C_A r}_{f(r)} = 0$$

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} = r\frac{d^2 C_A}{dr^2} + 2\frac{dC_A}{dr}$$

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{K}{D_e} f(r) = 0 \qquad r^2 - \frac{K}{D_e} = 0 \qquad r_{1,2} = \pm\sqrt{K/D_e}$$

$$f(r) = C_1 e^{\sqrt{K/D_e}\, r} + C_2 e^{-\sqrt{K/D_e}\, r}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$B.C\begin{cases} r=R & C_A = C_{AS} \Rightarrow F(R) = RC_{AS} \\ r=0 & \dfrac{\partial C_A}{\partial r}=0 \quad C_A = \text{محدود} \quad f(0) = 0 \times \text{محدود} = 0 \end{cases}$$

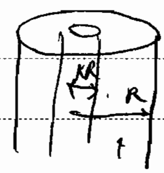
$$\begin{cases} c_1 e^{\sqrt{K/D_e}R} + c_2 e^{-\sqrt{K/D_e}R} = RC_{AS} \\ c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 \end{cases}$$

$$c_1 e^{\sqrt{K/D_e}} - c_1 e^{-\sqrt{K/D_e}R} = RC_{AS}$$

$$c_1 = \frac{RC_{AS}}{e^{\sqrt{K/D_e}R} - e^{-\sqrt{K/D_e}R}} \qquad f(r) = \frac{RC_{AS}}{e^{\sqrt{K/D_e}R} - e^{-\sqrt{K/D_e}R}}\left(e^{\sqrt{K/D_e}r} - e^{-\sqrt{K/D_e}r}\right)$$

$$\frac{C_A}{C_{AS}} = \frac{R}{r}\,\frac{\sinh(\sqrt{K/D_e}\,r)}{\sinh(\sqrt{K/D_e}\,R)}$$

جریان سیال میان دو استوانه با شعاع r و k جریان دارد و سیال به سمت بالا می‌رود توزیع سرعت سیال را
بدست آورید



Subject:

Year. Month. Date. ( )

جلسه ۹۰٫۳٫۹

Implicit Method:

روش ضمنی برای حل معادلات سهموی

$$\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ijn}}_{For} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ijn+1}}_{Cent}$$

$$\frac{u_{ijn+1} - u_{ijn}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1\,j\,n+1} - 2u_{i,j\,n+1} + u_{i-1\,j\,n+1}}{\Delta x^2}$$

$$+ \frac{u_{i,j+1,n+1} - 2u_{i,j,n+1} + u_{i,j-1,n+1}}{\Delta y^2} + [E(\Delta t)]$$

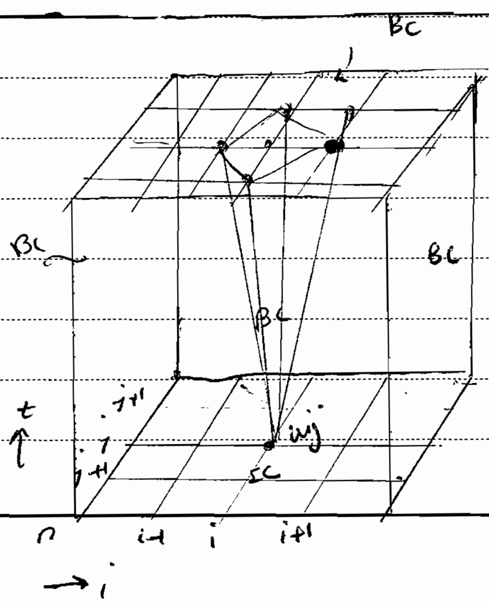
$$+ E(\Delta x^2)] + [E\Delta y^2$$

$\Delta x = \Delta y$

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\lambda u_{i+1,j,n+1} - \lambda u_{i-1,j,n+1} - \lambda u_{i,j+1,n+1} - \lambda u_{i,j-1,n+1} + (1+4\lambda) u_{ijn+1} = u_{ijn}}$$

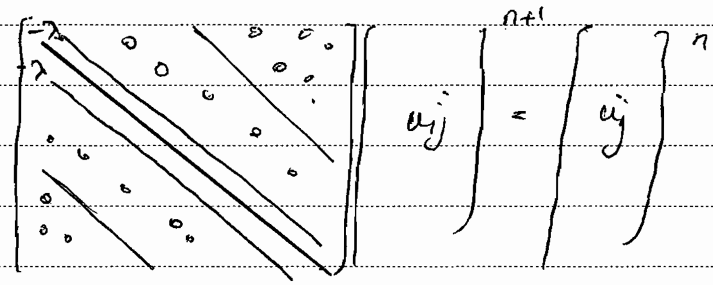
(۵ نقطه مجهول در یک معادله)



Subject:
Year.　Month.　Date.　(　)

Line-by-line solu

یک ماتریس ۳ قطری خواهیم داشت :



صفحه اول زمان حل می‌شود سپس سراغ بعدی می‌رویم

Positive Rule :

$A = 1 \qquad B = C = D = \cdots \Rightarrow$ همواره stable

von-neuman : $u_{ijn} = \gamma^n e^{j p_1 \Delta x} e^{j q \Delta y}$

این راه‌حل شبیه fully implicit می‌شود با این تفاوت که دوتا sin ظاهر می‌شود.

Consistency :

$u_{ijn} = u(x, y, t)$

$u_{i+1, j, n+1} = u(x + \Delta x, y, t + \Delta t)$

$= u(x, y, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \cdots$

PAPCO

4) Compute $y_{i+1,c}$ by Eq 2

5) check $|y_{i+1,c} - y_{i+1,p}| \le Tol \xrightarrow{yes}$ $i+2$ عامل

No ↘ 7

6) if yes convergency solution → compute next point $i+2$

[illegible] step دوم از ابتدا تکرار شود.

Repeat step 2 till convergency solution

7) if No convergency solution $y_{i+1,p} = y_{i+1,c}$

$y_{i+1,c}$ را بعنوان $y_{i+1,p}$ تعویض کنیم

8.) Repeat step 3 till convergence solution

پروژه اول :

یک برنامه بنویسید برای روش Millens و یک مثال ساده

مقدار اولیه $y(0) = 0$ را با آن حل کنید ($dy/dx = x+y$)

برنامه بنویسید

if $Tol = 10^{-5}$ ⇒ خطا صفر باشد.

فرض کنیم

$dy/dx - y = x \qquad y = Ce^{x} + 1 - x$

$K_0 + K_1 x$

$K_1 - K_0 + x =$

۹/۱۰ [illegible]

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y_1 = 0.113$ $\quad y_4 = 0.376$ $\quad y_2 = -0.22$ $\quad y_3 =$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & \\ & a_3 & \ddots & c_3 \\ & & \ddots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

محور همه b ها و c ها و a ها یکی است جز اینکه در اول و آخر فرق کند

پس ۳ ورودی برای b داریم

a " " ۳

c " " "

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ & & & \end{bmatrix}$$

در ماتریس پیوسته همه درایه‌ها را باید داشته باشیم

مراحل حل روش توماس:

ما 6 step برای حل این مسئله داریم:

$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$ $\quad c = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

1) $q_1 = b_1$

2) $P_1 = d_1 / q_1$

3) $q_i = b_i - \dfrac{a_i \cdot c_{i-1}}{q_{i-1}}$ $\qquad i = 2, 3, \ldots, N$

4) $P_i = \dfrac{d_i - a_i P_{i-1}}{q_i}$ $\qquad i = 2, 3, \ldots$

5) $y_N = P_N$

در روش ما به جای یک ماتریس سه‌قطری ۳ بردار می‌سازیم

6) $y_i = P_i - \dfrac{c_i y_{i+1}}{q_i}$ $\qquad i = N-1, N-2, \ldots, 3, 2, 1$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} y_2 - 1.96y_1 = 0.0016 \\ y_3 - 1.96y_2 + y_1 = 0.04\times 0.16 \\ y_4 - 1.96y_3 + y_2 = 0.04\times 0.36 \\ -1.96y_4 + y_3 = 0.4 + 0.04\times 0.64 \end{cases} \Rightarrow y_1 \; y_2 \; y_3 \; y_4$$

یکی از مزیت های این روش استفاده از ماتریس برای حل آنهاست

ماتریس ضرایب

،، مجهولات

بردار های معلوم

$$\begin{bmatrix} -1.96 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1.96 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1.96 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0016 \\ 0.04\times 0.16 \\ 0.04\times 0.36 \\ 0.4 + 0.04\times 0.64 \end{bmatrix}$$

برای حل چنین ماتریسهایی روش های مختلفی وجود دارد.

1. Gauss
2. Gauss jordan

⋮

Thomas method → بهترین روش برای حل مسائل یک بعدی

سایر روشها پیچیده است. چون ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی

در روش توماس ما لازم نیست تمام درایه ها را در ماتریس تعریف کنیم فقط ۳ سطری که دور و [illegible]

۹۵٪ ماتریسهایی که در ریاضیات مهندسی بدست می آید ماتریس ۳ قطری است [illegible]

روش هم برای حل آنهاست.

دقت بسیار بالایی دارد

65

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$u_{i-1,j,n+1} = u(x-\Delta x, y, t+\Delta t) = u(x,y,t) - \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + \partial u/_{\partial t}\,\Delta t + \ldots$

$u_{i,j+1,n+1} = u(x, y+\Delta y, t+\Delta t) = u(x,y,t) + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{2!} + \partial u/_{\partial t}\,\Delta t \ldots$

$u_{i,j-1,n+1} = u(x, y-\Delta y, t+\Delta t) = u(x,y,t) - \frac{\partial u}{\partial y}\ldots$ صفر

$u_{i,j,n+1} = u(x,y,t+\Delta t) + \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \ldots$

محاسبات را انجام دهید ... $\rightarrow$ $\partial u/_{\partial t} = \partial^2 u/_{\partial x^2} + \partial^2 u/_{\partial y^2}$

اگر در مسئله‌ای که convergency را خواستند بررسی کنید باید stable / consistence باشد.

ADI Method:

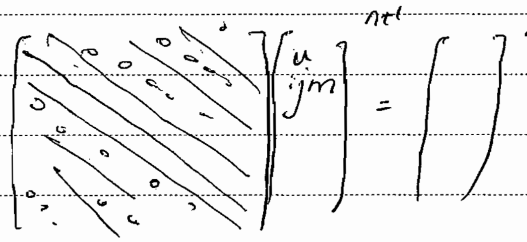
Alternative Direction Implicit Method

روش تغییر جهت implicit با حل معادلات implicit

وقتی معادله سه بعدی غیر پایا باشد ماتریس ۷ قطری خواهد بود

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$u(x, y, z, t)$ — i, j, m, n



Subject:

Year. Month. Date. ( )

اساس این روش بر این اساس است که

وقتی ماتریس یک قطری یا ۳ قطری در هر مرحله ساده‌تر است این ماتریس‌ها را به ماتریس ۳ قطری تبدیل می‌کنند

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

اگر n تا متغیر مکانی وجود داشته باشد در n مرحله انجام می‌شود

$$n \xrightarrow{\text{[illegible]}} n+1$$

$$n \longrightarrow n+1/2 \longrightarrow n+1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$n \longrightarrow n+1/3 \longrightarrow n+2/3 \longrightarrow n+3/3$$

در هر مرحله فقط یک متغیر مکانی را تغییر می‌دهیم بقیه ثابت

مرحله اول : t, x

$$n \longrightarrow n+1/2$$

$$n \xrightarrow{t,x} n+1/2 \xrightarrow{t,y} n+1$$

مرحله دوم : t, y

$$n+1/2 \longrightarrow n+1$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ijn} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ijn} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ijn}$$

در این جا : خود معادله را در زمان n ام می‌نویسیم یعنی برای ijn

بدست آوردن رابطه

این مجهول است

مرحله اول :
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij\,n+1/2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij\,n+1/2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij\,n}$$

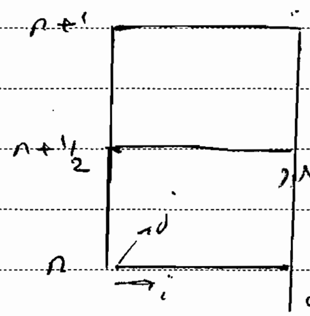
بدون تغییر

مرحله دوم
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{n+1} = \left(u_{xx}\right)_{n+1/2} + \left(u_{yy}\right)_{n+1}$$

مجهول — معلوم — مجهول

مرحله اول :

بجای اینکه یک ماتریس ۵ قطری داشته باشیم دو تا ماتریس سه قطری خواهیم داشت.



backward نوشته شده آن

$ij\,n+1/2$ مجهول است

حال همین را step دوم for $u_{ij\,n+1} - u_{ij\,n+1/2}$

این معلوم

$$\frac{u_{ij\,n+1/2} - u_{ij\,n}}{\Delta t/2} = \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right)_{n+1/2} + \left(\frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{\Delta y^2}\right)_{n} + |E(\Delta t)| + |E(\Delta x^2)| + |E(\Delta y^2)|$$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \qquad \Delta x = \Delta y$$

$$-\frac{\lambda}{2} u_{i+1,j,n+1/2} - \lambda/2\, u_{i-1,j,n+1/2} + (1+\lambda)\, u_{ij\,n+1/2} = \frac{\lambda}{2} u_{ij+1\,n} + \lambda/2\, u_{ij-1\,n} + (1-\lambda)\, u_{ij}^{n}$$

سه مجهول داریم . به روش ترکیبی imp , exp (همانند Crank-Nicolson) یک طرف imp یک طرف exp

یک ماتریس سه قطری داریم که با روش توماس به راحتی حل می‌شود

$$\begin{bmatrix} 1+\lambda & -\lambda/2 & & \\ -\lambda/2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ij} \end{bmatrix}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}^{n}$$

تعداد محاسبات زیاد شده

و دقت محاسبات بیشتر شده در عین

حال این روش positive conditionally

stable است . سه قطری محاسبات کم

شده ترکیبی سه قطری شده‌اند.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

positive Rule $\lambda >$, $1-\lambda >$, $\lambda <$, $\boxed{0<\lambda<1}$

این روش همواره consistence است

$$u_{i-1,j,n+1/2} = u(x-\Delta x, y, t+\Delta t/2) =$$

$$u(x,y,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\Delta t/2}{1!}\right)$$

مرحله دوم :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij\,n+1} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij\,n+1/2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij\,n+1}$$

$$\frac{u_{ij\,n+1} - u_{ij\,n+1/2}}{\Delta t/2} = \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right)_{n+1/2} + \left(\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{j-1}}{\Delta y^2}\right)_{n+1}$$

$$-\lambda u_{i,j+1,n+1} - \lambda u_{i,j-1,n+1} + (1+\lambda)u_{ij\,n+1} = \frac{\lambda}{2}u_{i+1,j,n+1/2} + \frac{\lambda}{2}u_{i-1,j,n+1/2} + (1-\lambda)u_{ij,n+1/2}$$

$$\begin{bmatrix} 1+\lambda & -\lambda/2 & & \\ -\lambda/2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ u_j \\ \\ \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} \\ u_j \\ \\ \end{bmatrix}^{n+1/2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه ۹۰/۳/۱۰

Point successive over Relaxation Method
or PSOR Method

حالت بعدی معادله به یک ماتریس ۵ قطری یا ۷ قطری بشه در ۲ و ۳ بعد ماتریس ۳ قطری شده آنها را الف تا

حل کردیم : افرادی ماتریس را از شکل ماتریس خارج کردند و به فرم ادی ضمنی تبدیل کردند و به جای ماتریس یک معادله

خواهیم داشت و به روش ادی ضمنی حل خواهد شد

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j,n} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j,n+1}$$

For Cent

$$\frac{u_{i,j,n+1} - u_{i,j,n}}{\Delta t} = \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}\right)_{j,n+1} + \left(\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta y^2}\right)_{i,n+1}$$

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$-\lambda u_{i+1,j,n+1} - \lambda u_{i-1,j,n+1} - \lambda u_{i,j+1,n+1} - \lambda u_{i,j-1,n+1}$$
$$+ (1+4\lambda) u_{i,j,n+1} = u_{i,j,n}$$

$$\left[\quad\right]\left[\quad\right] = ?$$

$$u_{i,j,n+1}^{k+1} = \frac{\lambda}{1+4\lambda}\left[u_{i+1,j,n+1}^{?} + u_{i-1,j,n+1}^{?} + u_{i,j+1,n+1}^{?} + u_{i,j-1,n+1}^{?}\right] + \frac{1}{1+4\lambda} u_{i,j,n}$$

روش ضمنی حل می‌شود

باید ادامه بدهیم تا جواب همگرا iteration را ادامه بدیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Relaxation Eq:

$$u_{ij\,n+1}^{K+1} = u_{ij\,n+1}^{K} + \omega \left(u_{i,j\,n+1} - u_{ij\,n+1}^{K} \right) \quad \text{II}$$

به طوری که شاید تعداد iteration ها از ۱۰ تا ۵۰ طول بکشد :

1) Assume some value for $u_{ij\,n+1}^{K}$ in Equ I

2) Compute $u_{ij\,n+1}^{K+1}$ by Eq I

3) Compare $u_{ij\,n+1}^{K+1}$ by Eq II

K+1 را در Eq II

4) check $\left| u_{ij\,n+1}^{K+1} - u_{ij\,n+1}^{K} \right| \le TOL$

اگر به جواب نرسید K+1 را در Eq I می‌بریم

5) if No $u_{ij\,n+1}^{K} = u_{ij\,n+1}^{K+1}$: till Convergence solution

برای درس اولیه $IC = 10$ داریم

$Final = 100$ تقریبا به پایداری می‌رسیم

$t \to \infty$

و t ها پایان را نمی‌دانیم

یک روش دیگر هم هست ... line successive که دو ردیف همزمان را با هم کار بر می‌دارد.

در مورد پایداری اینها ... point exits ... نظر خاص در مورد پایداری نمی‌توان داد ولی به طور کلی
در relaxation در مورد Consistency کاملاً می‌توان نظر داد.

Method of line آزمون پیش :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$PDE \xrightarrow[\text{Diff}]{\text{finite}} O.D.E$$

$u(x, y, t) \longrightarrow u(i, j, t) \longrightarrow u_{ij}(t)$ دو تا عوض شده کدام را زمان سوم

i ها j

$u(x, y, t) \rightarrow u_{in}(y)$

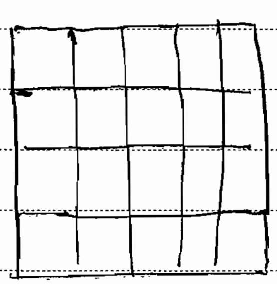
ب i ب n

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij}$$

$$\frac{du_{ij}}{dt} = \underbrace{\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}}_{f_{ij}(t,\, u_{i+1,j},\, u_{i-1,j} \dots)}$$

$i = 1, 2, \dots, N$

$j = 1, 2, \dots, M$ $N \times M$ تعداد معادلات



$3 \times 4 = 12$

set of ODE

تعداد $= N \times M$

$$\frac{du_{ij}}{dt} = f_{ij}(t, u, \dots)$$

$$= f_{ij}(t, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}, u_{42}, u_{44})$$

$$\begin{cases} \dfrac{du_{11}}{dt} = f_{11}(\quad) \\ \dfrac{du_{12}}{dt} = f_{12}(\quad) \\ \vdots \end{cases}$$

اخیراً اکثر مقالات از این روشها استفاده کردند برای حل معادلات با اینکه حل سخت‌تر است نسبت به بقیه خطا به علت دقت معادلات RK4 است

RK4: $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 +$

$$u_{ij}^{m+1} = u_{ij}^{m} + \frac{1}{6}\left(K_{1,ij} + 2K_{2ij} + 2K_{3,ij} + K_{4ij}\right)$$

$$K_{1ij} = hf_{ij}(t, u_{11}, u_{12}, \dots)$$

$$K_{2ij} = hf_{ij}\left(t + \frac{h}{2}, u_{ij} + \frac{K_{1ij}}{2}\right)$$

$$K_{3ij} = hf_{ij}\left(t + \frac{h}{2}, u_{ij} + \frac{K_{2ij}}{2}\right)$$

$$K_{4ij} = hf_{ij}(t + h, u_{ij} + K_{3ij})$$

مثال کلی:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$u(x, y, z, t) = u(i, j, m, t) = u_{ijm}(t)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\frac{du_{ijm}}{dt} = \left(\qquad \right)_{ijm} = f_{ijm}(t, u, \ldots\ldots)$$

Non - Linear P.D.E

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{K+1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}^{K+1} + u^{K}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}^{K+1}$$

مشکل معادلات این است که u با عامل غیرخطی را در iteration K می‌نویسیم، مجهول است

هیچ فرقی با یک روش معمول ندارد

عامل غیرخطی در K قبلی در K+1

حال روش صورت دیگر را استفاده می‌کنیم ، explicit ، implicit ، AR)

$$\left(\frac{u_{ijn+1} - u_{ijn}}{\Delta t}\right)^{K+1} = \left(\frac{u_{i+1,j,n+1} - 2u_{ijn+1} + u_{i-1,j,n+1}}{\Delta x^2}\right)^{K+1}$$

$$+ u_{ijn+1}^{K}\left(\frac{u_{ij+1,n+1} - 2u_{ijn+1} + u_{ij-1,n+1}}{\Delta y^2}\right)^{K+1}$$

$$\Delta x = \Delta y \Rightarrow \lambda_x = \lambda_y = \lambda$$

$$-\lambda u_{i+1,j,n+1}^{K+1} - \lambda u_{i-1,j,n+1}^{K+1} + u_{ijn+1}^{K}\left(-\lambda u_{ij+1,n+1}^{K+1} - \lambda u_{ij-1,n+1}^{K+1}\right) + \left(1 - 2\lambda - 2\lambda u_{ijn+1}^{K}\right) u_{ijn+1}^{K+1} = u_{ijn}$$

5 مجهول ← ماتریس 5 قطری ، می‌توانیم با iteration K ها در یک برنامه حل کرد

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda+2\lambda u^{K}_{ij\,n+1} & -\lambda u^{K}_{ij\,n+1} & \cdots \\ -\lambda & \ddots & \\ -\lambda u^{K}_{ij\,n+1} & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{K+1}_{ij\,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ijn} \end{bmatrix}$$

چون ماتریس حاصل یک ماتریس پنج قطری است و سه قطری نیست، تکرار لازم دارد. اگر $u^{K}_{ij\,n+1}$ را حدس بزنیم حل می‌شود

1) Assume $u^{K}_{ij\,n+1}$

2) Compute $u^{K+1}_{ij\,n+1}$

3) check $|u^{K+1}_{ij\,n+1} - u^{K}_{ij\,n+1}| \leq Tol$

4) if No $u^{K}_{ij\,n+1} = u^{K+1}_{ij\,n+1}$

5) Repeat till convergence conv

Set of P.D.Es

حالت کلی:

زمانی که دستگاه معادلات PDE داشته باشیم، مثلاً

۱) اگر معادلات قابل تبدیل به یک معادله باشند: مثلاً تابع u یک تابع است که در دستگاه معادلات نوشتیم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} = \beta \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \rightarrow$$ این قابل تبدیل به یک معادله است.

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$ این معادله غیرخطی است.

PAPCO

27

Subject:

Year. Month. Date. ( )

دو گاهی اوقات ۲ معادله و تابع مختلف داریم که قابل تبدیل به یکدیگر نیستند :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{cases}$$

$u(x, y, t)$ — i, j, n

روش implicit : u را تابع اصلی معادله میگیریم و v ها را ثابت قرار میدهیم و در پایان چک کنیم

برای مرحله بعد v ها را مجهول در نظر میگیریم و u ها ثابت که در مرحله ۲ u را مجهول در نظر میگیریم و v ها باید ثابت باشند و نظیر به نظیر مقایسه میکنیم اگر u هایی که در بالا بدست آوردیم و پایینی بدست آوردیم خطای کمتر از Tol داشت قابل قبول است همین طور v ها اگر نه بدست آوردیم مجدد حل میکنیم تا برابر شود

که این روش در ادامه با یک روش تکراری هم راه است

آخرین مطلب

$$\begin{cases} \text{BDA : backward in difference approximation method} \\ \text{CDA : Control} \quad " \quad " \quad " \\ \text{FDA : Forward} \quad " \quad " \quad " \quad " \end{cases}$$

Diffusion - convection Equation | ویژگی پسیولی که هم conduction
or | داریم هم convection
Combined " "

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v\frac{\partial c}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial u}{\partial x}$$

اگر روش implicit بودن یعنی
For ، سطان بدون توجه به مشتق اول
مدام cent

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

اما اینجا چگونه مکان را می‌خواهیم بنویسیم، معمولیش همان Crank است. می‌خواهیم
در متوسط زمان n و n+1 بنویسیم — ترکیب exp, imp است.

مشتق اول مکان ← پیش ← Backward BDA

CDA ← Centre

FDA ← Forward

BDA $u(x,t)$; $i \leftarrow x$, $t \rightarrow n$

$$\text{exp} \quad \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{in}}_{\text{For}} = \alpha \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{in}}_{\text{cent}} + \beta \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{in}}_{\text{back}}$$

$$\text{Imp} \quad \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{in}}_{\text{For}} = \alpha \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,n+1}}_{\text{cent}} + \beta \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n+1}}_{\text{Back}}$$

$$2 \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{in}}_{\text{For}} = \alpha \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{in}}_{\text{cent}} + \alpha \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,n+1}}_{\text{cent}} + \beta \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{in}}_{\text{back}} + \beta \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n+1}}_{\text{back}}$$

CDA: دقیقاً همان Cranck است

$$\text{Exp:} \quad \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{in}}_{\text{For}} = \alpha \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{in}}_{\text{cent}} + \beta \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{in}}_{\text{cent}}$$

$$\text{Imp:} \quad \underbrace{(\quad)_{in}}_{\text{For}} = \alpha \underbrace{(\quad)_{i,n+1}}_{\text{Cen}} + \beta \underbrace{(\quad)_{i,n+1}}_{\text{cent}}$$

18

Subject:

Year. Month. Date. ( )

FDA :

Exp : $(u_t)_{i,n} = (u_{xx})_{i,n} + \beta (u_x)_{i,n}$

For cent For

Im , $(u_t)_{i,n} = \alpha (u_{xx})_{i,n+1} + \beta (u_x)_{i,n+1}$

For cent For

۲ تعریف

معمولاً وقتی پاسخ ها را بررسی می‌کنیم اگر این جواب دقیق نبود که باشد ، در شروع , انتهای مسائل

مخصوص مسائل مهندسی یک نوسانی داریم در تابش اتفاق می‌افتد علت : step size h , method of solution

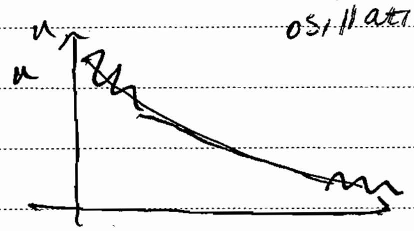
است .

osillation

دلیل اصلی مسائلی که بیشتر این ها هستند فقط یا

مربوط به penetration است .

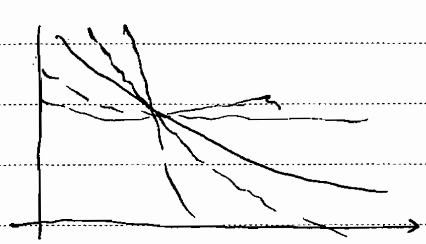
نفوذ حرارت ، جرم یا مومنتوم



Error : { Imherent Error :
Rondoff "
Increansent "

خطای گرد کردن : علت وسیله اندازه گیری است مثلاً 0.6666 را تا آخر نمی‌توانیم استفاده کنیم

smearing :



علت ها : نوع روش ،

فرضیات و فرض اولیه حاصلست ولی اصلی ترین

دلیل حاصلست ... دلیلها

PaPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

پایانترم :

حداقل ۵ تا سؤال ۶ { ۶۰٪ ← تحلیلی ۳ تا / ۴۰٪ ← عددی حداقل ۲ تا

عددی : ۱) حل مسئله با یک روش ۲) stability ۳) consistency ← PPE

۱) روش milne ۲) روش RK ۳) positiver

تحلیلی : حداقل یک روش sep

و بقیه هم دو تا سؤال با ترکیبی خواهد بود.

عددی ۹۵٪ یک قسمت با تحلیلی ۴۰٪ مشابه

پروژه :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Implicit

BC
$$\begin{cases} u(0,y,t)=0 \\ u(1,y,t)=0 \end{cases}$$

$u(x,0,t)=0 \qquad 0<y\leq 1$

IC: $u(x,y,0)=100$

$\Delta x = \Delta y = 0.05 \qquad \Delta t = 0.25$

$u(x,y,1)=?$

$Tol = 10^{-4}$

فرض تقارن مسئله ندارد.

ابعاد کل تا نقطه 20×20

Subject:

Year. Month. Date. ( )

پروژه دوم :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

روش : Implicit

$$BC \begin{cases} u(0,y,t) = 0 \\ u(1,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = 0 \\ u(x,1,t) = 0 \end{cases}$$

$IC : u(x,y,0) = 100$

$\Delta x = \Delta y = 0.05$

$\Delta t = 0.25$

$Tol = 10^{-4}$

حل :

روش اول : عامل غیرخطی در معادله بالا $\frac{\partial u}{\partial y}$ است ⇐

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

در روش ADI : روش تغییر جهت implicit یا جهت‌های متناوب. آن را حل می‌کنیم تا در هر جهت یک ماتریس ۳ قطری داشته باشیم که با روش توماس حل شود

(2)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j,n+1} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j,n+1/2} + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)_{i,j,n+1}$$

NoN linear P.D.E → (Assume iteration k & $k+1$)

$$\frac{u_{i,j,n+1} - u_{i,j,n+1/2}}{\Delta t/2} = \left(\frac{u_{i+1,j,n+1/2} - 2u_{i,j,n+1/2} + u_{i-1,j,n+1/2}}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{u^{k}_{i,j+1,n+1} - u^{k}_{i,j-1,n+1}}{2\Delta y}\right)\left(\frac{u^{k+1}_{i,j+1,n+1} - u^{k+1}_{i,j-1,n+1}}{2\Delta y}\right)$$

$$\frac{\lambda_y}{2} = \frac{\Delta t}{2} \times \frac{1}{4\Delta y^2}$$

$$u_{i,j,n+1} - (u^{k}_{i,j+1,n+1} - u^{k}_{i,j-1,n+1})\frac{\lambda_y}{2} u^{k+1}_{i,j+1,n+1} + (u^{k}_{i,j+1,n+1} - u^{k}_{i,j-1,n+1})\frac{\lambda_y}{2} u^{k+1}_{i,j-1,n+1}$$

$$= u_{i,j,n+1/2}\left(1 - 2\frac{\lambda_x}{2}\right) + \lambda_x u_{i+1,j,n+1/2} + \lambda_x u_{i-1,j,n+1/2}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma & b & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,2,n+1} \\ u_{i,3,n+1} \\ \vdots \\ u_{i,20,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

برای هر i یک ماتریس تو سیس می‌نویسیم

عبارت غیرخطی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Implicit

$\frac{\partial u}{\partial y}$ = ضریب خطی

$$BC \begin{cases} u(0,y,t) = 0 \\ u(1,y,t) = 0 \qquad 0 \leq y < 1 \\ u(x,0,t) = 0 \\ u(x,1,t) = 0 \end{cases}$$

$IC: u(x,y,0) = 100$

$\Delta x = \Delta y = 0.05$

$\Delta t = 0.25$

$u(x,y,1) = ?$

$Tol = 10^{-4}$

ADI Method:

$u(x, y, t)$: $x \to i$, $y \to j$, $t \to n$

$n+1$

$n+\frac{1}{2}$

n

مرحله اول ① $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i\,j\,n+1/2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i\,j\,n+1/2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2_{i\,j\,n}$

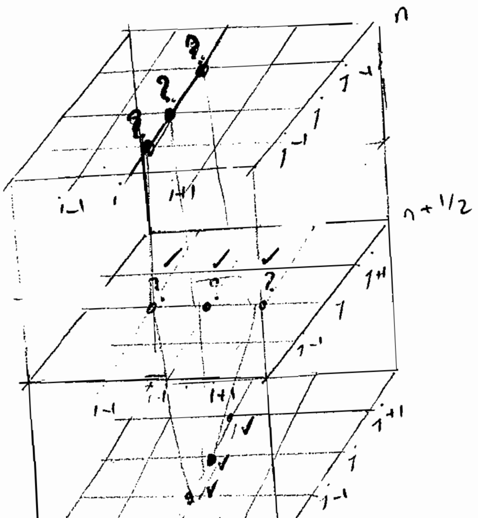
مرحله دوم ② $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i\,j\,n+1} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i\,j\,n+1/2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2_{i\,j\,n+1}$

① :
$$\frac{u_{i\,j\,n+1/2} - u_{i\,j\,n}}{\Delta t/2} = \left(\frac{u_{i+1,j,n+1/2} - 2u_{i\,j\,n+1/2} + u_{i-1,j,n+1/2}}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{u_{i,j+1,n} - u_{i,j-1,n}}{2\Delta y}\right)^2$$

$$\lambda_x = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \qquad \lambda_y = \frac{\Delta t}{4\Delta y^2}$$

$$-\frac{\lambda_x}{2} u_{i+1,j,n+1/2} - \frac{\lambda_x}{2} u_{i-1,j,n+1/2} + (1+\lambda) u_{i\,j\,n+1/2} = u_{i\,j\,n} + \frac{\lambda_2}{2}\left(u_{i,j+1,n} - u_{i,j-1,n}\right)^2$$

برای هر j یک ماتریس توش می‌نویسیم



$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2\,j\,n+1/2} \\ u_{3\,j\,n+1/2} \\ \vdots \\ u_{20\,j\,n+1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Implicit : BC $\begin{cases} u(0,y,t) = 0 \\ u(1,y,t) = 0 \end{cases}$

$u(x,0,t) = 0 \quad 0 < y \leq 1$

IC : $u(x,y,0) = 100$

$\Delta x = \Delta y = 0.05 \quad \Delta t = 0.25$

$u(x,y,1)$

Tol $= 10^{-4}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j,n} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j,n+1} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2_{i,j,n+1}$$

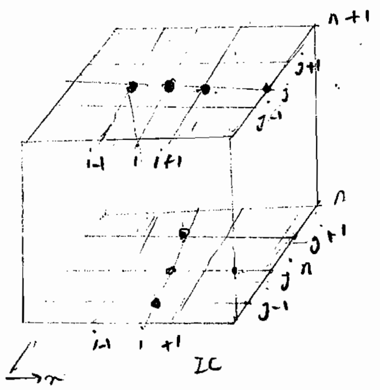
~~for~~ cent centl فرض دیگر

$$\frac{u_{i,j,n+1} - u_{i,j,n}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,j,n+1} - 2u_{i,j,n+1} + u_{i-1,j,n+1}}{\Delta x^2} + \left(\frac{u_{i,j+1,n} - u_{i,j-1,n}}{2\Delta y}\right)^2$$

$$\lambda_x = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \qquad \lambda_y = \frac{\Delta t}{4\Delta y^2}$$

$$u_{i,j,n+1}(1 + 2\lambda_x) - \lambda_x u_{i+1,j,n+1} - \lambda u_{i-1,j,n+1} = u_{i,j,n} + \lambda_y (u_{i,j+1,n+1} - u_{i,j-1,n+1})^2$$

$$u^{K+1}_{i,j,n+1}(1 + 2\lambda_x) - \lambda_x u^{K+1}_{i+1,j,n+1} - \lambda_x u^{K+1}_{i-1,j,n+1} = u_i + \lambda_y (u^{K}_{i,j+1,n+1} - u^{K}_{i,j-1,n+1})^2$$



$u_{i,j,n+1} = ($ $)$

while 1 $1 < x <$

$$\lambda_x = \frac{0.25}{0.05 \times 0.05} = 100 \qquad \lambda_y = \frac{0.25}{4 \times (0.05)^2} = 25$$

i $\quad 201\, u_{i,j,n+1} - 200\, u_{i+1,j,n+1} - \lambda u_{i-1,j,n+1} = u_{i,j,n} + 25(u_{i,j+1,n} - u_{i,j-1,n})^2$

$i = 2 \qquad i = 21$

$$\frac{dy}{dx} - y = x$$

$\lambda - 1 = 0$

$\lambda = 0$

$y_{Hom} = Ce^{x}$

$y_{pa} = k_0 + k_1 x$

$k_1 - k_0 - k_1 x = 0 + x$

$k_1 = k_0$

$-k_1 = 1 \Rightarrow k_1 = k_0 = -1$

$y = Ce^{x} - 1 - x$

$y(0) = 0$

$0 = C - 1 - \cancel{0}$

$C = 1$