فصل اول : رویه‌ها و استوانه‌ها در فضا

تعریف استوانه در فضا : هر معادله‌ای که در آن فقط دو متغیر موجود باشد آن را معادله یک استوانه در فضا گوییم

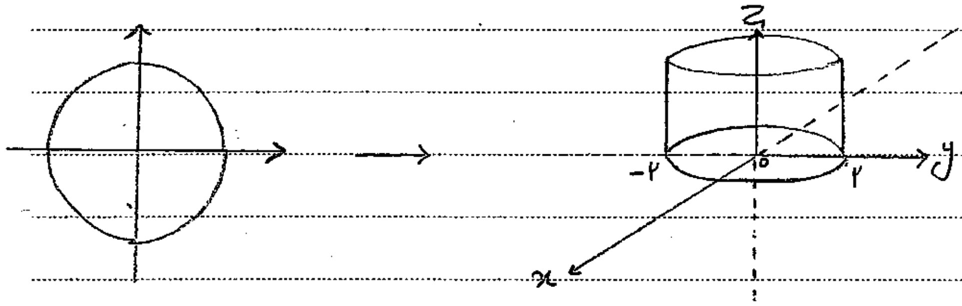
$F(x,y)=0$, $F(x,z)=0$, $F(y,z)=0$

هر استوانه دارای یک محور موازی است که متغیر این محور در معادله استوانه دیده نمی‌شود.

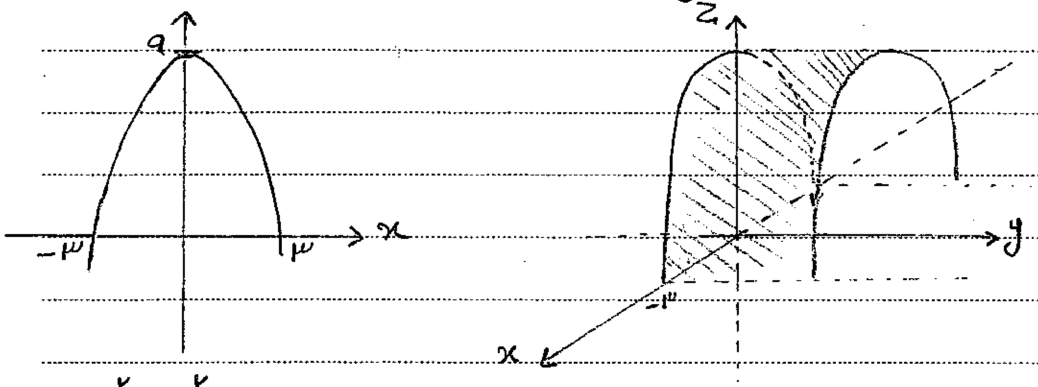
* برای رسم یک استوانه :

ابتدا معادله آن را در صفحه دو بعدی رسم کرده و سپس این منحنی را در راستای محورهای موازی امتداد می‌دهیم

مثال : ۱. $x^2+y^2=4 \longrightarrow$ معادله یک استوانه با محور موازی z است



۲. $z+x^2=9 \longrightarrow z=-x^2+9$ استوانه‌ای با محورهای موازی y است



۳. $x^2-y^2=1$

Subject
Date

۴. $z = 1/y$

تعریف رویه (سطح) در فضا : Surface

هر معادله که در آن سه متغیر x و y و z موجود باشند آن را معادله یک رویه در فضا گوییم.

$F(x, y, z) = 0$

مثال:

صفحه‌ای $ax + by + cz = d$ یک رویه در فضا است.

کره $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ یک رویه در فضا است.

اگر در معادله یک رویه حداقل دو متغیر از درجه ۲ داشته باشیم آن را رویه درجه ۲ نامیم (اهمیت ویژه‌ای دارند)

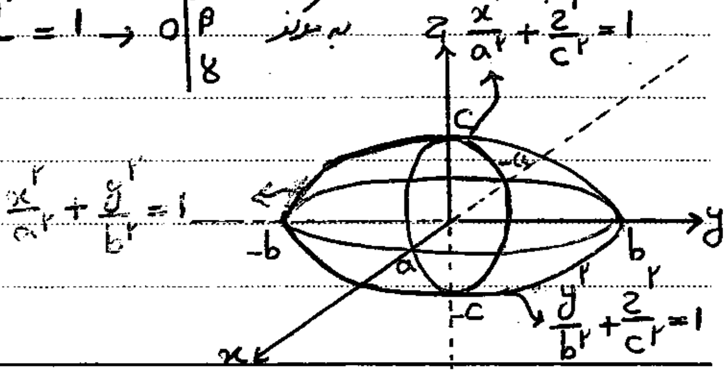
مهم‌ترین رویه‌های درجه ۲ عبارتند از:

۱. بیضی‌گون (بیضی وار)
۲. سهمی‌گون بیضوی
۳. سهمی‌گون هذلولوی
۴. هذلولی‌گون یک پارچه
۵. هذلولی‌گون دو پارچه
۶. مخروط بیضوی

۱) بیضی‌گون (بیضی‌وار)

الف) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \longrightarrow$ به مرکز مبداء

ب) $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} + \dfrac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1 \rightarrow O\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{vmatrix}$ به مرکز



Subject
Date

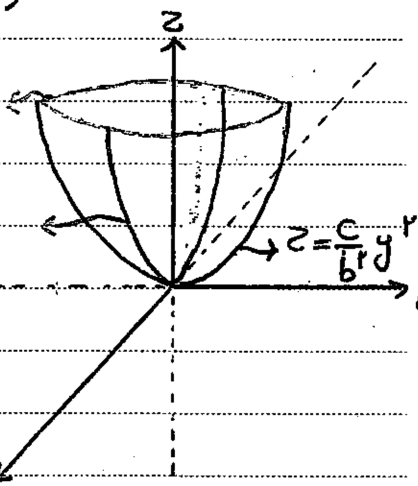
* در حالت خاص اگر $a = b = c = R$ فرض شود آنگاه بیضی گون تبدیل به کره ای به شعاع R می شود

۲) سهمی گون بیضوی: (فرض $c>0$)

الف) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \longleftarrow$ محور تقارن محور z ها

ب) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y}{b} \longleftarrow$ محور تقارن محور y ها

پ) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a} \longleftarrow$ محور تقارن محور x ها



c مثبت ← سهمی گون رو به بالا

c منفی ← سهمی گون رو به پایین

۳) سهمی گون هذلولی (رویه زین اسبی) (فرض $c>0$)

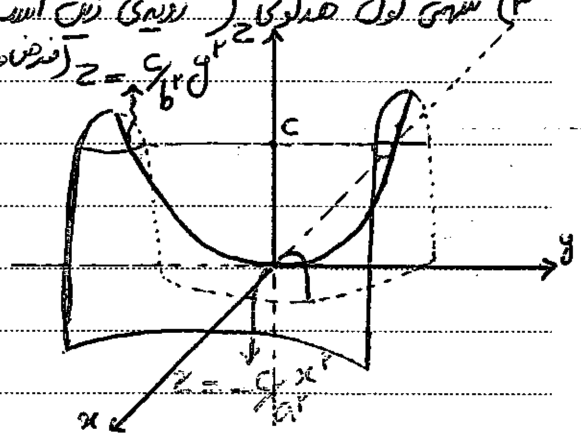
الف) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \longrightarrow$ محور تقارن محور z ها است

ب) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{y}{b} \longrightarrow$ محور تقارن محور y ها است

پ) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a} \longrightarrow$ محور تقارن محور x ها است

if $z = c \longrightarrow y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$ هذلولی

if $z = -c \longrightarrow x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ هذلولی

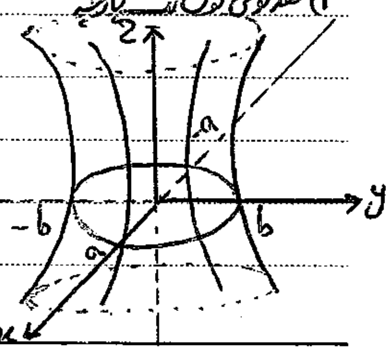


۴) هذلولی گون یک پارچه

الف) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \longrightarrow$ محور تقارن محور z ها است

ب) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \longrightarrow$ محور تقارن محور y ها است

پ) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \longrightarrow$ محور تقارن محور x ها است



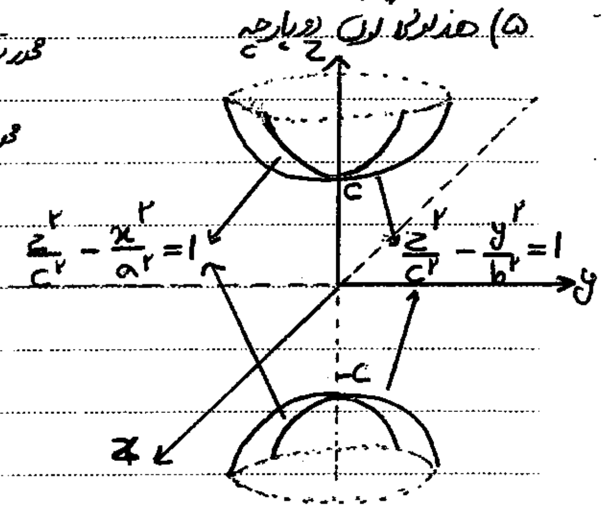
Subject
Date

الف) $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \longrightarrow$ محور تقارن محور z هاست

ب) $-\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \longrightarrow$ محور تقارن محور y هاست

ج) $\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \longrightarrow$ محور تقارن محور x هاست

۵) هذلولی گون دوپارچه



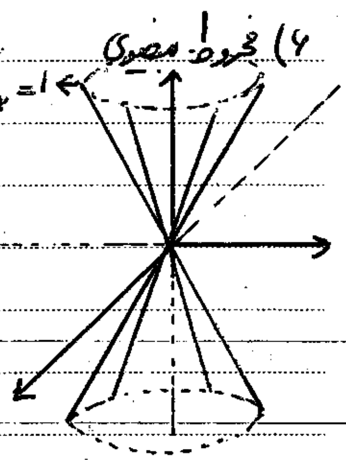
از نقطه $z=\sqrt{2}c \rightarrow x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

۶) مخروط بیضوی

الف) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \longrightarrow$ محور تقارن محور z هاست

ب) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \longrightarrow$ محور تقارن محور y هاست

ج) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \longrightarrow$ محور تقارن محور x هاست



$x=0 \rightarrow y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0 \rightarrow z = \pm \frac{c}{b} y$

$y=0 \rightarrow x^2/a^2 - z^2/c^2 = 0 \rightarrow z = \pm \frac{c}{a} x$

درحالت خاص: $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0 \rightarrow z = \pm c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$

+ : معادله نیم مخروط بالایی / − : معادله نیم مخروط پایینی

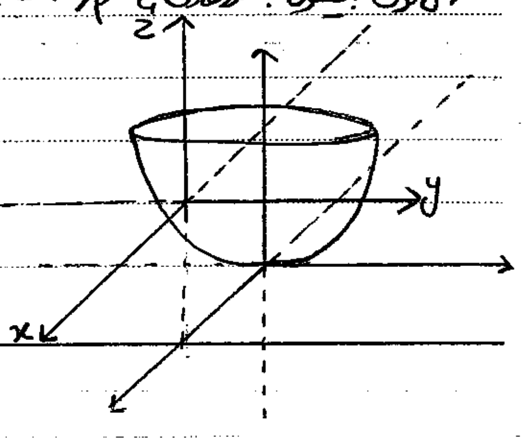
مثال) رویه مربوط به معادله زیر را شناسایی و آن را رسم کنید.

$2x^2+y^2-2y+8x-2z=0 \rightarrow (2x^2+8x)+(y^2-2y)+(-2z)=0$

$(2(x^2+4x))+(y^2-2y)-2z=0 \rightarrow (2((x+2)^2-4))+((y-1)^2-1)-2z=0$

$2(x+2)^2+(y-1)^2=2z+9 \rightarrow (x+2)^2+\frac{(y-1)^2}{2}=z+\frac{9}{2}$ سهمی گون بیضوی با محور تقارن z

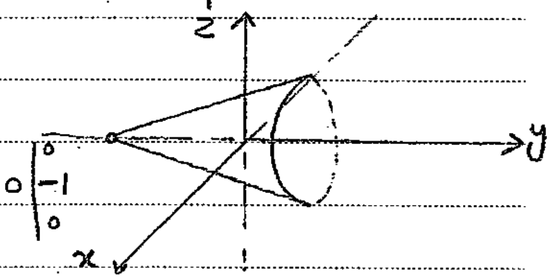
راس $O \left| \begin{array}{l} -2 \\ 1 \\ -9/2 \end{array}\right.$



Subject
Date

$$y=-1+3\sqrt{2x^2+z^2} \rightarrow y+1=3\sqrt{2x^2+z^2} \rightarrow (y+1)^2=9(2x^2+z^2)$$

$$\frac{2x^2}{1}-\frac{(y+1)^2}{9}+\frac{z^2}{1}=0$$ مخروط بیضوی با محور تقارن y و $O\begin{vmatrix}0\\-1\\0\end{vmatrix}$



به ازای مقادیر مختلف k مشخص کنید معادله درجه دوم زیر چه نوع رویه‌ای را مشخص می‌کند

$$4x^2-8x+y^2-z^2+6z=k$$

$$4(x^2-2x)+y^2-(z^2-6z)=k \rightarrow 4(x-1)^2+y^2-(z-3)^2-4+9=k$$

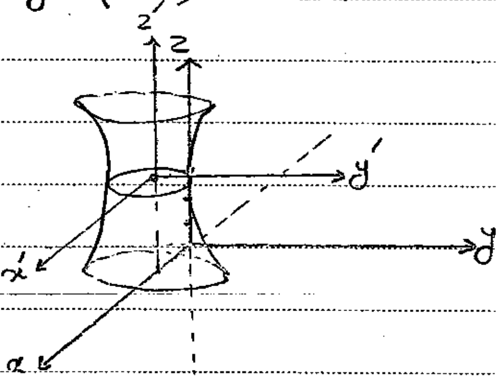
$$4(x-1)^2+y^2-(z-3)^2=k-5$$

if $k=5 \rightarrow$ رویه مخروط بیضوی با محور تقارن z به راس $\begin{vmatrix}1\\0\\3\end{vmatrix}$

if $k>5 \rightarrow$ هذلولی‌گون یک پارچه با محور تقارن z و با راس $\begin{vmatrix}1\\0\\3\end{vmatrix}$

if $k<5 \rightarrow$ رویه هذلولی‌گون یک پارچه 〃 〃 〃

مثال: $k=6 \rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}}+y^2-(z-3)^2=1$



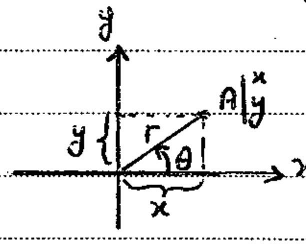
انواع مختصات در فضا:

۱) مختصات قطبی:

در دکارتی $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$

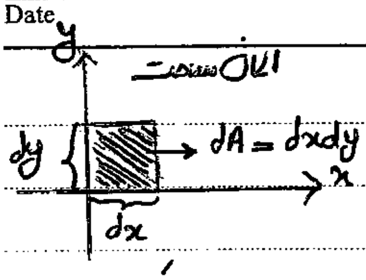
در قطبی $A'\begin{vmatrix}r\\\theta\end{vmatrix}$

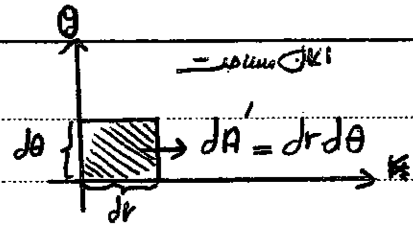
$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\end{cases}$$



$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{y}{r}\\ \cos\theta=\dfrac{x}{r}\end{cases}$$

Subject
Date





$dA \neq dA'$

$dA = |J| dA'$

ضریب ژاکوبین تبدیل صفحه دکارتی به صفحه قطبی

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r > 0$$

$dA = r dA'$

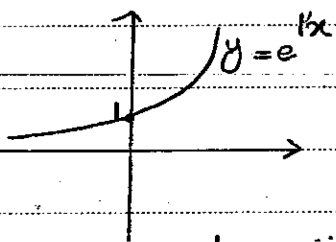
$\boxed{dxdy = r dr d\theta} \leftarrow$ مهم

مثال) معادله‌ی زیر را از مختصات قطبی به مختصات دکارتی برده و نمودار آن را رسم کنید.

$$\ln(r) + \ln(\sin\theta) = 2r\cos\theta \longrightarrow \ln(r\sin\theta) = \ln(y) = 2x \longrightarrow y = e^{2x}$$

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a.b)$

$\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$

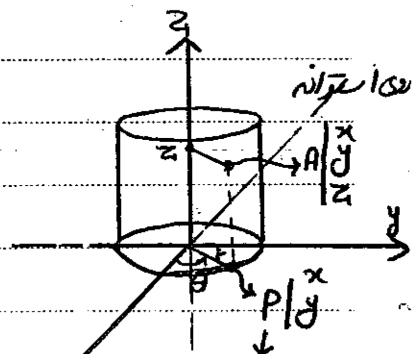


۲) مختصات استوانه‌ای (مختصات قطبی سه بعدی)

در دکارتی $A\Big|_{z}^{x,\,y}$

در مختصات استوانه‌ای $A'\Big|_{z}^{r,\,\theta}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z_1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z_1 \end{cases}$$



$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Subject
Date

$$\begin{cases} dV = dx\,dy\,dz \longrightarrow \\ dV = dr\,d\theta\,dz \rightarrow \end{cases}$$

المان حجم در دکارتی

" " در استوانه‌ای

$dV \neq dV'$

$dV = |J|\,dV'$

ضریب ژاکوبین تبدیل دکارتی به استوانه ای

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r > 0$$

? $\frac{dx}{dz} = 0$

$dV = r\,dV'$

$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$

مثال) نقطه $A \begin{vmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ -2 \end{vmatrix}$ را از مختصات دکارتی به مختصات استوانه‌ای ببرید.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{3} \\ \theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \\ z = z = -2 \end{cases}$$

در استوانه‌ای $A' \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} \\ \frac{\pi}{6} \\ -2 \end{vmatrix}$

مثال) معادله زیر را از مختصات استوانه‌ای به مختصات دکارتی برده و رویه مربوط به آن را شناسایی و رسم کنید.

$2r^2 - 4r\cos\theta + 8r\sin\theta - z^2 + 2z = 1$

$2(x^2+y^2) - 4x + 8y - z^2 + 2z = 1 \rightarrow 2(x^2 - 2x) + (2y^2 + 8y) - (z^2 - 2z)$

$\left(2(x-1)^2 - 1\right) + \left(2(y+2)^2 - 4\right) - \left((z-1)^2 - 1\right) = 1$

$2(x-1)^2 + 2(y+2)^2 - (z-1)^2 = 1 + 2 + 8 - 1$

$\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y+2)^2}{5} - \frac{(z-1)^2}{10} = 1 \quad O \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$ هذلولی‌گون یک پارچه با محور تقارن z در راس

۳) مختصات کروی:

$A \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ در دکارتی

در کروی $A' \begin{vmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{vmatrix} \rightarrow$

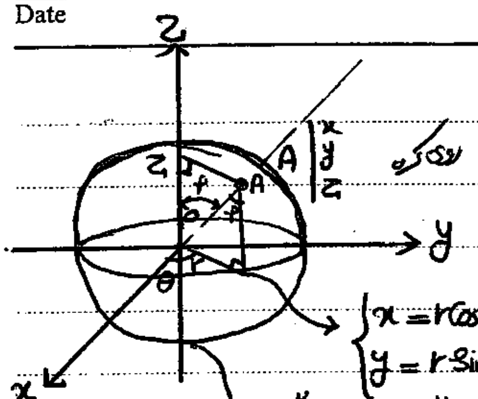
ρ: شعاع کروی

θ ، زاویه قطبی $\longrightarrow 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

φ : زاویه کروی $\longrightarrow 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$

Subject

Date



مثلث OZA : $\cos\varphi = \dfrac{z}{\rho} \rightarrow z = \rho\cos\varphi$

مثلث OBA : $\sin\varphi = \dfrac{r}{\rho} \rightarrow r = \rho\sin\varphi$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \varphi = \mathrm{ArcCos}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2$$

$\begin{cases} dV = dx\,dy\,dz & \text{المان حجم در دکارتی} \\ dV' = d\rho\, d\theta\, d\varphi & \text{المان حجم در کروی} \end{cases} \longrightarrow dV \neq dV' \qquad dV = \underbrace{|J|}\, dV'$

ژاکوبین تبدیل دکارتی به کروی

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \rho^2\sin\varphi > 0$$

$\longrightarrow dV = \rho^2\sin\varphi\, dV'$

$\longrightarrow dx\,dy\,dz = (\rho^2\sin\varphi)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$

مثال) نقطه $A\begin{vmatrix} 3 \rightsquigarrow x \\ \sqrt{3} \rightsquigarrow y \\ -2 \rightsquigarrow z \end{vmatrix}$ را از مختصات دکارتی به مختصات کروی ببرید.

$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{9+3+4} = 4$

$\theta = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\pi}{6} \longrightarrow$ کروی $A\begin{vmatrix} 4 \\ \frac{\pi}{6} \\ \frac{2\pi}{3} \end{vmatrix}$

$\varphi = \mathrm{ArcCos}\left(\dfrac{z}{\rho}\right) = \mathrm{ArcCos}\left(-\dfrac{2}{4}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$

سؤال امتحانی : معادله زیر را از مختصات کروی به مختصات دکارتی ببرید و رویه مربوط به آن را شناسایی و رسم کنید.

$$\rho^2\sin^2\varphi\underbrace{(1+\sin^2\theta)}_{2\sin^2\theta+\cos^2\theta} - \underbrace{\rho^2\cos^2\varphi}_{-z^2} + \underbrace{2\rho\sin\varphi\cos\theta}_{2x} = 0 \rightarrow 2y^2+x^2-z^2+2x=0$$

$$(x+1)^2-1+2y^2-z^2=0 \rightarrow (x+1)^2+\frac{y^2}{1/2}-z^2=0 \quad O\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

محور تقارن z و هذلولی‌گون یک پارچه

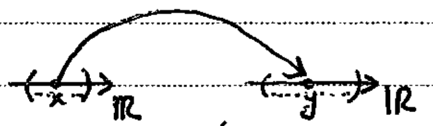
Subject
Date

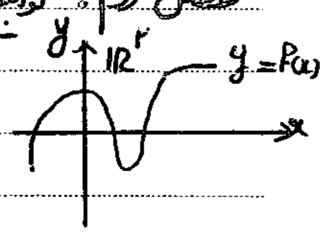
تمرین: معادله زیر را از مختصات کروی به دکارتی ببرید و رویه‌ی آن را بشناسید و رسم کنید.

$\rho = 2\sin\varphi(\cos\theta - 2\sin\theta)$

فصل دوم: توابع چند متغیره

تابع یک متغیره: $\begin{cases} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y = f(x) \end{cases}$



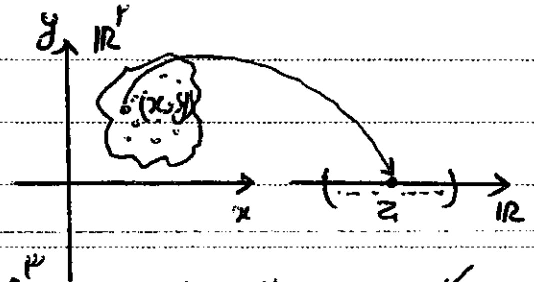


$D_f =$ یک بازه

$R_f =$ یک بازه

تابع دو متغیره: $\begin{cases} f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ z = f(x,y) \end{cases}$

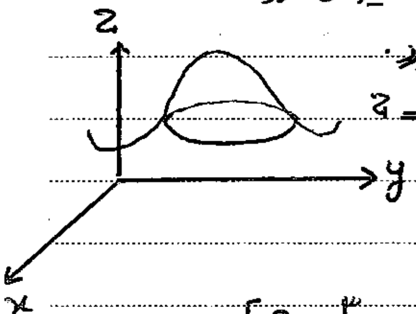
متغیرهای آزاد



$D_f =$ یک ناحیه‌ی دوبعدی

$R_f =$ یک بازه

نمودار تابع دو متغیره را رویه گوییم و رویه‌ی تابع دو متغیره در فضای R^3 قرار می‌گیرد.

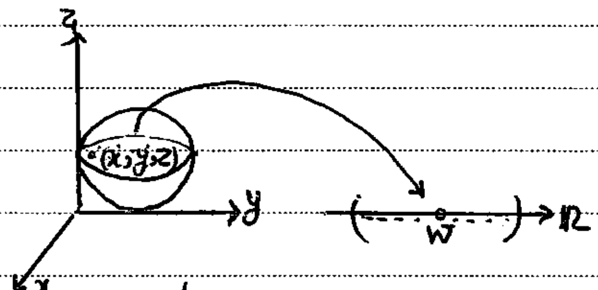


$z = f(x,y)$ رویه

تابع سه متغیره: $\begin{cases} f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ w = f(x,y,z) \end{cases}$

تابع

متغیرهای مستقل



$D_f =$ یک ناحیه سه بعدی

$R_f =$ یک بازه

رویه تابع سه متغیره $w = f(x,y,z)$ در ابرفضای $\mathbb{R}^4$ قرار می‌گیرد که آن را اصطلاحاً یک ابر رویه گوییم.

Subject
Date

مثال: ۱) تابع مساحت یک مستطیل $S = x \times y$ یک تابع دو متغیره است.
۲) حجم مکعب مستطیل $V = x \times y \times z$ یک تابع سه متغیره است.
۳) حجم مخروط $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ یک تابع دو متغیره است.

مثال ۱: $\begin{cases} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ z = f(x,y) = \ln(|x| - |y|) \end{cases}$ یک تابع دو متغیره است.

مثال ۲: $\begin{cases} f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ w = f(x,y,z) = \dfrac{2}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}} \end{cases}$

۱) دامنه $D_f = \{(x,y) \mid |x| - |y| > 0\} = \{(x,y) \mid |x| > |y|\}$

$|x| = |y|$ روی نیمسازها

اگر در D_f نقاط (x,y) به نیمسازها نزدیک شوند آنگاه

$|x| - |y| \rightsquigarrow 0^+$

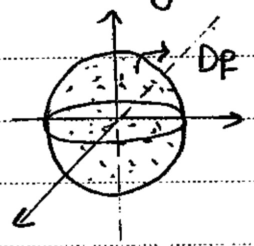
$\ln(|x| - |y|) \rightsquigarrow \ln(0^+) = -\infty$

و اگر در D_f نقاط (x,y) از نیمسازها دور شویم آنگاه:

$|x| - |y| \rightsquigarrow +\infty \longrightarrow \ln(|x| - |y|) \rightsquigarrow \ln(+\infty) = +\infty$ درنتیجه $R_f = (-\infty, +\infty)$

۲) دامنه $D_f = \{(x,y,z) \mid 9 - x^2 - y^2 - z^2 > 0\} = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$

اگر نقاط D_f (x,y,z) به کره نزدیک‌تر شوند آنگاه: $9 - x^2 - y^2 - z^2 \rightsquigarrow 0^+ \rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}} \rightsquigarrow +\infty$

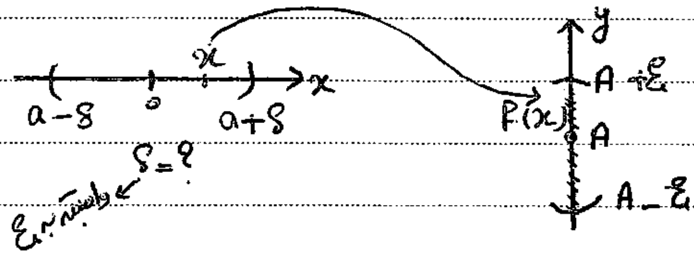


Subject
Date

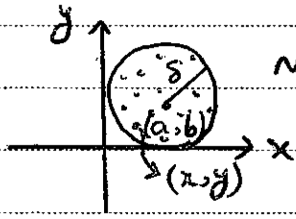
حد و پیوستگی در توابع چند متغیره :

منظور از اینکه : $\lim_{x \to a} f(x) = A$

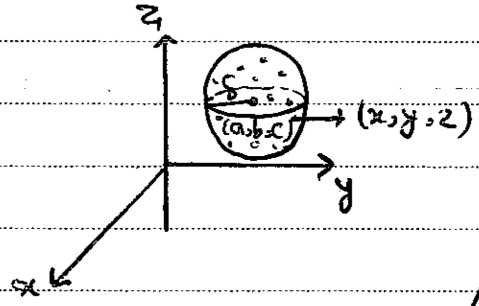
یعنی $\rightarrow \forall \varepsilon > 0 , \exists \underset{(\varepsilon)}{\delta} > 0 , \forall x \left(0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right)$



مفهوم همسایگی برای نقاط دو بعدی و سه بعدی :



$N_\delta (a,b)$ $\quad \forall (x,y) \in N_\delta (a,b) \rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$



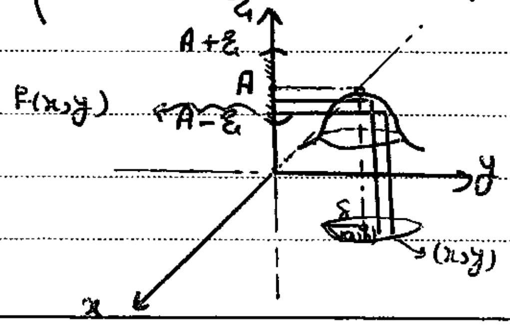
$\forall (x,y,z) \in N_\delta (a,b,c) \rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta$

حال منظور از اینکه $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = A$

یعنی : $\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 , \forall (x,y) \left(0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon \right)$

دلخواه

δ وابسته به ε و باید شناخته شود



Subject
Date

مثال) اگر $f(x,y)=4x+2y-3$ با تعریف ریاضی نشان دهید که

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=5$$

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_{(\varepsilon)}>0,\ \forall (x,y)\ \left(0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta \to |f(x,y)-5|<\varepsilon\right)$$

($\varepsilon>0$ را دلخواه در نظر می‌گیریم)

$$|f(x,y)-5|<\varepsilon \to |4x+2y-8|<\varepsilon \to |4(x-1)+2(y-2)|<\varepsilon \to$$

$$|4(x-1)+2(y-2)| \le \underbrace{4|x-1|+2|y-2|<\varepsilon}_{1}$$

از طرف دیگر:

$$4|x-1|\le 4\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<4\delta \qquad \underbrace{4|x-1|+2|y-2|<6\delta}_{2}$$

$$2|y-2|\le 2\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<2\delta$$

$$1,2 \rightsquigarrow 6\delta\le\varepsilon \to \delta\le \frac{1}{6}\varepsilon$$

شعاع همسایگی به مرکز نقطه $A(1,2)$

مثال) اگر $f(x,y)=2x^2+y^2-4x+2y$ نشان دهید $\lim_{(x,y)\to(0,-1)} f(x,y)=-1$

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_{(\varepsilon)}>0,\ \forall (x,y)\ \left(0<\sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2}<\delta \to |f(x,y)+1|<\varepsilon\right)$$

$\varepsilon>0$ دلخواه در نظر می‌گیریم.

$$|f(x,y)+1|<\varepsilon \to |2x^2+y^2-4x+2y+1|<\varepsilon \to |2(x-0)^2+(y+1)^2-4x|<\varepsilon \to$$

$$|2(x-0)^2+(y+1)^2-4(x-0)|<\varepsilon \to |2(x-0)^2+(y+1)^2-4(x-0)| \le \underbrace{2|(x-0)^2|+|(y+1)^2|+4|x-0|<\varepsilon}_{1}$$

از طرف دیگر:

$$4|x-0|\le 4\sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2}<4\delta \to |y+1|\le \sqrt{\quad ''\quad}<\delta$$

$$2|(x-0)^2|\le 2\left((x-0)^2+(y+1)^2\right)<2\delta^2 \to |(y+1)^2|\le (\ ''\ )<\delta^2$$

$$\underbrace{2|(x-0)^2|+|(y+1)^2|+4|x-0|<2\delta^2+4\delta}_{2} \qquad 1,2 \to 3\delta^2+4\delta\le\varepsilon \to$$

$3\delta^2+4\delta-\varepsilon\le 0$ ، یک معادله درجه ۲ برحسب δ

$$\Delta=b^2-4ac=16+12\varepsilon \qquad \delta=\frac{-4\pm\sqrt{16+12\varepsilon}}{6}$$

δ	δ_1 (منفی)		0		δ_2 (مثبت)	
	+	0	−	−	0	+

جواب

$$0<\delta\le\delta_2$$

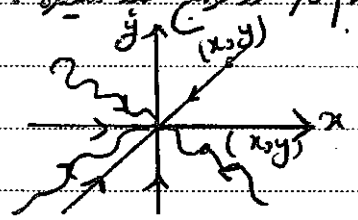
$$0<\delta\le\frac{-4+\sqrt{16+12\varepsilon}}{6}$$

شعاع همسایگی به مرکز $(0,-1)$

Subject
Date

بررسی وجود حد در حالت مبهم $\frac{0}{0}$ در توابع چند متغیره :

اگر مبهم $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{0}{0}$



برای رفع ابهام از دو روش استفاده می‌شود.

روش اول : استفاده از سه مسیر خاص.

الف) $y=mx$

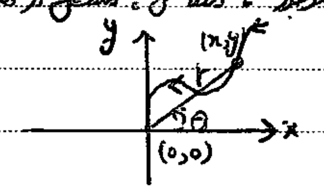
ب) $y=kx^2$

پ) $x=ky^2$

اگر در روی هر سه مسیر مقدار حد موجود ، متناهی ، مستقل از مسیر و هم برابر باشد آن‌گاه می‌گوییم حد تابع در مبداء موجود است.

مهم روش دوم : (روش قطبی)

اگر $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{0}{0}$



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

حال اگر در شکل قطبی مقدار $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ حد موجود ، متناهی و مستقل از زاویه θ باشد آن‌گاه گوییم حد تابع در مبداء موجود است.

اگر: مبهم $\lim_{(x,y)\to(a,b)\neq \text{مبداء}} f(x,y) = \frac{0}{0}$

تذکر : در این حالت ابتدا با روابط $\begin{cases} x = X+a \\ y = Y+b \end{cases}$ نقطه (a,b) را به مبداء انتقال داده و پس از روش‌های مذکور استفاده می‌کنیم.

مثال) وجود حد تابع را در مبداء بررسی کنید.

$$f(x,y) = \frac{4x^3 + xy^2}{x^2 + 2y^2} = \frac{0}{0}$$

قطبی / $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow \lim_{r\to 0} \frac{4r^3\cos^3\theta + r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta} \overset{0/0}{=} \lim_{r\to 0} \frac{4r\cos^3\theta + r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta} = 0$ مستقل از زاویه θ است

لذا حد تابع برابر صفر است.

روش اول (مسیرهای خاص) // الف) $y=mx$ روی مسیر $\to \lim_{x\to 0}\frac{4x^3+m^2x^3}{x^2+2m^2x^2} = \frac{0}{0} \to \lim \frac{4x+m^2x}{1+2m^2} = \frac{0}{1+2m^2}$

$=0 \to$ مستقل از مسیر

ب) $y=kx^2$ روی مسیر $\to \lim_{x\to 0}\frac{4x^4+k^2x^5}{x^2+2k^2x^4} = \frac{0}{0} \to \lim_{x\to 0}\frac{4x+k^2x^3}{1+2k^2x^2} = \frac{0}{1} = 0$ مستقل از مسیر

پ) $x=ky^2$ روی مسیر $\to \lim_{y\to 0}\frac{4k^3y^6+ky^4}{k^2y^4+2y^2} \; \frac{0}{0} = \lim_{y\to 0}\frac{4k^3y}{k^2y^2+2}$

$f(x,y)=\dfrac{e^{3xy}+\tan(y^2)+x^2-2}{xy+y^2}$ اگر

وجود حد تابع را در نقطه $A\Big|_0^1$ بررسی کنید.

فرمول‌های هم‌ارزی. $\begin{cases} e^{3xy}\sim 1+3xy \\ \tan(y^2)\sim y^2 \end{cases} \longrightarrow f(x,y)=\dfrac{3xy+y^2+x^2-1}{xy+y^2} \; \underset{\text{مبهم}}{\frac{0}{0}} \xrightarrow{\text{انتقال}} \begin{cases} x=X+1 \\ y=Y+0 \end{cases}$

$(x,y)\to(1,0)$

$\lim_{(X,Y)\to(0,0)}\dfrac{3(X+1)Y+Y^2+(X+1)^2-1}{(X+1)Y+Y^2} = \lim \dfrac{3r^2\cos\theta\sin\theta+3r\sin\theta+r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta+2r\cos\theta}{r^2\cos\theta\sin\theta+r\sin\theta+r^2\sin^2\theta} = \frac{0}{0}$

روش قطبی

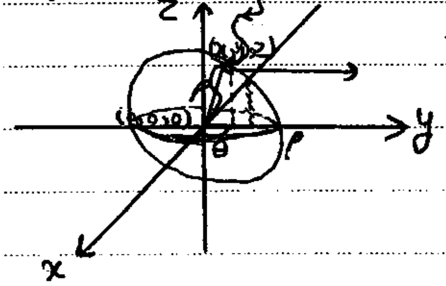
$\begin{cases} X=r\cos\theta \\ Y=r\sin\theta \end{cases}$ از r فاکتور $\dfrac{3\sin\theta+2\cos\theta}{\sin\theta} = 3+2\cot\theta$ وابسته به زاویه

θ است لذا تابع در نقطه $A\Big|_0^1$ حد ندارد.

رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$ در تابع سه متغیره:

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \frac{0}{0}$ مبهم

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{\rho\to 0} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$



$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$

حال اگر در شکل کروی مقدار حد وجود داشته، مشخص و مستقل از هر دو زاویه φ و θ باشد گوئیم تابع در مبدا حد دارد.

N

Subject
Date

مثال) آیا تابع در نقطه $A\begin{vmatrix}0\\2\\1\end{vmatrix}$ حد دارد؟

$$f(x,y,z)=\frac{\operatorname{Arctan}(xz)+y^2-4}{x^2+y^2+z^2-5}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{(x,y,z)\to(0,2,1)}\frac{xz+y^2-4}{x^2+y^2+z^2-5}\overset{0/0}{=}$$

$$\xrightarrow{\text{انتقال}}\begin{cases}x=X+0\\y=Y+2\\z=Z+1\end{cases}\quad\lim_{(X,Y,Z)\to(0,2,1)}\frac{X(Z+1)+(Y+2)^2-4}{X^2+(Y+2)^2+(Z+1)^2-5}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^2\sin\varphi\cos\theta+\rho\sin\varphi\cos\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+4\rho\sin\varphi\sin\theta}{\rho^2+4\rho\sin\varphi\sin\theta+2\rho\cos\varphi}\overset{0/0}{=}$$

$$\frac{\sin\varphi\cos\theta+4\sin\varphi\sin\theta}{4\sin\varphi\sin\theta+2\cos\varphi}\longrightarrow$$ وابسته به مقادیر φ و θ است

لذا تابع حد ندارد

تمرین: آیا تابع زیر در مبدا پیوسته است؟

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y}{x^2+3y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[4pt]\sin(xy) & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مقدار تابع در مبدا $f(0,0)=\sin(0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y}{x^2+3y^2}\overset{0/0}{=}\xrightarrow{\text{قطبی}}\lim_{r\to0}\frac{4r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^2\theta+3r^2\sin^2\theta}$$

Subject
Date

مشتقات جزئی در توابع چند متغیره :

یادآوری : $y=f(x)$ تابع یک متغیره

نمو متغیر : Δx

نمو تابع y : $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{تابع مشتق}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \underset{\text{شیب خط مماس}}{m} = \tan(\alpha)$$

α زاویه بین خط مماس و محور x ها

حال تابع دو متغیره $z = f(x,y)$

$\Delta x \to$ نمو متغیر

$\Delta y \to$ نمو متغیر y

نمو جزئی تابع نسبت به متغیر x : $\Delta z_x = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$

" " " " y : $\Delta z_y = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$

نمو کلی تابع $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

مشتق جزئی نسبت به متغیر x : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} = f_x = z_x = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta y} =$

تابع مشتق جزئی نسبت به x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} = m_1 = \tan(\alpha)$$

m_1: شیب صفحه مماس بر رویه ی تابع در جهت محور x ها

α: زاویه بین صفحه مماس و محور x ها

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b} = m_2 = \tan(\beta)$$

m_2: شیب صفحه مماس بر رویه ی تابع در جهت محور y ها

β: زاویه بین صفحه مماس و محور y ها

Subject
Date

مثال) اگر $f(x,y)=x^2y-y^2+2x-3y$ با تعریف ریاضی نشان دهید که

الف/ $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xy+2$

ب/ $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2-2y+\cancel{2x}-3$

ج/ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,2)=-2$

د/ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,0)=6$

الف/ $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left((x+\Delta x)^2y-y^2+2(x+\Delta x)-3y\right)-\left(x^2y-y^2+2x-3y\right)}{\Delta x}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2x(\Delta x)y+(\Delta x)^2y+2\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(2xy+(\Delta x)y+2\right)$

$2xy+2$

ج/ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,2)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x,2)-f(-1,2)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(2x^2-4+2x-6)-(-10)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+2x}{x+1}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to -1}2x=-2=\tan(\alpha)$

د/ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(3,y)-f(3,0)}{y-0}$

مثال) اگر $f(x,y,z)=e^{xyz}+y^{xz}+x^{yz}+\tan(xz)$ مطلوبست محاسبه‌ی:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=yze^{xyz}+zy^{xz}\ln y+yzx^{yz-1}+z\left(1+\tan^2(xz)\right)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=xze^{xyz}+xzy^{xz-1}+zx^{yz}\ln x$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}=xye^{xyz}+xy^{xz}\ln y+yx^{yz}\ln x+x\left(1+\tan^2(xz)\right)$

Subject
Date

مشتقات جزئی مراتب بالاتر:

مشتق جزئی مرتبه دوم نسبت به x

$$\frac{\partial f}{\partial x} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \longrightarrow$$

مشتق جزئی مرتبه دوم نسبت به x و y

$$\frac{\partial f}{\partial x} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} \longrightarrow$$

مشتق جزئی مرتبه دوم نسبت به y و x

$$\frac{\partial f}{\partial y} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \longrightarrow$$

" " " y

$$\frac{\partial f}{\partial y} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} \longrightarrow$$

قضیه: اگر هر سه تابع $f(x,y)$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه‌ای مانند $A\Big|_b^a$ پیوسته باشند آن گاه:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

مشتق جزئی مرتبه ۴ام نسبت به z و y و z و x

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial z \partial y \partial z} = f_{zyzx} = f_{zyxz} = f_{zxyz} = f_{zxzy} = f_{zzyx}$$

مثال) اگر $f(x,y,z) = \cos(xy) + \cos(yz) + \ln(xz)$ مطلوبست محاسبه:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial z \partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y\sin(xy) + \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin(xy) - z\sin(yz) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -y\sin(yz) + \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin(xy) - xy\cos(xy) + 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\sin(xy) - xy\cos(xy) + 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} = f_{yzx} = f_{zyx} = 0 \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial z \partial y \partial x} = f_{xzyx} = 0$$

Subject
Date

دیفرانسیل‌های جزئی و کلی در توابع چند متغیره :

یادآوری :

$y = f(x)$

دیفرانسیل تابع $\underbrace{dy = f'(x) \cdot \Delta x}$ $= f'(x) \cdot dx$

(تذکر : چون برای متغیر x ، $\Delta x = dx$)

$\rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx}$

کاربرد اول : محاسبه اندازه‌ی خطای مطلق : $|\Delta y - dy|$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ تغییرات تابع

دیفرانسیل تابع

کاربرد دوم : اگر $\Delta x \to 0$ آنگاه : $|\Delta y - dy| \rightsquigarrow 0$ در نتیجه $\Delta y \approx dy$

$\hookrightarrow f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ فرمول محاسبه مقادیر تقریبی

حال در تابع دو متغیره‌ی : $z = f(x,y)$

دیفرانسیل جزئی نسبت به x : $dz_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot dx$

y " " " $dz_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y = \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$

دیفرانسیل کامل : $dz = dz_x + dz_y = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy$

اندازه‌ی خطای دوم $= |\Delta z - dz|$

(خطای مجموع)

تحول تابع

دیفرانسیل کل

و اگر $\begin{cases} \Delta x \rightsquigarrow 0 \\ \Delta y \rightsquigarrow 0 \end{cases}$ آنگاه : $|\Delta z - dz| \rightsquigarrow 0$ در نتیجه $\Delta z \approx dz$

$\Rightarrow f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y$

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y \rightarrow$ فرمول محاسبه مقادیر تقریبی در تابع دو متغیره

Subject
Date

مثال: اگر $f(x,y)=e^{xy}+\tan(xy)+\ln(1+xy)$ در نقطه $A\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ و تغییرهای x و y به ترتیب ۰٫۲ و ۰٫۱- باشند دیفرانسیل های جزئی و کلی تابع را به دست آورید.

$$dz_x=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x=\left(ye^{xy}+\frac{y}{\cos^2(xy)}+\frac{y}{1+xy}\right)\Delta x=3\times 0/2=0/6$$

$$dz_y=\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y=\left(xe^{xy}+\frac{x}{\cos^2(xy)}+\frac{x}{1+xy}\right)\cdot\Delta y=0\times(-0/1)=0$$

دیفرانسیل کلی $=dz=dz_x+dz_y=0/6$

$$f(x)=\frac{3x+y}{x-y}\qquad A\begin{vmatrix}3\\2\end{vmatrix}\quad \text{و}\quad \Delta x=0/3,\ \Delta y=-0/2$$

دیفرانسیل کلی $dz=dz_x+dz_y=0/1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y=\left(\frac{3x-3y-3x-y}{(x-y)^2}\right)\Delta x+\left(\frac{x-y+3x+y}{(x-y)^2}\right)\Delta y=$$

$$-8\times 0/3+12\times(-0/2)=-2/4-2/4=-4/8$$

تغییر کلی $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=f(3/3,1/8)-f(3,2)=$

$$\frac{9/9+1/8}{3/3-1/8}-\frac{9+2}{1}=\frac{11/7}{1/5}-\frac{11}{1}=\frac{117}{15}-11=\frac{-48}{15}=\frac{-16}{5}$$

اندازه خطای دوره $=\left|-\frac{16}{5}+\frac{48}{10}\right|=1/6$

مثال) با استفاده از دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sqrt{11\times 15}$ را به دست آورید.

$$f(x,y)=\sqrt{xy}\longrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y}{2\sqrt{xy}}\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{2\sqrt{xy}}\end{cases}$$

$$\sqrt{11\times 15}=\sqrt{(\underbrace{9}_{x}+\underbrace{2}_{\Delta x})\times(\underbrace{16}_{y}\underbrace{-1}_{\Delta y})}\approx\sqrt{9\times 16}+\frac{16}{2\sqrt{9\times16}}\times 2+\frac{9}{2\sqrt{9\times 16}}\times(-1)\approx$$

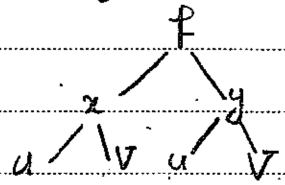
$$12+\frac{4}{3}-\frac{3}{8}=12+\frac{23}{24}=12+0/84=12/84$$

Subject

Date

سوال اضافی: هرگاه $W=f(x,y)$ ، $\begin{cases} x=e^{u}\cos(v) \\ y=e^{u}\sin(v) \end{cases}$ ثابت کنید که:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=e^{-2u}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]$$



$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\times\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot e^{u}\cos(v)+\frac{\partial f}{\partial y}\times e^{u}\sin(v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\times\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\left(-e^{u}\sin(v)\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\times\left(e^{u}\cos(v)\right)$$

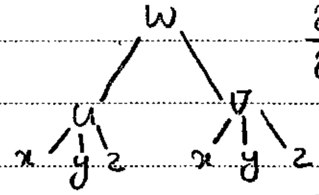
$$\Rightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\cdot e^{2u}$$

$$\xrightarrow{\times e^{-2u}} e^{-2u}\cdot\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

اگر $f=(u,v)$ تابعی باشد ، $\begin{cases} u=\frac{1}{2}(x^2-y^2) \\ v=xy \end{cases}$ در رابطه $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$ صدق کند

نشان دهید $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

اگر $w=f\left[\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right),\left(\frac{z}{y^{\beta}}\right)\right]$ نشان دهید $x\frac{\partial w}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial w}{\partial y}+\alpha\beta z\frac{\partial w}{\partial z}=0$



$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\alpha y}{\alpha+1}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}$$

$$x\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{-\alpha y}{x^{\alpha}}\cdot\frac{\partial w}{\partial u} \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x^{\alpha}}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{-\beta z}{y^{\beta+1}}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\alpha y\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\alpha y}{x^{\alpha}}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\alpha\beta z}{y^{\beta}}\cdot\frac{\partial w}{\partial v} \quad (2)$$

Subject
Date

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial z}=0+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\alpha\beta z\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\alpha\beta z}{y^{\beta}}\cdot\frac{\partial w}{\partial v} \quad (3)$$

$$(1)+(2)+(3)=0$$

مشتق ضمنی در توابع چند متغیره:

یادآوری: اگر y تابعی از x باشد، $F(x,y)=0$ آنگاه y را تابع ضمنی از x گوییم.

$$y'_x=\frac{-F'_x}{F'_y}=\frac{-\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

حال اگر z تابعی از دو متغیر x و y باشد، $F(x,y,z)=0$ آنگاه z را تابع ضمنی دو متغیره گوییم.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

و اگر w تابعی از سه متغیره x و y و z باشد، $F(x,y,z,w)=0$ آنگاه w را تابع ضمنی سه متغیره گوییم.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial w}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial w}}\ ,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial w}}$$

مثال:

اگر w تابعی از x و y و z باشد و $F:\ \sqrt{xz-\frac{y}{w}}+x^{yz}+z^{xw}-y^{2}\cdot\ln\left(x-\frac{w}{z}\right)=0$

مطلوب است: $\frac{\partial w}{\partial z}$ ، $\frac{\partial w}{\partial y}$ ، $\frac{\partial w}{\partial z}$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial w}}=\frac{-\left[\frac{z}{2\sqrt{xz-\frac{y}{w}}}+yz\cdot x^{yz-1}+w\cdot z^{xw}\cdot\ln(z)-\frac{y^{2}}{\left(x-\frac{w}{z}\right)}\right]}{\left[\frac{\frac{y}{w^{2}}}{2\sqrt{xz-\frac{y}{w}}}+0+x\cdot z^{xw}\cdot\ln(z)+\frac{\frac{y^{2}}{z}}{\left(x-\frac{w}{z}\right)}\right]}$$

Subject
Date

مثال) اگر یک مخروط به شعاع ۳cm و ارتفاع ۶cm از شعاع آن ۰٫۲cm کاسته شود و به ارتفاع آن ۰٫۴cm اضافه شود، اندازه تغییرات حجم مخروط را با استفاده از دیفرانسیل به دست آورید.

حجم مخروط $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = F(R,h)$ تابع دو متغیره

$$\underbrace{F(R+\Delta R, h+\Delta h)}_{\text{حجم پس از تغییرات}} \simeq \underbrace{F(R,h)}_{\text{حجم اولیه مخروط}} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial R}\cdot\Delta R + \frac{\partial F}{\partial h}\cdot\Delta h}_{\text{اندازه تغییرات حجم مخروط}}$$

اندازه تغییرات حجم مخروط = دیفرانسیل حجم = $\frac{\partial F}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial F}{\partial h}\Delta h$

$$\left(\tfrac{2}{3}\pi R h\right)\Delta R + \left(\tfrac{1}{3}\pi R^2\right)\Delta h = \left(\tfrac{2}{3}\pi\times3\times6\right)(-0.2) + \left(\tfrac{1}{3}\pi 3^2\right)\times0.4 = -2.4\pi + 1.2\pi = -1.2\pi$$

← به اندازه‌ی 1.2π از حجم مخروط کم شده.

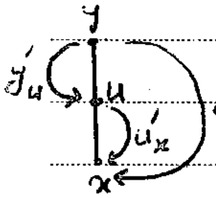
x و y تعداد کالاهای تولیدی نوع اول و دوم ، $F(x,y)$ تابع تولید

سود یا زیان $dF = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y$

قواعد زنجیره‌ای در مشتقات جزئی:

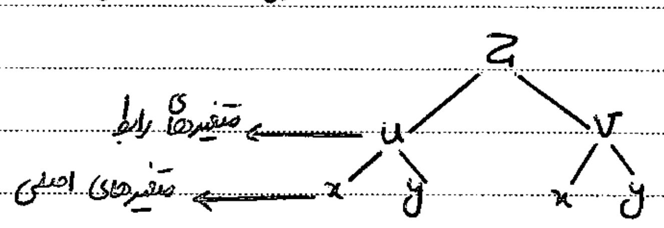
یادآوری: اگر $y = f(u)$ ، $u = g(x)$

آنگاه: $y'_x = y'_u \times u'_x = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$



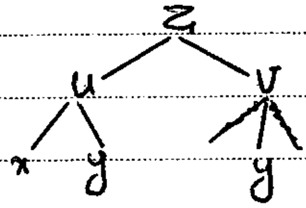
حال در توابع چند متغیره قاعده‌ی زنجیره‌ای در حالت‌های زیر قابل بحث است:

حالت الف: اگر $z = f(u,v)$ ، $\begin{cases} u = g(x,y) \\ v = h(x,y) \end{cases}$



$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

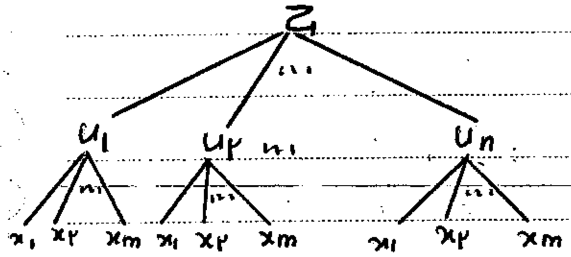
حالت ب: اگر $z=f(u,v)$ ، $\begin{cases} u=g(x,y) \\ v=h(y) \end{cases}$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\times\dfrac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\dfrac{\partial z}{\partial v}\times\dfrac{\partial v}{\partial x}}_{0} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\times\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\times\dfrac{dv}{dy} \end{cases}$$

در حالت کلی: اگر $z=f(u_1,u_2,\dots,u_n)$

و $u_i=g(x_1,x_2,\dots,x_m)$ ، $1\leqslant i\leqslant n$

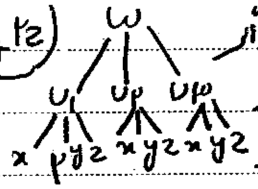


$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\times\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\times\frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\times\frac{\partial u_n}{\partial x_j}$$

$1\leqslant j\leqslant m$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial u_k}\times\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

سوالات امتحانی: اگر $w=f(\underbrace{2x+4y-6z}_{u_1},\underbrace{2y+4z-6x}_{u_2},\underbrace{kx-6y+2z}_{u_3})$ مقدار k را طوری بیابید که



$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$w=f(u_1,u_2,u_3)$

$$\begin{cases} u_1=2x+4y-6z \\ u_2=2y+4z-6x \\ u_3=kx-6y+2z \end{cases}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u_1}\times\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u_2}\times\overset{-6}{\frac{\partial u_2}{\partial x}}+\frac{\partial w}{\partial u_3}\times\overset{k}{\frac{\partial u_3}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u_1}\times\overset{4}{\frac{\partial u_1}{\partial y}}+\frac{\partial w}{\partial u_2}\times\overset{2}{\frac{\partial u_2}{\partial y}}+\frac{\partial w}{\partial u_3}\times\overset{-6}{\frac{\partial u_3}{\partial y}}$$

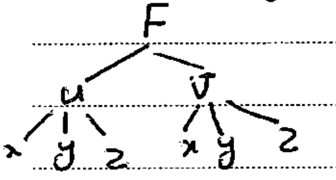
$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial u_1}\times\overset{-6}{\frac{\partial u_1}{\partial z}}+\frac{\partial w}{\partial u_2}\times\overset{4}{\frac{\partial u_2}{\partial z}}+\frac{\partial w}{\partial u_3}\times\overset{2}{\frac{\partial u_3}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0+0+(k-4)\frac{\partial w}{\partial u_3}=0 \longrightarrow k=4$$

Subject
Date

استفاده از تابع زنجیره ای در مشتقات ضمنی :

اگر z تابعی از y باشد و $F(u,v)=0$ و u و v توابعی برحسب x و y و z باشند آنگاه:



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{-\left[\frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x}\right]}{\left[\frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial z}\right]}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{-\left[\frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial y}\right]}{\left[\frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial z}\right]}$$

مثال) اگر z تابعی از x و y باشد و $F=\left(y+\frac{z}{x}, x+\frac{z}{y}\right)=0$ حاصل عبارت $A=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ را بدست آورید.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{-\left[\frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{-z}{x^2}+\frac{\partial F}{\partial v}\times 1\right]}{\left[\frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{1}{x}+\frac{\partial F}{\partial v}\times\frac{1}{y}\right]}\rightarrow x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{z}{x}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}-x\cdot\frac{\partial F}{\partial v}}{1/x\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+1/y\,\frac{\partial F}{\partial v}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{-\left[\frac{\partial F}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{-z}{y^2}\right]}{1/x\,\frac{\partial F}{\partial u}}$$

Subject
Date

حالت ترکیبی در مشتقات ضمنی :

اگر u و V هر دو تابعی از x و y باشند.

$$F(x,y,u,V)=0$$
$$G(x,y,u,V)=0$$

برای محاسبه‌ی $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$ ، $\frac{\partial V}{\partial x}$ ، $\frac{\partial V}{\partial y}$

ابتدا از هر دو معادله‌ی دستگاه $\begin{cases} F(x,y,u,V)=0 \\ G(x,y,u,V)=0 \end{cases}$ مشتق جزئی نسبت به x گرفته و با حل دستگاه $\frac{\partial V}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$ محاسبه می‌شوند

بار دیگر " " " y به " " " " " " . $\frac{\partial V}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$

مثال) اگر u و V توابعی از x و y باشند و $\begin{cases} 4xy\cdot u - y^2\cdot V = x \\ x^2\cdot u + xy\cdot V = y \end{cases}$ مطلوبست محاسبه‌ی $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$ ، $\frac{\partial V}{\partial x}$ ، $\frac{\partial V}{\partial y}$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \begin{cases} 4y\cdot u + 4xy\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - 0 - y^2\cdot\frac{\partial V}{\partial x} = 1 \\ 2x\cdot u + x^2\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + y\cdot V + xy\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x\times \\ y\times \end{matrix}\begin{cases} 4xy\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\cdot\frac{\partial V}{\partial x} = -4y\cdot u + 1 \\ x^2\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial V}{\partial x} = -2x\cdot u + y\cdot V \end{cases} \longrightarrow 5x^2y\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy\cdot u + x + y^2\cdot V \longrightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-6xy\cdot u + x + y^2\cdot V}{5x^2y}$$

با جایگذاری $\frac{\partial u}{\partial x}$ در دستگاه می‌توان $\frac{\partial V}{\partial x}$ را نیز به دست آورد.

$$\begin{cases} 4xy\cdot u - y^2\cdot V = x \\ x^2\cdot u + xy\cdot V = y \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \begin{cases} 4x\cdot u + 4xy\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - 2y\cdot V - y^2\cdot\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ 0 + x^2\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + x\cdot V + xy\cdot\frac{\partial V}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{matrix} x\times \\ y\times \end{matrix}\begin{cases} 4xy\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - y^2\cdot\frac{\partial V}{\partial y} = -4x\cdot u + 2y\cdot V \\ x^2\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + xy\cdot\frac{\partial V}{\partial y} = -xV + 1 \end{cases} \longrightarrow 5x^2y\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = -4x^2\cdot u + xyV + y \longrightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-4x^2\cdot u + xy\cdot V + y}{5x^2y}$$

با جایگذاری $\frac{\partial u}{\partial y}$ در دستگاه می‌توان $\frac{\partial V}{\partial y}$ را نیز به دست آورد.

Subject
Date

تمرین: اگر z تابعی از x و y باشد و x و y هر دو تابعی از r و s باشند و

$$\sqrt{xz} + \sqrt{\frac{y}{z}} = 0$$

$$\sin(sx) + \cos(ry) = 0$$

$$\ln(rx) + e^{sy} = 0$$

مطلوب است: $\frac{\partial z}{\partial r}$ ، $\frac{\partial z}{\partial s}$

$$z \to x, y \qquad x \to r, s \qquad y \to r, s$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial s}$$

از فرمول مشتق ضمنی تابع دو متغیره

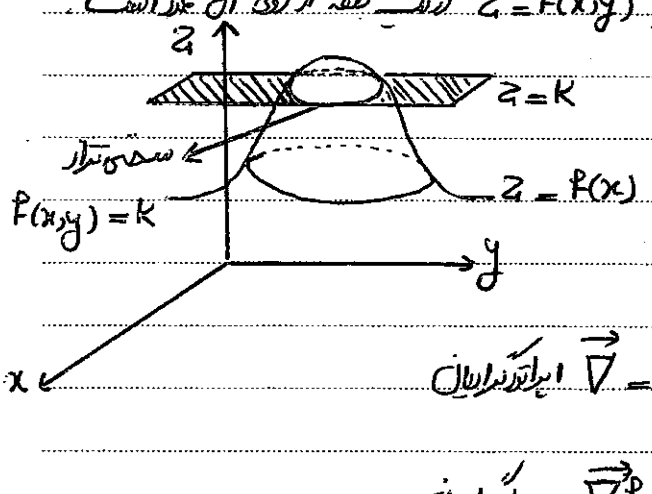
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

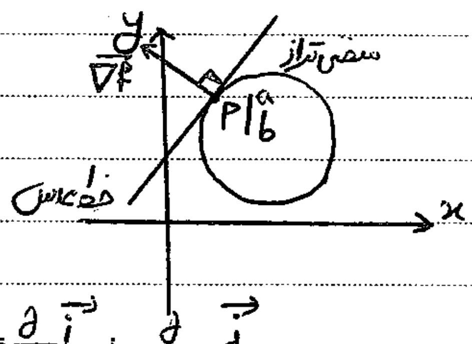
از معادلات ترکیبی

مشتق سوئی (مشتق جهتی) در رویه‌ها:

تعریف بردار گرادیان: Gradian Vector

بردار گرادیان برداری است که بر سطح تراز رویه $z = f(x,y)$ در یک نقطه از روی آن عمود است.





اپراتور گرادیان $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$

بردار گرادیان $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

Subject
Date

نتیجه: با توجه به اینکه رویه‌ها توسط منحنی‌های تراز ساخته می‌شوند پس می‌توان گفت که بردار گرادیان بر کل رویه نیز عمود است.

مثال) اگر $f(x,y)=e^{xy}+\sin(2xy)+3x+4y$ در نقطه $A\left|\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right.$ بردار گرادیان را بدست آورید.

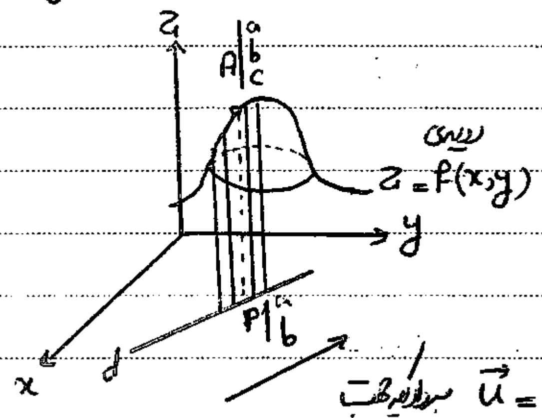
بردار گرادیان $\vec{\nabla} f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

Subject

Date

مشتق سوئی (جهتی):

اگر بخواهیم اندازه‌ی تغییرات سطح $z=f(x,y)$ را نقطه $P\begin{vmatrix}a\\b\end{vmatrix}$ و در راستای برداری مانند $u=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ بدست آوریم به این عمل مشتق گیری سوئی گوییم.



بردار جهت $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$, $|\vec{u}|=1$

مشتق سوئی: $(Df)_{P,\vec{u}}=\left(\dfrac{df}{dt}\right)_{P,\vec{u}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(a,b)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+u_1t)-f(a,b)}{t}$

معادله خط راستا d : $\begin{cases}x=a+u_1t\\ y=b+u_2t\end{cases}$ $\quad$ مشتق سوئی $\in \mathbb{R}$

مشتق سوئی: $\left(\dfrac{df}{dt}\right)_{P,\vec{u}}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\times\underbrace{\dfrac{dx}{dt}}_{u_1}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\times\underbrace{\dfrac{dy}{dt}}_{u_2}\right)_{P,\vec{u}}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\times u_1+\dfrac{\partial f}{\partial y}\times u_2\right)_{P,\vec{u}}=$

$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right)\underset{\text{ضرب داخلی}}{\cdot}\left(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}\right)=\vec{\nabla f}\underset{\text{ضرب داخلی}}{\cdot}\vec{u}$

مثال) مشتق سوئی تابع $f(x,y)=2x^2+y^2-xy$ را در نقطه $A\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ در جهت بردار $\vec{V}=\vec{i}-\vec{j}$ به دست آورید.

بردار جهت $\vec{u}=\dfrac{\vec{V}}{|\vec{V}|}=\dfrac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

بردار گرادیان $\vec{\nabla f}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}=(4x-y)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}=4\vec{i}-\vec{j}$

مشتق سوئی $=\vec{\nabla f}\cdot\vec{u}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

مشتق سوئی: از تعریف ریاضی $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\,0-\frac{\sqrt{2}}{2}t)-f(1,0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left[2(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2+(0-\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2-(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t)(0-\frac{\sqrt{2}}{2}t)\right]-2}{t}$

$\frac{0}{0}\to \text{HOP}\quad \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2\sqrt{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t)-t-\frac{\sqrt{2}}{2}(0-\frac{\sqrt{2}}{2}t)+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t)}{1}=\dfrac{2\sqrt{2}-0-0+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Subject

Date

مثال) مشتق سوئی تابع $f(x,y,z)=e^{xy}+e^{yz}+\ln(xz)+x+2z$ را در نقطه $A\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}$ و در جهت بردار عمود بر صفحه $2x-y+2z=4$ محاسبه کنید.

بردار نرمال صفحه $\vec{n}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k} \rightarrow |\vec{n}|=\sqrt{4+1+4}=3$

بردار یکه جهت $\vec{u}=\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}$

بردار گرادیان $\vec{\nabla f}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}=(ye^{xy}+\frac{1}{x}+1)\vec{i}+(xe^{xy}+ze^{yz})\vec{j}+$
$(ye^{yz}+\frac{1}{z}+2)\vec{k}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$

مشتق سوئی : $\vec{\nabla f}\cdot\vec{u}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}+\frac{6}{3}=3$

خواص هندسی مشتق سوئی :

مشتق سوئی : $\vec{\nabla f}\cdot\vec{u}=|\vec{\nabla f}||\vec{u}|\cos(\theta)=|\vec{\nabla f}|\cos(\theta)$

حالت الف) اگر $\cos\theta=1$ آنگاه $\theta=0°$ و بردارهای $\vec{\nabla f}$ و $\vec{u}$ موازی و هم جهت اند در این حالت مقدار مشتق سوئی ماکزیمم و برابر با $|\vec{\nabla f}|$ است.

به عبارت دیگر: در جهت بردار یکه $\vec{u}=\dfrac{\vec{\nabla f}}{|\vec{\nabla f}|}$ مشتق سوئی Max می شود.

حالت ب) اگر $\cos\theta=-1$ آنگاه $\theta=\pi$ و بردارهای $\vec{\nabla f}$ و $\vec{u}$ در خلاف جهت یکدیگرند و در این حالت مشتق سوئی کمترین مقدار برابر $-|\vec{\nabla f}|$ است.

به عبارت دیگر: در جهت بردار یکه $\vec{u}=-\dfrac{\vec{\nabla f}}{|\vec{\nabla f}|}$ مشتق سوئی Min می شود.

حالت پ) اگر $\cos\theta=0$ آنگاه $\theta=\frac{\pi}{2}$ و $\vec{u}\perp\vec{\nabla f}$ در این حالت مشتق سوئی برابر صفر است.

به عبارت دیگر: در جهت بردار یکه عمود بر $\vec{\nabla f}$ مشتق سوئی صفر می شود.

مثال) اگر $f(x,y,z)=\sin(xy)+\cos(yz)+xy+y^2-z$ در نقطه $A\begin{vmatrix}1\\0\\2\end{vmatrix}$ بردار جهت را طوری بیابید که اولاً، در آن جهت مشتق سوئی Max شود. دوماً: " " Min شود سوماً: " " صفر شود.

بردار گرادیان $\vec{\nabla f}=(y\cos(xy)+y)\vec{i}+(x\cos(xy)-z\sin(yz)+x+2y)\vec{j}+(-y\sin(yz)-1)\vec{k}$
$=0\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

Subject

Date

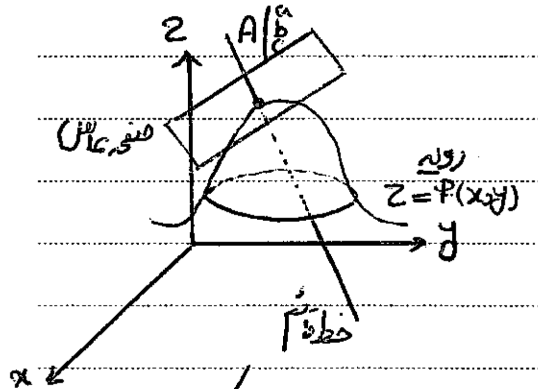
اولاً: Max بردار جهت بیشترین افزایش سوی $\vec{u} = \frac{\vec{\nabla f}}{|\vec{\nabla f}|} = \frac{\vec{\nabla f}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{j} - \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{k}$

دوماً: Min " " $\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla f}}{|\vec{\nabla f}|} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{j} + \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{k}$

ثالثاً: $\vec{V} = ?$ ، $\vec{V} \cdot \vec{\nabla f} = 0$

$\vec{V} = \vec{j} + 2\vec{k} \perp \vec{\nabla f}$

برداری که هیچ افزایش سوی ندهد $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{j} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{k}$



به دست آوردن معادلات صفحه مماس و خط قائم بر یک رویه:

معادله ضمنی رویه $F: f(x,y) - z = 0$

بردار گرادیان: $\vec{\nabla F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_A \vec{i} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_A \vec{j} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_A \vec{k}$

$= \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$

با توجه به تعریف بردار گرادیان این بردار برای خط قائم در حکم بردار هادی است و برای صفحه‌ی مماس در حکم بردار نرمال است

معادلات پارامتری خط قائم
$$\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases} \quad t \in R$$

معادله صفحه مماس: $\alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c) = 0$

مثال) در رویه‌های زیر معادلات صفحه مماس و خط قائم را به دست آورید.

الف) $z = f(x,y) = x^2y^2 + \cos(xy) + 1/y + x$ در نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}0\\2\\1\end{vmatrix}$

ب) $\sqrt{z+xy} + e^{xz} + x^2 - y^2 + z^2 = 3$ در نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}1\\2\\0\end{vmatrix}$

Subject

Date

الف/ معادله ضمنی داریم $F: x^2y^2+\cos(xy)+\frac{1}{y}+x-z=0$

$$(\vec{\nabla}F)_A=\left(2xy^2-y\sin(xy)+1\right)\vec{i}+\left(2x^2y-x\sin(xy)-\frac{1}{y^2}\right)\vec{j}-1\vec{k}=$$

$\vec{i}-\frac{1}{4}\vec{j}-\vec{k}$ بردار گرادیان

معادله پارامتری خط قائم
$$\begin{cases} x=0+t \\ y=2-\frac{1}{4}t \qquad t\in R \\ z=1-t \end{cases}$$

معادله صفحه مماس $: 1(x-0)-\frac{1}{4}(y-2)-1(z-1)=0 \rightarrow x-\frac{1}{4}y-z+\frac{3}{2}=0$

ب/ $$\vec{\nabla}F=\left(\frac{y}{2\sqrt{z+xy}}+ze^{xz}+2x\right)\vec{i}+\left(\frac{x}{2\sqrt{z+xy}}-2y\right)\vec{j}+\left(\frac{1}{2\sqrt{z+xy}}+xe^{xz}+2z\right)\vec{k}$$

$$(\vec{\nabla}F)_A=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)\vec{i}+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-4\right)\vec{j}+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+1\right)\vec{k}$$ بردار گرادیان

معادله پارامتری خط قائم $=$
$$\begin{cases} x=1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)t \\ y=2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-4\right)t \qquad t\in R \\ z=0+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+1\right)t \end{cases}$$

معادله صفحه مماس $: \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)(x-1)+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-4\right)(y-2)+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+1\right)(z-0)=0$

اکسترمم های نسبی و مطلق در توابع چند متغیره:

تعریف نقطه Max نسبی در تابع $z=f(x,y)$: گوییم تابع $z=f(x,y)$ در نقطه $A\Big|_b^a$ دارای مقدار Max نسبی است هرگاه $\forall(x,y)\in N_\delta(a,b)$ و $f(a,b)\geqslant f(x,y)$

همسایگی به مرکز (a,b) و شعاع δ

تعریف نقطه Min نسبی: گوییم تابع $z=f(x,y)$ در نقطه $A\Big|_b^a$ دارای مقدار Min نسبی است هرگاه:

$\forall(x,y)\in N_\delta(a,b) \;:\; f(a,b)\leqslant f(x,y)$

قضیه:

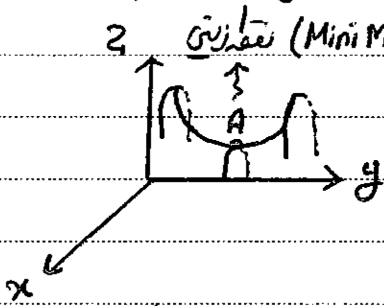
اگر در نقطه $A\Big|_{y_0}^{x_0}$ هر دو مشتق جزئی $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجود و متناهی باشند و این نقطه یا Max نسبی و یا Min نسبی برای تابع $f(x,y)$ باشد آنگاه:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_A$$

ولی عکس این قضیه همیشه صادق نیست.

یعنی: می توان نقطه ای را یافت که در آن هر دو مشتق جزئی صفر است در حالی که نه Max نسبی است نه Min نسبی است

به چنین نقطه‌ای نقطه زینی (Mini Max) گوییم.



$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_A = 0$$

برای محاسبه نقاط Max و Min نسبی و نقاط زینی در رویه‌ها از آزمون زیر استفاده می‌کنیم.

مشتقات جزئی مرتبه دوم برای محاسبه نقاط اکسترمم و نقاط زینی:

مرحله (۱): با حل دستگاه $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ نقاط بحرانی رویه را بدست می‌آوریم.

مرحله (۲): محاسبه $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

مرحله (۳): محاسبه $S = B^2 - AC$

مرحله (۴): اگر $A\Big|_{y_0}^{x_0}$ یکی از نقاط بحرانی رویه باشد و به ازای آن:

$\begin{cases} S < 0 \\ A < 0 \end{cases} \longrightarrow$ نقطه بحرانی یک Max نسبی است

$\begin{cases} S < 0 \\ A > 0 \end{cases} \longrightarrow$ " " Min " "

$S > 0 \longrightarrow$ " " یک نقطه زینی است

$S = 0 \longrightarrow$ آزمون جواب نمی دهد

Subject

Date

مثال) در رویه $z=f(x,y)=6x^2-2x^3+3y^2+6xy$ نقاط بحرانی را یافته و نوع آن را مشخص کنید.

۱/
$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=12x-6x^2+6y=0 \longrightarrow 12x-6x^2-6x=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=6y+6x=0 \quad y=-x\end{cases}$$

$$6x-6x^2=0$$

$$\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}\xrightarrow{y=-x}\begin{cases}y=0\\y=-1\end{cases}$$

$$\longrightarrow A\Big|_0^0 \;,\; B\Big|_{-1}^{1} \implies$$ نقاط بحرانی رویه

۲/
$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12-12x$$

$$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=6$$

$$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6$$

۳/ $S=B^2-AC=36-72+72x=-36+72x$

۴/ $A\Big|_0^0 \longrightarrow \begin{cases}S=-36<0\\A=12>0\end{cases}\longrightarrow$ مینیمم نسبی $Min\ A\Big|_0^0$

$B\Big|_{-1}^{1} \longrightarrow S=36>0 \longrightarrow$ نقطه $B\Big|_{-1}^{1}$ زینی است

مثال) در رویه $z=f(x,y)=-x^4-y^4+4xy$ نقاط بحرانی را یافته و نوع آن را مشخص کنید.

$$\begin{cases}\partial f/\partial x=-4x^3+4y=0\\ \partial f/\partial y=-4y^3+4x=0\end{cases}\longrightarrow \begin{array}{l}y=x^3\\x=y^3\end{array}\longrightarrow 0,1,-1$$

$$A\Big|_0^0 \;,\; B\Big|_1^1 \;,\; C\Big|_{-1}^{-1}$$

$$A=-12x^2,\quad B=4,\quad C=-12y^2$$

$$S=B^2-AC=16-(-12x^2)(-12y^2)=16-144x^2y^2$$

$A\Big|_0^0 \longrightarrow S=16>0 \longrightarrow$ نقطه زینی است

$B\Big|_1^1 \longrightarrow \begin{cases}S<0\\A<0\end{cases}\longrightarrow$ نسبی Max

$C\Big|_{-1}^{-1} \longrightarrow \begin{cases}S<0\\A<0\end{cases}\longrightarrow$ 〃 〃

Subject
Date

مثال: نقاط بحرانی رویه‌ی $Z=f(x,y)=(x-1)^4+(x+y)^4+10$ را یافته، نوع آن را مشخص کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \rightarrow 4(x-1)^3+4(x+y)^3=0 \rightarrow 4(x-1)^3=0 \rightarrow x=1,\ y=-1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \rightarrow 4(x+y)^3=0 \end{cases}$$

نقطه بحرانی $A\Big|_{-1}^{1}$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12(x-1)^2+12(x+y)^2 \qquad \delta=B^2-AC=-144(x-1)^2(x+y)^2$$

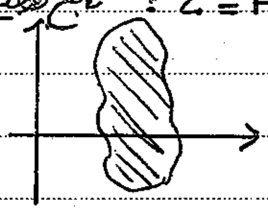
$$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=12(x+y)^2 \qquad A\Big|_{-1}^{1} \longrightarrow \delta=0 \longrightarrow$$ آزمون جواب نمی‌دهد

$$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12(x+y)^2$$

با توجه به ضابطه‌ی رویه کمترین مقدار آن برابر ۱۰ است که این مقدار در نقطه بحرانی $A\Big|_{-1}^{1}$ به دست می‌آید بنابراین نقطه بحرانی Min نسبی است.

محاسبه‌ی اکسترمم‌های مطلق در توابع چندمتغیره:

$Z=f(x,y)$: تابع دو متغیره

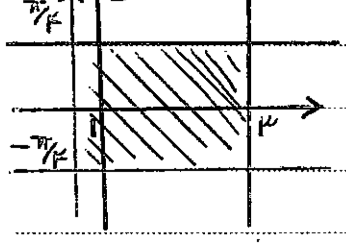


برای محاسبه‌ی اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y)$ در روی ناحیه‌ی D ابتدا نقاط بحرانی رویه را یافته و مقادیر تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم. سپس بر روی مرزهای ناحیه‌ی D تابع را از حالت دو متغیره به تک متغیره تبدیل می‌کنیم و اکسترمم‌های آن را به دست می‌آوریم و مقدار تابع را در آن نقاط مشخص می‌کنیم.

درنهایت: هر نقطه‌ای که تابع در آن بیشترین مقدار داشته باشد نقطه Max مطلق می‌باشد و برعکس.

مثال) اکسترمم‌های مطلق رویه‌ی $Z=f(x,y)=(4x-x^2)\cos(y)$ را روی ناحیه‌ی D به دست آورید.

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\le x\le 3,\ -\frac{\pi}{4}\le y\le \frac{\pi}{4}\right\}$$



Subject

Date

محاسبه نقاط بحرانی : $\frac{\partial f}{\partial x} = (4-2x)\cos(y) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -(4x-x^2)\sin(y) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ y=0 \end{cases}$ غ ق ق

$\longrightarrow A\Big|\begin{matrix}2\\0\end{matrix} \in D \longrightarrow f(2,0) = 4$

در مرز $x=1$: $f(1,y) = 3\cos(y) \longrightarrow f'(1,y) = -3\sin y = 0 \longrightarrow y=0$

$\longrightarrow (1,0)$ نقطه اکسترمم $\Rightarrow f(1,0) = 3$

در مرز $x=3$: $f(3,y) = 3\cos(y) \longrightarrow f'(3,y) = 0 \longrightarrow y=0$

$\longrightarrow (3,0)$ نقطه اکسترمم $\longrightarrow f(3,0) = 3$

در مرز $y=\pi/4$: $f(x,\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4x - x^2) \longrightarrow f'(x,\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4-2x) = 0 \longrightarrow x=2$

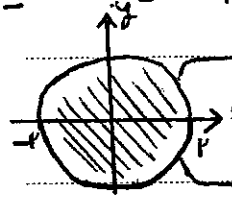
$\longrightarrow (2,\pi/4)$ نقطه اکسترمم $\longrightarrow f(2,\pi/4) = 2\sqrt{2}$

در مرز $y=-\pi/4$: $f(x,-\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4x-x^2) \longrightarrow f'(x,-\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4-2x) = 0 \longrightarrow x=2$

$\longrightarrow (2,-\pi/4)$ نقطه اکسترمم $\longrightarrow f(2,-\pi/4) = 2\sqrt{2}$

لذا تابع در نقطه $(2,0)$ Max مطلق است و در نقاط $(2,\pm\pi/4)$ Min مطلق است.

تمرین: اکسترمم‌های مطلق تابع $z = f(x,y) = x^2+2y^2-xy$ را در ناحیه $D = x^2+y^2 = 4$ بدست آورید.



$\longrightarrow y = \sqrt{4-x^2}$

$\longrightarrow y = -\sqrt{4-x^2}$

انتگرال های روی سطوح:

حالت اول: انتگرال روی سطوح برای توابع اسکالر ← $f(x,y,z)$

اگر Δ ا رویه در فضا باشد انتگرال تابع $f(x,y,z)$ روی Δ را به صورت $\iint f(x,y,z)\,d\sigma$ نشان دهیم. و برای حل آن در مورد معادله Δ ۳ حالت در نظر میگیریم

المان مساحت رویه Δ

۱- اگر $z=g(x,y)$ و تصویر Δ در صفحه xy ناحیه D باشد آنگاه

$$\iint f(x,y,z)\,d\sigma = \iint f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dA$$

۲- اگر $y=g(x,z)$ و تصویر Δ در صفحه xz ناحیه D باشد آنگاه

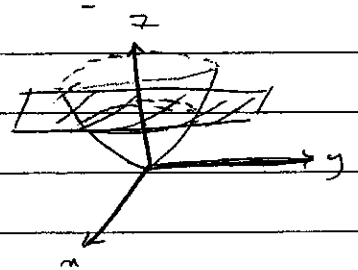
$$\iint f(x,y,z)\,d\sigma = \iint f(x,g(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}\,dA$$

۳- اگر $x=g(y,z)$ و تصویر Δ در صفحه yz ناحیه D باشد آنگاه:

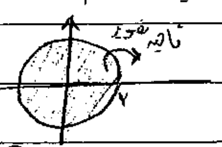
$$\iint f(x,y,z)\,d\sigma = \iint f(g(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}\,dA$$

مثال ۱) اگر $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ تابع اسکالر است و Δ قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است که زیر صفحه $z=2$ قرار دارد مطلوب است

$$\iint f(x,y,z)\,d\sigma$$



$\sqrt{x^2+y^2}=2 \Rightarrow x^2+y^2=4$ دایره به شعاع ۲



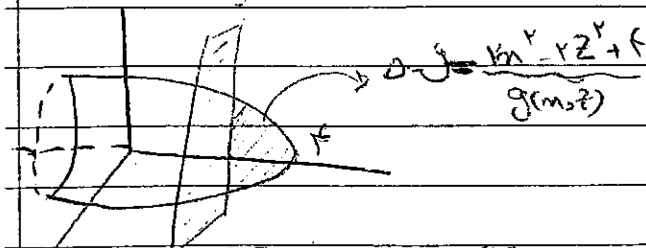
$$\iint f(x,y,z)\,d\sigma=\iint (x^2+y^2+z^2)\,d\sigma=\iint (x^2+y^2+x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}$$

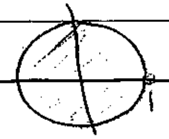
$$\iint 2(x^2+y^2)\sqrt{2}\,dA=2\sqrt{2}\iint (x^2+y^2)\,dA \overset{\text{قطبی}}{=} 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3\,dr = 2\sqrt{2}\times 2\pi\times \frac{1}{4}r^4\Big|_0^2 = 2\sqrt{2}\times 2\pi\times 4$$

مثال) مطلوب محاسبه $\iint (xy+yz)\,d\sigma$، Δ قسمتی از رویه $y=4-2x^2-2z^2$ است که در طرف راست صفحه $y=2$ قرار دارد.

$y=4-2x^2-2z^2 \Rightarrow$ سهمی‌گون با محور y





$$\iint (xy+yz)\ \iint (x+z)y\,d\sigma=\iint (x+z)(4-2x^2-2z^2)\cdot\sqrt{1+(-4x)^2+(-4z)^2}\,dA$$

$$\iint (x+z)\left(4-2(x^2+z^2)\right)\sqrt{1+16(x^2+z^2)}\,dA \overset{\text{قطبی}}{=}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1} r(\cos\theta+\sin\theta)(4-2r^2)\sqrt{1+16r^2}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$\int_0^{2\pi} (\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta \times \int_0^1 (4r^2-2r^4)\sqrt{1+16r^2}\,dr = 0$

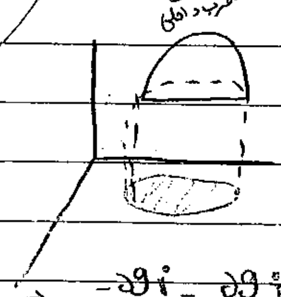
حالت دوم: انتگرال روی سطح برای توابع برداری ← $F = Xi+Yj+Zk$ (اسکالر)

حالت اول: اگر Δ یک رویه با معادله $\Delta: z=g(x,y)$ ، تصویر Δ در صفحه xy

ناحیه D باشد، انتگرال تابع F روی Δ را با نماد $\iint(F.n)\,d\sigma$ نشان دهیم

و بصورت زیر محاسبه کنیم:

چون رویه جهت بالا دارد مؤلفه k باید + باشد



$\Delta: z=g(x,y)$ ، بردار قائم بر سطح Δ: $\vec{n} = \frac{\nabla(z-g(x,y))}{|\nabla(z-g(x,y))|}$

$\vec{n} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}i - \frac{\partial g}{\partial y}j + k}{\sqrt{(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2+1}} = \vec{F}.\vec{n} = \frac{-X\frac{\partial g}{\partial x} - Y\frac{\partial g}{\partial y} + Z}{\sqrt{1+(\frac{\partial g}{\partial y})^2+(\frac{\partial g}{\partial x})^2}}$ = تابع اسکالر

$\iint(\vec{F}.\vec{n})\,d\sigma = \iint(-X\frac{\partial g}{\partial x} - Y\frac{\partial g}{\partial y} + Z)\,dA$ اگر بردار n هم جهت با z های + باشد

$\iint(F.n)\,d\sigma = \iint(\cancel{X}\frac{\partial g}{\partial x} + Y\frac{\partial g}{\partial y} - Z)\,dA$

حالت ب) اگر $\Delta: y=g(x,z)$ ، D تصویر Δ در صفحه xz

باشد، آنگاه $\iint(F.n)\,d\sigma$

$= \iint(-X\frac{\partial g}{\partial x} + Y - Z\frac{\partial g}{\partial z})\,dA$ اگر بردار n هم جهت با y های + باشد

یا

اگر بردار n هم جهت با y های − باشد $\iint X\frac{\partial g}{\partial x} - Y + Z\frac{\partial g}{\partial z}$

حالت پ) اگر $x=g(y,z)$ و D تصویر

$\iint(F.n)\,d\sigma = \iint(X - Y\frac{\partial g}{\partial y} - Z\frac{\partial g}{\partial z})\,dA$

یا

$\iint(F.n)\,d\sigma = \iint(-X + Y\frac{\partial g}{\partial y} + Z\frac{\partial g}{\partial z})\,dA$

تذکر: از لحاظ فیزیکی: اگر $F = Xi+Yj+Zk$ میدان

برداری باشد آنگاه مقدار انتگرال $\iint F.n\,d\sigma$ برابر با

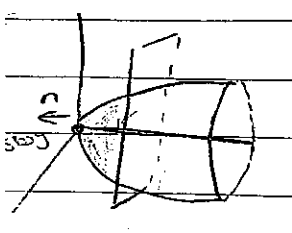
شار عبوری از سطح Δ به سوی ... است

$\iint(F.n)\,d\sigma$

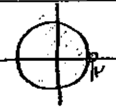
مثال) اگر $F = (xy)\vec{i} + (y-z)\vec{j} + (2x)\vec{k}$ ، با X ، Y ، Z به ترتیب زیر سه جمله

تابع برداری باشد، مطلوب است محاسبه $\iint F.n\,d\sigma$ که Δ قسمتی از

رویه $y=2x^2+2z^2$ است که در طرف چپ صفحه $y=4$ قرار دارد



$y = 2x^2+2z^2 = g(x,z)$



$\iint 2x(2x^2+2z^2) \cdot 4x - (2x^2+2z^2-z) + 2x(4z))\,dA$

s.a.m

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2} \left(14r^2\cos^2\theta - 2r + r\sin\theta + 8r^2\cos\theta\sin\theta\right) r\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{16}{4}\times 8\cos^2\theta - \frac{1}{2}\times 4 + \frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\sin\theta + 8\sin\theta\cos\theta\right)d\theta$$

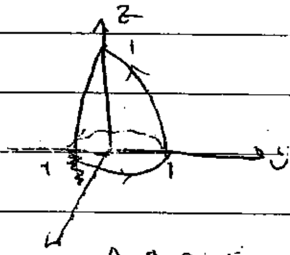
$$\frac{16}{4}\times 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right) = \left(\frac{16}{4}\times 2\right)2\pi = \left(\frac{32}{2}-2\right)2\pi$$

مثال ۱۸

$F=(xy)i+z^2j+2yk$ میدان برداری باشد

Δ سطح بسته و محصور به رویه $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه $z=0$ باشد

اندازه شار خروجی Δ را بدست آورید.



$\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$

$\Delta_1: z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \Delta_2: z=g(x,y)$

حالت اول

شار خروجی از Δ_1: $\phi=\iint_\Delta (F.n)\,d\sigma=\iint -x\frac{\partial g}{\partial x}-y\frac{\partial g}{\partial y}+z)\,dA$

$$=\iint -xy\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}-(1-\sqrt{x^2+y^2})^2\cdot\frac{-2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}+2y)\,dA$$

$$\stackrel{\text{قطبی}}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(r^2\cos^2\theta\sin\theta+\frac{(1-r)^2}{(1+r^2-2r)}\cdot\sin\theta+2r\sin\theta\right)r\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\cos^2\theta\sin\theta+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\sin\theta+\frac{2}{3}\sin\theta\right)d\theta=0$$

Δ_2: $\phi_2=\iint(F.n)=\iint x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}-z)\,dA$

$$=\iint(-2y)\,dA=2\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\,dr)\,d\theta=\boxed{0}$$

$\phi=\phi_1+\phi_2=0+0=0$

قضیه دیورژانس: $r=xi+yj+zk$

اگر میدان باشد Δ سطح بسته در فضا باشد، آنگاه

$$\oiint(F.n)\,d\sigma=\iiint(\operatorname{div}F)\,dV$$

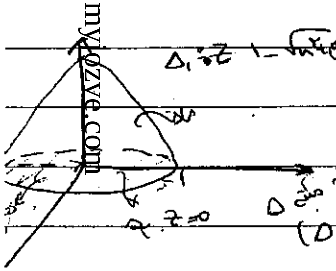
که سطح V فضای محصور در داخل سطح بسته Δ است

دیورژانس F: $\operatorname{div}F=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ = تابع اسکالر

حل مثال قبل به کمک قضیه دیورژانس

$$F=(xy)i+z^2j+(2y)k$$

$r^2\sin\theta$



$\Delta_1: z=1-\sqrt{x^2+y^2}$

Δ $z=0$ $(\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2)$

شار خروجی سطح $\phi=\iint(F.n)\,d\sigma \stackrel{\text{قضیه دیورژانس}}{=}$

هر وقت مرز و عدد و دقیق $\iiint=\int\iint$

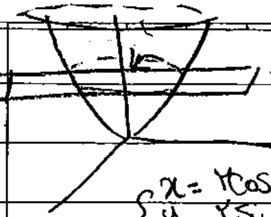
$$\iiint(\operatorname{div}F)\,dV=\iiint(y+0+0)\,dV=\iiint y\,dV$$

استوانه‌ای $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} r\sin\theta\, r\,dz)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1(r^2(1-r)\sin\theta)\,dr\,d\theta$

$$\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^1(r^2-r^3)\,dr=0$$

مثال ۱) درستی قضیه دیورژانس را برای میدان $=2xi-2zj+(y+z)k$

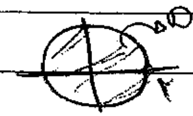
و سطح Δ بررسی کنید که Δ سطح بسته و محصور به رویه $z=x^2+y^2$ ...



$z=2$

با صفحه $z=2$ جا بس

$C_2\begin{cases}x=2\cos(t)\\ y=2\sin(t)\\ z=2\end{cases}$



در معادله $z=\sqrt{x^2+y^2}$ جایگذاری 2 = معادله دایره ای که تابع ما میشود

طرف اول قضیه استوکس:

$$\int F\cdot dR = \int_0^{2\pi}\big(x\,x'(t)+y\,y'(t)+z\,(z'(t))\big)\,dt = \int_0^{2\pi} 2(2\cos t)\times(-2\sin t)$$

$$+\,(-2\times 2\sin t)+(2\cos t)+0)\,dt = \int_0^{2\pi}(-4\sin 2t-4\sin(2t))\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(-10\sin 2t)\,dt = 0$$

طرف دوم قضیه $\iint \mathrm{curl}(\vec F\cdot\vec n)\,d\sigma = \iint(\vec G\cdot\vec n)\,d\sigma$

$$\mathrm{curl}\,F = \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & -y & z+1\end{vmatrix} = 0i-0j+0k=0$$

$$=\iint(\mathrm{curl}\,F\cdot n)\,d\sigma = 0$$

توابع برداری

تابع برداری تابعی است که مقادیر آن بردارهای عددی در فضای R^2 یا R^3 هستند

$R\to R^3$

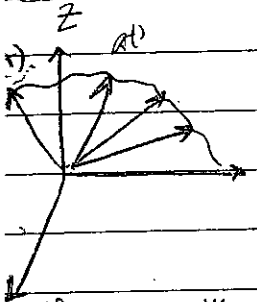
$\forall t\in R:\ R(t)=f(t)\vec i+g(t)\vec j+h(t)\vec k$

تابع مولفه ای

دامنه $D_{R(t)} = D_{f(t)}\cap D_{g(t)}\cap D_{h(t)} = R$ ا بازه روی محور

$$=\left\{\vec V - \vec r = R(t)\ ,\ t\in D_{R(t)}\right\}$$

مجموعه بردارهای مقادیر تابع



مثال ۱) اگر

$\vec R: IR\to R^3$

$R(t)=\left(\frac{1}{t-2}\right)\vec i+\sqrt{1-t^2}\,\vec j+e^{2t}\vec k$

$D(R(t))$ ، $R_{R(t)}$ را محاسبه کنید

$D=(R-\{2\})\cap[-1,1]\cap R=[-1,1]$

$t=-1\quad R(-1)=-\frac{1}{3}\vec i+0\vec j+e^{-2}\vec k=\vec V_1$

$t=0\quad R(0)=-\frac{1}{2}\vec i+\vec j+\vec k=\vec V_2$

$t=1\quad R(1)=-\vec i+0\vec j+e^{2}\vec k=\vec V_3$

در مباحث فیزیکی:

$\vec R(t)=f(t)\vec i+g(t)\vec j+h(t)\vec k$

$\vec R'(t)=\vec V(t)=f'(t)\vec i+g'(t)\vec j+h'(t)\vec k$

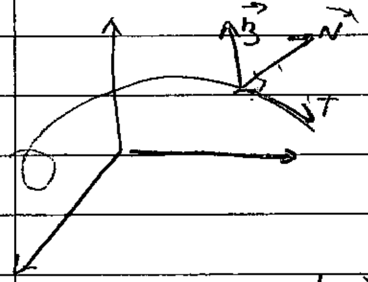
$\vec R''(t)=\vec V'(t)=a(t)=f''(t)+g''(t)+h''(t)$

$|\vec R'(t)|=\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2+(h'(t))^2}$

$R''(t)$

محاسبه بردارهای یکهٔ مماس و قائم (کنج فرنه، کنج TNB)

$\vec{R}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$



بردار یکه مماس در نقطه t: $T(t) = \dfrac{R'(t)}{|R'(t)|} \Rightarrow |T(t)| = 1$ در راستای بردار سرعت لحظه‌ای است

بردار یکه قائم درجه اول (نرمال اصلی): $\vec{N}(t) = \dfrac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} \Rightarrow |N(t)| = 1$ ، $N(t)$ در راستای بردار شتاب لحظه‌ای، $\vec{N}(t) \cdot \vec{T}(t) = 0$ ضرب داخلی

بردار یکه قائم درجه دوم: $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$ ضرب خارجی $\Rightarrow |\vec{B}(t)| = 1$ $\begin{cases} B(t) \cdot N(t) = 0 \\ B(t) \cdot \vec{T}(t) = 0 \end{cases}$

سؤال امتحانی: اگر $R(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)\,i + \sin^2 t\, j + 2t k$ در لحظهٔ $t = \frac{\pi}{2}$ کنج فرنه، مقدار انحنا و مقدار تاب را محاسبه کن.

$R'(t) = \cos(2t)\,i + \sin 2t\, j + 2k$

$|R'(t)| = \sqrt{\cos^2(2t) + \sin^2(2t) + 4} = \sqrt{5}$

$T = \dfrac{R'(t)}{|R'(t)|} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\cos(2t)\,i + \dfrac{\sqrt{5}}{5}\sin(2t)\,j + \dfrac{2\sqrt{5}}{5}k$

$|T'(t)| = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\vec{N}(t) = \dfrac{T'(t)}{|T'(t)|} = -\sin(2t)\,i + \cos(2t)\,j$

$\rightarrow N(\frac{\pi}{2}) = -j$ بردار یکه قائم مرتبه اول

$\vec{B}(\frac{\pi}{2}) = T(\frac{\pi}{2}) \times N(\frac{\pi}{2}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

بردار یکه قائم مرتبه دوم: $B(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} i - 0j + \dfrac{\sqrt{5}}{5} k$

محاسبه انحنا: اندازهٔ سرعت لحظه‌ای لازم برای تغییر جهت در یک نقطه از روی منحنی حرکت را انحنا در آن نقطه گوئیم. با k نشان دهیم و $k \geq 0$ و اگر در یک نقطه $k=0$ باشد بدین معنی است که در آن نقطه منحنی حرکت بصورت یک خط راست است.

فرمول‌ها:

فرمول ۱: $k = \dfrac{|T'(t)|}{|R'(t)|}$ انحنا ، فرمول ۲: $K = \dfrac{|R'(t) \times R''(t)|}{|R'(t)|^3}$

فرمول ۳: اگر $C: y = f(x)$ یک منحنی مسطح در صفحهٔ xy باشد انحنا در A از روی C نقطه

انحنا: $k = \dfrac{|f''(a)|}{[1 + f'^2(a)]^{\frac{3}{2}}}$

sa.m

در مثال قبل انحنا در نقطه $t=\frac{\pi}{2}$: $k = \frac{|T'(\frac{\pi}{2})|}{|R'(\frac{\pi}{2})|} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{2}{5}}$

مثال ۱۸: $R(t) = t\,i + 2\cos(2t)\,j - 2\sin(2t)\,k$

در لحظه $t=0$ کنج فرنه، مقدار انحنا، مقدار تاب؟

$R'(t) = i - 4\sin(2t)\,j - 4\cos(2t)\,k = i - 4k$

$R'' = 0i - 8\cos(2t)\,j + 8\sin(2t)\,k = -8j$

$$R'(0)\times R''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & -8 & 0 \end{vmatrix} = -32i - 0j - 8k$$

$|R'(0)\times R''(0)| = \sqrt{32^2+64}$ ، $|R'(0)| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

انحنا $k = \frac{|R'(0)\times R''(0)|}{|R'(0)|^3} = \frac{\sqrt{32^2+64}}{17\sqrt{17}}$

مثال) اگر $y = f(x) = e^{2x} + \ln(1+x)$ در نقطه $A(0,1)$ مقدار انحنا؟ e را بیابید

$f'(x) = 2e^{2x} + \frac{1}{1+x} \to f'(0) = 3$

$f''(x) = 4e^{2x} - \frac{1}{(1+x)^2} \to f''(0) = 3$

در نقطه A: $K = \frac{|f''(0)|}{[1+f'(0)^2]^{\frac{3}{2}}} = \boxed{\frac{3}{10\sqrt{10}}}$

سوال امتحانی: ثابت کنید که هر نقطه از روی دایره‌ای به شعاع R مقدار انحنا ثابت و برابر $\frac{1}{R}$ است

$x^2+y^2=R^2 \to C: \begin{cases} x = R\cos(t) \\ y = R\sin(t) \end{cases}$

$R(t) = \underbrace{R\cos(t)}_{f(t)}\,i + \underbrace{R\sin(t)}_{g(t)}\,j$

$R'(t) = -R\sin(t)\,i + R\cos(t)\,j$

$R''(t) = -R\cos(t)\,i - R\sin(t)\,j$

$$R'(t)\times R''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\sin t & R\cos t & 0 \\ -R\cos t & -R\sin t & 0 \end{vmatrix} = 0i - 0j + R^2 k$$

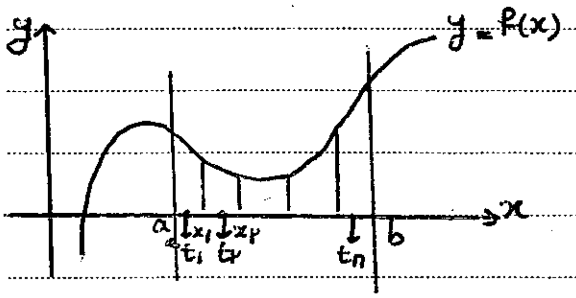
$|R'(t)\times R''(t)| = R^2$ ، $|R'(t)| = \sqrt{R^2} = R$

انحنا: $K = \frac{|R'(t)\times R''(t)|}{|R'(t)|^3} = \frac{R^2}{R^3} = \boxed{\frac{1}{R}}$

Subject
Date

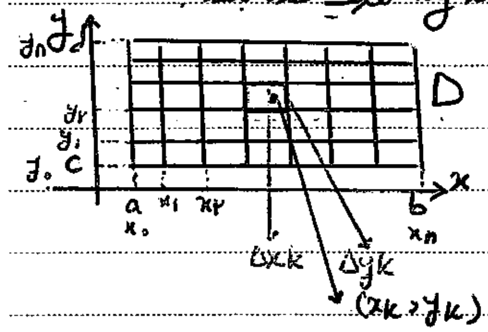
فصل سوم: انتگرال‌های دوگانه و سه‌گانه

انتگرال دوگانه: یادآوری ← $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)$ انتگرال معین



$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

حال اگر تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ در ناحیه بسته D از صفحه xy تعریف شده باشد،



$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

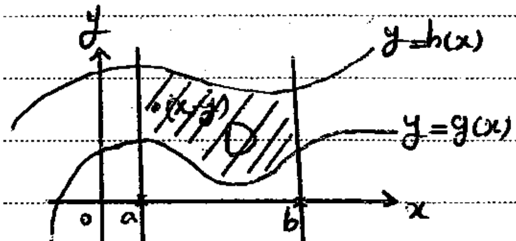
$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$

مساحت مستطیل kام $= \Delta A_k = \Delta x_k \cdot \Delta y_k$

مجموع ریمان: $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\cdot \Delta A_k$

(x_k, y_k) نقطه دلخواه $\lim_{\Delta A_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\cdot\Delta A_k = \iint_D f(x,y)\,dA$

المان مساحت $dA = dxdy$ یا $dydx$



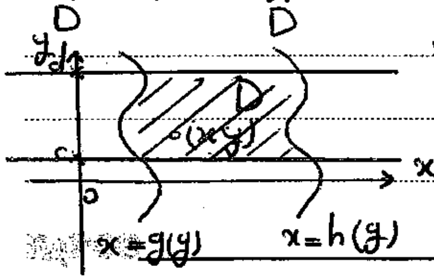
تعریف نواحی x منظم، y منظم، مستطیل:

۱) ناحیه x منظم:

$\forall (x,y)\in D \begin{cases} a\leq x\leq b \\ g(x)\leq y\leq h(x)\end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_D f(x,y)dydx = \int_a^b\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

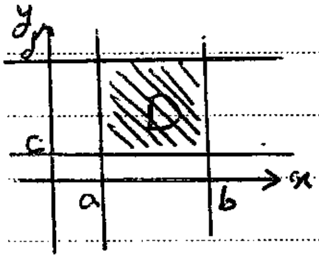
۲) ناحیه y منظم:



$\forall (x,y)\in D: \begin{cases} c\leq y\leq d \\ g(y)\leq x\leq h(y)\end{cases}$

$$\underset{y-\text{منظم}}{\iint_D} f(x,y)dA = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d\left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

Subject
Date



۳) ناحیه مستطیلی: $\forall (x,y)\in D: \begin{cases} a\le x\le b \\ c\le y\le d\end{cases}$

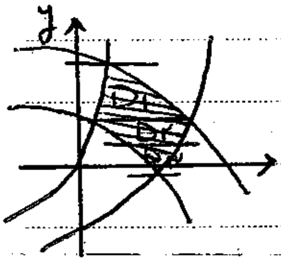
ناحیه مستطیلی هم x- منظم است و هم y- منظم است و

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

چند خاصیت مهم در انتگرال دوگانه:

۱. از لحاظ فیزیکی مقدار $\iint_D f(x,y)\,dA$ برابر حجم یک جسمی است که قاعده‌ی این جسم ناحیه D است و از بالا به رویه‌ی $z=f(x,y)$ محدود می‌شود.

۲. اگر تابع $f(x,y)$ تابع ثابت $f(x,y)=1$ فرض می‌شود آن گاه مقدار $\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D 1\,dA$ برابر مساحت ناحیه‌ی D می‌باشد.



۳. اگر ناحیه‌ی D غیرمنظم باشد.

$D=D_1\cup D_2\cup D_3$ ناحیه y منظم

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_{D_1} f(x,y)\,dA+\iint_{D_2} f(x,y)\,dA+\iint_{D_3} f(x,y)\,dA$$

۴. اگر در ناحیه D دو تابع $f(x,y)$, $g(x,y)$ تعریف شده باشند و $\forall (x,y)\in D;\ f(x,y)\le g(x,y)$

$$\longrightarrow \iint_D f(x,y)\,dA \le \iint_D g(x,y)\,dA$$

۵. اگر در ناحیه‌ی D،

$M=\underset{\text{نقاط}}{Max}\, f(x,y)$, $m=\underset{\text{نقاط}}{Min}\, f(x,y)$

در اینصورت: $\underset{\text{مساحت ناحیه } D}{m\times S} \le \iint_D f(x,y)\,dA \le M\times S$

مثال) اگر $f(x,y)=\dfrac{4}{(2x+y)^2}$, $D=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2 ,\ 3\le y\le 6\}$ مطلوب می‌باشد.

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_{\underset{\text{مستطیلی}}{D}} \frac{4}{(2x+y)^2}\,dA=\int_1^2\left(\int_3^6 \frac{4}{(2x+y)^2}\,dy\right)dx=\int_3^6\frac{4}{(2x+y)^2}\,dy=4\int_3^6 1\times(2x+y)^{-2}\,dy=$$

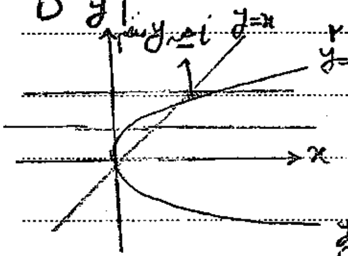
$$4\times\frac{(2x+y)^{-1}}{-1}=\frac{-4}{2x+y}\Big]_3^6=\frac{-4}{2x+6}+\frac{4}{2x+3}$$

Subject
Date

$$\rightarrow \int_1^2 \left(\frac{-4}{3x+6} + \frac{4}{3x+3} \right) dx = -2\ln(3x+6) + 2\ln(3x+3) = 2\ln\left(\frac{3x+3}{3x+6}\right)\Big]_1^2 =$$
$$2\ln\left(\frac{7}{10}\right) - 2\ln\left(\frac{5}{8}\right)$$

مثال) اگر $f(x,y)=\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)$ و ناحیه D ناحیه‌ای است محدود به $y=x$ ، $y^2=x$ ، $y=1$ ، $y=2$
$\iint\limits_D f(x,y)\,dA$ مطلوب می‌باشد.

$$D: \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ y \le x \le y^2 \end{cases}$$



$$\iint\limits_D \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dA = \int_1^2 \left(\int_y^{y^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dx \right) dy$$

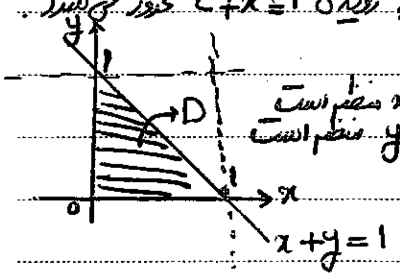
y ثابت

$$\int_y^{y^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dx = \frac{-2y}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\Big|_y^{y^2} = \frac{-2y}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) + \underbrace{\frac{2y}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}$$

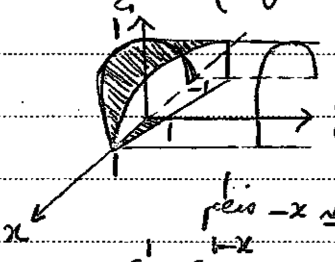
$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{-2y}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) dy = -\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) dy \rightarrow$$ از جزء به جزء

$$\begin{cases} u=y \xrightarrow{d} du=dy \\ dV=\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)dy \xrightarrow{\int} V=\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) \end{cases} = -\frac{2}{\pi}\left(u\times V - \int V\times du\right) = \dots$$

مثال) با استفاده از انتگرال دوگانه حجم یک جسمی را بدست آورید که قاعدهٔ جسم در صفحهٔ xy روی صفحهٔ xy (استوانه‌ای است) و محصور به خطوط $x=0$ و $y=0$ و $x+y=1$ می‌باشد از بالا به رویهٔ $z+x^2=1$ محدود می‌شود.



$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases}$$ x ثابت، دست x متغیر

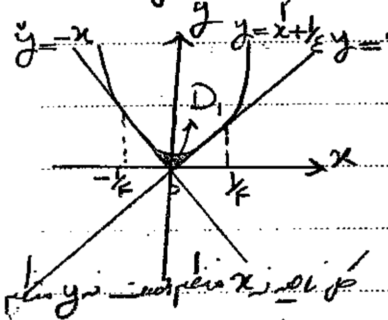


$$\text{حجم}\ V = \iint\limits_D f(x,y)\,dA$$
$$= \iint (-x^2+1)\,dA$$
D ← ناحیه x − متغیر

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (-x^2+1)\,dy \right) dx = \int_0^1 (-x^2+1)(1-x)\,dx = ?$$

Subject
Date

مثال: به کمک انتگرال دوگانه مساحت ناحیه‌ی محصور به منحنی‌های $\underbrace{|y|=|x|}_{y=\pm x}$ و $\underbrace{4y=4x^2+1}_{y=x^2+\frac{1}{4}}$ را حساب کنید



$x^2+\frac{1}{4}=x$

ریشه مضاعف: $x^2-x+\frac{1}{4}=0 \rightarrow (x-\frac{1}{2})^2=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

D_1 یک ناحیه x منظم است
$$\begin{cases} 0\leq x\leq \frac{1}{2} \\ x\leq y\leq x^2+\frac{1}{4} \end{cases}$$

مساحت کل ناحیه $= 2\,(D_1$ مساحت ناحیه$)$

$$\text{مساحت کل ناحیه } D = 2\iint_{D} 1\,dA = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^{x^2+\frac{1}{4}} 1\,dy\right)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{4}-x\right)dx =$$

(D x منظم است)

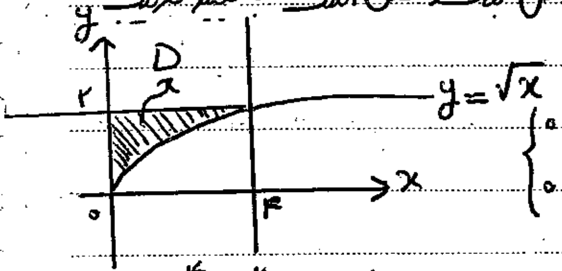
$$2\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{12}$$

مثال) مطلوبست محاسبه‌ی $\int_0^4\left(\int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3)\,dy\right)dx \rightarrow ?$

$\int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3)\,dx \Longrightarrow$ قابل حل نیست

تغییر ترتیب در انتگرال‌های دوگانه:

اگر انتگرال دوگانه‌ای در حالت x منظم (y منظم) قابل حل نباشد ممکن است با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری آن را بتوان حل کرد.



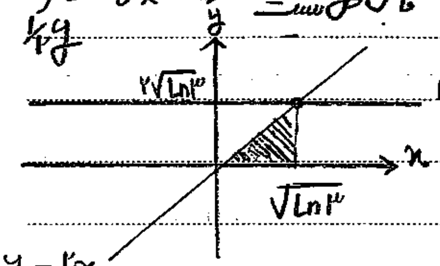
حدود ناحیه D در حالت y منظم می‌نویسیم
$$\begin{cases} 0\leq y\leq 2 \\ 0\leq x\leq y^2 \end{cases}$$

$$\int_0^4\left(\int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3)\,dy\right)dx \rightarrow \int_0^2\left(\int_0^{y^2} \cos(y^3)\,dx\right)dy = \frac{1}{3}\int_0^2 3\left(y^2\cos(y^3)\right)dy =$$

$$\frac{1}{3}\sin(y^3)\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\sin(8)$$

مثال) (تمرین) مطلوبست محاسبه $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}}\left(\int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}dx\right)dy$?

$\int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}dx \longrightarrow$ ناممکن است



محاسبه D در صفحه xy مقطع $2x$ به صورت زیر است

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant \sqrt{\ln 3} \\ 0\leqslant y\leqslant 2x \end{cases}$$

$$\int_0^{2\sqrt{\ln 3}}\left(\int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}dx\right)dy \underset{\text{تغییر ترتیب}}{=\!=\!=} \int_0^{\sqrt{\ln 3}}\left(\int_0^{2x} e^{x^2}dy\right)dx =$$

$$\int_0^{\sqrt{\ln 3}} (2x.e^{x^2})dx = e^{x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 3}} = e^{\ln 3}-e^0=3-1=2$$

مثال) مطلوبست محاسبه $\int_0^2\left(\int_{1+y^2}^{5} y\,e^{(x-1)^2}dx\right)dy \longleftarrow$ تغییر متغیر ?

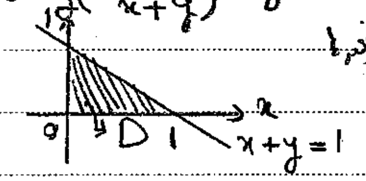
مثال) $\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dA$?

D ناحیه‌ای است در ربع اول محصور به خطوط $x=0$, $y=0$, $x+y=1$

$\int\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dx \longrightarrow$

$\int\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dy \longrightarrow$

COE $\longrightarrow$ روش تغییر ترتیب کارساز نیست

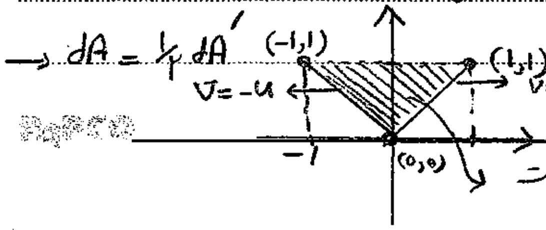


تغییر متغیر
$$\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y \end{cases}$$
$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(u+v) \\ y=\frac{1}{2}(v-u) \end{cases}$$

$$|J|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

$$|J|=\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}$$

$\longrightarrow dA=\frac{1}{2}dA'$



متغیر v اول است

$$\begin{cases} 0\leqslant v\leqslant 1 \\ -v\leqslant u\leqslant v \end{cases}$$

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dA \overset{\text{تغییر متغیر}}{=\!=\!=} \iint_{D'} \cos\left(\frac{u}{v}\right)\cdot\frac{1}{2}dA'=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_{-v}^{v}\cos\left(\frac{u}{v}\right)du\right)dv=\frac{1}{2}\int_0^1 v\sin\left(\frac{u}{v}\right)\Big]_{-v}^{v}$$

$\frac{1}{2}\sin(1)$

Subject
Date

تغییر متغیر در انتگرال دوگانه:

اگر انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)\,dA$ مستقیماً یا با تغییر ترتیب قابل حل نباشند و یا ناحیه D تماماً یک ناحیه غیرمنتظم باشند در این حالت با عمل تغییر متغیر ناحیه ی D را از صفحه ی xy به یک ناحیه منتظم مانند D' در صفحه ی دیگری مانند uv انتقال داده و سپس در صفحه ی uv انتگرال را محاسبه می کنیم.

عمل تغییر متغیر دارای ۴ مرحله است:

۱) انتخاب دو تغییر متغیر

$$\begin{cases} u = g(x,y) \\ v = h(x,y) \end{cases}$$

۲) محاسبه ی x و y برحسب u و v

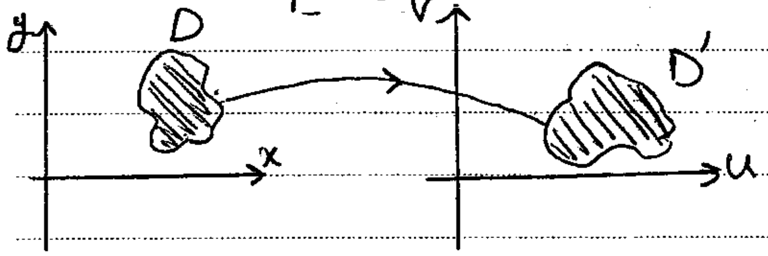
$$\begin{cases} x = g_1(u,v) \\ y = h_1(u,v) \end{cases}$$

۳) محاسبه ی ژاکوبین تبدیل مختصات x و y به مختصات u و v

ژاکوبین $|J| = ?$ $\qquad \underbrace{dx\,dy}_{dA} = |J| \underbrace{du\,dv}_{dA'}$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{یا} \quad |J| = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

۴) به کمک تغییر متغیر ناحیه ی D را از صفحه ی xy به ناحیه ی D' در صفحه uv انتقال می دهیم

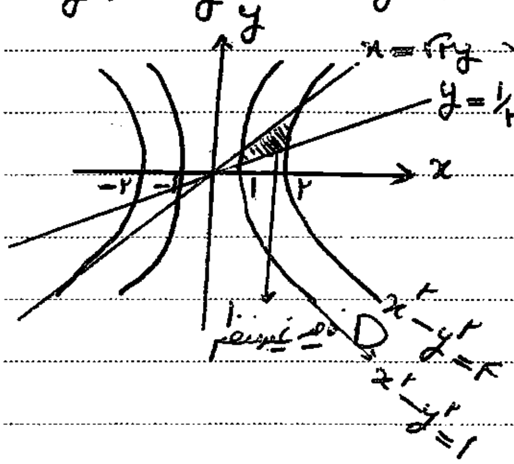


در نهایت:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D'} f\big(g_1(u,v), h_1(u,v)\big) \cdot |J|\,dA'$$

مثال استثنایی: $\iint_D \frac{y}{x} e^{x^2-y^2}\, dA$ ؟

D ناحیه ای است در ربع اول و محصور به منحنی های $x^2-y^2=1$ ، $x^2-y^2=4$ و خطوط $x=2y$ ، $x=\sqrt{2}y$



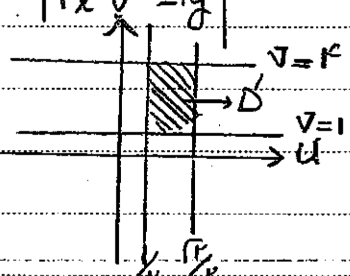
$x=\sqrt{2}y \rightsquigarrow y/x=\sqrt{2}/2$

$y=\frac{1}{2}x \rightsquigarrow y/x=\frac{1}{2}$

$\begin{cases} u=\frac{y}{x} \\ v=x^2-y^2 \end{cases}$ تغییر متغیر

$$|J| = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 2x & -2y \end{vmatrix}} = \frac{1}{2(\frac{y}{x})^2-2} = \frac{1}{2u^2-2}$$

$\longrightarrow dA = \frac{1}{2u^2-2}\, dA'$

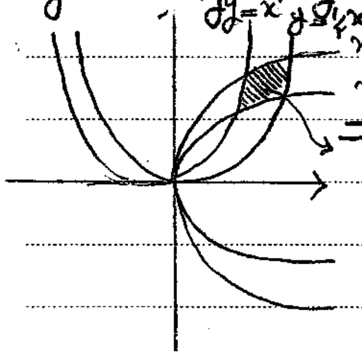


$$\iint_D y/x\, e^{x^2-y^2} dA = \iint_{D'} u\, e^{v} \frac{1}{2u^2-2} dA' = \underset{\text{مستطیل} \leftarrow D'}{\iint} \frac{u}{2u^2-2} \cdot e^{v} dA' = \int_1^4 \left(\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{u}{2u^2-2} \cdot e^{v} du \right) dv$$

تابع تجزیه شده

$$= \int_1^4 e^{v} dv \times \frac{1}{4} \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} 4 \frac{u}{2u^2-2} du = (e^4 - e^1) \times \frac{1}{4} (2u^2-2) \Big]_{1/2}^{\sqrt{2}/2}$$

مثال استثنایی: $\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}} dA$ ؟ D ناحیه است محصور به منحنی های $x^2=y$ ، $x^2=2y$ ، $y^2=3x$ ، $y^2=4x$

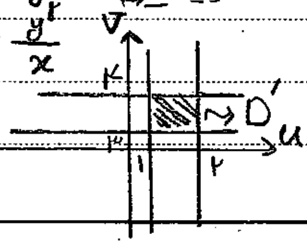


$\frac{x^3+y^3}{xy} = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$

$\begin{cases} u=\frac{x^2}{y} \\ v=\frac{y^2}{x} \end{cases}$ تغییر متغیر

$$|J| = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

$dA = \frac{1}{3} dA'$



Subject
Date

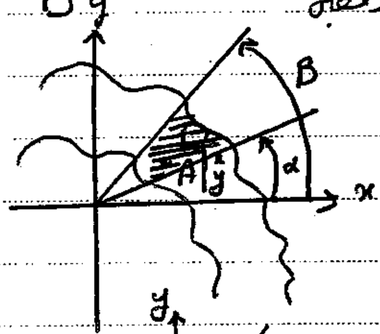
$$\iint_D e^{\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}}\,dA=\iint_{D'} e^{u+v}\,\tfrac{1}{3}\,dA'=\tfrac{1}{3}\int_3^4\Big(\int_1^2 e^u . e^v\,du\Big)dv=\tfrac{1}{3}\int_3^4 e^v dv\times\int_1^2 e^u du=$$

$$\tfrac{1}{3}(e^4-e^3)(e^2-e^1)$$

تغییر متغیر قطبی در انتگرال دوگانه:

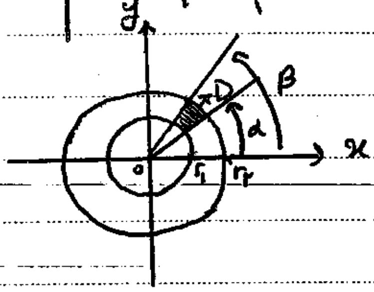
$$\iint_D f(x,y)\,dA=?$$

اگر ناحیه‌ی D به صورت یکی از شکل‌های زیر باشد بطوریکه در آن حدود قطبی r و θ را به راحتی بتوانیم به دست آوریم.



$$A\Big|_y^x \xrightarrow{\text{در قطبی}} A'\Big|_\theta^r$$

$$\begin{cases} g(\theta)\leqslant r\leqslant h(\theta)\\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\end{cases}$$



$$\begin{cases} r_1<r<r_2\\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\end{cases}$$

در این حالت می‌توان انتگرال را در مختصات قطبی محاسبه کرد

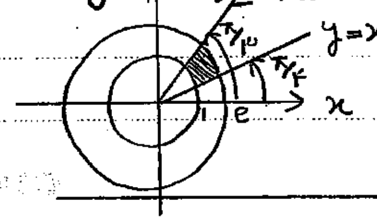
تغییر متغیر قطبی $\begin{cases} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases} \longrightarrow |J|=r$ ژاکوبین تبدیل دکارتی به قطبی

$$\underbrace{dx\,dy}_{dA}=r.\underbrace{dr\,d\theta}_{dA'}\longrightarrow dA=r.dA'$$

$$\iint_D f(x,y)\,dA \xrightarrow{\text{قطبی}} \int_\alpha^\beta\Big(\int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\Big)\,d\theta$$ دقیقه

مثال) $\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dA$ ، D ناحیه‌ای است در ربع اول، محصور به خطوط $y=\sqrt{3}x$ ، $x^2+y^2=1$ ، $x^2+y^2=e^2$

$$\begin{cases} y=x\\ y=\sqrt{3}x\end{cases}$$



Subject
Date

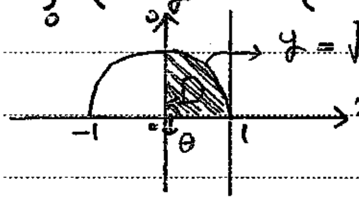
D ناحیه مستطیلی $\begin{cases} 1 \leq r \leq e \\ \pi/4 \leq \theta \leq \pi/3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow |J| = r$

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}\, dA \overset{\text{قطبی}}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\int_1^e \frac{\ln(r^2)}{r^2}\cdot r\, dr\right)d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \times \int_1^e 2\times\frac{1}{r}\ln(r)\,dr =$$

$$\pi/12 \times \ln^2(r) = \pi/12(1-0) = \pi/12$$

$$\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \text{Arctan}(\sqrt{x^2+y^2})\,dy\right)dx = ?$$ (مثال



$y = \sqrt{1-x^2}$ دایره $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$

$$\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \text{Arctan}(\sqrt{x^2+y^2})\,dy\right)dx \overset{\text{قطبی}}{=} \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \text{Arctan}(r)\cdot r\,dr\right)d\theta$$

$\begin{cases} r\cos\theta = x \\ r\sin\theta = y \end{cases}$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \times \int_0^1 r\cdot \text{Arctan}(r)\,dr =$$

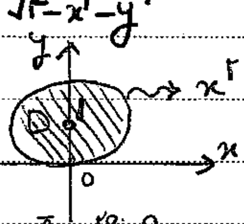
جزء به جزء $\longrightarrow \begin{cases} u = \text{Arctan}(r) \\ dv = r\,dr \end{cases}$

$$= \pi/2\left(\tfrac{1}{2}r^2\,\text{Arctan}(r) - \tfrac{1}{2}\int \frac{1+r^2-1}{1+r^2}\,dr\right) = \pi/2 \times \left(\ldots - r + \tfrac{1}{2}\text{Arctan}(r)\right)\Big]_0^1 =$$

$$\pi/2\left(\pi/8 - \tfrac{1}{2} + \pi/8\right) = \pi/2\left(\pi/4 - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\iint \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dA$$

سوال امتحانی : D ناحیه‌ای است که در آن $D: x^2+(y-1)^2 \leq 1$



$x^2+(y-1)^2 = 1 \xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم}} x^2+y^2 = 2y \xrightarrow{\text{قطبی}} r^2 = 2r\sin\theta$

معادله قطبی دایره $\longleftarrow \boxed{r = 2\sin\theta}$

$0 \leq \theta \leq \pi$
$0 \leq r \leq 2\sin\theta$

$$\overset{\text{قطبی}}{=} \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{4-r^2}}\cdot r\,dr\right)d\theta = \int_0^{\pi}(-2|\cos\theta|+2)\,d\theta = \int_0^{\pi/2}(-2\cos\theta+2)\,d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}(2\cos\theta+2)\,d\theta = ?$$

$$-\int_0^{2\sin\theta} \frac{-2r}{2\sqrt{4-r^2}}\,dr = \left(\int \frac{u'}{2\sqrt{u}}\,dx = \sqrt{u}\right) = -\sqrt{4-r^2}\Big]_0^{2\sin\theta} = -\sqrt{4-4\sin^2\theta}+2 =$$

$$-\sqrt{4\cos^2\theta}+2 = -2|\cos\theta|+2$$

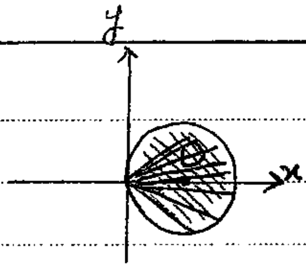
Subject
Date

$$\iint \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dA$$

$D: (x-1)^2+y^2 \leq 1$

$x^2-2x+1+y^2 \leq 1$

$x^2+y^2 \leq 2x$



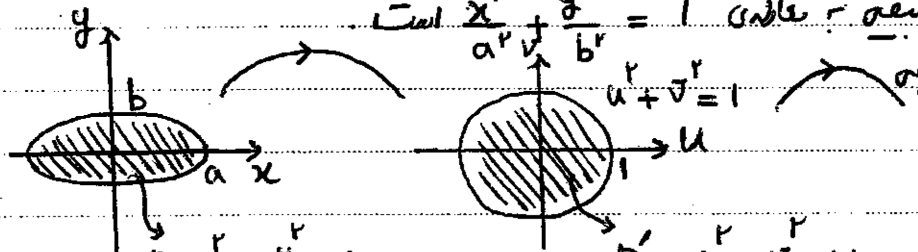
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta \end{cases}$$

تذکر: $\iint f(x,y)\,dA = ?$

$D \rightsquigarrow$ بیضی

الف) بیضی یا قسمتی از بیضی ← معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ است.

نصف بیضی



$D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ $\quad D': u^2+v^2 \leq 1$

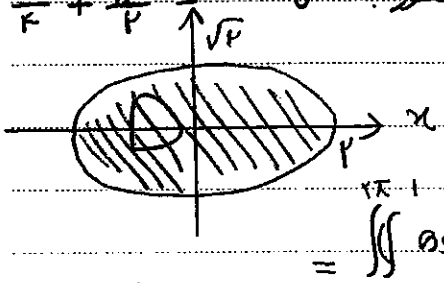
$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$$

$|J| = r$

تغییر متغیر $\begin{cases} u = x/a \\ v = y/b \end{cases} \rightsquigarrow |J| = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{\frac{1}{ab}} = ab$

$$\underbrace{\iint f(x,y)\,dA}_{D \text{ بیضی}} = \underbrace{\iint f(au,bv)\,.\,ab\,dA'}_{D' \text{ دایره}} \overset{\text{قطبی}}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 f(ar\cos\theta, br\sin\theta)\,.\,\underbrace{abr}_{\text{ژاکوبین}}\,dr\right)d\theta$$

مثال) $\iint \cos(x^2+2y^2)\,dA = ?$ $\quad$ D ناحیه است محصور به بیضی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$



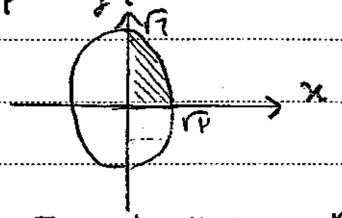
$$\begin{cases} x = ar\cos\theta = 2r\cos\theta \\ y = br\sin\theta = \sqrt{2}\,r\sin\theta \\ |J| = abr = 2\sqrt{2}\,r \end{cases}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos(\underbrace{4r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta}_{4r^2})\,.\,2\sqrt{2}\,r\,dr\,)\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 2\sqrt{2}\,r\cos(4r^2)\,dr = 2\pi \times \frac{\sqrt{2}}{4}\sin(4r^2)\Big]_0^1 = 2\pi \times \frac{\sqrt{2}}{4}\sin(4)$$

Subject
Date

تمرین: $\iint_D e^{(2x^2+y^2)}\,dA=?$ ، D ناحیه‌ای است در ربع اول و محصور به منحنی $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$



$$\begin{cases} x = ar\cos\theta = \sqrt{3}\,r\cos\theta \\ y = br\sin\theta = \sqrt{6}\,r\sin\theta \\ |J| = abr = \sqrt{18}\,r \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 e^{6r^2\cos^2\theta+6r^2\sin^2\theta}\sqrt{18}\,r\,dr\right)d\theta=\int_0^{\pi/2}d\theta\times\int_0^1 e^{6r^2}\sqrt{18}\,r\,dr=$$

$$\frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{18}}{12}\int_0^1 12e^{6r^2}r\,dr=\frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{18}}{12}\times e^{6r^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{18}}{12}\left(e^6-e^0\right)=$$

$$\frac{\sqrt{18}\,\pi}{24}\left(e^6-1\right)=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}\left(e^6-1\right)$$

تمرین: مساحت دایره‌ای به شعاع A را در مختصات قطبی بیابید.

$$S=\iint_D 1\,dR=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^A r\,dr\right)d\theta=2\pi\times\frac{A^2}{2}=\pi A^2$$

کاربرد انتگرال دوگانه برای محاسبه‌ی مساحت رویه‌ها در فضا:

اگر Δ یک رویه در فضا باشد، در مورد معادله‌ی Δ می‌توان سه حالت در نظر گرفت.

حالت اول: اگر Δ دارای معادله‌ای به صورت $z=g(x,y)$ باشد و تصویر Δ در صفحه xy ناحیه‌ی D باشد، آنگاه:

$$\text{مساحت رویه‌ی } \Delta=\sigma=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dA$$

حالت دوم: اگر Δ دارای معادله‌ای به صورت $y=g(x,z)$ باشد و تصویر Δ در صفحه xz ناحیه‌ی D باشد، آنگاه:

$$\text{مساحت رویه‌ی } \Delta\quad\sigma=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}\,dA$$

حالت سوم: اگر Δ دارای معادله‌ای به صورت $x=g(y,z)$ باشد و تصویر Δ در صفحه yz ناحیه‌ی D باشد، آنگاه:

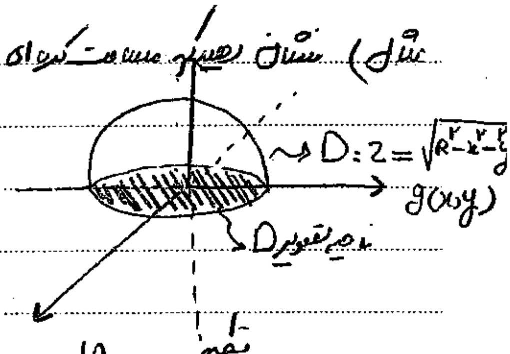
$$\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}\,dA$$

Subject
Date

مثال) نشان دهید مساحت کره‌ای به شعاع R برابر $4\pi R^2$ است.

$x^2+y^2+z^2=R^2$ که

$z^2=R^2-x^2-y^2 \to z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$



مساحت نیم کره $\sigma=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dA$

$$=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-2y}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dA=\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dA$$

قطبی: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $|J|=r$

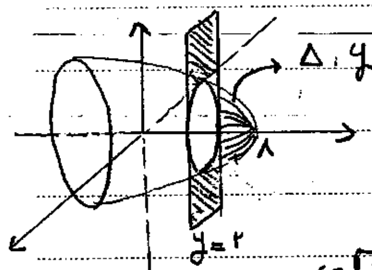
$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\cdot r\,dr\right)d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times -R\int_0^R\frac{-2r}{2\sqrt{R^2-r^2}}\,dr=2\pi\times\left(-R\sqrt{R^2-r^2}\right]_0^R$$

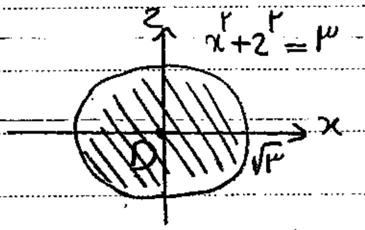
$2\pi\left(0+R^2\right)=2\pi R^2$

$\to$ مساحت کره کامل $=2\left(2\pi R^2\right)=4\pi R^2$

مثال) مساحت قسمتی از سهمی‌گون $y=8-2x^2-2z^2$ را محاسبه کنید که این قسمت در طرف راست صفحه $y=2$ قرار دارد.

$y=8-2x^2-2z^2 \to 2x^2+2z^2=8-y \rightsquigarrow \frac{x^2}{1}+\frac{z^2}{1}=\frac{(y-8)}{-2}$



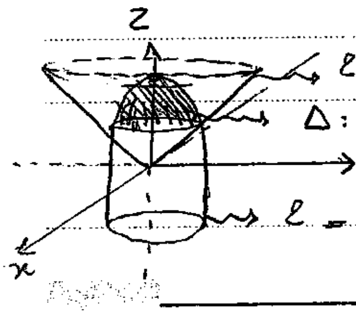


$$\sigma=\iint_D\sqrt{1+(-4x)^2+(-4z)^2}\,dA=\iint_D\sqrt{1+16(x^2+z^2)}\,dA$$

قطبی: $x=r\cos\theta$, $z=r\sin\theta$, $|J|=r$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{3}} r\cdot\sqrt{1+16r^2}\,dr\right)d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\frac{1}{32}\int_0^{\sqrt{3}}32r\left(1+16r^2\right)^{\frac{1}{2}}dr=2\pi\times\frac{1}{32}\times\frac{\left(1+16r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_0^{\sqrt{3}}$$

مثال) مساحت قسمتی از سهمی‌گون $z=8-x^2-y^2$ را بیابید که این قسمت در داخل مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ قرار دارد.

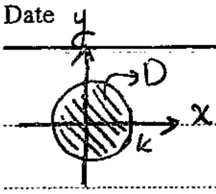


$\sqrt{x^2+y^2}=8-x^2-y^2\to$

حالت الف $\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{k}=8-\underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{k^2}$

$k^2+k-8=0\to k=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$

Subject
Date



$$\text{مساحت سطح} = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dA \overset{\text{قطبی}}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^k r(1+4r^2)^{1/2}dr\right)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \times \frac{1}{8}\int_0^k 8r(1+4r^2)^{1/2}dr$$

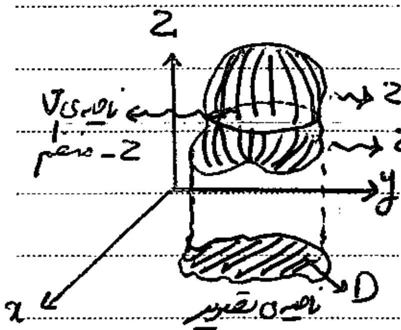
انتگرال های سه گانه:

تعریف ناحیه سه بعدی z منتظم: ناحیه سه بعدی V را یک ناحیه z-منتظم گوییم هرگاه:

اولاً: تصویر آن در ناحیه xy یک ناحیه دو بعدی باشد

ثانیاً: این ناحیه در جهت z از بالا و از پایین به دو رویه‌ی مشخص به فرم محصور شده باشد.

مثال) فضای محصور در داخل یک کره یک ناحیه z-منتظم است.



$$\forall (x,y)\in V \longrightarrow \begin{cases}(x,y)\in D\\ g(x,y)\leqslant z\leqslant h(x,y)\end{cases}$$

حال اگر تابع سه متغیره $W=f(x,y,z)$ در نقاط ناحیه‌ی V تعریف شده باشد $(V\subseteq D_f)$

آنگاه انتگرال سه‌گانه تابع f، $f(x,y,z)$ در ناحیه‌ی سه بعدی V به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \iint_D\left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dA$$

المان حجم $dV = dz\,dy\,dx$ یا $dz\,dx\,dy$ یا ...

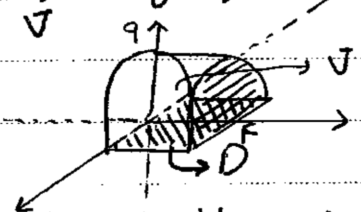
تذکر: از لحاظ فیزیکی مقدار $\iiint_V f(x,y,z)dV$ برابر جرم حجمی ناحیه V است به شرط اینکه تابع $f(x,y,z)$ چگالی حجمی ناحیه‌ی V باشد.

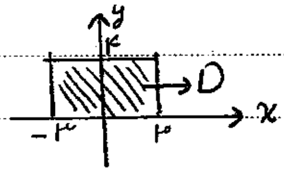
در حالت خاص: اگر $f(x,y,z)=1$ فرض شود آنگاه مقدار انتگرال سه‌گانه برابر حجم ناحیه V است

Subject
Date

مثال) اگر $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ و V یک ناحیه‌ای است در هشتک محدود به صفحات $x=3$ ، $z=0$ ، $x=-3$ ، $y=0$ ، $y=4$ و رویه $x^2+z=9$ است. مطلوبست محاسبه:

$$\iiint_V F(x,y,z)\, dV \qquad z=-x^2+9$$





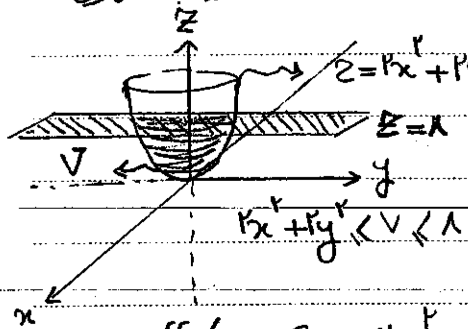
$$\forall (x,y,z)\in V \longrightarrow 0\leqslant z\leqslant -x^2+9$$

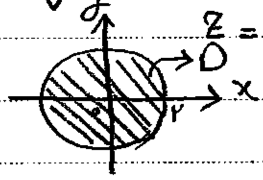
$$\iiint_V (x^2+y^2-z^2)\,dV=\iint_D\left(\int_0^{-x^2+9}(x^2+y^2-z^2)\,dz\right)dA=\iint_D\left((x^2+y^2)(-x^2+9)-\tfrac{1}{3}(-x^2+9)^3\right)dA$$

$D \rightsquigarrow$ مستطیل

$$=\int_{-3}^{3}\left(\int_0^4 (x^2+y^2)(-x^2+9)-\tfrac{1}{3}(-x^2+9)^3\, dy\right)dx=\cdots$$

مثال) مطلوبست محاسبه $\iiint_V (xy+yz)\,dV$ که V ناحیه‌ای است در هشتک محصور به سهمیگون $z=2x^2+2y^2$ و صفحه $z=8$.





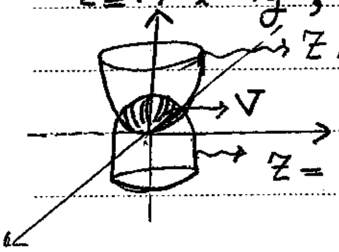
$$2x^2+2y^2\leqslant z\leqslant 8 \qquad \iiint_V (xy+yz)\,dV=\iint_D\left(\int_{2x^2+2y^2}^{8}(xy+yz)\,dz\right)dA=$$

$$=\iint_D\left(xy(8-2x^2-2y^2)+\tfrac{1}{2}y\left(64-(2x^2+2y^2)^2\right)\right)dA$$ قطبی

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 \left[(r^2\cos\theta\sin\theta)(8-2r^2)+\tfrac{1}{2}\sin\theta(64-4r^4)\right].r\,dr\right)d\theta$$

$$(\cos\theta\sin\theta)(16-\tfrac{64}{4})+\sin\theta(32\times 4-\tfrac{2}{7}\times 128)=0$$

مثال) با استفاده از انتگرال سه‌گانه حجم ناحیه محصور به رویه‌های $z=36-x^2-3y^2$ ، $z=x^2+y^2$ را بدست آورید.



$$x^2+y^2=36-x^2-3y^2$$

$$2x^2+4y^2=36 \longrightarrow \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1 \;, D$$

$$\text{حجم}=\iiint_V 1\,dV=\iint_D\left(\int_{x^2+y^2}^{36-x^2-3y^2} 1\,dz\right)dA=$$

$$\iint_D (36-2x^2-4y^2)\,dA \qquad D\rightsquigarrow \text{بیضی}$$

$$\begin{cases} x=ar\cos\theta=\sqrt{18}\,r\cos\theta\\ y=br\sin\theta=3r\sin\theta\\ |J|=abr=3\sqrt{18}\,r\end{cases} \qquad \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (36-36r^2\cos^2\theta-36r^2\sin^2\theta).3\sqrt{18}\,r\,dr\right)d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^1 3\sqrt{18}(18-9)=2\pi\times 3\sqrt{18}(18-9)=18\pi\times 3\sqrt{18}$$

Subject

Date

تغییر متغیرهای استوانه‌ای و کروی در انتگرال سه‌گانه:

1. تغییر متغیر استوانه‌ای:

$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = ?$

اگر ناحیه تصویر در صفحه xy یک دایره یا قسمتی از یک دایره باشد.

آن‌گاه:

تغییر متغیر استوانه‌ای $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \longrightarrow |J| = r$

$dx\,dy\,dz = r\,dz\,dr\,d\theta$

$h(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\longrightarrow \iiint_V f(x,y,z)\,dV = \int\left(\int\left(\int f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r\,dz\right)dr\right)d\theta$

حدود r و θ از ناحیه تصویر مشخص می‌شود

$g(r\cos\theta, r\sin\theta)$

2. تغییر متغیر کروی:

$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = ?$

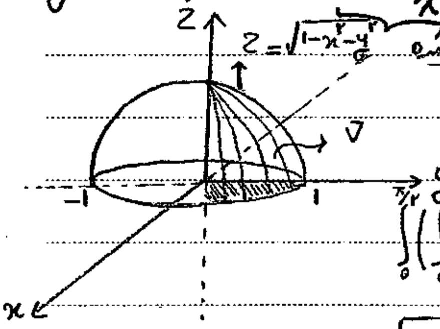
اگر ناحیه V در فضا یک کره یا قسمتی از کره باشد به طوری که در آن حدود کروی ρ ، θ ، φ به راحتی قابل محاسبه باشد.

آن‌گاه:

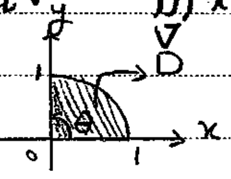
تغییر متغیر کروی $\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \longrightarrow |J| = \rho^2\sin\varphi$

$$\longrightarrow \iiint_V f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta\left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int_a^b f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi\right)d\theta$$

مثال) $\iiint_V xz\cdot e^{(x^2+y^2+z^2)}\,dV = ?$ ناحیه V است در $\frac{1}{8}$ اول فضا و داخل کره $x^2+y^2+z^2=1$



$\frac{1}{8}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$



از تغییر متغیر استوانه‌ای:

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \longrightarrow |J| = r$

$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-r^2}} \underbrace{r\cos\theta\cdot z\cdot e^{r^2+z^2}\cdot r\,dz}_{ze^{z^2}\cdot\cos\theta\cdot r^2\cdot e^{r^2}}\right)dr\right)d\theta =$

ناحیه V : $0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$ $\Longrightarrow \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \frac{1}{2}\left(e^{1-r^2}-1\right)\cdot\cos\theta\cdot r^2 e^{r^2}\,dr\right)d\theta =$

$= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta \times \int_0^1 \frac{1}{2}\left(r^2 e - r^2 e^{r^2}\right)dr = 1\times\left(\frac{1}{6}e - \frac{1}{2}\int_0^1 r^2 e^{r^2}\,dr\right)$ $\underset{\text{جزء به جزء}}{\begin{cases} u = r \xrightarrow{d} \\ dv = re^{r^2}dr \xrightarrow{\int} \end{cases}}$

Subject

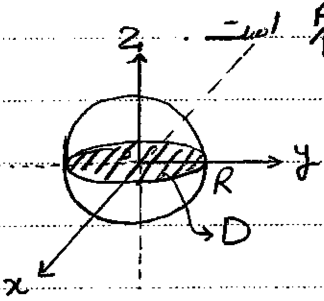
Date

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \longrightarrow |J|=\rho^2\sin\varphi \longrightarrow \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{1}\underbrace{\rho\sin\varphi\cos\varphi\,\rho\cos\theta\, e^{\rho^2}\cdot\rho^2\sin\varphi}_{\sin^2\varphi\cos\varphi\,\cdot\,\cos\theta\,\cdot\,\rho^4 e^{\rho^2}}\,d\rho\right)d\varphi\right)d\theta$$

از تغییر متغیر کروی:

$$\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\times\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi\times\int_0^1\rho^4 e^{\rho^2}\,d\rho = 1\times\tfrac{1}{3}\times\int_0^1\rho^3\times\rho e^{\rho^2}\,d\rho \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \begin{cases} u=\rho^3 \\ dv=\rho e^{\rho^2}\,d\rho \end{cases}$$

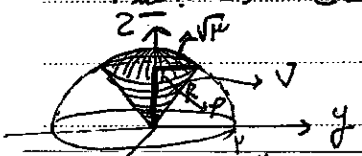
مثال) با مختصات کروی ثابت کنید حجم کره ای به شعاع R برابر است با $\frac{4}{3}\pi R^3$ است.



$$\text{حجم کره} = \iiint_V 1\,dV \overset{\text{کروی}}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{R}1\times\rho^2\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi\right)d\theta =$$

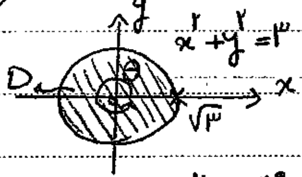
$$\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\times\int_0^{R}\rho^2\,d\rho = 2\pi\times(1+1)\times\tfrac{1}{3}R^3 = \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

مثال) حجم ناحیه محصور بین دو رویه $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ و $z=\sqrt{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2}$ را محاسبه کنید.



$$z^2=4-x^2-y^2 \rightarrow x^2+y^2+z^2=4$$

$$z^2=\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{3}y^2 \rightarrow$$



$$\text{حجم ناحیه } V = \iiint_V 1\,dV \overset{\text{کروی}}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^{2}1\times\rho^2\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi\right)d\theta =$$

$$1)\ \sin\varphi=\tfrac{\sqrt3}{2} \longrightarrow \varphi=\tfrac{\pi}{3}$$

محاسبه زاویه φ: $2)\ z=\sqrt{\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{3}y^2} \rightarrow z^2=\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{3}y^2 \xrightarrow{\text{مختصات کروی}} \rho^2\cos^2\varphi=\tfrac{1}{3}\rho^2\sin^2\varphi$

$$\tan^2\varphi=3 \rightarrow \tan\varphi=\sqrt3 \rightarrow \varphi=\tfrac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow \int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^{\pi/3}\sin\varphi\,d\varphi\times\int_0^{2}\rho^2\,d\rho = 2\pi\times\left(-\tfrac12+1\right)\times\tfrac{8}{3}=\tfrac{8}{3}\pi$$

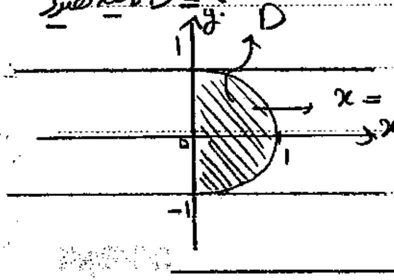
استوانه ای

مثال) انتگرال سه گانه زیر را از مختصات دکارتی به استوانه ای ببرید سپس آن را حل کنید.

$$\underbrace{\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}}}_{\text{ناحیه تصویر } D=?}\left(\int_0^{x}(x^2+y^2)\,dz\right)dx\right)dy =$$

همیشه در انتگرال سه گانه دو تا ناحیه بیرونی حدود D را مشخص می کنند

$$\text{حدود } r \text{ و } \theta: \begin{cases} 0\le r\le 1 \\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$\xrightarrow{\text{در مختصات استوانه ای}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^1\left(\int_0^{r\cos\theta}r^2\cdot r\,dz\right)dr\right)d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^1(r^4\cos\theta)\,dr\right)d\theta$$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \\ |J|=r \end{cases}$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\times\int_0^1 r^4\,dr = (1+1)\times\tfrac15=\tfrac25$$

Subject

Date

$$\int_0^2\left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}(xyz)\,dz\right)dy\right)dx =$$

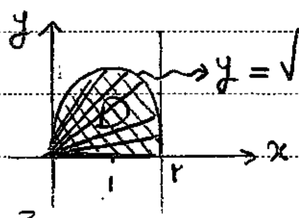
مثال) از مختصات کروی ببرید.

ناحیه تصویر $D = ?$

$$\xrightarrow{\text{در مختصات کروی}} \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2}\rho^3\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\theta\sin\theta\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi\right)d\theta$$

$$\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{-\left((x-1)^2-1\right)} =$$

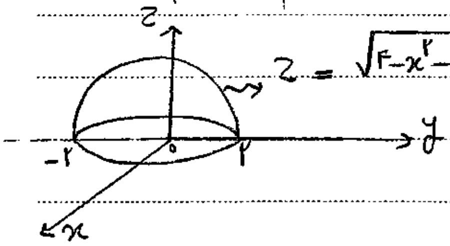
$$\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta \times \int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi \times \int_0^{2}\rho^5\,d\rho$$



$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{64}{6}$$

$0 \leq r \leq 2\cos\theta$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



کاربردهای فیزیکی در انتگرال‌های سه‌گانه:

اگر V یک ناحیه سه بعدی مادی در فضا باشد بطوریکه در آن چگالی حجمی با تابع $\rho(x,y,z)$ تعریف می‌شود.

(اگر در تمام نقاط ناحیه V مقدار چگالی حجمی ثابت باشد آن ناحیه را یک ناحیه همگن گوییم)

در این صورت:

۱) محاسبه‌ی جرم ناحیه V:
$$\text{جرم}\; M = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dV$$

۲) محاسبه گشتاورهای استاتیک (گشتاور جرم) نسبت به محورها، مبداء و صفحات مختصات:

$$\text{گشتاور کل استاتیک} = \iiint_V (\text{فاصله از} \ldots) \times \rho(x,y,z)\,dV$$

نسبت به محورها x: $M_x = \iiint_V \sqrt{y^2+z^2}\times\rho(x,y,z)\,dV$

y 〃 〃: $M_y = \iiint_V \sqrt{x^2+z^2}\times\rho(x,y,z)\,dV$

z 〃 〃: $M_z = \iiint_V \sqrt{y^2+x^2}\times\rho(x,y,z)\,dV$

〃 مبداء 〃: $M_0 = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\rho(x,y,z)\,dV$

〃 صفحه‌ی xy 〃: $M_{xy} = \iiint \sqrt{z^2}\times\rho(x,y,z)\,dV$

xz 〃 〃: $M_{xz} = \iiint y\times\rho(x,y,z)\,dV$

zy 〃 〃: $M_{zy} = \iiint x\times\rho(x,y,z)\,dV$