دانشگاه علم و صنعت ایران

نام درس: جبر پیشرفته

استاد: دکتر مهدی علائیان

نیمسال اول ۹۳-۹۴

فصل اول

کاتاگوری‌ها

مقدمه: آیا هر گردایه از اشیاء مجموعه است؟ نشان می‌دهیم که چنین نیست.

فرض کنیم که $\mathbf{A}$ گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌هایی مانند $\mathbf{x}$ باشد به طوری که $\mathbf{x} \notin \mathbf{x}$. ثابت می‌کنیم که $\mathbf{A}$ یک مجموعه نیست. فرض کنیم که چنین نباشد، یعنی $\mathbf{A}$ یک مجموعه باشد (فرض خلف). در این صورت می‌دانیم که $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$ یا $\mathbf{A} \notin \mathbf{A}$.

حالت اول: $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$. در این حالت بنابر تعریف $\mathbf{A}$ خواهیم داشت $\mathbf{A} \notin \mathbf{A}$. $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$ با $\mathbf{A} \notin \mathbf{A}$ متناقض است.

حالت دوم: $\mathbf{A} \notin \mathbf{A}$. در این حالت چون $\mathbf{A}$ یک مجموعه فرض شده است به موجب تعریف $\mathbf{A}$ خواهیم داشت $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$. باز هم تناقض $\mathbf{A} \notin \mathbf{A}$ و $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$ به دست می‌آید.

پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

با توجه به این‌که چنین نیست که هر گردایه از اشیاء یک مجموعه باشد، در نظریه‌ی مجموعه‌ها یک گردایه‌ی دلخواه را در حالت کلی یک کلاس می‌نامند و فقط آنهایی را که در اصول موضوعه‌ی معینی صدق می‌کنند مجموعه می‌نامند.

هر مجموعه یک کلاس است ولی ممکن است یک کلاس یک مجموعه نباشد.

۱.۱ کاتاگوری‌ها

تعریف ۱: یک کاتاگوری (یا کاتگوری) به وسیله حدود (اصطلاحات) و شرایط ذیل مشخص می‌شود.

حدود:

۱. یک کلاس $\mathcal{C}$ از اشیاء،

۲. به ازاء هر دو شیی $\mathbf{B,A}$ از $\mathcal{C}$ یک مجموعه‌ی $\mathbf{mor}(\mathbf{A,B})$ (که هر عضو مانند $\boldsymbol{f}$ از آن را یک مورفیسم بر $\mathbf{A}$ بتوی $\mathbf{B}$ می‌نامیم و به $\boldsymbol{f}\mathbf{:A \to B}$ نشان می‌دهیم)،

۳. یک عمل $\mathbf{o}$ (برای ترکیب بعضی مورفیسم‌ها).

شرایط:

۱. به ازای هر دو مورفیسم $\boldsymbol{f}\mathbf{:A \to B}$ و $\mathbf{g:B \to C}$ ترکیب $\mathbf{go}\boldsymbol{f}$ ، یا به اختصار به $\mathbf{g}\boldsymbol{f}$ نشان می‌دهیم تعریف شده باشد و به $\mathbf{mor}(\mathbf{A,C})$ متعلق باشد. یعنی $\mathbf{g}\boldsymbol{f}$ یک مورفیسم بر $\mathbf{A}$ بتوی $\mathbf{C}$ باشد (بسته بودن).

توجه شود که این بسته بودن واقعی نیست (چون دلیل ندارد هر دو مورفیسم را بتوان با هم ترکیب کرد).

۲. به ازای هر سه مورفیسم $f{:}A \to B$ ، $g{:}B \to C$ و $h{:}C \to D$ ،

$$(hg)f = h(gf)$$

(شرکت‌پذیری).

۳. به ازاء هر شیی A یک مورفیسم $1_A : A \to A$ موسوم به مورفیسم همانی موجود باشد به طوری که به ازاء هر دو مورفیسم $f : A \to B$ و $g : C \to A$ ،

$$1_A g = g \qquad , \qquad f 1_A = f$$

(وجود مورفیسم‌های همانی).

مثال ۱. فرض کنیم که:

(۱) S کلاس همه‌ی مجموعه‌ها باشد.

(۲) به ازاء هر دو مجموعه‌ی B, A ،

$$mor(A,B) = Fun(A,B)$$

که در آن $Fun(A,B)$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع بر A بتوی B است.

(۳) o عمل ترکیب توابع است، به طوری که اگر $f{:}A \to B$ و $g{:}B \to C$ دو تابع باشند، آنگاه $gf{:}A \to C$ با ضابطه‌ی ذیل تعریف می‌شود:

$$\forall a \in A \qquad (gf)(a) = g(f(a))$$

(توجه کنید که چنین نیست که بتوان هر دو تابع را با هم ترکیب کرد).

کلاس S به انضمام توابع (مورفیسم‌های) مذکور در (۲) و عمل ترکیب توابع یک کاتگوری است. (شرایط را بررسی کنید.)

تمرین ۱: ثابت کنید که در کاتگوری به ازای هر شیء A ، مورفیسم همانی 1_A منحصر به‌فرد است.

مثال ۲. کاتاگوری گروه‌ها که در آن:

(۱) کلاس اشیاء عبارت است از کلاس همه‌ی گروه‌ها.

(۲) به ازای هر دو گروه $(G,*)$ و $(G',*')$ ، به اختصار G و G' ،

$$mor(G,G') = Hom(G,G')$$

که در آن

$$Hom(G,G') = \{f{:}G \to G' \mid \text{یک هومومورفیسم گروهی است } f\}$$

توجه کنید که هر گروه عبارت است از یک مجموعه‌ی ناتهی مانند G به انضمام یک عمل دوتایی در G مانند $*$ که در چهار شرط معین که می‌دانیم بسته بودن، شرکت پذیر بودن، عضو بی اثر داشتن، وجود عضو معکوس برای هر عضو غیر صفر صدق کند و همان طور که می‌دانیم برای راحتی یک گروه را بنام مجموعه‌ی آن می‌خوانند.

(۳) ترکیب مورفیسم‌ها (همورفیسم‌ها در اینجا) همان ترکیب توابع است. (توجه کنید که هر هومومورفیسم در درجه‌ی اول یک تابع است).

(شرایط را بررسی کنید).

مثال ۳. کاتگوری گروه‌های آبلی (حدود و شرایط را بررسی کنید).

مثال ۴. کاتاگوری همه‌ی فضاهای برداری بر یک میدان $\mathbf{F}$ که در آن

$$\mathbf{mor}(\mathbf{V},\mathbf{V}') = \mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{V}') = \mathbf{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{V}')$$

که در آن $\mathbf{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{V}')$ یا $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{V}')$ مجموعه‌ی همه‌ی تبدیلات خطی بر فضای برداری $\mathbf{V}$ به فضای برداری $\mathbf{V}'$ است.

یادآوری‌ها:

(آ) دستگاه ریاضی $(\mathbf{F},\mathbf{o},*)$ را یک میدان گوییم. اگر $\mathbf{F}$ حداقل دو عضو داشته باشد و $\mathbf{e}$ عضو خنثی نسبت به عمل $\mathbf{o}$ باشد و $(\mathbf{F},\mathbf{o})$ گروه آبلی باشد و $(\mathbf{F}-\{\mathbf{e}\},*)$ گروه آبلی باشد و $\mathbf{a}*(\mathbf{boc}) = (\mathbf{a}*\mathbf{b})\mathbf{o}(\mathbf{a}*\mathbf{c})$

(ب) مجموعه‌ی $\mathbf{V}$ را همراه با دو عمل جمع (برداری)، $+$ ، و ضرب (اسکالر)، $\times$ ، یک فضای برداری روی میدان $\mathbf{F}$ می‌نامند. در صورتی که در اصول زیر صدق کند:

۱. دستگاه $(\mathbf{V},+)$ گروه آبلی باشد (عضو خنثی را $\bar{\mathbf{o}}$ و قرینه‌ی $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ را $-\mathbf{v}$ می‌نامیم).

۲. به ازاء هر $\alpha\in\mathbf{F}$ و به ازاء هر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ در $\mathbf{V}$: $\quad \alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$

۳. به ازاء هر β,α متعلق به $\mathbf{F}$ و هر $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$: $\quad (\alpha+\beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}$

۴. به ازاء هر β,α متعلق به $\mathbf{F}$ و هر $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$: $\quad (\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$

۵. به ازاء هر $\mathbf{u}$ متعلق به $\mathbf{V}$: $\quad \mathbf{1u} = \mathbf{u}$

(ج) فرض کنیم $\mathbf{V}$ و $\mathbf{V}'$ دو فضای برداری روی میدان $\mathbf{F}$ باشند. تابع $\mathbf{L}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}'$ را یک تبدیل خطی از فضای برداری $\mathbf{V}$ به فضای برداری $\mathbf{V}'$ نامیم، اگر به ازاء هر $\mathbf{V_1}$ و $\mathbf{V_2}$ متعلق به $\mathbf{V}$ و هر $\mathbf{r}\in\mathbf{F}$ ،

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2) = \mathbf{L}(\mathbf{V}_1)+\mathbf{L}(\mathbf{V}_2) \qquad \text{و} \qquad \mathbf{L}(\mathbf{rV}_1) = \mathbf{rL}(\mathbf{V}_1)$$

مجموعه‌ی تبدیلات خطی از $\mathbf{V}$ به $\mathbf{V}'$ را با $\mathbf{Hom}(\mathbf{V},\mathbf{V}')$ یا $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{V}')$ نشان می‌دهیم.

با توجه به یادآوری‌های فوق حدود و شرایط را در مورد کاتاگوری همه‌ی فضاهای برداری بر یک میدان $\mathbf{F}$ بررسی کنید.

مثال ۵. فرض کنیم که $\mathbf{A}$ یک شیء دلخواه و $\mathbf{G}$ یک تکواره[۱] باشد (یک تکواره عبارت است از یک مجموعه‌ی ناتهی به انضمام یک عمل دوتایی که در سه شرط اول گروه‌ها - بسته بودن، شرکت‌پذیر بودن، عضو بی اثر داشتن- صدق کند مانند مجموعه‌ی اعداد طبیعی با عمل ضرب. بالاخص هر گروه یک تکواره است).

مشخصات ذیل یک کاتاگوری را معرفی می‌کند:

(۱) کلاس اشیاء عبارت است از $\{\mathbf{A}\}$. (به طوری که یک و فقط یک شی داریم).

(۲) $$\mathbf{mor}(\mathbf{A},\mathbf{A})=\mathbf{G}$$

(ملاحظه کنید که لزومی ندارد که هر عضو $\mathbf{G}$ یک تابع باشد، یعنی لازم نیست که هر مورفیسم یک تابع باشد. مثلاً اگر $\mathbf{G}$ تکواره‌ی اعداد صحیح با عمل ضرب باشد، آنگاه مورفیسم‌های بر $\mathbf{A}$ بتوی $\mathbf{A}$ دقیقاً اعداد صحیح می‌باشند و مثلاً می‌توان نوشت $\mathbf{-4:A\to A}$).

(۳) ترکیب مورفیسم‌ها همان ترکیب اعضای تکواره‌ی $\mathbf{G}$ با عمل آن است. (مثلاً اگر $\mathbf{G}$ تکواره‌ی اعدادصحیح با عمل ضرب باشد، آنگاه حاصل ترکیب مورفیسم $\mathbf{-4:A\to A}$ با مورفیسم $\mathbf{8:A\to A}$ عبارت است از مورفیسم $\mathbf{-32:A\to A}$).

(شرایط را بررسی کنید).

کاتاگوری را به صورت مجردتر به شکل زیر تعریف می‌کنیم: مورفیسم‌ها و ترکیب مورفیسم‌ها. اشیاء مهم نیستند.

مثال ۶. مشخصات ذیل یک کاتاگوری را معرفی می‌کند:

(۱) کلاس اشیاء عبارت است از مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbf{N=\{1,2,3,\dots\}}$.

(۲) به ازاء هر دو عدد طبیعی $\mathbf{n,m}$ ،

$\mathbf{mor(m,n)=}$ مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی $\mathbf{n}$ در $\mathbf{m}$

(مثلاً داریم: $$\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5}\\ \mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{\sqrt{2}} & \mathbf{-4}\end{bmatrix}\mathbf{:3\to 2}$$).

(۳) عمل ترکیب دو مورفیسم همان عمل ضرب ماتریس‌ها است. به طوری که به ازای هر دو ماتریس (مورفیسم):

$$(\boldsymbol{f}=)(\alpha_{ij})_{n\times m}\mathbf{:m\to n}$$
$$(\mathbf{g}=)(\beta_{ij})_{q\times n}\mathbf{:n\to q}$$

$\mathbf{g}\boldsymbol{f}\mathbf{:m\to q}$ عبارت است از حاصل‌ضرب دو ماتریس (β_{ij}) و (α_{ij}) یعنی $(\beta_{ij})(\alpha_{ij})$ که یک ماتریس $\mathbf{q}$ در $\mathbf{m}$ است (یک مورفیسم بر $\mathbf{m}$ بتوی $\mathbf{q}$).

---

۱. monoid

تعریف ۲: کاتاگوری ملموس[1]

یک کاتاگوری $\mathcal{C}$ را ملموس نامیم هر گاه به ازاء هر شیی $\mathbf{A}$ از آن یک مجموعه‌ی $\mathbf{U(A)}$ ، موسوم به مجموعه‌ی زمینه‌ی[2] $\mathbf{A}$ ، نسبت داده شود به طوری که شرط ذیل برقرار باشند:

(i) هر مورفیسم $\boldsymbol{f}\mathbf{:A\to B}$ یک تابع بر $\mathbf{U(A)}$ بتوی $\mathbf{U(B)}$ است.

(ii) مورفیسم همانی $\mathbf{1_A : A\to A}$ همان تابع همانی $\mathbf{1_{U(A)} : U(A)\to U(A)}$ است.

(iii) حاصل ترکیب دو مورفیسم $\mathbf{g:B\to C}\,,\,\boldsymbol{f}\mathbf{:A\to B}$ یعنی $\mathbf{g}\boldsymbol{f}$ همان حاصل ترکیب دو تابع $\boldsymbol{f}\mathbf{:U(A)\to U(B)}$ و $\mathbf{g:U(B)\to U(C)}$ به عنوان دو تابع است.

مثال ۷. هر یک از کاتاگوری‌های مثال‌های ۱–۴ ملموس است.

مثلاً برای کاتاگوری‌های مثال ۲ توجه کنید که هر گروه عبارت است از یک زوج مرتب $\mathbf{(G,*)}$ که $\mathbf{G}$ یک مجموعه‌ی ناتهی و $*$ یک عمل دوتایی در $\mathbf{G}$ است و تابع چهار شرطی است که می‌دانیم. مجموعه‌ی زمینه‌ی $\mathbf{(G,*)}$ عبارت است از خود مجموعه‌ی $\mathbf{G}$. در حقیقت هر هomomورفیسم بر یک گروه $\mathbf{(G,*)}$ بتوی یک گروه $\mathbf{(G',*')}$ عبارت است از یک تابع $\boldsymbol{f}\mathbf{:G\to G'}$ که در شرط همومورفیسم بودن نیز صدق کند به طوری که داریم:

$$\mathbf{U\big((G',*')\big)=G' \quad , \quad U\big((G,*)\big)=G}$$

تمرین۲. ثابت کنید که به ازاء هر شیی $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{U(A)}$ منحصر به فرد است.

مثال ۸ . کاتاگوری مثال ۶ ملموس نیست. فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف). فرض کنیم که $\mathbf{n,m}$ دو عدد طبیعی باشند و $\boldsymbol{f}\mathbf{:m\to n}$ یک مورفیسم باشد. در این صورت $\boldsymbol{f}$ یک تابع بر $\mathbf{U(m)}$ بتوی $\mathbf{U(n)}$ است ($\mathbf{U(m)}$ مجموعه‌ی زمینه‌ی $\mathbf{m}$ و $\mathbf{U(n)}$ مجموعه‌ی زمینه‌ی $\mathbf{n}$ است)، به طوری که خواهیم داشت:

$$\text{(۱)}\quad \mathbf{U(m)}=\boldsymbol{f}\ \text{حوزه‌ی تعریف}$$

از طرفی دیگر چون $\boldsymbol{f}$ یک مورفیسم بر $\mathbf{m}$ بتوی $\mathbf{n}$ است، بنابر تعریف کاتاگوری، $\boldsymbol{f}$ یک ماتریس حقیقی $\mathbf{n}$ در $\mathbf{m}$ خواهد بود. اما می‌دانیم که هر ماتریس حقیقی $\mathbf{n}$ در $\mathbf{m}$ مانند $(\alpha_{\mathbf{ij}})_{\mathbf{n\times m}}$ یک تابع بر حاصل‌ضرب دکارتی:

$$\mathbf{\{1,2,\ldots,n\}\times\{1,2,\ldots,m\}}$$

بتوی $\mathbb{R}$ است به طوری که مقدار آن در $\mathbf{(i,j)}$ مساوی $\alpha_{\mathbf{i,j}}$ است. در نتیجه $\boldsymbol{f}$ یک تابع بر حاصل‌ضرب دکارتی مذکور بتوی $\mathbb{R}$ خواهد بود، به طوری که خواهیم داشت:

$$\text{(۲)}\qquad \boldsymbol{f}\ \text{حوزه‌ی تعریف} = \mathbf{\{1,2,\ldots,n\}\times\{1,2,\ldots,m\}}$$

از مقایسه‌ی (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$\mathbf{U(m)=\{1,2,\ldots,n\}\times\{1,2,\ldots,m\}}$$

---

۱. Concrete category

۲. Underlying set

یعنی $U(m)$ به n نیز بستگی دارد. مثلاً به ازاء $n=1$ و $n=2$ حاصل می‌شود:

$$U(m)=\{1\}\times\{1,2,\ldots,m\} \qquad (۳)$$

$$U(m)=\{1,2\}\times\{1,2,\ldots,m\} \qquad (۴)$$

از مقایسه‌ی (۳) و (۴) معلوم می‌شود که:

$$\{1\}\times\{1,2,\ldots,m\}=\{1,2\}\times\{1,2,\ldots,m\}$$

که ممکن نیست. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

تعریف ۳: یک مورفیسم $f\colon A\to B$ را در یک کاتاگوری هم ارزی نامیم، هرگاه یک مورفیسم $g\colon B\to A$ موجود باشد به طوری‌که:

$$gf=1_A \qquad , \qquad fg=1_B$$

تمرین ۳. ثابت کنید که g منحصر به فرد است. (به این دلیل به جای g می‌نویسیم f^{-1} و آن را معکوس f می‌نامیم).

مثال ۹. در کاتاگوری مجموعه‌ها، هم ارزی‌ها دقیقاً عبارتند از توابع یک به یک و برو. در کاتاگوری گروه‌ها، هم ارزی‌ها دقیقاً عبارتند از ایزومورفیسم‌ها (یعنی هومومورفیسم‌های یک به یک و برو).

مثال ۱۰. در کاتاگوری مثال ۵، هم ارزی‌ها دقیقاً عبارتند از اعضای معکوس‌پذیر تکواره‌ی G (مثلاً به ازاء $G=Z$ دقیقاً دو هم ارزی ۱ و ۱− خواهیم داشت).

تعریف ۴: دو شیئی B,A از یک کاتاگوری را هم ارز نامیم، هرگاه حداقل یک هم ارزی بر A بتوی B موجود باشد. یا بنابه تعریف هم ارزی، یک مورفیسم $f\colon A\to B$ و یک مورفیسم $g\colon B\to A$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$fg=1_B \qquad , \qquad gf=1_A$$

مثال ۱۱. در کاتاگوری مجموعه‌ها دو مجموعه دقیقاً وقتی هم ارزند که هم عدد باشند. در کاتاگوری گروه‌ها، دو گروه دقیقاً وقتی هم ارزند که ایزومورفیک باشند.

تمرین ۴. ثابت کنید که خاصیت هم ارز بودن بین اشیاء یک کاتاگوری منعکس، متقارن و متعدی است.

تعریف ۵: یک شیئ I از یک کاتاگوری را آغازی[1] نامیم، هرگاه به ازاء هر شیئ A از این کاتاگوری دقیقاً (یک و فقط) یک مورفیسم بر I بتوی A موجود باشد.

مثال ۱۲. در کاتاگوری گروه‌ها، هر گروه تک عضوی یک شیئ آغازی است (چرا؟).

تعریف ۶: یک شیئ T از یک کاتاگوری را نهایی[2] نامیم، هرگاه به ازاء هر شیئ A دقیقاً یک مورفیسم بر A بتوی T موجود باشد.

---

۱. initial

۲. terminal

مثال ۱۳. در کاتاگوری مجموعه‌ها هر مجموعه‌ی تک عضوی یک شیئ نهایی است (در گروه‌ها هم همین‌طور).

تمرین۵. آیا کاتاگوری مجموعه‌ها هیچ شیئ آغازی دارد؟

قضیه‌ی ۱.۱.۱: هر دو شیئ آغازی (نهایی) در یک کاتاگوری هم ارزند.

برهان: فرض کنیم که $\mathbf{I',I}$ دو شیئ آغازی باشند، باید ثابت کنیم که دو مورفیسم $f{:}\mathbf{I}\to\mathbf{I'}$ و $\mathbf{g{:}I'\to I}$ موجودند به طوری‌که:

$$\mathbf{g}f\mathbf{=1_I} \qquad , \qquad f\mathbf{g=1_{I'}}$$

چون $\mathbf{I}$ یک شیئ آغازی است، پس یک و فقط یک مورفیسم $f{:}\mathbf{I}\to\mathbf{I'}$ وجود دارد.

چون $\mathbf{I'}$ یک شیئ آغازی است، پس فقط یک مورفیسم $\mathbf{g{:}I'\to I}$ وجود دارد.

نشان می‌دهیم که $\mathbf{g}f\mathbf{=1_I}$ و $f\mathbf{g=1_{I'}}$

اثبات $\mathbf{g}f\mathbf{=1_I}$: $\mathbf{1_I}$ و $\mathbf{g}f$ دو مورفیسم بر $\mathbf{I}$ بتوی $\mathbf{I}$ هستند و چون بنابه تعریف آغازی بودن $\mathbf{I}$ بیش از یک مورفیسم بر $\mathbf{I}$ بتوی $\mathbf{I}$ وجود ندارد ناگزیر باید داشته باشیم $\mathbf{g}f\mathbf{=1_I}$

تعریف ۷: فرض کنیم که $\mathcal{C}$ یک کاتاگوری ملموس، $\mathbf{F}$ یک شیئ از این کاتاگوری، $\mathbf{X}$ یک مجموعه و $\mathbf{i{:}X\to U(F)}$ یک تابع باشد ($\mathbf{U(F)}$ مجموعه‌ی زمینه‌ی $\mathbf{F}$ است).

گوییم شیئ $\mathbf{F}$ بر مجموعه‌ی $\mathbf{X}$ (به وسیله‌ی تابع $\mathbf{i{:}X\to U(F)}$) آزاد است، هرگاه به ازاء هر شیئ $\mathbf{A}$ و هر تابع $f{:}\mathbf{X}\to\mathbf{U(A)}$ یک و فقط یک مورفیسم $\mathbf{h:F\to A}$ موجود باشد به طوری‌که $\mathbf{hi}=f$ (به اصطلاح می‌گویند که f به طریق منحصر به فرد توسط $\mathbf{i}$ تجزیه می‌شود. توجه کنید که $\mathbf{h}$ یک تابع بر $\mathbf{U(F)}$ بتوی $\mathbf{U(A)}$ است) یا نمودار ذیل تعویض‌پذیر باشد.

(توجه کنید که $\mathbf{h}$ به $f\mathbf{,A}$ بستگی دارد).

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "\mathbf{i}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{U(F)} \arrow[d, dashed, "\mathbf{h}"] \\ & \mathbf{U(A)} \end{tikzcd}$$

مثال ۱۴. در کاتاگوری گروه‌ها هر گروه دوری نامتناهی یک شیئ آزاد بر هر مولد تک عضوی آن است.

برای اثبات این مطلب فرض کنیم که $\mathbf{G}$ یک گروه دوری نامتناهی و $\{\mathbf{a}\}$ یک مولد تک عضوی آن باشد به طوری که:

$$\mathbf{G=(a)=\{a^i | i\in\mathbb{Z}=} \text{مجموعه‌ی اعداد صحیح} \}$$

ثابت می‌کنیم که $\mathbf{G}$ بر مجموعه‌ی $\{\mathbf{a}\}$ با تابع شمول (احتوا) $\mathbf{i:\{a\}\to G}$ (یعنی تابعی که $\mathbf{a}$ را به خودش ببرد) آزاد است.

برای این منظور فرض کنیم که $\mathbf{G'}$ یک گروه دلخواه و $f{:}\{\mathbf{a}\}\to\mathbf{G'}$ یک تابع دلخواه باشد. باید نشان دهیم که یک و فقط یک هومومورفیسم $\mathbf{h{:}G\to G'}$ وجود دارد به طوری که $\mathbf{hi}=f$

$$\begin{tikzcd} \{a\} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & G(=(a)) \arrow[d, dashed, "h"] \\ & G' \end{tikzcd}$$

یکتایی h : فرض کنیم که $h:G\to G'$ یک همومورفیسم باشد به طوری‌که $hi=f$. در این صورت داریم:

$$(hi)(a)=f(a) \text{ ، یا } h(i(a))=f(a) \text{ ، یا } h(a)=f(a) \quad (۱)$$

حال فرض کنیم که a^i یک عضو دلخواه از G باشد $(i\in\mathbb{Z})$. داریم:

$$h(a^i)[\text{ یک همومورفیسم است } h]=(h(a))^i[\text{ رابطه‌ی (۱) }]=(f(a))^i$$

ملاحظه می‌شود که اگر h وجود داشته باشد منحصر به فرد است و ضابطه‌ی تعریف آن چیزی جز:

$$\forall i\in\mathbb{Z} \qquad h(a^i)=(f(a))^i$$

نمی‌تواند باشد.

وجود: ثابت کنید که تابع $h:G\to G'$ با ضابطه‌ی:

$$\forall i\in\mathbb{Z} \qquad h(a^i)=(f(a))^i$$

خوش‌تعریف و یک همومورفیسم است و $hi=f$.

تمرین ۶. فرض کنیم که V یک فضای برداری روی یک میدان F و $(V_1,V_2,\ldots,V_n)$ یک مبنای آن باشد. ثابت کنید که در کاتاگوری فضاهای برداری روی F ، V یک شیئ آزاد بر مجموعه‌ی $\{V_1,V_2,\ldots,V_n\}$ است.

تمرین ۷. فرض کنیم که Y,X در مجموعه‌ی هم عدد باشند و F یک شیئ آزاد بر X در یک کاتاگوری ملموس باشد. ثابت کنید که F بر Y آزاد است.

تمرین ۸ . فرض کنیم که F',F دو شیئ هم ارز در یک کاتاگوری ملموس باشند و X یک مجموعه باشد. ثابت کنید که اگر F بر X آزاد باشد F' هم بر X آزاد است.

برای راحتی از این به بعد در یک کاتاگوری $A,U(A)$ را یکی می‌گیریم، یعنی علامت A را برای نمایش $U(A)$ نیز به کار می‌بریم.

قضیه‌ی ۱.۱.۲: هر دو شیئ آزاد بر یک مجموعه در یک کاتاگوری ملموس $\mathcal{C}$ هم ارزند.

برهان: فرض کنیم که F',F دو شیئ آزاد در کاتاگوری $\mathcal{C}$ بر یک مجموعه‌ی X به ترتیب با توابع $i:X\to F$ و $j:X\to F'$ باشند. باید ثابت کنیم که $F\approx F'$ (F',F هم ارزند).

یا به عبارت معادل باید ثابت کنیم که دو مورفیسم $h':F'\to F, h:F\to F'$ وجود دارند به طوری‌که $hh'=1_{F'}$ و

$$h'h=1_F$$

اما چون $\mathbf{F}$ بر $\mathbf{X}$ با تابع $\mathbf{i:X \to F}$ آزاد است به ازاء $\mathbf{A = F'}$ و $\boldsymbol{f}\mathbf{=j}$ در تعریف اشیاء آزاد معلوم می‌شود که یک و فقط یک مورفیسم $\mathbf{h:F \to F'}$ وجود دارد به طوری که:

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{hi = j}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "\mathbf{i}"] \arrow[dr, "\mathbf{j}"'] & \mathbf{F} \arrow[d, dashed, "\mathbf{h}"] \\ & \mathbf{F'} \end{tikzcd}$$

نیز چون $\mathbf{F'}$ یک شیئ آزاد بر $\mathbf{X}$ با تابع $\mathbf{j:X \to F'}$ است به ازاء $\mathbf{A = F}$ و $\boldsymbol{f}\mathbf{=i}$ در تعریف اشیاء آزاد معلوم می-شود که یک و فقط یک مورفیسم $\mathbf{h':F' \to F}$ هست که:

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{h'j = i}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "\mathbf{j}"] \arrow[dr, "\mathbf{i}"'] & \mathbf{F'} \arrow[d, dashed, "\mathbf{h'}"] \\ & \mathbf{F} \end{tikzcd}$$

حال نشان می‌دهیم که $\mathbf{hh' = 1_{F'}}$ و $\mathbf{h'h = 1_F}$.

مثلاً اثبات $\mathbf{hh' = 1_{F'}}$: از تعریف آزاد بودن $\mathbf{F'}$ بر $\mathbf{X}$ با تابع $\mathbf{j}$ به ازاء $\mathbf{A = F'}$ و $\boldsymbol{f}\mathbf{=j}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین یک و فقط یک مورفیسم $\mathbf{\theta:F' \to F'}$ وجود دارد به طوری که $\mathbf{\theta j = j}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "\mathbf{j}"] \arrow[dr, "\mathbf{j}"'] & \mathbf{F'} \arrow[d, dashed, "\theta"] \\ & \mathbf{F'} \end{tikzcd}$$

پس اگر نشان دهیم که رابطه‌ی $\mathbf{\theta j = j}$ به ازاء $\mathbf{\theta = 1_{F'}}$ و $\mathbf{\theta = hh'}$ بر قرار است، آنگاه خواهیم داشت $\mathbf{hh' = 1_{F'}}$ و حکم ثابت است. اما با توجه به:

$$\mathbf{1_{F'}.j}\ [\text{تعریف مورفیسم همانی یا تابع همانی}] = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{(hh')j}\ [\text{ترکیب توابع}] = \mathbf{h(h'j)}\ [\text{رابطه‌ی } (2)\,] = \mathbf{hi}\ [\text{رابطه‌ی } (1)\,] = \mathbf{j}$$

تمرین ۹. یک گروه را بر یک مجموعه‌ی $\mathbf{X}$ آزاد نامیم. هرگاه به‌عنوان یک شیئ در کاتاگوری گروه‌ها بر $\mathbf{X}$ آزاد باشد.

ثابت کنید که به ازاء هر مجموعه‌ی $\mathbf{X}$ ،

(آ) حداقل یک گروه آزاد بر $\mathbf{X}$ وجود دارد.

(**ب**) مرتبه‌ی هر عضو یک گروه آزاد بر $\mathbf{X}$ غیر از عضو خنثای آن نامتناهی است.

(**پ**) اگر $\mathbf{X}$ بیش از یک عضو داشته باشد آنگاه هر گروه آزاد بر $\mathbf{X}$ غیر آبلی است.

راهنمایی (آ): همه‌ی عبارات صوری به شکل $\mathbf{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}}$ را در نظر بگیرید که در آن

$\mathbf{(i)}$ $\mathbf{n}$ یک عدد طبیعی است،

$\mathbf{(ii)}$ $\mathbf{x_i}$ ها به $\mathbf{X}$ تعلق دارند،

(iii) α_i ها اعداد صحیح ناصفرند،

(iV) پایه‌های متوالی متمایزند.

مجموعه‌ی همه‌ی این عبارات به انضمام یک عنصر دلخواه **e** که هیچ کدام از عبارات صوری فوق الذکر نباشد را **G** بنامید.

در **G** یک عمل دوتایی را مطابق ذیل تعریف می‌کنیم:

(i) حاصل ترکیب **e** را با هر عضو **G** خود این عضو اختیار کنید (به طوری که **e** عضو خنثی شود).

(ii) برای ترکیب دو عبارت صوری آنها را به ترتیبی که می‌خواهید ترکیب کنید پهلوی یکدیگر قرار دهید و با استفاده از قوانین توان‌ها و حذف توان‌های صفر ساده کنید، بدون تغییر جای جمله‌ها، تا یک عبارت صوری به دلت آید. چنانچه بعد از ساده کردن چیزی باقی نماند حاصل ترکیب را **e** اختیار کنید.

ثابت کنید که **G** با این عمل ساده کردن یک گروه آزاد بر **X** است.

تمرین ۱۰. فرض کنیم که **G** یک گروه آبلی باشد. **G** را یک گروه آبلی آزاد بر یک مجموعه‌ی **x** نامیم. هرگاه در کاتاگوری گروه‌های آبلی یک شیء آزاد بر **X** باشد. ثابت کنید که به ازای هر مجموعه **X**،

(آ) حداقل یک گروه آبلی آزاد بر **X** وجود دارد.

(ب) مرتبه‌ی هر عضو یک گروه آبلی آزاد غیر از عضو خنثای آن نامتناهی است.

راهنمایی (آ): مانند راهنمایی قسمت (آ) تمرین قبل است. با این تفاوت که دو عبارت صوری را که فقط در ترتیب جمله‌ها تفاوت داشته باشند یکی می‌گیریم.

تمرین ۱۰. چه گروه‌هایی بر مجموعه‌ی تهی آزادند؟

تمرین ۱۱. فرض کنیم که **G** یک گروه آبلی نابدیهی باشد. ثابت کنید که **G** یک گروه آزاد است اگر و فقط اگر دوری نامتناهی باشد.

تمرین ۱۲. قضیه‌ی ۱.۱.۲ را با استفاده از قضیه‌ی ۱.۱.۱ ثابت کنید.

بخش ۱.۲: فانکتورها[1] (تابعگون‌ها)

تعریف ۸: فرض کنیم که $\mathcal{C}',\mathcal{C}$ دو کاتاگوری باشند. یک تابع $\mathbf{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ را یک فانکتور (فانکتور هموردا) بر $\mathcal{C}$ بتوی $\mathcal{C}'$ نامیم. هرگاه $\mathbf{F}$ هرشیئ $\mathbf{A}$ از $\mathcal{C}$ را به یک شیئ $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ از $\mathcal{C}'$، هر مورفیسم $f:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ در $\mathcal{C}$را به یک مورفیسم $\mathbf{F}(f):\mathbf{F}(\mathbf{A})\to\mathbf{F}(\mathbf{B})$ در $\mathcal{C}'$ ببرد به طوری‌که دو شرط ذیل بر قرار باشند:

(i) به ازاء هر سه شیئ $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، $\mathbf{C}$ و هر دو مورفیسم $f:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ و $\mathbf{g}:\mathbf{B}\to\mathbf{C}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}f)=\mathbf{F}(\mathbf{g})\mathbf{F}(f)$$

(به اختصار، $\mathbf{F}$ ترکیب را به ترکیب ببرد.):

در کاتاگوری $\mathcal{C}$ $\xrightarrow{\ \mathbf{F}\ }$ در کاتاگوری $\mathcal{C}'$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\mathbf{g}f"] & \\ \mathbf{B} \arrow[r, "\mathbf{g}"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{F}(\mathbf{A}) \arrow[d, "\mathbf{F}(f)"'] \arrow[dr, "\mathbf{F}(\mathbf{g}f)(=\mathbf{F}(\mathbf{g})\mathbf{F}(f))"] & \\ \mathbf{F}(\mathbf{B}) \arrow[r, "\mathbf{F}(\mathbf{g})"'] & \mathbf{F}(\mathbf{C}) \end{tikzcd}$$

(ii) به ازاء هر شیئ $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{F}(\mathbf{1}_{\mathbf{A}})=\mathbf{1}_{\mathbf{F}(\mathbf{A})}$

(به اختصار، $\mathbf{F}$ ، مورفیسم‌های همانی را به مورفیسم‌های همانی می‌برد).

در کاتاگوری $\mathcal{C}$ در کاتاگوری $\mathcal{C}'$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[d, "\mathbf{1}_{\mathbf{A}}"'] \\ \mathbf{A} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{F}(\mathbf{A}) \arrow[d, "\mathbf{F}(\mathbf{1}_{\mathbf{A}})(=\mathbf{1}_{\mathbf{F}(\mathbf{A})})"] \\ \mathbf{F}(\mathbf{A}) \end{tikzcd}$$

مثال ۱: فرض کنیم که $\mathcal{C}$ یک کاتاگوری باشد. تابع همانی $\mathbf{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ یعنی تابعی که شیئ را به خودش و هر مورفیسم را نیز به خودش ببرد یک فانکتور است (فانکتور همانی). (بررسی کنید).

مثال ۲: فرض کنیم که $\mathbf{Grp}$ کاتاگوری گروه‌ها، $\mathbf{S}$ کاتاگوری مجموعه‌ها باشد. نیز فرض کنیم $\mathbf{F}:\mathbf{Grp}\to\mathbf{S}$ تابعی باشد که هر گروه $(\mathbf{G},*)$ را به مجموعه‌ی زمینه‌ی آن یعنی مجموعه‌ی $\mathbf{G}$ ، و هر همومورفیسم $f:(\mathbf{G},*)\to(\mathbf{G}',*')$ را به تابع $f:\mathbf{G}\to\mathbf{G}'$ ببرد. (توجه کنید که هر همومورفیسم در درجه‌ی اول یک تابع بر مجموعه‌ی زمینه‌ی گروه اول بتوی مجموعه‌ی زمینه‌ی گروه دوم است). در این صورت $\mathbf{F}$ یک فانکتور است (بررسی کنید). این فانکتور را فانکتور فراموشکار[2] بر کاتاگوری گروه‌ها می‌نامیم.

---

۱. Functer

۲. Foretful Functor

مثال ۳: فرض کنیم که $\mathbf{S}$ کاتگوری مجموعه‌ها و $\mathbf{P:S \to S}$ تابعی باشد که هر مجموعه‌ی $\mathbf{A}$ را به مجموعه‌ی توان آن، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های $\mathbf{A}$ ، و یک تابع $f\mathbf{:A \to B}$ را به تابع $\mathbf{P}(f)\mathbf{:P(A) \to P(B)}$ با ضابطه‌ی ذیل ببرد:

به ازاء هر عضو $\mathbf{A'}$ از $\mathbf{P(A)}$ (یعنی هر زیر مجموعه‌ی $\mathbf{A'}$ از $\mathbf{A}$): $\mathbf{P}(f)(\mathbf{A'}) = f(\mathbf{A'})$

در این صورت $\mathbf{P}$ یک فانکتور است (آن را فانکتور مجموعه‌ی توان می‌نامند).

بررسی شرایط فانکتور بودن $\mathbf{P}$:

در کاتگوری $\mathbf{S}$ $\xrightarrow{\mathbf{P}}$ در کاتگوری $\mathbf{S}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\mathbf{g}f"] & \\ \mathbf{B} \arrow[r, "\mathbf{g}"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{P(A)} \arrow[d, "\mathbf{P}(f)"'] \arrow[dr, "\mathbf{p}(\mathbf{g}f)"] & \\ \mathbf{P(B)} \arrow[r, "\mathbf{P(g)}"'] & \mathbf{P(C)} \end{tikzcd}$$

باید ثابت کنیم $\mathbf{P(g)P}(f) = \mathbf{P(g}f)$. یا به عبارت هم ارز به ازاء هر زیر مجموعه‌ی $\mathbf{A'}$ از $\mathbf{A}$:

$$\left(\mathbf{P}(\mathbf{g}f)\right)(\mathbf{A'}) = \left(\mathbf{P(g)P}(f)\right)(\mathbf{A'})$$

یا بنابه تعریف $\mathbf{P(g}f)$ و ترکیب توابع:

$$(\mathbf{g}f)(\mathbf{A'}) = \mathbf{P(g)}\left(\mathbf{P}(f)(\mathbf{A'})\right)$$

و یا:

$$(\mathbf{g}f)(\mathbf{A'}) = \mathbf{g}\left(f(\mathbf{A'})\right)$$

(تساوی اخیر را ثابت کنید).

شرط دوم: بررسی کنید.

مثال ۴: فرض کنیم که $\mathcal{C}$ یک کاتگوری و $\mathbf{A}$ یک شیئ دلخواه (ولی از این به بعد ثابت) از $\mathcal{C}$ باشد. تابع:

$$\mathbf{mor(A,\ \ ):}\ \mathcal{C} \to \mathbf{S}$$

را مطابق ذیل تعریف می‌کنیم:

(i) اگر $\mathbf{X}$ یک شیئ از $\mathcal{C}$ باشد، آنگاه $\mathbf{mor(A,\ \ )}$ آن را به $\mathbf{mor(A,X)}$ می‌برد.

(ii) اگر $f\mathbf{:X \to Y}$ یک مورفیسم در $\mathcal{C}$ باشد، آنگاه $\mathbf{mor(A,\ \ )}$ آن را به تابع:

$$\overline{f}\mathbf{:mor(A,X) \to mor(A,Y)}$$

با ضابطه‌ی ذیل می‌برد.

$$\forall \alpha \in \mathbf{mor(A,X)}: \overline{f}(\alpha) = f\alpha \in \mathbf{mor(A,Y)}$$

در این صورت $\mathbf{mor(A,\ \ )}$ یک فانکتور است.

بررسی شرط اول:

در کاتگوری $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ | در کاتگوری $\mathbf{S}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{x} \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "gf"] & \\ \mathbf{y} \arrow[r, "\mathbf{g}"'] & \mathbf{z} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{mor}(\mathbf{A},\mathbf{X}) \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, "\overline{\mathbf{g}f}"] & \\ \mathbf{mor}(\mathbf{A},\mathbf{Y}) \arrow[r, "\overline{\mathbf{g}}"'] & \mathbf{mor}(\mathbf{A},\mathbf{Z}) \end{tikzcd}$$

باید ثابت کنیم که $\overline{\mathbf{g}f} = \overline{\mathbf{g}}\overline{f}$ یا به عبارت هم ارز

$$\forall \alpha \in \mathbf{mor}(\mathbf{A},\mathbf{X}) : \underset{\text{مقدار}}{\left(\overline{\mathbf{g}f}\right)(\alpha)} = \underset{\text{مقدار}}{\left(\overline{\mathbf{g}}\overline{f}\right)(\alpha)}$$

بنابه تعریف $\overline{\mathbf{g}f}$ ، $\overline{\mathbf{g}}$ ، $\overline{f}$ ، شرکت‌پذیری مورفیسم‌ها، و ترکیب توابع؛

$$\left(\overline{\mathbf{g}f}\right)(\alpha) = (\mathbf{g}f)\alpha = \mathbf{g}\left(f(\alpha)\right) = \overline{\mathbf{g}}\left(f(\alpha)\right) = \overline{\mathbf{g}}\left(\overline{f}(\alpha)\right) = \left(\overline{\mathbf{g}}\overline{f}\right)(\alpha)$$

بررسی شرط دوم:

در کاتگوری $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ | در کاتگوری $\mathbf{S}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[d, "\mathbf{1_x}"'] \\ \mathbf{X} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{mor}(\mathbf{A},\mathbf{X}) \arrow[d, "\left(\overline{\mathbf{1_x}}\right)"] \\ \mathbf{mor}(\mathbf{A},\mathbf{X}) \end{tikzcd}$$

باید ثابت کنیم که: $\left(\overline{\mathbf{1_x}}\right) = \mathbf{1}_{\mathbf{mor(A,X)}}$

یا به عبارت هم ارز:

$$\forall \alpha \in \mathbf{mor}(\mathbf{A},\mathbf{X}) : \left(\overline{\mathbf{1_x}}\right)(\alpha) = \mathbf{1}_{\mathbf{mor(A,X)}}(\alpha)$$

یا بنابر تعریف $\left(\overline{\mathbf{1_x}}\right)$ و تابع همانی $\mathbf{1}_{\mathbf{mor(A,X)}}$ ،

$$\mathbf{1_X}\alpha = \alpha$$

که چون $\mathbf{1_X}$ مورفیسم همانی است، رابطه‌ی بر قرار است.

تعریف ۹: فرض کنیم که $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ یک کاتگوری و $\mathbf{F}:\boldsymbol{\mathcal{C}} \to \mathbf{S}$ یک فانکتور باشد. نیز فرض کنیم که $\mathbf{U}$ یک شیئ از $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ و $\mathbf{u}$ یک عضو از مجموعه‌ی $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ باشد.

گوییم $(\mathbf{U},\mathbf{u})$ (یا $\mathbf{u}$) یک عنصر عمومی فانکتور $\mathbf{F}$ و $\mathbf{U}$ یک شیئ عمومی این فانکتور است، هرگاه به ازاء هر شیئ $\mathbf{X}$ از کاتگوری $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ و هر عنصر $\mathbf{x}$ از مجموعه‌ی $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ یک و فقط یک مورفیسم $f:\mathbf{U} \to \mathbf{X}$ موجود باشد به طوری که:

$$\left(\mathbf{F}(f)\right)(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$$

$$\begin{array}{c} \text{در کاتگوری } \mathcal{C} \\ \hline \mathbf{U} \\ f\downarrow \\ \mathbf{X} \end{array} \quad \xrightarrow{\mathbf{F}} \quad \begin{array}{c} \text{در کاتگوری } \mathbf{S} \\ \hline \mathbf{u} \in \mathbf{F}(\mathbf{U}) \\ \downarrow \quad \downarrow \mathbf{F}(f) \\ \mathbf{x} \in \mathbf{F}(\mathbf{X}) \end{array}$$

توجه: f به $\mathbf{X}$ و $\mathbf{x}$ بستگی دارد. ولی وقتی که $\mathbf{x}, \mathbf{X}$ انتخاب شوند باید f منحصر به فرد باشد.

مثال ۵: فانکتور همانی بر کاتگوری مجموعه‌ها را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که هر مجموعه‌ی تک عضوی $\{\mathbf{y}\}$ یک شیئ عمومی این فانکتور و زوج مرتب $(\{\mathbf{y}\},\mathbf{y})$ یک عنصر عمومی آن است.

$$\begin{array}{c} \text{در کاتگوری } \mathbf{S} \\ \hline \{\mathbf{y}\} \\ f\downarrow \\ \mathbf{X} \end{array} \quad \xrightarrow{\text{همانی}} \quad \begin{array}{c} \text{در کاتگوری } \mathbf{S} \\ \hline \mathbf{y} \in \{\mathbf{y}\} \\ \downarrow \quad \downarrow f \\ \mathbf{x} \in \mathbf{X} \end{array}$$

باید ثابت کنیم که به ازاء هر مجموعه‌ی $\mathbf{X}$ و هر عضو $\mathbf{x} \in \mathbf{F}(\mathbf{X})$ یک و فقط یک تابع $f\!:\!\{\mathbf{y}\} \to \mathbf{X}$ موجود است، به طوری که $f(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$ ، و این بدیهی است.

مثال ۶: ادعا می‌کنیم که $\mathbf{A}$ یک شیئ عمومی فانکتور $\mathbf{mor}(\mathbf{A},\ )$ و $(\mathbf{A},\mathbf{1_A})$ یک عنصر عمومی این فانکنور است (بررسی کنید).

$$\begin{array}{c} \text{در کاتگوری } \mathcal{C} \\ \hline (\mathbf{U} =)\mathbf{A} \\ \downarrow f? \\ \mathbf{X} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{در کاتگوری } \mathbf{S} \\ \hline (\mathbf{u} =)\mathbf{1_A} \in \mathbf{mor}(\mathbf{A},\mathbf{A}) \\ \downarrow \quad \downarrow \overline{f} \\ \mathbf{x} \in \mathbf{mor}(\mathbf{A},\mathbf{X}) \end{array}$$

باید ثابت کنیم که به ازاء هرشیئ $\mathbf{X}$ در کاتگوری $\mathcal{C}$ و هر عضو $\mathbf{x}$ از $\mathbf{mor}(\mathbf{A,X})$ یک و فقط یک مورفیسم $f\!:\!\mathbf{A} \to \mathbf{X}$ وجود دارد به طوری‌که $\overline{f}(\mathbf{1_A}) = \mathbf{x}$

اما بنابر تعریف $\overline{f}$ داریم:

$$\overline{f}(\mathbf{1_A}) = f(\mathbf{1_A}) = f$$

در نتیجه گزاره‌ی بالا هم ارز است با گزاره‌ی ذیل:

به ازاء هر $\mathbf{x} \in \mathbf{mor}(\mathbf{A},\mathbf{X})$ یک و فقط یک مورفیسم $f\!:\!\mathbf{A} \to \mathbf{X}$ وجود دارد به طوری‌که $f\mathbf{=x}$ و این بدیهی است (چون f فقط می‌تواند خود $\mathbf{x}$ باشد).

تمرین ۱. ثابت کنید که هر گروه دوری نامتناهی یک شیئ عمومی فانکتور فراموشکار بر کاتگوری گروه‌ها است. (مثال ۲ را ملاحظه کنید).

تمرین ۲. ثابت کنید که فانکتور مجموعه‌ی توان هیچ عنصر عمومی ندارد (مثال ۳ را ملاحظه کنید).

قضیه‌ی ۱.۲.۱ (قضیه‌ی نمایش برای عنصرهای عمومی): فرض کنیم که $\mathcal{C}$ یک کاتگوری و $(\mathbf{U},\mathbf{u})$ یک عنصر عمومی یک فانکتور $\mathbf{F}:\mathcal{C}\to\mathbf{S}$ باشد. در این صورت به ازاء هر شیئ $\mathbf{X}$ در $\mathcal{C}$ دو مجموعه‌ی $\mathbf{mor}(\mathbf{U},\mathbf{X})$ و $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ هم عددند.

برهان: تابع $\theta:\mathbf{mor}(\mathbf{U},\mathbf{X})\to\mathbf{F}(\mathbf{X})$ را با ضابطه‌ی:

$$\forall \boldsymbol{f}\in\mathbf{mor}(\mathbf{U},\mathbf{X}) \qquad \theta(\boldsymbol{f})=\left(\mathbf{F}(\boldsymbol{f})\right)(\mathbf{u})$$

تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که θ یک به یک و برو است.

باید ثابت کنیم که به ازاء هر $\mathbf{x}\in\mathbf{F}(\mathbf{X})$ یک و فقط یک مورفیسم $\boldsymbol{f}\in\mathbf{mor}(\mathbf{U},\mathbf{X})$ وجود دارد، به طوری‌که $\theta(\boldsymbol{f})=\mathbf{x}$ یا بنا به تعریف θ ، $\mathbf{F}(\boldsymbol{f})(\mathbf{u})=\mathbf{x}$ و این تعریف عنصر عمومی $(\mathbf{U},\mathbf{u})$ است:

$$\begin{array}{ccc} \text{در کاتگوری } \mathcal{C} & \qquad & \text{در کاتگوری } \mathbf{S} \\ \hline \mathbf{U} & & \mathbf{u}\in\mathbf{F}(\mathbf{U}) \\ \downarrow \boldsymbol{f} & & (\mathbf{F}(\boldsymbol{f}))(\mathbf{u})\downarrow \quad \downarrow \mathbf{F}(\boldsymbol{f}) \\ \mathbf{X} & & \mathbf{x}\in\mathbf{F}(\mathbf{X}) \end{array}$$

توجه: در قضیه‌ی بالا اصطلاحاً می‌گویند که می‌توان $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ را با $\mathbf{mor}(\mathbf{U},\mathbf{X})$ نشان داد.

قضیه‌ی ۱.۲.۲ (یکتایی اشیاء عمومی): فرض کنیم که $\mathcal{C}$ یک کاتگوری، $\mathbf{F}:\mathcal{C}\to\mathbf{S}$ یک فانکتور باشد و $(\mathbf{U},\mathbf{u})$ و $(\mathbf{U}',\mathbf{u}')$ دو عنصر عمومی ($\mathbf{U}',\mathbf{U}$ دو شیئ عمومی) این فانکتور باشند. در این صورت $\mathbf{U}\simeq\mathbf{U}'$ (یعنی صرف‌نظر از هم ارز بودن، شیئ عمومی منحصر به فرد است).

برهان: باید ثابت کنیم که یک مورفیسم $\boldsymbol{f}:\mathbf{U}\to\mathbf{U}'$ و یک مورفیسم $\mathbf{g}:\mathbf{U}'\to\mathbf{U}$ وجود دارد به طوری‌که:

$$\boldsymbol{f}\mathbf{g}=\mathbf{1}_{\mathbf{U}'} \qquad , \qquad \mathbf{g}\boldsymbol{f}=\mathbf{1}_{\mathbf{U}}$$

چون $(\mathbf{U},\mathbf{u})$ یک عنصر عمومی است بنابه تعریف عنصرهای عمومی، بالاخص به ازاء $\mathbf{X}=\mathbf{U}'$ و $\mathbf{x}=\mathbf{u}'$ در تعریف، معلوم می‌شود که یک (و فقط یک) مورفیسم $\boldsymbol{f}:\mathbf{U}\to\mathbf{U}'$ هست به طوری‌که:

$$(1) \qquad \mathbf{F}(\boldsymbol{f})(\mathbf{u})=\mathbf{u}'$$

$$\begin{array}{ccc} \text{در کاتگوری } \mathcal{C} & \qquad & \text{در کاتگوری } \mathbf{S} \\ \hline \mathbf{U} & & \mathbf{u}\in\mathbf{F}(\mathbf{U}) \\ \downarrow \boldsymbol{f} & & \downarrow \quad \downarrow \mathbf{F}(\boldsymbol{f}) \\ \mathbf{U}' & & \mathbf{u}'\in\mathbf{F}(\mathbf{U}') \end{array}$$

به همین ترتیب با توجه به این که $(\mathbf{U}',\mathbf{u}')$ یک عنصر عمومی است به ازاء $\mathbf{X}=\mathbf{U}$ و $\mathbf{x}=\mathbf{u}$ در تعریف عنصر عمومی $(\mathbf{U}',\mathbf{u}')$ معلوم می‌شود که یک و فقط یک مورفیسم $\mathbf{g}:\mathbf{U}'\to\mathbf{U}$ موجود است به طوری‌که:

$$(2) \qquad \mathbf{F}(\mathbf{g})(\mathbf{u}')=\mathbf{u}$$

در کاتگوری $\mathbf{S}$	در کاتگوری $\mathcal{C}$
$\begin{array}{c} \mathbf{u}' \in \mathbf{F}(\mathbf{U}') \\ \downarrow \quad \downarrow \mathbf{F}(\mathbf{g}) \\ \mathbf{u} \in \mathbf{F}(\mathbf{U}) \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathbf{U}' \\ \mathbf{g} \downarrow \\ \mathbf{U} \end{array}$

حال نشان می‌دهیم که $\mathbf{g}f\mathbf{=1_U}$ و $f\mathbf{g=1_{U'}}$.

مثلاً اثبات $f\mathbf{g=1_{U'}}$:

در کاتگوری $\mathbf{S}$	در کاتگوری $\mathcal{C}$
$\begin{array}{c} \mathbf{u}' \in \mathbf{F}(\mathbf{U}') \\ \vdots \quad \downarrow \mathbf{F}(\mathbf{h}) \\ \mathbf{u}' \in \mathbf{F}(\mathbf{U}') \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathbf{U}' \\ \downarrow \mathbf{h} \\ \mathbf{U}' \end{array}$

چون $(\mathbf{U,u'})$ یک عنصر عمومی است به ازاء $\mathbf{X=U'}$ و $\mathbf{x=u'}$ در تعریف عمومی بودن $(\mathbf{U',u'})$ معلوم می‌شود که یک و فقط یک مورفیسم $\mathbf{h:U' \to U'}$ وجود دارد به طوری‌که:

$$\mathbf{F(h)(u')=u'}$$

اگر نشان دهیم که رابطه‌ی اخیر به ازاء $\mathbf{h}=f\mathbf{g}$ و $\mathbf{h=1_{U'}}$ بر قرار است، آنگاه به علت یکتایی $\mathbf{h}$ خواهیم داشت:

$$f\mathbf{g=1_{U'}}$$

اما به ازاء $\mathbf{h=}f\mathbf{g}$ داریم:

$$\big(\mathbf{F(h)}\big)(\mathbf{u'})=\big(\mathbf{F}(f\mathbf{g})\big)(\mathbf{u'}) \text{ [شرط اول در تعریف فانکتور] }= \big(\mathbf{F}(f)\mathbf{F(g)}\big)(\mathbf{u'}) \text{ [تعریف ترکیب دو تابع] }$$
$$=\mathbf{F}(f)\big(\mathbf{F(g)(u')}\big) \text{ [رابطه‌ی (۲)] }= \mathbf{F}(f)(\mathbf{u}) \text{ [رابطه‌ی (۱)] }= \mathbf{u'}$$

هم چنین به ازاء $\mathbf{h=1_{U'}}$ داریم:

$$\big(\mathbf{F(h)}\big)(\mathbf{u'})=\mathbf{F}(\mathbf{1_{U'}})(\mathbf{u'}) \text{ [شرط دوم در تعریف فانکتور همورد] }= \mathbf{1_{F(U')}}(\mathbf{u'}) \text{ [تعریف تابع همانی] }= \mathbf{u'}$$

تمرین ۳. قضیه‌ی بالا را با استفاده از از قضیه‌ی ۱.۱.۱ ثابت کنید.

تعریف ۱۰: فرض کنیم که $\mathcal{C'}, \mathcal{C}$ دو کاتگوری باشند. تابع $\mathbf{F}:\mathcal{C} \to \mathcal{C'}$ را یک فانکتور پادورد نامیم، هرگاه $\mathbf{F}$ هر شیئ $\mathbf{A}$ از کاتگوری $\mathcal{C}$ را به یک شیئ $\mathbf{F(A)}$ در کاتگوری $\mathcal{C'}$ و هر مورفیسم $f\mathbf{:A \to B}$ از کاتگوری $\mathcal{C}$ را به یک مورفیسم $\mathbf{F}(f)\mathbf{: F(B) \to F(A)}$ ببرد به طوری که در شرط ذیل بر قرار باشند:

(۱) به ازاء هر دو مورفیسم $f\mathbf{:A \to B}$ و $\mathbf{g:B \to C}$ از کاتگوری $\mathcal{C}$ ،

$\mathbf{F(g}f\mathbf{)=F}(f)\mathbf{F(g)}$ (به اختصار، $\mathbf{F}$ ترکیب را به ترکیب ببرد)،

در کاتگوری $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{A} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\mathbf{g}f"] & \\ \mathbf{B} \arrow[rr, "\mathbf{g}"'] & & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

در کاتگوری $\mathcal{C}'$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{F}(\mathbf{A}) & \\ \mathbf{F}(\mathbf{B}) \arrow[ur, "\mathbf{F}(f)"] & & \mathbf{F}(\mathbf{C}) \arrow[ul, "\mathbf{F}(\mathbf{g}f)(=\mathbf{F}(f)\mathbf{F}(\mathbf{g}))"'] \arrow[ll, "\mathbf{F}(\mathbf{g})"] \end{tikzcd}$$

(۲) به ازاء هر شیئ $\mathbf{A}$ در کاتگوری $\mathcal{C}$ ، $\mathbf{F}(\mathbf{1_A})=\mathbf{1_{F(A)}}$. (به اختصار، $\mathbf{F}$ هر مورفیسم همانی را به یک مورفیسم همانی ببرد).

در کاتگوری $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[d, "\mathbf{1_A}"] \\ \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

در کاتگوری $\mathcal{C}'$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}(\mathbf{A}) \arrow[d, "\mathbf{F}(\mathbf{1_A})(=\mathbf{1_{F(A)}})"] \\ \mathbf{F}(\mathbf{A}) \end{tikzcd}$$

تعریف: فرض کنیم که $\mathcal{C}$ یک کاتگوری $\mathbf{F}{:}\mathcal{C}\to\mathbf{S}$ یک فانکتور پادورد باشد. نیز فرض کنیم که $\mathbf{U}$ یک شیئ از کاتگوری $\mathcal{C}$ و $\mathbf{u}$ یک عضو مجموعه‌ی $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ باشد. گوییم $(\mathbf{U},\mathbf{u})$ $\mathbf{u}$ یک عنصر عمومی و $\mathbf{U}$ یک شیئ عمومی فانکتور پادورد $\mathbf{F}$ است هرگاه به ازاء هر شیئ $\mathbf{X}$ از کاتگوری $\mathcal{C}$ و هر عضو $\mathbf{x}$ از مجموعه‌ی $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ یک و فقط یک مورفیسم $f{:}\mathbf{X}\to\mathbf{U}$ موجود باشد به طوری که $\mathbf{F}(f)(\mathbf{u})=\mathbf{x}$

در کاتگوری $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{U} \\ \mathbf{X} \arrow[u, "f"] \end{tikzcd}$$

در کاتگوری مجموعه‌ها:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{u}\in\mathbf{F}(\mathbf{U}) \arrow[d] \arrow[d, shift left=6, "\mathbf{F}(f)"] \\ \mathbf{x}\in\mathbf{F}(\mathbf{X}) \end{tikzcd}$$

تمرین ۴. فرض کنیم که $\mathcal{C}$ یک کاتگوری و $\mathbf{I}$ یک شیئ دلخواه (ولی از این به بعد ثابت) از $\mathcal{C}$ باشد. تابع:

$$\mathbf{mor}(\ ,\mathbf{B}){:}\,\mathcal{C}\to\mathbf{S}$$

را مطابق ذیل تعریف می‌کنیم:

(i) به ازاء هر شیئ $\mathbf{X}$ در $\mathcal{C}$:

$$\mathbf{mor}(\ ,\mathbf{B})(\mathbf{X})=\mathbf{mor}(\mathbf{X},\mathbf{B})$$

(ii) به ازاء هر مورفیسم $f{:}\mathbf{X}\to\mathbf{y}$ از کاتگوری $\mathcal{C}$:

$$\mathbf{mor}(\ ,\mathbf{B})(f)=\underline{f}$$

که:

$$\underline{f}{:}\mathbf{mor}(\mathbf{Y},\mathbf{B})\to\mathbf{mor}(\mathbf{X},\mathbf{B})$$

تابعی است با ضابطه‌ی ذیل:

$$\forall \alpha \in :\mathbf{mor}(\mathbf{Y,B}) : \underline{f}(\alpha) = \alpha \boldsymbol{f} \in \mathbf{mor}(\mathbf{X,B})$$

* ثابت کنید که $\mathbf{mor}(\ ,\mathbf{B})$ یک فانکتور پادورد و $(\mathbf{B},\mathbf{1_B})$ یک عنصر عمومی آن است.

تمرین ۵. مشابه قضیه‌های ۱.۲.۱ و ۱.۲.۲ را برای فانکتورهای پادورد بیان و ثابت کنید.

بخش ۱.۳: ضرب و هم‌ضرب

تعریف ۱۲: فرض کنیم که $\mathcal{C}$ یک کاتگوری، $\mathbf{P}$ یک شیئ و $\{\mathbf{A_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک خانواده‌ی دلخواه (با مجموعه‌ی اندیس گذار دلخواه $\mathbf{I}$) از اشیاء $\mathcal{C}$ ، و $\left\{\mathbf{P}\xrightarrow{\mathbf{p_i}}\mathbf{A_i}\right\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک خانواده‌ی دلخواه از مورفیسم‌ها باشد (هر $\mathbf{p_i}$ را یک پروژکسیون[1] یا تصویر می‌نامند).

گوییم $\mathbf{P}$ (یا به طور دقیق، خانواده $\{\mathbf{p_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$) یک ضرب برای $\mathbf{A_i}$ ها (به طور دقیق، خانواده‌ی $\{\mathbf{A_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$) است. هرگاه به ازاء هر شیئ $\mathbf{X}$ و هر خانواده‌ی $\{\boldsymbol{f}_\mathbf{i}:\mathbf{X}\to\mathbf{A_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ از کاتگوری $\mathcal{C}$ یک و فقط یک مورفیسم $\boldsymbol{f}:\mathbf{X}\to\mathbf{P}$ موجود باشد به طوری‌که به ازاء هر $\mathbf{i\in I}$ ، $\mathbf{p_i}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}_\mathbf{i}$. (به اصطلاح می‌گویند $\boldsymbol{f}_\mathbf{i}$ ها به وسیله‌ی $\mathbf{p_i}$ ها به طریق منحصر به فرد توسط $\boldsymbol{f}$ تجزیه می‌شوند).

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A_i} & \\ \mathbf{P} \arrow[u, "\mathbf{p_i}"] & \mathbf{X} \arrow[l, "f"] \arrow[ul, "f_\mathbf{i}"'] \end{tikzcd}$$

یادآوری: فرض کنیم که $\{\mathbf{A_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک خانواده‌ی دلخواه از مجموعه‌ها باشد. می‌دانیم که ضرب (حاصل‌ضرب) دکارتی $\mathbf{A_i}$ ها، $\prod_{\mathbf{i\in I}}\mathbf{A_i}$ ، عبارت است از:

$$\prod_{\mathbf{i\in I}}\mathbf{A_i}=\left\{\boldsymbol{f}:\mathbf{I}\to\bigcup_{\mathbf{i\in I}}\mathbf{A_i}\,\middle|\,\forall\mathbf{i}\in\mathbf{I},\boldsymbol{f}(\mathbf{i})\in\mathbf{A_i}\right\}$$

برای راحتی هر عضو $\boldsymbol{f}\in\prod_{\mathbf{i\in I}}\mathbf{A_i}$ را به صورت خانواده‌ی $\{\boldsymbol{f}_\mathbf{i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ نشان می‌دهیم که در آن $\boldsymbol{f}\mathbf{i}=\boldsymbol{f}(\mathbf{i})\in\mathbf{A_i}$.

مثال ۱: فرض کنیم که $\{\mathbf{A_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک خانواده‌ی دلخواه از مجموعه‌ها باشد. ادعا می‌کنیم که ضرب دکارتی $\mathbf{A_i}$ ها یک ضرب برای $\mathbf{A_i}$ ها در کاتگوری مجموعه‌ها است.

در حقیقت اگر هر پروژکسیون $\mathbf{p_{i_j}}:\prod\mathbf{A_{i_j}}\to\mathbf{A_{i_j}}$ را تابع تصویری (پروژکسیون) یعنی تابعی با ضابطه‌ی:

$$\mathbf{p_{i_j}}\left(\{\mathbf{a_i}\}_{\mathbf{i\in I}}\right)=\mathbf{a_j}$$

در نظر بگیریم. ثابت می‌کنیم که خانواده‌ی $\{\mathbf{p_j}\}_{\mathbf{j\in I}}$ یک ضرب برای خانواده‌ی $\{\mathbf{A_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ است.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A_i} \arrow[d, "\mathbf{p_i}"'] & \\ \prod_{\mathbf{i\in I}}\mathbf{A_i} & \mathbf{X} \arrow[l, "f"] \arrow[ul, "f_\mathbf{i}"'] \end{tikzcd}$$

باید ثابت کنیم که به ازاء هر شیئ $\mathbf{X}$ و هر خانواده‌ی $\{\boldsymbol{f}_\mathbf{i}:\mathbf{X}\to\mathbf{A_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک و فقط یک مورفیسم $\boldsymbol{f}:\mathbf{X}\to\prod\mathbf{A_i}$ وجود دارد به طوری‌که:

$$\forall_\mathbf{i}\in\mathbf{I}\left(\mathbf{p_i}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}_\mathbf{i}\right)$$

---
۱. projection

یکتایی: فرض کنیم که $f\colon X \to \prod A_i$ یک تابع باشد به طوری‌که:

$$\forall i \in I \left(p_i f = f_i\right)$$

ببینیم ضابطه‌ی چنین f ی چه می‌تواند باشد؟

فرض کنیم که x یک عضو دلخواه از X باشد و $f(x) = \{a_i\} \in \prod A_i$. بنابر فرض به ازاء هر $j \in I$ داریم $p_j f = f_j$. از آنجا:

$$\left(p_j f\right)(x) = f_j(x)$$

یا

$$p_j\left(f(x)\right) = f_j(x)$$

یا

$$p_j\left(\{a_i\}\right) = f_j(x)$$

یا

$$a_j = f_j(x)$$

در نتیجه:

$$f(x) = \left\{f_j(x)\right\}_{i\in I}$$

پس f در صورت وجود منحصر به فرد است و ضابطه‌ای جز:

$$\forall x \in X: \left(f(x) = \left\{f_j(x)\right\}_{j\in I}\right)$$

نمی‌تواند داشته باشد.

وجود: معلوم است که f با ضابطه‌ی فوق خوش تعریف است (واقعاً یک تابع است. چرا؟) و $\left(\forall i \quad p_i f = f_i\right)$. ثابت کنید.

مثال ۲: یادآوری: فرض کنیم که $\{G_i\}_{i\in I}$ یک خانواده دلخواه از گروه‌ها باشد. در این صورت ضرب دکارتی مجموعه‌ی G_i ها، $\prod\limits_{i\in I} G_i$ با عمل ذیل یک گروه است:

$$\forall \{x_i\}, \{y_i\} \in \prod G_i$$

$$\{x_i\}\{y_i\} = \left\{x_i \; o_{G_i} \; y_i\right\}\left(= \{x_i y_i\}\right)$$

این گروه را ضرب دکارتی G_i ها می‌نامیم. (هم چنین حاصل‌ضرب خارجی G_i ها می‌نامیم).

با نمادهای قبل، در کاتگوری گروهها $\prod G_i$ یک ضرب G_i ها است.

برای نشان دادن این مطلب به ازاء هر i ، پروژکسیون $p_i : \prod G_i \to G_i$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

$$p_i\left(\{x_i\}\right)_{i\in I} = x_i$$

(ثابت کنید که p_i یک همومورفیسم گروه‌ها است).

باید ثابت کنیم که به ازاء هر گروه G و به ازاء هر خانواده‌ی $\{f_i : G \to G_i\}$ از همومورفیسم‌های گروهی یک و فقط همومورفیسم f موجود است به طوری‌که:

$$\forall i \in I \left(p_i f = f_i\right)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G_i} & \\ \prod \mathbf{G_i} \arrow[u, "\mathbf{p_i}"] & \mathbf{G} \arrow[l, "f"] \arrow[ul, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

اثبات مشابه مثال قبل است (ثابت کنید. فراموش نکنید که در قسمت وجود نشان دهید که f یک هومومورفیسم است).

تمرین ۱. مستقیماً با استفاده از تعریف ثابت کنید که در هر کاتگوری هر دو ضرب یک خانواده از اشیاء هم ارزند.

تمرین۲. فرض کنیم که $\mathbf{P',P}$ دو شیئ هم ارز در یک کاتگوری و $\{\mathbf{A_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک خانواده از اشیاء این کاتگوری باشد. ثابت کنید که اگر $\mathbf{P}$ یک ضرب برای $\mathbf{A_i}$ ها باشد، $\mathbf{P'}$ هم یک ضرب برای $\mathbf{A_i}$ ها است.

تمرین ۳. ثابت کنید که ضرب‌های یک خانواده از اشیاء در یک کاتگوری دقیقاً اشیاء نهایی در یک کاتگوری دیگر می‌باشند و از آنجا نتیجه بگیرید که هر دو ضرب در یک کاتگوری هم ارزند.

تعریف ۱۳: فرض کنیم که $\mathcal{C}$ یک کاتگوری، $\mathbf{S}$ یک شیئ، $\{\mathbf{A_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک خانواده از اشیاء و $\{\mathbf{U_i : A_i \to S}\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک خانواده از مورفیسم‌ها باشد (هر $\mathbf{u_i}$ را یک انژکسیون می‌نامیم) گوییم $\mathbf{S}$ (یا به طور دقیق خانواده‌ی $\{\mathbf{u_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$) یک هم‌ضرب (جمع یا حاصل‌جمع) $\mathbf{A_i}$ ها (به طور دقیق، خانواده $\{\mathbf{A_i}\}$) است هرگاه به ازاء هر شیئ $\mathbf{X}$ و هر خانواده‌ی $\{f_\mathbf{i}\mathbf{:A_i \to X}\}_{\mathbf{i\in I}}$ از مورفیسم‌ها یک و فقط یک مورفیسم $f\mathbf{: S \to X}$ موجود باشد به طوری‌که:

$$\forall \mathbf{i} \in \mathbf{I}\left(f\mathbf{u_i} = f_\mathbf{i}\right)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A_i} \arrow[d, "\mathbf{u_i}"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \mathbf{S} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{X} \end{tikzcd}$$

مثال ۳: فرض کنیم که $\{\mathbf{A_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک خانواده‌ی دلخواه از مجموعه‌ها باشد. ادعا می‌کنیم که $\bigcup\left(\mathbf{A_i}\times\{\mathbf{i}\}\right)$ یک هم‌ضرب $\mathbf{A_i}$ ها است. برای این منظور انژکسیون‌های $\mathbf{u_i : A_i} \to \bigcup\left(\mathbf{A_i}\times\{\mathbf{i}\}\right)$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم:

$$\forall \mathbf{x_i} \in \mathbf{A_i} \qquad \mathbf{u_i}\left(\mathbf{x_i}\right) = \left(\mathbf{x_i},\mathbf{i}\right)$$

معلوم است که $\mathbf{u_i}$ خوش تعریف است (یک تابع است).

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A_i} \arrow[d] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \bigcup_{\mathbf{i\in I}}\left(\mathbf{A_i}\times\{\mathbf{i}\}\right) \arrow[r, "f"'] & \mathbf{X} \end{tikzcd}$$

باید ثابت کنیم که به ازاء هرشیئ (مجموعه‌ی) $\mathbf{X}$ و هر خانواده‌ی $\{f_\mathbf{i}\mathbf{ : A_i \to X}\}$ از توابع، یک و فقط یک تابع $f\mathbf{:} \bigcup\left(\mathbf{A_i}\times\{\mathbf{i}\}\right) \to \mathbf{X}$ وجود دارد به طوری‌که: $\forall \mathbf{i}\left(f\mathbf{u_i} = f_\mathbf{i}\right)$.

یکتایی: فرض کنیم تابع f موجود باشد و $\forall \mathbf{i}\left(f\mathbf{u_i} = f_\mathbf{i}\right)$.

برای یافتن ضابطه‌ی $\boldsymbol{f}$، فرض کنیم که $\mathbf{x}$ یک عضو دلخواه از $\bigcup\left(\mathbf{A_i}\times\{\mathbf{i}\}\right)$ باشد. چون $\mathbf{A_i}\times\{\mathbf{i}\}$ ها دو به دو از هم جدا می‌باشند $\mathbf{x}$ به یکی و فقط یکی از $\mathbf{A_i}\times\{\mathbf{i}\}$ ها تعلق دارد. فرض کنیم $\mathbf{x}\in\mathbf{A_i}\times\{\mathbf{i}\}$. در این صورت $\mathbf{a_i}\in\mathbf{A_i}$ هست که $\mathbf{x}=(\mathbf{a_i},\mathbf{i})$. داریم:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\mathbf{x})&=\boldsymbol{f}\left((\mathbf{a_i},\mathbf{i})\right)\ [\text{تعریف } \mathbf{u_i}]=\boldsymbol{f}\left(\mathbf{u_i}(\mathbf{a_i})\right)\\&=(\boldsymbol{f}\mathbf{u_i})(\mathbf{a_i})\ [\text{فرض}]=\boldsymbol{f}_{\mathbf{i}}(\mathbf{a_i})\end{aligned}$$

پس اگر $\boldsymbol{f}$ وجود داشته باشد باید با ضابطه‌ی ذیل تعریف شود:

$$\boldsymbol{f}\left((\mathbf{a_i},\mathbf{i})\right)=\boldsymbol{f}_{\mathbf{i}}(\mathbf{a_i})$$

(خلاصه) اگر $\mathbf{x}\in\bigcup\left(\mathbf{A_i}\times\{\mathbf{i}\}\right)$ ، آنگاه $\mathbf{x}$ دقیقاً به یکی از $\mathbf{A_i}\times\{\mathbf{i}\}$ تعلق دارد و اگر $\mathbf{x}=(\mathbf{a_i},\mathbf{i})$ آنگاه:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x})=\boldsymbol{f}_{\mathbf{i}}(\mathbf{a_i})$$

وجود: ثابت کنید که $\boldsymbol{f}$ با ضابطه‌ی بالا یک تابع است و به ازای هر $\mathbf{i}$ ، $\boldsymbol{f}\mathbf{u_i}=\boldsymbol{f}_{\mathbf{i}}$.

یادآوری: فرض کنید که $\{\mathbf{G_i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$ یک خانواده از گروه‌ها باشد و

$$\coprod_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\mathbf{G_i}=\left\{\{\mathbf{x_i}\}\in\prod_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\mathbf{G_i}\ \middle|\ \text{فقط عده‌ای متناهی از } \mathbf{x_i} \text{ ها غیر از عضو خنثی می‌باشند}\right\}$$

می‌دانیم که $\coprod\mathbf{G_i}$ یک زیر گروه $\prod\mathbf{G_i}$ است (این گروه را حاصل‌ضرب مستقیم خارجی ضعیف $\mathbf{G_i}$ ها می‌نامیم).

مثال ۴. فرض کنیم که $\{\mathbf{G_i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$ یک خانواده از گروه‌های آبلی باشد. ادعا می‌کنیم که حاصل‌ضرب مستقیم خارجی ضعیف $\mathbf{G_i}$ ها، $\coprod\mathbf{G_i}$ ، در کاتگوری گروه‌های آبلی یک هم‌ضرب $\mathbf{G_i}$ ها است.

برای اثبات این مطلب، انژکسیون‌های $\mathbf{u_i}:\mathbf{G_i}\to\coprod\mathbf{G_i}$ را با ضابطه‌ی ذیل تعریف می‌کنیم:

$$\forall\mathbf{x_i}\in\mathbf{G_i}:\mathbf{u_i}(\mathbf{x_i})=\{\mathbf{y_j}\}\in\coprod\mathbf{G_j}$$

که در آن:

$$\mathbf{y_j}=\begin{cases}\mathbf{x_i} & (\mathbf{j}=\mathbf{i})\\ \mathbf{e_j} & (\mathbf{y}\neq\mathbf{i})\end{cases}$$

که در آن $\mathbf{e_j}$ عضو خنثای $\mathbf{G_j}$ است.

حال ثابت می‌کنیم که به ازاء هر گروه آبلی $\mathbf{G}$ و هر خانواده‌ی $\{\boldsymbol{f}_{\mathbf{i}}:\mathbf{G_i}\to\mathbf{G}\}$ از هومومورفیسم‌ها یک و تنها یک هومومورفیسم $\boldsymbol{f}:\coprod\mathbf{G_i}\to\mathbf{G}$ موجود است به طوری‌که:

$$\forall\mathbf{j}\left(\boldsymbol{f}\mathbf{u_j}=\boldsymbol{f}_{\mathbf{j}}\right)$$

$$\begin{tikzcd}\mathbf{G_i} \arrow[d, "\mathbf{u_i}"'] \arrow[dr, "\boldsymbol{f}_{\mathbf{i}}"] & \\ \coprod\mathbf{G_i} \arrow[r, "\boldsymbol{f}"'] & \mathbf{G}\end{tikzcd}$$

یکتایی f : فرض کنیم که $f:\coprod G_i \to G$ یک همومورفیسم باشد به طوری‌که $\forall j \in I \left(f u_j = f_j \right)$. ما دنبال ضابطه‌ی f می‌گردیم. برای این منظور فرض می‌کنیم که $\{x_j\}_{j\in I}$ یک عضو دلخواه از $\coprod G_i$ باشد. داریم:

$$f\left(\{x_j\}\right) = f\left(\prod_{j\in I} u_j\left(x_j\right)\right) \text{ [چون } f \text{ یک همومورفیسم است] } = \prod_{j\in I} f\left(u_j\left(x_j\right)\right) = \prod_j \left(f u_j\right)\left(x_j\right) = \prod_j f_j\left(x_j\right)$$

پس ملاحظه می‌کنیم که f در صورت وجود منحصر به فرد است و باید با ضابطه‌ی

$$\forall \{x_j\} \in \coprod G_y \quad , \quad f\left(\{x_j\}\right) = \prod_j f_y\left(x_j\right)$$

تعریف شود.

وجود: ثابت کنید که f با ضابطه‌ی بالا یک همومورفیسم است و

$$\forall j \in I \left(f u_j = f_j \right)$$

(توجه کنید که از آبلی بودن گروه‌ها در اثبات همومورفیسم بودن f استفاده می‌شود).

تمرین ۴. مشابه تمرین‌های ۱ و ۲ و ۳ را برای هم‌ضرب‌ها بیان و اثبات کنید.

بخش ۱.۴: تبدیلات طبیعی[۱]

تعریف ۱۴: فرض کنیم که $\mathcal{C}',\mathcal{C}$ دو کاتگوری و $F_1,F_2 : \mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ دو فاکتور (همورد) باشند. نیز فرض کنیم که به ازاء هر شیئ A از کاتگوری $\mathcal{C}$ یک مورفیسم $\theta_A : F_1(A)\to F_2(A)$ در کاتگوری $\mathcal{C}'$ موجود باشد به طوری‌که به ازاء هر دو شیئ B,A و هر مورفیسم $f:A\to B$ در کاتگوری $\mathcal{C}$ داشته باشیم:

$$\theta_B F_1(f) = F_2(f)\theta_A$$

در کاتگوری $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd}$$

در کاتگوری $\mathcal{C}'$

$$\begin{tikzcd} F_1(A) \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & F_2(A) \arrow[d, "F_2(f)"] \\ F_1(B) \arrow[r, "\theta_B"] & F_2(B) \end{tikzcd}$$

در این صورت گوییم خانواده‌ی $\{\theta_A\}_{A\in\mathcal{C}}$ یک تبدیل طبیعی از فانکتور F_1 بتوی فانکتور F_2 است.

تعریف ۱۵: در تعریف قبل اگر به ازای هر A ، θ_A یک هم ارزی باشد، آنگاه تبدیل طبیعی $\{\theta_A\}$ را یک هم ارزی طبیعی بین فانکتورهای F_2,F_1 می‌نامیم. یا به اختصار می‌گوییم θ_A یک بیژکسیون طبیعی است.

تعریف ۱۶: دو فانکتور $F_1,F_2 : \mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ را به طور طبیعی هم ارز نامیم. هرگاه حداقل یک هم ارزی طبیعی از F_1 بتوی F_2 موجود باشد.

تمرین ۱. ثابت کنید که خاصیت به طور طبیعی هم ارز بودن در بین همه‌ی فانکتورهای بر یک کاتگوری $\mathcal{C}$ بتوی یک کاتگوری $\mathcal{C}'$ ، منعکس، متقارن و متعدی است.

تمرین ۲. فرض کنیم که $F:\mathcal{C}\to S$ یک فانکتور بر یک کاتگوری $\mathcal{C}$ بتوی کاتگوری مجموعه‌ها باشد. نیز فرض کنیم که F دارای یک شیئ عمومی U باشد. ثابت کنید که F و $\mathbf{mor}(U,\ )$ به طور طبیعی هم ارزند.

توجه: تبدیل طبیعی و هم ارزی طبیعی بین دو فانکتور پادورد F_2,F_1 نیز مشابهاً تعریف می‌شود، کافی است در تعریف بالا عبارت «هر مورفیسم $f:A\to B$ » را به عبارت «هر مورفیسم $f:B\to A$ » تبدیل کنیم.

۱. Natural Transfermation

فصل دوم

نظریه‌ی مدول‌ها

۲.۱ مدول‌ها

یادآوری: یک حلقه عبارت است از یک مجموعه ناتهی $\mathbf{R}$ به انضمام دو عمل $\circ,+$ (موسوم به جمع و ضرب) به طوری‌که:

$\mathbf{(i)}$ $\mathbf{R}$ با عمل جمع یک گروه آبلی است،

$\mathbf{(ii)}$ $\mathbf{R}$ با عمل ضرب یک نیم‌گروه است،

$\mathbf{(iii)}$ عمل ضرب نسبت به عمل جمع توزیع‌پذیر (پخشی) است. یعنی:

$$\forall \mathbf{x,y,z} \in \mathbf{R} \qquad (\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz}+\mathbf{yz} \quad , \quad \mathbf{z}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{zx}+\mathbf{zy}$$

یک حلقه را جابه جایی (تعویض‌پذیر) نامیم، هرگاه عمل ضرب آن جابه جایی باشد.

یک حلقه را با عضو واحد (یکدار) نامیم، هرگاه نسبت به عمل ضرب دارای عضو خنثی، $\mathbf{1}$ ، باشد.

یک حلقه‌ی غیر بدیهی (بیش از یک عضو) را یک میدان نامیم، هرگاه تعریف‌پذیر و با عضو واحد باشد و هر عضو نا صفر آن نسبت به عمل ضرب معکوس داشته باشد.

یک زیر گروه جمعی $\mathbf{a}$ از یک حلقه‌ی $\mathbf{R}$ را یک ایده‌آل چپ نامیم، اگر شرط ذیل بر قرار باشد:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{a} \qquad \alpha\mathbf{x} \in \mathbf{a}$$

یک زیر گروه جمعی $\mathbf{a}$ از یک حلقه‌ی $\mathbf{R}$ را یک ایده‌آل راست نامیم، اگر شرط ذیل بر قرار باشد:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{a} \qquad \mathbf{x}\alpha \in \mathbf{a}$$

یک زیر گروه جمعی $\mathbf{a}$ از یک حلقه‌ی $\mathbf{R}$ را یک ایده‌آل دو طرفه نامیم، اگر شرط ذیل بر قرار باشد:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{a} \qquad \alpha\mathbf{x},\ \mathbf{x}\alpha \in \mathbf{a}$$

از این به بعد در سرتاسر این درس $\mathbf{R}$ یک حلقه‌ی یکدار خواهد بود.

فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک گروه جمعی آبلی باشد نیز فرض کنیم که:

$$\circ : \mathbf{R} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$$

یک تابع باشد. برای راحتی مقدار این تابع در یک عضو دلخواه $(\alpha,\mathbf{x})$ از $\mathbf{R}\times\mathbf{M}$ یعنی $\circ((\alpha,\mathbf{x}))$ را به $\alpha.\mathbf{x}$ ، یا به اختصار به $\alpha\mathbf{x}$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین هر عضو $\mathbf{R}$ را یک اسکالر هر عضو $\mathbf{M}$ را یک بردار، تابع $\circ$ را یک ضرب اسکالر و $\alpha\mathbf{x}$ را حاصل‌ضرب اسکالر α در $\mathbf{x}$ می‌نامیم.

تعریف ۱. با نمادهای بالا گوییم $\mathbf{M}$ به انضمام ضرب اسکالر بالا یک $\mathbf{R}-$ مدول یا یک مدول روی $\mathbf{R}$ است. هرگاه چهار شرط ذیل بر قرار باشند:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{M}\ ,\ \alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \qquad (\mathbf{i})$$

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbf{R} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{M} \qquad (\alpha+\beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \qquad (\mathbf{ii})$$

$$(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{iii})$$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{M} \qquad \mathbf{1x} = \mathbf{x} \qquad (\mathbf{iv})$$

(۱ عضو واحد حلقه‌ی $\mathbf{R}$ است).

توجه: مثلاً در رابطه‌ی $(\mathbf{iii})$ ، $\alpha\beta$ با ضرب حلقه‌ی $\mathbf{R}$ محاسبه می‌شود. $(\alpha\beta)\mathbf{x}$ عبارت است از حاصل‌ضرب اسکالر $\alpha\beta$ در $\mathbf{x}$ ؛ هر یک از $\alpha(\beta\mathbf{x}),\beta\mathbf{x}$ با ضرب اسکالر محاسبه می‌شود.

مثال ۱: اگر $\mathbf{F}$ یک میدان باشد، آنگاه هر فضای برداری روی $\mathbf{F}$ یک $\mathbf{F}$ مدول است (تعریف فضاهای برداری).

مثال ۲: فرض کنیم که $\mathbf{a}$ یک ایده‌آل چپ $\mathbf{R}$ باشد.

اگر به ازاء هر $\alpha \in \mathbf{R}$ و هر عضو $\mathbf{x} \in \mathbf{a}$ ضرب اسکالر α در بردار $\mathbf{x}$ را همان حاصل‌ضرب α و $\mathbf{x}$ به عنوان دو عضو $\mathbf{R}$ (در حلقه‌ی $\mathbf{R}$) در نظر بگیریم، آنگاه $\mathbf{a}$ به یک $\mathbf{R}-$ مدول تبدیل می‌شود.

در حقیقت شرایط چهارگانه به ترتیب نتیجه‌ی: توزیع‌پذیری ضرب حلقه‌ی $\mathbf{R}$ نسبت به جمع آن، شرکت‌پذیری ضرب حلقه، یکدار بودن حلقه می‌باشد.

(بالاخص هر حلقه یک مدول روی خودش می‌باشد).

مثال ۳: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک گروه جمعی دلخواه باشد. حاصل‌ضرب اسکالر اعضای $\mathbb{Z}$ (حلقه‌ی اعداد صحیح) در اعضای $\mathbf{M}$ را مطابق ذیل تعریف می‌کنیم:

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{M}$$

$$\mathbf{nx} = \begin{cases} 0_{\mathbf{M}} \quad (\mathbf{M} \ \text{عضو خنثای گروه}\ ) & (\mathbf{n}=0) \\ (\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathbf{x}+\mathbf{x} & (\mathbf{n}>0) \\ (-\mathbf{n})(-\mathbf{x}) & (\mathbf{n}<0) \end{cases}$$

در این صورت، $\mathbf{M}$ با این ضرب اسکالر به یک $\mathbb{Z}$ - مدول تبدیل می‌شود، به عبارت دیگر هر گروه آبلی جمعی یک $\mathbb{Z}-$ مدول است.

توجه کنید که این ضرب اسکالر همان تعریف مضارب صحیح یک عضو در یک گروه جمعی است که از تعریف توان در گروه‌ها پس از تبدیل توان به مضرب و تبدیل عمل به $+$ به دست می‌آید.

(تعریف توان: $$\mathbf{x}^{\mathbf{n}} = \begin{cases} \mathbf{e} & (\mathbf{n}=0) \\ \mathbf{x}^{\mathbf{n}-\mathbf{1}}\mathbf{x} & \mathbf{n}>0 \\ (\mathbf{x}^{-1})^{-\mathbf{n}} & \mathbf{n}<0 \end{cases}$$)

(شرایط چهارگانه‌ی ضرب اسکالر را بررسی کنید).

تمرین ۱: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول باشد. ثابت کنید که به ازاء هر $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ ، و هر $\mathbf{x,y} \in \mathbf{M}$ ،

$(-\alpha)(-\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$ و $\alpha(-\mathbf{x}) = (-\alpha)\mathbf{x} = -\alpha\mathbf{x}$ و $\circ_{\mathbf{R}}\mathbf{x} = \circ_{\mathbf{M}}$ و $\alpha\circ_{\mathbf{M}} = \circ_{\mathbf{M}}$

$$\begin{cases} \alpha\mathbf{x} = \circ \\ \mathbf{R} \text{ میدان است} \end{cases} \Rightarrow \left(\alpha = \circ_{\mathbf{R}} \quad \text{یا} \quad \mathbf{x} = \circ_{\mathbf{M}}\right)$$

$$(\alpha-\beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{x} \quad , \quad \alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}$$

(توجه کنید که مثلاً $\alpha - \beta$ به معنی $\alpha + (-\beta)$ است. (تعریف تفریق)).

تمرین۲: ثابت کنید که اگر $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول باشد، آنگاه:

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}, \qquad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{M}, \qquad \alpha(\mathbf{k}\mathbf{x}) = (\mathbf{k}\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{k}(\alpha\mathbf{x})$$

تمرین ۳. فرض کنیم که $\{\mathbf{M_i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$ یک خانواده‌ی دلخواه از $\mathbf{R}-$ مدول‌ها باشد. ثابت کنید که ضرب دکارتی $\mathbf{M_i}$ ها، $\prod_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{M_i}$ ، با عمل جمع و ضرب اسکالر نقطه به نقطه‌ی ذیل یک $\mathbf{R}-$ مدول است (آن را حاصل‌ضرب مستقیم خارجی $\mathbf{M_i}$ ها می‌نامیم):

$$\forall \{\mathbf{x_i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \qquad , \qquad \{\mathbf{y_i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \in \prod \mathbf{M_i}$$

جمع:

$$\{\mathbf{x_i}\} + \{\mathbf{y_i}\} = \{\mathbf{x_i} + \mathbf{y_i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$$

ضرب اسکالر:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \qquad \forall \{\mathbf{x_i}\} \in \prod \mathbf{M_i}$$

$$\alpha\{\mathbf{x_i}\} = \{\alpha\mathbf{x_i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$$

تمرین ۴. فرض کنیم که $\{\mathbf{M_i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$ یک خانواده از $\mathbf{R}$ مدول‌ها باشد و

$$\coprod \mathbf{M_i} = \{\{\mathbf{x_i}\} \in \prod \mathbf{M_i} \mid \text{فقط عده‌ای متناهی از } \mathbf{M_i} \text{ ها نا صفرند}\}$$

ثابت کنید که $\coprod \mathbf{M_i}$ با عمل جمع و ضرب اسکالر نقطه به نقطه یک $\mathbf{R}-$ مدول است.

(آن را حاصل‌ضرب مستقیم خارجی ضعیف $\mathbf{M_i}$ ها می‌نامیم). (به بسته بودن توجه شود).

تمرین ۵. فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول، $\mathbf{X}$ یک مجموعه‌ی دلخواه و $\mathbf{M}^{\mathbf{X}}$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع بر $\mathbf{X}$ بتوی $\mathbf{M}$ باشدف ثابت کنید که $\mathbf{M}^{\mathbf{X}}$ با عمل جمع و ضرب اسکالر (نقطه به نقطه‌ی) ذیل یک $\mathbf{R}-$ مدول است:

جمع:

$$\forall \boldsymbol{f},\mathbf{g} \in \mathbf{M}^{\mathbf{X}} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} : \{\boldsymbol{f},\mathbf{g}:\mathbf{X} \to \mathbf{M}\}$$

$$(\boldsymbol{f}+\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

ضرب اسکالر:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \qquad \forall \boldsymbol{f} \in \mathbf{M}^{\mathbf{X}} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$$

$$(\alpha\boldsymbol{f})(\mathbf{x}) = \alpha\boldsymbol{f}(\mathbf{x})$$

(توجه در این تمرین $\mathbf{M}^{\mathbf{X}} = \prod_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{M_i}$ که در آن $(\mathbf{M_i} = \mathbf{M})$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{X}$).

بخش ۲.۲: هومومورفیسم‌ها (تبدیلات خطی)

تعریف ۳: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ و $\mathbf{M'}$ دو $\mathbf{R}-$ مدول باشند. یک تابع $f{:}\mathbf{M}\to\mathbf{M'}$ را یک $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم یا یک هومومورفیسم روی $\mathbf{R}$ (یا یک تبدیل خطی روی $\mathbf{R}$) نامیم. هرگاه دو شرط ذیل بر قرار باشند:

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{M}\qquad f\left(\mathbf{x}\underset{\mathbf{M}}{+}\mathbf{y}\right)=f\left(\mathbf{x}\right)\underset{\mathbf{M'}}{+}f\left(\mathbf{y}\right)\qquad(\mathbf{i})$$

$$\forall\alpha\in\mathbf{R}\quad\forall\mathbf{x}\in\mathbf{M}\qquad f\left(\alpha\underset{\mathbf{M}}{.}\mathbf{x}\right)=\alpha\underset{\mathbf{M'}}{.}f\left(\mathbf{x}\right)\qquad(\mathbf{ii})$$

(به اختصار $f\left(\alpha\mathbf{x}\right)=\alpha f\left(\mathbf{x}\right)$).

تعریف ۴. یک $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم را یک $\mathbf{R}-$ اپی‌مورفیسم (یا به اختصار، اپی‌مورفیسم) نامیم، اگر برو باشد.

یک $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم را یک $\mathbf{R}-$ مونومورفیسم (یا به اختصار، مونومورفیسم) نامیم، اگر یک‌به یک باشد.

یک $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم را یک $\mathbf{R}-$ ایزومورفیسم (به اختصار، ایزومورفیسم) نامیم، هرگاه یک‌به یک و برو باشد.

تعریف ۵. یک $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم بر یک مدول بتوی خودش را یک آندومورفیسم نامیم. هر ایزومورفیسم بر یک مدول $\mathbf{M}$ بروی خودش را یک اتومورفیسم $\mathbf{M}$ می‌نامند.

قضیه‌ی ۲.۲.۱: فرض کنیم که $f{:}\,\mathbf{M}\to\mathbf{M'}$ یک $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم (مدول‌ها) باشد. در این صورت:

$$f\left(\mathbf{o_M}\right)=\mathbf{o_{M'}}\ \text{(به اختصار}\ f\left(\circ\right)=\circ\ \text{)}\qquad(\mathbf{i})$$

$$\forall\mathbf{x}\in\mathbf{M}\qquad\left(f\left(\text{-}\mathbf{x}\right)=-f\left(\mathbf{x}\right)\right)\qquad(\mathbf{ii})$$

برهان: چون هر $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم بالاخص یک هومومورفیسم گروه‌ها است. (در اینجا از گروه جمعی $\mathbf{M}$ بتوی گروه جمعی $\mathbf{M'}$) و می‌دانیم که هر هومومورفیسم گروه‌ها عضو خنثی را به عضو خنثی و معکوس هر عضو را به معکوس مقدار آن عضو می‌برد ($f\left(\text{-}\mathbf{x}^{\text{-1}}\right)=\left(f\left(\mathbf{x}\right)^{-1}\right)$, $f\left(\mathbf{e}\right)=\mathbf{e'}$)، حکم بدیهی است (توجه کنید که در گروه‌های جمعی $\mathbf{x}^{-1}$ به $\mathbf{-x}$ و $\left(f\left(\mathbf{x}\right)\right)^{-1}$ به $-f\left(\mathbf{x}\right)$ تبدیل می‌شود).

قضیه‌ی ۲.۲.۲: ترکیب هر دو $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم یک $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم است یعنی اگر $f{:}\,\mathbf{M}\to\mathbf{M'}$ و $\mathbf{g}{:}\,\mathbf{M'}\to\mathbf{M''}$ دو $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم باشند، ترکیب $\mathbf{g}$ به f یعنی تابع $\mathbf{g}f{:}\,\mathbf{M}\to\mathbf{M''}$ با ضابطه‌ی:

$$\forall\mathbf{x}\in\mathbf{M}\qquad\left(\mathbf{g}f\right)\left(\mathbf{x}\right)=\mathbf{g}\left(f\left(\mathbf{x}\right)\right)$$

نیز یک $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم است (ثابت کنید).

قضیه‌ی ۲.۲.۳: تابع معکوس هر $\mathbf{R}-$ ایزومورفیسم یک $\mathbf{R}-$ ایزومورفیسم است، یعنی اگر $f{:}\,\mathbf{M}\to\mathbf{M'}$ یک $\mathbf{R}$ ایزومورفیسم باشد، تابع معکوس f ، $f^{\text{-1}}{:}\,\mathbf{M'}\to\mathbf{M}$ با ضابطه‌ی:

$$\forall\mathbf{x'}\in\mathbf{M'}\quad,\quad f^{\text{-1}}\left(\mathbf{x'}\right)=\mathbf{x}$$

که $f\left(\mathbf{x}\right)=\mathbf{x'}$ نیز یک ایزومورفیسم است.

برهان: معلوم است که f^{-1} یک به یک و برو است. باید ثابت کنیم که:

$$\forall\alpha\in\mathbf{R},\qquad \forall\mathbf{x}',\mathbf{y}'\in\mathbf{M},$$

$$f^{-1}(\mathbf{x}'+\mathbf{y}')=f^{-1}(\mathbf{x}')+f^{-1}(\mathbf{y}') \qquad (\mathbf{i})$$

$$f^{-1}(\alpha\mathbf{x}')=\alpha f^{-1}(\mathbf{x}') \qquad (\mathbf{ii})$$

اثبات:

$(\mathbf{i})$ $f^{-1}(\mathbf{x}')$ را $\mathbf{x}$ و $f^{-1}(\mathbf{y}')$ را $\mathbf{y}$ می‌گیریم. $f^{-1}(\mathbf{x}')=\mathbf{x}$ و $f^{-1}(\mathbf{y}')=\mathbf{y}$. بنابه تعریف f^{-1} داریم:

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}' \quad , \quad f(\mathbf{y})=\mathbf{y}'$$

باید ثابت کنیم $f^{-1}(\mathbf{x}'+\mathbf{y}')=\mathbf{x}+\mathbf{y}$ ، یا به عبارت هم ارز $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{x}'+\mathbf{y}'$ ، یا $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})$ که چون f یک همومورفیسم است، حکم ثابت است.

$(\mathbf{ii})$ هم بر همین ترتیب ثابت می‌شود.

تعریف ۶: دو $\mathbf{R}$- مدول $\mathbf{M}',\mathbf{M}$ را ایزومورفیک نامیم و می‌نویسیم $\mathbf{M}\simeq\mathbf{M}'$ ، هرگاه حداقل یک ایزومورفیسم بر $\mathbf{M}$ بتوی $\mathbf{M}'$ موجود باشد.

تعریف ۷: هسته یا کرنل یک $\mathbf{R}-$ همومورفیسم $f:\mathbf{M}\to\mathbf{M}'$ که به $\ker f$ نشان داده می‌شود مطابق ذیل تعریف می‌شود:

$$\ker f=\left\{\mathbf{x}\in\mathbf{M}\,\middle|\,f(\mathbf{x})=\circ_{\mathbf{M}'}\right\}$$

قضیه‌ی ۲.۲.۴: یک $\mathbf{R}-$ همومورفیسم $f:\mathbf{M}\to\mathbf{M}'$ یک‌به یک است اگر و فقط اگر $\ker f=\{\mathbf{o}_{\mathbf{M}}\}$.

برهان: با توجه به این که f یک همومورفیسم گروه‌ها است، حکم نتیجه‌ی بدیهی قضیه‌ی مشابه در گروه‌ها است.

تمرین ۱. ثابت کنید که خاصیت ایزومورفیک بودن در بین همه‌ی $\mathbf{R}$- مدول‌ها، منعکس، متقارن، و متعدی است.

تمرین ۲. فرض کنیم که $\mathbf{M}$ و $\mathbf{M}'$ دو $\mathbf{R}-$ مدول باشند و $f:\mathbf{M}\to\mathbf{M}'$ یک تابع باشد. ثابت کنید که f یک $\mathbf{R}$- همومورفیسم است اگر و فقط اگر:

$$f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\alpha f(\mathbf{x})+\beta f(\mathbf{y})$$

تمرین۳. فرض کنیم که $\mathbf{M}$ و $\mathbf{M}'$ دو $\mathbf{R}-$ مدول باشند و

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M},\mathbf{M}')=\{f:\mathbf{M}\to\mathbf{M}' \mid f \text{ یک } \mathbf{R} \text{ همومورفیسم است}\}$$

دو عمل جمع و ضرب اسکالر نقطه به نقطه را مطابق ذیل تعریف می‌کنیم:

جمع:

$$\forall f,\mathbf{g}\in\mathbf{Hom}(\mathbf{M},\mathbf{M}'),$$

$$\forall\mathbf{x}\in\mathbf{M}:(f+\mathbf{g})(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

ضرب:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \quad , \quad \forall f \in \mathbf{Hom}(\mathbf{M},\mathbf{M}'),$$
$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{M} \quad , \quad (\alpha f)(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$$

ثابت کنید که:

$(\mathbf{i})$ $\mathbf{Hom}(\mathbf{M},\mathbf{M}')$ با عمل جمع بالا یک گروه آبلی است. (خوش تعریفی یا بسته بودن عمل جمع را فراموش نکنید).

$(\mathbf{ii})$ اگر $\mathbf{R}$ جابه جایی باشد، آنگاه $\mathbf{Hom}(\mathbf{M},\mathbf{M}')$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر بالا یک $\mathbf{R}-$ مدول است.

$(\mathbf{iii})$ اگر $\mathbf{R}$ جابه جایی و عمل ضرب را در $\mathbf{Hom}(\mathbf{M},\mathbf{M}')$ همان ترکیب توابع تعریف کنیم، آنگاه با اعمال جمع و ضرب اسکالر بالا و این ضرب به یک $\mathbf{R}-$ جبر با عضو واحد (یکدار) تبدیل می‌شود. یعنی:

الف) $\mathbf{Hom}(\mathbf{M},\mathbf{M})$ یک $\mathbf{R}-$ مدول است. (قسمت $(\mathbf{ii})$)

ب) $\mathbf{Hom}(\mathbf{M},\mathbf{M})$ با جمع بالا و ضرب اخیر یک حلقه با عضو واحد (یکدار) است.

ج)

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \quad \forall f,\mathbf{g} \in \mathbf{Hom}(\mathbf{M},\mathbf{M}),$$
$$\alpha(f\mathbf{g}) = (\alpha f)\mathbf{g} = f(\alpha \mathbf{g})$$

(این روابط ضرب اسکالر مربوط به ساختمان مدولی را با ضرب مربوط به ساختمان حلقه پیوند می‌دهند).

[تعریف کلی یک $\mathbf{R}-$ جبر را بیان کنید.]

تعریف $\mathbf{R}-$ جبر: فرض کنید $\mathbf{M}$ یک گروه آبلی و $\mathbf{R}$ یک حلقه تعویض‌پذیر باشد آنگاه $\mathbf{M}$ را یک $\mathbf{R}-$ جبر گویند هرگاه:

۱) $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول باشد.

۲) $\mathbf{M}$ یک حلقه‌ی یکدار باشد.

۳) به ازای هر $\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2 \in \mathbf{M}$ و هر $\alpha \in \mathbf{R}$ داشته باشیم:

$$\alpha(\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2) = (\alpha \mathbf{m}_1)\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1(\alpha \mathbf{m}_2)$$

تمرین ۴. فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول و $\mathbf{n}$ یک عدد طبیعی باشد. ثابت کنید که اگر $\mathbf{R}$ تعویض‌پذیر باشد، آنگاه:

$$\mathbf{Hom}(\mathbf{R}^{\mathbf{n}},\mathbf{M}) \cong \mathbf{M}^{\mathbf{n}}$$

بخش ۲.۳: زیر مدول‌ها

تعریف ۸: یک زیر مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ از یک $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{M}$ را یک زیر مدول $\mathbf{M}$ نامیم و می‌نویسیم $\mathbf{N} \le \mathbf{M}$ هرگاه خود با اعمال جمع و ضرب اسکالر یک $\mathbf{R}-$ مدول باشد. یعنی:

آ) $\mathbf{N}$ تحت عمل جمع $\mathbf{M}$ بسته و با تحدید آن یک گروه آبلی باشد.

ب) $\mathbf{N}$ تحت ضرب اسکالر $\mathbf{M}$ بسته باشد یعنی:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{N} : \alpha \mathbf{x} \in \mathbf{N}$$

و چهار شرط مربوط به ضرب اسکالر برقرار باشد.

قضیه‌ی ۲.۳.۱: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول و $\mathbf{N}$ یک زیر مجموعه‌ی ناتهی $\mathbf{M}$ باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای آن‌که $\mathbf{N}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ باشد آن است که تحت عمل جمع و ضرب اسکالر $\mathbf{M}$ بسته باشد.

لزوم: بنابر تعریف یک زیر مدول بدیهی است.

کفایت: فرض کنیم که $\mathbf{N}$ تحت عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد. باید ثابت کنیم که:

آ) $\mathbf{N}$ با عمل جمع بسته و تحت آن یک گروه آبلی است.

ب) $\mathbf{N}$ تحت ضرب اسکالر بسته و چهار شرط مربوط به ضرب اسکالر بر قرار است.

اثبات آ): بنابر یکی از نتایج مربوط به گروه‌ها (شرط زیر گروه بودن) کافی است نشان دهیم که $\mathbf{N}$ تحت تفریق بسته است (توجه کنید که در گروه‌های جمعی $\mathbf{xy^{-1}}$ به $\mathbf{x-y}$ تبدیل می‌شود).

پس فرض می‌کنیم که $\mathbf{y,x}$ دو عضو دلخواه از $\mathbf{N}$ باشند باید ثابت کنیم $\mathbf{x-y \in N}$. اما:

$$\mathbf{x - y = x + (-y) = x + (-1y) = x(-1)y}$$

چون $\mathbf{-1 \in R}$ و $\mathbf{y \in N}$ و $\mathbf{N}$ تحت ضرب اسکالر بسته است، داریم $\mathbf{(-1)y \in N}$. از آنجا چون $\mathbf{(-1)y \in N}$ و $\mathbf{x \in N}$ و $\mathbf{N}$ تحت عمل جمع بسته است، خواهیم داشت:

$$\mathbf{x + (-1)y \in N} \text{ یا } \mathbf{x - y \in N}$$

اثبات ب): بنابه فرض $\mathbf{N}$ تحت ضرب اسکالر بسته است. چهار شرط مربوط به ضرب اسکالر را نیز $\mathbf{N}$ از $\mathbf{M}$ به ارث می‌برد.

تمرین ۱: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول و $\{\mathbf{M_i}\}_{\mathbf{i \in I}}$ یک خانواده‌ی دلخواه از زیر مدول‌های $\mathbf{M}$ باشد. ثابت کنید که $\bigcap_{\mathbf{i \in I}} \mathbf{M_i}$ نیز یک زیر مدول $\mathbf{M}$ است.

تمرین ۲: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول باشد و $\mathbf{M_1}$ و $\mathbf{M_2}$ دو زیر مدول $\mathbf{M}$ باشند. ثابت کنیدکه $\mathbf{M_1 \cup M_2}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ نیست، مگر آن‌که یکی از $\mathbf{M_1}$ و $\mathbf{M_2}$ زیر مجموعه‌ی دیگری باشد. (در حقیقت اجتماع دو زیر گروه یک زیر گروه نیست، مگر آن‌که یکی از آنها زیر مجموعه‌دیگری باشد).

تمرین ۳: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ و $\mathbf{M'}$ دو $\mathbf{R}-$ مدول باشند و $f: \mathbf{M} \to \mathbf{M'}$ یک $\mathbf{R}-$ همومورفیسم باشد. ثابت کنید که:

الف) به ازاء زیر مدول $\mathbf{N}$ از $\mathbf{M}$ ، $f(\mathbf{N})$ یک زیر مدول $\mathbf{M'}$ است.

(**یادآوری:** $f(\mathbf{N})$ عبارت است از تصویر $\mathbf{N}$ تحت f یعنی $f(\mathbf{N}) = \{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \mathbf{N}\}$)

ب) اگر $\mathbf{N'}$ یک زیر مدول $\mathbf{M'}$ باشد. آنگاه $f^{-1}(\mathbf{N'})$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ و شامل $\ker f$ است.

(**یادآوری:** $f^{-1}(\mathbf{N'})$ عبارت است از تصویر معکوس $\mathbf{N'}$ تحت f یعنی: $f^{-1}(\mathbf{N'}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{M} | f(\mathbf{x}) \in \mathbf{N'}\}$)

پ) اگر $\mathbf{N}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ و شامل $\ker f$ باشد، آنگاه $f^{-1}(f(\mathbf{N})) = \mathbf{N}$

ت) اگر f برو (پوشا) و $\mathbf{N'}$ یک زیر مدول $\mathbf{M'}$ باشد، آنگاه $f(f^{-1}(\mathbf{N'})) = \mathbf{N'}$

ث) اگر f برو باشد و $\mathbf{X}$ مجموعه‌ی همه‌ی زیر مدول‌هایی از $\mathbf{M}$ باشد که شامل $\ker f$ می‌باشند و $\mathbf{Y}$ مجموعه‌ی همه‌ی زیر مدول‌های $\mathbf{M'}$ باشد، آنگاه بین $\mathbf{y}, \mathbf{X}$ یم متناظر یک‌به یک بر قرار است. در حقیقت تابع $\theta: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ با ضابطه‌ی $\theta(\mathbf{N}) = f(\mathbf{N})$ یک‌به یک و برو است.

(توجه کنید که تابع $\psi: \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ با ضابطه‌ی $\psi(\mathbf{N'}) = f^{-1}(\mathbf{N'})$ نیز یک‌به یک و برو است و در حقیقت تابع ψ معکوس θ است).

تمرین ۴: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول، $\mathbf{N}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ و $\mathbf{a}$ یک ایده‌آل چپ $\mathbf{R}$ باشد و $\alpha \in \mathbf{R}$ و $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$. ثابت کنید که هر یک از مجموعه‌های ذیل یک زیر مدول $\mathbf{M}$ است.

آ) $\{\beta \mathbf{x} | \beta \in \mathbf{a}\}$ (آن را به $\mathbf{ax}$ نشان می‌دهیم).

ب) $\{\alpha \mathbf{y} | \mathbf{y} \in \mathbf{N}\}$ (آن را به $\alpha\mathbf{N}$ نشان می‌دهیم).

پ) $\left\{ \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathbf{n} \in \mathbb{N} \\ \alpha_i \in \mathbf{a} \\ \mathbf{x}_i \in \mathbf{N} \end{array} \right\}$ (این مجموعه را به $\mathbf{aN}$ نشان می‌دهیم).

تمرین ۵: فرض کنیم که $\mathbf{N}$ و $\mathbf{N'}$ دو زیر مدول از یک $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{M}$ باشند و

$$\mathbf{N} \underset{\mathbf{R}}{:} \mathbf{N'} = \{\alpha \in \mathbf{R} | \alpha \mathbf{N'} \subseteq \mathbf{N}\}$$

(قسمت ب تمرین قبل را ملاحظه کنید).

ثابت کنید که $\mathbf{N} \underset{\mathbf{R}}{:} \mathbf{N'}$ یک ایده‌آل چپ $\mathbf{R}$ است (بالاخص ، $\mathbf{O} : \mathbf{N'}$ را صفر ساز $\mathbf{N'}$ می‌نامند و آن را به $\mathbf{ann}$[۱] $\mathbf{N'}$ نشان می‌دهند).

۱. annihilator

بخش ۲.۴: حاصل جمع و حاصل جمع مستقیم

تعریف ۹: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول و $\{\mathbf{M_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک خانواده دلخواه از زیر مدول‌های $\mathbf{M}$ باشد. $\sum\limits_{\mathbf{i\in I}}\mathbf{M_i}$ ، حاصل جمع $\mathbf{M_i}$ ها، را مطابق ذیل تعریف می‌کنیم:

$$\sum_{\mathbf{i\in I}}\mathbf{M_i}=\{\sum_{\mathbf{i\in I}}\mathbf{x_i}\,|\,\forall\mathbf{i\in I}\,,\,\mathbf{x_i\in M_i}\,,\ \text{و فقط عده‌ای متناهی از } \mathbf{x_i} \text{ ها نا صفرند}\}$$

(توجه کنید که $\sum\mathbf{x_i}$ به معنی حاصل‌جمع $\mathbf{x_i}$ ها نا صفر است مگر آن که همه‌ی $\mathbf{x_i}$ ها صفر باشند که در این صورت $\sum\mathbf{x_i}$ را صفر اختیار می‌کنیم).

قضیه‌ی ۲.۴.۱: با نمادهای بالا $\sum\mathbf{M_i}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ است (ثابت کنید).

تعریف ۱۰: فرض کنیم که $\{\mathbf{M_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک خانواده از زیر مدول‌های یک $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{M}$ باشد، به طوری‌که به ازاء هر دو عضو $\sum\mathbf{y_i}\in\sum\mathbf{M_i}$ و $\sum\mathbf{x_i}$ از $\sum\mathbf{x_i}=\sum\mathbf{y_i}$ نتیجه شود $\forall\mathbf{i\in I}\,(\mathbf{x_i=y_i})$. به عبارت هم ارز نمایش هر عضو $\sum\mathbf{M_i}$ به صورت $\sum\mathbf{x_i}$ منحصر به فرد باشد. در این صورت گوییم $\sum\mathbf{M_i}$ یک حاصل‌جمع مستقیم است و آن را به صورت $\bigoplus\limits_{\mathbf{i\in I}}\mathbf{M_i}$ نمایش می‌دهیم ($\sum\mathbf{M_i}=\oplus\mathbf{M_i}$). بالاخص اگر $\sum\mathbf{M_i}=\mathbf{M}$ آنگاه می‌نویسیم $\mathbf{M}=\oplus\mathbf{M_i}$

قضیه‌ی ۲.۴.۲: فرض کنیم که $\{\mathbf{M_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک خانواده‌ی دلخواه از زیر مدول‌های یک $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{M}$ باشد. سه شرط ذیل دو به دو هم ارزند.

I) $\mathbf{M}=\bigoplus\limits_{\mathbf{i\in I}}\mathbf{M_i}$

II) $(\mathbf{i})$ $\mathbf{M}=\sum\mathbf{M_i}$, $(\mathbf{ii})$ به ازاء هر $\sum\mathbf{x_i}\in\sum\mathbf{M_i}$ از $\sum\mathbf{x_i}=\circ$ نتیجه می‌شود $\forall\mathbf{i\in I}\,(\mathbf{x_i}=\circ)$

III) $(\mathbf{i})$ $\mathbf{M}=\sum\mathbf{M_i}$, $(\mathbf{ii})$ به ازاء هر $\mathbf{i\in I}$ $\quad \mathbf{M_i}\cap\left(\sum\limits_{\mathbf{i\neq j\in I}}\mathbf{M_j}\right)=\{\circ\}$

برهان $\mathbf{I\to II}$: $(\mathbf{i})$ طبق تعریف بر قرار است. برای اثبات $(\mathbf{ii})$ فرض کنیم که $\sum\mathbf{x_i}\in\sum\mathbf{M_i}$ به طوری‌که $\sum\mathbf{x_i}=\circ$ باید نشان دهیم که $\forall\mathbf{i}\ (\mathbf{x_i}=\circ)$ داریم:

$$\sum\mathbf{x_i}=\circ\Rightarrow\sum_{\mathbf{i\in I}}\mathbf{x_i}=\sum_{\mathbf{i\in I}}\circ\left(=\sum_{\mathbf{i\in I}}\mathbf{y_i}\right)[\text{بنابه تعریف حاصل‌جمع مستقیم}]\Rightarrow\forall\mathbf{i}(\mathbf{x_i=y_i}=\circ)$$

$\mathbf{II\Rightarrow III}$ باید ثابت کنیم که هر چه باشد $\mathbf{i\in I}$، $\mathbf{M_i}\cap\left(\sum\limits_{\mathbf{i\neq j}}\mathbf{M_j}\right)=\{\circ\}$. معلوم است $\{\circ\}\subset\mathbf{M_i}\cap\left(\sum\limits_{\mathbf{j\neq i}}\mathbf{M_j}\right)$.

برای اثبات جهت معکوس یعنی $\mathbf{M_i}\cap\left(\sum\limits_{\mathbf{j\neq i}}\mathbf{M_j}\right)\subset\{\circ\}$ ، فرض کنیم که $\mathbf{x}$ یک عضو دلخواه از $\mathbf{M_i}\cap\left(\sum\limits_{\mathbf{j\neq i}}\mathbf{M_j}\right)$ باشد. در این‌صورت $\sum\limits_{\mathbf{j\neq i}}\mathbf{x_j}\in\sum\mathbf{M_j}$ و $\exists\,\mathbf{y_i\in M_i}$ به طوری‌که $\begin{cases}\mathbf{x=y_i}\\ \mathbf{x}=\sum\limits_{\mathbf{j\neq i}}\mathbf{x_j}\end{cases}$. از آنجا، به ازاء $\mathbf{x_i=-y_i}$ داریم

$\sum_{j\in I} x_j = \circ$. از این رابطه بنابه $II(ii)$ نتیجه می‌شود که $\forall j \in I\ (x_j = \circ)$ بالاخص $x_i = \circ$. در نتیجه $x = y_i = -x_i = \circ \in \{\circ\}$

$III \to I$ کافی است نشان دهیم که به ازای هر دو عضو $\sum x_i\ ,\ \sum y_i \in \sum M_i$ ، از $\sum x_i = \sum y_i$ نتیجه می‌شود $\forall i\ (x_i = y_i)$.

فرض کنیم که k یک اندیس دلخواه (ولی از این به بعد ثابت) از I باشد. ثابت می‌کنیم $x_k = y_k$. اما

$$\sum x_i = \sum y_i \Rightarrow \sum (x_i - y_i) = \circ \Rightarrow x_k - y_k = -\sum_{i\neq k}(x_i - y_i) \in \begin{cases} M_k \\ \sum_{i\neq k} M_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_k - y_k \in M_k \bigcap \sum_{i\neq k} M_i\ [\text{بنابه فرض}] = \{\circ\} \Rightarrow x_k - y_k = \circ \Rightarrow x_k = y_k$$

تعریف ۱۱. فرض کنیم که M یک R مدول و N یک زیر مدول M باشد. گوییم N یک جمعک مستقیم M است، هرگاه (حداقل) یک زیر مدول N' از M موجود باشد به طوری که $M = N \oplus N'$

تمرین ۱: ثابت کنید که در هر فضای برداری با بعد متناهی هر زیر فضا یک جمعک مستقیم آن فضای برداری است. (بعداً در تمرین ۲ از بخش ۲.۱۰ خواهیم دید که این نتیجه برای بعد نامتناهی نیز بر قرار است).

تمرین ۲: مدولی ارائه دهید که دارای زیر مدولی باشد که یک جمعک مستقیم نیست ($\mathbb{Z}$ را به عنوان یک $\mathbb{Z}-$ مدول در نظر بگیرید).

تمرین ۳: فرض کنیم که $\{M_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از زیر مدول‌های یک $R-$ مدول M باشد. ثابت کنید که اگر $\sum M_i$ جمع مستقیم باشد، آنگاه $\sum_{i\in I} M_i \approx \coprod_{i\in I} M_i$. (اثبات خوش تعریفی را فراموش نکنید).

بخش ۲.۵: مدول‌های خارج قسمتی

تعریف ۱۳: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول و $\mathbf{N}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ باشد و $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}=\left\{\mathbf{x}+\mathbf{N} \mid \mathbf{x}\in\mathbf{M}\right\}$ که در آن

$\mathbf{x}+\mathbf{N}=\left\{\mathbf{x}+\mathbf{n} \mid \mathbf{n}\in\mathbf{N}\right\}$

می‌دانیم که $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$ با عمل جمع

$$\forall\, \mathbf{x}+\mathbf{N},\, \mathbf{y}+\mathbf{N}\in\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}} \quad (\mathbf{x}+\mathbf{N}) \underset{\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}}{+} (\mathbf{y}+\mathbf{N}) = (\mathbf{x} \underset{\mathbf{M}}{+} \mathbf{y})+\mathbf{N}$$

خوش تعریف و یک گروه آبلی است (گروه خارج قسمتی $\mathbf{M}$ بر $\mathbf{N}$).

هدف ما این است که $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$ را به یک $\mathbf{R}-$ مدول تبدیل کنیم. برای این منظور یک ضرب اسکالر اعضای $\mathbf{R}$ در اعضای $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$ را مطابق ذیل تعریف می‌کنیم:

$$\forall \alpha\in\mathbf{R}, \qquad \forall\, \mathbf{x}+\mathbf{N}\in\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}},$$

داریم:

$$\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{N})=\alpha\mathbf{x}+\mathbf{N}$$

قضیه‌ی ۲.۵.۱: با نمادهای بالا، $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر مذکور یک $\mathbf{R}-$ مدول است.

برهان: چنان‌که در گروه‌ها دیده‌ایم $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$ با عمل جمع مذکور یک گروه آبلی است. پس برای تکمیل اثبات، کافی است ثابت کنیم که ضرب اسکالر خوش تعریف است و چهار شرط ذیل بر قرار می‌باشند:

$$\forall \alpha\in\mathbf{R},\ \forall\, \mathbf{x}+\mathbf{N},\ \mathbf{y}+\mathbf{N}\in\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}, \tag{i}$$
$$\alpha\left[(\mathbf{x}+\mathbf{N})+(\mathbf{y}+\mathbf{N})\right]=\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{N})+\alpha(\mathbf{y}+\mathbf{N}),$$

$$\forall \alpha,\beta\in\mathbf{R},\ \forall\, \mathbf{x}+\mathbf{N}\in\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}, \tag{ii}$$
$$(\alpha+\beta)(\mathbf{x}+\mathbf{N})=\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{N})+\beta(\mathbf{x}+\mathbf{N}),$$

$$\forall \alpha,\beta\in\mathbf{R},\ \forall\, \mathbf{x}+\mathbf{N}\in\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}, \tag{iii}$$
$$(\alpha\beta)(\mathbf{x}+\mathbf{N})=\alpha\big(\beta(\mathbf{x}+\mathbf{N})\big),$$

$$\forall\, \mathbf{x}+\mathbf{N}\in\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}} \qquad \mathbf{1}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}+\mathbf{N})=\mathbf{x}+\mathbf{N}. \tag{iv}$$

خوش تعریفی ضرب اسکالر: باید ثابت کنیم که به ازاء هر $\alpha \in \mathbf{R}$ و هر دو عضو $\mathbf{y}+\mathbf{N} \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$ و $\mathbf{x}+\mathbf{N}$ از $\mathbf{x}+\mathbf{N}=\mathbf{y}+\mathbf{N}$ نتیجه می‌شود $\alpha\mathbf{x}+\mathbf{N}=\alpha\mathbf{y}+\mathbf{N}$. اما:

$$\mathbf{x}+\mathbf{N}=\mathbf{y}+\mathbf{N}[\text{یکی از نتایج در گروه‌ها}] \Rightarrow \mathbf{x}-\mathbf{y}\in\mathbf{N}[\text{زیر مدول } \mathbf{N}\subset\mathbf{M}] \Rightarrow \alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})\in\mathbf{N}[\text{تمرین ۱ از بخش ۲.۱}]$$
$$\Rightarrow \alpha\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}\in\mathbf{N}[\text{یکی از نتایج در گروه‌ها}] \Rightarrow \alpha\mathbf{x}+\mathbf{N}=\alpha\mathbf{y}+\mathbf{N}$$

اثبات $(\mathbf{i})$:

$$\alpha\left[(\mathbf{x}+\mathbf{N})+(\mathbf{y}+\mathbf{N})\right]\left[\text{تعریف جمع } \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}\right]=\alpha\left[(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{N}\right]\left[\text{تعریف ضرب اسکالر } \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}\right]=$$
$$\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{N}[\text{شرط } \mathbf{i} \text{ در تعریف مدول‌ها برای } \mathbf{M}]=(\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y})+\mathbf{N}\left[\text{تعریف جمع } \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}\right]=(\alpha\mathbf{x}+\mathbf{N})+(\alpha\mathbf{y}+\mathbf{N})$$
$$[\text{تعریف ضرب اسکالر } \mathbf{M}]=\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{N})+\alpha(\mathbf{y}+\mathbf{N})=\left[\text{تعریف ضرب اسکالر } \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}\right]=\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{N})+\alpha(\mathbf{y}+\mathbf{N})$$

سه شرط دیگر را ثابت کنید.

قضیه‌ی ۲.۵.۲: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول و $\mathbf{N}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ باشد. در این صورت تابع $\mathbf{q}:\mathbf{M}\to\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$ با ضابطه‌ی $\forall\mathbf{x}\in\mathbf{M}: \mathbf{q}(\mathbf{x})=\mathbf{x}+\mathbf{N}$

یک اپی‌مورفیسم با هسته‌ی $\mathbf{N}$ است. (ثابت کنید. آن را اپی‌مورفیسم **قانونی** یا **طبیعی** می‌نامند).

قضیه‌ی ۲.۵.۳: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ و $\mathbf{M}'$ دو $\mathbf{R}-$ مدول باشند و $\boldsymbol{f}:\mathbf{M}\to\mathbf{M}'$ یک $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم باشد. در این صورت:

$$\frac{\mathbf{M}}{\ker\boldsymbol{f}}\cong\boldsymbol{f}(\mathbf{M})$$

($\boldsymbol{f}(\mathbf{M})$ تصویر $\mathbf{M}$ تحت $\boldsymbol{f}$ است). (ثابت کنید).

تمرین ۱. فرض کنیم که $\mathbf{M}_1$ و $\mathbf{M}_2$ دو زیر مدول از یک $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{M}$ باشند، ثابت کنید:

$$\frac{\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2}{\mathbf{M}_1}\simeq\frac{\mathbf{M}_2}{\mathbf{M}_1\cap\mathbf{M}_2}$$

تمرین ۲. فرض کنیم که $\mathbf{N}$ یک زیر مدول از یک $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{M}$ و $\mathbf{a}$ یک ایده‌آل چپ $\mathbf{R}$ باشد. ثابت کنید:

$$\mathbf{a}\left(\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}\right)\equiv\frac{\mathbf{aM}+\mathbf{N}}{\mathbf{N}}$$

(برای تعریف به تمرین‌های بخش ۳ مراجعه کنید).

بخش ۲.۶: مدول‌های آزاد

یادآوری: مقطع هر تعداد از زیر مدول‌های یک $\mathbf{R}-$ مدول، یک زیر مدول است (تمرین ۱ از بخش ۲.۳).

تعریف ۱۳: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول و $\mathbf{A}$ یک زیر مجموعه‌ی $\mathbf{M}$ باشد. می‌دانیم که $\bigcap_{\mathbf{A}\subseteq\mathbf{L}\leq\mathbf{M}}\mathbf{L}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ است (یادآوری بالا).

این زیر مدول را به $(\mathbf{A})$ نشان می‌دهیم و آن را زیر مدول تولید شده توسط $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}$ را یک مولد این زیر مدول می‌نامیم. در صورتی که $\mathbf{A}$ یک مجموعه‌ی متناهی $\{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\}$ باشد، برای راحتی به جای $(\{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\})$ می‌نویسیم $(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)$.

قضیه‌ی ۲.۶.۱: با نمادهای بالا داریم:

$$(\mathbf{A})=\bigcap_{\mathbf{A}\subseteq\mathbf{L}\leq\mathbf{M}}\mathbf{L}=\begin{cases}\left\{\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{a}_n \,\middle|\, \begin{matrix}\mathbf{n}\in\mathbb{N}\\ \alpha_i\in\mathbf{R}\\ \mathbf{a}_i\in\mathbf{A}\end{matrix}\right\} & (\mathbf{A}\neq\emptyset)\\ \mathbf{o}(=\{\circ\}) & \mathbf{A}=\emptyset\end{cases}$$

برهان: به ازای $\mathbf{A}=\emptyset$ حکم بدیهی است یعنی $\bigcap_{\emptyset\subseteq\mathbf{L}\leq\mathbf{M}}\mathbf{L}=\circ$. چون که $\mathbf{L}$ می‌تواند زیر مدول بدیهی $\mathbf{o}$ را که در شرط $\emptyset\subseteq\mathbf{o}\leq\mathbf{M}$ صدق می‌کند، اختیار کند.

پس فرض می‌کنیم که $\mathbf{A}\neq\emptyset$. باید ثابت کنیم که $\bigcap_{\mathbf{A}\subseteq\mathbf{L}\leq\mathbf{M}}\mathbf{L}=\mathbf{L}(\mathbf{A})$ که در آن:

$$\mathbf{L}(\mathbf{A})=\left\{\alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{a}_n \,\middle|\, \begin{matrix}\mathbf{n}\in\mathbb{N}\\ \alpha_i\in\mathbf{R}\\ \mathbf{a}_i\in\mathbf{A}\end{matrix}\right\}=\{\sum_{\mathbf{a}\in\mathbf{A}}\alpha_\mathbf{a}\mathbf{a}\,|$$ و فقط عده‌ای متناهی از $\alpha_\mathbf{i}$ ها نا صفرند $\mathbf{a}\in\mathbf{A}\ \&\ \alpha_\mathbf{a}\in\mathbf{R}\}$

اثبات: $\bigcap_{\mathbf{A}\subseteq\mathbf{L}\leq\mathbf{M}}\mathbf{L}\subseteq\mathbf{L}(\mathbf{A})$: به آسانی ثابت می‌شود که $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ و شامل $\mathbf{A}$ است (ثابت کنید). و از آنجا چون $\mathbf{L}$ می‌تواند $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ را اختیار کند در نتیجه حکم ثابت است.

برای اثبات $\mathbf{L}(\mathbf{A})\subseteq\bigcap_{\mathbf{A}\subseteq\mathbf{L}\leq\mathbf{M}}\mathbf{L}$ کافی است نشان دهیم که به ازاء هر $\mathbf{L}$ ی که در شرط $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{L}\leq\mathbf{M}$ صدق کند، داریم $\mathbf{L}(\mathbf{A})\subseteq\mathbf{L}$. پس فرض کنیم که $\mathbf{L}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ و شامل $\mathbf{A}$ باشد. باید ثابت کنیم که هر عضو $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ یک عضو $\mathbf{L}$ است. فرض کنیم که $\mathbf{x}\in\mathbf{L}(\mathbf{A})$. بنابه تعریف $\mathbf{L}(\mathbf{A})$، $\mathbf{x}$ را می‌توان به صورت $\mathbf{x}=\sum_{\mathbf{a}\in\mathbf{A}}\alpha_\mathbf{a}\mathbf{a}$ نوشت که در آن $\alpha_\mathbf{a}\in\mathbf{R}$. چون $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{L}$ پس $\mathbf{a}\in\mathbf{L}$ و $\forall\mathbf{a}\in\mathbf{A}$.

از آنجا چون $\mathbf{L}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ و در نتیجه تحت اعمال جمع و ضرب اسکالر بسته است، خواهیم داشت:

$$\mathbf{x}=\sum\alpha_\mathbf{a}\mathbf{a}\in\mathbf{L}$$

تعریف ۱۴: یک $\mathbf{R}-$ مدول را به طور متناهی تولید شونده (تولید شده) نامیم هرگاه حداقل یک مولد متناهی داشته باشد.

تعریف ۱۵: یک دنباله‌ی متناهی مانند $\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_n}$ از اعضای یک $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{M}$ را (روی $\mathbf{R}$) مستقل خطی نامیم، هرگاه به ازاء هر رشته‌ی (دنباله‌ی) $\mathbf{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ از اعضای $\mathbf{R}$ از

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \circ$$

نتیجه شود $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \circ$

تعریف: یک زیر مجموعه‌ی $\mathbf{X}$ از $\mathbf{M}$ را مستقل خطی نامیم، هرگاه هر رشته‌ی متناهی از اعضای دو به دو متمایز آن مستقل خطی باشند.

تعریف ۱۶: یک زیر مجموعه‌ی $\mathbf{A}$ از یک $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{M}$ را یک مبنای $\mathbf{M}$ نامیم، هرگاه $\mathbf{A}$ هم یک مولد $\mathbf{M}$ و هم مستقل خطی باشد.

یادآوری: اگر $\mathbf{X}$ یک زیر مجموعه باشد، آنگاه $\mathbf{R}^{\mathbf{X}}$ یعنی مجموعه‌ی همه‌ی توابع بر $\mathbf{X}$ بتوی $\mathbf{R}$ و هم چنین

$$\mathbf{R}^{(X)} = \{ f: X \to R \mid \text{فقط عده‌ای متناهی از مقادیر } f \text{ نا صفرند} \}$$

فرض کنیم که $\mathbf{X}$ یک مجموعه باشد. به ازاء هر $\mathbf{x \in X}$ ، $\mathbf{e_x \in R^{(X)}}$ را مطابق ذیل تعریف می‌کنیم:

$$\forall y \in X \qquad e_x(y) = \begin{cases} \circ & (y \neq x) \\ 1 & (y = x) \end{cases}$$

مثال: به ازاء $\mathbf{X = \{1,2,\ldots,n\}}$ داریم:

$$e_1(1) = 1, e_1(2) = \cdots = e_1(n) = \circ \Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix} = (1,\circ,\circ,\ldots,\circ)$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \circ & 1 & \cdots & \circ \end{pmatrix} = (\circ,1,\circ,\ldots,\circ)$$

$$\vdots$$

$$e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \circ & \circ & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\circ,\circ,\circ,\ldots,1)$$

قرار می‌دهیم $\mathbf{A = \{e_x \mid x \in X\}}$ ، در این صورت داریم:

قضیه‌ی ۲.۶.۲: $\mathbf{A}$ یک مبنای $\mathbf{R^{(X)}}$ است.

برهان: اولاً $\mathbf{A}$ یک مولد $\mathbf{R^{(X)}}$ است: فرض کنیم که f یک عضو دلخواه از $\mathbf{R^{(X)}}$ باشد. باید ثابت کنیم که f یک ترکیب خطی از عده‌ای متناهی از اعضای $\mathbf{A}$ است. بنابه تعریف $\mathbf{R^{(X)}}$ مقدار f فقط در عده‌ای متناهی از اعضای $\mathbf{X}$ مانند $\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_n}$ نا صفر است.

ادعا می‌کنیم که به ازای $\alpha_i = f(x_i)$ داریم:

$$f = \alpha_1 e_{x_1} + \alpha_2 e_{x_2} + \cdots + \alpha_n e_{x_n}$$

برای اثبات این فرمول باید نشان دهیم که به ازاء هر $x \in X$

$$f(x) = \left(\alpha_1 e_{x_1} + \cdots + \alpha_n e_{x_n}\right)(x)$$

برای این منظور دو حالت تمیز می‌دهیم:

حالت (i). x هیچ‌کدام از $x_n, \ldots, x_2, x_1$ نیست. در این حالت بنابر انتخاب x_iها، داریم $f(x) = 0$. هم‌چنین بنابر تعریف e_{x_i} داریم:

$$\left(\alpha_1 e_{x_1} + \cdots + \alpha_n e_{x_n}\right)(x)[\text{بنابه تعریف جمع و ضرب اسکالر در } R^X \text{ یا } R^{(X)}] = \alpha_1 e_{x_1}(x) + \cdots + \alpha_n e_{x_n}(x) = \alpha_1 0 + \cdots + \alpha_n 0 = 0$$

حالت (ii). x یکی از $x_n, \ldots, x_2, x_1$ ، مثلاً x_i است. در این حالت، بنابر انتخاب α_i ها، داریم: $f(x_i) = \alpha_i$.

هم‌چنین بنابه تعریف e_{x_j} ها داریم:

$$\left(\alpha_1 e_{x_1} + \cdots + \alpha_n e_{x_n}\right)(x) = \alpha_i e_{x_i}(x_i) = \alpha_i .1 = \alpha_i$$

ثانیاً A مستقل خطی است: باید ثابت کنیم که هر رشته‌ی متناهی از اعضای متمایز A مانند $e_{x_1}, e_{x_2}, \ldots, e_{x_n}$ مستقل خطی است.

پس فرض کنیم که $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$ به طوری که:

$$(1) \qquad \alpha_1 e_{x_1} + \cdots + \alpha_n e_{x_n} = 0$$

(توجه کنید که صفر طرف دوم تابع ثابت صفر است).

باید نشان دهیم که:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

مثلاً برای نشان دادن این که $\alpha_i = 0$ ، کافی است طرفین رابطه‌ی (۱) را بر x_i اثر دهیم.

و حکم بدین ترتیب بر قرار است.

تعریف ۱۷: یک $R-$ مدول را آزاد نامیم هرگاه در کاتگوری همه‌ی $R-$ مدول‌ها یک شیئ آزاد باشد.

(توجه کنید که در این کاتگوری اشیاء $R-$ مدول‌ها و مورفیسم‌ها $R-$ هومومورفیسم‌ها می‌باشند).

قضیه‌ی ۲.۶.۳: یک $R-$ مدول M آزاد است اگر و فقط اگر حداقل یک مبنا داشته باشد.

برهان: قسمت اگر: فرض کنیم که A یک مبنای M باشد. ثابت می‌کنیم که در کاتگوری $R-$ مدول‌ها M بر مجموعه‌ی A با تابع شمول $i : A \to M$ (با ضابطه‌ی $i(a) = a$) آزاد است.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{ناشمول}"] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[d, "h"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

باید ثابت کنیم که به ازاء هر $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{M'}$ و هر تابع $f: \mathbf{A} \to \mathbf{M'}$ یک و فقط یک $\mathbf{R}-$ هومورفیسم $\mathbf{h}: \mathbf{M} \to \mathbf{M'}$ وجود دارد به طوری‌که $\mathbf{hi}=f$.

یکتایی $\mathbf{h}$: فرض کنیم که $\mathbf{h}: \mathbf{M} \to \mathbf{M'}$ یک $\mathbf{R}$- هومورفیسم باشد. به طوری‌که $\mathbf{hi}=f$ ، در جستجوی ضابطه‌ی منحصر به فرد برای $\mathbf{h}$ هستیم.

به ازاء هر $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ داریم:

$$\mathbf{hi}(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})$$

یا
$$\mathbf{h}(\mathbf{i}(\mathbf{a})) = f(\mathbf{a})$$

یا
$$*\mathbf{h}(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})$$

حال فرض کنیم که $\mathbf{x}$ یک عضو دلخواه از $\mathbf{M}$ باشد. چون $\mathbf{A}$ یک مبنا، بالاخص یک مولد $\mathbf{M}$ است، $\mathbf{x}$ را می‌توان به صورت:

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n$$

نوشت که در آن $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ، $\alpha_\mathbf{i} \in \mathbf{R}$ و $\alpha_\mathbf{i} \in \mathbf{A}$ ، از آنجا داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{h}(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n) \quad [\mathbf{h} \text{ یک } \mathbf{R}- \text{ هومورفیسم است}]\\ &= \alpha_1\mathbf{h}(\mathbf{a}_1) + \cdots + \alpha_n\mathbf{h}(\mathbf{a}_n) \quad [\text{بنابه رابطه‌ی } *]\\ &= \alpha_1 f(\mathbf{a}_1) + \cdots + \alpha_n f(\mathbf{a}_n).\end{aligned}$$

پس $\mathbf{h}$ ، در صورت وجود منحصر به فرد است و ناگزیر باید با ضابطه‌ی بالا تعریف شود.

وجود $\mathbf{h}$: ثابت کنید که $\mathbf{h}$ با ضابطه‌ی بالا خوش تعریف (یک تابع) و یک $\mathbf{R}-$ هومورفیسم است. به طوری‌که $\mathbf{hi} = f$.

قسمت فقط اگر: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ در کاتگوری $\mathbf{R}-$ مدول‌ها بر یک مجموعه‌ی $\mathbf{X}$ آزاد باشد. باید ثابت کنیم که $\mathbf{M}$ حداقل یک مبنا دارد. می‌دانیم که مجموعه‌ی $(\mathbf{A} =)\{\mathbf{e}_\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbf{M}\}$ یک مبنای $\mathbf{R}^{(\mathbf{X})}$ است (قضیه‌ی ۲.۶.۲). از آنجا به موجب قسمت «اگر» همین قضیه، $\mathbf{R}^{(\mathbf{X})}$ بر $\mathbf{A}$ آزاد است. اما $\mathbf{A}$ با $\mathbf{X}$ هم عدد است (ضابطه‌ی $\mathbf{x} \to \mathbf{e}_\mathbf{x}$ یک متناظر یک‌به یک است). در نتیجه $\mathbf{R}^{(\mathbf{X})}$ بر $\mathbf{X}$ نیز آزاد است (تمرین ۷ از بخش ۱.۱). تا به حال می‌دانیم که $\mathbf{M}$ و $\mathbf{R}^{(\mathbf{X})}$ ایزومورفیک هستند (قضیه‌ی ۱.۱.۲). یعنی یک $\mathbf{R}-$ ایزومورفیسم، ($\mathbf{R}-$ هومورفیسم یک به یک و برو) مانند θ ، $\theta: \mathbf{R}^{(\mathbf{X})} \to \mathbf{M}$ موجود است. به آسانی ثابت می‌شود که $\theta(\mathbf{A})$ (تصویر $\mathbf{A}$ تحت θ) یک مبنای $\mathbf{M}$ است (ثابت کنید).

تمرین ۱: فرض کنیم که $\{\mathbf{M}_\mathbf{i}\}_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}}$ یک خانواده از زیر مدول‌های یک $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{M}$ باشد. ثابت کنید که $\sum \mathbf{M}_\mathbf{i} = \left(\underbrace{\bigcup \mathbf{M}_\mathbf{i}}_{\mathbf{A}}\right)$.

تمرین ۲: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ و $\mathbf{M'}$ دو $\mathbf{R}-$ مدول باشند و $f,\mathbf{g}: \mathbf{M} \to \mathbf{M'}$ دو $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم باشد. نیز فرض کنیم که $\mathbf{A}$ یک مولد $\mathbf{M}$ باشد. ثابت کنید که:

آ) اگر به ازاء هر $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ داشته باشیم $f(\mathbf{a}) = \mathbf{g}(\mathbf{a})$ ، آنگاه داریم $f = \mathbf{g}$

ب) اگر به ازاء هر $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ ، $f(\mathbf{a}) = \circ$ ، آنگاه $f = \circ$ (صفر طرف دوم رابطه‌ی اخیر نمایانگر صفر $\mathbf{Hom}(\mathbf{M},\mathbf{M'})$ یعنی تابع ثابت صفر است).

تمرین ۳: فرض کنیم که $\mathbf{R'}$ مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های $(\alpha_{\mathbf{ij}})(1 \le \mathbf{i},1 < \infty)$ روی $\mathbf{R}$ (با جمله‌های متعلق به $\mathbf{R}$) باشد به طوری‌که به ازاء هر $\mathbf{i}$ ، فقط به ازاء عده‌ای متناهی از $\mathbf{j}$ ها، $\alpha_{\mathbf{ij}}$ ها نا صفرند (توجه کنید که هر ستون این ماتریس یک رشته‌ی نامتناهی از اعضای $\mathbf{R}$ و هر سطر آن یک رشته‌ی نامتناهی از اعضای $\mathbf{R}$ که از مرتبه‌ای به بعد جمله-های آن همگی صفرند، می‌باشد).

در $\mathbf{R'}$ دو عمل جمع و ضرب (مشابه اعمال جمع و ضرب ماتریس‌های متناهی)را تعریف و ثابت کنید که:

آ) $\mathbf{R'}$ با این اعمال یک حلقه با عضو واحد است.

ب) $\mathbf{R'}$ به عنوان یک مدول روی خودش دارای یک مبنای یک عضوی، دارای یک مبنای دو عضوی، ... ، و به طور کلی به ازاء هر عدد طبیعی $\mathbf{n}$ دارای یک مبنای $\mathbf{n}$ عضوی است.

(بنابراین لازم نیست که عده‌ی اعضای هر دو مبنای یک $\mathbf{R}-$ مدول مساوی باشند. ثابت می‌شود که اگر یک حلقه تعویض‌پذیر باشد آنگاه اعداد اصلی (عده‌ی) هر دو مبنای یک مدول روی آن مساویند. نیز ثابت می‌شود که اگر یک مدول روی یک حلقه (چه تعویض‌پذیر و چه تعویض ناپذیر) دارای یک مبنای نامتناهی باشد، آنگاه هر مبنای آن نامتناهی است و عده‌ی اعضای هر دو مبنا مساویند).

تمرین ۴: ثابت کنید که هر فضای برداری به طور متناهی تولید شونده حداقل یک مبنا دارد (در حقیقت هر فضای برداری حداقل یک مبنا دارد). (تمرین ۴ از ۲.۱۰ را ملاحظه کنید).

تمرین ۵: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ و $\mathbf{M'}$ دو $\mathbf{R}-$ مدول باشند نیز فرض کنیم که $\{\mathbf{x_i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$ یک مبنای $\mathbf{M}$ و $\{\mathbf{y_i}\}_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$ یک خانواده‌ی دلخواه از اعضای $\mathbf{M'}$ باشد. ثابت کنید که یک و فقط یک $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم $f: \mathbf{M} \to \mathbf{M'}$ موجود است به طوری‌که $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{I}\ \left(f(\mathbf{x_i}) = \mathbf{y_i}\right)$

(به اصطلاح هر $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم $f: \mathbf{M} \to \mathbf{M'}$ به‌وسیله‌ی مقادیرش بر اعضای یک مبنای $\mathbf{M}$ کاملاً مشخص است).

تمرین ۶: ثابت کنید که هر $\mathbf{R}-$ مدول، تصویر هومومورفیکی یک مدول آزاد است یعنی اگر $\mathbf{P}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول دلخواه باشد، آنگاه یک $\mathbf{R}-$ مدول آزاد $\mathbf{F}$ و یک اپی‌مورفیسم $\mathbf{t}: \mathbf{F} \to \mathbf{P}$ موجود است.

تمرین ۷: فرض کنید که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول دلخواه و $\mathbf{F}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول آزاد با مبنای $\mathbf{X'}$ باشد. ثابت کنید که اگر $\mathbf{X}$ یک مجموعه‌ی هم عدد با $\mathbf{X'}$ باشد، آنگاه:

$$\mathbf{Hom}(\mathbf{F},\mathbf{M}) \approx \mathbf{M}^{\mathbf{x}}$$

بالاخص به ازای هر مجموعه‌ی X ،

$$\mathbf{Hom}\left(\mathbf{R}^{(X)},\mathbf{M}\right) \approx \mathbf{M}^{(X)}$$

تمرین ۸: احکام ذیل را که در فضاهای برداری برقرارند در مدول‌ها باطل کنید:

آ) هر مدول به طور متناهی تولید شونده حداقل یک مبنا دارد.

ب) عده‌ی اعضای هر دو مبنا یکی است.

پ) از مولد می‌توان یک مبنا استخراج نمود.

ت) هر عده از بردارهای مستقل خطی قابل تکمیل به یک مبنا است.

بخش ۲.۷: ضرب تانسوری

یادآوری: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ و $\mathbf{N}$ دو $\mathbf{R}-$ مدول باشند. می‌دانیم که $\mathbf{R}^{(\mathbf{M}\times\mathbf{N})}$ عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی توابع مانند f بر $\mathbf{M}\times\mathbf{N}$ (ضرب دکارتی) بتوی $\mathbf{R}$ به طوری‌که مجموعه‌ی:

$$\left\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbf{M}\times\mathbf{N} \mid f(\mathbf{x},\mathbf{y})\neq\circ\right\}$$

متناهی باشد. نیز می‌دانیم که هر عضو $\mathbf{R}^{(\mathbf{M}\times\mathbf{N})}$ را می‌توان به طور منحصر به فرد به صورت $\sum\alpha_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}\mathbf{e}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}$ نوشت که در آن:

$$\mathbf{e}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}:\mathbf{M}\times\mathbf{N}\to\mathbf{R}$$

با ضابطه‌ی:

$$\forall(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathbf{M}\times\mathbf{N}$$
$$\mathbf{e}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\begin{cases}\circ & (\mathbf{u},\mathbf{v})\neq(\mathbf{x},\mathbf{y})\\ \mathbf{1} & (\mathbf{u},\mathbf{v})=(\mathbf{x},\mathbf{y})\end{cases}$$

تعریف می‌شود.

(قبلاً دیده‌ایم که $\left\{\mathbf{e}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})} \mid (\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbf{M}\times\mathbf{N}\right\}$ یک مبنای $\mathbf{R}^{(\mathbf{M}\times\mathbf{N})}$ است (قضیه‌ی۲.۶.۲)).

برای راحتی $\mathbf{e}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}$ را با $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ یکی می‌گیریم (یعنی همیشه به جای $\mathbf{e}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}$ می‌نویسیم $(\mathbf{x},\mathbf{y})$).

بنابراین با این قرارداد، هر عضو $\mathbf{R}^{(\mathbf{M}\times\mathbf{N})}$ را می‌توان به طور یکتا به صورت $\sum\alpha_\mathbf{i}(\mathbf{x}_\mathbf{i},\mathbf{y}_\mathbf{i})$ نوشت که در آن $\alpha_\mathbf{i}\in\mathbf{R}$ و $(\mathbf{x}_\mathbf{i},\mathbf{y}_\mathbf{i})\in\mathbf{M}\times\mathbf{N}$.

($(\mathbf{x}_\mathbf{i},\mathbf{y}_\mathbf{i})\in\mathbf{M}\times\mathbf{N}$ به معنی $\mathbf{e}_{(\mathbf{x}_\mathbf{i},\mathbf{y}_\mathbf{i})}\in\mathbf{R}^{\mathbf{M}\times\mathbf{N}}$ است).

تعریف ۱۸: با نمادهای بالا، فرض کنیم که $\mathbf{C}\in\mathbf{R}^{\mathbf{M}\times\mathbf{N}}$. نیز فرض کنیم که $\mathbf{A}$ مجموعه‌ی همه‌ی اعضایی از $\mathbf{C}$ باشد که به صورت یک از چهار شکل زیر می‌باشند:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{x}',\mathbf{y})-(\mathbf{x},\mathbf{y})-(\mathbf{x}',\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{i})$$

که در آن $\mathbf{x},\mathbf{x}'\in\mathbf{M}\ ,\ \mathbf{y}\in\mathbf{N}$

$$(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})-\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{ii})$$

که در آن $\alpha\in\mathbf{R}\ ,\ \mathbf{x}\in\mathbf{M}\ ,\ \mathbf{y}\in\mathbf{N}$

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{y}')-(\mathbf{x},\mathbf{y})-(\mathbf{x},\mathbf{y}') \qquad (\mathbf{iii})$$

که در آن $\mathbf{x}\in\mathbf{M}\ ,\ \mathbf{y},\mathbf{y}'\in\mathbf{N}$

$$(\mathbf{x},\alpha\mathbf{y})-\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{iv})$$

که در آن $\alpha\in\mathbf{R}\ ,\ \mathbf{x}\in\mathbf{M}\ ,\ \mathbf{y}\in\mathbf{N}$

فرض کنیم که $\mathbf{D}$ زیر مدول تولید شده از $\mathbf{C}$ به وسیله‌ی مجموعه‌ی $\mathbf{A}$ باشد. در این صورت، مدول خارج قسمتی $\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}$ را به $\mathbf{M}\otimes\mathbf{N}$ نشان می‌دهند و آن را ضرب تانسوری $\mathbf{N},\mathbf{M}$ می‌نامند. هم‌چنین اگر $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbf{M}\times\mathbf{N}$ ، آنگاه $(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{D}$ را که به $\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}$ تعلق دارد به $\mathbf{x}\otimes\mathbf{y}$ نشان می‌دهند و آن را حاصل‌ضرب تانسوری $\mathbf{y},\mathbf{x}$ می‌نامند.

توجه: مجموعه $\left\{\mathbf{x}\otimes\mathbf{y}\,\middle|\,(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbf{M}\times\mathbf{N}\right\}$ یک مولد $\mathbf{M}\otimes\mathbf{N}$ است. برای نشان دادن این حقیقت فرض می‌کنیم که $\mathbf{Z}$ یک عضو دلخواه از $\mathbf{M}\otimes\mathbf{N}$ یعنی یک عنصر دلخواه از $\frac{\mathbf{R}^{(\mathbf{M}\times\mathbf{N})}}{\mathbf{D}}$ باشد. $\mathbf{Z}$ را می‌توان به صورت $\mathbf{z}+\mathbf{D}$ نوشت که در آن $\mathbf{z}\in\mathbf{R}^{(\mathbf{M}\times\mathbf{N})}$. فرض کنیم که $\mathbf{z}=\sum\alpha_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}_{\mathbf{i}},\mathbf{y}_{\mathbf{i}})$. در این صورت داریم:

$$\mathbf{Z}=\mathbf{z}+\mathbf{D}=\sum\alpha_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}_{\mathbf{i}},\mathbf{y}_{\mathbf{i}})+\mathbf{D}\ [\text{تعریف جمع و ضرب اسکالر در مدول خارج قسمتی}]$$
$$=\sum\alpha_{\mathbf{i}}\left[(\mathbf{x}_{\mathbf{i}},\mathbf{y}_{\mathbf{i}})+\mathbf{D}\right]\ [\text{تعریف}\ \mathbf{x}_{\mathbf{i}}\otimes\mathbf{y}_{\mathbf{i}}]=\sum\alpha_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}_{\mathbf{i}}\otimes\mathbf{y}_{\mathbf{i}})$$

پس هر عضو $\mathbf{M}\otimes\mathbf{N}$ یک ترکیب خطی از عده‌ای متناهی از اعضای مجموعه‌ی $\left\{\mathbf{x}\otimes\mathbf{y}\,\middle|\,\begin{matrix}\mathbf{x}\in\mathbf{M}\\ \mathbf{y}\in\mathbf{N}\end{matrix}\right\}$ است.

تعریف ۱۹: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ و $\mathbf{N}$ و $\mathbf{T}$ سه $\mathbf{R}-$ مدول باشند. یک تابع $\mathbf{g}:\mathbf{M}\times\mathbf{N}\to\mathbf{T}$ را دو خطی نامیم، هرگاه به ازاء هر $\mathbf{x},\mathbf{x}'\in\mathbf{M}$ ، هر $\mathbf{y},\mathbf{y}'\in\mathbf{N}$ و هر $\alpha\in\mathbf{R}$ چهار شرط ذیل بر قرار باشند:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}+\mathbf{x}',\mathbf{y})=\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{g}(\mathbf{x}',\mathbf{y})\qquad(\mathbf{i})$$
$$\mathbf{g}(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})=\alpha\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})\qquad(\mathbf{ii})$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{y}')=\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}')\qquad(\mathbf{iii})$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\alpha\mathbf{y})=\alpha\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})\qquad(\mathbf{iv})$$

مثال ۱: فرض کنیم که $\mathbf{R}$ میدان اعدادحقیقی (یا هر میدان دلخواه) باشد. تابع $\mathbf{g}:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی ذیل تعریف می‌کنیم:

$$\forall(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1)=\mathbf{u}\ ,\ (\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2)=\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2:$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\begin{vmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{y}_1\\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{y}_2\end{vmatrix}=\mathbf{x}_1\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1\mathbf{x}_2$$

ادعا می‌کنیم که $\mathbf{g}$ یک تابع دو خطی است. (در اینجا $\mathbf{N}=\mathbf{M}=\mathbb{R}^2$ و $\mathbf{T}=\mathbb{R}^2$). مثلاً برای اثبات اولین شرط، فرض کنیم که $\mathbf{u},\mathbf{u}',\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$ و نشان می‌دهیم که $\mathbf{g}(\mathbf{u}+\mathbf{u}',\mathbf{v})=\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v})+\mathbf{g}(\mathbf{u}',\mathbf{v})$. فرض کنیم که:

$$\mathbf{u}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1),\mathbf{u}'=(\mathbf{x}_1',\mathbf{y}_1'),\mathbf{v}=(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2).$$

در این صورت داریم:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}+\mathbf{u}',\mathbf{v})=\mathbf{g}\left((\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_1',\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_1'),(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2)\right)\ [\text{تعریف}\ \mathbf{g}]$$

$$=\begin{vmatrix} x_1+x_1' & y_1+y_1' \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\left(x_1+x_1'\right)y_2-x_2\left(y_1+y'\right)=\left(x_1y_2-x_2y_1\right)+\left(x_1'y_2-x_2y_1'\right)$$

$$[\text{تعریف } g]=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix}=g(u,v)+g(u',v)$$

(بقیه‌ی شروط را ثابت کنید).

تعریف ۲۰: یک تابع دو خطی $g: M\times N\to T$ را عمومی نامیم. هرگاه به ازاء هر $R-$ مدول P و هر تابع دو خطی $f: M\times N\to P$ یک و فقط یک $R-$ هومورفیسم $h: T\to P$ موجود باشد به طوری که $hg=f$.

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, dashed, "h"] \\ & P \end{tikzcd}$$

(به اصطلاح هر تابع دو خطی f باید بر تابع دو خطی g قابل قسمت باشد یا یک تابع دو خطی عمومی یک مقسوم علیه هر تابع دو خطی است البته با خارج قسمت یکتا).

مثال ۲: فرض کنیم که حلقه‌ی R تعویض‌پذیر و M یک R- مدول باشد. ادعا می‌کنیم که تابع $g: R\times M\to M$ با ضابطه‌ی:

$$\forall\,(\alpha,x)\in R\times M \qquad g\big((\alpha,x)\big)=\alpha x\in M$$

یک تابع دو خطی عمومی است.

اولاً: g دو خطی است (ثابت کنید. در اثبات شرط (iv) مشاهده می‌شود که لازم است R جابه جایی باشد).

ثانیاً: g دو خطی عمومی است:

باید ثابت کنیم که به ازاء هر $R-$ مدول M' و هر تابع دو خطی $f: R\times M\to M'$ یک و فقط یک $R-$ هومورفیسم $h: M\to M'$ هست که $hg=f$

$$\begin{tikzcd} R\times M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[d, dashed, "h"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

یکتایی h : فرض کنیم که $h: M\to M'$ یک $R-$ هومورفیسم باشد به طوری‌که $hg=f$. دنبال ضابطه‌ی منحصر به فرد h می‌گردیم به ازاء هر $x\in M$ داریم:

$$h(x)\ [\text{شرط چهارم ضرب اسکالر در } R- \text{ مدول}]=h(1x)\ [\text{تعریف } g]=h\Big(g\big((1,x)\big)\Big)\ [\text{تعریف ترکیب دو تابع}]$$
$$=(hg)\big((1,x)\big)\ [\text{فرض}]=f\big((1,x)\big)$$

پس h در صورت وجود منحصر به فرد و با ضابطه‌ی $h(x)=f\big((1,x)\big)$ تعریف می‌شود.

(**وجود:** ثابت کنید که h با ضابطه‌ی فوق یک $R-$ هومورفیسم است به طوری‌که: $hg=f$).

قضیه‌ی ۲.۷.۱: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ و $\mathbf{N}$ دو $\mathbf{R}-$ مدول باشند. در این صورت تابع:

$$\mathbf{g}:\mathbf{M}\times\mathbf{N}\to\mathbf{M}\otimes\mathbf{N}$$

با ضابطه‌ی

$$\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbf{M}\times\mathbf{N}\quad,\quad \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}\otimes\mathbf{y}$$

یک تابع دو خطی عمومی است.

برهان: $\mathbf{g}$ دو خطی است: باید ثابت کنیم که به ازاء هر $\mathbf{x},\mathbf{x}'\in\mathbf{M}$ و $\mathbf{y},\mathbf{y}'\in\mathbf{N}$ و $\alpha\in\mathbf{R}$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{y})=\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{g}(\mathbf{x}',\mathbf{y})\qquad(\mathbf{i})$$

$$\mathbf{g}(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})=\alpha\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})\qquad(\mathbf{ii})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{y}')=\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}')\qquad(\mathbf{iii})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\alpha\mathbf{y})=\alpha\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})\qquad(\mathbf{iv})$$

اثبات $(\mathbf{i})$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}+\mathbf{x}',\mathbf{y})[\text{تعریف }\mathbf{g}]=(\mathbf{x}+\mathbf{x}')\otimes\mathbf{y}[\text{تعریف }\otimes]=\Big(\underbrace{\mathbf{x}+\mathbf{x}',\mathbf{y}}_{\mathbf{u}}\Big)+\mathbf{D}[\text{تعریف }\mathbf{D}\;,\mathbf{u}-\mathbf{v}\in\mathbf{D}]$$

$$=\Big(\underbrace{(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x}',\mathbf{y}')}_{\mathbf{v}}\Big)+\mathbf{D}[\text{جمع در مدول خارج قسمتی}]=\big[(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{D}\big]+\big[(\mathbf{x}',\mathbf{y})+\mathbf{D}\big][\text{تعریف }\otimes]$$

$$=\mathbf{x}\otimes\mathbf{y}+\mathbf{x}'\otimes\mathbf{y}\,[\text{تعریف }\mathbf{g}]=\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{g}(\mathbf{x}',\mathbf{y})$$

(سه شرط دیگر را ثابت کنید).

$\mathbf{g}$ دو خطی عمومی است:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{M}\times\mathbf{N} \arrow[r, "\mathbf{g}"] \arrow[dr, "\boldsymbol{f}\ \text{دو خطی دلخواه}"'] & \mathbf{M}\otimes\mathbf{N} \arrow[d, "\mathbf{h}"] \\
 & \mathbf{P}\ \text{دلخواه}
\end{tikzcd}$$

باید ثابت کنیم که به ازاء هر $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{P}$ و هر تابع دو خطی $\boldsymbol{f}:\mathbf{M}\times\mathbf{N}\to\mathbf{P}$ یک و فقط یک $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم $\mathbf{h}:\mathbf{M}\otimes\mathbf{N}\to\mathbf{P}$ موجود است به طوری‌که $\mathbf{hg}=\boldsymbol{f}$.

یکتایی $\mathbf{h}$: فرض کنیم که $\mathbf{h}$ یک $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم باشد به طوری‌که $\mathbf{hg}=\boldsymbol{f}$. به ازاء هر $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbf{M}\times\mathbf{N}$ داریم:

$$(*)\quad \mathbf{h}(\mathbf{x}\otimes\mathbf{y})\,[\text{تعریف }\mathbf{g}]=\mathbf{h}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y})\big)=(\mathbf{hg})(\mathbf{x},\mathbf{y})\,[\text{فرض}]=\boldsymbol{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

حال فرض کنیم که $\mathbf{X}$ یک عضو دلخواه از $\mathbf{M}\otimes\mathbf{N}$ باشد. چون:

$$\left\{\mathbf{x}\otimes\mathbf{y}\,\middle|\,\begin{matrix}\mathbf{x}\in\mathbf{M}\\ \mathbf{y}\in\mathbf{N}\end{matrix}\right\}$$

یک مولد $\mathbf{M}\otimes\mathbf{N}$ است، $\mathbf{X}$ را می‌توان به صورت $\mathbf{X}=\sum\alpha_i\left(\mathbf{x}_i\otimes\mathbf{y}_i\right)$ نوشت که در آن $\alpha_i\in\mathbf{R}$ و $\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i\right)\in\mathbf{M}\times\mathbf{N}$. از آنجا داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}(\mathbf{X})&=\mathbf{h}\left(\sum\alpha_i\left(\mathbf{x}_i\otimes\mathbf{y}_i\right)\right)[\mathbf{h}\ \text{یک}\ \mathbf{R}-\text{هومورفیسم است}]\\&=\sum\alpha_i\mathbf{h}\left(\mathbf{x}_i\otimes\mathbf{y}_i\right)[\text{رابطه‌ی}\ *]\sum\alpha_i f\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i\right)\end{aligned}$$

بنابراین، $\mathbf{h}$ در صورت وجود منحصر به فرد است و باید با ضابطه‌ی:

$$\mathbf{h}\left(\sum\alpha_i\left(\mathbf{x}_i\otimes\mathbf{y}_i\right)\right)=\sum\alpha_i f\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i\right)$$

تعریف شود.

وجود $\mathbf{h}$: باید ثابت کنیم که $\mathbf{h}$ با ضابطه‌ی بالا خوش تعریف و یک $\mathbf{R}-$ هومورفیسم است و $\mathbf{hg}=f$. ما فقط خوش تعریفی $\mathbf{h}$ را ثابت می‌کنیم (بقیه‌ی قسمت‌ها را ثابت کنید).

خوش تعریفی $\mathbf{h}$: باید ثابت کنیم که به ازاء هر دو عضو

$$\begin{aligned}&\sum\alpha_i\left(\mathbf{x}_i\otimes\mathbf{y}_i\right),\ \sum\beta_i\left(\mathbf{x}_i\otimes\mathbf{y}_i\right)\in\mathbf{M}\times\mathbf{N}\\&\sum\alpha_i\left(\mathbf{x}_i\otimes\mathbf{y}_i\right)=\sum\beta_i\left(\mathbf{x}_i\otimes\mathbf{y}_i\right)\Rightarrow\sum\alpha_i f\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i\right)=\sum\beta_i f\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i\right)\qquad(\dagger)\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}\mathbf{M}\times\mathbf{N}\arrow[r,"\mathbf{g}"]\arrow[dr,"f"'] & \mathbf{M}\otimes\mathbf{N}=\dfrac{\mathbf{R}^{(\mathbf{M}\times\mathbf{N})}}{\mathbf{D}}\arrow[d,"\mathbf{h}"]\\ & \mathbf{P}\end{tikzcd}$$

تابع $\mathbf{h}':\mathbf{R}^{(\mathbf{M}\times\mathbf{N})}\to\mathbf{P}$ را با ضابطه‌ی:

$$\mathbf{h}'\left(\sum\alpha_i\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i\right)\right)=\sum\alpha_i f\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i\right)$$

تعریف می‌کنیم. معلوم است که $\mathbf{h}'$ خوش تعریف (یک تابع) است (توضیح دهید).

در حقیقت $\mathbf{h}'$ یک $\mathbf{R}-$ هومورفیسم است (ثابت کنید). ادعا می‌کنیم که مقدار $\mathbf{h}'$ در هر عضو $\mathbf{D}$ صفر است. برای این منظور کافی است نشان دهیم که مقدار $\mathbf{h}'$ در هر عضو مولد $\mathbf{D}$ که به صورت شکل‌های چهارگانه‌ی مذکور در قبل می‌باشند صفر است. مثلاً یک عضو مولد $\mathbf{D}$ به شکل اول مانند:

$$\left(\mathbf{x}+\mathbf{x}',\mathbf{y}\right)-\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)-\left(\mathbf{x}',\mathbf{y}\right)$$

را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}'\left(\left(\mathbf{x}+\mathbf{x}',\mathbf{y}\right)-\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)-\left(\mathbf{x}',\mathbf{y}\right)\right)[\text{تعریف}\ \mathbf{h}']&=f\left(\mathbf{x}+\mathbf{x}',\mathbf{y}\right)-f\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)-f\left(\mathbf{x}',\mathbf{y}\right)\\ [f\ \text{دو خطی است}]&=\left(f\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)+f\left(\mathbf{x}',\mathbf{y}\right)-f\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)-f\left(\mathbf{x}',\mathbf{y}\right)\right)=0\end{aligned}$$

(ثابت کنید که مقدار $\mathbf{h}'$ در هر عضو مولد $\mathbf{D}$ از نوع‌های دیگر نیز صفر است).

حال به اثبات رابطه $(\dagger)$ می‌پردازیم:

$$\sum\alpha_i\left(\mathbf{x}_i\otimes\mathbf{y}_i\right)=\sum\beta_i\left(\mathbf{x}_i\otimes\mathbf{y}_i\right)[\text{تعریف}\ \otimes]\Rightarrow\sum\alpha_i\left[\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i\right)+\mathbf{D}\right]=\sum\beta_i\left[\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i\right)+\mathbf{D}\right]$$

$$\text{[تعریف و ضرب اسکالر در مدل‌های خارج قسمتی]} \Rightarrow \sum \alpha_i(x_i,y_i)+D=\sum \beta_i(x_i,y_i)+D \Rightarrow$$
$$\sum \alpha_i(x_i,y_i)-\sum \beta_i(x_i,y_i) \in D \text{ [مقدار } h' \text{ در هر عضو } D \text{ صفر است]} \Rightarrow$$
$$h'\left(\sum \alpha_i(x_i,y_i)-\sum \beta_i(x_i,y_i)\right)=\circ \Rightarrow h'\left(\sum(\alpha_i-\beta_i)(x_i,y_i)\right)=\circ$$
$$\text{[تعریف } h' \text{]} \Rightarrow \sum(\alpha_i-\beta_i)f(x_i,y_i)=\circ \Rightarrow$$
$$\sum \alpha_i f(x_i,y_i)-\sum \beta_i(x_i,y_i)=\circ \Rightarrow \sum \alpha_i f(x_i,y_i)=\sum \beta_i f(x_i,y_i)$$

توجه: فرض کنیم $x,x' \in M$ ، $y,y' \in N$ و $\alpha \in R$. در ضمن اثبات قضیه‌ی بالا ثابت شده است که:

$$(x+x')\otimes y=(x\otimes y)+(x'\otimes y)\ ,\ x\otimes(y+y')=x\otimes y+x\otimes y'\ ,$$
$$(\alpha x)\otimes=\alpha(x\otimes y)\ ,\ x\otimes(\alpha y)=\alpha(x\otimes y)$$

از آنجا به آسانی ثابت می‌شود که (ثابت کنید).

$$\circ\otimes y=x\otimes\circ=\circ\ ,\ x\otimes(-y)=(-x)\otimes y=-(x\otimes y)\ ,\ (-x)\otimes(-y)=x\otimes y.$$

تمرین ۱. ثابت کنید که اگر $g:M\times N\to T$ و $g':M\times N\to T'$ دو تابع دو خطی عمومی باشند، آنگاه $T\simeq T'$ (T با T' ایزومورفیک است) و ار آنجا نتیجه بگیرید که اگر $g:M\times N\to T$ یک تابع دو خطی عمومی باشد، آنگاه $T\simeq M\otimes N$.

تمرین ۲. اگر M یک $R-$ مدول باشد ثابت کنید که $R\otimes M\simeq M$ (R جابه جایی است).

(توجه کنید که اگر R جابه جایی نباشد، حکم بر قرار نیست. مثلاً اگر R یک حلقه‌ی تقسیم باشد، (ولی یک میدان نباشد)، آنگاه $R\otimes R=\circ$ (چرا؟)).

تمرین ۳. ثابت کنید که به ازاء هر دو $R-$ مدول M و N داریم $M\otimes N\simeq N\otimes M$.

تمرین ۴. تعریف ضرب تانسوری دو مدول را به چند مدول و تعریف تابع دو خطی را به چند خطی و تعریف تابع دو خطی عمومی را به تعریف تابع چند خطی عمومی تعمیم دهید و نتایج مشابه را بیان کنید.

تمرین ۵. ثابت کنید که به ازاء هر سه $R-$ مدول M ، P,N

$$(M\otimes N)\otimes P\approx M\otimes(N\otimes P)$$

راهنمایی: به ازاء هر $z\in P$ یک $R-$ هومومورفیسم $h_z:M\otimes N\to M\otimes(N\otimes P)$ وجود دارد. به طوری‌که $h_z(x\otimes y)=x\otimes(y\otimes z)$ و تابع $f:(M\otimes N)\times P\to M\otimes(N\otimes P)$ با ضابطه‌ی $f(u,z)=h_z(u)$ دو خطی است.

تمرین ۶. ثابت کنید که اگر n,m دو عدد طبیعی متباین (نسبت به هم اول) باشند، آنگاه $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}=\circ(=\{\circ\})$ ، که در آن مثلاً $\mathbb{Z}$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی m است که می‌توان آن را به عنوان یک $\mathbb{Z}$ مدول در نظر گرفت (هر گروه آبلی یک $\mathbb{Z}$ مدول است).

تمرین ۷. فرض کنیم که $\mathbf{R}$ تعویض‌پذیر باشد و $\mathbf{M}$ و $\mathbf{N}$ دو $\mathbf{R}-$ مدول باشند. اگر $\mathbf{M}$ یک مبنای متناهی مانند $\mathbf{x_1,x_2,\dots,x_m}$ و $\mathbf{N}$ یک مبنای متناهی مانند $\mathbf{y_1,y_2,\dots,y_n}$ داشته باشد، ثابت کنید که $\left\{\mathbf{x_i\otimes y_j}\middle|\begin{matrix}\mathbf{i=1,2,\dots,m}\\ \mathbf{y=1,2,\dots,n}\end{matrix}\right\}$ یک مبنای $\mathbf{M\otimes N}$ است.

راهنمایی: اگر $\mathbf{R_{m\times n}}$ مدول همه‌ی ماتریس‌های $\mathbf{m\times n}$ روی $\mathbf{R}$ باشند، آنگاه تابع $\boldsymbol{f}\mathbf{: M\times N\to R_{m\times n}}$ با ضابطه:

$$\left(\sum\alpha_i\mathbf{x_i},\sum\beta_j\mathbf{y_j}\right)\to\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \dots & \alpha_1\beta_n\\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \dots & \alpha_2\beta_n\\ \vdots & & & \\ \alpha_m\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \dots & \alpha_m\beta_n\end{pmatrix}$$

دو خطی است.

تمرین ۸. ثابت کنید اگر $\mathbf{R}$ تعویض‌پذیر و $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول و $\mathbf{n}$ یک عدد طبیعی باشد، آنگاه $\mathbf{R^n\otimes M\approx M^n}$.

تمرین ۹. ثابت کنید که اگر $\mathbf{M}$ و $\mathbf{M'}$ دو $\mathbf{R}-$ مدول ایزومورفیک و $\mathbf{N}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول دلخواه باشد، آنگاه $\mathbf{M\otimes N\approx M'\otimes N}$. سه مدول $\mathbf{M}$ و $\mathbf{M'}$ و $\mathbf{N}$ روی یک حلقه ارائه دهید که $\mathbf{M}$ و $\mathbf{M'}$ ایزومورفیک نباشند ولی $\mathbf{M\otimes N\approx M'\otimes N}$.

تمرین ۱۰. فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول و $\{\mathbf{N_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک خانواده از $\mathbf{R}-$ مدول‌ها باشد. ثابت کنید که:

$$\mathbf{M\otimes\coprod_{i\in I}N_i\cong\coprod_{i\in I}M\otimes N_i}$$

بالاخص $\mathbf{M\otimes(N_1\times N_2)\cong(M\otimes N_1)\times(M\otimes N_2)}$

(**توجه:** معمولاً به جای $\mathbf{N_1\times N_2}$ می‌نویسند $\mathbf{N_1\oplus N_2}$.)

تمرین ۱۱. فرض کنید که $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ دوعدد طبیعی باشند و $\mathbf{(m,n)=d}$ ثابت کنید که $\mathbb{Z}_\mathbf{m}\otimes\mathbb{Z}_\mathbf{n}\cong\mathbb{Z}_\mathbf{d}$.

(مثلاً $\mathbb{Z}_{12}\otimes\mathbb{Z}_{30}\cong\mathbb{Z}_6$)

تمرین ۱۲. $\mathbf{M[x]\cong M\otimes R[x]}$

بخش ۲.۸: مدول‌های پروژکتیو (تصویری) و انژکتیو (یک‌به یک)

تعریف ۲۱: فرض کنیم که $\mathbf{P}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول باشد. $\mathbf{P}$ را پروژکتیو نامیم هرگاه به ازاء هر دو $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{B,A}$ ، هر اپی‌مورفیسم $\mathbf{t:A\to B}$ و هر $\mathbf{R}-$ همومورفیسم $\mathbf{s:P\to B}$ حداقل یک همومورفیسم $\mathbf{t':P\to A}$ موجود باشد به طوری که $\mathbf{tt'=s}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{P} \arrow[dl, "\mathbf{t'?}"'] \arrow[d, "\mathbf{s}"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "\mathbf{t}"] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

قضیه‌ی ۲.۸.۱: هر $\mathbf{R}-$ مدول آزاد پروژکتیو است.

برهان: فرض کنیم $\mathbf{F}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول و $\{\mathbf{x_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ ، یک مبنای آن باشد. (توجه کنید که به موجب یکی از نتایج قبلی آزاد بودن هم ارز است با مبنا داشتن (قضیه‌ی ۲.۶.۳)).

برای اثبات این‌که $\mathbf{F}$ پروژکتیو است، فرض کنیم که $\mathbf{B,A}$ دو $\mathbf{R}-$ مدول دلخواه، $\mathbf{t:A\to B}$ یک $\mathbf{R}-$ اپی-مورفیسم دلخواه و $\mathbf{s:F\to B}$ یک $\mathbf{R}-$ همومورفیسم دلخواه باشد. باید ثابت کنیم که یک $\mathbf{R}-$ همومورفیسم $\mathbf{t':F\to A}$ وجود دارد به طوری که $\mathbf{tt'=s}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{F} \arrow[dl, "\mathbf{t'}"'] \arrow[d, "\mathbf{s}"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "\mathbf{t}"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

(توجه کنید که $\mathbf{t'}$ بستگی به $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$، $\mathbf{t}$ و $\mathbf{s}$ دارد).

به ازاء هر $\mathbf{i\in I}$ ، چون $\mathbf{t}$ برو است، یک $\mathbf{a_i\in A}$ هست به طوری‌که $\mathbf{t(a_i)=s(x_i)}$. (توجه کنید که ممکن است $\mathbf{t}$ چندین عضو را به $\mathbf{s(x_i)}$ ببرد، یکی از آنها را اختیار کرده و از این پس نگه می‌داریم). $\mathbf{t'}$ را طوری تعریف می‌کنیم که $\mathbf{x_i}$ را به $\mathbf{a_i}$ ببرد. برای این منظور $\mathbf{t'}$ را با ضابطه‌ی ذیل تعریف می‌کنیم:

هر عضو $\mathbf{F}$ را می‌توان به طور منحصر به فرد به صورت $\sum\alpha_i\mathbf{x_i}$ نوشت که در آن $\alpha_i\in\mathbf{R}$. قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{t'}\left(\sum\alpha_i\mathbf{x_i}\right)=\sum\alpha_i\mathbf{a_i}$$

به آسانی ثابت می‌شود که $\mathbf{t'}$ خوش تعریف و یک $\mathbf{R}-$ همومورفیسم است و $\mathbf{tt'=s}$ (ثابت کنید).

قضیه‌ی ۲.۸.۲: هر جمعک مستقیم یک $\mathbf{R}-$ مدول پروژکتیو، پروژکتیو است.

برهان: فرض کنیم که $\mathbf{P}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول پروژکتیو و $\mathbf{P_1}$ یک جمعک مستقیم $\mathbf{P}$ باشد. بنابه تعریف جمعک مستقیم، یک زیر مدول مانند $\mathbf{P_2}$ از $\mathbf{P}$ هست که $\mathbf{P=P_1\oplus P_2}$.

برای اثبات این‌که $\mathbf{P_1}$ پروژکتیو است، فرض کنیم که $\mathbf{B,A}$ دو $\mathbf{R}-$ مدول دلخواه، $\mathbf{t}$ یک اپی‌مورفیسم دلخواه و $\mathbf{s_1 : P_1 \to B}$ یک $\mathbf{R}-$ هومورفیسم دلخواه باشد. باید ثابت کنیم که یک $\mathbf{R}-$ هومورفیسم $\mathbf{t'_1 : P_1 \to A}$ موجود است به طوری‌که $\mathbf{tt'_1 = s_1}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{P} \arrow[ddl, bend right, "\mathbf{t'}"'] \arrow[d, "\theta_1"] \arrow[ddr, bend left, "\mathbf{s}"] & \\
 & \mathbf{P_1} \arrow[dl, "\mathbf{t'_1\,?}"'] \arrow[dr, "\mathbf{s_1}"] & \\
\mathbf{A} \arrow[rr, "\mathbf{t}"'] & & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

تابع $\mathbf{\theta_1 : P \to P_1}$ را مطابق ذیل تعریف می‌کنیم:

چون $\mathbf{P = P_1 \oplus P_2}$ ، هر عضو $\mathbf{x \in P}$ را می‌توان به طور یکتا به صورت $\mathbf{x = x_1 + x_2}$ نوشت که در آن $\mathbf{x_1 \in P_1}$ و $\mathbf{x_2 \in P_2}$. قرار می‌دهیم $\mathbf{\theta_1(x) = x_1}$. به آسانی ثابت می‌شود که $\mathbf{\theta_1}$ خوش تعریف و یک $\mathbf{R}-$ هومورفیسم است (ثابت کنید). فرض کنیم که $\mathbf{s = s_1\theta_1}$ ، می‌دانیم که $\mathbf{s}$ یک $\mathbf{R}-$ هومورفیسم است. (قضیه: ترکیب هر دو $\mathbf{R}-$ هومورفیسم یک $\mathbf{R}-$ هومورفیسم است). چون $\mathbf{P}$ پروژکتیو است، یک $\mathbf{R}-$ هومورفیسم $\mathbf{t' : P \to A}$ هست که $\mathbf{(*)\quad tt' = s = s_1\theta_1}$. تابع $\mathbf{t'_1 : P_1 \to A}$ را ضابطه‌ی ذیل تعریف می‌کنیم:

$$\forall \mathbf{x_1 \in P_1} \qquad \mathbf{t'_1(x_1) = t'(x_1)}$$

($\mathbf{t'_1}$ تحدید $\mathbf{t'}$ بر $\mathbf{P_1}$ است).

معلوم است که $\mathbf{t'_1}$ یک $\mathbf{R}-$ هومورفیسم است. (تحدید یک $\mathbf{R}-$ هومورفیسم یک $\mathbf{R}$ هومورفیسم است (ثابت کنید)).

برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم که $\mathbf{tt'_1 = s_1}$ ، یا به عبارت هم ارز:

$$\forall \mathbf{x_1 \in P_1} \qquad \mathbf{(tt_1)(x_1) = s_1(x_1)}$$

اما:

$$\mathbf{(tt'_1)(x_1) = t(t'_1(x_1))[t'_1 \text{ تعریف }] = t(t'(x_1)) = (tt'_1)(x_1)[(*)] = (s_1\theta_1)(x_1)}$$
$$\mathbf{= s_1(\theta_1(x_1))[\theta_1 \text{ تعریف }] = s_1(x_1)}$$

تمرین ۱. فرض کنیم که $\mathbf{P',P}$ دو $\mathbf{R}-$ مدول ایزومورفیک باشند. ثابت کنید اگر $\mathbf{P}$ پروژکتیو باشد، آنگاه $\mathbf{P}$ هم پروژکتیو است. آیا هر دو $\mathbf{R}-$ مدول پروژکتیو ایزومورفیک‌اند؟

قضیه‌ی ۲.۸.۳: شرط لازم و کافی برای آن که یک $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{P}$ پروژکتیو باشد آن است که با یک جمعک مستقیم از یک $\mathbf{R}-$ مدول آزاد ایزومورفیک باشد.

برهان:

لزوم: فرض کنیم که $\mathbf{P}$ پروژکتیو باشد. باید ثابت کنیم که یک $\mathbf{R}-$ مدول آزاد $\mathbf{F}$ و یک جمعک مستقیم $\mathbf{P_1}$ از $\mathbf{F}$ هست به طوری‌که $\mathbf{P \approx P_1}$. می‌دانیم که هر $\mathbf{R}-$ مدول، من‌جمله $\mathbf{P}$ ، تصویر هومومورفیکی یک $\mathbf{R}-$ مدول آزاد $\mathbf{F}$ است یعنی یک $\mathbf{R}-$ مدول آزاد $\mathbf{F}$ و یک اپی‌مورفیسم $\mathbf{t : F \to P}$ وجود دارد (تمرین ۶ از بخش ۲.۶). چون $\mathbf{P}$ پروژکتیو است، به ازاء $\mathbf{A = F}$ ، $\mathbf{B = P}$ و $\mathbf{s = 1_P}$ در تعریف $\mathbf{R}-$ مدول‌های پروژکتیو، معلوم می‌شود که یک $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم $\mathbf{t' : P \to F}$ هست که $\mathbf{tt' = 1_P}$

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{P} \arrow[dl, "\mathbf{t'}"'] \arrow[d, "\mathbf{1_P}(=\mathbf{s})"] \\ (\mathbf{A}=)\mathbf{F} \arrow[r, "\mathbf{t}"] & \mathbf{P}(=\mathbf{B}) \end{tikzcd}$$

$\mathbf{P_1}$ را تصویر $\mathbf{P}$ تحت $\left(\mathbf{t'(P)}\right)$ اختیار می‌کنیم. از $\mathbf{tt' = 1_P}$ معلوم می‌شود که $\mathbf{t'}$ یک‌به یک است (ثابت کنید) و از آنجا تحدید $\mathbf{t'}$ به $\mathbf{P}$ و $\mathbf{t'[P]}$ یک $\mathbf{R}-$ ایزومورفیسم است. در نتیجه $\mathbf{P_1 \approx P}$

آنچه باقی می‌ماند اثبات جمعک مستقیم بودن $\mathbf{P_1}$ است. در حقیقت ثابت می‌کنیم که $\mathbf{F = P_1 \oplus \ker t}$. کافی است نشان دهیم که:

$$\mathbf{F = t'(P) + \ker t} \qquad \mathbf{(i)}$$

$$\mathbf{t'(P) \cap \ker t = \{\circ\}} \qquad \mathbf{(ii)}$$

$\mathbf{F = t'(P) + \ker t}$: معلوم است که مجموعه‌ی طرف دوم زیر مجموعه‌ی مجموعه‌ی طرف اول است.

برای اثبات: $\mathbf{F \subset t'(P) + \ker t}$ ، فرض کنیم که $\mathbf{x}$ یک عضو دلخواه از $\mathbf{F}$ باشد، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{x = x - t't(x) + t't(x) = t't(x) + \left(x - t't(x)\right)}$$

معلوم است که $\mathbf{t't(x) \in t'(P)}$. حال نشان می‌دهیم که $\mathbf{x - t't(x) \in \ker t}$ یا به عبارت هم ارز $\mathbf{t\left(x - t't(x)\right) = \circ}$. اما:

$$\mathbf{t\left(x - t't(x)\right)}[\mathbf{t} \text{ یک } \mathbf{R}- \text{ هومومورفیسم است }] \mathbf{= t(x) - (tt')\left(t(x)\right) = t(x) - 1_P\left(t(x)\right) = t(x) - t(x) = \circ}$$

$\mathbf{t'(P) \cap \ker t = \{\circ\}}$: معلوم است که $\mathbf{\{\circ\} \subset t'(P) \cap \ker t}$ (چون $\circ$ به هر زیر مدول تعلق دارد). برای اثبات جهت معکوس فرض کنیم که $\mathbf{x \in t'(P) \cap \ker t}$. باید ثابت کنیم $\mathbf{x = \circ}$

$$\mathbf{x \in t'(P) \cap \ker t \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{x \in t'(P) \Rightarrow \exists p \in P\ ,\ x = t'(p)} \\ \& \\ \mathbf{x \in \ker(t) \Rightarrow t(x) = \circ} \end{array}\right\} \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\circ = t(x) = t\left(t'(p)\right) = (tt')(p) = 1_P(p) = p \Rightarrow x = t'(p) = t'(\circ) = \circ}$$

(هر هومومورفیسم صفر را به صفر می‌برد).

کفایت: فرض کنیم که $\mathbf{F}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول آزاد و $\mathbf{P_1}$ یک جمعک مستقیم $\mathbf{F}$ باشد به طوری که $\mathbf{P \approx P_1}$. باید ثابت کنیم که $\mathbf{P}$ پروژکتیو است.

$\mathbf{F}$ چون آزاد است، پروژکتیو است (قضیه‌ی ۲.۸.۱). چون $\mathbf{P_1}$ یک جمعک مستقیم $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F}$ پروژکتیو است، $\mathbf{P_1}$ پروژکتیو خواهد بود (قضیه‌ی ۲.۸.۲). اما $\mathbf{P \approx P_1}$ و $\mathbf{P_1}$ پروژکتیو است. از آنجا $\mathbf{P}$ نیز پروژکتیو خواهد بود (تمرین ۱).

تمرین ۲. فرض کنیم که $\{\mathbf{M_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک خانواده‌ی دلخواه از $\mathbf{R}-$ مدول‌ها باشد. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن‌که $\coprod_{\mathbf{i\in I}}\mathbf{M_i}$ (ضرب خارجی ضعیف $\mathbf{M_i}$ ها) پروژکتیو باشد آن است که هر $\mathbf{M_i}$ پروژکتیو باشد.

تمرین ۳. یک $\mathbf{R}-$ مدول پروژکتیو ارائه دهید که آزاد نباشد.

راهنمایی: $\mathbb{Z}_6$ را به عنوان یک مدول روی خودش در نظر بگیرید و مدول مطلوب را در بین زیر مدول‌های آن جستجو کنید.

تعریف ۲۲: یک $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{J}$ را انژکتیو نامیم هرگاه به ازاء هر دو $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{B,A}$ ، هر مونومورفیسم $\mathbf{t:B\to A}$ و هر $\mathbf{R}-$ همومورفیسم $\mathbf{s:B\to J}$ (حداقل) یک $\mathbf{R}-$ همومورفیسم $\mathbf{t':A\to J}$ موجود باشد به طوری که $\mathbf{t't=s}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "\mathbf{t}\ \text{مونو}"] \arrow[d, "\mathbf{s}"'] & \mathbf{A} \arrow[dl, "\mathbf{t'=?}"] \\ \mathbf{J} & \end{tikzcd}$$

قضیه‌ی ۲.۸.۴: فرض کنیم که $\mathbf{A}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول و $\mathbf{J}$ یک زیر مدول $\mathbf{A}$ باشد. در این صورت اگر $\mathbf{J}$ انژکتیو باشد، آنگاه $\mathbf{J}$ یک جمعک مستقیم $\mathbf{A}$ است.

توجه: ثابت می‌شودکه عکس این قضیه نیز برقرار است یعنی اگر $\mathbf{J}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول باشد، به طوری که در شرط ذیل صدق کند، آنگاه $\mathbf{J}$ انژکتیو است.

به ازاء هر $\mathbf{R}-$ مدول $\mathbf{A}$ اگر $\mathbf{J}$ یک زیر مدول $\mathbf{A}$ باشد آنگاه $\mathbf{J}$ یک جمعک مستقیم $\mathbf{A}$ است.

برهان قضیه‌ی فوق: فرض کنیم که $\mathbf{J}$ انژکتیو باشد، به ازاء $\mathbf{B=J}$ ، $\mathbf{t}$ $\mathbf{R}-$ همومورفیسم شمول، $\mathbf{s=1_J}$ ، در تعریف $\mathbf{R}-$ مدول‌های انژکتیو معلوم می‌شود که یک $\mathbf{R}-$ همومورفیسم $\mathbf{t':A\to J}$ هست که $\mathbf{t't=1_J}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{J} \arrow[r, "\mathbf{t}\ \text{شمول}"] \arrow[d, "\mathbf{1_J}"'] & \mathbf{A} \arrow[dl, "\mathbf{t'}"] \\ \mathbf{J} & \end{tikzcd}$$

اگر ثابت کنیم که $\mathbf{A=J\oplus\ker t'}$ حکم ثابت است.

$\mathbf{A=J+\ker t'}$: $\mathbf{J+\ker t'\subseteq A}$ (چرا؟)

$$\mathbf{A \subset J + \ker t'}\ :\ \mathbf{x \in A \Rightarrow x = \underbrace{tt'(x)}_{t'(x)} + \left(x - \underbrace{tt'(x)}_{t'(x)}\right)}$$

معلوم است که $\mathbf{tt'(x) = t'(x) \in J}$

ثابت می‌کنیم که $\mathbf{x - tt'(x) \in \ker t'}$. اما،

$$\mathbf{t'\left(x - tt'(x)\right) = t'(x) - (t't)\left(t'(x)\right) = t'(x) - 1_J\left(t'(x)\right) = t'(x) - t'(x) = \circ}$$

$\mathbf{J \bigcap \ker t' = \{\circ\}}\ :\ \mathbf{\{\circ\} \subseteq J \bigcap \ker t'}$ بدیهی است.

اثبات $\mathbf{J \bigcap \ker t' \subset \{\circ\}}$:

$$\mathbf{x \in J \bigcap \ker t' \Rightarrow \begin{cases} x \in J \Rightarrow x = t(x) \\ x \in \ker t' \Rightarrow t'(x) = \circ \end{cases} \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\circ = t'(x) = t'\left(t(x)\right) = t't(x) = 1_J(x) = x \Rightarrow x \in \{\circ\}}$$

تمرین ۴. فرض کنیم که $\mathbf{\{M_i\}_{i\in I}}$ یک خانواده از $\mathbf{R-}$ مدول‌ها باشد. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آن که $\mathbf{\prod_{i\in I} M_i}$ (ضرب مستقیم خارجی $\mathbf{M_i}$ ها) انژکتیو باشد آن است که هر $\mathbf{M_i}$ انژکتیو باشد.

بخش ۲.۹: مدول‌های نوتری و آرتینی

در سرتا سر این بخش $\mathbf{S}$ یک مجموعه از مجموعه‌ها خواهد بود.

تعریف ۲۳: یک عضو $\mathbf{A}\in\mathbf{S}$ را ماکسیمم (می‌نیمم) نامیم هرگاه به ازاء هر عضو $\mathbf{B}\in\mathbf{S}$ داشته باشیم $\mathbf{B}\subseteq\mathbf{A}\left(\mathbf{B}\supseteq\mathbf{A}\right)$.

تمرین ۱. ثابت کنید که عضو ماکسیمم (می‌نیمم) در صورت وجود منحصر به فرد است.

تمرین ۲. کدام از مجموعه‌های ذیل ماکسیمم (می‌نیمم) دارند؟

$$\left\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\}\right\};\ \left\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\right\};\ \left\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\right\};$$
$$\left\{\{1\},\{2\},\{3\},\{2,3\}\right\};\ \left\{\{2\},\{3\},\{2,3\}\right\}.$$

تعریف ۲۴: $\mathbf{S}$ را یک زنجیر نامیم هرگاه به ازاء هر دو عضو $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{S}$ ، لااقل یک از دو رابطه‌ی $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$ و $\mathbf{B}\subseteq\mathbf{A}$ بر قرار باشد.

(به جای $\subseteq$ می‌توان هر نسبت ترتیبی جزیی مانند $\sim$ قرار داد. یک ترتیب جزیی در $\mathbf{S}$ یعنی نسبتی دوتایی در $\mathbf{S}$ که منعکس، متقارن و متعدی باشد).

(اگر یک مجموعه با یک ترتیب کلی در نظر گرفته شود، آن را (یا همراه با این ترتیب) یک زنجیر می‌نامیم. ترتیب کلی آن است که ترتیب جزیی مرتبط باشد، یعنی به ازاء هر دو عضو لااقل یکی از دو رابطه $\mathbf{b}\sim\mathbf{a},\mathbf{a}\sim\mathbf{b}$ نیز بر قرار باشد).

تمرین ۳. کدام از مجموعه‌های تمرین ۲ زنجیرند؟

تمرین ۴. ثابت کنید که اگر $\mathbf{S}$ یک زنجیر متناهی باشد، آنگاه حداقل (در حقیقت به موجب تمرین ۱، دقیقاً) یک ماکسیمم و یک می‌نیمم دارد. یک زنجیر نامتناهی ارائه دهید که هیچ ماکسیمم، می‌نیمم، یا هیچ کدام نداشته باشد.

تعریف ۲۵: یک عضو $\mathbf{A}\in\mathbf{S}$ را ماکسیمال (می‌نیمال) نامیم هرگاه هیچ عضو دیگری از $\mathbf{S}$ بعد از (قبل از) $\mathbf{A}$ نباشد، یا به عبارت دقیق، به ازاء هر $\mathbf{B}\in\mathbf{S}$ از $\mathbf{A}\subset\mathbf{B}\left(\mathbf{B}\subset\mathbf{A}\right)$ نتیجه شود $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

تمرین ۵. ماکسیمال و می‌نیمال‌های هر یک از مجموعه‌های تمرین ۲ را مشخص کنید.

تمرین ۶. ثابت کنید که اگر $\mathbf{S}$ دارای عضو ماکسیمم (می‌نیمم) باشد، آنگاه این عضو ماکسیمال (می‌نیمال) نیز می‌باشد و $\mathbf{S}$ ماکسیمال (می‌نیمال)دیگری ندارد.

تعریف ۲۶: یک زیر مجموعه‌ی $\mathbf{S}'$ از $\mathbf{S}$ را یک زنجیر (در $\mathbf{S}$) نامیم هرگاه خود $\mathbf{S}'$ یک زنجیر باشد یعنی به ازاء هر دو عضو $\mathbf{s}'_1,\mathbf{s}'_2\in\mathbf{S}'$ ، $\mathbf{s}'_1\subset\mathbf{s}'_2$ یا $\mathbf{s}'_2\subset\mathbf{s}'_1$.

تمرین ۷. همه‌ی زنجیرها را در هر یک از مجموعه‌های تمرین ۲ بیابید.

تمرین َ۶. ثابت کنید در هر زنجیر هر ماکسیمال (می‌نیمال)، ماکزیمم (مینیمم) است.

تعریف ۲۷: یک رشته‌ی $A_1,A_2,\ldots$ از مجموعه‌ها را صعودی، نزولی، اکیداً نزولی نامیم بر حسب آن که:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \quad ,$$
$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \quad ,$$
$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \quad ,$$
$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \quad \text{یا}$$

قرارداد: برای راحتی مثلاً به جای این که بگوییم $A_1,A_2,\ldots$ یک رشته‌ی صعودی است می‌گوییم $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ یک رشته‌ی صعودی است.

توجه: مجموعه‌ی جمله‌های هر رشته‌ی صعودی، نزولی، اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی یک زنجیر است.

تعریف ۲۸: گوییم یک رشته‌ی صعودی (نزولی) $A_1,A_2,\ldots$ ایستا است هرگاه از مرتبه‌ای به بعد جمله‌های آن همه با هم مساوی باشند، یعنی یک عدد طبیعی $n_\circ$ موجود باشد به طوری که به ازاء هر عدد طبیعی n که $n \geq n_\circ$ داشته باشیم $A_n = A_{n_\circ}$.

تعریف ۲۹: یک $R-$ مدول M را نوتری (آرتینی) نامیم یا گوییم در شرط زنجیری صعودی (نزولی) صدق می‌کند. هرگاه هر رشته‌ی صعودی (نزولی) از زیر مدول‌های آن ایستا باشد.

مثال ۱: هر $R-$ مدول متناهی M هم نوتری است و آرتینی. (در حقیقت هر مدولی که عده‌ی زیر مدول‌های آن متناهی باشد هم نوتری است و هم آرتینی).

برای نمونه ثابت می‌کنیم که M نوتری است: فرض کنیم که $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ یک رشته‌ی صعودی دلخواه از زیر مدول‌های M باشد. باید ثابت کنیم که این رشته ایستا است یعنی:

$$\exists n_\circ \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\left(n \geq n_\circ \Rightarrow M_n = M_{n_\circ}\right)$$

چون رشته‌ی $M_1 \subseteq \ldots$ صعودی است، مجموعه‌ی جمله‌های آن یعنی $\{M_1,M_2,\ldots\}$ یک زنجیر است. چون M متناهی است، مجموعه‌ی زیر مدول‌های آن بالاخص زنجیر $\{M_1,M_2,\ldots\}$ متناهی است. در نتیجه این زنجیر ماکسیمم دارد (تمرین ۴). فرض کنیم که $M_{n_\circ}$ ماکسیمم این زنجیر باشد. ثابت کنیم که:

$$\forall n \in N\left(n \geq n_\circ \Rightarrow M_n = M_{n_\circ}\right)$$

فرض کنیم که n یک عدد طبیعی نا کمتر از $n_\circ$ باشد. چون رشته‌ی $M_1 \subseteq \ldots$ صعودی است، داریم $M_{n_\circ} \subseteq M_n \quad (1)$. چون $M_{n_\circ}$ ماکسیمم مجموعه‌ی $\{M_1,\ldots\}$ است، داریم $M_n \subseteq M_{n_\circ} \quad (2)$. از روابط (۱) و (۲) به دست می‌آید $M_n = M_{n_\circ}$.

توجه: در حقیقت ما در بالا نشان داده‌ایم که در هر رشته‌ی صعودی (نزولی)، از زیر مدول‌ها که مجموعه‌ی جمله‌های آن متناهی باشد، ایستا است.

تعریف ۳۰: حلقه‌ی $\mathbf{R}$ را نوتری چپ (آرتینی چپ) نامیم هرگاه به عنوان یک مدول روی خودش نوتری (آرتینی) باشد.

توجه: $\mathbf{R}-$ مدول‌هایی را که ما تعریف کرده‌ایم در حقیقت $\mathbf{R}-$ مدول چپ نامیده می‌شوند ($\mathbf{R}-$ مدول‌های راست نیز مشابهاً قابل تعریف‌اند).

توجه: با توجه به تعریف $\mathbf{R}-$ مدول‌ها نوتری (آرتینی) حلقه‌ی $\mathbf{R}$ نوتری چپ (آرتینی چپ) است هرگاه هر رشته‌ی صعودی (نزولی) از ایده‌آل‌های چپ $\mathbf{R}$ ایستا باشد.

تعریف ۳۱: حلقه‌ی $\mathbf{R}$ را نوتری (آرتینی) نامیم هرگاه : هر رشته‌ی صعودی (نزولی) از ایده‌آل‌های $\mathbf{R}$ ایستا باشد.

مثال ۲: حلقه‌ی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ ، نوتری است ولی آرتینی نیست.

$\mathbb{Z}$ نوتری است: فرض کنیم که $\mathbf{a_1} \subseteq \mathbf{a_2} \subseteq \dots$ یک رشته‌ی صعودی از ایده‌آل‌های $\mathbb{Z}$ باشد. می‌دانیم که هر ایده‌آل $\mathbb{Z}$ به وسیله‌ی یک عضو تولید می‌شود (چون $\mathbb{Z}$ دوری است و هر ایده‌آل $\mathbb{Z}$ در حقیقت یک زیر گروه جمعی $\mathbb{Z}$ است و هر زیر گروه یک گروه دوری، دوری است، پس هر ایده‌آل $\mathbb{Z}$ دوری است).

فرض کنیم که $\mathbf{a_i} = (\mathbf{n_i})$. می‌توان فرض نمود که $\mathbf{n_i}$ یک عدد طبیعی است (چرا؟). مجموعه $\mathbf{X} = \{\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \dots\}$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه یک زیر مجموعه‌ی ناتهی مجموعه‌ی اعداد طبیعی است و بنابراین می‌نیمم دارد (چون که مجموعه‌ی اعداد طبیعی خوش ترتیب است).

فرض کنیم که $\mathbf{n_{i_\circ}}$ می‌نیمم این مجموعه باشد. ثابت می‌کنیم که به ازاء هر عدد طبیعی $\mathbf{i}$ که $\mathbf{i} \geq \mathbf{i_\circ}$ داریم $\mathbf{n_i} = \mathbf{n_{i_\circ}}$ و در نتیجه $\mathbf{a_i} = \mathbf{a_{i_\circ}}$.

اما چون رشته‌ی $(\mathbf{n_1}) \subseteq (\mathbf{n_2}) \subseteq \dots$ صعودی است، به ازاء $\mathbf{i} \geq \mathbf{i_\circ}$ داریم $\mathbf{n_i} | \mathbf{n_{i_\circ}}$ (1). بالاخص $\mathbf{n_{i_\circ}} \geq \mathbf{n_i}$ (2) .

چون $\mathbf{n_{i_\circ}}$ می‌نیمم مجموعه‌ی $\{\mathbf{n_1}, \dots\}$ است خواهیم داشت $\mathbf{n_{i_\circ}} \leq \mathbf{n_i}$ $(\mathbf{i} \geq \mathbf{i_\circ})$ (3) . از (۲) و (۳) حاصل می‌شود $\mathbf{n_{i_\circ}} = \mathbf{n_i}$ $(\mathbf{i} \geq \mathbf{i_\circ})$.

$\mathbb{Z}$ آرتینی نیست: کافی است ملاحظه کنیم که رشته‌ی اکیداً نزولی $(2) \supseteq (2^2) \supseteq (2^3) \supseteq \dots$ از ایده‌آل‌های $\mathbb{Z}$ ایستا نیست.

مثال ۳: هر میدان هم نوتری است و هم آرتینی (چرا؟).

تعریف ۳۲: یک رشته $\dots \longrightarrow \mathbf{M_{n-1}} \xrightarrow{f_n} \mathbf{M_n} \xrightarrow{f_{n+1}} \mathbf{M_{n+1}} \longrightarrow \dots$ از $\mathbf{R}-$ مدول‌ها و $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم‌ها را دقیق $(\mathbf{exact})$ نامیم هرگاه تصویر هر هومومورفیسم $f_{\mathbf{n}}$ مساوی هسته‌ی هومومورفیسم بعدی، $\ker f_{\mathbf{n+1}}$ باشد. هر رشته‌ی دقیق به صورت:

$$\circ \longrightarrow \mathbf{M'} \xrightarrow{f} \mathbf{M} \xrightarrow{g} \mathbf{M''} \longrightarrow \circ$$

از $\mathbf{R}-$ مدول‌ها و $\mathbf{R}-$ هومومورفیسم‌ها را یک رشته‌ی دقیق کوتاه می‌نامند (صفرها نمایش مدول‌های بدیهی یا تک عضوی $\{\circ\}$ و مثلاً $\mathbf{M''} \to \circ$ نمایش هومومورفیسم ثابت صفر است).

معلوم است که شرط لازم و کافی برای آن که رشته‌ی $\circ \longrightarrow \mathbf{M'} \xrightarrow{f} \mathbf{M} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbf{M''} \longrightarrow \circ$ دقیق باشد آن است که: $(\mathbf{i})$ f یک به یک باشد، $(\mathbf{ii})$ $\mathbf{g}$ برد باشد، $(\mathbf{iii})$ $f(\mathbf{M'}) = \ker \mathbf{g}$.

مثال ۴: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول و $\mathbf{N}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ باشد. در این صورت رشته‌ی (دنباله‌ی):

$$\circ \to \mathbf{N} \to \mathbf{M} \to \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}} \to \circ$$

که در آن نا همومورفیسم شمول با ضابطه‌ی $\mathbf{i}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$ و $\mathbf{q}$ همومورفیسم قانونی است، یک رشته‌ی دقیق کوتاه است.

قضیه‌ی ۲.۹.۱: فرض کنیم که $\circ \longrightarrow \mathbf{M'} \xrightarrow{f} \mathbf{M} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbf{M''} \longrightarrow \circ$

یک رشته‌ی دقیق کوتاه باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای آن که $\mathbf{M}$ نوتری (آرتینی) باشد، آن است که هر یک از مدول‌های $\mathbf{M''},\mathbf{M'}$ نوتری (آرتینی) باشند.

برهان: ما فقط مورد نوتری را ثابت می‌کنیم (مورد آرتینی مشابهاً ثابت می‌شود).

لزوم: فرض کنیم $\mathbf{M}$ نوتری باشد. ثابت می‌کنیم $\mathbf{M'}$ و $\mathbf{M''}$ هر دو نوتری هستند.

$\mathbf{M'}$ نوتری است: فرض کنیم که $\mathbf{M'_1} \subseteq \mathbf{M'_2} \subseteq \cdots$ یک رشته‌ی صعودی از زیر مدول‌های $\mathbf{M'}$ باشد. باید نشان دهیم که این رشته ایستا است. رشته‌ی:

$$f(\mathbf{M'_1}) \subseteq f(\mathbf{M'_2}) \subseteq \cdots$$

یک رشته‌ی صعودی از زیر مدول‌های $\mathbf{M}$ است و بنابراین، چون $\mathbf{M}$ نوتری است، ایستا می‌باشد یعنی:

$$\exists \mathbf{n}_\circ \forall \mathbf{n} \geq \mathbf{n}_\circ \qquad \left(f(\mathbf{M'_n}) = f(\mathbf{M'_{n_\circ}})\right)$$

در نتیجه:

$$\forall \mathbf{n} \geq \mathbf{n}_\circ \qquad \left(f^{-1}(f(\mathbf{M'_n})) = f^{-1}(f(\mathbf{M'_{n_\circ}}))\right)$$

اما چون f یک‌به یک است، و در نتیجه هر زیر مدول $\mathbf{M'}$ شامل هسته‌ی f می‌باشد، داریم:

$$f^{-1}(f(\mathbf{M'_n})) = \mathbf{M'_n} \ , \ f^{-1}(f(\mathbf{M'_{n_\circ}})) = \mathbf{M'_{n_\circ}}$$

(طبق تمرین ۳ از ۲.۳).

پس $\forall \mathbf{n} \geq \mathbf{n}_\circ \left(\mathbf{M'_n} = \mathbf{M'_{n_\circ}}\right)$ و حکم ثابت است.

$\mathbf{M''}$ نوتری است: (ثابت کنید).

کفایت: فرض کنیم که $\mathbf{M''},\mathbf{M'}$ نوتری باشند. برای اثبات این که $\mathbf{M}$ نوتری است، فرض کنیم که $\mathbf{M_1} \subseteq \mathbf{M_2} \subseteq \cdots$ یک رشته‌ی صعودی از زیر مدول‌های $\mathbf{M}$ باشد. ثابت می‌کنیم که این رشته ایستا است. چون $\mathbf{M''},\mathbf{M'}$ نوتری‌اند، رشته‌های صعودی:

$$f^{-1}(\mathbf{M_1}) \subseteq f^{-1}(\mathbf{M_2}) \subseteq \cdots$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{M_1}) \subseteq \mathbf{g}(\mathbf{M_2}) \subseteq \cdots \qquad ,$$

به ترتیب از زیر مدول‌های M'', M' ایستا می‌باشند. پس:

$$\exists n_\circ \quad \forall n \geq n_\circ \begin{cases} f^{-1}(M_n) = f^{-1}(M_{n_\circ}) & (1) \\ g(M_n) = g(M_{n_\circ}) & (2) \end{cases}$$

اگر نشان دهیم که $(M_n = M_{n_\circ})$ $\forall n \geq n_\circ$ حکم ثابت است. پس فرض کنیم که n یک عدد طبیعی دلخواه (و از این پس ثابت) باشد به طوری که $n \geq n_\circ$. ثابت می‌کنیم که $M_n = M_{n_\circ}$.

چون رشته‌ی $M_1 \subseteq \cdots$ صعودی است، داریم $M_{n_\circ} \subseteq M_n$. حال ثابت می‌کنیم که $M_n \subseteq M_{n_\circ}$. برای این منظور فرض کنیم که x یک عضو دلخواه M_n است. نشان دهیم که $x \in M_{n_\circ}$:

$$x \in M_n \Rightarrow g(x) \in g(M_n) [\text{رابطه‌ی } (2)] = g(M_{n_\circ})$$

$$\Rightarrow \exists x_\circ \in M_{n_\circ}\ ,\ g(x) = g(x_\circ) \Rightarrow \exists x_\circ \in M_{n_\circ}\ ,\ g(x - x_\circ) = \circ$$

$$\Rightarrow x - x_\circ \in \ker g = f(M') \Rightarrow \exists x' \in M'\ ,\ x - x_\circ = f(x') \qquad (3)$$

$$\begin{cases} x_\circ \in M_{n_\circ} \\ M_{n_\circ} \subseteq M_n \end{cases} \Rightarrow x_\circ \in M_n$$

$$\begin{cases} x \in M_n \\ x_\circ \in M_n \end{cases} \Rightarrow x - x_\circ \in M_n \Rightarrow f(x') = x - x_\circ \in M_n$$

$$\Rightarrow x' \in f^{-1}(M_n) [\text{رابطه‌ی } (1)] = f^{-1}(M_{n_\circ}) \Rightarrow f(x') \in M_{n_\circ} \qquad (4)$$

$$(3) \Rightarrow x = x_\circ + f(x') \left(x_\circ \in M_{n_\circ}\ , (4)\right) \Rightarrow x \in M_{n_\circ}$$

نتیجه ۱: اگر M', M در $R-$ مدول ایزومورفیک و M' نوتری (آرتینی) باشد، آنگاه M نیز نوتری (آرتینی) است.

برهان: اگر $f: M' \to M$ یک ایزومورفیسم باشد، کافی است رشته‌ی دقیق کوتاه:

$$\circ \to M' \xrightarrow{f} M \to \circ \to \circ$$

را در نظر بگیریم.

نتیجه ۲: فرض کنیم که M یک $R-$ مدول و N یک زیر مدول M باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای آن که M نوتری (آرتینی) باشد آن است که هر یک از N و $\frac{M}{N}$ نوتری (آرتینی) باشد.

برهان: کافی است رشته‌ی دقیق کوتاه $\circ \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{q} \frac{M}{N} \to \circ$ را در نظر بگیریم. (مثال ۴ را ملاحظه کنید).

نتیجه ۳: فرض کنیم که $M_1, \ldots, M_n$ یک رشته‌ی متناهی از $R-$ مدول‌های نوتری (آرتینی) باشد. در این صورت $\prod_{i=1}^{n} M_i$ نیز نوتری (آرتینی) است.

برهان: اثبات به استقراء بر $\mathbf{n}$ است. حکم به ازاء $\mathbf{n=1}$ بدیهی است. فرض کنیم که $\mathbf{n>1}$ و $\prod_{i=1}^{n-1}\mathbf{M_i}$ نوتری (آرتینی) باشد (فرض استقراء). ثابت می‌کنیم که $\prod_{i=1}^{n}\mathbf{M_i}$ نوتری (آرتینی) است (حکم استقراء). رشته‌ی:

$$\circ \to \mathbf{M_n} \xrightarrow{f} \prod_{i=1}^{n}\mathbf{M_i} \xrightarrow{g} \prod_{i=1}^{n-1}\mathbf{M_i} \to \circ$$

را در نظر می‌گیریم که در آن $\mathbf{g},f$ به ترتیب با ضوابط ذیل معرفی می‌گردند:

$$\forall \mathbf{x_n} \in \mathbf{M_n} \qquad f(\mathbf{x_n}) = (\circ,\circ,\ldots,\mathbf{x_n})$$

$$\forall (\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_{n-1}},\mathbf{x_n}) \in \prod_{i=1}^{n}\mathbf{M_i} \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_{n-1}},\mathbf{x_n}) = (\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_{n-1}})$$

به آسانی ثابت می‌شود که این یک رشته‌ی دقیق کوتاه است (ثابت کنید). از آنجا به موجب قضیه‌ی ۲.۹.۱ $\prod_{i=1}^{n}\mathbf{M_i}$ نوتری (آرتینی) است.

نتیجه ۴: فرض کنیم که حلقه‌ی $\mathbf{R}$ نوتری چپ (آرتینی چپ) و $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول به طور متناهی تولید شونده باشد. در این صورت $\mathbf{M}$ نوتری (آرتینی) است.

برهان: چون $\mathbf{M}$ به طور متناهی تولید می‌شود، $\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_n} \in \mathbf{M}$ وجود دارند به طوری که:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})\left(=\left\{\alpha_1\mathbf{x_1}+\cdots+\alpha_n\mathbf{x_n} \mid \alpha_i \in \mathbf{R}\right\}\right)$$

تابع $f:\mathbf{R^n} \to \mathbf{M}$ را با ضابطه‌ی $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \alpha_1\mathbf{x_1}+\cdots+\alpha_n\mathbf{x_n}$ تعریف می‌کنیم. به آسانی ثابت می‌شود که f یک $\mathbf{R}-$ همومورفیسم برو است (ثابت کنید). از آنجا $\frac{\mathbf{R^n}}{\ker f} \approx \mathbf{M}$. اما بنابه فرض $\mathbf{R}$ نوتری چپ (آرتینی چپ) است. به عبارت دیگر، $\mathbf{R}$ به عنوان یک $\mathbf{R}-$ مدول روی خودش نوتری (آرتینی) است. در نتیجه به موجب نتیجه ۳ از قضیه‌ی قبل، $\mathbf{R^n}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول نوتری (آرتینی) است. این نشان می‌دهد که $\frac{\mathbf{R^n}}{\ker f}$ نیز نوتری (آرتینی) است (نتیجه ۲ از قضیه‌ی قبل). بنابراین $\mathbf{M}$ نوتری (آرتینی) است (نتیجه ۱ از همین قضیه).

قضیه‌ی ۲.۹.۲: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول باشد. سه شرط ذیل دو به دو هم ارزند:

$(\mathbf{I})$ $\mathbf{M}$ نوتری است.

$(\mathbf{II})$ هر مجموعه‌ی ناتهی از زیر مدول‌های $\mathbf{M}$ حداقل یک ماکسیمال دارد.

$(\mathbf{III})$ هر زیر مدول $\mathbf{M}$ به طور متناهی تولید می‌شود.

برهان:

$\mathbf{I \Rightarrow II}$: فرض کنیم که $(\mathbf{I})$ بر قرار باشد نیز فرض کنیم که یک مجموعه‌ی ناتهی از زیر مدول‌های $\mathbf{M}$ موجود باشد که هیچ ماکسیمال نداشته باشد. این مجموعه را $\mathbf{S}$ می‌نامیم.

چون $\mathbf{S}$ تهی نیست عضوی مانند $\mathbf{M_1}$ دارد ($\mathbf{M_1}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ است). چون $\mathbf{S}$ هیچ عضو ماکسیمال ندارد، بالاخص $\mathbf{M_1}$ عضو ماکسیمال نیست. در نتیجه یک عضو $\mathbf{M_2 \in S}$ وجود دارد، به طوری که $\mathbf{M_1 \subset M_2}$. به دلیل مشابه، چون $\mathbf{M_2}$ نمی‌تواند یک عضو ماکسیمال $\mathbf{S}$ باشد، $\mathbf{M_3 \in S}$ وجود دارد به طوری که $\mathbf{M_2 \subset M_3}$. با ارائه این عمل ملاحظه می‌شود که یک رشته‌ی اکیداً صعودی $\mathbf{M_1 \subset M_2 \subset \cdots}$ از زیر مدول‌های $\mathbf{M}$ وجود دارد (به استقراء ثابت کنید). معلوم است که این رشته ایستا نیست و این با فرض نوتری بودن $\mathbf{M}$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

$\mathbf{II \Rightarrow III}$: فرض کنیم که شرط $\mathbf{(II)}$ بر قرار و $\mathbf{N}$ یک زیر مدول دلخواه از $\mathbf{M}$ باشد. باید ثابت کنیم که $\mathbf{N}$ به طور متناهی تولید می‌شود.

فرض کنیم که این‌طور نباشد (فرض خلف) یک عضو دلخواه مانند $\mathbf{x_1}$ از $\mathbf{N}$ را اختیار می‌کنیم. چون $\mathbf{N}$ به طور متناهی تولید نمی‌شود، داریم $\mathbf{N \neq (x_1)}$ $\mathbf{((x_1) \subset N)}$. در نتیجه $\mathbf{x_2 \in N}$ هست که $\mathbf{x_2 \notin (x_1)}$ یا $\mathbf{(x_1) \subset (x_1, x_2)}$. به دلیل مشابه چون $\mathbf{N}$ به طور متناهی تولید نمی‌شود $\mathbf{(x_1, x_2) \subset N}$ ، بنابراین $\mathbf{x_3 \notin (x_1, x_2)}$ و $\mathbf{\exists\, x_3}$. یا $\mathbf{(x_1, x_2) \subset (x_1, x_2, x_3)}$ $\mathbf{\exists\, x_3 \in N}$. با ادامه این عمل معلوم می‌شود که یک رشته $\mathbf{x_1, x_2, \ldots}$ از اعضای $\mathbf{N}$ وجود دارد به طوری که:

$$\mathbf{(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \cdots}$$

(به استقراء ثابت کنید). به آسانی دیده می‌شود که مجموعه‌ی جمله‌های این رشته، که یک مجموعه از زیر مدول‌های ناتهی $\mathbf{M}$ است، هیچ ماکسیمال ندارد. این تناقض، حکم را ثابت می‌کند.

$\mathbf{III \Rightarrow I}$: فرض کنیم که هر زیر مدول $\mathbf{M}$ به طور متناهی تولید شود. باید ثابت کنیم که هر رشته‌ی صعودی $\mathbf{M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots}$ از زیر مدول‌های $\mathbf{M}$ ایستا است. فرض کنیم که $\mathbf{N = \prod_{i=1}^{\infty} M_i}$. به آسانی ثابت می‌شود که $\mathbf{N}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ است (ثابت کنید).

چون هر زیر مدول $\mathbf{M}$ ، بالاخص $\mathbf{N}$ ، به طور متناهی تولید می‌شود.

$$\mathbf{\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in N \ , \ N = \prod_{i=1}^{\infty} M_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

$$\mathbf{x_1 \in N = \prod_{i=1}^{\infty} M_i \Rightarrow \exists i_1 \ , \ x_1 \in M_{i_1}}$$

$$\mathbf{x_2 \in N = \prod_{i=1}^{\infty} M_i \Rightarrow \exists i_2 \ , \ x_2 \in M_{i_2}}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x_n \in N = \prod_{i=1}^{\infty} M_i \Rightarrow \exists i_n \ , \ x_n \in M_{i_n}}$$

با فرض $\mathbf{n_\circ = Max\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}}$ و با توجه به این که رشته‌ی $\mathbf{M_1 \subseteq \cdots}$ صعودی است، خواهیم داشت $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n \in M_{n_\circ}}$. در نتیجه چون $\mathbf{M_{n_\circ}}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ است.

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{M_i} =\right)(\mathbf{x_1, \ldots, x_n}) \subseteq \mathbf{M_{n_\circ}}$$

بنابراین $\forall \mathbf{i} \geq \mathbf{1}\left(\mathbf{M_i \subseteq M_{n_\circ}}\right)$. حال معلوم است که به ازاء هر $\mathbf{i \geq n_\circ}$ داریم: $\mathbf{M_i = M_{n_\circ}}$ (چون که رشته‌ی $\mathbf{M_i} \subseteq \cdots$ صعودی است).

نتیجه: سه شرط ذیل دو به دو هم ارزند:

$\mathbf{(I)}$ حلقه‌ی $\mathbf{R}$ نوتری چپ است.

$\mathbf{(II)}$ هر مجموعه‌ی ناتهی از ایده‌آل‌های چپ $\mathbf{R}$ حداقل یک ماکسیمال دارد.

$\mathbf{(III)}$ هر ایده‌آل چپ $\mathbf{R}$ به طور متناهی تولید می‌شود.

قضیه‌ی ۲.۹.۳: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول باشد. دو شرط ذیل هم ارزند:

$\mathbf{(I)}$ $\mathbf{M}$ آرتینی است.

$\mathbf{(II)}$ هر مجموعه‌ی ناتهی از زیر مدول‌های $\mathbf{M}$ حداقل یک می‌نیمال دارد.

برهان:

$\mathbf{I \Rightarrow II}$: مشابه مورد نوتری است (ثابت کنید).

$\mathbf{II \Rightarrow I}$: فرض کنیم که شرط $\mathbf{II}$ بر قرار باشد نیز فرض کنیم که $\mathbf{M}$ آرتینی نباشد (فرض خلف). در این صورت یک رشته‌ی اکیداً نزولی $\mathbf{M_1 \supset M_2 \supset \cdots}$ از زیر مدول‌های $\mathbf{M}$ وجود دارد (چرا؟).

مجموعه‌ی جمله‌های این رشته هیچ عضو می‌نیمال ندارد و این با شرط $\mathbf{II}$ متناقض است.

نتیجه: دو شرط ذیل هم ارزند:

$\mathbf{(I)}$ حلقه‌ی $\mathbf{R}$ آرتینی چپ است.

$\mathbf{(II)}$ هر مجموعه‌ی ناتهی از ایده‌آل‌های چپ $\mathbf{R}$ حداقل یک می‌نیمال دارد.

توجه: با دلایلی مشابه قضایای ۲.۹.۲ و ۲.۹.۳ ثابت می‌شود که (ثابت کنید):

قضیه‌ی ۲.۹.۲: سه شرط ذیل دو به دو هم ارزند:

$\mathbf{(I)}$ $\mathbf{R}$ نوتری است.

$\mathbf{(II)}$ هر مجموعه‌ی ناتهی از ایده‌آل‌های $\mathbf{R}$ حداقل یک ماکسیمال دارد.

$\mathbf{(III)}$ هر ایده‌آل $\mathbf{R}$ به طور متناهی تولید می‌شود.

۲.۹.۳: دو شرط ذیل هم ارزند:

$\mathbf{(I)}$ $\mathbf{R}$ آرتینی است.

(II) هر مجموعه‌ی ناتهی از ایده‌آل‌های $\mathbf{R}$ حداقل یک می‌نیمال دارد.

یادآوری: $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$ عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی چند جمله‌ای‌های بر حسب متغیر $\mathbf{x}$ روی $\mathbf{R}$ (با ضرایب متعلق به $\mathbf{R}$):

$$\mathbf{R}[\mathbf{x}]=\{\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i x^i \mid \text{و فقط عده‌ای متناهی از } \alpha_i \text{ ها نا صفرند } \alpha_i\in\mathbf{R}\}$$

می‌دانیم که $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$ با دو عمل جمع و ضرب ذیل یک حلقه‌ی با عضو واحد (یکدار) است:

$$\sum_{0}^{\infty}\alpha_i x^i+\sum_{0}^{\infty}\beta_i x^i=\sum_{0}^{\infty}(\alpha_i+\beta_i)x^i$$

$$\left(\sum_{0}^{\infty}\alpha_i x^i\right)\left(\sum_{0}^{\infty}\beta_i x^i\right)=\sum_{0}^{\infty}\gamma_i x^i$$

که در آن $\gamma_i=\alpha_0\beta_i+\alpha_1\beta_{i-1}+\cdots+\alpha_i\beta_0$

اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای در $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$ باشد، به طوری که $f(x)=\sum_{0}^{\infty}\alpha_i x_i$ و $\alpha_{n+1}=\alpha_{n+2}=\cdots=0$ آنگاه $f(x)$ را به صورت $\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_n x^n$ نیز می‌نویسند. بالاخص اگر $\alpha_n\neq 0$ ، آنگاه درجه‌ی $f(x)$ را مساوی $\mathbf{n}$ تعریف می‌کنند، $\alpha_n x^n$ را جمله‌ی پیشرو $f(x)$ و α_n را ضریب پیشرو $f(x)$ می‌نامند. (ما درجه و ضریب پیشرو چند جمله‌ای صفر یعنی $0+0x+0x^2+\cdots$ را به ترتیب $0,-1$ (صفر) تعریف می‌کنیم).

قضیه‌ی ۲.۹.۴: (قضیه‌ی پایه‌ای هیلبرت): اگر $\mathbf{R}$ نوتری چپ باشد، آنگاه $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$ نیز نوتری چپ است (بالاخص اگر $\mathbf{R}$ جابه جایی باشد، از نوتری بودن $\mathbf{R}$ نوتری بودن $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$ نتیجه می‌شود).

برهان: فرض کنیم که $\mathbf{R}$ نوتری چپ باشد. برای اثبات این که $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$ نوتری چپ است، کافی است ثابت کنیم که هر ایده‌آل چپ $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$ مانند $\mathcal{A}$ به طور متناهی تولید می‌شود (نتیجه قضیه‌ی ۲.۹.۲).

فرض کنیم که $\mathbf{a}$ مجموعه‌ی همه‌ی ضریب‌های جمله آخر چند جمله‌ای‌های متعلق به $\mathcal{A}$ باشد:

$$\mathbf{a}=\{\alpha\in\mathbf{R}\mid \text{یک چند جمله‌ای } f(x) \text{ در } \mathcal{A} \text{ وجود دارد به طوری که } \alpha \text{ ضریب پیشرو آن است}\}$$

ثابت می‌کنیم که $\mathbf{a}$ یک ایده‌آل چپ $\mathbf{R}$ است.

کافی است نشان دهیم که $\mathbf{a}$ تحت عمل تفریق و ضرب اسکالر (ضرب در اعضای $\mathbf{R}$ از سمت چپ) بسته است.

$\mathbf{a}$ تحت عمل تفریق بسته است: فرض کنیم که β,α دو عضو دلخواه از $\mathbf{a}$ باشند. باید ثابت کنیم که $\alpha-\beta\in\mathbf{a}$.
اگر $\alpha=\beta$ آنگاه $\alpha-\beta=0$ و بدیهی است که $\alpha-\beta\in\mathbf{a}$ (چرا؟). پس فرض می‌کنیم $\alpha-\beta\neq 0$. بنابر تعریف $\mathbf{a}$، دو چند جمله‌ای $g(x)\,,f(x)$ وجود دارند که به شکل‌های ذیل می‌باشند:

$$f(x)=\alpha x^m+\lambda_{m-1}x^{m-1}+\cdots+\lambda_0$$

$$g(x)=\beta x^n+\Gamma_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\Gamma_0$$

بدون این که به روش کلی اثبات خللی وارد آید، می‌توان فرض کرد $m \ge n$ در این حالت داریم:

$$f(x) - x^{m-n}g(x) = (\alpha - \beta)x^m + \cdots$$

چون $\mathcal{A}$ یک ایده‌آل چپ $R[x]$ است و $f(x), g(x) \in \mathcal{A}$ داریم $f(x) - x^{m-n}g(x) \in \mathcal{A}$. در نتیجه $\alpha - \beta$ که ضریب پیشرو چند جمله‌ای $f(x) - x^{m-n}g(x)$ می‌باشد به a تعلق خواهد داشت.

a تحت ضرب اسکالر بسته است: بنابه تعریف a

$$\exists\ f(x) \in A : f(x) = \alpha x^m + \cdots$$

از آنجا $rf(x) = (r\alpha)x^m + \cdots + (r\lambda_1) + (r\lambda_\circ)$

چون $rf(x)$ به A تعلق دارد (چرا؟) و در صورتی که $r\alpha$ صفر نباشد، ضریب پیشرو آن مساوی $r\alpha$ است و خواهیم داشت:

$$r\alpha \in a$$

تا به حال نشان داده‌ایم که a یک ایده‌آل چپ R است. اما بنابه فرض، R نوتری چپ است. بنابراین a به طور متناهی تولید می‌شود به طوری که $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in a$ یافت می‌شوند که:

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)\left(= \left\{\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_k\alpha_k \,\middle|\, k_i \in R\right\}\right)$$

بنابر تعریف a ، به ازاء هر $1 \le i \le k$ ، α_i ضریب پیشرو یک چند جمله‌ای $f_i(x)$ در $\mathcal{A}$ است. فرض کنیم که:

$$\mathcal{A}' = (f_1(x), \ldots, f_k(x))\left(= \left\{\Gamma_1(x)f_1(x) + \cdots + \Gamma_k(x)f_k(x) \,\middle|\, \Gamma_i(x) \in R[x]\right\}\right);$$
$$\deg f_i(x) = d_i \quad , \quad d = \max\{d_1, \ldots, d_k\}$$
$$M = (1, x, x^2, \ldots, x^{d-1})\left(= \left\{\beta_\circ 1 + \beta_1 x + \cdots + \beta_{d-1}x^{d-1} \,\middle|\, \beta_i \in R\right\}\right).$$

عجالتاً فرض کنیم که ثابت کرده‌ایم که $\mathcal{A} = \mathcal{A}' + \mathcal{A} \cap M$. چون R نوتری چپ و M یک $R-$ مدول به طور متناهی تولید شونده می‌باشد، M یک $R-$ مدول نوتری است (نتیجه ۴ از قضیه‌ی ۲.۹.۱). از آنجا $\mathcal{A} \cap M$ که یک زیر مدول این مدول است به طور متناهی تولید می‌شود (قضیه‌ی ۲.۹.۲):

$$\mathcal{A} \cap M = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_\ell(x))\left(= \left\{\gamma_1 g_1(x) + \cdots + \gamma_\ell g_\ell(x) \,\middle|\, \gamma_i \in R\right\}\right)$$

حال با توجه به $\mathcal{A} = \mathcal{A}' + \mathcal{A} \cap M$ معلوم است که A به وسیله‌ی $f_i(x)$ ها و $g_i(x)$ ها تولید می‌شود:

$$\mathcal{A} = (f_1(x), \ldots, f_k(x), g_1(x), \ldots, g_\ell(x))$$

بنابراین آنچه برای تکمیل اثبات باقی می‌ماند عبارت است از اثبات رابطه‌ی: $\mathcal{A} = \mathcal{A}' + \mathcal{A} \cap M$

معلوم است که $\mathcal{A}' + \mathcal{A} \cap M \subseteq \mathcal{A}$ (چرا؟). برای اثبات جهت دیگر یعنی $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}' + \mathcal{A} \cap M$ فرض می‌کنیم $f(x) \in \mathcal{A}$ و ثابت می‌کنیم که $f(x) \in \mathcal{A}' + \mathcal{A} \cap M$

اثبات به استقراء قوی بر درجه‌ی $f(\mathbf{x})$ است. اگر درجه $f(\mathbf{x})$ مساوی **-1** باشد، آنگاه $f(\mathbf{x})=0$ و معلوم است که $f(\mathbf{x})=0+0\in\mathcal{A}'+\mathcal{A}\cap\mathbf{M}$. فرض کنیم که $\mathbf{n}$ یک عدد صحیح نا منفی و هر چند جمله‌ای متعلق به $\mathcal{A}$ از درجه‌ی کمتر از $\mathbf{n}$ به $\mathcal{A}'+\mathcal{A}\cap\mathbf{M}$ تعلق داشته باشد (فرض استقراء). ثابت می‌کنیم که اگر $f(\mathbf{x})$ متعلق به $\mathcal{A}$ و از درجه‌ی $\mathbf{n}$ باشد، آنگاه $f(\mathbf{x})$ به $\mathcal{A}'+\mathcal{A}\cap\mathbf{M}$ تعلق دارد (حکم استقراء). فرض کنیم که: $f(\mathbf{x})=\alpha\mathbf{x}^{\mathbf{n}}+\cdots$. چون $f(\mathbf{x})\in\mathcal{A}$ و α ضریب پیشرو $f(\mathbf{x})$ است، داریم: $\alpha\in\mathbf{a}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ از آنجا $\alpha=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_k\alpha_k$ که در آن $\lambda_i\in\mathbf{R}$. حال، دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $\mathbf{n}\le\mathbf{d}-1$ در این حالت بنابر تعریف $\mathbf{M}$ داریم $f(\mathbf{x})\in\mathbf{M}$. از آنجا $f(\mathbf{x})\in\mathbf{M}\cap\mathcal{A}$ و بنابراین:

$$f(\mathbf{x})=0+f(\mathbf{x})\in\mathcal{A}'+\mathcal{A}\cap\mathbf{M}$$

حالت دوم: $\mathbf{n}\ge\mathbf{d}$ ؛ فرض کنیم که:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-\lambda_1\mathbf{x}^{\mathbf{n}-\mathbf{d}_1}f_1(\mathbf{x})-\lambda_2\mathbf{x}^{\mathbf{n}-\mathbf{d}_2}f_2(\mathbf{x})-\cdots-\lambda_k\mathbf{x}^{\mathbf{n}-\mathbf{d}_k}f_k(\mathbf{x})$$

به آسانی دیده می‌شود که چند جمله‌ای طرف دوم به صورت:

$$(\alpha\mathbf{x}^{\mathbf{n}}+\cdots)-\left[(\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_k\alpha_k)\mathbf{x}^{\mathbf{n}}+\cdots\right]$$

می‌باشد. بنابراین درجه‌ی $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ از $\mathbf{n}$ کمتر است. از طرف دیگر چون $\mathcal{A}$ یک ایده‌آل چپ $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$ است و

$$f(\mathbf{x}),f_1(\mathbf{x}),\ldots,f_k(\mathbf{x})\in\mathcal{A}$$

خواهیم داشت $\mathbf{g}(\mathbf{x})\in\mathcal{A}$. از آنجا به موجب فرض استقراء $\mathbf{g}(\mathbf{x})\in\mathcal{A}'+\mathcal{A}\cap\mathbf{M}$. اما:

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{g}(\mathbf{x})+\left(\lambda_1\mathbf{x}^{\mathbf{n}-\mathbf{d}_1}f_1(\mathbf{x})+\cdots+\lambda_k\mathbf{x}^{\mathbf{n}-\mathbf{d}_k}f_k(\mathbf{x})\right)$$

چون $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ و چند جمله‌ای داخل پرانتز در طرف دوم این رابطه به $\mathcal{A}'+\mathcal{A}\cap\mathbf{M}$ تعلق دارند (چرا؟). ملاحظه می‌شود که $f(\mathbf{x})\in\mathcal{A}'+\mathcal{A}\cap\mathbf{M}$ و حکم ثابت است.

نتیجه: اگر $\mathbf{R}$ نوتری چپ باشد، آنگاه $\mathbf{R}[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n]$ (حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های بر حسب $\mathbf{n}$ متغیر $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n$ روی $\mathbf{R}$) نیز نوتری چپ است (به استقراء ثابت کنید).

تمرین ۸. فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول باشد و $\mathbf{M}_2,\mathbf{M}_1$ دو زیر مدول نوتری (آرتینی) $\mathbf{M}$ باشند، ثابت کنید $\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2$ نیز نوتری (آرتینی) است.

تمرین ۹. فرض کنیم که $\mathbb{Z}[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots]$ حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های بر حسب عده‌ای نامتناهی و شما را از متغیرهای $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots$ روی حلقه‌ی اعداد صحیح باشد. (می‌توان فرض نمود که:

$$\mathbb{Z}[\mathbf{x}_1]\subseteq\mathbb{Z}[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2]\subseteq\cdots$$

$$\mathbb{Z}[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\ldots]=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}[\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_i]\ )$$

یک عضو دلخواه به صورت: $\sum\alpha_{\mu_1\mu_2\ldots}\mathbf{x}_1^{\mu_1}\mathbf{x}_2^{\mu_2}\cdots$

است که در آن عده‌ای متناهی از μ_i ها نا صفرند و عده‌ای متناهی از α ها نا صفرند.
ثابت کنید که این حلقه نه نوتری است نه آرتینی.

تمرین ۱۰. یک مدول به طور متناهی تولید شونده ارائه دهید که نوتری (آرتینی) نباشد.

تمرین ۱۱. یک حلقه‌ی نوتری ارائه دهید که زیر حلقه‌ای غیر نوتری داشته باشد. ($\mathbb{Z}[x_1,\ldots]$ را به عنوان میدان این حلقه در نظر بگیرید).

تمرین ۱۲. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن که یک فضای برداری نوتری باشد آن است که با بعد متناهی باشد.

تمرین ۱۳. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آن که یک فضای برداری آرتینی باشد آن است که با بعد متناهی باشد.

تمرین ۱۴. یک مدول ارائه دهید که آرتینی باشد ولی نوتری نباشد.

تمرین ۱۵. ثابت کنید که گروه جمعی اعداد گویا به عنوان یک $\mathbb{Z}-$ مدول نه نوتری است نه آرتینی.

تعریف ۳۳: یک فانکتور $F:\mathbf{Mod}\to\mathbf{Mod}$ در کاتگوری مدول‌ها را دقیق نامیم، هرگاه به ازاء هر رشته‌ی دقیق کوتاه:

$$0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$$

از $R-$ مدول‌ها و $R-$ هومومورفیسم‌ها رشته‌ی:

$$0\to F(A)\xrightarrow{F(f)}F(B)\xrightarrow{F(g)}F(C)\to 0$$

دقیق باشد. در صورتی که F یک فانکتور پادورد باشد، آن را دقیق نامیم، هرگاه به ازاء هر رشته‌ی دقیق کوتاه $0\to A\to B\to C\to 0$ از $R-$ مدول‌ها و $R-$ هومومورفیسم‌ها رشته‌ی:

$$0\to F(C)\xrightarrow{F(g)}F(B)\xrightarrow{F(f)}F(A)\to 0$$

دقیق باشد.

تمرین ۱۶. فرض کنیم که $0\to M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\to 0$ یک رشته از $R-$ مدول‌ها و N یک $R-$ مدول دلخواه باشد. ثابت کنید که:

آ) اگر $M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''$ $(0\to M'\to M\to M''\to 0)$ دقیق باشد، آنگاه:

$$0\to \mathrm{Hom}(N,M')\xrightarrow{\bar f}\mathrm{Hom}(N,M)\xrightarrow{\bar g}\mathrm{Hom}(N,M'')$$
$$\left(0\to \mathrm{Hom}(M'',N)\xrightarrow{\underline{g}}\mathrm{Hom}(M,N)\xrightarrow{\underline{f}}\mathrm{Hom}(M',N)\right)$$

نیز دقیق است که در آن $\bar f(\alpha)=f\circ\alpha$ $\left(\underline{f}(\alpha)=\alpha\circ f\right)$

و $\bar g(\alpha)=g\circ\alpha$ $\left(\underline{g}(\alpha)=\alpha\circ g\right)$

ب) اگر رشته‌ی مفروض دقیق باشد، شرط لازم و کافی برای آن که:

$$0\to \mathrm{Hom}(N,M')\xrightarrow{\bar f}\mathrm{Hom}(N,M)\xrightarrow{\bar g}\mathrm{Hom}(N,M'')\to 0$$
$$\left(0\to \mathrm{Hom}(M'',N)\xrightarrow{\underline{g}}\mathrm{Hom}(M,N)\xrightarrow{\underline{f}}\mathrm{Hom}(M',N)\to 0\right)$$

دقیق باشد آن است که $\mathbf{N}$ پروژکتیو (انژکتیو) باشد.

(به اختصار، شرط لازم و کافی برای آن که $\mathbf{Hom}(\mathbf{N},\ )$ $\left(\mathbf{Hom}(\ ,\mathbf{N})\right)$ دقیق باشد آن است که $\mathbf{N}$ پروژکتیو (انژکتیو) باشد).

تمرین ۱۷. فرض کنید $\mathbf{R}$ جابه جایی و $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول به طور متناهی تولید شونده باشد. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن که $\mathbf{M}$ نوتری (آرتینی) باشد آن است که حلقه‌ی $\dfrac{\mathbf{R}}{\mathbf{ann(M)}}$ نوتری (آرتینی) باشد.

$$\mathbf{ann\,M} = \left\{\mathbf{r} \in \mathbf{R} \,\middle|\, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{M}\ ;\ (\mathbf{rx} = \circ)\right\}$$

بخش ۲.۱۰: لِمِ زُرن و کاربرُد

تعریف ۳۴: فرض کنیم که $\mathbf{S}$ یک مجموعه از مجموعه‌ها باشد و $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$. یک عضو $\mathbf{b}$ از $\mathbf{S}$ را یک بند بالای $\mathbf{S}'$ نامیم، هرگاه داشته باشیم $\forall \mathbf{s}' \in \mathbf{S}' (\mathbf{s}' \subseteq \mathbf{b})$.

تعریف ۳۵: فرض کنیم که $\mathbf{S}$ یک مجموعه از مجموعه‌ها باشد. $\mathbf{S}$ را استقرایی نامیم هرگاه هر زنجیر در $\mathbf{S}$ (حداقل) یک بند بالا (در $\mathbf{S}$) داشته باشد.

لِمِ زُرن ۲.۱۰.۱: هر مجموعه‌ی نا تهی استقرایی با هر ترتیب جزیی (حداقل) یک ماکسیمال دارد.
(بدون اثبات پذیرفته می‌شود).

توجه: لم زرن با هر یک از اصل‌های «انتخاب» و «خوش ترتیبی» هم ارز است:

اصل انتخاب بیان می‌کند که اگر $\{\mathbf{A_i}\}_{\mathbf{i \in I}}$ یک خانواده‌ی دلخواه از مجموعه‌های غیر تهی و دو به دو از هم جدا باشد، آنگاه یک مجموعه وجود دارد که دقیقاً از هر $\mathbf{A_i}$ یک و فقط یک عضو را شامل است.

اصل خوش‌ترتیبی بیان می‌کند که هر مجموعه خوش‌ترتیب است یعنی اگر $\mathbf{X}$ یک مجموعه‌ی دلخواه باشد، آنگاه یک ترتیب جزیی در $\mathbf{X}$ وجود دارد که $\mathbf{X}$ با این ترتیب جزیی خوش‌ترتیب است (یعنی هر زیر مجموعه‌ی ناتهی آن با این ترتیب می‌نیمم دارد).

یادآوری: یک ایده‌آل $\mathbf{m}$ از حلقه‌ی $\mathbf{R}$ ، که غیر از خود $\mathbf{R}$ باشد، ماکسیمال نامیده می‌شود هرگاه غیر از $\mathbf{R}$ هیچ ایده‌آل دیگر $\mathbf{R}$ به طور سره شامل $\mathbf{m}$ نباشد. یعنی به ازاء هر ایده‌آل $\mathbf{U}$ از $\mathbf{R}$ از $\mathbf{m} \subset \mathbf{U}$ نتیجه شود $\mathbf{U} = \mathbf{R}$. (در حقیقت ایده‌آل‌های ماکسیمال $\mathbf{R}$ دقیقاً عبارتند از عنصرهای ماکسیمال مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های سره‌ی $\mathbf{R}$ (ایده‌آل‌های $\mathbf{R}$ غیر از خودش)).

قضیه‌ی ۲.۱۰.۲: هر ایده‌آل سره‌ی $\mathbf{R}$ مشمول در حداقل یک ایده‌آل ماکسیمال $\mathbf{R}$ است، یعنی اگر $\mathbf{a}$ یک ایده‌آل سره‌ی $\mathbf{R}$ باشد، آنگاه یک ایده‌آل ماکسیمال $\mathbf{m}$ از $\mathbf{R}$ وجود دارد به طوری‌که $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{m}$.

برهان: فرض کنیم که $\mathbf{S}$ مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های سره از $\mathbf{R}$ باشد که هر یک از آنها شامل $\mathbf{a}$ است.

$$\mathbf{S} = \left\{ \mathbf{b} \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathbf{b} \text{ یک ایده‌آل } \mathbf{R} \text{ است} \\ \mathbf{b} \neq \mathbf{R} \\ \mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \end{array} \right\}$$

اگر نشان دهیم که $\mathbf{S}$ حداقل یک ماکسیمال دارد، حکم ثابت است. چون که هر عنصر ماکسیمال $\mathbf{S}$ یک ایده‌آل ماکسیمال $\mathbf{R}$ نیز خواهد بود (چرا؟).

برای اثبات این مطلب از لم زرن استفاده می‌کنیم. بنابراین لم کافی است نشان دهیم که $\mathbf{S}$ ناتهی و استقرایی است.

$\mathbf{S}$ ناتهی است: بدیهی است که $\mathbf{a} \in \mathbf{S}$.

$\mathbf{S}$ استقرایی است: فرض کنیم که $\{\mathbf{a_i}\}_{\mathbf{i\in I}}$ یک زنجیر دلخواه از اعضای $\mathbf{S}$ باشد. باید ثابت کنیم که این زنجیر در $\mathbf{S}$ یک بند بالا دارد. کافی است نشان دهیم که $\bigcup \mathbf{a_i} \in \mathbf{S}$.

باید نشان دهیم که:

$\bigcup_{\mathbf{i\in I}} \mathbf{a_i}$ $(\mathbf{i})$: یک ایده‌آل $\mathbf{R}$ است (ثابت کنید).

$\bigcup_{\mathbf{i\in I}} \mathbf{a_i} \neq \mathbf{R}$ $(\mathbf{ii})$: در حقیقت ادعا می‌کنیم که $\mathbf{1} \notin \bigcup_{\mathbf{i\in I}} \mathbf{a_i}$. فرض کنیم که $\mathbf{1} \in \bigcup \mathbf{a_i}$ (فرض خلف). در این صورت بنابر تعریف اجتماع مجموعه‌ها $\exists \mathbf{i} \in \mathbf{I}(\mathbf{1} \in \mathbf{a_i})$ از آنجا $\exists \mathbf{i}, \mathbf{a_i} = \mathbf{R}$. این نشان می‌دهد که $\mathbf{a_i} \notin \mathbf{S}$ که یک تناقض است.

$\bigcup \mathbf{a_i} \supseteq \mathbf{a}$ $(\mathbf{iii})$: بدیهی است، چون که هر $\mathbf{a_i}$ شامل $\mathbf{a}$ است.

نتیجه ۱: اگر $\mathbf{R} \neq \circ$ ($\circ$ به معنی حلقه‌ی بدیهی $\{\circ\}$ است). آنگاه $\mathbf{R}$ حداقل یک ایده‌آل ماکسیمال دارد (توجه کنید که حلقه‌ی بدیهی $\{\circ\}$ هیچ ایده‌آل ماکسیمال ندارد).

برهان: کافی است به ازاء $\mathbf{a} = \circ$ از قضیه‌ی فوق استفاده کنیم. ایده‌آل بدیهی $\circ$ یک ایده‌آل سره‌ی $\mathbf{R}$ (که صفر نیست) می‌باشد. بنابراین به موجب قضیه‌ی قبل مشمول در یک ایده‌آل، ماکسیمال است.

قرارداد: از این به بعد در این بخش حلقه $\mathbf{R}$ علاوه بر یکدار بودن، تعویض‌پذیر نیز خواهد بود و $\mathbf{1} \neq \circ$ (یعنی $\mathbf{R}$ حداقل دو عضو خواهد داشت).

یادآوری: یک یکال در حلقه‌ی $\mathbf{R}$ یعنی یک عضو معکوس‌پذیر آن (با عمل ضرب) و یک نایکال در این حلقه یعنی عضوی که معکوس‌پذیر نباشد.

نتیجه ۲: هر عضو نایکال $\mathbf{R}$ مشمول در یک ایده‌آل ماکسیمال $\mathbf{R}$ است. یعنی اگر α یک عضو نایکال $\mathbf{R}$ باشد، آنگاه یک ایده‌آل ماکسیمال $\mathbf{m}$ وجود دارد به طوری که $\alpha \in \mathbf{m}$. (توجه کنید که یک عضو یکال نمی‌تواند مشمول در یک ایده‌آل ماکسیمال باشد).

برهان: کافی است به ازاء $\mathbf{a} = (\alpha)\left(= \{\mathbf{r}\alpha | \mathbf{r} \in \mathbf{R}\}\right)$ از قضیه‌ی بالا استفاده کنیم. فقط باید نشان دهیم که $\mathbf{a} \neq \mathbf{R}$. فرض کنیم که $\mathbf{a} = \mathbf{R}$ (فرض خلف).

در این صورت $\mathbf{1} \in (\alpha)$ و درنتیجه $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$ وجود دارد به طوری که $\mathbf{1} = \mathbf{r}\alpha(= \alpha\mathbf{r})$. این نشان می‌دهد که α یکال است که مخالف فرض است.

تعریف ۳۶: مقطع (اشتراک) همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال $\mathbf{R}$ را رادیکال ژاکوبسنی $\mathbf{R}$ می‌نامیم و آن را به $\mathbf{J}$ نشان می‌دهیم.

(لم ناکایاما) قضیه‌ی ۲.۱۰.۳: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول به طور متناهی تولید شونده و $\mathbf{a}$ یک ایده‌آل حلقه‌ی $\mathbf{R}$ ، مشمول در $\mathbf{J}$ (رادیکال ژاکوبسنی $\mathbf{R}$) باشد به طوری که $\mathbf{M} = \mathbf{aM}$. در این صورت، $\mathbf{M} = \circ$

برهان: فرض کنیم که $\mathbf{M \neq 0}$ (فرض خلف). چون $\mathbf{M}$ به طور متناهی تولید می‌شود و مجموعه‌ی اعداد طبیعی با نسبت $\leq$ خوش‌ترتیب است، یک مولد $\mathbf{n}$ عضوی $\left\{\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_n}\right\}$ از $\mathbf{M}$ وجود دارد به طوری‌که هیچ زیر مجموعه‌ی سره‌ی آن (بالاخص هیچ زیر مجموعه‌ی $\mathbf{n-1}$ عضوی آن) یک مولد $\mathbf{M}$ نیست.

معلوم است که هیچ یک از $\mathbf{x_i}$ ها صفر نیست (چرا؟).

هدف ما این است که نشان دهیم $\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}}$ نیز $\mathbf{M}$ را تولید می‌کند و به این ترتیب یک تناقض به دست آوریم و فرض خلف را باطل کنیم.

چون $\mathbf{x_n \in M}$ و $\mathbf{M = aM}$ داریم $\mathbf{x_n \in aM}$. از آنجا به موجب تعریف $\mathbf{aM}$:

$$\exists\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathbf{a} \quad \exists \mathbf{y_1,\ldots,y_k \in M : x_n} = \alpha_1\mathbf{y_1}+\cdots+\alpha_k\mathbf{y_k} \qquad (*)$$

چون $\mathbf{y_1,y_2,\ldots,y_k \in M}$ و $\mathbf{x_1,\ldots,x_n}$ یک مولد $\mathbf{M}$ است.

$$\begin{aligned}\exists\beta_{ij} \in \mathbf{R}\left(\mathbf{1 \leq i \leq k\ ,\ 1 \leq j \leq n}\right)\ ,\ \mathbf{y_1} &= \beta_{11}\mathbf{x_1}+\cdots+\beta_{1n}\mathbf{x_n}\\ \mathbf{y_2} &= \beta_{21}\mathbf{x_1}+\cdots+\beta_{2n}\mathbf{x_n}\\ &\vdots\\ \mathbf{y_k} &= \beta_{k1}\mathbf{x_1}+\cdots+\beta_{kn}\mathbf{x_n}\end{aligned}$$

اگر به جای $\mathbf{y_i}$ ها در رابطه $(*)$ مقادیر مساوی آنها را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{x_n} &= \alpha_1\left(\beta_1\mathbf{x_1}+\cdots+\beta_{1_n}\mathbf{x_n}\right)+\cdots+\alpha_k\left(\beta_{k_1}\mathbf{x_1}+\cdots+\beta_{k_n}\mathbf{x_n}\right)\\ &= \left(\alpha_1\beta_1+\cdots+\alpha_k\beta_{k_1}\right)\mathbf{x_1}+\cdots+\left(\alpha_1\beta_{1_n}+\cdots+\alpha_k\beta_{k_n}\right)\mathbf{x_n}\\ &= \gamma_1\mathbf{x_1}+\cdots+\gamma_n\mathbf{x_n}\end{aligned}$$

که در آن $\gamma_1 = \alpha_1\beta_{11}+\cdots+\alpha_k\beta_{k_1}$

چون $\alpha_i \in \mathbf{a}$ و $\mathbf{a}$ یک ایده‌آل $\mathbf{R}$ است، داریم $\gamma_i \in \mathbf{a}$ $\left(\mathbf{1 \leq i \leq n}\right)$.

از رابطه‌ی $\mathbf{x_n} = \gamma_1\mathbf{x_1}+\cdots+\gamma_n\mathbf{x_n}$ حاصل می‌شود.

$$\left(\mathbf{1}-\gamma_n\right)\mathbf{x_n} = \gamma_1\mathbf{x_1}+\cdots+\gamma_{n-1}\mathbf{x_{n-1}}\ ,$$

اگر نشان دهیم که $\mathbf{1}-\gamma_n$ یکال (معکوس‌پذیر) است، آنگاه $\mathbf{x_n}$ به وسیله‌ی $\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}}$ و در نتیجه $\mathbf{M}$ نیز به وسیله‌ی $\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}}$ تولید خواهد شد که با انتخاب مولد $\mathbf{x_1,\ldots,x_n}$ متناقض و بنابراین حکم ثابت خواهد بود.

فرض کنیم که $\mathbf{1}-\gamma_n$ نایکال باشد (فرض خلف). بنابر نتیجه ۲ از قضیه‌ی ۲.۱۰.۲، یک ایده‌آل ماکسیمال $\mathbf{m}$ از $\mathbf{R}$ هست که $\mathbf{1}-\gamma_n \in \mathbf{m}$. از طرف دیگر $\gamma_n \in \mathbf{a}$ و $\mathbf{a}$ مشمول در هر ایده‌آل ماکسیمال من‌جمله $\mathbf{m}$ است. پس $\gamma_n \in \mathbf{m}$. از $\mathbf{1}-\gamma_n \in \mathbf{m}$ و $\gamma_n \in \mathbf{m}$ نتیجه می‌شود که $\mathbf{1 \in m}$ که امکان ندارد، چون $\mathbf{m}$ ماکسیمال است. پس فرض نایکال بودن $\mathbf{1}-\gamma_n$ باطل و حکم ثابت است.

نتیجه (قضیه‌ی کرول): فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول به طور متناهی تولید شونده، $\mathbf{N}$ یک زیر مدول $\mathbf{M}$ و $\mathbf{a}$ یک ایده‌آل $\mathbf{R}$ مشمول در رادیکال ژاکوبسنی $\mathbf{R}$ باشد به طوری که:

$\mathbf{aM+N=M}$ در این صورت $\mathbf{N=M}$

برهان: لم ناکایاما را برای $\mathbf{R}-$ مدول خارج قسمتی $\dfrac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$ (به جای $\mathbf{M}$) به کار می‌بریم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که شرایط لم ناکایاما برای $\dfrac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$ بر قرار است.

چون که اگر $\mathbf{u_1,\ldots,u_k}$ یک مولد $\mathbf{M}$ باشد، آنگاه $\mathbf{u_1+N,\cdots,u_k+N}$ یک مولد $\dfrac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$ است (بررسی کنید). و داریم:

$$\mathbf{a}\left(\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}\right)[\text{تمرین ۲ از ۲.۵}] = \frac{\mathbf{aM+N}}{\mathbf{N}}[\text{فرض}] = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$$

پس به موجب این لم باید داشته باشیم $\dfrac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}=\circ=\{\mathbf{N}\}$ یا به عبارت هم ارز $\mathbf{M=N}$. (چرا؟).

تمرین ۱: ثابت کنید که هر فضای برداری آزاد است (حداقل یک مبنا دارد).

تمرین ۲: ثابت کنید که در هر فضای برداری $\mathbf{V}$ هر زیر فضا یک جمعک مستقیم است و نتیجه بگیرید که هر مجموعه‌ی مستقل خطی در $\mathbf{V}$ قابل تکمیل به یک مبنای $\mathbf{V}$ است (یعنی اگر $\mathbf{L}$ یک زیر مجموعه‌ی مستقل خطی $\mathbf{V}$ باشد، آنگاه یک زیر مجموعه‌ی $\mathbf{L'}$ از $\mathbf{V}$ وجود دارد به طوری که $\mathbf{L\bigcup L'}$ یک مبنای $\mathbf{V}$ است و $\mathbf{L'\bigcap L=\emptyset}$)

تمرین ۳: ثابت کنید که از هر مولد یک فضای برداری دلخواه $\mathbf{V}$ می‌توان یک مبنا استخراج نمود، یعنی اگر $\mathbf{L}$ یک مولد $\mathbf{V}$ باشد، آنگاه یک زیر مجموعه‌ی $\mathbf{L'}$ از $\mathbf{L}$ وجود دارد که یک مبنای $\mathbf{V}$ است. (**راهنمایی:** ثابت کنید که مجموعه‌ی $\mathbf{S=\{L'|L'\subseteq L}$ مستقل خطی است و $\mathbf{L'\}}$ حداقل یک ماکسیمال دارد و هر ماکسیمال $\mathbf{S}$ یک مبنای $\mathbf{V}$ است).

تمرین ۴: احکام ذیل را که در فضاهایی بر قرارند برای مدول‌ها باطل کنید:

(i) هر مدول آزاد است (**راهنمایی:** $\mathbf{M=Q}$ و $\mathbf{R}=\mathbb{Z}$ ثابت کنید که هر دو عدد گویا روی $\mathbb{Z}$ بستگی خطی دارند و یک عدد گویا به تنهایی $\mathbf{Q}$ را تولید نمی‌کند).

(ii) هر مجموعه‌ی مستقل خطی قابل تکمیل به یک مبنا است (**راهنمایی:** مثال بالا و یا $\mathbf{R=M}=\mathbb{Z}$).

(iii) از هر مولد می‌توان یک مبنا استخراج نمود (**راهنمایی:** $\mathbf{R=M}=\mathbb{Z}$).

تمرین ۵: فرض کنیم که $\mathbf{m}$ یک ایده‌آل $\mathbf{R}$ باشد (توجه شود که از این به بعد $\mathbf{R}$ حلقه‌ی تعویض‌پذیر است و $\mathbf{1}\neq\circ$). ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای این که $\mathbf{m}$ یک ایده‌آل ماکسیمال $\mathbf{R}$ باشد آن است که حلقه‌ی خارج قسمتی $\dfrac{\mathbf{R}}{\mathbf{m}}$ یک میدان باشد.

تمرین ۶: فرض کنیم که $\mathbf{M}$ یک $\mathbf{R}-$ مدول آزاد به طور متناهی تولید شونده باشد، ثابت کنید که:

آ) هر مبنای $\mathbf{M}$ متناهی است.

ب) عده‌ی اعضای هر دو مبنای $\mathbf{M}$ مساوی‌اند.

راهنمایی: برای قسمت ب)، بنابر قضیه‌ی ۲.۱۰.۲، $\mathbf{R}$ دارای یک ایده‌آل ماکسیمال $\mathbf{m}$ است. ابتدا ثابت کنید که:

$(\mathbf{i})$ $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{mM}}$ با عمل جمع و ضرب اسکالر ذیل یک فضای برداری روی میدان $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{m}}$ است (مسأله‌ی قبل را ملاحظه کنید):

عمل جمع در $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{mM}}$: همان عمل جمع گروه خارج قسمتی:

$$\forall \mathbf{x}+\mathbf{mM}, \mathbf{y}+\mathbf{mM}$$
$$(\mathbf{x}+\mathbf{mM})+(\mathbf{y}+\mathbf{mM})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{mM}$$

ضرب اسکالر اعضای $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{m}}$ در اعضای $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{mM}}$:

$$\forall \mathbf{r}+\mathbf{m} \in \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{m}} \qquad \forall \mathbf{x}+\mathbf{mM} \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{mM}}$$
$$(\mathbf{r}+\mathbf{m})(\mathbf{x}+\mathbf{mM})=\mathbf{rx}+\mathbf{mM}$$

(خوش‌ترتیبی ضرب اسکالر را فراموش نکنید).

$(\mathbf{ii})$ اگر $\mathbf{x_1,\ldots,x_n}$ یک مبنای $\mathbf{M}$ باشد، آنگاه $\mathbf{x_1+mM,\cdots,x_n+mM}$ یک مبنای فضای برداری $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{mM}}$ روی $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{M}}$ خواهد بود.

تمرین ۷: رادیکال ژاکوبسنی هر یک از حلقه‌های $\mathbb{Z}_{12},\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}$ را به دست آورید.

تمرین ۸: فرض کنیم که $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$ ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آن که $\mathbf{x}$ به رادیکال ژاکوبسنی $\mathbf{R}$ تعلق داشته باشد آن است که به ازاء هر $\mathbf{y} \in \mathbf{R}$ ، $\mathbf{1-xy}$ یکال باشد (**راهنمایی:** برای اثبات هر دو قسمت از برهان خلف استفاده کنید).

بخش ۲.۱۱: ایده‌آل‌های اول و اولیه

قرارداد: حلقه‌ی $\mathbf{R}$ در این بخش علاوه بر یکدار بودن، تعویض‌پذیر نیز خواهد بود. هم چنین صفر و واحد این حلقه متمایزند (یا به عبارت هم ارز $\mathbf{R}$ حداقل دو عضو دارد).

$\mathbf{F}$ نیز یک میدان دلخواه خواهد بود.

تعریف ۳۷: یک ایده‌آل سره از $\mathbf{R}$ (ایده‌آلی از $\mathbf{R}$ غیر از خودش) مانند $\mathbf{P}$ را اول نامیم، هرگاه به ازاء هر دو عضو β,α از $\mathbf{R}$، از $\alpha\beta \in \mathbf{P}$ و $\beta \in \mathbf{P}$.

مثال ۱: می‌دانیم که هر ایده‌آل حلقه‌ی اعداد صحیح به صورت $(\mathbf{n})$ است که در آن $\mathbf{n}$ یک عدد صحیح نا منفی است. ادعا می‌کنیم که $(\mathbf{n})$ فقط و فقط وقتی یک ایده‌آل اول حلقه‌ی اعداد صحیح است که $\mathbf{n}=0$ یا $\mathbf{n}$ یک عدد اول باشد.

$\mathbf{n}=0$:

$$\begin{aligned}&\alpha,\beta \in \mathbb{Z}\\ &\alpha\beta \in (0) \Rightarrow \begin{cases}\alpha\beta = 0\\ \alpha \neq 0\end{cases} \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \beta \in (0)\\ &\alpha \notin (0)\end{aligned}$$

$\mathbf{n}$ یک عدد اول است:

$$\begin{aligned}&\alpha,\beta \in \mathbb{Z}\\ &\alpha\beta \in (\mathbf{n}) \Rightarrow \begin{cases}\mathbf{n}\mid\alpha\beta\\ \mathbf{n}\nmid\alpha\end{cases} [\mathbf{n}\ \text{عدد اول است}] \Rightarrow \mathbf{n}\mid\beta \Rightarrow \beta \in (\mathbf{n})\\ &\alpha \notin (\mathbf{n})\end{aligned}$$

$\mathbf{n}=1$: $(\mathbf{n})$ سره نیست و در نتیجه اول نیست.

$\mathbf{n}\neq 1$: $\mathbf{n}$ اول نیست:

$$\exists \mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2 \in \mathbb{N} : \begin{cases}\mathbf{n} = \mathbf{n}_1\mathbf{n}_2\\ 1 < \mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2 < \mathbf{n}\end{cases}$$

برای اثبات این که $(\mathbf{n})$ اول نیست، کافی است ملاحظه کنیم که:

$$\begin{cases}\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2 \in (\mathbf{n})\\ \left.\begin{aligned}\mathbf{n}_1 \notin (\mathbf{n})\\ \mathbf{n}_2 \notin (\mathbf{n})\end{aligned}\right\} \quad (\text{چرا؟})\end{cases}$$

تمرین ۱. فرض کنیم که $\mathbf{P}$ یک ایده‌آل اول $\mathbf{R}$ باشد و $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in \mathbf{R}$. ثابت کنید که:

الف) از $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in \mathbf{P}$ نتیجه می‌شود که لااقل یکی از α_i ها به $\mathbf{P}$ تعلق دارد.

ب) $\forall \alpha \in \mathbf{R} \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}\left(\alpha^{\mathbf{n}} \in \mathbf{P} \Rightarrow \alpha \in \mathbf{P}\right)$

تمرین ۲. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آن که یک ایده‌آل سره‌ی $\mathbf{P}$ از $\mathbf{R}$ اول باشد آن است که حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{P}}$ یک حوزه‌ی صحیح باشد.

تمرین ۳. ثابت کنید که هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathbf{R}$ اول است.

تمرین ۴. نشان دهید که ایده‌آل‌های $(\mathbf{x},\mathbf{y}),(\mathbf{y}),(\mathbf{x})$ در حلقه‌ی $\mathbf{F}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ (حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های بر حسب دو متغیر $\mathbf{y},\mathbf{x}$ روی $\mathbf{F}$) اولند و در بین آنها فقط $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ماکسیمال است.

تمرین ۵. ثابت کنید که اگر $\mathbf{R}$ حوزه‌ی ایده‌آل اصلی باشد، آنگاه هر ایده‌آل اول نا صفر آن ماکسیمال است.

(توجه کنید که حلقه‌ی اعداد صحیح یک حوزه‌ی ایده‌آل اصلی است، ولی ایده‌آل بدیهی صفر در آن ماکسیمال نیست).

تعریف ۳۸: یک ایده‌آل سره‌ی $\mathbf{q}$ از $\mathbf{R}$ را اولیه می‌نامیم، هرگاه به ازاء هر دو عضو β,α متعلق به $\mathbf{R}$ از $\alpha\beta \in \mathbf{q}$ و $\alpha \notin \mathbf{q}$ نتیجه شود $\exists \mathbf{n} \in \mathbb{N}\left(\beta^{\mathbf{n}} \in \mathbf{q}\right)$.

مثال ۲: با نمادهای مثال ۱، ادعا می‌کنیم که $(\mathbf{n})$ فقط و فقط وقتی اولیه است که $\mathbf{n} = 0$ یا $\mathbf{n}$ به صورت $\mathbf{p}^{\mathbf{k}}$ که در آن $\mathbf{p}$ یک عدد طبیعی اول و $\mathbf{k}$ یک عدد طبیعی دلخواه است.

$\mathbf{n} = 0$: ثابت کنید (در حقیقت بدیهی است که هر ایده‌آل اول اولیه است).

$$\begin{cases} \alpha_1\beta \in \mathbf{R} \\ \alpha\beta \in \left(\mathbf{p}^{\mathbf{k}}\right) \Rightarrow \\ \alpha \notin \left(\mathbf{p}^{\mathbf{k}}\right) \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \mathbf{p}^{\mathbf{k}} \mid \alpha\beta \\ \mathbf{p}^{\mathbf{k}} \nmid \alpha \end{cases} \Rightarrow \mathbf{p} \mid \beta \Rightarrow \mathbf{p}^{\mathbf{k}} \mid \beta^{\mathbf{k}} \Rightarrow \beta^{\mathbf{k}} \in \left(\mathbf{p}^{\mathbf{k}}\right)$$

$\mathbf{n} = 1$: $(\mathbf{n})$ سره، و در نتیجه اولیه نیست.

$\mathbf{n} \neq 1$: $\mathbf{n}$ هیچ توان طبیعی از یک عدد اول نیست. فرض کنیم که:

$$\mathbf{n} = \mathbf{p}_1^{\alpha_1}\mathbf{p}_2^{\alpha_2}\cdots\mathbf{p}_t^{\alpha_t}$$

تجزیه‌ی استاندارد $\mathbf{n}$ به حاصل‌ضرب اعداد اول باشد. معلوم است که $\mathbf{t} \geq 2$ داریم:

$$\left(\mathbf{p}_1^{\alpha_1}\right)\left(\mathbf{p}_2^{\alpha_2}\cdots\mathbf{p}_t^{\alpha_t}\right) = \mathbf{n} \in (\mathbf{n})$$
$$\mathbf{p}_1^{\alpha_1} \notin (\mathbf{n})$$
$$\forall \mathbf{m} \in \mathbb{N}\left(\mathbf{p}_2^{\alpha_2}\cdots\mathbf{p}_t^{\alpha_t}\right)^{\mathbf{m}} \notin (\mathbf{n})$$

تعریف ۳۹: یک عضو $\mathbf{a}$ از $\mathbf{R}$ یک پوچ توان نامیده می‌شود. هرگاه $\exists \mathbf{n} \in \mathbf{N}\left(\mathbf{a}^{\mathbf{n}} = 0\right)$

تعریف ۴۰: یک عضو $\mathbf{a}$ از $\mathbf{R}$ یک مقسوم‌علیه صفر نامیده می‌شود، هرگاه یک عضو نا صفر $\mathbf{b}$ از $\mathbf{R}$ موجود باشد به طوری که: $\mathbf{ab} = 0$

اگر $\mathbf{a}$ یک مقسوم‌علیه صفر باشد و $\mathbf{a} \neq \circ$ ، آنگاه $\mathbf{a}$ را یک مقسوم‌علیه سره‌ی صفر می‌نامند.

تمرین ۶. پوچ توان‌ها و مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌ی $\mathbb{Z}_{12}$ را مشخص کنید.

تمرین ۷. ثابت کنید که هر پوچ توان $\mathbf{R}$ یک مقسوم علیه صفر است.

تمرین ۸. ثابت کنید که یک ایده‌آل سره‌ی $\mathbf{q}$ از $\mathbf{R}$ اولیه است اگر و فقط اگر هر مقسوم علیه صفر در حلقه‌ی خارج قسمتی $\dfrac{\mathbf{R}}{\mathbf{q}}$ یک پوچ توان باشد.

تعریف ۴۱: فرض کنیم که $\mathbf{a}$ یک ایده‌آل $\mathbf{R}$ باشد. رادیکال $\mathbf{a}$ را که به $\mathbf{rad\,a}$ یا به اختصار $\mathbf{r(a)}$ نشان می‌دهیم مطابق ذیل تعریف می‌شود:

$$\mathbf{r(a)} = \left\{\lambda \in \mathbf{R} \middle| \ \exists \mathbf{n} \in \mathbf{N}\ \left(\lambda^{\mathbf{n}} \in \mathbf{a}\right)\right\}$$

(بالاخص رادیکال ایده‌آل بدیهی صفر را پوچ رادیکال $\mathbf{R}$ می‌نامند).

$$\text{پوچ رادیکال } \mathbf{R} = \left\{\lambda \in \mathbf{R} \middle| \exists \mathbf{n} \in \mathbf{N}\ \left(\lambda^{\mathbf{n}} = \circ\right)\right\}$$

مثال ۳: فرض کنیم که $\mathbf{n}$ یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از $\mathbf{1}$, $\mathbf{n} = \mathbf{p}_1^{\alpha_1}\mathbf{p}_2^{\alpha_2}\cdots\mathbf{p}_k^{\alpha_k}$ تجزیه‌ی استاندارد $\mathbf{n}$ به حاصل‌ضرب اعداد اول باشد. ادعا می‌کنیم که:

$$\mathbf{rad}\left((\mathbf{n})\right) = \left(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\ldots\mathbf{p}_k\right)$$

(برای مثال: $\left(\mathbf{rad}\left(3^5 \times 11^{10}\right)\right) = \mathbf{rad}\left(\left(3^2 \times 11\right)\right) = \mathbf{rad}\left(\left(3 \times 11\right)\right) = \left(33\right)$)

$\mathbf{r}\left(\left(\mathbf{p}_1^{\alpha_1}\mathbf{p}_2^{\alpha_2}\cdots\mathbf{p}_k^{\alpha_k}\right)\right) \subseteq \left(\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_k\right)$:

$$\alpha \in \mathbf{r}\left(\left(\mathbf{p}_1^{\alpha_1}\cdots\mathbf{p}_k^{\alpha_k}\right)\right)[\text{ تعریف رادیکال }] \Rightarrow \exists \mathbf{n} \in \mathbf{N}\left(\alpha^{\mathbf{n}} \in \left(\mathbf{p}_1^{\alpha_1}\cdots\mathbf{p}_k^{\alpha_k}\right)\right)$$
$$\Rightarrow \mathbf{p}_1^{\alpha_1}\cdots\mathbf{p}_k^{\alpha_k} \,|\, \alpha^{\mathbf{n}} \Rightarrow \mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_k \,|\, \alpha^{\mathbf{n}} [\ \mathbf{p}_i \text{ ها اولند }]$$
$$\Rightarrow \mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\ldots,\mathbf{p}_k \,|\, \alpha\ [\ \mathbf{p}_i \text{ ها دو به دو نسبت به هم اولند }] \Rightarrow \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\ldots\mathbf{p}_k \,|\, \alpha$$
$$\Rightarrow \alpha \in \left(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\ldots\mathbf{p}_k\right)$$

$\left(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\ldots\mathbf{p}_k\right) \subseteq \mathbf{r}\left(\left(\mathbf{p}_1^{\alpha_1}\mathbf{p}_2^{\alpha_2}\cdots\mathbf{p}_k^{\alpha_k}\right)\right)$: فرض کنیم که $\mathbf{n} = \mathbf{Max}\left\{\alpha_1,\ldots\alpha_k\right\}$ ،

$$\lambda \in \left(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\ldots\mathbf{p}_k\right) \Rightarrow \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\ldots\mathbf{p}_k \,|\, \lambda \Rightarrow \mathbf{p}_1^{\mathbf{n}}\mathbf{p}_2^{\mathbf{n}}\cdots\mathbf{p}_k^{\mathbf{n}} \,|\, \lambda^{\mathbf{n}}$$
$$\Rightarrow \mathbf{p}_1^{\alpha_1}\mathbf{p}_2^{\alpha_2}\cdots\mathbf{p}_k^{\alpha_k} \,|\, \lambda^{\mathbf{n}} \Rightarrow \lambda^{\mathbf{n}}\left(\mathbf{p}_1^{\alpha_1}\cdots\mathbf{p}_k^{\alpha_k}\right)[\text{ تعریف رادیکال }]$$
$$\Rightarrow \lambda \in \mathbf{r}\left(\left(\mathbf{p}_1^{\alpha_1}\mathbf{p}_2^{\alpha_2}\cdots\mathbf{p}_k^{\alpha_k}\right)\right)$$

قضیه‌ی ۲.۱۱.۱: فرض کنیم که $\mathbf{a}$ یک ایده‌آل $\mathbf{R}$ باشد. در این صورت:

$\mathbf{(I)}$ $\mathbf{r(a)}$ یک ایده‌آل $\mathbf{R}$ و شامل $\mathbf{a}$ است.

$\mathbf{(II)}$ $\mathbf{r}\left(\mathbf{r(a)}\right) = \mathbf{r(a)}$

$(\mathbf{III})$ اگر $\mathbf{a}$ اولیه باشد، آنگاه $\mathbf{r}(\mathbf{a})$ اول است.

برهان:

$(\mathbf{I})$ $\mathbf{r}(\mathbf{a}) \supseteq \mathbf{a}$:

$$\alpha \in \mathbf{a} \Rightarrow \alpha^1 \in \mathbf{a}\ [\text{تعریف رادیکال}] \Rightarrow \alpha \in \mathbf{r}(\mathbf{a})$$

$\mathbf{r}(\mathbf{a})$ یک ایده‌آل است: کافی است نشان دهیم که $\mathbf{r}(\mathbf{a})$ تحت عمل تفریق و ضرب اسکالر بسته است.

$\mathbf{r}(\mathbf{a})$ تحت عمل تفریق بسته است:

$$\alpha,\beta \in \mathbf{r}(\mathbf{a})[\text{تعریف رادیکال}] \Rightarrow \exists \mathbf{m},\mathbf{n} \in \mathbb{N} \begin{cases} \alpha^{\mathbf{m}} \in \mathbf{a} \\ \beta^{\mathbf{n}} \in \mathbf{a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(\alpha-\beta)^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{i}=0}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} (-1)^{\mathbf{i}} \alpha^{\mathbf{m}+\mathbf{n}-\mathbf{i}} \beta^{\mathbf{i}} \in \mathbf{a} \qquad (\text{چرا؟})$$

$$[\text{تعریف رادیکال}] \Rightarrow \alpha-\beta \in \mathbf{r}(\mathbf{a})$$

$\mathbf{r}(\mathbf{a})$ تحت ضرب اسکالر بسته است: باید ثابت کنیم که:

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \forall \alpha \in \mathbf{r}(\mathbf{a}) : \lambda\alpha \in \mathbf{r}(\mathbf{a})$$

برهان:

$$\alpha \in \mathbf{r}(\mathbf{a}) \Rightarrow \exists\ \mathbf{n} \in \mathbf{N}\left(\alpha^{\mathbf{n}} \in \mathbf{a}\right) \Rightarrow (\lambda\alpha)^{\mathbf{n}} = \lambda^{\mathbf{n}}\alpha^{\mathbf{n}} \in \mathbf{a} \Rightarrow \lambda\alpha \in \mathbf{r}(\mathbf{a})$$

$(\mathbf{II})$ بنابه قسمت $\mathbf{I}$ ، $\mathbf{r}(\mathbf{a}) \subseteq \mathbf{r}(\mathbf{r}(\mathbf{a}))$ برای اثبات جهت معکوس:

$$\alpha \in \mathbf{r}(\mathbf{r}(\mathbf{a})) \Rightarrow \exists\ \mathbf{n} \in \mathbf{N}\left(\alpha^{\mathbf{n}} \in \mathbf{r}(\mathbf{a})\right) \Rightarrow \exists\ \mathbf{m} \in \mathbf{N}\left(\left(\alpha^{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{m}} \in \mathbf{a}\right) \Rightarrow$$

$$\alpha^{\mathbf{mn}} \in \mathbf{a}\ [\text{تعریف رادیکال}] \Rightarrow \alpha \in \mathbf{r}(\mathbf{a})$$

$(\mathbf{III})$ $\mathbf{r}(\mathbf{a})$ سره است (چرا؟). فرض کنیم که $\mathbf{a}$ اولیه باشد. برای اثبات این که $\mathbf{r}(\mathbf{a})$ اول است، فرض کنیم که $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ به طوری که $\begin{cases} \alpha\beta \in \mathbf{r}(\mathbf{a}) \\ \alpha \notin \mathbf{r}(\mathbf{a}) \end{cases}$ باید ثابت کنیم $\beta \in \mathbf{r}(\mathbf{a})$ داریم:

$$\alpha\beta \in \mathbf{r}(\mathbf{a}) \Rightarrow \exists\ \mathbf{n} \in \mathbf{N}\left((\alpha\beta)^{\mathbf{n}} \in \mathbf{a}\right) \Rightarrow \alpha^{\mathbf{n}}\beta^{\mathbf{n}} \in \mathbf{a}$$

$$\alpha \notin \mathbf{r}(\mathbf{a}) \Rightarrow \alpha^{\mathbf{n}} \notin \mathbf{a}$$

$$\begin{cases} \alpha^{\mathbf{n}}\beta^{\mathbf{n}} \in \mathbf{a} \\ \alpha^{\mathbf{n}} \notin \mathbf{a} \\ \mathbf{a}\ \text{اولیه است} \end{cases} \Rightarrow \exists\ \mathbf{k} \in \mathbf{N}\left(\left(\beta^{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{k}} \mathbf{a}\right) \Rightarrow \beta^{\mathbf{nk}} \in \mathbf{a}\ [\text{تعریف رادیکال}] \Rightarrow \beta \in \mathbf{r}(\mathbf{a})$$

تعریف ۴۲: فرض کنیم که $\mathbf{q}$ یک ایده‌آل اولیه‌ی $\mathbf{R}$ و رادیکال آن مساوی $\mathbf{P}$ باشد (می‌دانیم که $\mathbf{P}$ اول است). در این صورت گوییم که $\mathbf{q}$ یک ایده‌آل $\mathbf{P}-$ اولیه است.

قضیه‌ی ۲.۱۱.۲: فرض کنیم که $\mathbf{P,q}$ دو ایده‌آل $\mathbf{R}$ باشند و $\mathbf{q \neq R}$. در این صورت شرط لازم و کافی برای آن که $\mathbf{q}$ ، $\mathbf{P}-$ اولیه باشد آن است که در دو شرط ذیل صدق کند:

$$\mathbf{P \subseteq rad\ q}\ (\mathbf{i})$$

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}\left(\begin{cases}\alpha\beta \in \mathbf{q}\\ \alpha \notin \mathbf{P}\end{cases} \Rightarrow \beta \in \mathbf{q}\right)\ (\mathbf{ii})$$

توجه: شرط $(\mathbf{ii})$ با شرط $(\mathbf{ii})'$ مذکور در ذیل هم ارز است:

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}\left(\begin{cases}\alpha\beta \in \mathbf{q}\\ \beta \notin \mathbf{q}\end{cases} \Rightarrow \alpha \in \mathbf{P}\right)\ (\mathbf{ii})'$$

برهان:

لزوم: بنابه تعریف $\mathbf{P}-$ اولیه بودن بدیهی است (توضیح دهید).

کفایت: با توجه به شرط $(\mathbf{i}),(\mathbf{ii})'$ و تعریف رادیکال ملاحظه می‌شود که $\mathbf{q}$ اولیه است (توضیح دهید). پس کافی است نشان دهیم که $\mathbf{rad\ q \subseteq P}$.

فرض کنیم که α یک عضو دلخواه $\mathbf{rad\ q}$ باشد. در این صورت یک عدد طبیعی $\mathbf{n}$ موجود است به طوری که $\alpha^{\mathbf{n}} \in \mathbf{q}$. فرض کنیم که از همه‌ی این گونه اعداد طبیعی $\mathbf{n}$ کوچک‌ترین آنها باشد. در این صورت داریم $\alpha^{\mathbf{n-1}} \notin \mathbf{q}$.

$$\begin{cases}\alpha^{\mathbf{n-1}}\alpha = \alpha^{\mathbf{n}} \in \mathbf{q}\\ \alpha^{\mathbf{n-1}} \notin \mathbf{q}\end{cases}\quad , \quad \left[(\mathbf{ii})'\right] \Rightarrow \alpha \in \mathbf{P}$$

تمرین ۹. ثابت کنید که:

الف) اگر $\mathbf{R}$ حوزه‌ی صحیح آرتینی باشد، آنگاه $\mathbf{R}$ یک میدان است.

ب) اگر $\mathbf{R}$ آرتینی باشد، آنگاه هر ایده‌آل اول آن ماکسیمال است.

راهنمایی برای الف: اگر $\mathbf{a \neq \circ \in R}$ آنگاه رشته‌ی:

$$(\mathbf{a}) \supseteq (\mathbf{a}^2) \supseteq (\mathbf{a}^3) \supseteq \cdots$$

ایستا است و از آنجا نتیجه بگیرید که $\mathbf{a}$ معکوس‌پذیر است.

راهنمایی برای ب: اگر $\mathbf{P}$ یک ایده‌آل اول $\mathbf{R}$ باشد، آنگاه $\dfrac{\mathbf{R}}{\mathbf{P}}$ یک حوزه‌ی صحیح آرتینی است.

تمرین ۱۰. فرض کنیم که $\mathbf{a_n,\ldots,a_2,a_1}$ ایده‌آل‌های دلخواه $\mathbf{R}$ ، و $\mathbf{P}$ یک ایده‌آل اول $\mathbf{R}$ باشد. ثابت کنید که:

الف) اگر $\mathbf{P} \supseteq \bigcap_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_i}$ آنگاه $\exists \mathbf{i}\ \mathbf{1 \leq i \leq n}\ (\mathbf{P} \supseteq \mathbf{a_i})$

ب) اگر $\mathbf{P} = \bigcap_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_i}$ آنگاه $\exists \mathbf{i}\ \mathbf{1 \leq i \leq n}\ (\mathbf{P} = \mathbf{a_i})$

تمرین ۱۱. ثابت کنید که اگر $\mathbf{R}$ آرتینی باشد، آنگاه مجموعه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال آن متناهی است (**راهنمایی:** مجموعه‌ی

$$\mathbf{S}=\{\mathbf{a}_1\cap\mathbf{a}_2\cap\cdots\cap\mathbf{a}_k \mid \mathbf{k}\in\mathbb{N}, \mathbf{a}_i \text{ ها ایده‌آل‌های ماکسیمال } \mathbf{R} \text{ می‌باشند}\}$$

حداقل یک می‌نیمال دارد و اگر $\mathbf{m}_1\cap\cdots\cap\mathbf{m}_n$ یک عضو می‌نیمال آن باشد (که در آن $\mathbf{m}_i$ ها ایده‌آل‌های ماکسیمال $\mathbf{R}$ می‌باشند)، آنگاه مجموعه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال $\mathbf{R}$ مساوی است با $\{\mathbf{m}_1,\cdots,\mathbf{m}_n\}$).

تمرین ۱۲. فرض کنیم که $\mathbf{a}$ یک ایده‌آل $\mathbf{R}$ باشد. ثابت کنید که $\mathbf{r}(\mathbf{a})$ مساوی است با مقطع همه‌ی ایده‌آل‌های اول $\mathbf{R}$ که شامل $\mathbf{a}$ باشند:

$$\mathbf{r}(\mathbf{a})=\bigcap_{\mathbf{P}\supseteq\mathbf{a} \text{ اول}}\mathbf{P}$$

(به ازاء $\mathbf{a}=0$ معلوم می‌شود که پوچ رادیکال $\mathbf{R}$ مساوی مقطع همه‌ی ایده‌آل‌های اول آن است).

راهنمایی: برای اثبات

$$\mathbf{r}(\mathbf{a})=\bigcap_{\mathbf{P}\supseteq\mathbf{a} \text{ اول}}\mathbf{P}$$

فرض کنید که $\lambda\notin\mathbf{r}(\mathbf{a})$ و مطابق ذیل نشان دهید که $\lambda\notin\bigcap\mathbf{P}$:

مجموعه‌ی $\{\check{\mathbf{b}}\mid\lambda\notin\mathbf{r}(\check{\mathbf{b}})\}$ یک ایده‌آل $\mathbf{R}$ است $\check{\mathbf{b}}$ نا تهی و استقرایی است و اگر $\mathbf{P}$ یک عضو ماکسیمال این مجموعه باشد $\mathbf{P}$ اول است و $\lambda\notin\mathbf{P}$.

تمرین ۱۳. فرض کنیم که $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k$ ایده‌آل‌های $\mathbf{R}$ باشند. حاصل‌ضرب $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_k$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_k=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}\ \middle|\ \begin{matrix}\mathbf{n}\in\mathbf{N}\\ \alpha_{i_y}\in\mathbf{a}_j\end{matrix}\right\}$$

ثابت کنید که:

آ) $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_k$ یک ایده‌آل $\mathbf{R}$ و مشمول در $\bigcap_{i=1}\mathbf{a}_i$ است.

ب) $\mathbf{r}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_k)=\mathbf{r}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\mathbf{a}_i\right)=\bigcap_{i=1}^{k}\mathbf{r}(\mathbf{a}_i)$

تمرین ۱۴. ثابت کنید که اگر $\mathbf{P}$ یک ایده‌آل اول $\mathbf{R}$ و $\mathbf{n}$ یک عدد طبیعی باشد آنگاه:

الف: $\mathbf{r}(\mathbf{P}^n)=\mathbf{P}$ $\quad$ ($\mathbf{P}^n=\overbrace{\mathbf{PP}\cdots\mathbf{P}}^{\mathbf{n} \text{ مرتبه}}$).

ب: ثابت کنید که به ازای هر ایده‌آل $\mathbf{a}$ از $\mathbf{R}$ و هر عدد طبیعی $\mathbf{n}$ ، $\mathbf{r}(\mathbf{a}^n)=\mathbf{r}(\mathbf{a})$.

تمرین ۱۵. فرض کنیم که $\mathbf{q_1,q_2,\ldots,q_n}$ ایده‌آل‌های $\mathbf{p}-$ و $\mathbf{P}$ ایده‌آل اول $\mathbf{R}$ باشد. ثابت کنید که $\bigcap_{i=1}^{n}\mathbf{q_i}$ نیز $\mathbf{P}-$ اولیه است.

تمرین ۱۶. ثابت کنید که در حلقه‌ی $\mathbf{F[x,y]}$:

آ) ایده‌آل $\mathbf{(x^2,y)}$ اولیه و رادیکال آن مساوی $\mathbf{(x,y)}$ است.

ب) $\mathbf{(x^2,y)}$ هیچ توان طبیعی از یک ایده‌آل اول نیست (و بنابراین لازم نیست که یک ایده‌آل اولیه مساوی توانی طبیعی از یک ایده‌آل اول باشد).

(**راهنمایی:** به ازاء هر عدد طبیعی، $\mathbf{(x,y)^n \subseteq (x,y)^2 \subset (x^2,y) \subset (x,y)}$).

تمرین ۱۷. فرض کنیم که $\mathbf{R',R}$ دو حلقه‌ی تعویض‌پذیر یکدار باشند و $\boldsymbol{f}\mathbf{: R \to R'}$ یک $\mathbf{R}-$ اپی‌مورفیسم حلقه‌ها باشد. ثابت کنید که:

آ) اگر $\mathbf{a}$ یک ایده‌آل $\mathbf{R}$ شامل $\mathbf{ker}\,\boldsymbol{f}$ باشد، آنگاه:

$\mathbf{(i)}$ $\boldsymbol{f}\mathbf{(a)}$ یک ایده‌آل $\mathbf{R'}$ است.

$\mathbf{(ii)}$ $\boldsymbol{f}^{-1}\boldsymbol{f}\mathbf{(a)=a}$

$\mathbf{(iii)}$ $\dfrac{\mathbf{R}}{\mathbf{a}} \approx \dfrac{\mathbf{R'}}{\boldsymbol{f}\mathbf{(a)}}$

ب) اگر $\mathbf{a'}$ یک ایده‌آل $\mathbf{R'}$ باشد، آنگاه:

$\mathbf{(i)}$ $\boldsymbol{f}^{-1}\mathbf{(a')}$ یک ایده‌آل $\mathbf{R}$ و شامل $\mathbf{ker}\,\boldsymbol{f}$ است.

$\mathbf{(ii)}$ $\boldsymbol{f}\boldsymbol{f}^{-1}\mathbf{(a')=a'}$

$\mathbf{(iii)}$ $\dfrac{\mathbf{R}}{\boldsymbol{f}^{-1}\mathbf{(a')}} \approx \dfrac{\mathbf{R'}}{\mathbf{a'}}$

پ) اگر $\mathbf{a}$ یک ایده‌آل $\mathbf{R}$ و شامل $\mathbf{ker}\,\boldsymbol{f}$ باشد، آنگاه بر حسب آن که $\mathbf{a}$ ماکسیمال، اول یا اولیه باشد $\boldsymbol{f}\mathbf{(a)}$ نیز هم چنین است (ماکسیمال، اول یا اولیه است).

ت) بر حسب آن که یک ایده‌آل $\mathbf{a'}$ از $\mathbf{R'}$ ماکسیمال، اول یا اولیه باشد $\boldsymbol{f}^{-1}\mathbf{(a')}$ نیز چنین است.

تمرین ۱۸. حلقه‌ی خارج قسمتی $\mathbf{R'}=\dfrac{\mathbf{F[x,y,z]}}{\mathbf{(xy-z^2)}}$ را در نظر می‌گیریم و هر عضو $\boldsymbol{f}\mathbf{(x,y,z)+(xy-z^2)}$ را به $\overline{\boldsymbol{f}\mathbf{(x,y,z)}}$ نشان می‌دهیم. نیز فرض کنیم که $\mathbf{\bar{p}=(\bar{x},\bar{z})=\overline{(x,y)}}$. ثابت کنید که $\mathbf{\bar{p}}$ یک ایده‌آل اول $\mathbf{R'}$ است ولی $\mathbf{P^2}$ در این حلقه اولیه نیست (و بنابراین لازم نیست که هر توان طبیعی یک ایده‌آل اول، اولیه باشد).

(**راهنمایی:** برای اثبات اول بودن $\mathbf{P}$ از تمرین قبل استفاده کنید و برای اثبات اولیه نبودن $\mathbf{P^2}$ نشان دهید که:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{P}^2 \\ \bar{\mathbf{y}} \notin \mathbf{P} \\ \bar{\mathbf{x}} \notin \mathbf{P}^2 \end{cases}$$

قضیه‌ی ۲.۱۱.۲ را ملاحظه کنید. توجه کنید که $\mathbf{r}\left(\mathbf{P}^2\right) = \mathbf{P}$).

تمرین ۱۹. فرض کنیم که $\mathbf{a}$ یک ایده‌آل $\mathbf{R}$ و رادیکال آن یک ایده‌آل ماکسیمال مانند $\mathbf{m}$ از $\mathbf{R}$ باشد. ثابت کنید که $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{m}-$ اولیه است.

(بالاخص هر توان طبیعی ایده‌آل ماکسیمال اولیه است).

(**راهنمایی:** ابتدا نشان دهید که حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{a}}$ دقیقاً یک ایده‌آل ماکسیمال (و در حقیقت دقیقاً یک ایده‌آل اول) که همان $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{a}}$ است دارد و هر عضو این ایده‌آل پوچ توان است و هر مقسوم علیه صفر $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{a}}$ که مسلماً نایکال است در $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{a}}$ قرار دارد).