منطق گزاره‌ای

گزاره: یک جمله خبری است که می‌تواند درست یا نادرست باشد ولی نه هر دو

مثال:
هوا سرد است. هوا بارانی است. زمین مرکز دنیاست. فرمول برای مجاب

اعداد اول وجود دارند گزاره هستند

این مثال‌ها گزاره نیستند:

ساعت چنده است؟ — $2+x$ برابر ۴ است — کتاب را بخوان

متغیرهای گزاره‌ای: متغیرهایی که یک گزاره را نمایندگی می‌کنند و معمولاً با حروف

p, q, r نمایش داده می‌شوند.

p = علی آمد

q = هوا سرد است

مقدار درستی: هر متغیر گزاره‌ای می‌تواند درست یا نادرست باشد. T, F

حساب گزاره‌ای: قسمتی از ریاضیات است که با گزاره‌ها سروکار دارد

عملگرهای گزاره‌ای: ابزاری برای دستکاری گزاره‌ها

۱— نقیض: یک گزاره مانند p که با $\neg p$ یا $\bar{p}$ نمایش می‌دهند مقدار

درستی گزاره را تغییر می‌دهد.

آغاز هفته دولت
شهادت سید علی اندرزگو (۱۹ رمضان ۱۳۵۷ ه.ش)

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

P	¬P
T	F
F	T

صورت درستی

یکشنبه ۱۷ شوال ۱۴۳۴
Sun.25.08(Aug).2013

شهریور ۱۳۹۲

۳

مثال: اگر امروز هوا سرد باشد P = نقیض P چه خواهد بود؟

¬P : چنین نیست که هوا سرد است

¬P : هوا سرد نیست.

کامپیوتر علی دست کم 64 گیگابایت فضای هارد دارد.

¬P = کامپیوتر علی کمتر از 64 گیگابایت فضای هارد دارد.

۲- ترکیب عطفی: و اما

اگر P و Q دو گزاره باشند ترکیب عطفی آنها P ∧ Q زمانی درست است که هر دو درست باشند.

P	Q	P ∧ Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال: P هوا سرد است Q باران می بارد

P ∧ Q : هوا سرد است و باران می بارد

۳- ترکیب فصلی غیر انحصاری: یا

بلاز فرهنگ پهلوانی و ورزش زورخانه ای
اشغال ایران توسط متفقین و فرار رضاخان (۱۳۲۰ ه.ش)

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

الف) P و q دوگزاره باشند ترکیب فصلی آنها $P \vee q$ زمانی نادرست است که هردو نادرست باشند.

P	q	$P \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$P \vee q$: هوا سرد است یا باران می بارد.

ج) ترکیب فصلی انحصاری دو یا

الف) P و q دوگزاره باشند ترکیب فصلی انحصاری آنها $P \oplus q$ زمانی درست است که تنها یکی از دوگزاره درست باشد.

P	q	$P \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال: برای پیش غذا سوپ یا سالاد سرو می‌شود.

د) شرطی: $P \rightarrow q$ آنگاه q (P شرط) زمانی درست است که P درست و P نادرست باشد.

P مقدم — q نتیجه

P	q	$P \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

اگر من انتخاب شوم مالیات را کم می‌کنم.

$P \rightarrow q$

P: من انتخاب شوم

q: مالیات را کم می‌کنم.

اگر از آسمان سنگ ببارد زمین نابود می‌شود

اگر از آسمان سنگ ببارد زمین سرسبز می‌شود

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

(Inverse) معکوس، عکس نقیض، تناقض

۱۹ شوال ۱۴۳۴
Tue.27.08(Aug).2013

سه شنبه شهریور ۱۳۹۲

۵

اگر $p \rightarrow q$

معکوس $q \rightarrow p$

عکس نقیض $\neg q \rightarrow \neg p$

Inverse $\neg p \rightarrow \neg q$

* عکس نقیض یک عبارت شرطی هم ارز منطقی با عبارت شرطی میباشد.

- اگر باران ببارد آنگاه زمین خیس میشود.

p: باران میبارد

q: زمین خیس است

$p \rightarrow q \iff$

معکوس: $q \rightarrow p$ اگر زمین خیس باشد آنگاه باران میبارد

عکس نقیض: $\neg q \rightarrow \neg p$ اگر زمین خیس نباشد آنگاه باران نمی بارد

Inverse: $\neg p \rightarrow \neg q$ اگر باران نبارد آنگاه زمین خیس نمی شود.

۶- عبارت دو شرطی:

اگر p و q دو گزاره باشند عبارت دو شرطی $p \leftrightarrow q$ زمانی درست است که ارزش درستی p و q یکسان باشد.

روز بزرگداشت محمدبن زکریای رازی
روز داروسازی

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

P	q	$P \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

گزاره ترکیبی: گزاره‌ای میباشد که با استفاده از ادوات ترکیب بروی دو یا بیشتر گزاره ساده یا ترکیبی ساخته میشود.

مثال: $(P \vee \neg q) \rightarrow (P \wedge q)$ (OR, NOT)

* دو گزاره ساده داریم p و q

P	q	P	① $\neg q$	② $P \vee \neg q$	③ $P \wedge q$	② $\leftrightarrow$ ③
T	T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
F	T	F	F	F	F	T
F	F	F	T	F	F	F

$(P \vee \neg q) \rightarrow (P \wedge q) \equiv q$

هم ارز منطقی: دو گزاره هم ارز منطقی هستند اگر ستون آخر آنها در جدول درستی یکسان باشد.

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

۲۱ شوال ۱۴۳۴
Thu.29.08(Aug).2013
پنجشنبه شهریور ۱۳۹۲

p	q	$p \rightarrow q$ ①	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$ ②	① ↔ ②
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

۷

ثابت کنید $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

پنجشنبه : فتح اندلس به دست مسلمانان (۹۲ ه.ق)
جمعه : روز مبارزه با تروریسم (انفجار دفتر نخست وزیری به دست منافقان و شهادت مظلومانه شهیدان رجایی و باهنر، ۱۳۶۰ ه.ش)

۲۱ شوال ۱۴۳۴
Fri.30.08(Aug).2013
شهریور ۱۳۹۲ تعطیل

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$ ①	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$ ②	① ↔ ②
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

۸

- تقدم محاسباتی :

① $\neg$ NOT
② $\wedge$ AND
③ $\vee$ $\oplus$ OR XOR
④ $\rightarrow$ شرطی
⑤ $\leftrightarrow$ دوشرطی
⑥ $\equiv$ هم ارزمنطقی

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

تاتولوژی : گزاره‌ای که در هر صورت همیشه درست است را تاتولوژی میگوییم.

شنبه Sat.31.08(Aug).2013

$$P \vee \neg P$$

همیشه غلط : گزاره‌ای که همیشه نادرست است

$$P \wedge \neg P$$

گزاره محتمل : یک گزاره که نه تاتولوژی و نه Countradiction است

هم ارزی منطقی : اگر P و q دو گزاره باشند در صورتی که هم ارز منطقی باشند یک $P \longleftrightarrow q$ یک تاتولوژی باشد در این صورت می نویسیم

$$P \equiv q$$

قانون دمورگان :

$$\neg(P \vee q) \equiv \neg P \wedge \neg q$$

$$\neg(P \wedge q) \equiv \neg P \vee \neg q$$

جدول درستی

P	q	$P \wedge q$	$\neg P \wedge q$	$\neg P$	$\neg q$	$\neg P \vee \neg q$	$\neg(P \wedge q) \equiv \neg P \vee \neg q$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

قانون توزیع:

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$$

اگر عبارت برقرار باشد طبق قانون دوگان عبارت زیر نیز برقرار است

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$$

p	q	r	(p ∨ q)	① ∧	p ∨ r	p	② ∨	q ∧ r	①	②
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

تاتولوژی

قانون همانی:

$$p \wedge T \equiv p$$

$$p \vee F \equiv p$$

p	T	p ∧ T
T	T	T
F	T	F

قانون غلبه:

$$p \wedge F \equiv F$$

$$p \vee T \equiv T$$

روز بانکداری اسلامی (سالروز تصویب قانون عملیات بانکی بدون ربا، ۱۳۶۲ ه.ش)
روز تشکیل قرارگاه پدافند هوایی حضرت خاتم الانبیا (ص)

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

قانون خودتوان:

$$P \vee P \equiv P$$
$$P \wedge P \equiv P$$

قانون نقیض دوم:

$$\neg(\neg q) \equiv q$$

قانون جابه‌جایی:

$$P \vee q \equiv q \vee P$$
$$P \wedge q \equiv q \wedge P$$

قانون شرکت‌پذیری:

$$P \wedge (q \wedge r) \equiv (P \wedge q) \wedge r$$
$$P \vee (q \vee r) \equiv (P \vee q) \vee r$$

قانون جذب:

$$P \vee (P \wedge q) \equiv P$$
$$P \wedge (P \vee q) \equiv P$$

قانون نقیض:

$$P \vee \neg P \equiv T$$
$$P \wedge \neg P \equiv F$$

شهادت حضرت امام جعفر صادق(ع)، (۱۴۰۶ ق)، تعطیل
روز صنعت چاپ

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

مثال: ثابت کنید که هم ارزهستند $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$

مرحله ① قانون دمورگان

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$$

مرحله ② قانون دمورگان

$$\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q)$$

مرحله ③ قانون توزیع

$$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

مرحله ④

F با هر جزئی $\vee$ شود خود جزئی است

$$\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\equiv \neg p \wedge \neg q$$

مرحله ⑤ قانون همانی

$$p \longrightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

p	q	$\neg p \vee q$	$p \longrightarrow q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

روز مبارزه با استعمار انگلیس (سالروز شهادت رئیسعلی دلواری)
روز مبارز

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q)$

$\equiv p \wedge \neg q$ (دومورگان)

۱۳

$(p \wedge q) \to p \vee q \equiv T$

$(p \wedge q) \to (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

$\equiv \neg p \vee \neg q \vee p \vee q$

$\equiv \underbrace{\neg p \vee p}_{T} \vee \underbrace{\neg q \vee q}_{T}$ $\equiv T \vee T \equiv T$

۱۳۹۲/۱۲/۲

روز تعاون و بزرگداشت ابوریحان بیرونی

استنتاج منطقی: اگر P و Q دو گزاره ساده یا ترکیبی باشند

$P \Rightarrow Q$ (P استنتاج منطقی به Q دارد)

اگر $Q \longrightarrow P$ یک تاتولوژی باشد

- مثال:

$(P \wedge Q) \Rightarrow P$

P	q	$P \wedge q$ (مقدمه)	$\to$	P
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	F
F	F	F	T	T

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

استدلال شامل چند گزاره مقدم است که با هم (and) مشخص می‌شوند و هنگام نوشتن استدلال صغیر را زیر کبری می‌نویسیم.

$$\begin{cases} p \wedge q \\ q \end{cases}$$

$$\therefore p$$

نتیجه می‌دهد ←

استدلال معتبر: اگر مقدم and به کمک قوانین منطقی نتیجه را استنتاج کند آنگاه استدلال معتبر است.

$$((p \wedge q) \wedge q) \Rightarrow p$$

در غیر این صورت استدلال معتبر نیست.

هرلز

استدلال زیر را بررسی کنید: اگر به علی توهین کنی با تو صحبت نمی‌کند تو به علی توهین کردی بنابراین من دیگر با تو صحبت نخواهم کرد.

p: به علی توهین کرده‌ای

q: با تو هرلز صحبت می‌کنم.

$$\begin{cases} \text{مقدم}: p \rightarrow q \\ p \\ \therefore q \end{cases} \quad (p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

p	q	p → q	∧	p	① → q
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T

① ⟹ استدلال معتبر است

- اعتبار استدلال زیر را بررسی کنید.

اگر ریاضی دان باشی آنگاه باهوش هستی. تو باهوش و ثروتمند هستی بنابراین
مقدمه
ثروتمند باشی آنگاه ریاضی دان میباشی

p: ریاضیدان هستی

q: باهوش هستی

r: ثروتمند هستی

مقدمه: $p \to q$ ، $r \wedge q$

نتیجه: $\therefore r \to p$

p	q	r	① p → q	② q ∧ r	③ r ↔ ②	④ r → p	③ → ④
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	T
T	F	T	F	F	F	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	F	T
F	F	F	T	F	F	T	T

استدلال معتبر نیست

ولادت حضرت معصومه (س) (ق.ه ۱۷۳) روز دختران

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

رضا

منطق محمولات :

۲ ذی القعده ۱۴۳۴
Sun.08.09(Sep).2013
یکشنبه
شهریور
۱۷
۱۳۹۲

- هرکسی که چشمان سبز دارد غیرقابل اعتماد است. چشمان سبز دارد بنابراین رضا قابل اعتماد نیست

فرض می‌کنیم { علی چشمان سبز دارد
حسن " " "
حسین " " " }

$G(x)$: x چشمان سبز دارد ← تابع گزاره‌ای

متغیر گزاره‌ای

$\forall x [G(x)]$ همه‌ی انسان‌ها چشمان سبز دارند

سور کلی :

الف) سور عمومی (هرچی باشد $\forall$)

$P(x)$: x یک انسان است

$\forall x [P(x) \rightarrow G(x)]$ برای تمام انسان‌ها آن‌ها چشمان سبز دارند

- جمله‌ی زیر را به صورت ریاضی بنویسید!

من هر روز پیاده‌روی می‌روم

$D(x)$: x یک روز است

$J(x)$: x وقتی است که من پیاده‌روی می‌روم

$\forall x [D(x) \rightarrow J(x)]$

شرطی ↙

قیام ۱۷ شهریور و کشتار جمعی از مردم به دست مأموران ستم شاهی پهلوی (۱۳۵۷ ه.ش)

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

ب) سور وجودی: برای حداقل یک مقدار از جهان سخن گزاره درست است (وجود دارد)

$\exists x\, T(x)$ حداقل یک x وجود دارد که گزاره $T(x)$ برای آن درست باشد

$\forall x\, T(x)$ گزاره $T(x)$ برای تمام xها درست است

- مثال: جمله‌ی زیر را به صورت ریاضی بیان کنید.

"برخی افراد تنها به خودشان فکر می‌کنند"

$P(x)$ x یک فرد است

$Q(x)$ x تنها به خودش فکر می‌کند

$\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$

- بعضی از بچه‌ها عذرخواهی نمی‌کنند.

$C(x)$ x یک بچه است

$A(x)$ x عذرخواهی نمی‌کند

$\exists x[C(x) \wedge A(x)]$

"هیچ بچه‌ای عذرخواهی نمی‌کند"

$\forall x[C(x) \rightarrow \neg A(x)]$

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

۴- هیچ کس فریب کاری را دوست نداشت

$P(x)$: x یک فرد است

$C(x)$: x فریب کاری را دوست نداشت

$$\neg \exists x [P(x) \wedge C(x)]$$

«قانون سوم»

۱- خصوصی سازی جهانی: اگر a یک عضو از جهان مورد بررسی باشد و $\forall x A(x)$ آنگاه $A(a)$ درست است.

۲- عمومی سازی جهانی: اگر $f(a)$ برای تمام a ها در جهان مورد بررسی درست باشد آنگاه $\forall x f(x)$ درست است.

۳- خصوصی سازی وجودی: اگر $\exists x f(x)$ درست باشد حداقل یک عضو در جهان مورد بررسی وجود دارد که $f(a)$ برای آن درست باشد.

۴- عمومی سازی وجودی: اگر $f(a)$ برای یک یا بیشتر عضو در جهان مورد بررسی درست باشد آنگاه $\exists f(x)$ درست است.

وفات آیت ا... سید محمود طالقانی اولین امام جمعه تهران (۱۳۵۸ ه.ش)
Scanned by CamScanner
www.jozve.org

قیاس استثنایی

P آندکیو بنابراین P

ساده سازی
۱- $\frac{P \wedge q}{\therefore P}$
۲- $\frac{P \wedge q}{\therefore q}$

۳- جمع $\frac{P}{\therefore P \vee q}$

۴- قیاس متصل $\frac{P \vee q}{\therefore P}$

۵- مادوسپونس $\frac{P \to q \quad P}{\therefore q}$

۶- مادوس تولنس $\frac{P \to q \quad \neg q}{\therefore \neg P}$ بنابراین

۷- قیاس استثنایی $\frac{P \to q \quad q \to r}{\therefore P \to r}$ بنابراین

۸- ضرب $\frac{P \to q}{\therefore P \to (P \wedge q)}$ بنابراین

۲۰

سالروز شهادت دومین شهید محراب آیت‌الله سعیدی به دست منافقان (۱۳۶۰ه.ش)
روز تجلیل از امام زادگان و بقاع متبرکه، روز بزرگداشت حضرت صالح بن موسی کاظم (ع)

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

پنجشنبه ۲۱ شهریور ۱۳۹۲

مثال:

مقدم $\begin{cases} \forall x[G(x) \rightarrow \neg T(x)] \\ G(b) \end{cases}$

نتیجه: $\neg T(b)$

مراحل کار:

① $\forall x[G(x) \rightarrow \neg T(x)]$ فرض

* طبق خصوصی سازی اگر طرف چپ محمول بررسی باشد

② $G(b) \rightarrow \neg T(b)$

③ $G(b)$

④ $\neg T(b)$

پنجشنبه : روز بزرگداشت حضرت احمدبن موسی شاهچراغ (ع)، روز سینما

جمعه ۲۲ شهریور ۱۳۹۲ تعطیل

مثال:

مقدم: $\forall x[S(x) \rightarrow P(x)]$

$\exists x[S(x) \wedge D(x)]$

نتیجه: $\exists x[D(x) \wedge P(x)]$

① $\exists x[S(x) \wedge D(x)]$

خصوصی سازی وجودی

② $S(a) \wedge D(a)$

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

① $\forall x [S(x) \rightarrow P(x)]$ فرض

④ $S(a) \rightarrow P(a)$ خصوصی سازی عمومی

از ساده سازی ② به این نتیجه می رسیم

③ $S(a)$

از مادوس پونس ④ و ③ به این نتیجه می رسیم

⑥ $P(a)$

از ساده سازی ۲

✓ $D(a)$

از ۶ و ۷ به این نتیجه می رسیم

⑧ $P(a) \wedge D(a)$

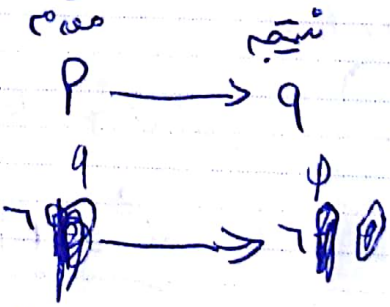
⑨ $\exists x [P(x) \wedge D(x)]$ عمومی سازی وجودی

روش های اثبات :

① اثبات مستقیم

② اثبات غیر مستقیم

③ برهان خلف



فرض می کنیم قضیه درست است و به تناقض می رسیم

$\overline{P} \rightarrow F$

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$P \longleftrightarrow Q$

$\hookrightarrow \begin{cases} P \to Q \\ Q \to P \end{cases}$

⑤ استقرای ریاضی

۹۵/۱۲/۱۶

روش اثبات مستقیم:

$\underbrace{P(n_1 \wedge n_2 \wedge \cdots \wedge n_N)}_{\text{فرض}} \Rightarrow Q$

اگر با توجه به فرض و استدلال کلی
مستقیم به Q برسیم اثبات انجام شده است.

- ثابت کنید اگر N زوج باشد، آنگاه N^2 نیز زوج است

N زوج : فرض

N^2 زوج : نتیجه

$\exists K \in \mathbb{Z}$ ⟶ $N = 2K$ ⟶ (به توان ۲ رسانده)

$N^2 = 4K^2 \to N^2 = 2(2K^2)$ (عدد صحیح)

$N^2 = 2K'$

$N^2 = 2K$ ← N^2 زوج است

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

۶) ثابت کنید اگر m, n دو عدد صحیح بخشپذیر بر 3 باشند آنگاه $mx+ny$ نیز بر 3 بخشپذیر است. x, y دو عدد صحیح هستند

M, N بر 3 بخشپذیر است : فرض

$mx+ny$ برای هر دو عدد دلخواه x, y بر 3 بخشپذیر است : نتیجه

$$m = 3K \quad n = 3K' \Rightarrow mx+ny = 3Kx+3K'y$$
$$\Rightarrow 3(\underbrace{Kx+K'y}_{K''})$$

از آنجایی که $Kx+K'y$ یک عدد صحیح است و آنرا K'' می‌نامیم پس

$mx+ny = 3K''$ یعنی $mx+ny$ بر 3 بخشپذیر است

مشکل اثبات زیر چیست؟!

$x = 2$

$x-1 = 1$

$(x-1)^2 = 1$

$= x-1$

عدد تقسیم صفر نمی‌تواند باشد

$x^2-2x+1 = x-1$

$x^2-2x = x-2 \rightarrow x(x-2) = x-2$

$$\frac{x(x-2)}{x-2} = \frac{x-2}{x-2}$$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 = 2$

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ اثبات عبارت مستقیم و

ـ ثابت کنید اگر n^2 زوج باشد n زوج است.

مقدم — نتیجه

p = n^2 زوج است q = n زوج است

$\neg p$ = n^2 فرد است $\neg q$ = n فرد است

n فرد $\Rightarrow$ $n = 2k+1$ $\Rightarrow$ $n^2 = (2k+1)^2$

$\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 2(2k^2 + 2k) + 1$

$\Rightarrow 2k'' + 1$ فرد (k'')

n^2 فرد است پس عکس نقیض آن نیز اثبات می‌شود یعنی اگر n^2 زوج باشد n زوج است

ـ ثابت کنید اگر m و n دو عدد صحیح مثبت می‌باشند به ازای کدام $mn = 100$ آنگاه $m \leq 10$ یا $n \leq 10$

p : $mn = 100$ $\neg p = mn \neq 100$

q : $m \leq 10$ (۷) $n \leq 10$ $\neg q = m > 10$ (۸) $n > 10$ طبق قانون دمورگان

$m > 10 \wedge n > 10 \Rightarrow mn > 100 \Rightarrow mn \neq 100$ ✓ اثبات

ولادت حضرت امام رضا (ع) (۱۴۸ ه.ق)
Scanned by CamScanner
www.jozve.org

برهان خلف:

$P \equiv \bar{P} \rightarrow f$

$\bar{T} \rightarrow f \equiv T$

پس فرض می‌کنیم قضیه نادرست است به تناقض می‌رسیم پس درست است

مثال: ثابت کنید $\sqrt{2}$ گویا نیست

فرض می‌کنیم $\sqrt{2}$ گویا است بنابراین می‌توانیم m و n را $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ طوری بنویسیم که فاکتور مشترک نداشته باشند

$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$ ①

$\Rightarrow$ زوج است $m^2 \Rightarrow$ زوج است m P

$\Rightarrow m = 2p \Rightarrow m^2 = 4p^2$ ①

(p عدد صحیح است)

$\Rightarrow n^2 = 2p^2 \Rightarrow$ زوج است $n^2 \rightarrow n$ زوج است (تقسیم بر ۲)

از آنجایی که فرض کردیم m و n فاکتور مشترک ندارند به تناقض می‌رسیم زیرا هم m زوج است و هم n. بنابراین فرض ما مبنی بر اینکه $\sqrt{2}$ گویا است نادرست بوده و $\sqrt{2}$ گویا نیست.

- ثابت کنید تعداد اعداد اول بینهایت است

اثبات: فرض می‌کنیم تعداد اعداد اول محدود است یعنی $P_1 \cdots P_k$ اعداد اول هستند

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$Q = P_1 P_2 \cdots P_k$

۱۳ ذی القعده ۱۴۳۴
Thu.19.09(Sep).2013
پنجشنبه شهریور

اکنون

$Q+1 = P_1 P_2 \cdots P_{k+1}$

قطعاً به تناقض برخورد کردیم زیرا $Q+1$ یک عدد اول نیست بنابراین $Q+1$ به هیچ یک از اعداد اول P_1 تا P_k تقسیم پذیر نباشد فرض می کنیم این عدد اول P باشد که P یکی از P_i هاست قطعاً P نمی تواند یکی از P_1 تا P_k باشد اکنون به تناقض می رسیم بنابراین تعداد اعداد اول محدود نیست.

۲۸

۱۳۹۲

روش اثبات روشها

۱۴ ذی القعده ۱۴۳۴
Fri.20.09(Sep).2013
جمعه شهریور

$P \Longleftrightarrow q \equiv P \to q \wedge q \to P$

ثابت کنید که حاصلضرب xy زوج است اگر و فقط اگر x زوج باشد یا y زوج باشد.

اگر xy زوج باشد آنگاه x زوج و یا y زوج است

اگر x زوج و یا y زوج باشد آنگاه xy زوج است

$x = 2k \to xy = 2ky \to xy = 2k' \to xy$ زوج است و به طور مشابه اگر $y = 2k$ باشد همینونه اثبات می شود

۲۹

۱۳۹۲ تعطیل

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

n فرد است و y فرد است

$$\begin{cases} x = 2k+1 \\ y = 2k'+1 \end{cases} \Rightarrow xy = (2k+1)(2k'+1) \Rightarrow$$

$$4kk' + 2k + 2k' + 1$$

$$\Rightarrow 2(\underbrace{2kk' + k + k'}_{k''}) + 1 \Rightarrow 2k'' + 1$$

$\Downarrow$

xy فرد است

مثال نقض

$$\forall n [P(n) \rightarrow Q(n)]$$

مثال: برای تمام اعداد صحیح مثبت

$$f(n) = n^2 - n + 17$$

یک عدد اول است. ثابت یا رد کنید.

$$f(1) = 1 - 1 + 17 = 17 \checkmark$$

$$f(2) = 4 - 2 + 17 = 19 \checkmark$$

$$\vdots$$

مثال نقض

$$f(17) = 17^2 - 17 + 17 = 17^2 \quad \times$$

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

۹۶/۱/۲۱

استقرای ریاضی: فقط برای اعداد صحیح مثبت می‌کنیم

۱۶ ذی القعده ۱۴۳۴
Sun.22.09(Sep).2013
یکشنبه شهریور ۱۳۹۲

فرض کنید گزاره $S(n)$ روی اعداد صحیح وجود داشته باشد.

الف: $S(1)$ درست باشد

ب: $S(k)$ درست باشد آنگاه $S(k+1)$ نیز درست است در این صورت

$S(n)$ همیشه درست است.

۳۱

ثابت کنید حاصل جمع n عدد صحیح مثبت متوالی با شروع از یک برابر با n^2 است

$$S(n): 1+3+5+7+\cdots+N = N^2$$

اثبات با استقرای ریاضی: پایه استقرا

$$S(1) = 1 = 1^2 \quad \checkmark$$

$$1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$$

فرض می‌کنیم که $S(k)$ درست است

$$S(k): 1+3+5+\cdots+(2k-1) = k^2$$

طرفین مساوی با $2k+1$ جمع می‌کنیم

$$1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1) = k^2+(2k+1)$$

$$\Rightarrow (k+1)^2 \Rightarrow S(k+1) \quad \checkmark$$ درست است

حال ثابت می‌کنیم

$$S(k+1): 1+3+\cdots+2k+1 = (k+1)^2$$

آغاز جنگ تحمیلی (۱۳۵۹ ه.ش)
آغاز هفته دفاع مقدس

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

ثابت کنید برای هر عدد صحیح مثبت n، $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ بر ۷ بخش‌پذیر است

Mon.23.09(Sep).2013

$n=1 \Rightarrow 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$ ✓

فرض می‌کنیم $S(k)$ درست است $\Rightarrow 2^{k+2} + 3^{2k+1} = 7a$ ① (a یک عدد صحیح است)

1 $S(k+1) \Rightarrow 2^{(k+1)+2} + 3^{2(k+1)+1} = 2^{k+3} + 3^{2k+3}$

$\Rightarrow 2 \times 2^{k+2} + (3^2 \times 3^{2k+1}) \Rightarrow 2^{k+2} = 7a - 3^{2k+1}$

$\Rightarrow 2(7a - 3^{2k+1}) + 9 \times 3^{2k+1} = 14a - 2 \times 3^{2k+1} + 9 \times 3^{2k+1} = 14a + 7 \times 3^{2k+1}$ فاکتورگیری $\longrightarrow 7(2a + 3^{2k+1})$

$= 7b \Rightarrow S(k+1)$ بر ۷ بخش‌پذیر است

مثال: ثابت کنید $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$S(1)$: $1 = \frac{1 \times (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ✓

فرض می‌کنیم برای $S(k)$ درست است $\Rightarrow 1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

$S(k+1) \Rightarrow (1 + \cdots + k) + k+1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$

$= \frac{k(k+1) + 2k + 2}{2}$

$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$

Scanned by CamScanner

www.jozve.org

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ ✓

۱۸ ذی القعده ۱۴۳۴ ✓
Tue.24.09(Sep).2013

سه شنبه مهر ۱۳۹۲

$$S(k+1) \Rightarrow 1 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ ✓

مثال ۲: n عدد صحیح مثبت

$$2^n > n$$

$S(1) \Rightarrow 2 > 1$ ✓

$S(k) \Rightarrow 2^k > k$ فرض می‌کنیم برقرار است

$\Rightarrow 2^{k+1} > k \longrightarrow \boxed{2^{k+1} > 2^k > k}$

$\Rightarrow 2^k > k \longrightarrow 2^k + 1 > k+1$

$2^k + 1 > 2^k$ از دو رابطه نتیجه $\longrightarrow 2^k > k+1$

$\boxed{2^{k+1} > k+1}$ نتیجه

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

n عدد صحیح

$x \neq 1$ عدد حقیقی

$S(1) = 1 + x = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \Rightarrow x + 1$ ✓

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$S(K)$ عبارتی است $1+x+\dots+x^K = \frac{x^{K+1}-1}{x-1}$

$\Rightarrow 1+x+\dots+x^K+x^{K+1} = \frac{x^{K+1+1}-1}{x-1} + x^{K+1} \Rightarrow$

$S(K+1)$ ↗

$\Rightarrow \frac{(x^{K+1+1}-1)+x^{K+1+1}(x-1)}{x-1}$

$\Rightarrow \frac{x^{K+2}-1+x^{K+2}-x^{K+1}}{x-1}$

$\Rightarrow \frac{x^{K+2}-1}{x-1}$ ✓

۱۳۹۲

$S(K+1) = 1+x+\dots+x^{K+1} = \frac{x^{K+2}-1}{x-1}$

ثابت کنید $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ یک عدد صحیح است

$S(1) = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$ عدد صحیح است

فرض برای $S(K)$ درست است $\left[\frac{K(K+1)}{2}\right]^2$ یک عدد صحیح است $= \frac{K^2+K}{2}$ ✓

$S(K+1) \to \left[\frac{(K+1)(K+2)}{2}\right]^2 \Rightarrow \left[\frac{K^2+3K+2}{2}\right]^2 \Rightarrow$

$\left[\frac{K^2+K}{2} + \frac{2K+2}{2}\right] \to \frac{2(K+1)}{2}$

$\frac{K^2+K}{2}$: عدد صحیح

$K+1$: عدد صحیح

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

مجموعه یک گردایه ای نامشخص از اشیاء متمایز.

Element اعضای مجموعه را عضو یا عضو تشکیل می‌دهند

عضو

$a \in A$ a جزء A است

$a \notin A$ a جزء A نیست

۴

لیست مجموعه: ۱- اعضا در داخل $\{\}$ قرار می‌دهیم (لیست کردن اعضا)

$A = \{1, 7, 15, 19\}$ $B = \{$ علی، ۴۲، ۷۰$\}$

۲- قانون $\{x : P(x)\}$

قانون

جمعه : شکست حصر آبادان در عملیات ثامن الائمه (ع)، (۱۳۶۰ ه.ش)، روز جهانی جهانگردی

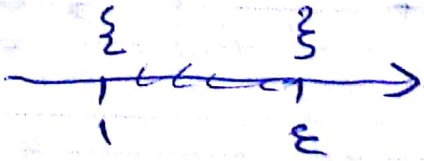
$\{x : x^2 = 1\} = \{1, -1\}$

$\{P : 1 < P < 8,$ عدد صحیح $P\}$

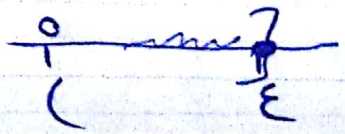
$\{t : t \geq 100,$ عدد صحیح باشد $t\} \Rightarrow \{100, 101, \ldots$

۳- بازه‌ها (اعداد حقیقی)

$[1, 4]$



$(1, 4]$ بازه باز



Scanned by CamScanner
www.jozve.org

کاردینالیتی

یک مجموعه: تعداد اعضای یک مجموعه را کاردینالیتی می‌گوییم

۱۴۳۴ ذی‌القعده
Sat.28.09(Sep).2013

$X = \{t : t > 100, \text{ عدد صحیح } t\}$

$|X| = \infty$ مجموعه‌ی نامتناهی

$|\emptyset| = 0$ مجموعه تهی

$A = \{1, 7, 15, 19\}$ $\quad |A| = 4$

تساوی مجموعه‌ها:

$A = B$ اگر و فقط اگر تمام اعضای A در B و بالعکس باشند.

$$A = B \iff \forall a \in A \longrightarrow a \in B$$ و بالعکس

۹۶/۱/۲۸

تعریف زیرمجموعه: $A \subseteq B$ است اگر هر عضو A در B باشد و در این صورت B ابرمجموعه‌ی A نامیده می‌شود.

$$A \subseteq B \iff \forall x [x \in A \longrightarrow x \in B]$$

$A \subset B$ زیرمجموعه سره یا واقعی

$A \neq B$

مثال: $A = \{x, y, z\}$, $B = \{x, y, z, t, u\}$

$A \subseteq B$ یا $A \subset B$

$\emptyset \in A$ هر مجموعه‌ای می‌تواند باشد

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

قضیه: $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ اگر و فقط اگر $A = B$

مجموعه‌ی جهانی: در یک جهان معین بحث مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های دیگر زیرمجموعه آن باشند را مجموعه جهانی می‌نامیم و آنرا با U نمایش می‌دهیم.

— مثالهایی از مجموعه جهانی:

اعداد طبیعی $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

اعداد صحیح $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

اعداد گویا $Q = \{\frac{p}{q} : p, q \in Z, q \neq 0\}$

حقیقی $R = \{$ مجموعه اعداد گویا و غیر گویا $\}$

$\sqrt{-1} \notin R$

اعداد مختلط $C = \{x + iy : x, y \in R, i = \sqrt{-1}\}$

$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$ ← رابطه بین مجموعه‌ها

محاسبه آن روی مجموعه‌ها:

نمودار ون (Venn): ابزار گرافیکی است که مجموعه‌ها یا بعضی نشان میدهد و اعضای مجموعه‌ها که در آن بعضی قرار میگیرند در نمودار ون مجموعه جهانی با مستطیل نمایش داده می‌شود.

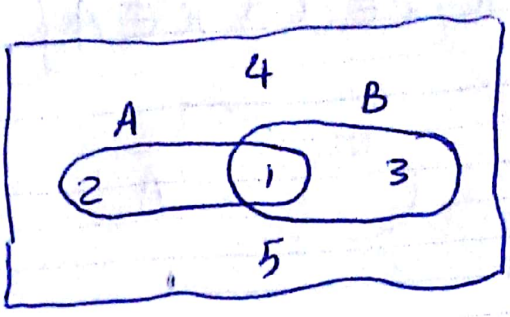
$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

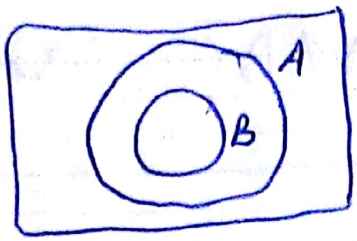
$A = \{1, 2\}$

$B = \{1, 3\}$

روز آتش نشانی و ایمنی
شهادت سرداران اسلام فلاحی، فکوری، ناجو، کلاهدوز و جهان آرا (۱۳۶۰ ه.ش)

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

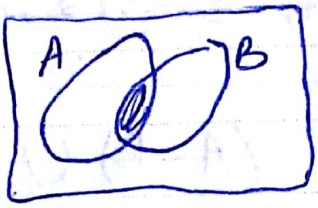




$B \subseteq A$ هر چیزی که در B هست در A هم هست

اشتراک:

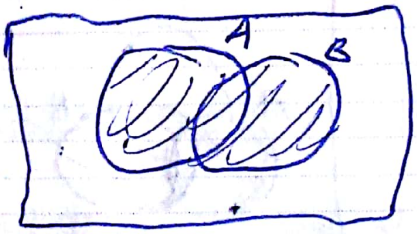
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



$A \cap B$

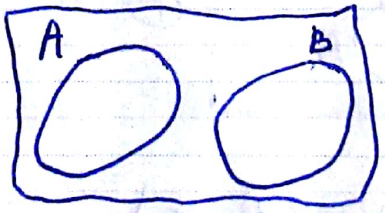
اجتماع:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$



$A \cup B$

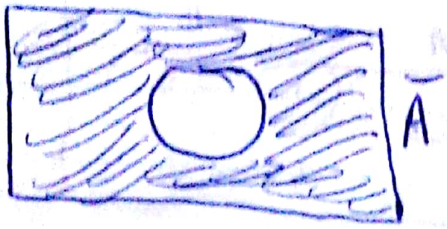
منفصل: A و B دو مجموعه‌ی منفصل می‌باشند اگر $A \cap B = \emptyset$



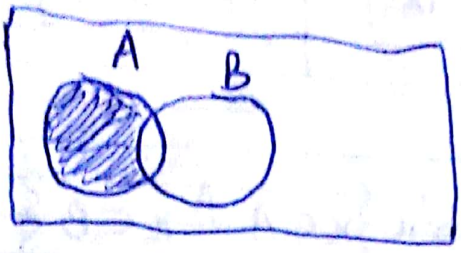
روز بزرگداشت مولوی، روز جهانی دریانوردی، روز جهانی ناشنوایان

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$\bar{A} = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$



$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ تفاضل دو مجموعه

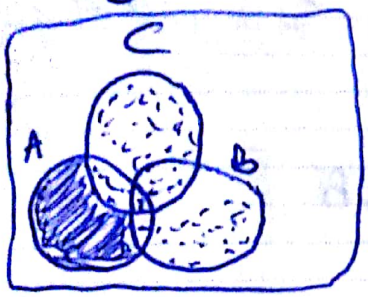


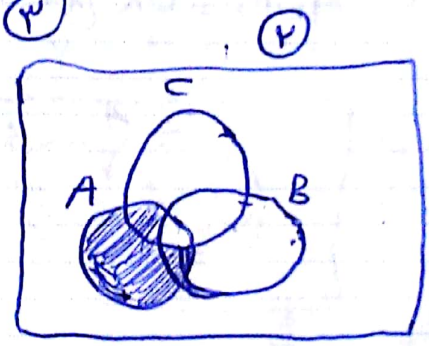
مثال: نمودار ون مجموعه‌های زیر را رسم کنید.

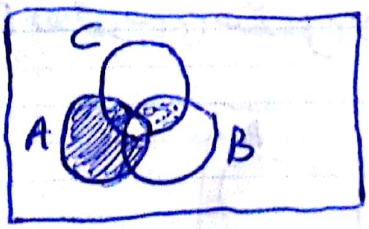
$A - (B \cup C)$ ①

$(A - B) \cup (A - C)$ ②

$A - (B \cap C)$ ③







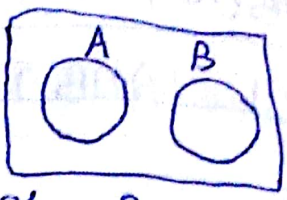
③

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

اصل جمع: اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی و مجزا باشند آنگاه

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$



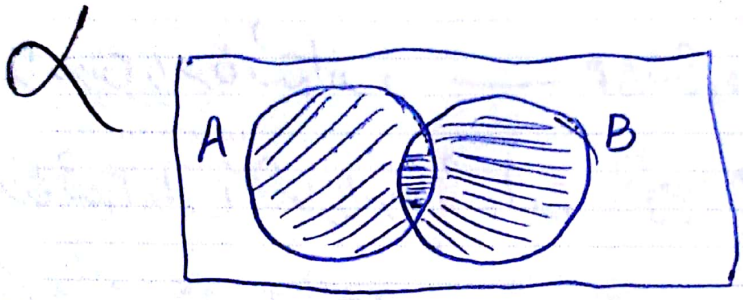
اصل جمع تعمیم یافته: اگر $A_1, \ldots, A_N$ مجموعه‌ی متناهی و مجزا باشند آنگاه

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

قضیه: اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

اثبات به کمک نمودار ون:



$$|A \cup B| = |A - B| + |A \cap B| + |B - A| \quad (1)$$

$$|A| = |A - B| + |A \cap B| \Rightarrow |A - B| = |A| - |A \cap B| \quad (2)$$

$$|B| = |B - A| + |A \cap B| \Rightarrow |B - A| = |B| - |A \cap B| \quad (3)$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |A \cap B| + |B| - |A \cap B|$$

$$\Rightarrow |A| + |B| - |A \cap B|$$

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

قضیه: اگر A و B و C سه مجموعه متناهی باشند.

۲۷ ذی القعده ۱۴۳۴
Thu.03.10(Oct).2013

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

مثال: هر یک از ۱۰۰ دانشجو دوره کامپیوتر دستگاهی که از درس کدی ریاضی، الکترونیک و آمار را برداشته اند.

$|U| = 100$

E M

A

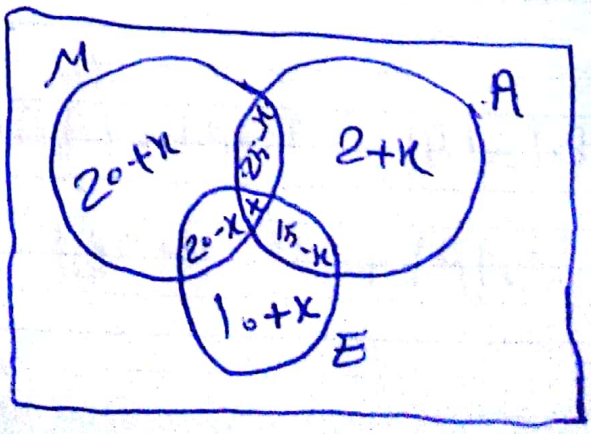
آنکه 65 نفر ریاضی، 45 نفر الکترونیک، 42 نفر آمار و 20 نفر ریاضی و الکترونیک، 25 نفر ریاضی و آمار و 15 نفر الکترونیک و آمار گرفته باشند مطلوب است پیدا کردن الف) تعداد دانشجویانی که هر ۳ درس را برداشته اند. ب) دانشجویانی که دو درس ریاضی و الکترونیک را برداشته اند اما آمار را برنداشته اند. ج) تعداد دانشجویانی که فقط الکترونیک را برداشته اند.

۲۸ ذی القعده ۱۴۳۴
Fri.04.10(Oct).2013

$|E| = 45$ $|m\cap E| = 20$

$|m| = 65$ $|A| = 42$ $|m\cap A| = 25$

$|E\cap A| = 15$



Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$|m \cap A| = |(m \cap A) - E| + |m \cap A \cap E|$

۲۹ ذی القعده ۱۴۳۴
Sat.05.10(Oct).2013

$25 = |(m \cap A) - E| + x \Rightarrow |(m \cap A) - E| = 25 - x$

$15 = |A \cap E| = |(A \cap E) - M| + x \Rightarrow |(A \cap E) - M| =$

$15 - x$

$20 = |m \cap E| = |((m \cap E) - A| + x \Rightarrow |(m \cap E) - A|$

$= 20 - x$

$65 - |m| = |m - (A \cup E)| + \underbrace{(25 - x) + x + (20 - x)}_{45 - x} \Rightarrow$

$|m - (A \cup E)| = 20 + x$

$100 = (20 + x) + (25 - x) + x + (2 + x) + (15 - x) + (10 + x) +$

$(20 - x)$

$\Rightarrow 100 = 92 + x \Rightarrow x = 8$

الف: ۸

$10 + x \Rightarrow 10 + 8 = 18$ ج:

$|(m \cap E) - A| = (20 - x + x) - x = 20 - x \Rightarrow$ د:

$20 - 8 = 12$

هجرت امام خمینی (ره) از عراق به پاریس (۱۳۵۷ ه.ش)
روز شروع انقلاب
۱۳۹۲
۱۳۵۲
Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$\{a,b\} = \{b,a\}$

زوج مرتب:

$(a,b) \neq (b,a)$

ترتیب مهم است

$(a,b) = (x,y) \iff a=x \wedge b=y$

ضرب دکارتی:

$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

۱۱۴

مثال:

$A = \{a,b,c\} \quad B = \{1,2\}$

$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$

۱۳۹۲

رابطه

تعریف: رابطه R روی A و B زیرمجموعه‌ای از ضرب دکارتی $A \times B$ است.

$A = \{$ مازندران، انگلستان، ایران $\}$

$B = \{$ لندن، پاریس، همدان $\}$

R: رابطه پایتخت و کشور

$A \times B = \{$(لندن، ایران)، (پاریس، ایران)، (همدان، ایران)، (لندن، انگلستان)، (پاریس، انگلستان)، (همدان، انگلستان)، (لندن، فرانسه)، (پاریس، فرانسه)، (همدان، فرانسه)$\}$

شهادت حضرت امام محمدتقی (ع) جوادالائمه (۲۲۰ ه.ق)
روز دامپزشکی

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$R = \{$(پاریس، فرانسه)، (لندن، انگلستان)، (تهران، ایران)$\}$

پاریس $\not R$ ایران تهران R ایران

- مثال:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

R = a بر b بخش‌پذیر باشد $\iff a\ R\ B$

1R1 2R1 3R1 4R1 5R1

2R2 4R2 3R3 4R4 5R5

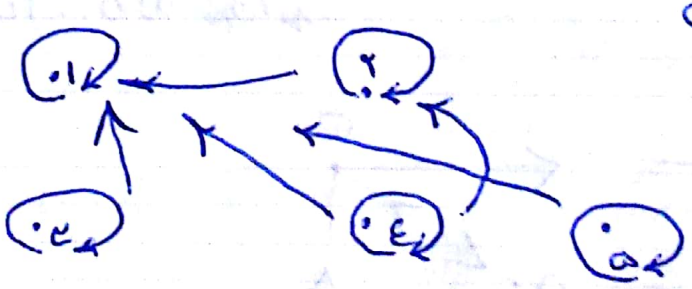
روش‌های نمایش رابطه:

۱- گفتن $aRb \iff$ a بر b بخش‌پذیر است.

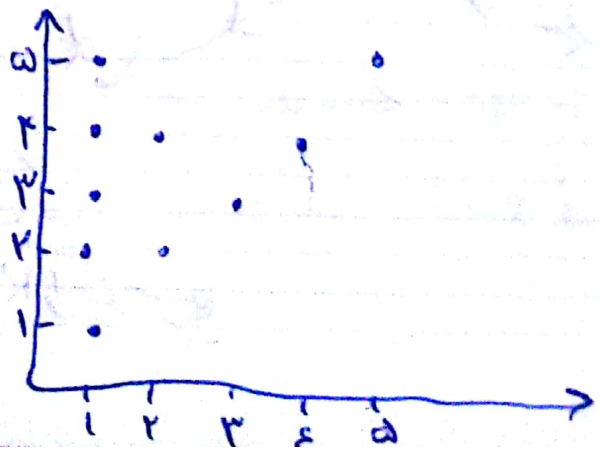
۲- لیست کردن اعضای $\{$ 1R1 , 2R2 , ... $\}$

$\{(1,1), (2,1), \ldots\}$

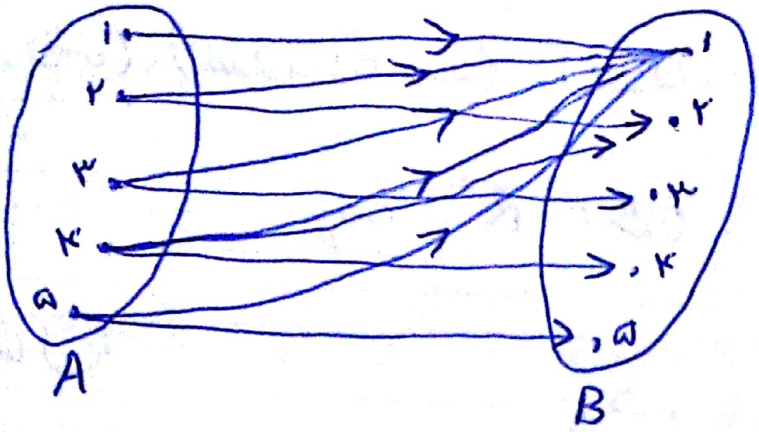
۳- گراف



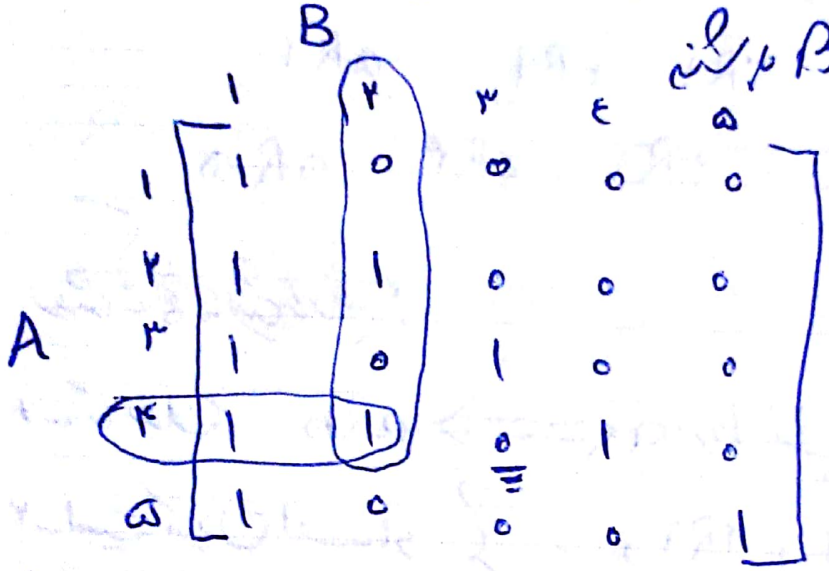
۴- منحنی



Scanned by CamScanner
www.jozve.org



۶- روش ماتریس بایزری: ماتریسی ایجاد می‌کنیم که سطرها و ستون‌هایش



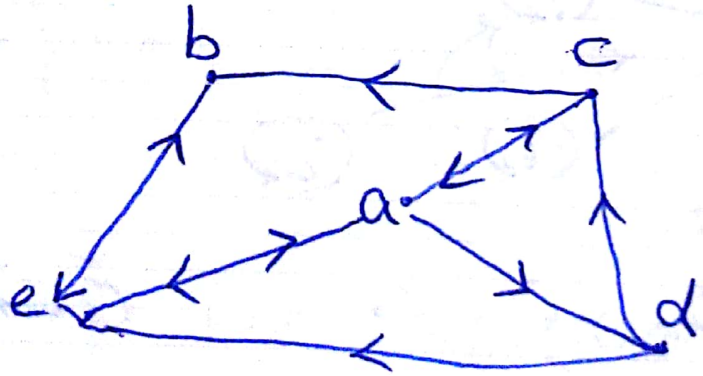
دهنده اعضای A و B هستند

هرکدام رابطه دارند را مشخص کنید

۴ با ۲ رابطه دارد ER2

۴ با ۳ رابطه ندارد ER/3

یک رابطه R روی مجموعه $A=\{a,b,c,d,e\}$ با استفاده از گراف ۲ صفت زیر نشان داده شده است.



الف: عناصر R را مشخص کنید.

ب: ماتریس بایزری R را بنویسید

۱۴۴۴ Wed.09.10(Oct).2013

$R = \{(a,c), (c,a), (a,e), (e,a), (d,e), (d,c)$
$(c,b), (b,e), (e,b), (a,d)\}$

	a	b	c	d	e
a	0	0	1	1	1
b	0	0	0	0	1
c	1	1	0	0	0
d	0	0	1	0	1
e	1	1	0	0	0

- مثال: معکوس رابطه R که R^{-1} به این صورت تعریف می‌شود

$aR^{-1}b \iff bRa$ یعنی aRb

برای مثال قبل R^{-1} را مشخص کنید.

$cR^{-1}a \quad dR^{-1}a \quad eR^{-1}a \quad eR^{-1}b$

$bR^{-1}c \quad aR^{-1}c \quad aR^{-1}e \quad bR^{-1}e$

$eR^{-1}d \quad cR^{-1}d$

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

تعریف: فرض کنید R رابطه‌ای روی A باشد. می‌گوییم R:

الف: بازتابی است اگر برای هر $a \in A$ داشته باشیم aRa

ب: متقارن است اگر برای هر $a, b \in A$ اگر aRb آنگاه bRa

ج: پادمتقارن:

اگر aRb، bRa آنگاه $a = b$

د: تراگذاره [تعدی]

اگر aRb ، bRc آنگاه aRc

مثال ۵: فرض کنید R روی اعداد صحیح

xRy اگر و فقط اگر $x \leq y$

الف: ست بازتابی $x \leq x$ ✓

ب: متقارن [مثال نقض] $4 \leq 2$ اما $2 \leq 4$ ✗

ج: پادمتقارن $x \leq y$ ، $y \leq x \rightarrow x = y$ ✓

د: تعدی $x \leq y$ ، $y \leq z \rightarrow x \leq z$ ✓

$A = \{a, b, c, d\}$ ،

$R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (d,d)\}$

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

الف: بازتابی $\times\ cRc$

ب: متقارن $\times\ cRa\ ,\ aRc$

ج: پادمتقارن $\times\ a\neq b$ اما $bRa \wedge aRb$

د: bRd $\times\ aRd \leftarrow aRb$

- اثر R بروی A به صورت زیر تعریف شده $A = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$

$$(a,b)R(c,d) \iff a+d = b+c$$

مجموعه A زوج‌های مرتب

الف: بازتابی $(a,b)R(b,a)$ طبق تعریف رابطه $a+b=b+a$ وجود دارد ✓
تساوی همیشه برقرار است بازتابی است

ب: $(x,y)R(s,t)$ آنگاه $(s,t)R(x,y)$

فرض می‌کنیم $(x,y)R(s,t) \Leftarrow x+t=y+s \Leftarrow s+y=x+t \Leftarrow (s,t)R(x,y)$

متقارن است

ج: تعدی $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \Leftarrow$

فرض کنیم $(a,b)R(c,d)$, $(c,d)R(e,f)$

$$\begin{array}{l} a+d=b+c \\ c+f=d+e \ + \end{array}$$

$$a+d+c+f = b+c+d+e$$

$$a+f=b+e$$

$(a,b)R(e,f)$ تعدی دارد

شهادت مظلومانه زائران خانه خدا به دست مأموران آل سعود (۱۳۶۶ ه.ش برابر با ۶ ذی الحجه ۱۴۰۷ ه.ق) نیروز بزرگداشت حافظ، روز ایمنی در برابر زلزله و بلایای طبیعی

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

(c,d) R (a,b) ، (a,b) R (c,d) هم‌ارز متقارن.

هم‌ارزی (a,b) = (c,d) اگاه

Sun.13.10(Oct).2013

(5,1) R (1,3) و (1,3) R (5,1)

امّا (1,4) ≠ (5,1) پادمتقارن ندارد

تعریف: یک رابطه هم‌ارزی است اگر و فقط بازتابی، متقارن و متعدی باشد.

۹۴/۲/۱۱

مثال: رابطه R روی اعداد صحیح

xRy اگر و فقط اگر $x^2 = y^2$

بازتابی: $x^2 = x^2$ ✓

تقارن: اگر $x^2 = y^2$ آنگاه $y^2 = x^2$

xRy ⟺ yRx

تعدی: اگر $x^2 = y^2$ و $y^2 = z^2$ ⟵ $x^2 = z^2$

رابطه هم‌ارزی

مثال: رابطه‌ی R روی Z که $A = Z$

mRn اگر و فقط اگر $m = 2^k n$

(k یک عدد صحیح است)

بازتابی: mRm ✓

$m = 2^0 m$ ⟸ $k = 0$ اگر $m = 2^k m$

mRm

متقارن: فرض می‌کنیم mRn ⟵ $m = 2^k n$ ⟸ nRm

$\frac{m}{2^k} = n$ ⟵ $m 2^{-k} = n$ ⟸ $n = 2^{-k} m$ ⟸ nRm ✓

شهادت حضرت امام محمد باقر (ع) (۱۱۴ ق.)

۲۱

۱۳۹۲

Scanned by CamScanner

www.jozve.org

تعدی: mRn و $nRo \Rightarrow mRo$

$m = 2^k n$ و $n = 2^l o \Rightarrow m = 2^{k+l} o$

$mRn \Leftrightarrow m = 2^k n \wedge n = 2^l o \Leftrightarrow m = 2^{k+l} o \Leftrightarrow \frac{m}{2^{k+l}} = o \Leftrightarrow m = 2^{k-l} o \Leftrightarrow mRo$ ✓

۲۲

مثال: رابطه R روی $A = \mathbb{Z}$

m بر n بخشپذیر باشد $\Leftrightarrow m|n$ و mRn

انعکاسی: $m|m$ ✓

تقارن: $۲|۴$ اما $۴|۲$ ✗

کلاس هم‌ارزی: اگر R رابطه‌ای هم‌ارزی روی A و x, y عضو A باشند

کلاس هم‌ارزی x برابر است با y به شرطی که xRy باشد

$[x] = \{y : xRy\}$

$mRn \Leftrightarrow (m-n)$ بر ۵ بخشپذیر است

اعداد هم‌ارز با ۵

$[۱] = \{\ldots, -۹, -۴, ۱, ۶, ۱۱, \ldots\}$

$[۲] = \{\ldots, -۸, -۳, ۲, ۷, ۱۲, \ldots\}$

$[۳] = \{\ldots, -۷, -۲, ۳, ۸, ۱۳, \ldots\}$

اعداد هم‌ارز با ۵

اولی رابطه ندارد

روز جهانی استاندارد

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$n^2 = m^2 \iff nRm$

کلاس هم‌ارزی $[n] = \{n, -n\}$

$[0] = \{0\}$

قضیه: اگر R یک رابطه هم‌ارزی باشد $[x] = [y]$ اگر و تنها اگر xRy و بالعکس

۲۳

پیمانه‌ی m

$a \equiv_m b \iff$ باقیمانده‌ی a و m برابر با b باشد.

$a - b = km$ ← عدد صحیح

$4 \equiv_5 1$ ← باقیمانده‌ی ۱ از ۵

$8 \equiv_5 3$ ← باقیمانده‌ی ۳ از ۸

[Poset] یا رابطه‌ی نظم جزئی Partial order

رابطه R روی مجموعه A نظم جزئی است اگر بازتابی، پادمتقارن و متعدی باشد.

مثال: xRy روی $R \iff x \leq y$

① $x \leq x$ ✓

② $xRy \wedge yRx : x \leq y, y \leq x \rightarrow x = y$ ✓

③ تعدی: $xRy \wedge yRz : x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

رابطه‌ی کوچکتر بودن Poset نیست چون بازتابی نیست xRz

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

مثال: $(\mathcal{P}, \subseteq)$ مجموعه توانی هر مجموعه یک Poset است

$A = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

اگر R رابطه R رابطه‌ای روی R^2 باشد

$$(x_1, y_1)\ R\ (x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 < x_2 \\ \text{یا} \\ x_1 = x_2 \ \text{و} \ y_1 \leq y_2 \end{cases}$$

$(0, \varepsilon)\ R\ (1, \varepsilon)$ $\quad$ $(7, 9) \not R (4, 5)$

$(0, 5)\ R\ (0, 7)$ $\quad$ $(4, 5) R (7, 9)$

ثابت کنید: (R^2, R) یک Poset است.

✓ $(x, y)\ R\ (x, y)$ چون $x = x$ است پس بازتابی میباشد

پادمتقارنی: $(x_2, y_2) R (x_1, y_1)$ ، $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \\ \text{یا} \\ x_1 = x_2 \ \wedge \ y_1 \leq y_2 \end{cases}$$

$$(x_2, y_2) R (x_1, y_1) \Rightarrow \begin{cases} x_2 < x_1 \\ \text{یا} \\ x_2 = x_1 \ \wedge \ y_2 \leq y_1 \end{cases}$$

اگر $x_1 = x_2$ و $\begin{cases} y_1 = y_2 \\ \wedge \\ y_2 \leq y_1 \end{cases}$ $\Rightarrow y_1 = y_2$

✓ $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

عید سعید قربان، تعطیل، روز جهانی غذا، روز پیوند اولیا و مربیان
مالروز واقعه به آتش کشیدن مسجد جامع شهر کرمان به دست دژخیمان رژیم پهلوی (۱۳۵۷ ه.ش)

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$\Leftarrow (x_2, y_2) R (x_5, y_5) \wedge (x_1, y_1) R (x_4, y_4)$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 < x_5 \\ \Downarrow \\ x_2 = x_5 \wedge y_2 \leq y_5 \end{array}\right\} \wedge \left.\begin{array}{l} x_1 < x_4 \\ \Downarrow \\ x_1 \leq x_4 \wedge y_1 \leq y_4 \end{array}\right\}$$

حالت اول $\leftarrow x_1 < x_4 \Leftarrow x_2 < x_5 \;,\; x_1 < x_4$

$\checkmark \quad (x_1, y_1) R (x_5, y_5)$ و

حالت دوم $\leftarrow y_2 \leq y_4 \;,\; x_2 = x_4 \;,\; x_1 < x_4$

$\checkmark \quad (x_1, y_1) R (x_5, y_5)$ و

حالت سوم $\leftarrow x_2 < x_5 \;,\; x_1 = x_4 \wedge y_1 \leq y_4$

$\checkmark \quad (x_1, y_1) R (x_5, y_5)$

حالت چهارم $\leftarrow x_2 = x_5 \wedge x_1 = x_4 \wedge y_1 \leq y_4$

$y_2 \leq y_5$

$y_1 \leq y_5 \wedge x_1 = x_4$

$\checkmark \quad (x_1, y_1) R (x_5, y_5)$

Thu.17.10(Oct).2013
۲۵
۱۳۹۲
جمعه : روز تربیت بدنی و ورزش
۱۲ ذی الحجه ۱۴۳۴
Fri.18.10(Oct).2013
جمعه
مهر
۲۶
۱۳۹۲ تعطیل
Scanned by CamScanner
www.jozve.org

۹۹/۲/۱۸

شنبه ۱۳ ذی الحجه ۱۴۳۴
Sat.19.10(Oct).2013

۲۷

۱۳۹۲

بزرگترین عضو:

اگر A یک مجموعه و R رابطه‌ی نیمه مرتب یا ترتیب جزئی روی آن باشد a بزرگترین عضو است اگر برای هر عضو $a \in A$ داشته باشیم aRa

کوچکترین عضو:

اگر A یک مجموعه و R رابطه‌ی نیمه مرتب یا ترتیب جزئی روی آن باشد b کوچکترین عضو است اگر برای هر عضو $b \in A$ داشته باشیم bRb

مثال: $(\{1,2,3,4,5\}, \leq)$

کوچکترین عضو 1

بزرگترین عضو 5

عضو ماکسیمال:

اگر (A,R) یک Poset باشد y عضو ماکسیمال آن است اگر هر a که yRa ($a \in A$) آنگاه $y = a$

بزرگترین عضو با همه رابطه دارد و در سمت راست نوشته میشود

عضو مینیمال:

اگر (A,R) یک Poset باشد x عضو مینیمال آن است اگر هر a که aRx آنگاه $a = x$.

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$(\{2,3,4,5,6,7,8\}, |)$ مثال

یکشنبه ۱۴۲۲ Sun.20.10(Oct).2013

عضو مینیمال: 2 , 3 , 5 , 7

عضو ماکسیمال: 5 , 6 , 7 , 8

این Poset بزرگترین عضو کوچکترین عضو ندارد

اگر A جزء این مجموعه بود، کوچکترین عضو 1 و عضو مینیمال وجود نداشت

- ترتیب کامل (Total Order)

Poset (A, R) که برای شرط زیر است

$\forall a,b \in A \quad aRb \vee bRa$

- مثال:

$(\{1,2,3,4,5,6\}, \leq)$

- نمودار Hasse Diagram:

پوشش دادن (covering): عضو a، عضو b را پوشش میدهد اگر bRa و هیچ عضوی مانند c وجود نداشته باشد که cRa و bRc

★ در مثال بالا 4، 2 را پوشش میدهد ولی 8، 2 را پوشش نمیدهد چون بین آنها عضو وجود دارد

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

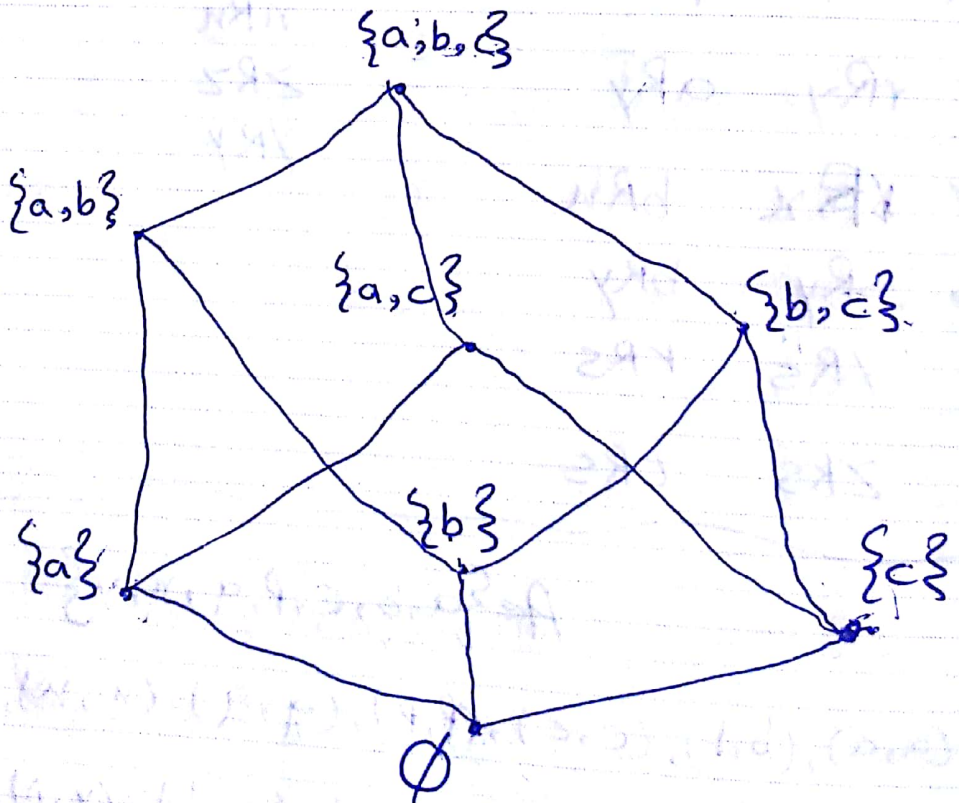
تعریف: شکل نقطه ای یک مجموعه مرتب متناهی، نمایشی است که اعضای مجموعه را به صورت نقاطی در صفحه نشان می‌دهد و اعضای متمایز را با نقاط متمایز نشان می‌دهد و اگر $a \leq b$ عضو a را پایین‌تر از عضو b رسم می‌کنیم و اگر $a \leq b$ آنگاه a و b را با یک خط به هم وصل می‌کنیم.

مثال: برای $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$ نمودار هاسه رسم کنید.

$\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

$\emptyset \subseteq \emptyset \quad \emptyset \subseteq \{a\} \quad \emptyset \subseteq \{b\} \ldots\ldots$

بزرگترین عضو $= \{a,b,c\}$ کوچکترین عضو $= \emptyset$

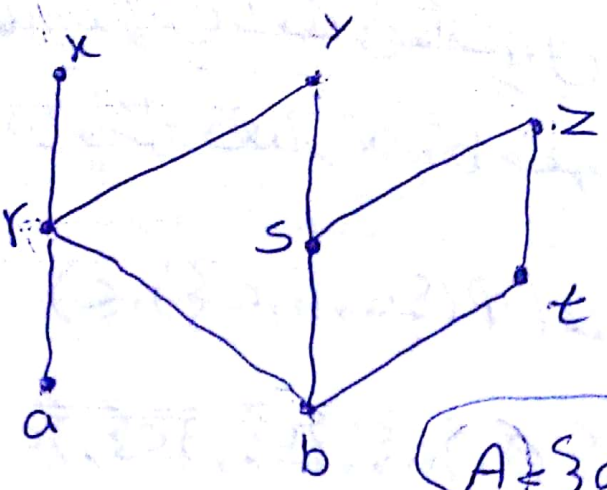


ولادت حضرت امام علی النقی الهادی (ع)، (۲۱۲ ه.ق)، روز صادرات

Scanned by CamScanner

www.jozve.org

با توجه به نمودار هاسه زیر رابطه انعکاسی مجموعه را مشخص کنید؟



$A=\{a,b,s,t,r,x,z,y\}$

aRr rRx aRx

aRa
bRb
sRs
tRt
rRr
xRx
zRz
yRy

aRr rRy aRy

bRr rRx bRx

bRs sRy bRy

rRy yRs rRs

tRz zRs tRs

$A=\{a,b,c,p,q,x,y\}$:حل

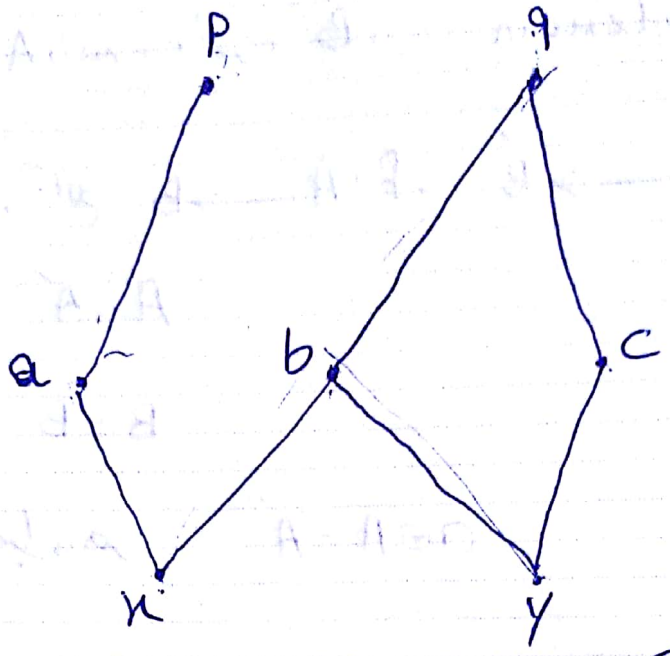
$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(p,p),(q,q),(x,x),(y,y),$
$(a,p),(b,q),(c,q),(x,a),(x,b),(x,p),(x,q),$
$(y,b),(y,c),(y,q)\}$

نمودار هاسه را رسم کنید.

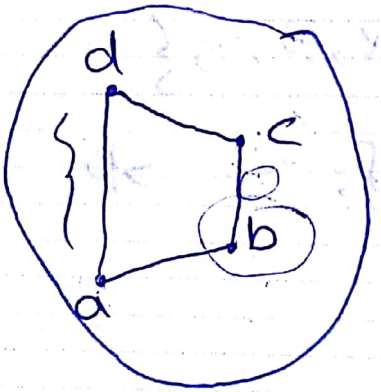
Scanned by CamScanner
www.jozve.org

عضو مینیمال: x , y

عضو ماکسیمال: p , q



- نمودارهای زیر یک Poset را نشان نمی‌دهد. چرا؟



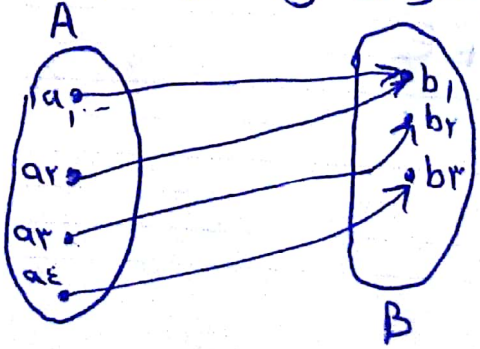
aRb bRc cRd

aRd

شرط جوشش دادن در اینجا رعایت نشده است.

۹۶,۲,۲۵

تعریف: تابع F با دامنه‌ی $f: A \to B$ رابطه‌ای روی A و B می‌باشد با این شرط که هر عضو مجموعه‌ی A مثل a تنها با یک عضو B مثل b ارتباط دارد.



$(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_2)$

(a_4, b_3)

شهادت مظلومانه آیت ا... حاج سید مصطفی خمینی (۱۳۵۶)
روز آمار و برنامه ریزی

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$f: a_1 \longrightarrow b_1$ $f: a_2 \longmapsto b_1$

$f: a_3 \longmapsto b_2$ $f: a_4 \longmapsto b_2$

۱۸ ذی الحجه ۱۴۳۴
Thu.24.10(Oct).2013
پنجشنبه آبان ۱۳۹۲ تعطیل

۴

مجموعه A دامنه و مجموعه B، Codomain می‌گویند.

تعریف: تابع $f: A \longrightarrow B$ و $f': A' \longrightarrow B'$ مساوی هستند اگر

الف) $A \subset A'$

ب) $B \subset B'$

ج) برای هر $a \in A \subset A'$: $f(a) = f'(a)$

مثال: $f: A \longrightarrow B$ دامنه تابع F

پنجشنبه: عید سعید غدیر خم (۱۰ ق.ظ) تعطیل

$A = \{a, b, c, d, e\}$ $B = \{\alpha, \beta, \delta\}$

۱۹ ذی الحجه ۱۴۳۴
Fri.25.10(Oct).2013
جمعه آبان ۱۳۹۲ تعطیل

۵

$f: a \longrightarrow \alpha$ $f: b \longrightarrow \alpha$ $f: c \longrightarrow \beta$

$f: d \longrightarrow \delta$ $f: e \longrightarrow \delta$

$f = \{(a, \alpha), (b, \alpha), (c, \beta), (d, \delta), (e, \delta)\}$

شرط تابع: هر عضو دامنه با یک عضو Codomain ارتباط داشته باشد.

مثال:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 4$

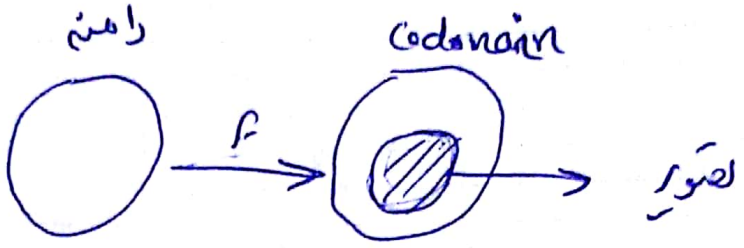
Scanned by CamScanner
www.jozve.org

مثال: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto y^2$

* تابع نیست ← چون ۴ دارای ۲ تصویر $(4,2)$ $(4,-2)$

تعریف: تصویر تابع f: تمام اعضای Codomain که شانس وجود داشته باشد

یعنی: هر عضو دامنه به کسی که $f(a)=b$



* تصویر یک مجموعه توسط تابع

مثال: تصویر تابع زیر را مشخص کنید؟

$f: \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^+$

$f(n)=n^2$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \ldots$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \ldots$

$Img(f)=\{1,4,9,16,25,36,\ldots\}$

ادعا: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2$ مثال

$Img(f)=\{y:\ y=x^2,\ x,y\in\mathbb{R}\}$ $\quad y=x^2$

$y=f(x)=x^2 \Rightarrow y\in\mathbb{R}^+\cup\{0\} \Rightarrow Img(f)=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

$x=\sqrt{y}$ $\quad f(x)=f(\sqrt{y})=(\sqrt{y})^2=y$

اگر $y\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ باشد تابع f آنرا تولید می‌کند

اعتراض و افشاگری حضرت امام خمینی (ره) علیه پذیرش کاپیتولاسیون (۱۳۴۳ ه.ش)
Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad g(x) = x^3$

$\text{Img}(g) = \mathbb{R}$

$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow f(x) = f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$

$f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$ $\quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\text{Img}(f) = ?$

y در تصویر f قرار دارد، اگر و فقط اگر $y = \dfrac{3x}{x^2+1}$

$\Rightarrow yx^2 + y = 3x \Rightarrow yx^2 - 3x + y = 0$

$\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \dfrac{3 \pm \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}$

$\begin{cases} 9 - 4y^2 \geq 0 \Rightarrow 4y^2 \leq 9 \Rightarrow \\ 2y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \end{cases}$ $\quad y^2 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \text{Img}(f) = [-\frac{3}{2}, 0) \cup (0, \frac{3}{2}] \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow x = y^2$

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

مثال

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 + 2$

$y = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = y - 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-2}$

$\Rightarrow y - 2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 2 \Rightarrow Im(f) = [2, \infty)$

مثال

$f(x) = (x+2)^2$

$y = (x+2)^2 \Rightarrow y = x^2 + 4x + 4$

$\Rightarrow a x^2 + \underset{b}{4}x + \underset{c}{4} - y = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(4-y)}}{2} \Rightarrow \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 16 + 4y}}{2} \Rightarrow$

$4y \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$

مثال

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$y = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow$ طرفین به توان ۲ $\Rightarrow x^2 + 1 = y^2 \Rightarrow x^2 + (1 - y^2) = 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 - 1}$ $\quad y^2 \geq 1$

$\begin{cases} y \geq 1 \\ \text{یا} \\ y \leq -1 \end{cases} \Rightarrow Im(f) = \mathbb{R} - (-1, 1)$

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

ترکیب توابع: اگر $f: A \longrightarrow B$ ، $g: B \longrightarrow C$ ترکیب تابع

Tue.29.10(Oct).2013

$gof: A \longrightarrow C$

$gof: g(f(x))$

دامنه و ضابطه Codomain و دامنه ضابطه ترکیب شده

مثال ۷:

$f(x) = x + 2$

$g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$fog(x) = f(g(x)) = g(x) + 2 = \frac{1}{x^2+1} + 2 = \frac{1+2x^2+2}{x^2+1}$

$gof(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f^2(x)+1} \Rightarrow \frac{3+2x^2}{x^2+1}$

$\frac{1}{(x^2+1)^2+1} = \frac{1}{x^2+4x+5}$

$Im(gof) \Rightarrow y = \frac{1}{x^2+4x+5} \Rightarrow yx^2 + 4xy + 5y = 1$

$\Rightarrow yx^2 + 4yx + (5y-1) = 0$

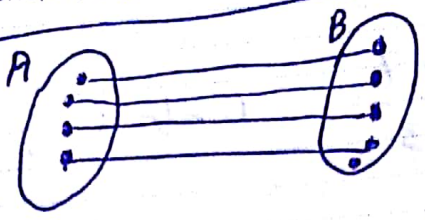
$\begin{cases} a = y \\ b = 4y \\ c = 5y-1 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

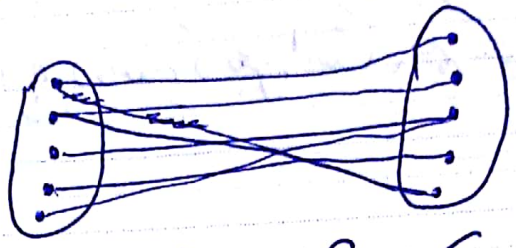
www.jozve.org

$Im(f \circ g) = Im(f)$ ۱۴۳ ام روز سال Wed.30.10(Oct).2013

تابع یک به یک



تابع پوشا



الف) Codomain و Im همدیگر را پوشش می‌دهند تابع پوشا است

۹۶/۳/۱ حلبسه آخر

مثال: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $f(x) = x^2$

Codomain

تعریف یک به یک: به ازای هر x فقط یک $f(x)$

$1 \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$

پوشا X یک به یک X

مثال: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 3x - 7$

if $f(x) = f(y)$ then $x = y$ یک به یک بودن

$3x - 7 = 3y - 7$

$3x = 3y \Rightarrow x = y$ یک به یک است

فرض می‌کنیم $y \in \mathbb{R}$ باشد، باید تابع بتواند y را تولید کند

$f(x) = y$

$\Rightarrow 3x - 7 = y \xrightarrow{+7} 3x = y + 7 \xrightarrow{\div 3} x = \frac{y+7}{3}$

روز مباهله پیامبر اسلام (ص)، (۲۴ ذی‌الحجه)، روز پداشت غیر عامل
شهادت محمدحسین فهمیده (بسیجی ۱۳ ساله)، روز نوجوان و بسیج دانش آموزی

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

$f\left(\frac{y+7}{3}\right)=3\left(\frac{y+7}{3}\right)-7 \Rightarrow y+7-7=y$

۲۵ ذی الحجه ۱۴۳۴
Thu.31.10(Oct).2013
پنجشنبه آبان

با انتخاب x برابر با $\frac{y+7}{3}$ مقدار y تولید می‌شود.

تعریف: تابع دوسویی تابعی است که هم یک‌به‌یک و هم پوشا است.

۹

تابع همانی

تابع همانی f تابعی است که مقدار خروجی آن با مقدار ورودی آن یکسان است (id A)

$\forall a \in A \quad f(a)=a$

۱۳۹۲

پنجشنبه: روز خانواده و تکریم بازنشستگان
جمعه: شهادت آیت ا... قاضی طباطبایی اولین شهید محراب به دست منافقان (۱۳۵۸ ه.ش)

مثال: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ با تعریف $f(x,y)=(2x-3y, x-2y)$

۲۵ ذی الحجه ۱۴۳۴
Fri.01.11(Nov).2013
جمعه آبان

ولی تطبیق شبیه نشان دهید $fof=id_{\mathbb{R}^2}$ است و f تابعی دوسویی میباشد.

$fof(x,y)=f(f(x,y))=f(2x-3y, x-2y) \Rightarrow$

$(2(2x-3y)-3(x-2y), 2x-3y-2(x-2y)) \Rightarrow$

$(4x-6y-3x+6y, 2x-3y-2x+4y) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) \Rightarrow fof=id_{\mathbb{R}^2}$ بنابراین همانی ✓

۱۰

$f(x,y)=f(x',y') \Rightarrow fof(x,y)=fof(x',y')$

$\Rightarrow (x,y)=(x',y')$ ✓

یک‌به‌یک است

۱۳۹۲ تعطیل

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

پوشا بودن:

$f(x,y)=(x',y')$ (یعنی به ازای)

$(x,y)=(2x'-3y', x'-2y')$

$f(x',y')=f(f(x,y))=(fof)(x,y)=(x,y)$

اگر x' و y' دو عدد حقیقی دلخواه باشند می‌توانیم (x,y) را طوری بگیریم

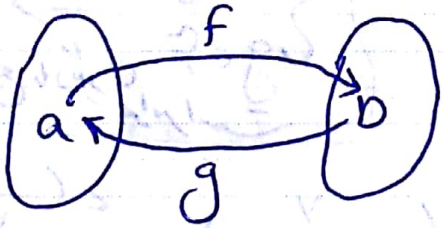
$(x,y)=f(x',y')$

$\Rightarrow f(x,y)=f(f(x',y'))=(x',y')$

- معکوس تابع

اگر f تابعی دوسویی با ضابطه $f:A\longrightarrow B$ باشد آنگاه $g:B\longrightarrow A$

معکوس تابع f است اگر و فقط اگر $f(a)=b$ باشد آنگاه $g(b)=a$



f^{-1}

- در صورت وجود معکوس تابع $f(x)=5x+8$ را بیابید: $(f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R})$

یک به یک: $f(x)=f(x')\longrightarrow 5x+8=5x'+8\Rightarrow x=x'$ ✓

پوشا بودن: $f(x)=y\longrightarrow 5x+8=y\Rightarrow x=\frac{y-8}{5}$ ✓

$$f^{-1}(y)=\frac{y-8}{5}$$

قضیه: اگر f تابعی باشد $f:A\longrightarrow B$ با ضابطه

$f^{-1}=f$ آنگاه $fof=id_A$

Scanned by CamScanner
www.jozve.org

مثال: نشان دهید که $f(x,y)=(2x-3y, x-2y)$ یک تابع خود وارون است.

یکشنبه ۲ ذی الحجه ۱۴۳۴
Sun.03.11(Nov).2013

$f^{-1}(x,y)=f(x,y)=(2x-3y, x-2y)$ پس $fof=id_{\mathbb{R}^2}$

آبان

مثال: تابع $f:\mathbb{R}-\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}-\{2\}$

$f(x)=\frac{2x}{x-1}$

$y=\frac{2x}{x-1}\Rightarrow y(x-1)=2x\Rightarrow yx-y=2x$

$yx-2x=y\Rightarrow x(y-2)=y\Rightarrow x=\frac{y}{y-2}$

۱۲

۱۳۹۲

$g:\mathbb{R}-\{2\}\longrightarrow\mathbb{R}-\{1\}$

$g(y)=\frac{y}{y-2}$

قضیه: $\begin{cases} fog \\ gof \end{cases}\Rightarrow f^{-1}=g$ معکوس یک تابع با دیگری برابر است

$fog(y)=f(g(y))=f\left(\frac{y}{y-2}\right)=\frac{2\left(\frac{y}{y-2}\right)}{\frac{y}{y-2}-1}\Rightarrow$

$\frac{\frac{2y}{y-2}}{\frac{y-y+2}{y-2}}\Rightarrow\frac{2y}{2}=y$ بله ✓

$gof(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2x}{2y}\right)=\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x}{x-1}-2}=\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x-2x+2}{x-1}}$

$\Rightarrow\frac{2x}{x}=x$ بله ✓

Scanned by CamScanner
www.jozve.org