فصل اول

مدارهای فشرده وقوانین کیرشف

مدارهای الکتریکی هیچگونه تازگی برای شما نداردوهمه شما درسالهای پیش،درفیزیک دبیرستان و فیزیک دورهٔ عمومی وشاید هم درپاره‌ای از درسهای مهندسی با آنها مواجه بوده‌اید . معهذا مطالعهٔ مدارها ممکن‌است تا بحال بطورسطحی انجام‌گرفته باشد وشاید اغلب، حالتهای‌خاص بررسی شده باشد . دراین کتاب، نظریه اساسی مدارهای الکتریکی بطور «منظم»(۱) بنیان‌گذاری می‌شود . بطوریکه وقتی خواننده این کتاب را بپایان میرساند ، ازلحاظ درك مدارها وتوانائی تجزیه و تحلیل درست هرمدار داده شده ، از خود مطمئن خواهد بود . علاوه براین ، ضمن تشریح اصولی نظریه مدارها ، خواننده با چند مفهوم اساسی دیگر که دربسیاری از رشته‌های مهندسی ، مانند ارتباطات ، کنترل و سیستمهای مکانیکی حائز اهمیت می‌باشندآشنا خواهد شد. بدینسان ، یك درس اصولی‌درنظریه مدارها ، دربرنامهٔ‌آموزشی یك مهندس ، بخصوص یك «مهندس برق» ، جنبهٔ اساسی دارد .

نظریه مدار (وهررشته مهندسی دیگر) متکی برمفهوم مدل سازی است . برای تجزیه و تحلیل هرسیستم فیزیکی پیچیده ، باید آن را بتوان بصورت یك مدل ایده‌آل(۲) ، که ازبهم پیوستن جزءهای ایده‌آل تشکیل می‌شود ، توصیف نمود . جزءهای ایده‌آل مدلهای ساده‌ای هستند که بمنظور نمایش‌دادن یا برآورد تقریبی خواص عناصر فیزیکی ساده یا پدیده‌های فیزیکی بکارمیروند. گرچه عناصروپدیده‌های فیزیکی را فقط می‌توان بطور تقریب توصیف نمود ، ولی عناصر ایده‌آل ، دقیقاً بموجب تعریف مشخص می‌شوند . درنظریه مدار ، ما مدارهایی راکه از عناصر ایده‌آل تشکیل می‌شوند بررسی‌می کنیم و همچنین خواص کلی آنهارا موردمطالعه قرارمیدهیم. برای یك مدار فیزیکی داده شده،میتوان مدلهای ایده‌آل آنرا درچند مرحله بدست آورد بقسمی که طرزکار این مدلها با طرزکار مدار فیزیکی بتدریج بهم نزدیکتر گردند . با تجزیه و تحلیل مدل مدار ، می‌توان طرز کار مدار فیزیکی را پیش‌بینی نموده ومدارهای بهتری طرح نمود .

مدلهائی که درنظریهٔ مدار بکار میروند مشابه مدلهای آشنا درمکانیك کلاسیك ، مانند ذره(۳) و

---

۱ — Systematic ۲ — Ideal

۳ — Particle

جسم سخت[۱] میباشد. بخاطر آورید که ذره مدل یک شی بسیار کوچک میباشد. بموجب تعریف، یک ذره ابعاد فیزیکی صفر داشته ولی دارای جرم مثبت، موقعیت، سرعت وشتاب مشخصی میباشد. بطریق مشابه، فرض میشود که یک جسم سخت دارای شکل، جرم و **اینرسی** معینی بوده هرقدر نیروی وارد باین جسم زیاد باشد فاصلهٔ بین هیچ دونقطهٔ آن تغییر نمی‌کند. در دنیای فیزیکی، وقتی دقیقاً صحبت کنیم، چیزی مانند یک ذره یا جسم سخت وجود ندارد. درحالیکه درطرح ماشینها، هواپیماها، وموشکها این گونه مدلهای ایده‌آل بطور موفقیت آمیزی بکار میروند. اجزاء مدار مانند آنهایی که در فصل ۲ موردبحث قرار می‌گیرند، مدلهائی‌هستند که عنصر فیزیکی‌را دقیقاً وبدون‌تقریب مشخص‌میکند. آنها ایده‌آل شدهٔ خواص فیزیکی عناصر عملی که بطور تجارتی عرضه می‌شوند هستند. یک مدار، از بهم پیوستن اجزاء مدار تشکیل می‌شود وما مدارهای عملی را بکمک مدلهای ایده‌آل شدهٔ آنها طرح و تجزیه و تحلیل می کنیم.

بطور کلی‌دونوع‌مداروجود دارد: «مدارهای‌فشرده»[۲] و«مدارهای گسترده[۳]». دراین کتاب، ما تنها مدارهای‌فشرده را درنظرخواهیم گرفت. این کار به دو دلیل انجام میگیرد: اول اینکه فهمیدن وطرح مدارهای فشرده ساده‌تر است. آنها مشابه سیستم‌های مکانیکی هستند که از مجموعهٔ ذره‌هایی که رویهم اثر متقابل‌میکنند تشکیل می‌شوند. دوم اینکه نظریه مدارهای گسترده را می‌توان برمبنای‌مدارهای فشرده قرار داد. درواقع یک‌مدار گسترده را می‌توان بصورت حد ودنباله‌ای از مدارهای فشرده درنظر گرفت، همانطوریکه معادلات تارمرتعش[٤] و غشاء[٥] را می‌توان بصورت حد سیستمی از ذره‌های عمل کننده رویهم، وقتیکه تعداد ذرات بسمت بینهایت وفاصلهٔ آنها بسمت صفر میل میکند درنظر گرفت.

۱- مدارهای فشرده

مدارهای فشرده از بهم پیوستن «عناصر فشرده» بدست میآیند. مثالهائی از عناصر فشرده عبارتند ازمقاومت، سلف، خازن وترانسفورماتور که‌درآزمایشگاه با آنها مواجه بوده‌اید و می‌توانید آنها را روی‌دستگاه رادیو هم ببینید. خاصیت عمدهٔ عناصر فشرده کوچکی‌اندازهٔ آنها میباشد (درمقایسه باطول موجی که با فرکانس طبیعی کارآنها متناظر است). ازنقطه

---

۱ — Rigid body
۲ — Lumped Circuits
۳ — Distributed Circuits
٤ — String
٥ — Membrance

نظر کلی حوزهٔ الکترومغناطیسی ، عناصر فشرده ویژگی‌های نقطه‌ای[1] هستند . یعنی ابعاد فیزیکی آنها قابل صرفنظر کردن است. ازاین لحاظ ، آنها مشابه یک ذره می‌باشند. عناصر فشرده ممکن است ، مانند مقاومت یا خازن ، دوسر داشته باشند ویا ، مانند ترانسفورماتور و ترانزیستور ، بیش از دوسر داشته باشند . برای عناصر فشرده «دوسر» میتوان نشان‌داد که قوانین عمومی مربوط به حوزه الکترومغناطیسی ، توأم با محدودیت اندازهٔ فیزیکی که در بالا بآن اشاره شد لازم میدارند که جریانی که وارد یک سرآن میشود با جریانی که از سر دیگر خارج می‌شود برابر باشد ، و اختلاف ولتاژ دوسر را ، با اندازه‌گیری فیزیکی ، میتوان بدون هیچ ابهامی مشخص نمود . بنابراین «برای عناصر فشرده دو سر جریانی که ازعنصر می گذرد و ولتاژ دوسرآن کمیت‌های کاملاً معینی هستند ، و برای عناصر فشرده‌ای که بیش از دوسر دارند جریانی که وارد هرسر می‌شود و ولتاژ بین هرجفت سر نیز ، درهمه لحظه‌ها ، کمیت‌های کاملاً معینی می‌باشند» .

دربقیه این کتاب ، هرنوع بهم پیوستنی از عناصر فشرده را که درآن ابعاد مدار در مقایسه باطول موج متناظر با بالاترین فرکانس موردنظر کوچک باشد **مدار فشرده** گفته خواهد شد .

مادامیکه این محدودیت اندازهٔ مدار برقرار باشد ، قوانین جریان و ولتاژ کیرشف (که دربخش‌های ۳ و ٤ مورد بحث قرار خواهند گرفت) معتبر خواهند بود . محدودیت فوق نتیجهٔ این واقعیت است که قوانین کیرشف با تقریب از معادلات معروف ماکسول ـ که قوانین عمومی میدان الکترومغناطیسی را بیان می کنند ـ نتیجه می‌شوند . تقریب فوق ، مشابه این واقعیت است که قوانین نیوتن درمکانیک کلاسیک ، با تقریب از قوانین مکانیک نسبیت[2] نتیجه می‌شوند . با وجود تقریبی بودن قوانین کیرشف و نیوتن ، می‌توان آنها را درتعداد زیادی ازمسائل عملی بکار برد و این اهمیت نظری وعملی زیادتری به این معادلات میدهد .

برای نشان‌دادن نتیجه محدودیت اندازهٔ یک مدار ، حالتهای زیر را درنظرمیگیریم:

(۱) بالاترین فرکانس برای یک مدارصوتی[3] ممکن است ۲۰ کیلوسیکل باشد که طول موج متناظر با آن :

---

۱ — Point singularities
۲ — Relativistic
۳ — Audio circuit

$$\lambda = \frac{۳\times ۱۰^{۸}}{۲۵\times ۱۰^{۳}} = ۱۲ \ \text{km} \approx ۷/۵$$ مایل (*)

می‌باشد . این مقدار خیلی بزرگتر از اندازهٔ یک مدار آزمایشگاهی است .

(۲) برای یک مدار کامپیوتر ، فرکانس ممکن است ۵۰۰ MHz باشد که در آن حالت :

$$\lambda = \frac{۳\times ۱۰^{۸}}{۵\times ۱۰^{۸}} = ۶۰ \ \text{Cm} \approx ۲$$ فوت

است و بنابراین تقریب فشرده ممکن است مناسب نباشد .

(۳) برای یک مدار مایکروویو که در آن λ مقداری بین ده سانتیمتر و یک میلیمتر است، ما باحفره‌های تشدید کننده[۱] روبرو خواهیم بود و درآنجا یاد میگیریم که معادلات کیرشف برای این تشدید کننده‌ها صدق نمی کنند زیرا آنها درفرکانسهایی که طول موج آنها درحدود اندازهٔ ابعاد حفره‌ها می‌باشند کار میکنند .

چنانکه قبلاً گفته شد ، یک **مدار فشرده** ، بموجب تعریف ، عناصر فشردهٔ بهم پیوسته است . دریک مدار فشرده ، عناصر دوسر **شاخه‌ها**[۲] وسرهای عناصر **گره‌ها**[۳] خوانده‌میشود+ . شکل (۱-۱) یک‌مدار فشرده را نشان‌میدهد که دارای‌چهار گره (که بصورت ❶ و ❷ و ❸ و ❹ شماره گذاری شده‌اند) وشش شاخه (که بصورت ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ و ۶ شماره گذاری شده‌اند) میباشد . ولتاژ دوسر یک شاخه (که **ولتاژ شاخه** خوانده میشود) وجریان داخل یک شاخه (که **جریان شاخه** خوانده می‌شود) متغیرهای‌اساسی موردتوجه درنظریه مدار هستند. بنابراین ، j_3 جریان شاخهٔ ۳ و v_3 ولتاژ شاخهٔ ۳ است.

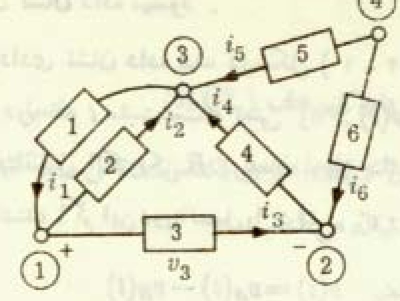
---

* نشانه $\approx$ یعنی «تقریباً مساوی است»

۱ — Cavity resonator ۲ — Branches

۳ — Nodes

+ ما اغلب کلمه‌های «گره» و «سر» را بجای‌هم بکار میبریم . بعدها کلمه «گره» مفهوم کلمه «سر» را بیان خواهد نمود که درآن چند عنصر بهم پیوسته‌اند . همچنین ، امروزه ، کلمه‌های «شاخه» و «عنصر» را بجای هم بکارمیبریم درحالیکه کلمهٔ شاخه ازبعضی لحاظ عمومی‌تراست .

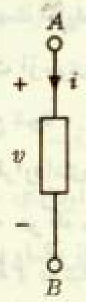


شکل ۱-۱- یک مدار فشرده با شش شاخه وچهار گره

بمنظور مشخص کردن جهت‌ها ، یک جهت قراردادی «بطور دلخواه» برای جریان و یک جهت قراردادی برای ولتاژ درنظر می گیریم . ما بخش بعد را به این جهت‌های قراردادی اختصاص میدهیم .

۲- جهت‌های قراردادی(۱)

یک عنصر فشرده دلخواه با دوسر A و B را مطابق شکل (۱ - ۲) درنظر میگیریم . این عنصر ممکن است مقاومت، سلف یا دیود(۲) باشد ، درحال‌حاضر ماهیت آن هیچ اهمیتی ندارد . برای تعمیم ، ما به‌این عنصر دوسر «شاخه» خواهیم گفت . برای یک مهندس بسیار لازم‌است که درمورد معنی جهت‌های قراردادی ولتاژ شاخه v و جریان شاخه i بسیار دقیق باشد . جهت قراردادی برای‌ولتاژ بوسیلهٔ علامتهای $+$ و $-$ ، که نزدیک سرهای



شکل ۱-۲- یک عنصر فشرده دوسر (یا یک شاخه) با گره‌های AوB . جهت قراردادی برای ولتاژ شاخه v و جریان شاخه i جهت‌های قراردادی نشان داده شده‌اند.

۱ — Reference directions

۲ — Diode

A و B درشکل (۱ - ۲) گذارده شده است ، نشان داده میشود . جهت قراردادی برای جریان بوسیله یک پیکان نشان داده میشود .

مطابق جهت قراردادی نشان داده شده در شکل (۱ - ۲) برای ولتاژ ، بموجب قرارداد، «ولتاژ شاخه v درلحظه t مثبت‌است» یعنی $[v(t)>o]$ اگر پتانسیل الکتریکی A درلحظهٔ t بزرگتر از پتانسیل الکتریکی B درهمان لحظه باشد و هردو پتانسیل نسبت به‌یک‌مبدأ سنجیده شده باشند، اگر این دوپتانسیل را بترتیب v_A و v_B بنامیم، دراینصورت:

$$v(t)=v_A(t)-v_B(t)$$

مطابق جهت قراردادی نشان داده شده درشکل (۱ - ۲) برای جریان ، « جریان i درلحظهٔ t وقتی مثبت است» [یعنی $i(t)>o$] که ، در زمان t ، شاری از بارهای‌مثبت ازگره A وارد شاخه شود و ازگره B خارج شود .

توجه به‌این نکته حائز اهمیت است که جهت‌های قراردادی را میتوان بطور دلخواه تعیین نمود . زیرا آنها بتنهائی دربارهٔ اینکه چه اتفاقی بطور فیزیکی درمدار رخ میدهد ، هیچ اطلاعاتی بما نمیدهند. بعنوان مثال ، فقط وقتیکه عبارت $v(t)>o$ با جهت‌قراردادی برای ولتاژ توأم گردد ، می‌توانیم دربارهٔ ولتاژهای نسبی گره‌های A و B اطلاعاتی بدست آوریم .

ازآنچه گفته شد واضح است که میتوان بیک شاخه ، یک‌جهت قراردادی دلخواه ولتاژ و یک جهت قراردادی جریان تعیین نمود واصولاً این‌جهت‌های قراردادی‌مستقلند. معمولاً متداول‌است که جهت‌هایی که **جهت‌های قراردادی‌متناظر** [۱] خوانده می‌شودانتخاب شوند . جهت قراردادی ولتاژ شاخه وجهت قراردادی جریان شاخه را **متناظر** گویندا گر جریان مثبت ازسری که علامت $+$ دارد وارد شاخه شده ازسری که علامت $-$ دارد از شاخه خارج شود . جهت‌های قراردادی نشان‌داده شده درشکل(۱ - ۱) و (۱ - ۲) هردو جهت‌های قراردادی‌متناظرمی‌باشند. با یادآوری یک‌مطلب اساسی از درس فیزیک ملاحظه می کنیم که هرگاه جهت‌های قراردادی متناظر بکار رود حاصلضرب $v(t)\ i(t)$ «توانی‌است که درلحظهٔ t به شاخه تحویل داده میشود» .

---

۱ — Associated reference direction

اکنون به‌بیان وتشریح جزئیات قوانین اصلی که درمورد مدارهای فشرده بکارمی‌روند می‌پردازیم .

۳- قانون جریان کیرشف (KCL)

ابتدا قانون‌جریان کیرشف‌را برای یک‌حالت‌خاص بیان کرده ، سپس مفهوم آنرا توسعه داده وصورت کلی آنرا بیان می کنیم .

قانون جریان کیرشف

درهر گره ازهرمدار الکتریکی فشرده ودرهر لحظه از زمان ، مجموع جبری جریان همه شاخه‌هایی که ازآن‌گره خارج میشوند برابرصفر است .

دربکاربردن KCL درهرگره خاص، ابتدا یک‌جهت قراردادی برای جریان هرشاخه تعیین‌می کنیم ودرجمع‌جبری به‌جریان شاخه‌هایی که جهت قراردادی‌آنها ازگره دور می‌شود علامت مثبت و بجریان شاخه‌هایی که جهت قراردادی آنها به‌گره نزدیک میشود علامت منفی میدهیم . بعنوان مثال ، وقتی KCL را درگره ❷ مدار نشان داده شده درشکل (۱ - ۱) بکاربریم چنین نتیجه میشود :

$$i_4(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0 \qquad \text{برای همه } t \qquad (۳-۱)$$

زیرا جریان شاخه i_4 دارای جهت قراردادی است که ازگره دور می‌شود درحالیکه جریان شاخه‌های i_2 و i_3 دارای‌جهت قراردادی‌هستند که به‌گره نزدیک می‌شوند. بطریق‌مشابه ، برای گره ❶ ، KCL بیان میداردکه :

$$-i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \qquad \text{برای همه } t \qquad (۳-۲)$$

که درآنجا جمله اول باید دارای علامت منفی باشد زیرا جهت قراردادی جریان i_1 به‌آن گره نزدیک می‌شود . دراین فصلهای مقدماتی ، معادلاتی‌که ازبکاربردن KCL در گره‌های مختلف بدست می‌آیند ، نظیرمعادلات (۱ - ۳) و (۲ - ۳) ، را «معادلات گره» می‌نامیم .

قانون جریان کیرشف دارای اهمیت بسیار زیادی است . ساده بودن این قانون و آشنایی قبلی ما با آن ممکن‌است برخی‌از خواص عمدهٔ آنرا پنهان سازد . بمنظور تأکید این خواص **تبصره‌های**[۱] زیر درج می‌شود .

تبصره ۱- KCL یک محدودیت «خطی» روی جریان شاخه‌ها برقرار میکند . بعبارت دیگر ، معادلات (۱ - ۳) و (۲ - ۳) معادلات‌جبری «خطی همگن»[۲] (باضرایب ثابت) ازمتغیرهای i_1 ، i_2 ، i_3 ، i_4 و i_5 میباشد .

تبصره ۲- KCL درمورد هرمدارالکتریکی فشرده بکارمیرود و اینکه عناصر مدار خطی ، غیرخطی، اکیتو، پسیو، تغییرپذیر با زمان ، تغییر ناپذیر با زمان و غیره باشند اهمیتی درکاربرد این قانون ندارد . (معنی دقیق این صفات درفصلهای بعد دیده خواهد شد) نحوه دیگر بیان این مطلب آنستکه بگوئیم : "KCL به ماهیت اجزاء مدار بستگی ندارد".

تبصره ۳- اگر بخاطر بیاوریم که جریان داخل یک شاخه ، مقدار بارالکتریکی جاری شده در واحد زمان ازآن شاخه را مشخص‌میکند، واضح است که KCL بیان‌میدارد که بارالکتریکی درهیچ گرهی‌جمع نمیشود. بعبارت‌دیگر ، « KCL اصل‌بقای بارالکتریکی را درهرگره بیان میکند» .

تبصره ٤- یک‌مثال برای‌حالتی‌که KCL درآن‌صدق‌نمی‌کند **آنتن شلاقی**[۳]، مثلاً درموتورسیکلت یک پلیس، میباشد. واضح است هنگامیکه آنتن کار میکند، جریانی درپایه آنتن وجود دارد درحالیکه جریان نوك آنتن درهرلحظه مساوی صفر است . ازطرف دیگر، این حقیقت را هم میدانیم که طول این آنتن درحدود یک چهارم طول موج متناظر با فرکانس کارآنتن است . بنابراین ، این آنتن یک مدار فشرده نیست و ما نباید انتظار داشته باشیم که KCL درموردآن صدق کند .

---

۱ — Remarks ۲ — Homogeneous

۳ — Whip antenna

٤- قانون ولتاژ کیرشف KVL

برای اینکه قانون ولتاژ کیرشف را بیان کنیم باید بدانیم که منظور ما از یک حلقه[۱] چیست . درفصل نهم، تعریف دقیق حلقه وقتیکه شبکه های کلی معرفی میشوند دیده خواهد شد . آنچه ظاهراً احساس می‌شود ، منظور از یک‌حلقه یک مسیر[۲] بسته است . بنابراین اگر ما یک مدار را بصورت تعدادی ازشاخه های بهم پیوسته درگرهها درنظر بگیریم، یک مسیر بدین ترتیب تشکیل میشود که ازیک گره شروع کرده یک یا چند شاخه را بطورمتوالی طی می کنیم ودریک گره‌دیگرمتوقف می‌شویم. یک‌مسیر بسته، مسیری‌است که گره‌ابتدایی و گره انتهایی آن رویهم منطبق باشند .

قانون ولتاژ کیرشف

درهر حلقه ازهر مدارالکتریکی فشرده ودرهرلحظه از زمان ، مجموع جبری ولتاژهای شاخه‌های حلقه برابر صفر است .

برای بکار بردن KVL ، یک‌جهت قراردادی برای‌حلقه تعیین میکنیم . درمجموع جبری که KVL را بیان میکند، ولتاژ شاخه‌هایی که جهت قراردادی‌آنها باجهت قراردادی حلقه یکی‌است‌را با علامت مثبت وولتاژ شاخه‌هایی که‌جهت قراردادی‌آنها باجهت‌قراردادی حلقه یکی نیست را با علامت منفی درنظر میگیریم .

مثال- مدار شکل (۱ - ٤) را درنظر بگیرید .

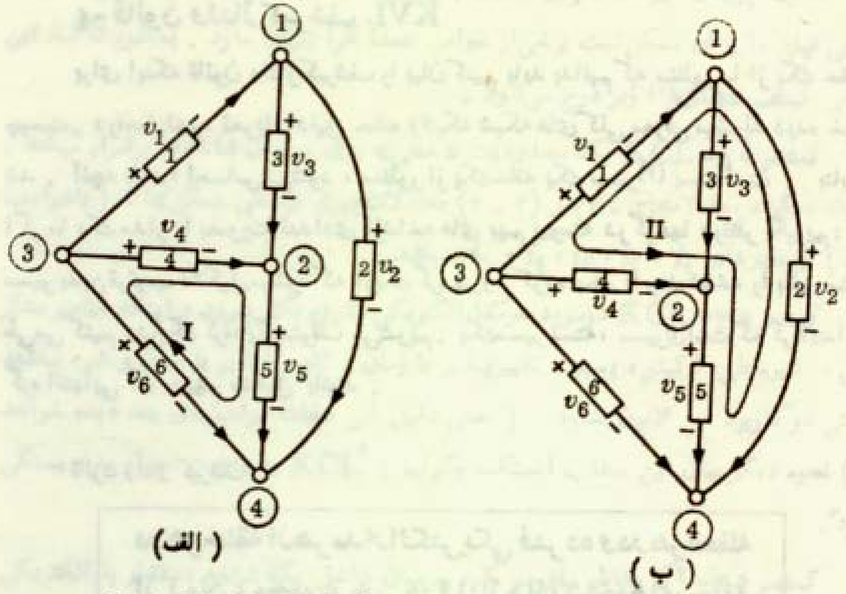
الف - وقتی KVL درحلقه I که ازشاخه‌های ٤ و ٥ و ٦ تشکیل می‌شود بکار رود چنین نتیجه می‌شود :

$$v_4(t)+v_5(t)-v_6(t)=0 \qquad \text{برای همه } t \qquad (4-1)$$

جهت قراردادی‌انتخاب شده برای‌این‌حلقه (مشخص‌شده با I) درشکل(۱-٤ الف) دیده می‌شود. جهت قراردادی ولتاژهای شاخه‌های ٤ و ٥ موافق جهت قراردادی حلقه I

---

۱ — Loop　　۲ — Path



شکل ۱-۴- مثال‌تشریح کننده KVL ، حلقه‌های I و II مشخص شده‌اند .

بوده درحالیکه جهت قراردادی ولتاژ شاخه ۶ موافق‌جهت‌قراردادی‌حلقه I نیست . بنابراین v_4 و v_5 را با علامت مثبت و v_6 را با علامت منفی درنظر میگیریم .

ب ـ وقتی KVL را درحلقه II کـه ازشاخه‌های ۱ و ۴ و ۵ و ۲ تشکیل میشود بکار بریم چنین نتیجه می‌شود :

$$\text{برای همه } t \qquad -v_1(t)+v_4(t)+v_5(t)-v_2(t)=0 \qquad (۲-۴)$$

جهت قراردادی این حلقه (مشخص شده با II) درشکل (۱ ـ ۴ ب) دیده میشود .

دراین فصلهای مقدماتی ، معادلاتی کـه از بکاربردن KVL درحلقه‌های مختلف بدست می‌آیـد ، نظیر (۱ ـ ۴) و (۲ ـ ۴) ، را معادلات حلقه می‌نـامیم . بمنظور تأکید اهمیت این‌قانون مهم ، تبصره‌های زیر درج میشود :

تبصره ۱- KVL یک محدودیت «خطی» بین ولتاژهـای شاخه‌های یک حلقه برقرار میسازد .

تبصره ۲- KVL درمورد هرمدارالکتریکی فشرده بکارمیرود و اینکه عناصر مدار

خطی ، غیرخطی ، اکتیو ، پسیو ، تغییرپذیر با زمان ، تغییرناپذیر با زمان و غیره باشند اهمیتی درکاربرد این قانون ندارد . بعبارت‌دیگر، «KVL به ماهیت اجزاء مدار بستگی ندارد» .

۵- طول موج و ابعاد مدار*

منظور ازاین بخش آنستکه بطور ساده و حسی[1] بحث کنیم که اگر ابعاد یک مدار قابل مقایسه یا حتی بزرگترازطول موج متناظر با بالاترین فرکانس موردنظر باشد چه‌اتفاقی روی میدهد . برای بررسی این شرط گیریم که d بزرگترین بعد یک مدار و c سرعت انتشار امواج الکترومغناطیس و λ طول موج بالاترین فرکانس موردنظر و f فرکانس باشد . این شرط بیان میدارد که :

d درحدود λ و یا بزرگتر از آنست (۱—۵)

حال $\tau \triangleq d/c$ زمان لازم برای انتشار امواج الکترومغناطیسی از یک سرمدار تا انتهای دیگر آنست+ . چون :

$$\frac{\lambda}{c}=\frac{1}{f}=T \qquad \text{و} \qquad f\lambda=c$$

که درآن T پریود بالاترین فرکانس موردنظر است . بنابراین شرط ارتباط دهنده ابعاد مدار وطول موج را می‌توان بطرز دیگری برحسب زمان ، بصورت زیر بیان کرد :

τ درحدود T و یا بزرگتر ازآنست (۲—۵)

بنابراین با بخاطر آوردن تبصره‌های مربوط به‌امکان بکار بردن KCL و KVL درفرکانسهای بالا ، میتوان گفت مادامیکه زمان انتشار امواج الکترومغناطیسی در داخل محیطی که مدار درآن قرار دارد بطور قابل ملاحظه‌ای کوچکتر از پریود بالاترین فرکانس موردنظر باشد KCL و KVL درمورد هرمدار فشرده‌ای برقرارست .

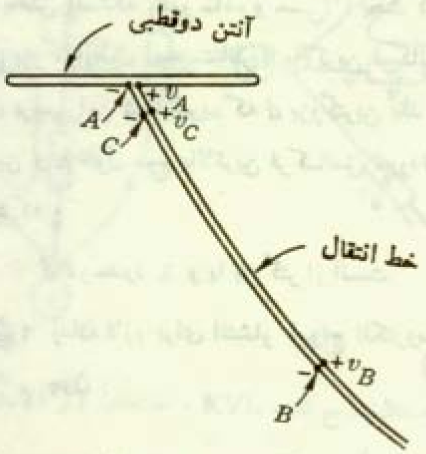
---

* بخش‌ها و زیر بخش‌هایی که با علامت * مشخص میشوند میتوانند بدون برهم زدن پیوستگی مطالب کتاب حذف شوند .

۱ — Intuitively

+ علامت $\triangleq$ بمعنی تساوی بموجب تعریف است .

مثال- برای درک اهمیت شرایط ذکرشده در (۱-۵) و (۲-۵) یک آنتن **دوقطبی**[1] گیرندهٔ FM و خط انتقال ۳۰۰ اهمی که آنرا به گیرنده متصل میکند را درنظر میگیریم. اگر ما خط انتقال را بررسی کنیم ملاحظه می‌شود که از دوسیم مسی موازی که داخل ماده عایقی پلاستیکی قراردارد وبوسیله همین ماده درفاصله ثابتی از یکدیگر نگاهداشته می‌شود،



شکل ۱-۵- یک آنتن دوقطبی که بیک خط انتقال وصل شده است.

تشکیل شده است. برای سادگی فرض میکنیم که خط انتقال ازسمت راست بینهایت طویل است (به شکل (۱ - ۵) مراجعه شود). اگر امواج الکترومغناطیسی با سرعت بینهایت منتشر شود، دراینصورت بمحض اینکه ولتاژی درآنتن القاء شود این ولتاژ بطور همزمان درهرقسمت خط ظاهر میگردد. اما برای ملاحظهٔ اینکه اگر سرعت انتشار بینهایت نباشد ومثلاً ۳×۱۰^۸ متر برثانیه باشد چه اتفاقی رخ میدهد، فرض می کنیم که یک ولتاژ سینوسی با فرکانس ۱۰۰ MHz درآنتن ظاهر شود. دراین‌صورت:

$$v_A(t) = V_0 \sin(2\pi \times 10^8 t)$$

که درآن V_0 ثابتی است برحسب ولت و t برحسب ثانیه بیان میشود. حال ببینیم که درنقطهٔ B که مثلاً بفاصلهٔ ۱٫۵ متری پائین خط قرار دارد چه اتفاقی‌می‌افتد. چون سرعت

1 — Dipole

انتشار برابر 3×10^{8} متر برثانیه است ولتاژ درنقطه B بمقدار :

$$1.5/(3 \times 10^{8}) = 5 \times 10^{-9}\ \text{sec}$$

نسبت به‌ولتاژ درنقطه A ، عقب می‌افتد و بنابراین :

$$v_B(t) = V_0 \sin(2\pi \times 10^{8})\,(t - 0.5 \times 10^{-8})$$

$$= V_0 \sin(2\pi \times 10^{8}\, t - \pi)$$

$$= -V_0 \sin(2\pi \times 10^{8}\, t) = -v_A(t)$$

درلحظه t ولتاژ خط درنقطه B درست مخالف ولتاژ نقطه A است ! حقیقت اصلی اینستکه تفاوت بین $v_A(t)$ و $v_B(t)$ ناشی از زمان انتشار میباشد که دراین حالت قابل صرفنظر کردن نیست . درواقع زمان انتشار از A تا B برابر ۵ nsec (5×10^{-9} sec) است و پریود کامل سیگنال سینوسی v_A برابر ۱۰ n sec است .

حال ، اگر برحسب طول موج فکر کنیم ، چنین بدست می‌آوریم که درفرکانس ۱۰۰ MHz :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^{8}}{10^{8}} = 3\ \text{m}$$

بنابراین فاصلهٔ A تا B نصف طول موج میباشد .

البته چنانچه ما v_A و v_C را باهم مقایسه می کردیم که درآن نقطه C مثلاً بفاصله یک سانتیمتری سمت راست A قرار دارد دراینصورت زمان انتشار از A تا C درحدود 4×10^{-11} sec بوده و :

$$v_C(t) = V_0 \sin\left[(2\pi \times 10^{8})\,(t - 4 \times 10^{-11})\right]$$

$$= V_0 \sin(2\pi \times 10^{8}\, t - 0.025)$$

یعنی فاز v_C بمقدار ۰٫۰۲۵ رادیان ، که تقریباً برابر ۱٫۳ درجه میباشد ، از v_A عقب‌تر است . بالنتیجه ، برای همه t ، $v_A(t) \approx v_C(t)$

خلاصه

● قوانین کیرشف ومدل عناصر فشرده یک مدار درصورتی معتبرند که بزرگترین بُعد فیزیکی مدار، درمقایسه با طول موج بالاترین فرکانس موردنظر، کوچک باشد. تحت این شرایط، ولتاژ دوسر هرشاخه، یا هرجفت گره، کاملاً معین می‌باشد و جریانیکه ازیک سر وارد هرعنصر میشود کاملاً معین بوده وبرابر جریانی‌است که ازسردیگرآن خارج می‌شود.

● قانون جریان کیرشف KCL بیان میکند که درهر گره از هرمدار الکتریکی فشرده و درهرلحظه از زمان، مجموع جبری‌جریانهای همه شاخه‌هایی که ازگره خارج‌میشوند برابر صفر است.

● قانون ولتاژ کیرشف بیان میکند که درهرحلقه از هرمدار الکتریکی فشرده و در هرلحظه از زمان، مجموع جبری ولتاژهای همه شاخه‌های حلقه برابر صفر است.

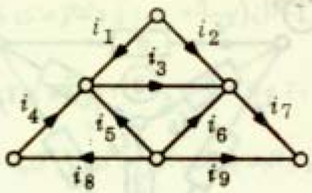
● قوانین کیرشف محدودیت‌های خطی روی ولتاژ شاخه‌ها و جریان شاخه‌ها برقرار میسازند و بعلاوه آنها به ماهیت عناصر مدار بستگی ندارند.

● هرگاه درشاخه‌ای جریان‌مثبتی‌از سری که علامت + دارد واردشده واز سری که علامت − دارد خارج شود، جهت قراردادی ولتاژ وجهت قراردادی جریان این شاخه را جهت‌های قراردادی متناظر مینامیم. با انتخاب‌جهت‌های قراردادی متناظر، توان تحویل داده شده به شاخه برابرباحاصلضرب ولتاژ شاخه و جریان شاخه میباشد.

مسائل:

محاسبه‌طول‌موج ۱- یک گیرنده‌FM توسط کابلی‌بطول‌۲m به‌آنتن‌متصل‌است. بادرنظر گرفتن اینکه گیرنده برای فرکانس ۱۰۰ MHz تنظیم شده است، آیا میتوان گفت که جریان‌لحظه‌ای در ورودی گیرنده باجریان‌درسرهای‌آنتن‌مساوی‌است؟ واگرچنین‌نیست، برای چه طول تقریبی کابل این جریانها برابر خواهند بود؟

KCL ۲- بعضی از جریانهای شاخه‌های مدار نشان داده شده درشکل (مسأله ۱-۲) مانند $i_1=2$ ، $i_3=1$ ، $i_7=2$ و $i_8=3$ معلوم‌است (برحسب آمپر).



شکل (مسأله ۲-۱)

آیا با این اطلاعات میتوانید جریانهای بقیه شاخه‌ها را حساب کنید ؟ توضیح دهید . (جریانهایی را که میتوانیدحساب کنیدتعیین کرده‌واطلاعات اضافی را که برای محاسبهٔ جریانهایی که نمیتوانیدحساب کنید احتیاج دارید بیان نمائید) .

KVL ۳- فرض کنید درمدار مسأله ۲ ، جهت‌های قراردادی متناظر برای ولتاژ شاخه‌ها انتخاب شده باشد ، و ولتاژهای شاخه‌های زیر داده شده باشند :

$$v_۱=v_۳=v_۶=v_۹=۱ \quad \text{ولت}$$

آیا با این اطلاعات میتوانید ولتاژهای بقیه شاخه‌ها را حساب کنید ؟ توضیح دهید .

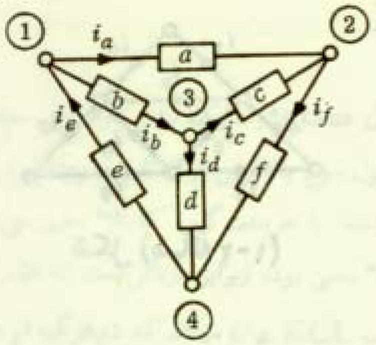
KVL و KCL ٤- درمدار نشان داده شده درشکل (مسأله ٤ - ۱) ، برای جهت‌های قراردادی متغیرهای شاخه‌ها جهت‌های قراردادی متناظر انتخاب می‌شود .

الف - KCL را برای گرههای ❶ ، ❷ ، ❸ و ❹ بکار برید . نشان دهید که معادله KCL که برای گره ❹ نوشته میشود نتیجه‌ای ازسه معادله پیشین است .

ب - حلقه‌ای را که شاخهٔ درونی نداشته باشد مِش[1] خوانند . KVL را برای سه مِش مداری که درشکل دیده میشود بنویسید . همچنین KVL را برای حلقه‌های afe - abdf - acde و bcfe بنویسید ونشان دهید که این‌معادلات نتیجه سه‌معادلهٔ مِش پیشین است .

---

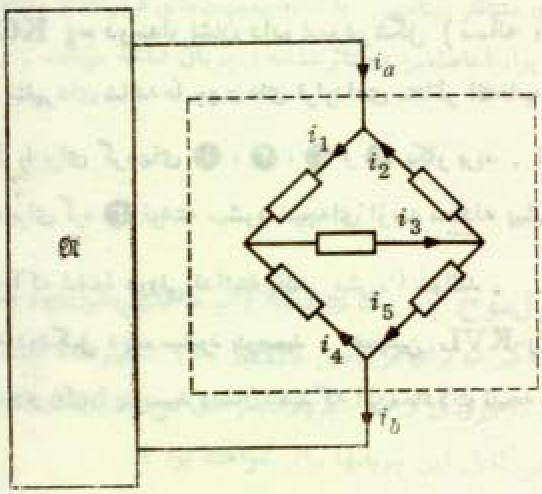
۱ — Mesh



شکل (مسأله ۴-۱)

حلقه ۵- درمدار نشان داده شده درشکل (مسأله ۴ - ۱) همه حلقه‌های ممکن را مشخص سازید .

KCL ۶- قسمتی از مدار نشان داده شده درشکل (مسأله ۶ - ۱) که باخط چین مشخص شده‌است را میتوان بعنوان یک عنصر دوسر که به بقیه مدار $\mathcal{N}$ متصل است درنظر گرفت . آیا $i_a = i_b$ است ؟ پاسخ خود را ثابت کنید .

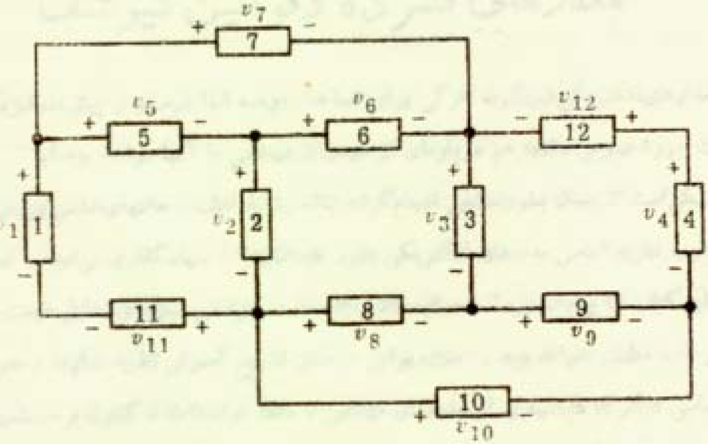


شکل (مسأله ۶-۱)

۷- KVL درمدار شکل (مسأله ۷-۱) ولتاژهای زیر برحسب ولت داده شده‌اند:

$$v_1=10 \text{ ، } v_2=5 \text{ ، } v_4=-2 \text{ ، } v_6=2 \text{ ، } v_7=-3 \text{ و } v_{12}=8$$

ولتاژهای شاخه هایی را که میتوانید بدست آورید تعیین کنید .



شکل مسألهٔ ۷-۱

۸- KCL درمدار شکل (مسأله ۷-۱) جریانهای شاخه‌ها درجهت‌های قراردادی متناظر اندازه‌گیری و نتایج زیر برحسب آمپر داده شده‌اند :

$$i_1=2 \text{ ، } i_7=-5 \text{ ، } i_4=5 \text{ ، } i_{10}=-3 \text{ ، } i_3=1$$

آیا میتوانید جریانهای بقیه شاخه‌ها را تعیین کنید؟ جریان شاخه هایی را که میتوانید بدست بیاورید تعیین کنید .

۹- KCL درمدار شکل (مسأله ۷-۱) جریانهای شاخه‌هادرجهت‌های قراردادی متناظر اندازه‌گیری شده‌اند . ثابت کنید :

$$i_1+i_2+i_3+i_4=0$$

$$i_7+i_6+i_8+i_{10}=0$$

فصل دوم

اجزاء مدار

عناصری که درساختمان مدارهای فشرده‌الکتریکی بکارمیروند عبارتند از: مقاومت ، دیود(۱)، ترانزیستور ، لامپ خلاء ، خازن ، سلف ، ترانسفورماتور و غیره . هرعنصری به منظور استفاده از یک خاصیت اصلی فیزیکی طرح شده است . متأسفانه معمولاً ساختن یک عنصر فیزیکی که فقط یک خاصیت اصلی فیزیکی را نشان دهد ممکن نیست . مثلاً یک مقاومت ، جسم هادی دوسری است که انرژی الکتریکی را به‌انرژی‌حرارتی تبدیل میکند و ولتاژ $v(t)$ دوسرآن تنها به‌جریان $i(t)$ داخل آن بستگی دارد . این ، یک تصویر فیزیکی تقریبی است زیرا هرجریانی یک حوزه مغناطیسی ایجاد میکند و درنتیجه هرمقاومتی مقداری انرژی درحوزه مغناطیسی خود ذخیره مینماید . معمولاً انرژی ذخیره شده آنقدر کم است که میتوان آنرا درتجزیه تحلیل و طرح مدار نادیده گرفت . بنابراین ، یک مقاومت را تنها بطور تقریبی میتوان بعنوان مدلی که درقانون اهم(۲) صدق میکند تصور نمود . این مدل سازی تقریبی نشان دهنده این واقعیت اساسی‌است که درتجزیه تحلیل وطرح مدارهای الکتریکی باید بادرنظرگرفتن «تقریب‌هائی»(۳) ،مدلهای‌مناسبی‌را انتخاب نمود، زیرا مطالعه دقیق‌خواص فیزیکی‌اغلب عناصرمدار ، تقریباً امکان‌پذیر نیست. دراینجا، موقعیت ما نظیر فیزیکدانی‌است که نمیتواند تشکیلات آزمایشی مورد استفاده خود را بطور کاملاً دقیق توصیف کند . مثلاً ، او بمعرفی مفهوم یک ذره میپردازد ، با اینکه میداند هرشیئی فیزیکی دارای ابعاد فیزیکی‌است ، یا یک جسم سخت را تعریف میکند ، درصورتیکه کلیه اجسام درفیزیک دارای‌خواص الاستیک هستند. با روش مشابهی درتئوری مدار، عناصر ایده‌آلی (درمقابل عناصر فیزیکی) تعریف میشوند که بعنوان **اجزاء مدار** (یا باختصار **اجزاء**) تلقی خواهند شد. کلیه این اجزاء مدار ، به مفهومی که درفصل اول بحث شد ، جزو عناصر فشرده خواهند بود . این عناصر ایده‌آل مدل‌های نظری هستند که ما نتایج آزمایشهای خود را برحسب آنها تعبیر کرده مدارهای عملی را طرح خواهیم‌کرد. در این فصل، ما به تعریف وبحث دربارهٔ خواص اجزاء مداری که دو سر دارند می‌پردازیم . این عناصر را **عناصر دوسر**(۴) می‌نامیم . درفصل هشتم اجزاء مدار دیگری معرفی خواهند شد که بیش از دوسر دارند .

---

۱ — Diode ۲ — Ohm's Law

۳ — Approximations ٤ — Two Terminal Elements

۱ - مقاومت‌ها

درفیزیک مقدماتی (فیزیک سال دوم) ، تنها مقاومتی که درقانون اهم صدق کند درنظر گرفته شد . یعنی ولتاژ دوسر چنین مقاومتی متناسب با جریانی است که از داخل آن میگذرد. وسائل الکترونیکی زیادی درمهندسی وجود دارند که درقانون اهم صدق نمیکنند ولی خواص‌مشابهی دارند . اینگونه وسائل بطور روز افزونی درسیستمهای کامپیوتر، کنترل و ارتباطات بکار میروند . بنابراین لازم است که شناسائی اجزاء اصلی یک مدار با دید وسیعتری انجام گیرد . بااین‌طریق میتوان درتجزیه تحلیل وطرح مدارهای مختلفی که در زمان حال یا آینده ممکن است با آن مواجه شویم ، آمادگی بیشتری داشت .

یک عنصر دوسر را **مقاومت** گویند، اگر درهرلحظه t از زمان، ولتاژ $v(t)$ وجریان $i(t)$ آن در رابطه‌ای که درصفحهٔ vi (یا صفحه iv) بوسیلهٔ یک منحنی تعریف میشود صدق کنند. این‌منحنی، **مشخصهٔ**[1] **مقاومت درلحظهٔ t** نامیده میشودومجموعهٔ مقادیری راکه جفت‌متغیرهای $v(t)$ و $i(t)$ درلحظهٔ t ممکن‌است‌دارا باشند معین‌میکند. معمولترین مقاومتی که بکارمیرود مقاومتی است که مشخصه آن با زمان تغییر نمیکند، این مقاومت را **تغییر ناپذیر بازمان**[2] گویند . مقاومتی را **تغییرپذیر بازمان**[3] گویند که مشخصه آن با زمان تغییر کند. در دیاگرامهای مداری ، یک مقاومت مانند شکل (۱ - ۱) کشیده میشود . درمورد یک مقاومت نکته‌اصلی آنست که بین مقدار «لحظه‌ای»[4] ولتاژ ومقدار «لحظه‌ای» جریان رابطه‌ای‌وجود دارد. نمونهٔ مشخصه‌های مقاومت‌ها درشکل‌های (۲ - ۱) تا (٤ - ۱) ، شکل(٦ - ۱) وشکلهای(۸ - ۱) تا (۱۲ - ۱) نشان‌داده شده‌اند.

شکل۱-۱ - نمایش یک مقاومت ، ملاحظه کنید که جهت قراردادی ولتاژ و جهت قراردادی جریان، جهت‌های‌قراردادی متناظر هستند .

---

۱ — Characteristic
۲ — Time-invariant
۳ — Time-variant
٤ — Instantaneous

هرمقاومتی را میتوان برحسب آنکه خطی یا غیرخطی، تغییرپذیر بازمان ویا تغییرناپذیر بازمان باشد، به‌چهارطریق طبقه بندی نمود. مقاومتی را **خطی**(۱) گویند که در هرلحظه از زمان، مشخصه آن خط مستقیمی باشد که از مبداء می گذرد. مقاومتی را که خطی نباشد **غیرخطی**(۲) گویند. اکنون به مطالعه جزئیات این چهار نوع مقاومت میپردازیم.

۱-۱- مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان

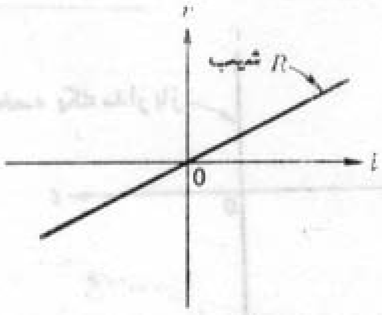
مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان طبق تعریف، مقاومتی است که مشخصه آن خط مستقیمی باشد که ازمبدأ گذشته و با زمان تغییرنکند، طبق شکل(۲ - ۱). بنابراین رابطهٔ بین مقدار لحظه‌ای ولتاژ $v(t)$ و مقدار لحظه‌ای جریان $i(t)$ طبق قانون اهم بصورت زیر بیان میشود:

$$v(t)=R\,i(t) \quad \text{یا} \quad i(t)=G\,v(t) \qquad (۱-۱)$$

که درآن:

$$R=\frac{1}{G} \qquad (۱-۲)$$

R و G مقادیر ثابت بوده به v و i و t بستگی ندارند. R را **مقاومت**(۳) و G را **رسانائی**(۴) گویند. درمعادلات (۱ - ۱) و (۲ - ۱) واحدهای ولتاژ، جریان، مقاومت



شکل۲-۱ - مشخصه یک مقاومت «خطی» درهرلحظه خط مستقیمی است که از مبداء میگذرد. شیب R درصفحه iv، مقدار مقاومت را معین میکند.

---

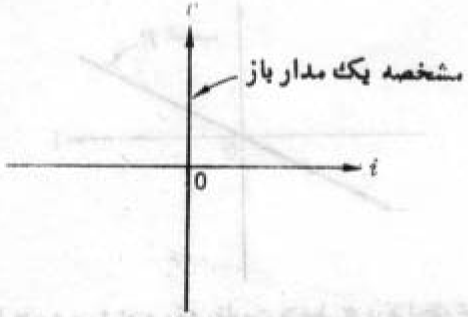
۱ — Linear　　۲ — Nonlinear

۳ — Resistance　　۴ — Conductance

و رسانائی بترتیب عبارتند از ولت ، آمپر ، اهم‌ومهو[۱] . توجه کنید که درمعادله (۱-۱)، رابطهٔ بین $i(t)$ و $v(t)$ برای یک‌مقاومت‌خطی تغییرناپذیر بازمان‌بوسیلهٔ یک «تابع خطی» بیان میشود. معادله اول(۱-۱)، $v(t)$ را بصورت یک تابع خطی $i(t)$ ومعادله دوم، $i(t)$ را بصورت یک تابع خطی $v(t)$ بیان‌میکند. چون مقاومت‌خطی تغییرناپذیر با زمان‌درمدارها اهمیت بسیاری دارد ازاین‌روعبارت زیر تأکید میشود : «یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان مقاومتی است که درقانون اهم داده شده درمعادله (۱-۱) صدق کند ، دراین معادله R و G مقادیر ثابت‌اند . »

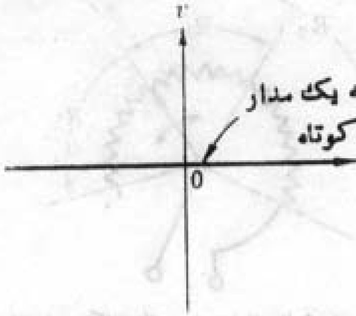
میتوان یک‌مقاومت کربنی[۲] را که درجه‌حرارت آن ثابت نگهداشته شده است بعنوان مدل یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان بیان نمود ، مشروط برآنکه حدود تغییرات ولتاژ وجریان‌آن بطورمناسبی‌محدود شود. آشکار است که اگر ولتاژ یا جریان بیش ازمقدار تعیین شده باشد مقاومت داغ شده وحتی ممکن‌است بسوزد.

دونمونه ویژه از مقاومتهای خطی تغییرناپذیر بازمان که موردتوجه خاص ما هستند عبارتند از «مدار باز[۳]» و «مدار با اتصال کوتاه[۴]» . یک عنصر دوسر را **مدار باز** گویند اگرجریان آن شاخه بازاء همه مقادیر ولتاژ شاخه مساوی صفر باشد . مشخصه یک مدار باز محور v درصفحهٔ iv میباشد طبق شکل(۳-۱) . این‌مشخصه دارای شیب بینهایت یعنی $R=\infty$ و یا $G=0$ است . یک عنصر دوسر را **مدار با اتصال کوتاه**



شکل۳-۱ - مشخصه یک مدار باز منطبق برمحور v است زیرا جریان آن همواره مساوی‌صفر است .

۱ — Mho
۲ — Carbon-deposited
۳ — Open circuit
۴ — Short circuit



شکل۴-۱ - مشخصه یک مدار با اتصال کوتاه برمحور i منطبق‌است زیرا ولتاژ آن‌همواره مساوی‌صفر است.

گویند اگر ولتاژ آن شاخه بازاء همه مقادیر جریان شاخه مساوی‌صفر باشد . مشخصه یک مدار با اتصال کوتاه محور i ازصفحه iv است طبق شکل (۱-۴) . شیب این مشخصه صفر است یعنی $R=o$ و یا $G=\infty$.

تمرین - با استفاده از قوانین کیرشف درستی عبارتهای زیر را تصدیق کنید :

الف : شاخه‌ای که‌ازاتصال سری یک‌مقاومت R ویک مدار باز تشکیل‌میشود دارای مشخصهٔ یک مدار باز است .

ب : شاخه‌ای که ازاتصال سری یک مقاومت R ویک مدار با اتصال کوتاه تشکیل میشود دارای مشخصهٔ مقاومت R است .

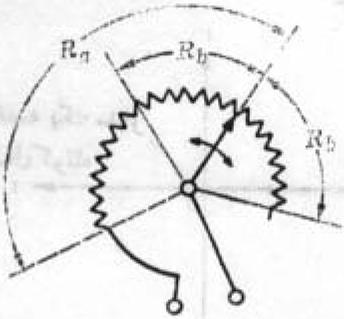
پ : شاخه‌ای که از اتصال موازی یک مقاومت R و یک مدار باز تشکیل میشود دارای مشخصهٔ مقاومت R است .

ت : شاخه‌ای که ازاتصال موازی یک‌مقاومت R ویک‌مدار با اتصال کوتاه تشکیل میشود دارای مشخصهٔ مدار با اتصال کوتاه است .

۲-۱- مقاومت خطی تغییرپذیر بازمان

مشخصهٔ یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان با معادله‌های زیر توصیف میشود :

$$\boxed{v(t)=R(t)\ i(t) \quad \text{یا} \quad i(t)=G(t)\ v(t)} \qquad (۱-۳)$$

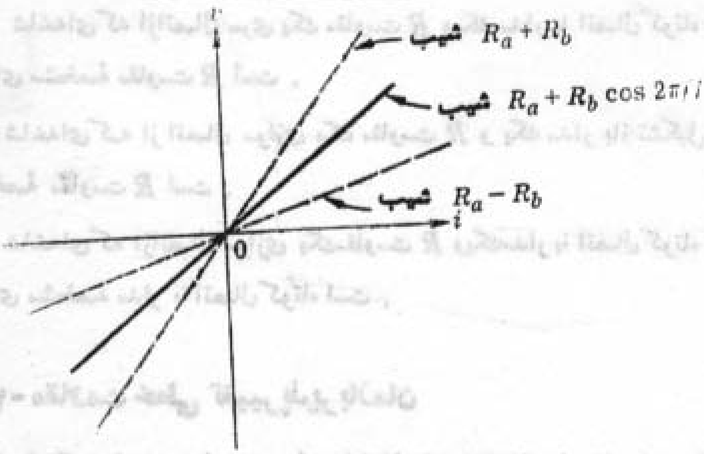


شکل۵-۱ - یک پتانسیومتر با اتصال لغزنده ، نمونه‌ای ازیک مقاومت خطی تغییرپذیر بازمان‌است

$$R(t)=R_a+R_b \cos ۲\pi f t$$

که درآن $R(t)=\frac{۱}{G(t)}$. واضح است که مشخصه درشرط خطی بودن‌صدق کرده ولی با زمان تغییر میکند . یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان درشکل (۵ - ۱) نشان داده شده است . اتصال لغزندهٔ پتانسیومتر(۱) بوسیلهٔ یک سروموتور(۲) بجلو و عقب حرکت میکند بطوریکه در زمان t مشخصه بصورت زیر است :

$$\boxed{v(t)=(R_a+R_b \cos ۲\pi f t)\ i(t)} \qquad (۱-٤)$$



شکل۶-۱ - مشخصهٔ پتانسیومتر شکل (۵-۱) درلحظه t

۱ — Potentiometer ۲ — Servomotor

که درآن R_a ، R_b و f مقادیر ثابت بوده و $R_a > R_b > o$ است. مشخصهٔ این مقاومت خطی تغییرپذیر بازمان درصفحه iv خط مستقیمی است که درتمام لحظات ازمبداء میگذرد، معهذا شیب آن درهرلحظه به زمان t بستگی دارد. با تغییر زمان، مشخصه بین دو خط باشیب‌های $R_a + R_b$ و $R_a - R_b$ بجلو وعقب نوسان میکند، مطابق شکل(۱-۶).

مثال ۱- مقاومتهای خطی تغییرپذیر با زمان با مقاومتهای خطی تغییرناپذیر بازمان یک فرق اساسی دارند. برای بررسی این موضوع گیریم که $i(t)$ یک تابع سینوسی بافرکانس f_1 باشد، یعنی:

$$i(t) = A \cos 2\pi f_1 t \tag{۱-۵}$$

که درآن A و f_1 مقادیر ثابت هستند. دراینصورت، برای یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان با مقاومت R ، ولتاژ شاخه که ازاین جریان ناشی میشود طبق قانون اهم بصورت زیر میباشد:

$$v(t) = RA \cos 2\pi f_1 t \tag{۱-۶}$$

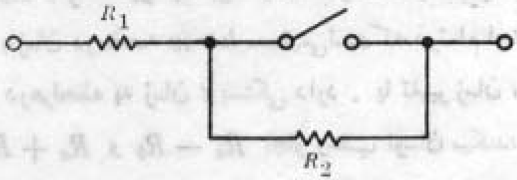
بنابراین جریان ورودی و ولتاژ خروجی هردو سینوسی بوده و دارای فرکانس «یکسان» f_1 هستند. ولی درمورد یک مقاومت خطی تغییرپذیر بازمان نتیجه دیگری بدست میآید. برای یک مقاومت خطی تغییرپذیر بازمان که توسط رابطه(۱-٤) مشخص شده، ولتاژ شاخه که از جریان سینوسی داده شده درمعادله (۱-۵) ناشی میشود عبارتست از:

$$\begin{aligned} v(t) &= (R_a + R_b \cos 2\pi f t) A \cos 2\pi f_1 t \qquad (۱-۷)\\ &= R_a A \cos 2\pi f_1 t + \frac{R_b A}{2} \cos 2\pi (f+f_1)t + \frac{R_b A}{2} \cos 2\pi (f-f_1)t \end{aligned}$$

ملاحظه میشود که این مقاومت خاص تغییرپذیر با زمان، میتواند سیگنالهائی با دوفرکانس جدید تولید نماید که این فرکانسها به ترتیب مساوی مجموع و تفاضل فرکانسهای سیگنال ورودی و فرکانس مقاومت تغییرپذیر با زمان میباشد. بنابراین مقاومتهای خطی تغییرپذیر بازمان‌را میتوان برای‌ایجاد یا تبدیل سیگنالهای سینوسی بکار برد. این خاصیت مقاومتهای خطی‌تغییرپذیر بازمان‌را «مدولاسیون[1]» گویند که درسیستمهای‌ارتباطی‌اهمیت بسزائی دارد.

---

1 — Modulation



شکل ۷-۱ - مدل یک کلید فیزیکی که هنگام باز شدن دارای مقاومت R_1+R_2 وهنگام بسته شدن دارای مقاومت R_1 میباشد. معمولاً R_1 خیلی کوچک و R_2 بسیار بزرگ است.

مثال ۲- میتوان یک کلید(۱) را بعنوان یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان درنظر گرفت که مقاومت آن هنگام باز و بسته شدن، از یک مقدار به مقدار دیگر تغییر میکند. یک کلید ایده‌آل هنگام باز بودن بصورت یک مدار باز و هنگام بسته بودن بصورت یک مدار با اتصال کوتاه میباشد. یک کلید عملی(۲) را میتوان با مدلی که از یک کلید ایده‌آل و دومقاومت تشکیل شده طبق شکل (۷ - ۱) نشان داد. کلیدی که بطور متناوب در فواصل منظم باز و بسته میشود یک عنصر مهم درسیستمهای ارتباطی دیجیتال است.

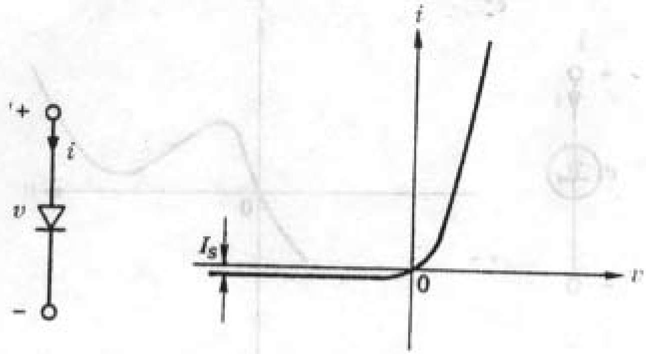
۳-۱- مقاومت غیرخطی

دیدیم مقاومتی را که خطی نباشد غیرخطی گویند. یک مثال نمونه‌ای از مقاومت غیرخطی دیود ژرمانیوم است. درمورد دیود پیوندی - pn(۳) که درشکل (۸ — ۱) نشان داده شده است جریان شاخه، یک تابع غیرخطی از ولتاژ شاخه و بصورت رابطه زیر است:

$$\boxed{i(t)=I_s\left(e^{qv(t)/kT}-1\right)} \qquad (1-8)$$

که درآن I_s مقدار ثابتی است که نشان‌دهنده جریان‌اشباع معکوس(۴) میباشد، یعنی‌جریان دیودوقتی که دیود درجهت عکس بایک ولتاژبزرگ بایاس(۵) شده باشد (یعنی با v منفی).

۱ — Switch
۲ — Practical
۳ — Junction Diode
۴ — Reverse saturation
۵ — Biased



شکل ۸-۱ - نمایش یک دیود پیوندی - pn و مشخصهٔ آن
که درصفحه vi رسم شده است .

پارامترهای دیگر رابطه (۸ - ۱) عبارتند از q (بار یک الکترون) ، k (ثابت بولتزمن) و T (درجه حرارت برحسب کلون) . در درجه حرارت‌اطاق، مقدار kT/q تقریباً مساوی ۰٫۰۲۶ ولت است . مشخصهٔ صفحه vi نیز درشکل (۸ - ۱) نشان داده شده است.

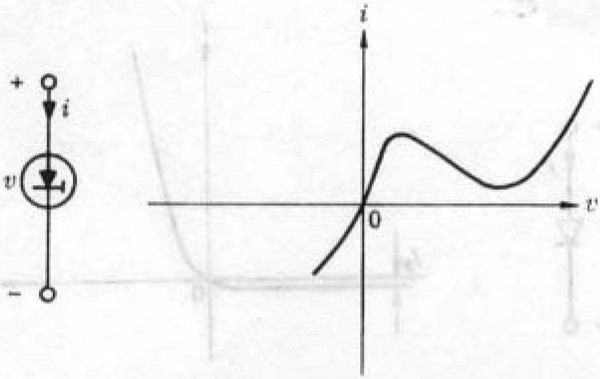
تمرین- نمونهٔ مشخصهٔ یک‌دیودپیوندی - pn را درصفحه vi با استفاده ازمعادله (۸-۱) که‌درآن $I_s = 10^{-4}$ آمپر و $kT/q \cong 0.026$ ولت‌است رسم نمائید .

مقاومت غیرخطی بعلت غیرخطی بودنش دارای‌مشخصه‌ای نیست که درتمام‌لحظات یک خط مستقیم گذرنده از مبداء صفحه vi باشد. مثالهای نمونه‌ای دیگری دربارهٔ وسائل غیرخطی دو سر ، که بتوان مدل‌آنها را بصورت یک مقاومت غیرخطی درنظر گرفت عبارتند از دیود تونلی[۱] و لامپ گازدار[۲]، که مشخصهٔ آنها درصفحهٔ vi در شکل های(۹ - ۱) و (۱۰ - ۱) نشان‌داده شده است. توجه کنید که‌درحالت‌اول، جریان i تابعی (تک‌ارزش[۳]) از ولتاژ v است ودرنتیجه میتوان نوشت :

کنترل میشود بوسیله ولتاژ - $\boxed{i = f(v)}$

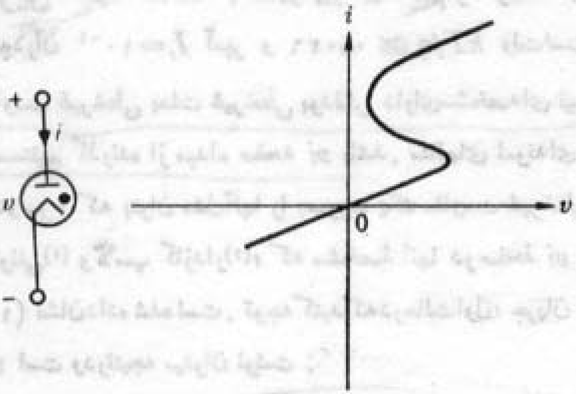
درحقیقت همانطور که درمشخصه نشان‌داده شده است بازاء هرمقدار ولتاژ v ، یک و تنها

۱ — Tunnel diode
۲ — Gas tube
۳ — Single-valued



شکل ۹-۱ - نمایش یک دیود تونلی ومشخصهٔ آن
که درصفحه vi رسم شده است .

یک مقدار ممکن برای جریان وجود دارد* . چنین مقاومتی را **کنترل شده بوسیله ولتاژ**(۱) نامند. ازطرف دیگر، درمشخصهٔ لامپ گازدار ولتاژ v یک تابع (تک ارز) از جریان i است زیرا برای هرمقدار i ، یک و تنها یک مقدار ممکن برای v وجود دارد.



شکل ۱۰-۱ - نمایش یک دیود گازدار ومشخصهٔ آن
که درصفحه vi رسم شده است .

* به بخش ۲ - ۱ ازضمیمه الف مراجعه شود .

۱ — Voltage-controlled

بنابراین میتوان نوشت :

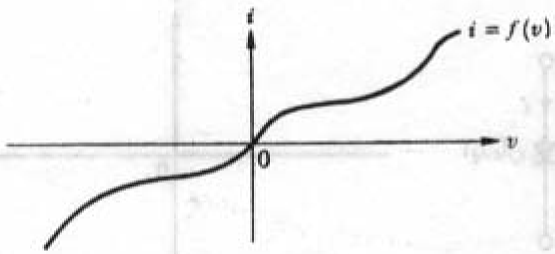
$$\boxed{v=g(i)}$$ مقاومت کنترل شده بوسیله جریان

چنین مقاومتی‌را **کنترل‌شده بوسیلهٔ جریان**[۱] نامند. این وسایل غیرخطی دارای یک خاصیت یکتا[۲] میباشند وآن اینکه، شیب مشخصه‌درقسمتی از دامنه تغییرات‌ولتاژ یاجریان منفی‌است وبه‌این‌جهت‌آنها را اغلب وسایل بامقاومت‌منفی‌مینامند که‌درمدارهای‌الکترونیکی دارای اهمیت زیادی میباشند . ازاین وسایل میتوان درمدارهای تقویت‌کننده ، نوسان‌ساز و مدارهای کامپیوتر استفاده‌کرد. دیود، دیود تونلی و لامپ‌گازدار مقاومتهای تغییرناپذیر با زمان میباشند، زیرا مشخصهٔ آنها با زمان تغییر نمیکند.

یک مقاومت غیرخطی میتواند هم بوسیله ولتاژ و هم بوسیله جریان همانطوریکه در شکل (۱۱ - ۱) دیده میشود کنترل شود، چنین مقاومتی‌را میتوان یا با :

$$\begin{cases} i=f(v) \\ v=g(i)=f^{-1}(i) \end{cases}$$
و یا با :

مشخص نمود که درآن g تابع معکوس f است . توجه کنید که شیب df/dv درشکل (۱-۱۱) بازاء تمام مقادیر v مثبت‌است، چنین‌مشخصه‌ای را «افزایشی یکنوا»[۳] گویند. مقاومت خطی با مقاومت مثبت حالت خاصی از چنین مقاومتی است که دارای مشخصهٔ



شکل۱۱-۱ - مقاومتی که دارای مشخصهٔ افزایشی یکنوا بوده وهم بوسیله‌ولتاژوهم بوسیله‌جریان کنترل‌میشود.

---

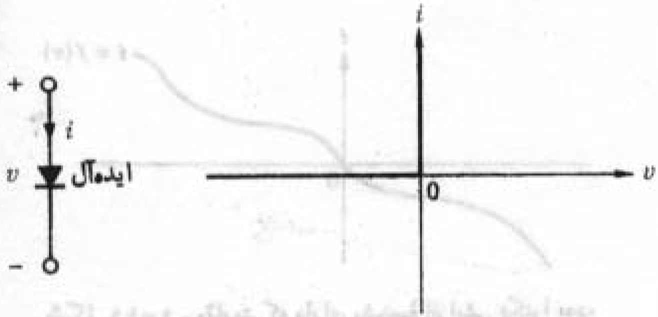
۱ — Current-controlled ۲ — Unique

۳ — Monotonically increasing

افزایشی یکنوا بوده ، هم بوسیله ولتاژ وهم بوسیله جریان کنترل میشود .

برای تجزیه و تحلیل مدارهای با مقاومت غیرخطی ، اغلب از روش تقریب خطی تکه‌ای(۱) استفاده میشود. دراین تقریب، مشخصه‌های غیرخطی بطورتقریبی بصورت قطعه خطهای مستقیم تکه تکه درنظر گرفته میشوند. مدلی که اغلب درتقریب خطی تکه‌ای مورد استفاده قرار میگیرد **دیود ایده‌آل** است. یک مقاومت غیرخطی دو سر را دیود ایده‌آل نامند اگر مشخصهٔ آن درصفحهٔ vi از دو نیم خط مستقیم ، محور v منفی و محور i مثبت ، تشکیل شده باشد. نمایش یک دیود ایده‌آل و مشخصهٔ آن در شکل (۱۲ - ۱) نشان داده شده است . وقتی $v<0$ باشد $i=0$ است ، یعنی برای ولتاژهای منفی ، دیود ایده‌آل مثل مدار باز عمل میکند . وقتی $i>0$ باشد $v=0$ است ، یعنی برای جریانهای مثبت ، دیود ایده‌آل مثل یک مدار با اتصال کوتاه عمل میکند .

دراینجا مناسب است که یک خاصیت متمایز مقاومت خطی که غالباً درمقاومت غیرخطی وجود ندارد معرفی شود. مقاومتی را **دوطرفه**(۲) نامند که مشخصهٔ آن یک منحنی متقارن نسبت به مبداء باشد . بعبارت دیگر ، هرگاه نقطهٔ (v و i) روی مشخصه باشد نقطهٔ ($-v$ و $-i$) نیز روی مشخصه قرار گیرد. واضح است که تمام مقاومتهای خطی دوطرفه هستند ولی اغلب مقاومتهای غیرخطی دوطرفه نیستند. پی‌بردن به نتایج فیزیکی خاصیت دوطرفه



شکل ۱۲-۱ - نمایش یک دیود ایده‌آل ومشخصهٔ آن که درصفحه vi رسم شده است .

---

۱ — Piecewise linear approximation ۲ — Bilateral

بودن حائز اهمیت است. درمورد یک عنصر دوطرفه لزومی ندارد که دوسر آن از همدیگر متمایز گردند ومیتوان عنصر را بهردوطریق به بقیه مدار وصل نمود. حال آنکه برای‌عنصری که دوطرفه نباشد مانند یک دیود، باید سرهایش دقیقاً از هم متمایز گردند.

تمرین ۱- نشان دهید که‌آیا مشخصه‌های شکلهای (۲ - ۱) تا (۴ - ۱)، شکل (۶ - ۱) و شکلهای (۸ - ۱) تا (۱۲ - ۱) دوطرفه هستند.

تمرین ۲- مشخصهٔ یک مقاومت غیرخطی دوطرفه را رسم کنید.

به منظور تشریح نحوهٔ کار یک مقاومت غیرخطی و بخصوص تأکید بروری اختلاف آن با یک مقاومت خطی، مثال زیر ذکر میشود.

مثال- یک مقاومت فیزیکی که مشخصهٔ آنرا بتوان بطور تقریب بامقاومت غیرخطی زیر تعریف نمود درنظر گیرید.

$$v=f(i)=50\,i+0.5\,i^3$$

که درآن v برحسب ولت و i برحسب آمپر است.

الف - گیریم v_1 و v_2 و v_3 ولتاژهای متناظر با جریانهای:

$$i_1=2 \quad \text{و} \quad i_2(t)=2\sin 2\pi 60\,t \quad \text{و} \quad i_3=10$$

آمپر باشند. v_1 و v_2 و v_3 را حساب کنید. چه فرکانسهائی در v_2 وجود دارند؟ گیریم v_{12} ولتاژ متناظر با جریان i_1+i_2 باشد آیا $v_{12}=v_1+v_2$ است؟ گیریم v'_2 ولتاژ متناظر با جریان ki_2 باشد که درآن k یک مقدار ثابت است آیا $v'_2=kv_2$ است؟

ب - فرض کنید فقط جریانهای حداکثر تا 10 mA (میلی‌آمپر) را درنظر گرفته بودیم. اگر برای محاسبهٔ تقریبی v، بجای مقاومت غیرخطی یک مقاومت خطی ۵۰ اهمی درنظر میگرفتیم حداکثر درصد خطا برای v چقدر میشد؟

حل- همه ولتاژهای زیر برحسب ولت میباشند.

الف.
$$v_1=50\times 2+0.5\times 8=104$$

$$v_2(t)=50\times 2\sin 2\pi 60\,t+0.5\times 8\sin^3 2\pi 60\,t$$
$$=100\sin 2\pi 60\,t+4\sin^3 2\pi 60\,t$$

با بخاطر آوردن اینکه برای تمام مقادیر θ ، $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ ، نتیجه میشود :

$$v_2(t) = 100 \sin 2\pi 60 t + 3 \sin 2\pi 60 t - \sin 2\pi 180 t$$

$$= 103 \sin 2\pi 60 t - \sin 2\pi 180 t$$

$$v_3 = 50 \times 10 + 0.5 \times 1000 = 1000$$

فرکانسهای موجود در v_2 عبارتند از ۶۰ Hz (فرکانس اصلی) و ۱۸۰ Hz (هارمونیک سوم فرکانس i_2) .

$$v_{12} = 50\,(i_1 + i_2) + 0.5\,(i_1 + i_2)^3$$

$$= 50\,(i_1 + i_2) + 0.5\,(i_1^3 + i_2^3) + 0.5\,(i_1 + i_2)\, 3\, i_1 i_2$$

$$= v_1 + v_2 + 1.5\, i_1 i_2\, (i_1 + i_2)$$

واضح است که $v_{12} \neq v_1 + v_2$ و اختلاف آنها بصورت زیر است :

$$v_{12} - (v_1 + v_2) = 1.5\, i_1 i_2\, (i_1 + i_2)$$

ازاینرو :

$$v_{12}(t) - [v_1(t) + v_2(t)] = 1.5 \times 2 \times 2 \sin (2\pi 60 t) \times (2 + 2 \sin 2\pi 60 t)$$

$$= 12 \sin 2\pi 60 t + 12 \sin^2 2\pi 60 t$$

$$= 6 + 12 \sin 2\pi 60 t - 6 \cos 2\pi 120 t$$

بنابراین v_{12} هارمونیک «سوم» وهمچنین هارمونیک «دوم» را دارا میباشد .

$$v'_2 = 50\, k\, i_2 + 0.5\, k^3\, i_2^3 = k(50\, i_2 + 0.5\, i_2^3) + 0.5\, k(k^2 - 1)\, i_2^3$$

بنابراین :

$$v'_2 \neq k v_2$$

و :

$$v'_2 - k v_2 = 0.5\, k\, (k^2 - 1)\, i_2^3 = 4 k\, (k^2 - 1) \sin^3 2\pi 60 t$$

ب ـ برای $i = 10\,\text{mA}$ داریم :

$$v = 50 \times 0.01 + 0.5\,(0.01)^3 = 0.5\,(1 + 10^{-6})$$

باجریان‌حداکثر ۱۰mA ، درصدخطا بخاطر تقریب‌خطی‌مساوی ۰٫۰۰۰۱ میباشد وبنابراین برای جریانهای کوچک، مقاومت غیرخطی‌را میتوان بایک مقاومت خطی ۵۰ اهمی تقریب نمود .

این مثال بعضی از خواص اصلی مقاومتهای غیرخطی را نشان میدهد . اول اینکه، ملاحظه میشود که یک مقاومت غیرخطی میتواند سیگنالهائی با فرکانس های متفاوت از فرکانس سیگنال ورودی تولید نماید و ازاین نظر شبیه مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان‌است که قبلاً درمورد آن بحث شد . دوم اینکه، اغلب میتوان مدل یک مقاومت غیرخطی را بطور تقریبی با یک مقاومت خطی جایگزین نمود بشرطی که دامنه تغییرات کار آن باندازهٔ کافی کوچک‌باشد. سوم اینکه، محاسبات بروشنی نشان‌میدهد که خاصیت‌همگنی وخاصیت جمع پذیری[1] هیچ یک صادق نیستند* . درضمیمه الف خواهیم‌دید که تابع f را **همگن** گویند اگر بازاء همه مقادیر x درمیدان آن و برای هرمقدار عددی α داشته باشیم :

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

تابع f را **جمع‌پذیر** گویند اگر بازاء هرجفت عنصر x_1 و x_2 درمیدان آن داشته باشیم:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

تابعی را **خطی** گویند که (۱) میدان[2] و دامنه[3] تغییرات آن فضاهای خطی باشند . (۲) همگن باشند . (۳) جمع‌پذیر باشند .

بالاخره یک‌مقاومت غیرخطی‌را میتوان برحسب‌اینکه تغییرناپذیر بازمان ویاتغییرپذیر بازمان باشد طبقه بندی نمود. بعنوان مثال، اگر یک دیود ژرمانیوم غیرخطی‌را دریک‌ظرف روغن غوطه‌ور نموده و درجه حرارت آنرا طبق برنامه معینی تغییردهیم دیود ژرمانیوم دارای مشخصهٔ یک مقاومت غیرخطی تغییرپذیر با زمان خواهد شد .

---

* به بخش ۳-۲ ضمیمه الف مراجعه شود .

۱ — Additivity ۲ — Domain

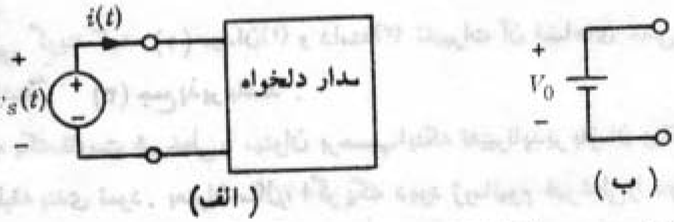
۳ — Range

۲- منابع نابسته

دراین بخش دو عنصر جدید ، منبع ولتاژ نابسته[۱] و منبع جریان نابسته معرفی میشود . منابع ولتاژ و جریان «نابسته» را برای متمایز ساختن‌آنها ازمنابع «وابسته[۲]» که بعداً با آنها مواجه خواهیم شد بیان میکنیم . برای سهولت ، اغلب واژه‌های « منبع ولتاژ » و « منبع جریان » را بدون صفت « نابسته » بکار خواهیم برد . این عمل نباید موجب اشتباه گردد زیرا هرگاه بامنابع‌وابسته مواجه شویم صریحاً بیان‌میکنیم که آنها منابع وابسته هستند .

۲-۱- منبع ولتاژ

یک عنصر دوسر را **منبع ولتاژ نابسته** گویند اگر یک ولتاژ معین $v_s(t)$ را در دوسر یک مدار دلخواه که بآن وصل شده‌است نگهدارد ، یعنی صرفنظر از جریان $i(t)$ که از داخل آن میگذرد ولتاژ دوسر آن بمقدار $v_s(t)$ بماند . توصیف کامل منبع ولتاژ لازم میدارد که مشخصات تابع v_s معین شود . نمایشهای منبع ولتاژ ومداردلخواهی که بآن‌وصل شده است درشکل (۲-۱ الف) نشان داده شده‌اند . اگر ولتاژ معین v_s ثابت باشد (یعنی وابسته بزمان نباشد) ، این منبع ولتاژ را یک « منبع ولتاژ ثابت » نامیده* و مانند شکل (۲-۱ ب) نمایش میدهند .



شکل۲-۱ - (الف) منبع ولتاژ نابسته که بیک مدار دلخواه وصل‌شده است.
(ب) نمایش یک منبع ولتاژ ثابت با ولتاژ V_0

---

* یک منبع ولتاژ ثابت را اغلب منبع dc ویا بطور ساده‌تر یک باتری مینامند.

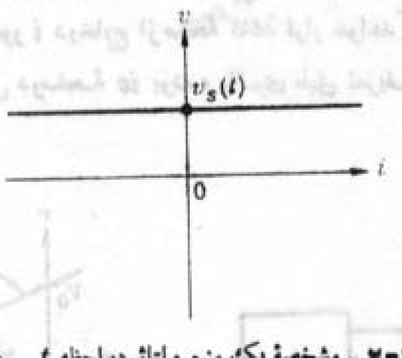
۱ — Independent Voltage source   ۲ — Dependent

بکار بردن جهت‌های قراردادی برای ولتاژ شاخه وجریان شاخهٔ یک منبع نابسته که «مخالف جهت‌های قراردادی متناظر» میباشند معمول و راحت‌تر است. تحت این شرایط، حاصلضرب $v_s(t)\, i_s(t)$ توانی است که منبع فوق به مدار دلخواهی که بآن وصل شده است «تحویل میدهد» (بهشکل (۱-۲ الف) مراجعه شود) .

منبع ولتاژ بنا به تعریف آن، درلحظه t دارای مشخصه‌ای بصورت یک خط مستقیم موازی با محور i و بعرض $v_s(t)$ درصفحه iv میباشد، مانند شکل (۲-۲) . یک منبع ولتاژ را میتوان بعنوان یک مقاومت غیرخطی درنظرگرفت زیرا هروقت $v_s(t) \neq 0$ باشد خط مستقیم از مبداء عبور «نمی کند». منبع ولتاژ یک‌مقاومت‌غیرخطی کنترل شده باجریان است، زیرا برای هرمقدار جریان یک ولتاژمنحصر بفرد متناظراست. اگر v_s یک مقدار ثابت نباشد منبع ولتاژ تغییرپذیر با زمان واگر v_s یک مقدار ثابت باشد تغییرناپذیر بازمان‌است .

« اگر ولتاژ v_s یک منبع ولتاژ متحد باصفر باشدمنبع‌ولتاژ معادل یک مدار با اتصال کوتاه میباشد » . درحقیقت مشخصهٔ این منبع برمحور i منطبق بوده و بازاء تمام مقادیر جریان درون آن، ولتاژ دوسرآن صفر است .

در دنیای فیزیکی‌دستگاهی بعنوان منبع‌ولتاژ نابسته وجودندارد* . معهذا دستگاههای



شکل۲-۲ ـ مشخصهٔ یک منبع ولتاژ درلحظه t . یک منبع ولتاژ را میتوان بعنوان یک مقاومت غیرخطی کنترل شده با جریان درنظرگرفت .

---

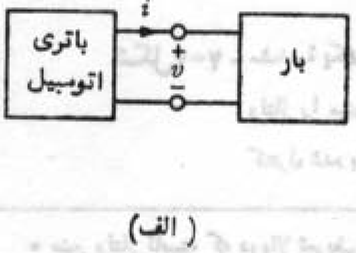
* منبع ولتاژ نابسته که دربالا تعریف شد ممکن است خیلی دقیق‌تر بصورت منبع ولتاژ نابسته «ایده‌آل» تعریف‌شود. بعضی‌ازمؤلفین‌منبع‌ولتاژ نابسته مارا «منبع‌ولتاژ ایده‌آل» مینامند. واضح‌است که صفت « ایده‌آل » زاید است چون همهٔ مدلها «ایده‌آل» هستند .

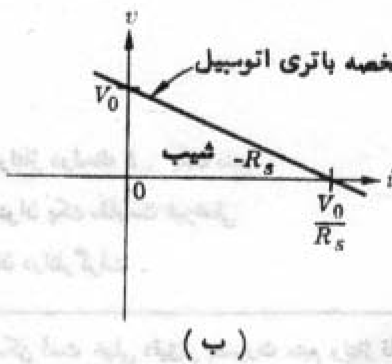
خاصی در دامنهٔ تغییرات‌معینی‌ازجریان، یک‌منبع ولتاژ را با تقریب بسیارخوبی‌نشان‌میدهند.

مثال- باتری اتوبیل دارای ولتاژ وجریانی است که به بار متصل بآن طبق‌معادله زیر بستگی دارد :

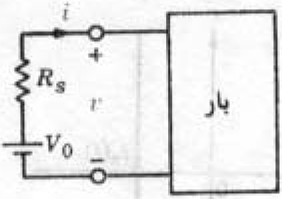
$$v = V_0 - R_s i \qquad (۲-۱)$$

که درآن v و i — به ترتیب ولتاژ و جریان شاخه میباشند ، طبق شکل (۳ - ۲ الف) . مشخصهٔ معادله (۱ - ۲) که درصفحهٔ iv رسم شده، درشکل(۳ - ۲ ب) نشان داده شده است. محل تقاطع مشخصه با محور v برابر V_0 است . V_0 را میتوان بعنوان ولتاژ مدار باز باتری تعبیر نمود ، یعنی ولتاژ دوسرآن وقتی که i صفر است . ثابت R_s را میتوان بعنوان مقاومت داخلی باتری درنظر گرفت . بنابراین، میتوان باتری‌اتومبیل را با یک مدار معادل متشکل از اتصال سری یک منبع ولتاژ ثابت V_0 و یک مقاومت خطی تغییر ناپذیر با زمان بامقاومت R_s نمایش داد، مطابق شکل(۴ - ۲) . برای تحقیق‌درستی مدارمعادل میتوان معادلات KVL را برای حلقهٔ شکل (۴ - ۲) نوشت ومعادلهٔ (۱ - ۲) را بدست آورد . اگر مقاومت R_s خیلی کوچک باشد شیب درشکل (۳ - ۲ ب) تقریباً صفر میشود و محل تقاطع مشخصه با محور i درخارج از صفحهٔ کاغذ قرار خواهد گرفت . اگر $R_s = o$ باشد مشخصه یک خط افقی درصفحهٔ iv بوده و باتری طبق تعریف فوق یک منبع ولتاژ ثابت است .





شکل۳-۲ - باتری اتومبیل که به یک بار دلخواه وصل شده و مشخصهٔ آن که درصفحه iv رسم شده است.



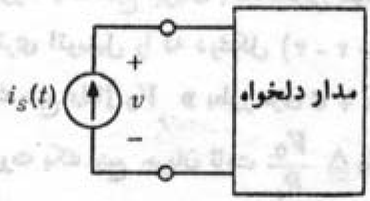
شکل ۴-۲ - مدار معادل باتری اتومبیل

۲-۲- منبع جریان

یک عنصر دوسر را **منبع جریان**[۱] **نابسته** گویند اگر جریان معین $i_s(t)$ را در داخل مدار دلخواهی که بآن وصل شده است نگهدارد ، یعنی صرفنظر از ولتاژ $v(t)$ که ممکن است در دوسر مدار باشدجریانی که بداخل مدار میرودمساوی $i_s(t)$ است. جهت‌های قراردادی بکار برده شده را دو باره مورد توجه قرار دهید . توصیف کامل منبع جریان لازم میدارد که مشخصات تابع i_s معین گردد. نمایش یک منبع جریان درشکل (۵ - ۲) نشان داده شده است .

مشخصهٔ یک منبع جریان درلحظه t خطی است عمودی بطول $i_s(t)$ که درشکل (۶ - ۲) نشان داده شده است . بنابراین یک منبع جریان را میتوان بعنوان یک مقاومت غیرخطی تغییرپذیر با زمان و کنترل شده با ولتاژ درنظر گرفت .

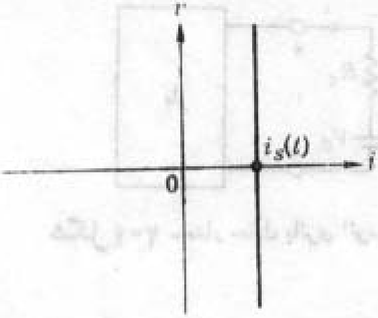
«اگر جریان i_s متحد با صفر باشد منبع جریان در واقع معادل یک مدار باز است» .



شکل ۵-۲ - منبع جریان نابسته که بیک مدار دلخواه وصل شده است .

---

۱ — Current source



شکل۲-۶ - مشخصهٔ یک منبع جریان . یک منبع جریان‌را میتوان بعنوان‌یک‌مقاومت غیر خطی کنترل شده با ولتاژ درنظر گرفت.

درحقیقت $i_s=o$ لازم میدارد که مشخصه برمحور v منطبق شده وبازاء تمام مقادیر ولتاژ دوسر عنصر ، جریان داخل آن صفر گردد .

۳-۲- مدارهای معادل تونن و نُرتن

درمورد منبع ولتاژ نابسته و منبع جریان نابسته مطالبی یاد گرفتیم . آنها مدلهای مداری ایده‌آل میباشند . اکثر منابع عملی‌مشابه باتری اتومبیل هستند که درمثال قبل شرح داده شد، یعنی آنهارا میتوان بشکل‌اتصال سری یک منبع ولتاژایده‌آل ویک مقاومت خطی تغییرناپذیر بازمان R_s نمایش* داد. دراین‌موقعیت، مناسب است که برای باتری‌اتومبیل نمایش معادلی که بصورت یک منبع جریان باشد معرفی شود .

اگر مشخصهٔ باتری اتومبیل را که درشکل (۳ - ۲ ب) رسم شده‌است درنظر گیریم، میتوان آنرا بصورت یک منبع ولتاژ V_0 « بطورسری » با یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان R_s ، ویا بصورت یک منبع جریان ثابت $I_0 \triangleq \dfrac{V_0}{R_s}$ «بطورموازی» بایک‌مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان R_s طبق شکل (۷ - ۲) درنظر گرفت .

---

* بطور دقیق‌تر بایستی « یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان با مقاومت R_s » گفته شود . معمولاً درشکلهای مداری مانند شکل(۷ - ۲ الف)، یک مقاومت خطی‌را با مقاومت R_s آن نشان میدهیم و برای سادگی آنرا فقط « مقاومت R_s » می‌نامیم .

چون دو مدار نشان داده شده دارای یک مشخصه میباشند آنها را معادل(۱) همدیگر گویند . درحقیقت با نوشتن قانون ولتاژ کیرشف برای مدار شکل (۷ - ۲ الف) داریم :

$$\boxed{v=V_0-R_s i} \qquad \text{(۲ – ۲ الف)}$$

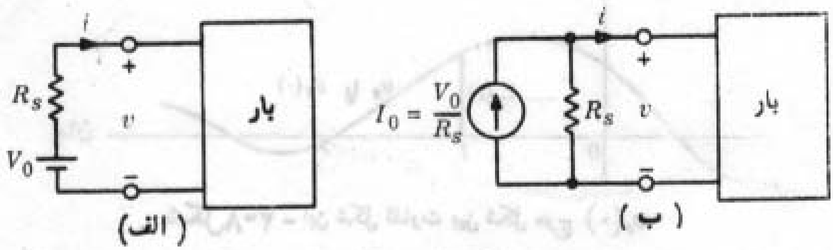
بطریق مشابه، با نوشتن قانون جریان کیرشف برای مدار شکل (۷ - ۲ ب) داریم :

$$\boxed{i=I_0-\frac{1}{R_s}v} \qquad \text{(۲ – ۲ ب)}$$

چون $I_0=\frac{V_0}{R_s}$ است، دومعادله فوق یکسان هستند و هردو یک خط مستقیم را در صفحه iv نشان میدهند .

اتصال سری منبع ولتاژ ومقاومت‌خطی تغییرناپذیر بازمان R_s نشان‌داده شده درشکل (۷-۲ الف) را مدار معادل تونن(۲) ، واتصال‌موازی‌منبع جریان ومقاومت خطی تغییرناپذیر بازمان R_s نشان داده شده درشکل (۷ - ۲ ب) را مدار معادل نرتن(۳) گویند . دربعضی موارد استفاده ازمنبع ولتاژ راحت‌تر ازمنبع جریان بنظر میرسد ودرموارد دیگراستفاده از منبع جریان آسانتر است . بنابراین مدارهای معادل تونن و نرتن انعطاف‌پذیری بیشتری دربررسی مسائل به ما میدهند .

معادل بودن این‌دومدار حالت خاص قضیه مدار معادل تونن‌ونرتن‌است که‌بعداً بطور مفصل درفصل شانزدهم مورد بحث قرار خواهد گرفت .



شکل۷-۲ - (الف) مدار معادل تونن، (ب) مدار معادل نرتن باتری اتومبیل

---

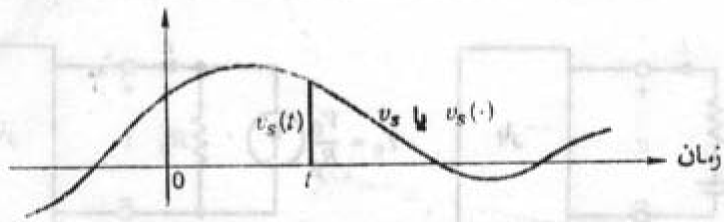
۱ — Equivalent ۲ — Thévenin

۳ — Norton

۴-۲- شکل موجها وطرز نمایش آنها

همانطور که قبلاً گفته شد برای تشریح کامل یک منبع ولتاژ v_s و یا یک منبع جریان i_s مشخصات کامل تابع زمانی آنها، یعنی $v_s(t)$ برای همه مقادیر t و یا $i_s(t)$ برای همه مقادیر t لازم است . بنابراین مشخصات منبع ولتاژ v_s یا باید شامل جدول بندی کامل تابع v_s بوده و یا شامل قاعده‌ای باشد که بکمک آن بتوان ولتاژ $v_s(t)$ را برای هرزمان t که ممکن است بعداً مورد توجه قرارگیرد محاسبه نمود . دراینجا به مشکل طرز نمایش(۱) برمی‌خوریم که درسرتاسر این درس با آن روبروخواهیم‌بود، یعنی‌بعضی‌مواقع «همه تابع v_s» موردنظر است ، مانند شکل موجی(۲) که روی اسیلوسکوپ مشاهده میشود ، و بعضی اوقات فقط یک مقدار بخصوص مانند $v_s(t)$ در زمان t موردنظر است . اختلاف این دومفهوم درشکل (۸ - ۲) تشریح شده است . هرگاه بخواهیم تأکید کنیم که منظور تمام تابع است، عبارت «**شکل موج** $v_s(\cdot)$» بکار خواهد رفت وبجای حرفی مانند t یک نقطه گذاشته میشود ، چون یک مقدار خاص t موردنظر نیست بلکه « تمام تابع » موردنظر است .

متأسفانه پیروی‌دقیق‌این رویه‌منجر به‌عبارتهای بسیار پیچیده میشود . بنابراین زمانیکه باید « شکل موج $f(\cdot)$ ، که درآن برای تمام مقادیر t ، $f(t) = \cos \omega t$ » می‌باشد گفته شود ، اغلب برای سهولت « شکل موج $\cos \omega t$ » گفته میشود .



شکل۸-۲ - این شکل تفاوت بین شکل موج $v_s(\cdot)$ وعدد $v_s(t)$ راکه مقدار تابع v_s در لحظهٔ t میباشد نشان میدهد .

۱ — Notation ۲ — Waveforms

یک استفاده نوعی[۱] از تفاوت بین دومفهوم « تمامی تابع » و مقداری که تابع در یک لحظه t بخود میگیرد بشکل زیر است. مدار پیچیده‌ای را که از تعدادی مقاومت، سلف و خازن تشکیل یافته و فقط با یک منبع جریان تحریک میشود درنظر گیرید. ولتاژ دو سر یکی ازخازنها را v_c بنامید. میتوان گفت که پاسخ[۲] $v_c(t)$ (یعنی « مقدار پاسخ در لحظه t ») به شکل‌موج $i_s(\cdot)$ (یعنی « تمامی تابع i_s ») بستگی دارد. استفاده از این طرز بیان بمنظور تأکید این‌مطلب است که $v_c(t)$ نه تنها به $i_s(t)$ (مقدار i_s درلحظهٔ t) بستگی دارد بلکه به تمام مقادیر پیشین i_s نیز وابسته است.

۵-۲- بعضی شکل موجهای نمونه

اکنون بتعریف بعضی شکل‌موجهای‌مفید که بعداً بطورمکرر مورداستفاده قرارخواهند گرفت می‌پردازیم.

« مقدار ثابت » این ساده‌ترین شکل موج‌است و بصورت زیر توصیف میشود:

$$f(t)=K \qquad \text{برای تمام مقادیر } t$$

که درآن K یک مقدار ثابت است.

« سینوسوئید » برای نمایش یک‌شکل‌موج سینوسی‌ویابطورخلاصه **سینوسوئید**[۳] طرز نمایش متداول زیر بکار میرود:

$$f(t)=A\cos(\omega t+\Phi)$$

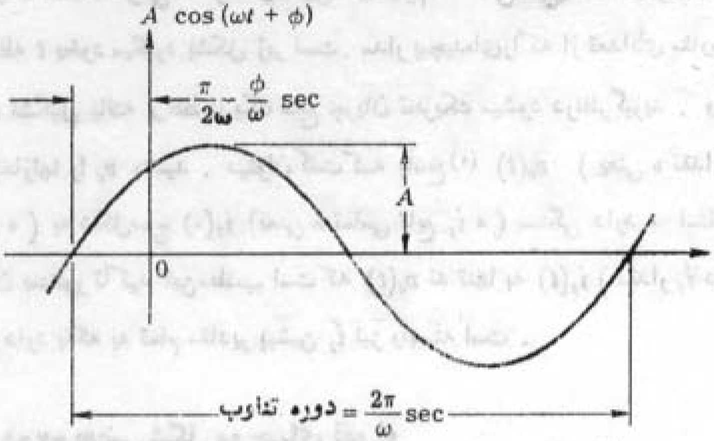
که درآن ثابت A **دامنه**[۴] سینوسوئید، ثابت ω **فرکانس**[۵] (زاویه‌ای) (برحسب رادیان برثانیه) و ثابت Φ **فاز**[۶] نامیده میشود. سینوسوئید درشکل (۹ - ۲) نشان داده شده است.

---

۱ — Typical　　۲ — Response

۳ — Sinusoid　　۴ — Amplitude

۵ — Frequency　　۶ — Phase



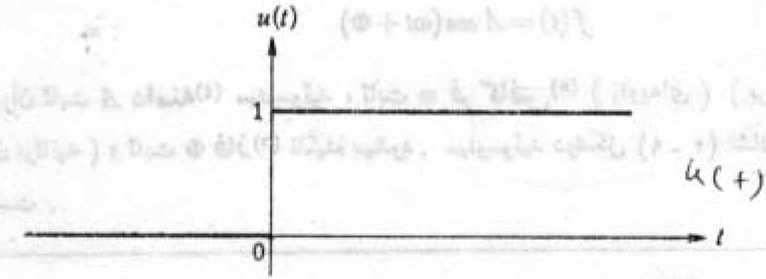
شکل ۹-۲- یک شکل موج سینوسی با دامنه A وفاز Φ

« پله واحد » **تابع پله واحد**[1] همانطوریکه درشکل (۱۰ - ۲) نشان داده شده با $u(\cdot)$ نمایش داده میشود و بصورت زیر تعریف میگردد :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ برای} \\ ۱ & t>0 \text{ برای} \end{cases} \qquad (۲-۳)$$

پله واحد

درلحظهٔ $t=0$ مقدار آنرا میتوان ۱ ، $\frac{۱}{۲}$ یا صفر گرفت . برای مطالب این کتاب



شکل ۱۰-۲- تابع پله واحد $u(\cdot)$

۱ — The unit step

موضوع فوق‌اهمیت ندارد، ولی هنگام استفاده ازتبدیل‌لاپلاس یا فوریه بهتراست که:

$$\boxed{u(0) = \frac{۱}{۲}}$$

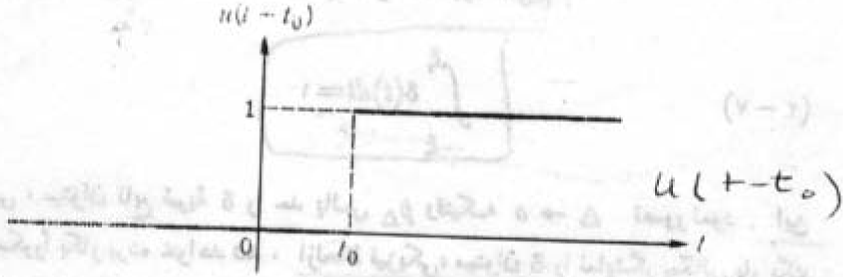
انتخاب شود. درسراسر این کتاب حرف u منحصراً برای پله واحد بکار خواهد رفت.

فرض کنید یک پله واحد باندازه t_0 ثانیه بتأخیر افتد. شکل موج حاصل درلحظهٔ t دارای عرض $u(t-t_0)$ خواهد بود. در واقع برای $t<t_0$ آرگومان[۱] منفی بوده و درنتیجه عرض تابع صفر است، برای $t>t_0$ آرگومان مثبت بوده و عرض تابع برابر ۱ می‌باشد، این مطلب درشکل (۱۱ - ۲) نشان داده شده است.

« پالس » - چون غالباً لازم است از یک پالس چهارگوش استفاده شود، **تابع پالس**[۲] $p_\Delta(\cdot)$ را بصورت زیر تعریف میکنیم:

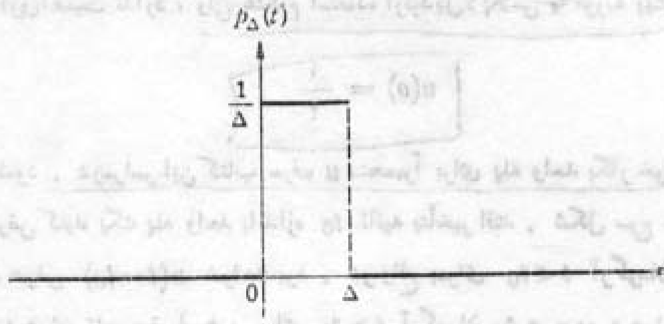
$$p_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \dfrac{۱}{\Delta} & 0<t<\Delta \\ 0 & \Delta<t \Rightarrow t>\Delta \end{cases} \qquad \text{تابع پالس} \quad (۲-۴)$$

بعبارت دیگر، p_Δ پالسی به ارتفاع $\frac{۱}{\Delta}$ و عرض Δ است که درلحظهٔ $t=0$ شروع میشود. توجه کنید که بازاء تمام مقادیر پارامتر مثبت Δ، سطح زیر $p_\Delta(\cdot)$ برابر ۱ است



شکل ۱۱-۲- تابع پله واحد با تأخیر

۱ — Argument
۲ — Pulse



شکل ۱۲-۲ یک تابع پالس $p_\Delta(\cdot)$

(بشکل (۱۲ - ۲) مراجعه شود) . درنظر داشته باشید که :

برای تمام مقادیر t

$$\boxed{p_\Delta(t) = \frac{u(t)-u(t-\Delta)}{\Delta}} \qquad (۲-۵)$$

« ضربهٔ واحد » - **ضربهٔ واحد**[۱] $\delta(\cdot)$ (که تابع دلتای دیراك[۲] نیز نامیده میشود) به مفهوم دقیق ریاضی کلمه ، یک تابع نیست (به‌ضمیمه الف مراجعه شود) . برای منظورهای خود چنین بیان میکنیم :

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{برای } t \neq 0 \\ \text{ویژه} & \text{در } t=0 \end{cases} \qquad \text{ضربه واحد} \quad (۲-۶)$$

و ویژگی درمبداء چنان است که برای هرمقدار $\xi > 0$ داریم :

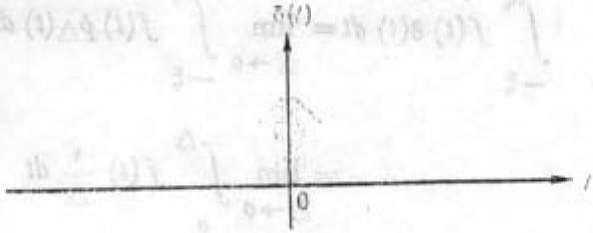
$$\boxed{\int_{-\xi}^{\xi} \delta(t)dt = ۱} \qquad (۲-۷)$$

بطورحسی ، میتوان تابع ضربهٔ δ را حد پالس p_Δ وقتیکه $\Delta \to 0$ تصور نمود . این واقعیت مکرراً بکار برده خواهد شد . ازلحاظ فیزیکی، میتوان δ را نمایشگر چگالی بار یک بار نقطه‌ای «واحد» واقع بر $t=0$ در روی محور t تصور نمود .

---

۱ — Unit impulse

۲ — Dirac delta function



شکل ۱۳-۲- یک تابع ضربه واحد $\delta(0)$

از تعریف δ و u نتیجه میشود که :

$$u(t)=\boxed{\int_{-\infty}^{t}\delta(t')\,dt'} \qquad (۲-۸)$$

و :

$$\boxed{\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)} \qquad (۲-۹)$$

این دومعادله حائزاهمیت بسیاری بوده ودرفصلهای بعد بطورمکرر مورداستفاده قرار خواهند گرفت . تابع ضربه بطور ترسیمی درشکل (۱۳ - ۲) نشان داده شده است .

خاصیت‌مفید دیگری که اغلب مورد استفاده قرار میگیرد «خاصیت غربالی»[۱] ضربه واحد است. گیریم f یک تابع پیوسته باشد ، دراین‌صورت :

$$\int_{-\xi}^{\xi} f(t)\,\delta(t)\,dt=f(0) \qquad (۲-۱۰)$$

برای هرمقدار مثبت ξ .

این مطلب را میتوان بسهولت با جایگزین کردن δ با p_{Δ} بطور تقریبی بصورت زیر اثبات نمود :

---

۱ — Sifting property

$$\int_{-\xi}^{\xi} f(t)\,\delta(t)\,dt = \lim_{\Delta \to 0} \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\,p_{\Delta}(t)\,dt$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \int_{0}^{\Delta} f(t)\,\frac{1}{\Delta}\,dt$$

$$= f(0)$$

تبصره ۱- تابعی که به تابع پله‌واحدمربوط است تابع **شیب واحد**[1] $r(\cdot)$ میباشد که بصورت زیر تعریف میشود :

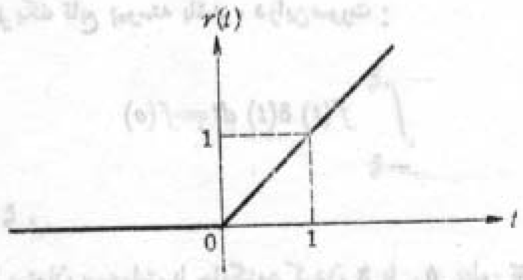
برای همه t $\boxed{r(t) = t\,u(t)}$ تابع شیب واحد (۲-۱۱)

شکل موج $r(\cdot)$ در شکل (۲-۱۴) نشان داده شده است. از روابط (۲-۳) و (۲-۱۱) میتوان نشان داد که :

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t')\,dt' \qquad (۲-۱۲)$$

و :

$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t) \qquad (۲-۱۳)$$



شکل ۲-۱۴- یک تابع شیب واحد $r(\cdot)$

1 — Unit ramp

تبصره ۲- تابعی که با تابع ضربه واحد ارتباط نزدیکی دارد تابع **دوبلت واحد**[۱] $\delta'(\cdot)$ است که بصورت زیر تعریف میشود :

$$\delta'(t)=\begin{cases} 0 & t\neq 0 \quad \text{برای} \\ \text{ویژه} & t=0 \quad \text{در} \end{cases} \qquad \text{تابع دوبلت واحد} \quad (\text{۲}-\text{۱۴})$$

ویژگی در $t=0$ چنان است که :

$$\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(t')\,dt' \qquad (\text{۲}-\text{۱۵})$$

و :

$$\frac{d\delta(t)}{dt}=\delta'(t) \qquad (\text{۲}-\text{۱۶})$$

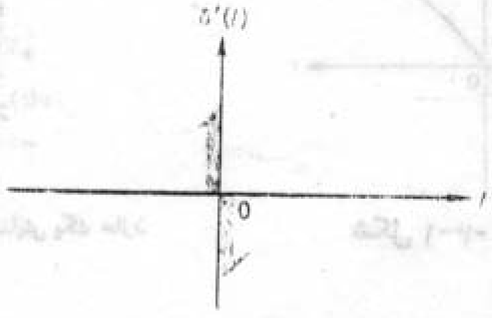
نمایش دوبلت واحد درشکل (۱۵ - ۲) نشان داده شده است .

تمرین ۱ - شکل موجهای مشخص شده با روابط زیر را رسم کنید :

الف . $\text{۲}\,u(t)-\text{۲}\,u(t-\text{۲})$

ب . $\text{۵}p_{\text{۰٫۱}}(t)-\text{۳}p_{\text{۰٫۱}}(t-\text{۰٫۱})+\text{۲}p_{\text{۰٫۲}}(t-\text{۳})$

پ . $r(t)-u(t-\text{۱})-r(t-\text{۱})$



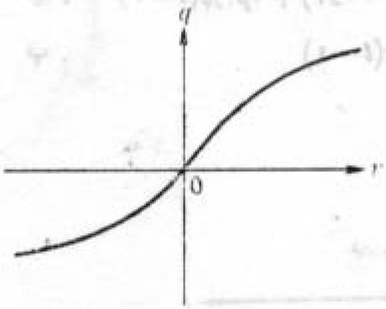
شکل ۱۵-۲- یک دوبلت $\delta'(\cdot)$

[۱] — Unit doublet

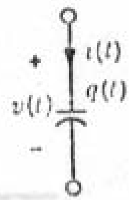
تمرین ۲ - ۴ $\sin t$ و $3\sin(2t+1)$ را بشکل سینوسوئید استاندارد بیان کنید (دراینجا فاز برحسب رادیان داده شده است) .

۳- خازنها

خازنها[۱] بعلت اینکه بار الکتریکی ذخیره میکنند درمدارهای الکتریکی بکار میروند. عنصری که خازن خوانده میشود ، مدل ایده‌آل شده یک خازن فیزیکی است مانند خازن با صفحات موازی . خازن فیزیکی عنصری است که علاوه برخاصیت اصلی ذخیره نمودن بار الکتریکی، اندکی هم خاصیت پراکندگی دارد (معمولاً خیلی کم). عنصری که در هرلحظه t از زمان، بارالکتریکی ذخیره شده $q(t)$ و ولتاژ $v(t)$ آن در رابطه‌ای که توسط یک منحنی درصفحه vq تعریف میشود صدق کند **خازن** نامیده میشود . این منحنی را **مشخصهٔ خازن درلحظه** t مینامند. نکته اصلی‌آنست که بین‌مقدار « لحظه‌ای » بار $q(t)$ و مقدار « لحظه‌ای » ولتاژ $v(t)$ رابطه‌ای وجود دارد. مشخصهٔ خازن نیز میتواند مانند مشخصهٔ مقاومت با زمان تغییر کند. بطور نمونه، این مشخصه بصورت نشان داده شده در شکل (۱ - ۳) خواهد بود . تقریباً مشخصه همه خازنهای فیزیکی افزایشی یکنوا است، یعنی وقتی v اضافه شود q افزایش مییابد .



شکل ۱-۳- مشخصه یک خازن (غیرخطی) که درصفحه vq رسم شده است



شکل ۲-۳- نمایش یک خازن

---

۱ — Capacitors

در دیاگرامهای مداری یک خازن بطور نمایشی مطابق شکل (۲ - ۳) نمایش داده میشود . توجه کنید که همیشه $q(t)$ را باری خواهیم نامید که درلحظه t درصفحه‌ای که جهت قراردادی‌جریان $i(t)$ بآن وارد میشود وجود دارد. وقتیکه $i(t)$ مثبت باشد بارهای مثبت (درلحظه t) به صفحه فوقانی که بار آن $q(t)$ نامیده شده آورده میشوند و بنابراین شدت تغییر[1] q [یعنی جریان $i(t)$] نیز مثبت است و بنابراین داریم :

$$\boxed{i(t) = \frac{dq}{dt}} \qquad (۳ - ۱)$$

دراین‌معادله جریانها برحسب‌آمپر و بارها برحسب کولمب[2] داده میشود . با بکار بردن رابطه‌داده شده بین بار و ولتاژ ، مشخصهٔ ولتاژ شاخه وجریان شاخه یک خازن را از رابطه (۱ - ۳) بدست میآوریم .

خازنی را که مشخصهٔ آن درهرلحظه از زمان خط مستقیمی باشد که از مبداء صفحه vq میگذرد خازن خطی گویند . بعکس، اگر درلحظه‌ای از زمان مشخصهٔ آن خط مستقیمی که از مبداء صفحه vq میگذرد نباشد آنرا غیرخطی گویند . خازنی را که مشخصهٔآن بازمان تغییر نکند **خازن تغییر ناپذیر بازمان**، واگرمشخصه‌آن‌بازمان تغییر کند **خازن تغییرپذیر بازمان** گویند .

مانند آنچه که در مقاومتها گفته شد خازنها را برحسب آنکه خطی ، غیرخطی ، تغییرپذیر بازمان و یا تغییر ناپذیر با زمان باشند میتوان به‌چهار نوع تقسیم نمود .

۱-۳- خازن خطی تغییرناپذیر بازمان

از تعریف خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان ، میتوان مشخصهٔ یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان را بصورت زیر نوشت :

$$\boxed{q(t) = C\,v(t)} \qquad (۳ - ۲)$$

که درآن C ثابتی‌است (نابسته از t و v) که شیب مشخصه‌را تعیین‌نموده و **ظرفیت**[3] خازن نامیده میشود . واحد کمیتهای معادله (۲ - ۳) بترتیب کولمب ، فاراد[4] و ولت

---

۱ — Rate of change ۲ — Coulomb

۳ — Capacitance ۴ — Farad

است . معادله‌ای که ولتاژ دوسر خازن را به‌جریان آن ارتباط میدهد بصورت زیر است :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} = \frac{1}{S}\frac{dv}{dt} \qquad (۳-۳)$$

که درآن $S = C^{-1}$ بوده و الاستانس[۱] گفته میشود. اگر (۳-۳) را بین صفر و t انتگرال گیری کنیم بدست میآوریم :

$$\int_0^t dv = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$$

$$v(t) = v(o) + \frac{1}{C}\int_o^t i(t')\,dt' \qquad (۳-۴)$$

وبرحسب الاستانس S ،

$$\boxed{v(t) = v(o) + S\int_o^t i(t')\,dt'} \qquad (۳-۵)$$

بنابراین، خازن خطی تغییرناپذیر با زمان تنها وقتی بعنوان یک عنصر مدار کاملاً مشخص میشود که ظرفیت C (شیب مشخصهٔ آن) و ولتاژ اولیه آن $v(o)$ داده شده باشند.

باید تأکید شود که معادله (۳-۳) تابعی را تعریف میکند که $i(t)$ را برحسب $\frac{dv}{dt}$ بیان می‌نماید ، یعنی :

$$i(t) = f\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

توجه به‌این مطلب حائز اهمیت‌است که $f(\cdot)$ تابع خطی میباشد. از طرف دیگر، معادله (۳-۴) تابعی را تعریف میکند که $v(t)$ را برحسب $v(o)$ و شکل موج جریان $i(\cdot)$ در فاصله $[o, t]$ بیان مینماید . لازم است توجه شود تابعی که توسط (۳-۴) تعریف شده ومقدار $v(t)$ ، یعنی‌ولتاژ درلحظه t را برحسب « شکل‌موج » جریان درفاصله $[o, t]$ میدهد تنها وقتی « خطی » است که $v(o) = o$ باشد . انتگرال موجود درمعادله (۳-۴) نشان‌دهنده سطح خالص[۲] زیر منحنی‌جریان درفاصله زمانی‌صفر و t میباشد. «سطح خالص»،

---

۱ — Elastance

۲ — Net area

برای بخاطر داشتن اینکه قسمتی از منحنی $i(\circ)$ که دربالای محور زمان قراردارد مساحت مثبت، و بخشی که زیر محور زمان قرار دارد مساحت منفی بوجود میآورد گفته میشود . جالب‌است توجه کنیم که مقدار v درلحظه t، یعنی $v(t)$، به‌مقداراولیه $v(o)$ وهمه مقادیر جریان از لحظه صفر تا لحظه t بستگی دارد . باین حقیقت معمولاً باگفتن اینکه « خازنها دارای حافظه[۱] میباشند » اشاره میشود .

تمرین ۱ گیریم منبع جریان $i_s(t)$ به یک خازن خطی تغییرناپذیر بازمان باظرفیت C و $v(o)=o$ وصل شده باشد . شکل موج ولتاژ $v(\circ)$ دوسرخازن را برای حالتهای زیر تعیین نمائید :

الف - $i_s(t)=u(t)$

ب - $i_s(t)=\delta(t)$

پ - $i_s(t)=A\cos(\omega t+\Phi)$

تمرین ۲ گیریم منبع ولتاژ $v_s(t)$ به یک خازن خطی تغییرناپذیر بازمان با ظرفیت C و $v(o)=o$ وصل شده باشد . شکل موج جریان $i(\circ)$ درخازن را برای حالتهای زیر تعیین نمائید :

الف - $v_s(t)=u(t)$

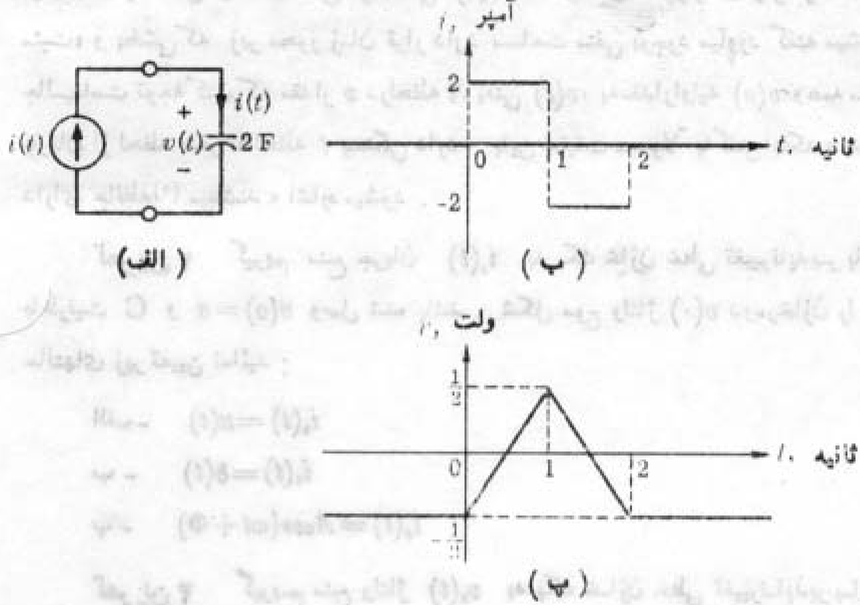
ب - $v_s(t)=\delta(t)$

پ - $v_s(t)=A\cos(\omega t+\Phi)$

مثال منبع جریانی بدوسر یک خازن خطی تغییرناپذیر بازمان باظرفیت ۲ فاراد و ولتاژ اولیه $v(o)=-\frac{۱}{۲}$ ولت مطابق شکل(۲ - ۳ الف) وصل شده‌است. گیریم که منبع جریان با شکل موج ساده $i(\circ)$ مطابق شکل(۳-۲ ب) داده شده باشد . ولتاژ شاخهٔ دوسرخازن را میتوان بلافاصله ازمعادله (۲-۴) بصورت زیر حساب نمود :

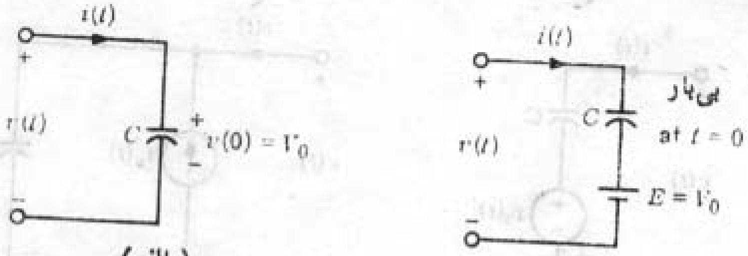
$$v(t)=-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\int_{o}^{t} i(t')\,dt'$$

۱ — Memory



شکل ۳-۳- شکل موجهای ولتاژ وجریان دوسرخازن خطی تغییرناپذیر بازمان

شکل موج $v(\cdot)$ درشکل (۳-۲ پ) رسم شده است . برای مقادیر منفی t ولتاژ مساوی $-\frac{1}{2}$ ولت‌است. در $t=0$ ولتاژ شروع به‌افزایش نموده ودرلحظه $t=1$ درنتیجهٔ اثر قسمت مثبت شکل موج جریان بمقدار $\frac{1}{2}$ ولت میرسد ، سپس برای $1<t<2$ بعلت جریان منفی ثابت بطورخطی تا $-\frac{1}{2}$ ولت تنزل نموده وبرای $t>2$ ثانیه در $-\frac{1}{2}$ ولت ثابت میماند . این مثال ساده بروشنی نشان میدهد که برای $t>0$ ، $v(t)$ به مقدار اولیه $v(0)$ وهمهٔ مقادیر شکل‌موج $i(\cdot)$ بین لحظه‌صفر و t بستگی‌دارد . بعلاوه بسهولت مشاهده میشود که اگر $v(0)$ مساوی صفر نباشد ، $v(t)$ یک تابع خطی از $i(\cdot)$ نیست. ازطرف دیگر ، اگرمقدار اولیه $v(0)$ مساوی صفر باشد ولتاژ شاخه درلحظه t، یعنی $v(t)$، یک تابع خطی ازشکل موج جریان $i(\cdot)$ میباشد .



(الف) (ب)

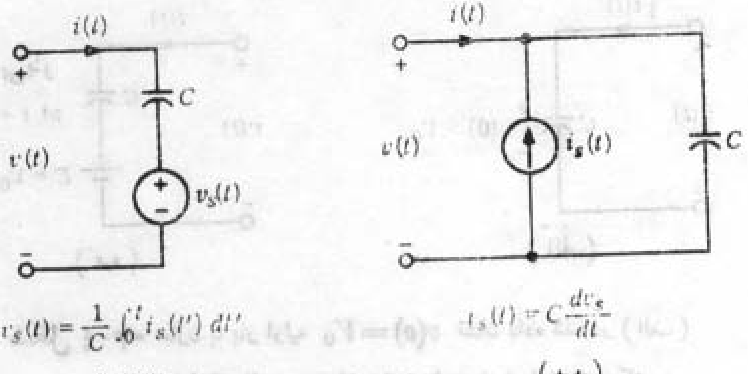
شکل ۴-۳- خازن با بار اولیه $v(o)=V_0$ نشان داده شده در (الف) معادل اتصال سری همان خازن (بدون بار اولیه) ویک منبع ولتاژ ثابت $E=V_0$ است مطابق شکل (ب) .

تمرین فرض کنید شکل موج جریان درشکل (۳ - ۲ ب) برای همه مقادیر t به‌مقدار دو برابر افزایش یابد . برای $t \geqslant o$ ولتاژ $v(t)$ را محاسبه کنید . ثابت کنید که خطی بودن معتبر نخواهند بود مگر اینکه $v(o)=o$ باشد .

تبصره ۱- معادله(۴-۳) بیان‌میکند که برای $t \geqslant o$ ، ولتاژ شاخه $v(t)$ درلحظه t در دوسر یک خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان ازمجموع دوجمله تشکیل میشود . جمله اول ولتاژ $v(o)$ درلحظه $t=o$، یعنی ولتاژ اولیه دوسرخازن بوده و جمله دوم ولتاژ دوسر خازن‌باظرفیت C فاراد درلحظه t است بشرط اینکه‌درلحظه $t=o$ این‌خازن باراولیه نداشته باشد . بنابراین هرخازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ولتاژ اولیهٔ $v(o)$ را میتوان بصورت اتصال سری یک منبع ولتاژ dc با $E=v(o)$ و همان خازن با ولتاژ اولیهٔ صفر مطابق شکل (۴-۳) درنظرگرفت . این نتیجه بسیار مفید است و درفصلهای بعد مکرراً بکار برده خواهد شد .

تبصره ۲- خازن خطی تغییرناپذیر بازمان با ولتاژ اولیه صفر ، یعنی $v(o)=o$ را درنظر گیرید. این خازن بطورسری با منبع ولتاژ نابسته $v_s(t)$ مطابق شکل (۵-۳ الف) وصل میشود . این اتصال سری معادل‌مداری است (همانطوریکه درشکل (۵-۳ ب) نشان داده شده است) که درآن همان خازن بطورموازی با یک منبع جریان وصل شده و

$$i_s(t)=C\frac{dv_s}{dt} \qquad (۳-۶)$$



شکل ۵-۳- مدارهای تونن و نرتن برای یک خازن با منبع نابسته .

منبع ولتاژ $v_s(t)$ درشکل(۵-۳ الف) برحسب منبع جریان $i_s(t)$ درشکل(۵-۳ ب) بصورت زیر داده میشود :

$$v_s(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_s(t')\,dt' \qquad (۳-۷)$$

نتایج شکلهای (۵-۳ الف) و (۵-۳ ب) را بترتیب مدارهای معادل تونن و نرتن گویند . اثبات این مطلب مشابه آن است که درمورد مقاومت دربخش ۳-۲ گفته شد . بخصوص اگرمنبع ولتاژ v_s درشکل (۵-۳ الف) یک تابع پله واحد باشد، بموجب معادله (۶-۳) منبع جریان i_s درشکل (۵-۳ ب) یک تابع ضربه $C\delta(t)$ میباشد .

تبصره ۳- مجدداً معادلـه (۴-۳) را درلحظه t و لحظه $t+dt$ درنظر گیرید . از تفاضل آنها بدست میآید که :

$$v(t+dt) - v(t) = \frac{1}{C}\int_t^{t+dt} i(t')\,dt' \qquad (۳-۸)$$

گیریم $i(t)$ برای همه مقادیر t کراندار[1] باشد ، یعنی ثابت معینی مانند M وجود

[1] — Bounded

داشته باشد بقسمی که برای همهٔ مقادیر t موردنظر داشته باشیم ، $|i(t)| \leqslant M$.
وقتیکه $dt \to o$ مساحت زیر شکل موج $i(\cdot)$ درفاصله $[t \text{ و } t+dt]$ بسمت صفر میل میکند. همچنین از معادله (۳-۸) ملاحظه میشود وقتیکه dt بسمت صفر میل کند :

$$v(t+dt) \to v(t)$$

که بنحو دیگر باینصورت بیان میشود که شکل موج ولتاژ $v(\cdot)$ پیوسته است.

بنابراین میتوان یک خاصیت مهم‌خازن‌خطی تغییرناپذیر بازمان را چنین بیان نمود : « اگر برای‌همه‌زمان t درفاصله بسته $[o\,,\,T]$، جریان $i(\cdot)$ دریک‌خازن‌خطی تغییرناپذیر با زمان کراندار بماند، ولتاژ v دوسرخازن‌درفاصله باز $(o\,,\,T)$ یک‌تابع پیوسته میباشد، یعنی برای چنین خازنی مادامیکه جریان آن کراندار بماند ولتاژ شاخه نمیتواند بطور لحظه‌ای ازیک مقدار به مقدار متفاوت دیگری بجهد (مانند تابع پله) » . این خاصیت درحل مسائلی که درآن پالس یا تابع پله ولتاژ یاجریان به مداری اعمال‌میشود بسیار مفید است و کاربرد آن درفصلهای بعد تشریح خواهد شد.

تمرین آنچه را که درتبصره ۲ بیان شد ثابت کنید .

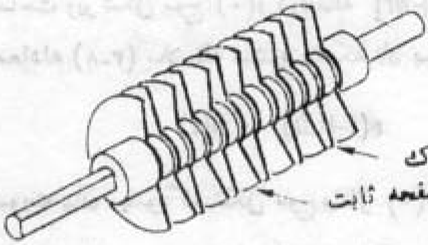
۳-۲- خازن خطی تغییرپذیر بازمان

اگر خازنی‌خطی ولی تغییرپذیر بازمان باشد مشخصهٔ‌آن‌درهرلحظه خط مستقیمی‌است که از مبداء میگذرد ولی شیب آن به‌زمان بستگی‌دارد. بنابراین میتوان مقدار بار درلحظه t را برحسب ولتاژ درلحظه t بصورت معادله زیر بیان نمود :

$$\boxed{q(t) = C(t)\, v(t)} \qquad (۳-۹)$$

که درآن $C(\cdot)$ یک تابع زمان مشخص‌شده‌ای‌است که برای هر t ، شیب مشخصهٔ خازن را معین میکند. این تابع $C(\cdot)$ جزو مشخصهٔ خازن‌خطی تغییرپذیر بازمان‌میباشد. بنابراین معادله (۳-۱) بصورت زیر درمیآید :

$$\boxed{i(t) = \frac{dq}{dt} = C(t)\,\frac{dv}{dt} + \frac{dC}{dt}\,v(t)} \qquad (۳-۱۰)$$



شکل ۶-۳- با چرخانیدن صفحه متحرك بطور مکانیکی، این‌خازن بصورت خازن تغییرپذیر بازمان درمیآید

یک مثال ساده از خازن خطی تغییرپذیر بازمان در شکل (۶ - ۳) نشان داده شده است که درآن یک‌خازن باصفحات موازی شامل یک‌صفحه ثابت ویک صفحه متحرك است. صفحه متحرك بطرز مکانیکی و بطور متناوب‌حرکت داده میشود . میتوان ظرفیت این خازن را که بطور متناوب تغییر میکند بصورت یک سری فوریه بیان نمود .

$$C(t)=C_0+\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(2\pi f k t+\Phi_k) \qquad (۳-۱۱)$$

که درآن f نشان دهنده فرکانس دوران صفحه متحرك است .

دربرسی تقویت کننده‌های[۱] پارامتری، خازن‌های متغیرمتناوب‌اهمیت اساسی‌دارند. دربخش بعد یک نوع دیگر از خازن‌های متناوب گفته خواهد شد .

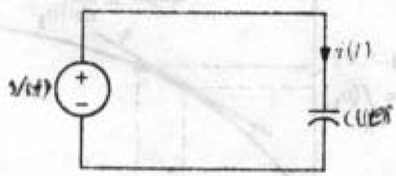
تمرین مدار نشان داده شده درشکل (۷ - ۳) را درنظر گرفته و فرض کنید ولتاژ ورودی سینوسوئید، $v(t)=A\cos\omega_1 t$ میباشد که درآن ثابت $\omega_1=2\pi f_1$ فرکانس زاویه‌ای است. گیریم خازن خطی تغییرپذیر بازمان بصورت زیر مشخص شده باشد :

$$C(t)=C_0+C_1\cos 3\omega_1 t$$

که درآن C_0 و C_1 مقادیر ثابت هستند. جریان $i(t)$ را برای همه مقادیر t تعیین کنید.

---

۱ — Amplifiers



شکل ۷-۳- یک خازن خطی تغییرپذیر بازمان که بوسیله منبع ولتاژ سینوسی تحریک میشود .

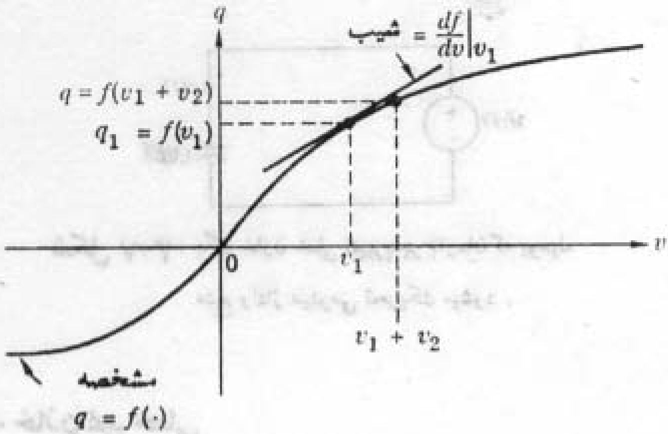
۳-۳- خازن غیرخطی

دیود وارا کتور[۱] دستگاهی است که دربیشتر سیستمهای ارتباطی مدرن بعنوان یک عنصر خیلی مهم مدار درقسمتهای تقویت کننده پارامتری ، نوسان کننده‌ها[۲] و مبدلهای سیگنال[۳] بکار میرود . یک دیود وارا کتور را میتوان اساساً بوسیله یک خازن غیرخطی مدل‌سازی نمود . مدل‌دقیق ترانزیستور نیز یک خازن غیرخطی دربردارد . درکاربردهای قطع و وصل[۴] خیلی سریع اغلب اثر خازن غیرخطی حائز اهمیت بسیار است . درحالت کلی، تجزیه‌وتحلیل‌مدارهائی که شامل‌عناصر « غیرخطی » میباشد خیلی‌مشکلتراز‌مدارهای خطی است . درتجزیه‌وتحلیل های غیرخطی، تکنیک‌های‌مختلفی که هریک مناسب حالت خاصی میباشد وجود دارد که درمیان آنها و شاید مفیدترین آنها روش « تجزیه و تحلیل سیگنالهای کوچک[۵] » است و این مفهوم اصلی را درمثال زیر معرفی مینمائیم .

مثال یک خازن غیرخطی راکه توسط مشخصه‌اش $q=f(v)$ (مطابق شکل (۸-۳)) معین شده است درنظر گرفته و فرض کنید ولتاژ v همانطوریکه درشکل (۹-۳) نشان داده شده مجموع دوجمله باشد ، جمله اول v_1 ، ولتاژ ثابتی است که بوسیله باتری بایاس کننده روی‌خازن‌واردشده (که‌اغلب بنام « بایاس[۶] dc » گفته میشود) وجمله‌دوم v_2 ، یک ولتاژ با تغییر کوچک می‌باشد . مثلاً v_2 ممکن است ولتاژ کوچکی در قسمت

---

۱ — Varactor
۲ — Oscillator
۳ — Signal converter
۴ — Switching
۵ — Small signal Analysis
۶ — Bias



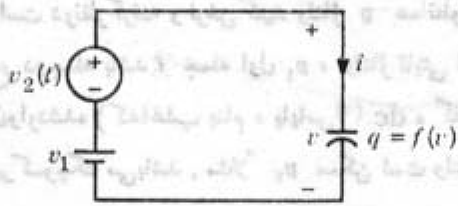
شکل ۸-۳- مشخصه یک خازن غیرخطی و تقریب سیگنال کوچک آن در اطراف نقطه کار $(v_1 , f(v_1))$

ورودی یک گیرنده باشد . با بکار بردن بسط سری تیلور داریم :

$$q = f(v) = f(v_1 + v_2)$$

$$\approx f(v_1) + \left.\frac{df}{dv}\right|_{v_1} v_2 \qquad (۳-۱۲)$$

درمعادله(۳-۱۲) ، ما ازجمله های مرتبه‌دوم وبالاتر صرفنظر کردیم ، اگر v_2 بمقدار کافی کوچک باشد این یک خطای جزئی ببار میاورد ، بعبارت دقیق‌تر ، باید v_2 بقدر کافی کوچک باشد تا قسمتی از مشخصه که باطول $v_1 + v_2$ متناظرمیباشد توسط قطعه خط مستقیمی که ازنقطه



شکل ۹-۳- یک خازن غیرخطی بوسیله ولتاژ v که ازمجموع ولتاژ dc ، v_1 و ولتاژ با تغییرات کوچک v_2 تشکیل میابد تغذیه میشود .

$(v_1, f(v_1))$ گذشته ودارای شیب $\left.\frac{df}{dv}\right|_{v_1}$ است بطرزخوبی تقریب شده باشد. جریان $i(t)$ ازمعادله (۱-۳) عبارتست از :

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\left.\frac{df}{dv}\right|_{v_1}\frac{dv_2}{dt} \qquad (۳-۱۳)$$

که معادله فوق بصورت زیر است :

$$i(t)=C(v_1)\frac{dv_2}{dt} \qquad (۳-۱۴)$$

توجه کنید که v_1 مقدار ثابتی است وبنابراین ازنقطه نظر سیگنالهای کوچک v_2 ، ظرفیت :

$$C(v_1)=\left.\frac{df}{dv}\right|_{v_1}$$

یک خازن خطی تغییرناپذیر بازمان بوده که مساوی شیب مشخصه خازن درنقطه کار آن درصفحه vq مطابق شکل(۳-۸) میباشد. ازاینروظرفیت بهولتاژ dc ، v_1 بستگی دارد.

اگرخازن غیرخطی درتقویت کننده پارامتری‌بکار برده شود ولتاژ v_1 یک مقدار ثابتی نیست ، معهذا v_2 که نمایشگر قسمت تغییرپذیر بازمان است بازهم کوچک فرض میشود تا تقریبی که‌درنوشتن معادله(۳-۱۲) بکار رفته هنوز معتبر باشد. بنابراین یک تغییرجزئی درتجزیه و تحلیل بالا باید انجام داد .

ولتاژ دوسرخازن مساوی $v_1(t)+v_2(t)$ است و از اینرو بار خازن چنین است :

$$q(t)=f(v_1(t)+v_2(t))$$

و چون $v_2(t)$ برای همه t کوچک است داریم :

$$q(t)\approx f(v_1(t))+\left.\frac{df}{dv}\right|_{v_1(t)}v_2(t)$$

گیریم :

$$q_1(t)\triangleq f(v_1(t)) \qquad (۳-۱۵)$$

بار $q_1(t)$ را میتوان بار ناشی از $v_1(t)$ درنظر گرفت . بار باقیمانده :

$$q_2(t) \triangleq q(t) - q_1(t)$$

بطور تقریبی با عبارت زیر داده میشود :

$$q_2(t) \approx \left. \frac{df}{dv} \right|_{v_1(t)} v_2(t) \qquad (۳-۱۶)$$

بار q_2 متناسب با v_2 بوده ومیتوان بعنوان تغییرات بار سیگنال کوچک ناشی از v_2 درنظر گرفت . چون v_1 یک تابع داده شده‌ای از زمان میباشد، $\left. \frac{df}{dv} \right|_{v_1(t)}$ را میتوان بعنوان خازن خطی تغییرپذیر بازمان $C(t)$ درنظر گرفت که درآن :

$$C(t) = \left. \frac{df}{dv} \right|_{v_1(t)}$$

بنابراین ما نشان دادیم که در تجزیه‌وتحلیلهای سیگنالهای کوچک ، یک خازن غیرخطی را میتوان بصورت یک خازن خطی تغییرپذیر با زمان مدل‌سازی نمود . این نوع تجزیه‌و تحلیل ، در درك تقویت کننده‌های پارامتری جنبهٔ اساسی دارد .

تمرین خازن غیرخطی که توسط معادله زیر مشخص میشود داده شده است:

$$q = ۱ - e^{-v}$$

ظرفیت C متناظر با سیگنالهای کوچک راکه بصورت $\left. \frac{df}{dv} \right|_{v_1}$ درمعادله (۳-۱۶) تعریف میشود برای حالتهای زیر تعیین کنید :

الف - $v_1 = ۱۰$ ولت

ب - $v_1 = ۱۰ + ۵\cos \omega_1 t$

فرض کنید که $v_2(t) = ۰٫۱ \cos ۱۰\omega_1 t$ باشد جریان‌تقریبی خازن‌راکه از v_2 ناشی میشود برای هردوحالت تعیین کنید .

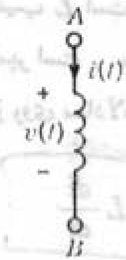
۴- سلف‌ها

سلف‌ها[۱] بعلت اینکه در میدان مغناطیسی خود انرژی ذخیره مینمایند در مدارهای الکتریکی بکار میروند. عنصری که سلف نامیده میشود ایده‌آل شده یک سلف فیزیکی است. بعبارت دقیق‌تر، یک عنصر دوسر را **سلف** خواهیم گفت اگر در هر لحظه t از زمان، شار $\Phi(t)$ و جریان $i(t)$ آن در رابطه‌ای که توسط یک منحنی در صفحه $i\Phi$ تعریف میشود صدق کند. این منحنی را **مشخصهٔ سلف درزمان** t نامند. نکته اساسی این است که رابطه‌ای بین مقدار «لحظه‌ای» شار $\Phi(t)$ و مقدار «لحظه‌ای» جریان $i(t)$ وجود دارد. دربعضی حالتها ممکن است مشخصه با زمان تغییر کند. در دیاگرامهای مداری، یک سلف را بطور نمایشی مطابق شکل (۱-۴) نشان میدهند. ازآنجائیکه درتئوری مدار، مشخص‌سازی اساسی یک عنصر دوسر برحسب جریان و ولتاژ آن انجام میگیرد، لازم است که ارتباطی بین شار و ولتاژ شاخه برقرار شود. ولتاژ دوسر یک سلف (که با جهت قراردادی نشان داده شده درشکل (۱-۴) سنجیده میشود) مطابق قانون القاء فاراده[۲] بصورت زیر داده میشود:

$$\boxed{v(t) = \frac{d\Phi}{dt}} \qquad (۱-۴)$$

که درآن v برحسب ولت و Φ برحسب وبر[۳] است.

اکنون مطابقت کیفی رابطه (۱-۴) را با قانون لنز[۴] بررسی‌میکنیم. این قانون بیان



شکل ۱-۴- نمایش یک سلف

۱ — Inductors
۲ — Faraday's induction law
۳ — Weber
۴ — Lenz

میدارد که نیروی محرکه‌ای که دراثر تغییر شار القاء میشود دارای چنان جهتی است که با علت تغییر شار مخالفت میکند . برای تشریح این مطلب فرض کنید که جریان i اضافه شود ، یعنی $\frac{di}{dt} > o$ ، جریان اضافه شده میدان مغناطیسی‌اضافی بوجودمیاورد و بنابراین شار Φ افزوده میشود، یعنی $\frac{d\Phi}{dt} > o$ ، وطابق‌رابطه(۱-٤) ، $v(t) > o$ و این‌بدان‌معنی است که پتانسیل گره A از پتانسیل گره B بیشتراست واین دقیقاً همان جهت پتانسیل لازم برای مخالفت با افزایش بیشتر جریان را نشان میدهد .

سلفها نیز مانند مقاومتها و خازنها بسته باینکه خطی ، غیرخطی ، تغییرپذیر با زمان ویا تغییرناپذیر بازمان باشند بچهار نوع تقسیم میشوند. سلفی را **تغییر ناپذیر با زمان** گویند که مشخصهٔ آن با زمان تغییر نکند . سلفی را **خطی** گویند که درهرلحظه از زمان مشخصهٔ آن خط مستقیمی باشد که از مبداء صفحه $i\Phi$ بگذرد .

۱-٤- سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان

بنا به تعریف، مشخصهٔ یک سلف خطی تغییر ناپذیر بازمان دارای‌معادله‌ای بصورت زیر میباشد :

$$\boxed{\Phi(t) = Li(t)} \qquad (٤-٢)$$

که درآن L مقدار ثابتی بوده (نا بسته از t و i) و **اندوکتانس**(۱) گفته میشود . مشخصهٔ آن خط مستقیمی به شیب L است که از مبداء میگذرد . واحدهای این معادله بترتیب وبر ، هانری(۲) و آمپر است . معادله‌ای که ولتاژ دوسر سلف وجریان درون آن را بهم ارتباط میدهد بآسانی از روی معادلات (۱-٤) و (۲-٤) بدست میآید و داریم :

$$\boxed{v(t) = L\frac{di}{dt}} \qquad (٤-٣)$$

و اگر ازمعادله (۳-٤) بین صفر و t انتگرال بگیریم بدست میآید :

۱ — Inductance   ۲ — Henry

$$i(t)=i(o)+\frac{1}{L}\int_{o}^{t} v(t')\,dt' \qquad (۴-۴)$$

گیریم $\Gamma \triangleq \frac{1}{L}$ باشد . Γ را **اندوکتانس معکوس**[۱] گویند و داریم :

$$i(t)=i(o)+\Gamma\int_{o}^{t} v(t')\,dt' \qquad (۴-۵)$$

انتگرال‌موجود درمعادلات (۴-۴) و (۴-۵) مساحت خالص زیر منحنی ولتاژ بین زمان صفر و زمان t میباشد. واضح است که مقدار i درلحظه t ، یعنی $i(t)$ ، بمقداراولیه آن $i(o)$ و همه مقادیر شکل موج ولتاژ $v(\cdot)$ درفاصله زمانی $[o, t]$ بستگی دارد . به‌این حقیقت، همانطوریکه‌درموردخازنهاهم گفته شد، اغلب با گفتن اینکه « سلفهادارای حافظه میباشند» اشاره میشود .

با توجه به معادله (۴-۴) تذکر این موضوع حائز اهمیت است که یک سلف خطی تغییرناپذیر بازمان بعنوان یک عنصر مدار ، فقط وقتی کاملاً مشخص میشود که جریان اولیه $i(o)$ و اندوکتانس L (شیب مشخصهٔ آن) داده شده باشد . درهمه مطالعات تئوری مدار ما با این واقعیت مهم مواجه خواهیم بود .

بایستی تأکید شود که معادله (۴-۳) یک تابع « خطی » را تعریف میکند که ولتاژ لحظه‌ای $v(t)$ را برحسب مشتق جریان که درلحظه t حساب شود بیان میدارد . معادله (۴-۴) تابعی‌را تعریف میکند که جریان‌لحظه‌ای $i(t)$ را برحسب $i(o)$ و شکل موج $v(\cdot)$ درفاصله زمانی $[o, t]$ بیان میدارد . توجه به‌این مطلب حائز اهمیت است که تنها اگر $i(o)=o$ باشد تابعی که بوسیله معادله (۴-۴) تعریف میشود یک « تابع خطی » است که مقدارجریان i درلحظه t ، یعنی$i(t)$ ، را برحسب شکل‌موج‌ولتاژ $v(\cdot)$ درفاصله زمانی $[o, t]$ بدست میدهد .

تمرین ۱ گیریم منبع جریان $i_s(t)$ بیک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان بـا

۱ — Reciprocal inductance

اندوکتانس L و $i(o)=o$ وصل‌شود. شکل‌موج ولتاژ $v(\cdot)$ دوسر سلف را برای‌حالتهای زیر تعیین کنید :

الف - $i_s(t)=u(t)$

ب - $i_s(t)=\delta(t)$

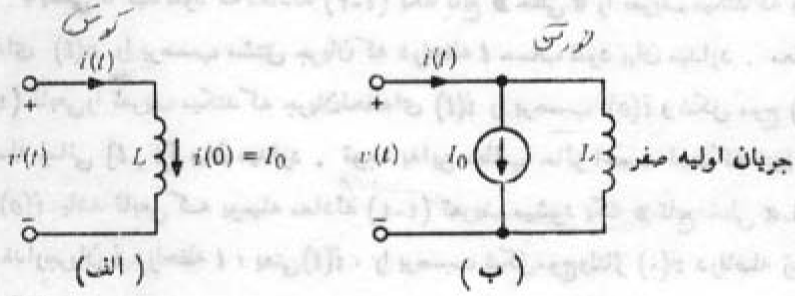
تمرین ۲ گیریم منبع ولتاژ $v_s(t)$ بیک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با اندوکتانس L و $i(o)=o$ وصل شود. شکل موج جریان $i(\cdot)$ در داخل سلف‌را برای حالتهای زیر تعیین کنید :

الف - $v_s(t)=u(t)$

ب - $v_s(t)=\delta(t)$

پ - $v_s(t)=A\cos\omega t$ که دراینجا A و ω مقادیر ثابت میباشند.

تبصره ۱- معادله (۴-۱) بیان‌میکند که درلحظه t ، جریان شاخه $i(t)$ $(t\geqslant o)$ دریک سلف خطی تغییرناپذیر بازمان از دوجمله تشکیل میابد . جمله اول جریان $i(o)$ در لحظه $t=o$ ، یعنی جریان‌اولیه در سلف، و جملهٔ دوم جریان سلف L درلحظه t است بشرطیکه در $t=o$ این سلف‌دارای‌جریان اولیه صفر باشد. بنابراین هرسلف‌خطی تغییرناپذیر بازمان باجریان‌اولیه $i(o)$ را میتوان بصورت‌اتصال موازی یک‌منبع جریان دائم $I_0=i(o)$ وهمان سلف باجریان‌اولیه صفر درنظر گرفت، بشکل(۴-۲) مراجعه شود. اغلب درفصلهای بعدی با این نتیجه مفید مواجه خواهیم بود .



شکل ۲-۴- سلف با جریان اولیهٔ $i(o)=I_0$ درحالت (الف)، معادل اتصال موازی همان سلف باجریان اولیه‌صفر ومنبع جریان ثابت I_0 درحالت (ب) میباشد .

تبصره ۲- یک سلف خطی تغییرناپذیر بازمان باجریان اولیه صفر ، یعنی $i(o)=o$ را درنظر گیرید . این سلف بطور موازی با یک منبع جریان دلخواه $i_s(t)$ مطابق شکل (۳-۴ الف) وصل شده است. این اتصال موازی معادل مدار نشان داده شده درشکل (۳-۴ ب) میباشد که درآن همان سلف بطور سری با منبع ولتاژ $v_s(t)$ وصل شده و داریم :

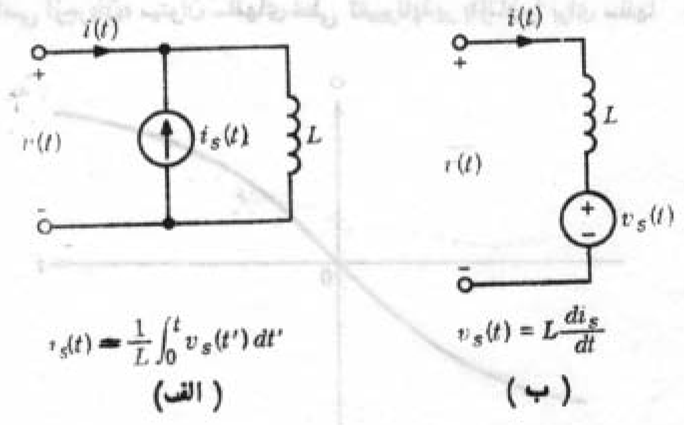
$$\boxed{v_s(t)=L\frac{di_s}{dt}} \qquad \text{معادل تونن} \quad (۴-۶)$$

منبع جریان $i_s(t)$ درشکل (۳-۴ الف) (برحسب منبع ولتاژ شکل (۳-۴ ب)) چنین است:

$$\boxed{i_s(t)=\frac{1}{L}\int_0^t v_s(t')\,dt'} \qquad \text{معادل نرتن} \quad (۴-۷)$$

نتایج شکلهای (۳-۴ الف و ب) را بترتیب مدارهای معادل نرتن وتونن گویند. بخصوص اگر i_s درشکل (۳-۴ الف) تابع پله واحد باشد منبع ولتاژ v_s درشکل (۳-۴ ب) تابع ضربه $L\delta(t)$ خواهد بود .

تبصره ۳- با تکرار استدلالی مشابه آنچه که درمورد خازنها بکار رفت میتوان در مورد سلف‌ها هم، خاصیت مهم زیر را نتیجه گیری نمود : « اگر برای همه زمانها درفاصله بسته $[o, t]$ ، ولتاژ v دوسر یک سلف خطی تغییرناپذیر بازمان کراندار بماند، جریان i



شکل ۳-۴- مدارهای معادل نرتن(الف) و تونن (ب) برای سلف با یک منبع

درفاصله زمانی باز (o, t) یک تابع پیوسته میباشد» ، یعنی مادامیکه ولتاژ دو سر یک سلف کراندار بماند جریان داخل آن سلف نمیتواند بطور لحظه‌ای از یک مقدار به مقدار متفاوتی بجهد .

۴-۲ سلف خطی تغییرپذیر بازمان

اگر سلفی خطی ولی تغییرپذیر با زمان باشد، مشخصهٔ آن درهرلحظه، خط مستقیمی است که از مبداء گذشته و شیب آن تابعی از زمان است . شار برحسب جریان بصورت زیر بیان میشود :

$$\boxed{\Phi(t)=L(t)\ i(t)} \qquad (\text{۴}-\text{۸})$$

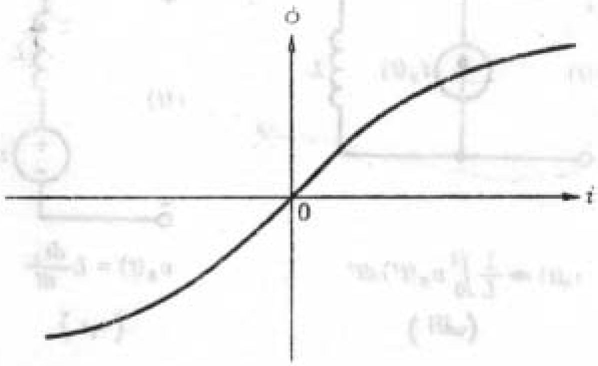
که درآن $L(\cdot)$ یک تابع معینی از زمان میباشد . در واقع تابع $L(\cdot)$ جزو مشخصه سلف تغییرپذیر بازمان است . معادله (۴-۱) بصورت زیر درمیآید :

$$\boxed{v(t)=L(t)\frac{di}{dt}+\frac{dL}{dt}\ i(t)} \qquad (\text{۴}-\text{۹})$$

۱ سلف خطی تغییرپذیر با زمان

۴-۳ سلف غیرخطی

اغلب سلفهای فیزیکی دارای مشخصه‌های غیرخطی هستند و فقط برای دامنهٔ تغییرات خاصی ازجریان، میتوان سلفهای‌خطی تغییرناپذیر بازمان‌را برای سلفها مدل قرار



شکل ۴-۴- مشخصه یک سلف غیرخطی

داد . مشخصهٔ نوعی یک سلف فیزیکی درشکل (۴-۴) نشان‌داده شده است . برای‌جریانهای زیاد شار بحالت اشباع میرسد، یعنی وقتیکه جریان خیلی زیادمیشود شار به مقدار خیلی کم افزایش مییابد .

مثال گیریم مشخصهٔ یک سلف غیرخطی تغییرناپذیر بازمان را بتوان بصورت زیر نمایش داد :

$$\Phi = \tanh i$$

جریان داخل سلف، سینوسوئید $i(t) = A\cos\omega t$ میباشد . ولتاژ دوسرسلف را حساب کنید .

شار سلف عبارتست از :

$$\Phi(t) = \tanh(A\cos\omega t)$$

و از رابطه (۴-۱) داریم :

$$v(t) = \frac{d}{dt}\Phi(i(t)) = \frac{d\Phi}{di}\bigg|_{i(t)}\frac{di}{dt}$$

$$= \frac{d\tanh i}{di}\bigg|_{i(t)}\frac{d\,A\cos\omega t}{dt} = \frac{1}{\cosh^2(A\cos\omega t)}(-A\omega\sin\omega t)$$

و نتیجه میگیریم که :

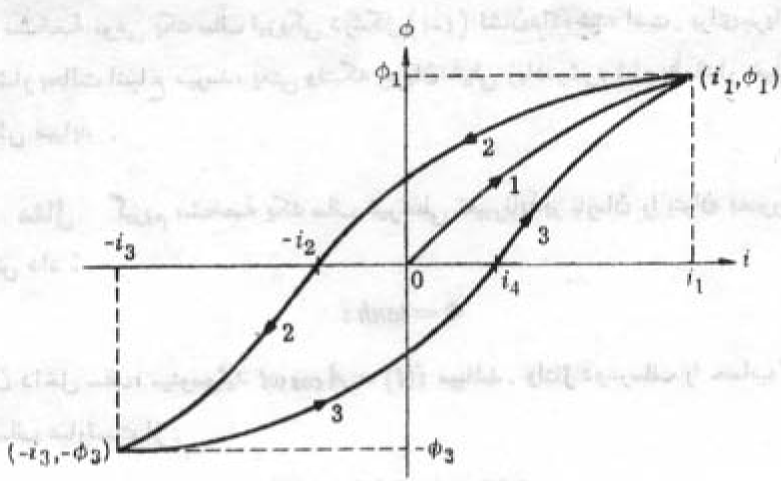
$$v(t) = -A\omega\frac{\sin\omega t}{\cosh^2(A\cos\omega t)}$$

بنابراین با معلوم بودن دامنه A وفرکانس زاویه‌ای ω ، جریان و ولتاژ دوسر سلف بصورت تابعی از زمان کاملاً مشخص میشوند .

۴-۴ پس‌ماند

نوع خاصی ازسلف غیرخطی‌مانند سلف با هسته فرومغناطیسی[1] مشخصه‌ای دارد که « پدیده پس‌ماند[2] » را نشان میدهد . مشخصهٔ پس‌ماند برحسب منحنی شار و جریان

۱ — Ferromagnetic - core ۲ — Hysteresis phenomenon

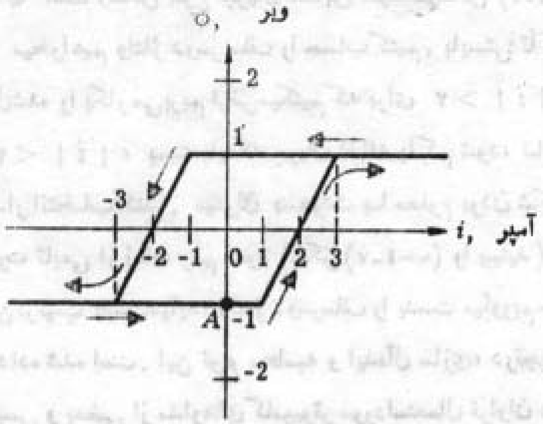


شکل ٥-٤- پدیده پس‌ماند

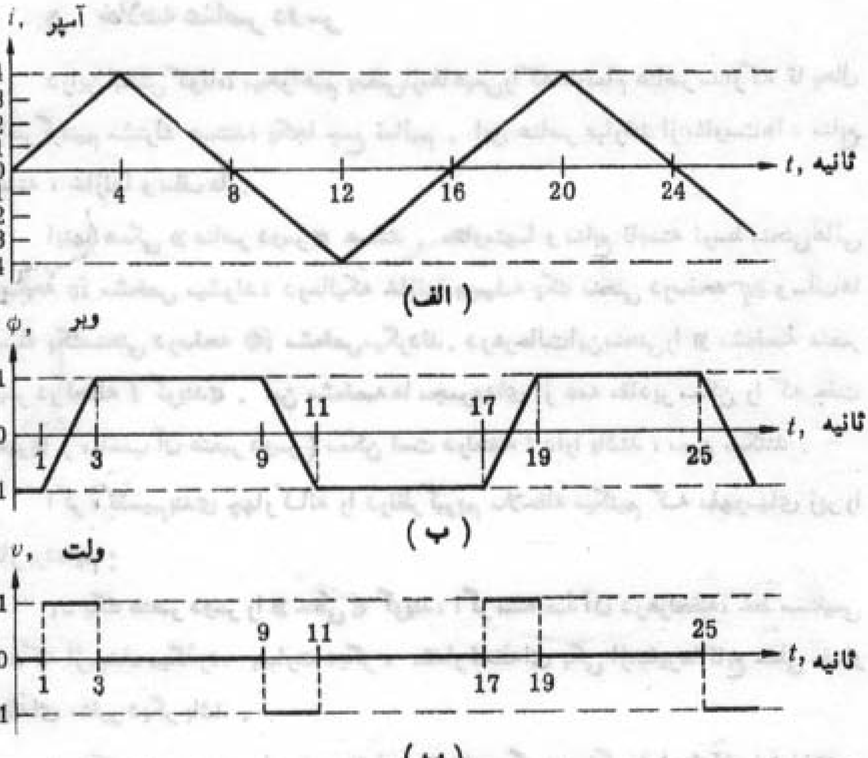
درشکل (٥ - ٤) نشان داده شده است . فرض کنید از مبداء صفحه $i\Phi$ شروع نموده و جریان را بتدریج افزایش دهیم شار مطابق منحنی ١ زیاد میشود . اگر پس از رسیدن به نقطه (i_1 , Φ_1) جریان را کاهش دهیم، شار بجای اینکه منحنی ١ را بطورمعکوس طی کند روی‌منحنی ٢ قرارمیگیرد و وقتیکه جریان به نقطه $-i_2$ میرسد شار بالاخره مساوی صفر میشود، واگر پس‌از رسیدن به نقطه ($-i_3$, $-\Phi_3$) جریان‌را دوباره افزایش دهیم شار‌منحنی ٣ را طی‌میکند و وقتیکه جریان به مقدارمثبت i_4 میرسدمقدار شار صفر میگردد .

تعریفی که برای سلف بعنوان یک عنصر مدار دادیم حالتی را که سلف فیزیکی پدیده پس‌ماند را نشان دهد شامل نمیباشد زیرا وقتی که بطور دقیق صحبت شود مشخصهٔ نشان داده شده درشکل (٥ - ٤) یک منحنی نیست . تا آنجا که میدانیم هیچ طریق مؤثری برای توصیف پدیده کلی پس‌ماند وجود ندارد ، معهذا ما درمثال زیر نشان میدهیم که چگونه با ایده‌آل سازی مناسب وبرای نوع معینی ازشکل موج جریان، تعیین ولتاژدوسر سلفی که پدیده پس‌ماند را نشان میدهد ساده میباشد .

مثال گیریم یک سلف غیرخطی‌دارای‌مشخصهٔ پس‌ماندایده‌آل شده مطابق شکل (٦-٤) بوده و فرض میکنیم نقطه کار در لحظهٔ صفر درنقطه A روی مشخصه باشد که درآن



شکل ٦-٤- مشخصهٔ یک سلف که دارای خاصیت پس‌ماند است .



شکل ٧-٤- شکل‌موجهای i ، Φ و v برای یک سلف غیرخطی که مشخصهٔ پس‌ماندآن درشکل (٦-٤) نشان داده شده است .

$i=o$ و $\Phi=-1$ است وشکل موج جریان مطابق آنچه درشکل (۷-٤ الف) نشان‌داده شده است باشد ، میخواهیم ولتاژ دوسر سلف را حساب کنیم. بایستی تأکید شود که وقتی ما مشخصهٔ ایده‌آل‌شده را بکار می‌بریم فرض میکنیم که برای $|i|>3$ شار مقدار ثابتی بوده ودرحالت $|i|<3$ ، بسته باینکه جریان اضافه یا کم شود، شار ممکن‌است برای هرمقدار i دو مقدار انتخاب کند . میتوان بسهولت بـا معلوم بودن شکل موج جریـان ، منحنی Φ را بصورت تابعی از زمان رسم نمود (شکل(۷-٤ ب) را ببینید) . با مشتق گیری ازتابع Φ که بدین ترتیب بدست‌میآید، ولتاژ دوسرسلف را بدست میآوریم. این نتیجه درشکل (۷-٤ پ) نشان داده شده است. این نوع محاسبه و ایده‌آل سازی، درتجزیه وتحلیل تقویت کننده‌های مغناطیسی و بعضی از مدارهای کامپیوتر مورداستعمال فراوان دارد .

۵ خلاصه عناصر دوسر

دراین بخش کوتاه، میخواهیم بعضی ازمفاهیمی را که درتمام عناصر مدارکه تا بحال درنظر گرفتیم مشترك هستند، یکجا جمع نمائیم . این عناصر عبارتند از مقاومت‌ها ، منابع نابسته ، خازنها و سلف‌ها .

اینها همگی « عناصر دوسر » هستند . مقاومتهـا و منابع نابسته توسط منحنی‌هائی درصفحه iv مشخص میشوند، درحالیکه خازنها بوسیلـه یك منحنی درصفحه vq و سلف‌ها بوسیله یك‌منحنی درصفحه $i\Phi$ مشخص‌میگردند. درهرحالت‌این‌منحنی‌را « مشخصهٔ عنصر دوسر درلحظه t گویند» . این مشخصه‌ها مجموعه‌ای از همه مقادیر ممکن را که جفت متغیرها (مناسب آن عنصر دوسر) ممکن است درلحظه t دارا باشند ، معین میکنند .

اگر ، تقسیم‌بندی چهارگـانه را درنظرگیریم ملاحظه میکنیم کـه مفهومهای زیر را بکار برده‌ایم :

۱- یك عنصر دوسر را « خطی » گویند، اگر مشخصهٔ آن درهرلحظه، خط مستقیمی باشد که ازمبداء میگذرد. بعبارت دیگر ، مقدارلحظه‌ای یکی ازمتغیرها تابع خطی مقدار لحظه‌ای متغیر دیگر باشد .

۲- یك عنصر دو سر را « تغییرناپذیر بازمان » گویند، اگرمشخصهٔ آن با زمان‌تغییر نکند، و بالنتیجه یك عنصر دوسر را « خطی تغییرناپذیر بازمان » گویند، اگر این عنصر هم‌خطی و هم تغییرناپذیر با زمان باشد، و بنابه تعریف این بدین‌معنی‌است که مشخصهٔ آن

خط مستقیم ثابتی است که از مبداء میگذرد . این مشخصه بوسیله یک عدد یعنی شیب آن کاملاً مشخص میشود .

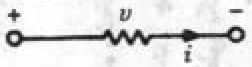
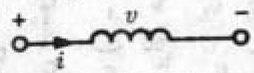
درجدول (۱ - ۲) عبارتهای جبری معین کننده مشخصه‌ها و معادلات ارتباط دهنده ولتاژ و جریان برای هریک ازعناصر دوسر داده شده‌است. چنانکه قبلاً گفته شد، خازنهای فیزیکی معمولی دارای یک مشخصه vq است که بطور یکنوا افزایش می‌یابد و بنابراین مقدار لحظه‌ای بار $q(t)$ را میتوان همیشه توسط یک تابع تک ارز برحسب مقدار لحظه‌ای ولتاژ $v(t)$ بیان نمود . بنابراین اگر خازنی تغییرناپذیر با زمان باشد میتوان مشخصهٔ آنرا بصورت $q=f(v)$ نوشت و اگر خازن تغییرپذیر با زمان باشد بصورت :

$$q(t)=f(v(t)\ ,\ t)$$

نوشت . اگر پدیده پس‌ماند را درنظر نگیریم ، میتوان توضیحات مشابهی هم برای سلفها بیان نمود . برای سلفهای تغییرناپذیر بازمان، میتوان‌مشخصه را همواره بصورت $\Phi=f(i)$ و برای حالت تغییرپذیر بازمان بصورت $\Phi(t)=f(i(t)\ ,\ t)$ نوشت .

درمورد مقاومتها وضع پیچیده‌تری وجود دارد . با مراجعه به شکل (۹-۱) ملاحظه میشود که مشخصهٔ یک دیود تونلی را میتوان بوسیله معادله‌ای بشکل $i=f(v)$ نوشت که درآن f یک تابع تک ارز میباشد . درواقع برای هرمقدار ولتاژ v ، مشخصه یک وتنها یک مقدار برای جریان لحظه‌ای i مجاز میدارد . چنین مقاومتی را «کنترل شده با ولتاژ» گویند . ازطرف دیگر ، اگر بشکل (۱۰-۱) مراجعه کنیم ملاحظه میکنیم که مشخصهٔ یک حباب گازدار دارای این خاصیت است که برای هرمقدار جریان i ، مشخصه یک و تنها یک مقدار برای v مجاز میدارد و داریم $v=f(i)$ ، که درآن f یک تابع تک ارز میباشد . چنین مقاومتی را «کنترل‌شده با جریان» گویند. بعضی مقاومتها مانند دیود ایده‌آل ، نه کنترل شده باجریان و نه کنترل شده با ولتاژ هستند. اگر $v=o$ باشد، جریان میتواند هرمقدار نامنفی را داشته باشد (ازاینرو نمیتواند مقاومت کنترل شده با ولتاژ باشد) و اگر $i=o$ باشد ولتاژ میتواند هرمقدار نامثبت را داشته باشد (ازاینرو نمیتواند مقاومت کنترل شده با جریان باشد) . یک مقاومت خطی بشرطیکه $o<R<\infty$ باشد، هم کنترل شده با ولتاژ وهم کنترل شده با جریان میباشد .

جدول ۱-۲ خلاصهٔ طبقه بندی چهارگانهٔ عناصر دوسر

	خطی		غیر خطی	
	تغییر ناپذیر بازمان	تغییر پذیربا زمان	تغییر ناپذیر بازمان	تغییر پذیربا زمان
مقاومتها 	$v(t) = Ri(t)$ $i(t) = Gv(t)$ $R = 1/G$	$v(t) = R(t)i(t)$ $i(t) = G(t)v(t)$ $R(t) = 1/G(t)$	$v(t) = f(i(t))$ Current-controlled $i(t) = g(v(t))$ Voltage-controlled	$v(t) = f(i(t),t)$ Current-controlled $i(t) = g(v(t),t)$ Voltage-controlled
خازنها $i = \frac{dq}{dt}$ 	$q(t) = Cv(t)$ $i(t) = C\frac{dv}{dt}$ $v(t) = v(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt'$	$q(t) = C(t)v(t)$ $i(t) = \frac{dC}{dt}v(t) + C(t)\frac{dv}{dt}$	$q(t) = f(v(t))$ $i(t) = \frac{df}{dv}\Big\|_{v(t)}\frac{dv}{dt}$	$q(t) = f(v(t),t)$ $i(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\Big\|_{v(t)}\frac{dv}{dt}$
سلفها $v = \frac{d\phi}{dt}$ 	$\phi(t) = Li(t)$ $v(t) = L\frac{di}{dt}$ $i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v(t')\,dt'$	$\phi(t) = L(t)i(t)$ $v(t) = \frac{dL}{dt}i(t) + L(t)\frac{di}{dt}$	$\phi(t) = f(i(t))$ $v(t) = \frac{df}{di}\Big\|_{i(t)}\frac{di}{dt}$	$\phi(t) = f(i(t),t)$ $v(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial i}\Big\|_{i(t)}\frac{di}{dt}$

۶- توان وانرژی

در درس فیزیک یاد گرفتیم که یک‌مقاومت هیچگونه انرژی ذخیره نکرده بلکه‌انرژی الکتریکی‌را جذب‌میکند، اما یک‌خازن‌درمیدان‌الکتریکی‌خود، ویک سلف درمیدان‌مغناطیسی خود انرژی ذخیره مینمایند. دراین بخش، توان[1] و انرژی[2] را از نقطه نظری که برای مدارهای فشرده بسیار راحت باشد موردبحث قرار خواهیم داد.

دربررسی مدارهای فشرده، تا بحال توجه خود را به عناصر دوسر متمرکز کرده‌ایم. حال میخواهیم بررسی وسیعتری انجام دهیم. فرض کنید مداری دراختیار داشته و دوسیم ازاین مدار بیرون آورده و آنرا به مدار دیگری که مولد[3] مینامیم وصل کنیم (به شکل (۱-۶) مراجعه شود). مثلاً مداری که با آن شروع میکنیم ممکن‌است یک بلندگو باشد که آنرا بدوسر کابلی که از یک تقویت کننده قدرت بیرون آمده وصل کنیم. بنابراین تقویت کننده قدرت بعنوان یک مولد درنظر گرفته میشود. مداری را که درنظرگرفته‌ایم **مدار دوسر**[4] خواهیم گفت، زیرا از نقطه نظرما، فقط ولتاژ و جریان دوسر آن و انتقال توانی که‌دراین سرها انجام میگیرد موردتوجه است.

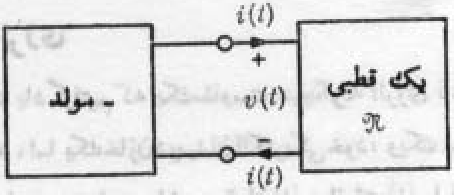
دراصطلاح جدید، یک مدار دوسر را **یک قطبی**[5] گویند. لفظ «یک قطبی» دراینجا کاملاً مناسب است زیرا منظور از **قطب**، یک جفت ازسرهای یک مدار است که درآن، درهرلحظه از زمان، جریان‌لحظه‌ای که وارد یکی ازاین سرها میشود مساوی جریان لحظه‌ای است که از سر دیگر خارج میشود. این‌واقعیت درشکل (۱-۶) تشریح شده‌است. توجه کنید که جریان $i(t)$ که وارد سربالائی یک‌قطبی $\mathcal{N}$ میشودمساوی جریان $i(t)$ است که از سرپائینی یک‌قطبی $\mathcal{N}$ خارج‌میشود. جریان $i(t)$ را که واردقطب میشود **جریان قطب** و ولتاژ $v(t)$ دوسر قطب را **ولتاژ قطب** گویند. درنظریه مدارها، مفهوم قطب بسیار حائز اهمیت‌است و وقتیکه کلمهٔ یک قطبی را بکار می‌بریم، میخواهیم نشان دهیم که فقط ولتاژ وجریان قطب موردتوجه ما است. سایر متغیرهای شبکه که مربوط به عناصر داخل یک قطبی‌است قابل دسترس نیستند. وقتیکه شبکه $\mathcal{N}$ را به عنوان یک قطبی درنظر

---

۱ — Power ۲ — Energy

۳ — Generator ۴ — Two Terminal

۵ — One port



شکل ۱-٦- توان لحظه‌ای که در زمان t وارد یک قطبی $\mathcal{N}$ میشود مساوی $p(t)=v(t)\,i(t)$ است

میگیریم، تا آنجائیکه مورد توجه ما است، منظور ازقطب، یک جفت سیمی است که از یک **جعبه سیاه**[۱] بیرون آمده باشد. این جعبه بدان‌جهت سیاه گفته میشود که ما مجاز نیستیم محتویات داخل آنرا ببینیم ! با بخاطر سپردن این مفهوم، واضح است که مقاومتها، منابع ولتاژ نابسته، خازنها و سلفها مثالهای ساده وخاصی از «یک قطبی‌ها» هستند که فقط از یک عنصر تشکیل می‌یابند.

یک مطلب‌اساسی‌فیزیک این‌است که **توان لحظه‌ای** «که وارد یک قطبی میشود مساوی حاصلضرب ولتاژ قطب درجریان قطب‌است» ، بشرطیکه جهت‌های قراردادی ولتاژ قطب و جریان قطب ، جهت‌های قراردادی متناظر نشان داده شده درشکل (۱-٦) باشند. گیریم $p(t)$ نشان دهنده توان لحظه‌ای (برحسب وات[۲]) باشد که در زمان t توسط مولد به‌یک قطبی تحویل داده میشود . دراینصورت :

$$\boxed{p(t)=v(t)\,i(t)} \qquad (٦-١)$$

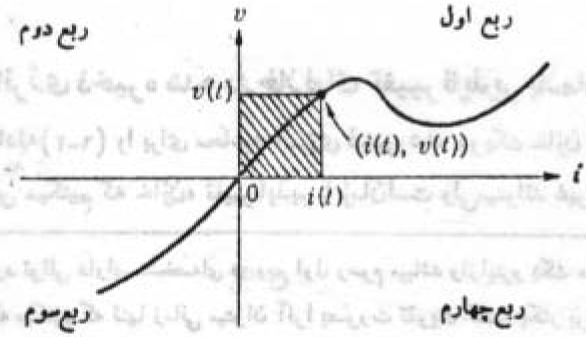
که درآن v برحسب ولت و i برحسب آمپر است. چون انرژی (برحسب ژول[۳]) انتگرال توان (برحسب وات) میباشد، نتیجه میشود که « **انرژی تحویل داده شده** » «مولد به یک قطبی از $t_\circ$ تا زمان t عبارتست از» :

$$\boxed{W(t_\circ\,,t) \triangleq \int_{t_\circ}^{t} p(t')\,dt' = \int_{t_\circ}^{t} v(t')\,i(t')\,dt'} \qquad (٦-٢)$$

۱ — Black box　　۲ — Watt　　۳ — Joule

۱-۶ توان ورودی به یک مقاومت - پسیو بودن

ازآنجائیکه یک مقاومت بوسیله یک منحنی درصفحه vi (یا صفحه iv) مشخص میشود ، هرگاه « نقطه کار[۱] » $(i(t),v(t))$ در روی مشخصه معین شود ، توان لحظه‌ای که در زمان t وارد مقاومت میشود بطور یکتائی معین میگردد . توان لحظه‌ای مساوی مساحت مستطیلی‌است که توسط نقطه کار ومحورهای صفحه iv مطابق شکل(۲-۶) تشکیل میشود . هرگاه نقطه کار در ربع اول یا سوم باشد (بنابراین $iv > o$) ، توان وارد شده به مقاومت مثبت‌است، یعنی مقاومت از دنیای خارج توان دریافت مینماید. اگر نقطه کار در ربع دوم یا چهارم باشد (بنابراین $iv < o$) توانی که وارد مقاومت میشود منفی است یعنی مقاومت بدنیای خارج توان تحویل‌میدهد. ازاین‌جهت، اگر برای هرلحظه t از زمان،مشخصهٔ مقاومتی در ربع اول وسوم قرارگیرد این مقاومت‌را پسیو[۲] گویند . دراینجا ربع های اول‌وسوم محورهای i و v را نیز شامل میشود. محدودیت هندسی‌مشخصهٔ یک مقاومت پسیو معادل این است که درهرلحظه از زمان، صرفنظر ازشکل موج جریانی که از داخل آن میگذرد $p(t) \geqslant o$ میباشد . این خاصیت اساسی مقاومتهای پسیو است . « یک مقاومت پسیو هیچوقت بدنیای خارج توانی تحویل نمیدهد » . بسادگی میتوان



شکل ۲-۶- توانی که درزمان t وارد مقاومت میشودمساوی $v(t)\ i(t)$ است

---

۱ — Operating point

۲ — Passive

ملاحظه کرد که یک دیود ژرمانیوم و یک دیود تونلی*، یک مدار باز، یک مدار اتصال کوتاه و یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان با $R \geqslant 0$ مقاومتهای پسیو هستند.

مقاومتی را که پسیو نباشد اکتیو[1] گویند مثلاً هرمنبع ولتاژ (که درآن v_s متحد باصفر نباشد) و هرمنبع جریان (که درآن i_s متحد باصفر نباشد) یک مقاومت اکتیو است زیرا که مشخصه آن درهرلحظه، موازی‌محور i ها یامحور v ها میباشد وبنابراین به‌ربع های اول و سوم محدود نشده است. تذکر این نکته قابل توجه است که برای یک «مقاومت خطی» (تغییرپذیر بازمان یا تغییرناپذیر بازمان) «اگر وتنها اگر، برای بعضی‌از زمان t رابطه $R(t) < 0$ برقرار باشد اکتیو است». دلیل این موضوع این است که مشخصه یک مقاومت خطی، خط مستقیمی است که از مبداء گذشته و شیب آن مساوی مقاومت R میباشد، ازاینرو اگر $R < 0$ باشد مشخصه در ربعهای دوم و چهارم قرار میگیرد. ازاینجا نتیجه میشود که اگر جریانی از داخل این مقاومت بگذرد (مثلاً توسط یک منبع جریان) و $R(t) < 0$ باشد، مقاومت به‌دنیای خارج توانی بمیزان $i^2(t) \mid R(t) \mid$ وات تحویل میدهد. حقیقت این است که بندرت میتوان یک عنصر فیزیکی پیدا نمود که مانند یک مقاومت‌خطی‌اکتیو طبق تعریف بالا رفتار نماید، معهذا مدل یک مقاومت خطی اکتیوحائز اهمیت است زیرا یک مقاومت غیرخطی مانند دیود تونلی درتجزیه و تحلیل سیگنالهای کوچک بصورت یک مقاومت خطی اکتیو رفتار مینماید و این مطلب درفصل بعد توضیح داده خواهد شد.

۲-۶ انرژی ذخیره شده درخازنهای تغییر ناپذیر بازمان

اکنون‌معادله(۲-۶) را برای محاسبه انرژی ذخیره شده دریک خازن بکارمی‌بریم. برای سادگی فرض میکنیم که خازن، تغییرناپذیر با زمان‌است ولی‌میتواند غیرخطی‌باشد**.

---

* یک دیود تونلی دارای مشخصه‌ای در ربع اول وسوم میباشد وازاینرو یک عنصر پسیواست. در فصل سوم ملاحظه میکنیم که تنها زمانی میتوان آنرا بصورت تقویت کننده بکار برد که یک عنصر اکتیو خارجی به‌آن وصل شود. درعمل، این کار توسط یک مدار بایاس کننده که شامل یک باتری است انجام میگیرد.

** انرژی ذخیره شده در خازنها و سلفهای تغییرپذیر با زمان مستلزم محاسبات دقیقی است. محاسبه آنها درفصل ۱۹ انجام خواهد شد.

۱ — Active

فرض کنید یک قطبی شکـل (۱ - ۶) که به‌یک مولد وصل‌است یک خازن باشد . جریان درون خازن عبارتست از :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \qquad (۶-۳)$$

گیریم مشخصهٔ خازن بوسیله تابع $\hat{v}(\cdot)$ توصیف شده باشد یعنی :

$$v = \hat{v}(q) \qquad (۶-۴)$$

بنابراین انرژی که از زمان t_0 تا t توسط مولد به خازن تحویل داده میشود عبارتست از :

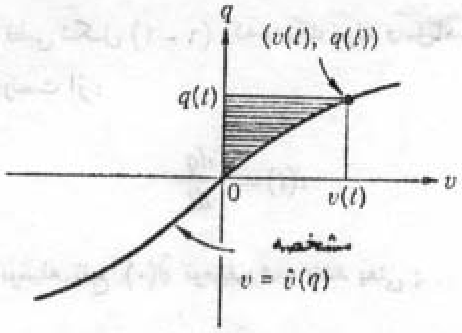
$$W(t_0\,,\,t) = \int_{t_0}^{t} v(t')\, i(t')\, dt' = \int_{q(t_0)}^{q(t)} \hat{v}(q_1)dq_1 \qquad (۶-۵)$$

برای بدست آوردن معادله (۵ - ۶) ابتدا معادله (۳ - ۶) را بکار برده و طبق آن نوشتیم:

$$i(t')\, dt' = dq_1$$

کـه درآن q_1 ، متغیر ساختگی انتگـرال گیری و نشان دهنده بـار الـکتریـکی میباشد . معادله (۴ - ۶) را برای بیان ولتاژ $v(t')$ بصورت مشخصهٔ خازن یعنی تابع $\hat{v}(\cdot)$ برحسب متغیر انتگرال گیری q_1 بکـار بردیم، و بنابراین حدهای پائین و بـالای انتگرال گیری هم متعاقباً از t_0 به $q(t_0)$ و از t به $q(t)$ تغییر کردند. حال فرض میکنیم که بار اولیه‌خازن صفر باشد، یعنی $q(t_0) = o$. بکار بردن حالت بدون بارخازن بعنوان حالتی که متناظر با انرژی ذخیره شده صفر درخازن باشد کاملاً طبیعی است . ازآنجائیکـه خازن فقط انـرژی ذخیره نموده و هیچگونه انرژی‌اتلاف‌نمی‌نماید، نتیجه میگیریم که انرژی ذخیره شده درزمان t ، یعنی $\mathcal{E}_E(t)$ مساوی انرژی $W(t_0\,,\,t)$ است که از زمان t_0 تا t توسط مولد به‌خازن تحویل داده شده است. بنابراین **انرژی ذخیره شده درخازن** از روی رابطه (۵ - ۶) بدست میآید :

$$\mathcal{E}_E(t) = \int_{o}^{q(t)} \hat{v}(q_1)\, dq_1 \qquad (۶-۶)$$



شکل ۳-۶- سطح هاشورخورده انرژی ذخیره شده در زمان t دریک خازن را نشان میدهد .

برحسب مشخصه خازن درصفحه vq، مساحت هاشورخورده درشکل (۳ - ۶) انرژی ذخیره شده را نشان میدهد (توجه کنید که دراین شکل q محور عرضها و v محور طولها میباشد و بنابراین انتگرال (۶ - ۶) سطح هاشورخورده «بالای» منحنی را نشان میدهد). واضح است که اگر مشخصه ازمبداء صفحه vq گذشته و در ربع های اول و سوم قرار گیرد، انرژی ذخیره شده همیشه نامنفی است. هرگاه انرژی ذخیره شده دریک خازن همیشه نامنفی باشد خازن‌را **پسیو** گویند . برای یک خازن خطی تغییرناپذیر بازمان، معادله مشخصه بصورت زیر است :

$$q = Cv \qquad (۶-۷)$$

که درآن C ثابتی است که به t و v بستگی ندارد . معادله (۶ - ۶) تبدیل به عبارت آشنای زیر میگردد :

$$\boxed{\mathcal{E}_E(t) = \int_0^{q(t)} \frac{q_1}{C}\, dq_1 = \frac{1}{2}\, \frac{q^2(t)}{C} = \frac{1}{2}\, Cv^2(t)} \qquad (۶-۸)$$

بنابراین خازن خطی تغییرناپذیر با زمان وقتی پسیو است که ظرفیت آن نامنفی باشد و زمانی اکتیو است که ظرفیت آن منفی باشد. یک خازن اکتیو انرژی منفی ذخیره مینماید، یعنی به‌خارج انرژی تحویل میدهد . البته این عمل از لحاظ فیزیکی تحقق‌پذیر نیست . معهذا میتوان دریک فاصله کارکوچک و باند باریکی از فرکانس ، بوسیله مدارهای

الکترونیکی که بطور مناسبی طرح شده باشند یک خازن با ظرفیت منفی تهیه نمود .

درفصل ۱۹ خواهیم دید که یک‌خازن خطی تغییرپذیر با زمان حتی اگر $C(t)$ برای تمام t مثبت باشد ممکن است اکتیو باشد .

۶-۳ انرژی ذخیره شده درسلفهای تغییر ناپذیر بازمان

محاسبه‌انرژی ذخیره شده دریک سلف، مشابه محاسباتی‌است که درموردخازن انجام گرفت و در واقع اگر درمحاسبات قبلی متغیرها را بطورمناسبی تغییر دهیم (i را به v ، q را بـه Φ و v را به i تبدیل کنیم) نتایج متناظر را بـرای یک سلف بدست‌میآوریم . این عمل که جنبه‌ای از روش‌دوگانی[1] است درنظریه مداراهمیت زیادی دارد. مبحث‌دوگانی بعداً با تشریح کافی بررسی خواهد شد .

قانون فاراده درمورد یک سلف بیان میکند که :

$$v(t) = \frac{d\Phi}{dt} \qquad (۶-۹)$$

گیریم مشخصهٔ سلف بوسیله تابع $\hat{i}(\cdot)$ توصیف شده باشد یعنی :

$$i=\hat{i}(\Phi) \qquad (۶-۱۰)$$

فرض کنید که سلف یک قطبی‌ای باشد که مطابق شکل (۱ - ۶) به مولد وصل شده است دراینصورت انرژی تحویل داده شده به سلف بوسیله مولد از زمان t_0 تا t عبارتست از :

$$W(t_0\,,t)=\int_{t_0}^{t} v(t')\,i(t')\,dt' = \int_{\Phi(t_0)}^{\Phi(t)} \hat{i}(\Phi_1)\,d\Phi_1 \qquad (۶-۱۱)$$

برای بدست آوردن (۱۱ - ۶) معادله (۹ - ۶) را بکار برده و نوشتیم :

$$v(t')\,dt'=d\Phi_1$$

که درآن متغیر ساختگی انتگرال Φ_1 ، شار را نشان میدهد . برای بیان جریان برحسب

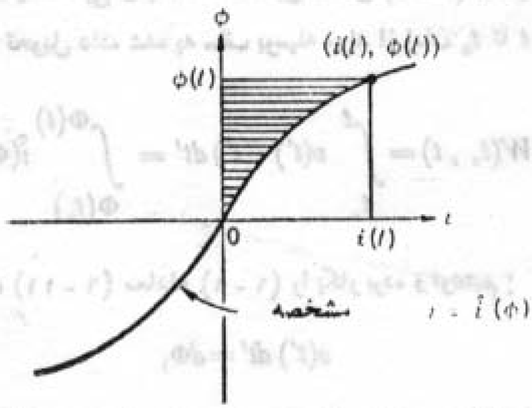
1 — Duality

شارمعادله (۶-۱۰) بکار رفت. روش عمل، مشابه‌روش بدست‌آوردن‌معادله (۶-۵) میباشد. فرض کنید که شاراولیه صفر باشد یعنی $\Phi(t_0)=o$. مجدداً انتخاب‌این‌حالت سلف، متناظر باحالتی‌است که انرژی ذخیره شده مساوی‌صفر باشد و با مشاهده اینکه یک سلف فقط انرژی ذخیره کرده وهیچگونه انرژی تلف نمیکند، نتیجه میگیریم که انرژی‌مغناطیسی‌ذخیره شده در زمان t یعنی $\mathcal{E}_M(t)$ مساوی انرژی تحویل داده شده $W(t_0, t)$ مولد به سلف از زمان t_0 تا t میباشد و بنابراین **انرژی ذخیره شده درسلف** عبارتست از :

$$\boxed{\mathcal{E}_M(t)=\int_{o}^{\Phi(t)} \hat{i}(\Phi_1)\, d\Phi_1} \qquad (۶-۱۲)$$

سطح هاشور زده شکل (۶-۴)، انرژی ذخیره شده درسلف را برحسب مشخصهٔ آن درصفحه $i\Phi$ نمایش میدهد و بطریق مشابه، اگر مشخصهٔ صفحه $i\Phi$ از مبداء گذشته ودر ربع های اول و سوم قرار گیرد انرژی ذخیره شده همیشه نامنفی است . اگر انرژی ذخیره شده یک سلف همیشه نامنفی باشد آنرا **پسیو** گویند. یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان دارای مشخصه‌ای بصورت زیر میباشد .

$$\Phi=Li \qquad (۶-۱۳)$$



شکل ۶-۴- سطح هاشورخورده انرژی ذخیره شده، درزمان t درسلف را نشان میدهد

که درآن L ثابتی است که به i و t بستگی ندارد . از اینرو معادله (۱۲ - ۶) بصورت آشنای زیر منجر میشود :

$$\boxed{\mathcal{E}_M(t) = \int_0^{\Phi(t)} \frac{\Phi_1}{L}\, d\Phi_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\Phi^2(t)}{L} = \frac{1}{2} L i^2(t)} \qquad (۶-۱۴)$$

و بنابراین یک سلف خطی تغییرناپذیر بازمان وقتی پسیو است که اندوکتانس آن نامنفی باشد و زمانی اکتیو است که اندوکتانس آن منفی باشد .

۷- عناصر فیزیکی درمقابل اجزاء مدار

چنانکه درابتدای این فصل بیان شد اجزاء مدار که تعریف‌آنها داده شد ، مدلهای مداری با مشخصه‌های ساده ولی دقیق هستند . این مدلهای مداری مشابه ذره و جسم سخت یک فیزیکدان می‌باشند . مدلهای مداری درتجزیه و تحلیل و ترکیب مدارها و سیستمهای فیزیکی‌ضروری‌هستند هرچند باید دانست که « اجزاء فیزیکی » مانند مقاومتهای فیزیکی (که باید از مقاومتهای مدلی متمایز شوند) ، دیودها ، سیم‌پیچ ها و ظرفیت‌ها که ما با آنها درآزمایشگاه سروکارداشته یاآنهارادرمدارهای‌عملی بکارمیبریم فقط میتوانندتوسط مدلهای‌مداری ما تقریب شوند. علم مهندسی برخلاف ریاضیات‌موضوع دقیقی نیست وتقریباً درحل‌تمام مسائل بکاربردن تقریب لازم واساسی است. مسأله اساسی شناختن مدل‌مناسب و بکاربردن تقریب معتبر درحل مسائل است .

دراین بخش به بحث مختصری درباره مسأله مدل سازی بعضی از عناصر فیزیکی که معمولاً بکارمیرونـد می‌پردازیم. بسیاری از عناصر فیزیکی را میتوان، کم و بیش دقیق، با مشخصهٔ اصلی فیزیکی آنها مدل سازی کـرد . مثلاً یک ظرفیت با صفحات موازی را در شرایط عادی کار (که شرح‌داده خواهد شد)، میتوان با یک خازن‌خطی تغییرناپذیر بازمان مدل نمود. درفرکانسهای پائین میتوان یک‌دیود پیوندی را بعنوان یک مقاومت غیرخطی درنظرگرفته وسپس آنرا به‌صورت ترکیبی ازیک دیود ایده‌آل ومقاومت‌خطی تقریب نمود . معهذا دربکاربردن این عناصر بایستی متوجه شویم که تحت چه شرایطی این مدلها معتبر است و مهمتر ازآن درچه صورتی لازم است اصلاحاتی درمدل بعمل آیـد . درمطالب زیـر

سه موضوع اساسی را که درمدل سازی برای عناصر فیزیکی اهمیت فراوان دارند مورد بحث قرار میدهیم .

« دامنه کار » هرعنصر فیزیکی برحسب دامنهٔ کار[1] طبیعی خود مشخص میشود . ولتاژ حداکثر ، جریان حداکثر وتوان حداکثر تقریباً همواره برای هردستگاهی معین میشود و اگر درمداری ولتاژ ، جریان یا توان از مقدار معین شده تجاوز نماید نمیتوان برای عنصر بطریق معمولی خود مدل سازی کـرد و اگر عنصری در چنین شرایطی بکار برده شود ممکن است عملاً ازکار بیافتد .

دامنهٔ کار دیگری که معمولاً معین میشود ، دامنه تغییرات فرکانس میباشد. مثلاً درفرکانسهای خیلی بالا نمیتوان یک مقاومت را برای یک مقاومت فیزیکی مدل قرارداد . وقتی بطور دقیق صحبت شود، هرزمان که اختلاف ولتاژی موجود باشد یک میدان الکتریکی بوجود می‌آید و ازاینرو مقداری انرژی الکترواستاتیکی ذخیره میشود . بطریق مشابه، وجود یک جریان لازم میدارد که مقداری انرژی مغناطیسی هم ذخیره شود . درفرکانسهای پائین این گونه آثار قابل صرفنظر است و بنابرایـن میتوان یک مقاومت فیزیکی را بعنوان ، تنها یک عنصر مدار، یعنی یک مقاومت مدل نمود. درحالیکه در فرکانسهای بالا ، یک مدل خیلی دقیق باید علاوه برمقاومت شامل سلف وخازن نیز باشد. بنابراین بمنظور مدل ساختن برای یک عنصر فیزیکی ، دو یا چند جزء مدار را بکار می‌بریم . با مشخص کـردن دامنهٔ تغییرات فرکانس، میدانیم که درداخل این فاصله، یک مقاومت فیزیکی را تنها میتوان بوسیله یک مقاومت مثلاً ۱۰۰ اهمی مدل سازی کرد .

« اثر درجه حرارت » مقاومت‌ها ، دیودها و تقریباً همه عناصر مدار درمقابل درجه حرارت حساس هستند و اگر آنها را درمحیط‌هائی که درجه حرارت آنها تغییر میکند بکـار ببرند مشخصهٔ آنها تغییرپذیر با زمان خواهد بود. دستگاههائی که با نیمه هادی‌ها[2] کار میکند درمقابل تغییر درجه حرارت بسیار حساس هستند و مدارهائی کـه از دستگـاههای نیمه‌هادی تشکیل میشود، اغلب قسمتهای اضافی دیگری مانند فیدبک[3] همراه دارند که آثار ناشی از تغییر درجه حرارت را ازبین میبرد .

---

۱ — Range of Operation

۲ — Semiconductor

۳ — Feedback

« اثر پارازیتی[۱] » وقتیکه جریانی از یک سلف فیزیکی میگذرد ، شاید مهمترین پدیده قابل‌ملاحظه علاوه برمیدان مغناطیسی، اتلاف آن باشد. سیم‌پیچی یک سلف فیزیکی دارای مقاومتی است که دربعضی مدارها ممکن است آثار عمده‌ای داشته باشد . بنابراین درمدل سازی یک سلف فیزیکی، اغلب ازاتصال سری یک سلف و یک مقاومت استفاده میکنیم . بطریق مشابه درفرکانسهای بالا برای یک دیود پیوندی بایستی مدلی بصورت اتصال موازی یک مقاومت غیرخطی و یک خازن درنظرگرفته شود . وجود خازن اساساً بعلت بار ذخیره شده درپیوند میباشد. قبلاً گفته شده است که یک باتری عملی، یک‌منبع ولتاژ (ایده‌آل) نیست ، معهذا میتوان برای تقریب نمودن رفتار خارجی باتری ، مدلی که اثر مقاومت پارازیتی را نیز شامل باشد بکاربرد .

مهندسین باید درانتخاب عناصر فیزیکی تجربه و عقل سلیم خود را بکار ببرند مثلاً سیم‌پیچی‌های باکیفیت بسیار عالی واتلاف قابل صرفنظر وجود دارند،ولی ممکن‌است دریک طرح عملی از لحاظ اقتصادی مقرون بصرفه نباشند و بجای آن اجباراً از مدار پیچیده‌تری با عناصر ارزان که همان منظور را برآورده نماید استفاده شود .

بطورخلاصه، تشخیص تفاوت میان یک جزء مدار که یک مدل ایده‌آل بوده ویک عنصر فیزیکی که شیئی از دنیای واقعی است اهمیت بسیار دارد . ما بایستی فرضیه‌هائی راکه تحت‌آنها مدلهائی برای نمایش عناصر فیزیکی انتخاب میشود بخوبی بدانیم ، هرچند منظور اصلی ما دراین کتاب بررسی نظریه مدارهائی است که از مدلها تشکیل می‌یابند . همچنین دانستن این موضوع نیز حائز اهمیت است که تنها ازطریق مدل‌سازی قادر هستیم روشهای تجزیه وتحلیل دقیق، قضایای‌محکم و درک عمیقی از مدارها و سیستمهای‌فیزیکی بدست آوریم .

« اندازه معمولی اجزاء مدار » دراینجا بطور خلاصه اندازه مقادیر اجزاء مدارکه درعمل با آنها مواجه میشویم بیان میکنیم . درمورد مقاومتها مقادیری که معمولاً بکار میرود از چند اهم تا چند مگا اهم تغییر میکند و دقت مقادیر مشخص شده بستگی به مورد استعمال خاص آن دارد . برای یک آزمایش فیزیکی دقیق شاید بخواهیم مقاومتها را تا چند دهم و یا صدم اهم اندازه بگیریم درحالیکه درطرح مدار بایاس کننده یک تقویت کننده صوتی، یک دقت ۱۰ درصد درمقدار مقاومتها معمولاً کفایت میکند .

---

۱ — Parasitic

حدودمفید اندازه خازنها ازچندپیکوفاراد (10^{-12} فاراد) درمورد ظرفیتهای پارازیتی دستگاههای الکترونیکی تا چند میکروفاراد (10^{-6} فاراد) است . مقادیر عملی یک سلف از چند میکروهانری درمورد اندوکتانس پوشش(۱) یک سیم کوتاه ، تا چند هانری درمورد ترانسفورماتورهای قدرت تغییر میکند .

درموردمثالهائی که دراین کتاب گفته میشود پیوسته اعداد ساده و روند شده‌ای‌مانند مقاومت ۱۰ اهم، خازن یک فاراد وسلف $\frac{1}{2}$ هانری بکار می‌بریم . دانستن اینکه این مقادیر متناظر با مقادیر عملی اجزاء فیزیکی نیستند حائز اهمیت است. البته منظور از بکار بردن این اعداد آن است که توجه خود را بجای محاسبات عددی مفصل به‌روشها و ایده‌ها متمرکز کنیم. درفصل هفتم بحث مختصری درباره نرمالیزه کردن(۲) مقادیر عناصر که در تجزیه و تحلیل و طرح مدارها مفید هستند خواهد شد . بکمک نرمالیزه کردن اجزاء مدار میتوان یک مدار عملی را با انجام دادن تمام محاسبات روی مقادیر نرمالیزه شده نظیر ۱ فاراد و ۰٫۷ هانری ، طرح نمود . مزیت دیگری که این روش دارا میباشد کم کردن اثر خطای روند کردن درمحاسبات عددی است .

خلاصه

● اجزاء مدار، مدلهای ایدآلی هستند که درتجزیه و تحلیل‌وطرح‌مدارها بکارمیروند. عناصر فیزیکی را میتوان بطور تقریبی با اجزاء مدار تقریب نمود .

● هرعنصر دوسر با یک مشخصه یعنی با یک منحنی که درصفحه مناسبی رسم شده است تعریف میشود. هرجزء مدار را برحسب خطی بودن و تغییرناپذیر بازمان بودن‌میتوان به‌چهار طبقه تقسیم نمود . هرگاه مشخصه عنصری بازمان تغییر نکند آنرا « تغییرناپذیر بازمان » و اگر تغییر کند « تغییرپذیر بازمان » گویند . اگر برای هرزمان t ، مشخصه عنصری خط مستقیمی باشد که از مبداء میگذرد آنرا « خطی » و در غیراینصورت آنرا « غیرخطی » گویند .

---

۱ — Lead inductance ۲ — Normalization

● برای هرزمان t ، یک‌مقاومت بوسیله یک‌منحنی‌درصفحه iv (یا vi) مشخص میشود . یک منبع ولتاژ نابسته باخطی‌موازی‌محور i ها ، ویک‌منبع جریان نابسته باخطی موازی محور v ها ، مشخص میشود .

● برای هرزمان t ، یک خازن با یک منحنی درصفحه vq و یک سلف با یک منحنی درصفحه $i\Phi$ مشخص میشود .

● یک « یک قطبی » (یامدار دوسر) بوسیله دوسر ازیک مدار مشخص میشود بشرطیکه درهرلحظه از زمان جریانیکه از یک سر وارد میشود مساوی جریانی باشد که ازسر دیگر خارج میشود . وقتیکه کلمه « یک قطبی » را بکاربببریم ، ما تنها به ولتاژ وجریان قطب علاقمند هستیم . « توان لحظه‌ای » که وارد یک قطبی میشود بوسیله رابطه :

$$p(t)=v(t)\,i(t)$$

و « انرژی تحویل داده شده » به یک قطبی ، از زمان t_0 تا زمان t توسط رابطه :

$$W(t_0, t)=\int_{t_0}^{t} v(t')\,i(t')\,dt'$$

داده میشود .

● میتوان اجزاء مدار را بسته به پسیو بودن آنها هم طبقه بندی نمود . عنصری را « پسیو » گویند که هرگز انرژی خالصی بدنیای خارج تحویل ندهد . عنصری را که پسیو نباشد « اکتیو » گویند .

● مقاومتها ، خازنها و سلفهای خطی تغییرناپذیر بازمان پسیو هستند ، اگر و تنها اگر، روابط زیر بترتیب برای آنها برقرار باشد . $R\geqslant 0$ و $C\geqslant 0$ و $L\geqslant 0$

● انرژی مغناطیسی ذخیره شده دریک سلف خطی تغییرناپذیر بازمان عبارتست‌از:

$$\mathcal{E}_M=\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}\,\frac{\Phi^2}{L}$$

● انرژی الکتریکی ذخیره شده دریک خازن خطی تغییرناپذیر بازمان عبارتست‌از:

$$\mathcal{E}_E=\frac{1}{2}Cv^2=\frac{1}{2}\,\frac{q^2}{C}$$

مسائل

۱- خواص مقاومت غیرخطی فرض کنید مقاومت غیرخطی R دارای مشخصه‌ای باشد که بوسیله معادله زیر مشخص شود .

$$v=20\,i+i^2+\frac{1}{2}\,i^3$$

الف - برای‌جریان $i(t)=\cos\omega_1 t+2\cos\omega_2 t$ ، v را بصورت مجموع سینوسوئید ها بیان کنید .

ب - اگر $\omega_2=2\omega_1$ باشد چه فرکانسهائی در v وجود دارند ؟

۲- مشخص کردن‌مقاومتها معادلات زیر مشخصه‌های بعضی مقاومتهارا بیان میدارند. تعیین کنید که‌آیا آنها خطی ، غیرخطی ، تغییرپذیر بازمان ، تغییرناپذیر بازمان، دوطرفه ، کنترل شده با ولتاژ ، کنترل شده با جریان ، پسیو یا اکتیو هستند .

الف - $v+10\,i=0$

ب - $v=(\cos 2t)i+3$

پ - $i=e^{-v}$

ت - $v=i^2$

ث - $i=\tanh v$

ج - $i+3v=10$

چ - $i=2+\cos\omega t$

ح - $i=\ln(v+2)$

خ - $i=v+(\cos 2t)\dfrac{v}{|v|}$

۳- شکل موجها شکل موجهای تعیین شده زیر را رسم کنید .

الف - $3\delta(t-2)$

ب - $\delta(t)-\delta(t-1)+\delta(t-2)$

پ - $u(2t)$

ت - $u(t)\cos(2t+60^\circ)$

ث - $u(-t)$

ج - $u(3-2t)$

چ - $u(t)e^{-t}$

ح - $3p_2(t)$

خ - $p_{\frac{1}{2}}(t-2)$

د - $e^{2t}\cos t$

ذ - $u(t)-2u(t-1)$

ر - $r(t)\sin t$

ز - $u(t)e^{-2t}\sin(t-90^\circ)$

٤- شکل موجها نمایش تابعی شکل موجهای داده شده درشکل (مسأله ٤-٢) را بنویسید (شکلهای صفحه ۸۸ و ۸۹ را ببینید) .

٥- خازن وسلف خطی تغییر ناپذیر بازمان بفرض اینکه شکل موجهای داده شده درشکل (مسأله ٤-٢) جریان‌های شاخه‌ها باشد ولتاژ شاخه‌ها را درحالتهای زیر روی کاغذ میلیمتری رسم کنید :

الف ـ عنصر ، یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با اندوکتانس یک هانری است.

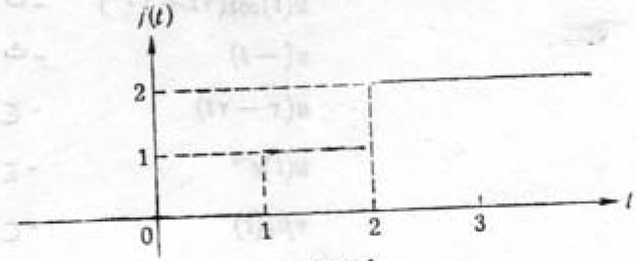
ب ـ عنصر ، یک خازن خطی تغییرناپذیر بازمان باظرفیت یک فاراد است $(v(o)=o)$

٦- خازن وسلف خطی تغییر ناپذیر بازمان بفرض اینکه شکل موجهای داده شده درشکل (مسأله ٤-٢) ولتاژهای شاخه‌ها باشد جریان‌های شاخه‌ها را درحالتهای زیر روی کاغذ میلیمتری رسم کنید :

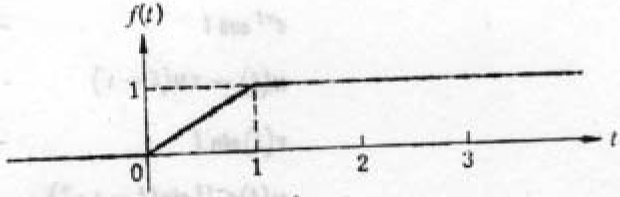
الف ـ عنصر ، یک سلف خطی تغییرناپذیر بازمان با اندوکتانس ۲ هانری است $(i(o)=o)$

ب ـ عنصر ، یک خازن خطی تغییرناپذیر بازمان باظرفیت ۲ فاراد است .

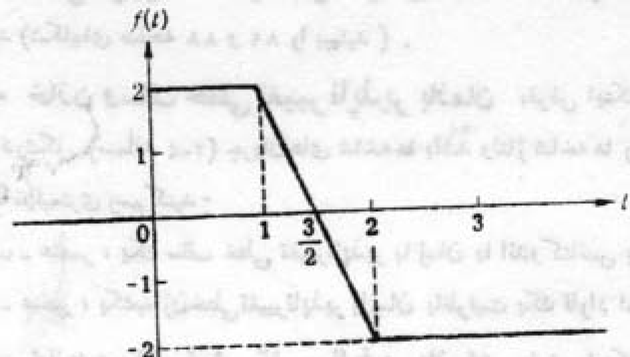
٧- مقاومتهای خطی ومنابع برای هریک ازسه مدار نشان داده شده درشکل (مسأله ٧-٢) ولتاژ دوسر مقاومت خطی را تعیین کنید .



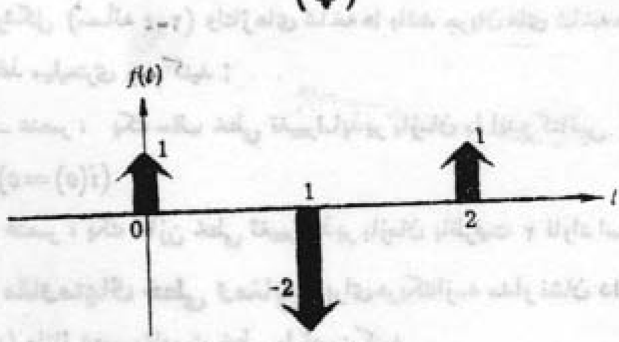
(الف)



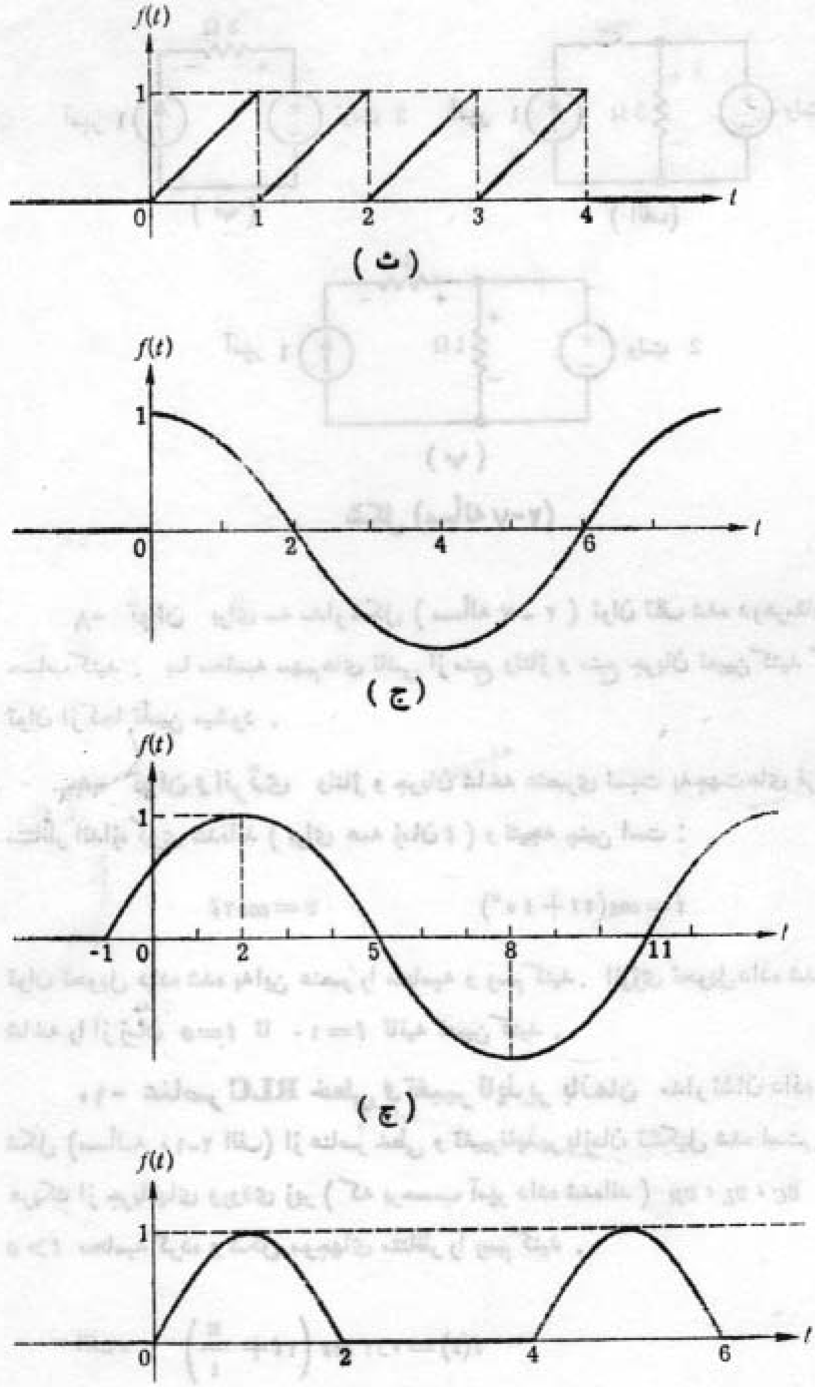
(ب)



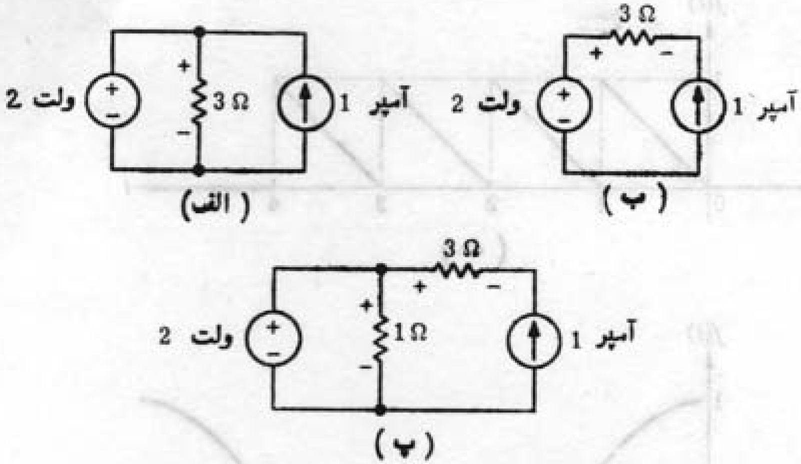
(پ)



(ت)



شکل (مساله ۴-۲)



شکل (مسأله ۷-۲)

۸- توان برای سه مدار شکل (مسأله ۷ - ۲) توان تلف شده درهرمقاومت را حساب کنید . با محاسبه سهم‌های ناشی از منبع ولتاژ و منبع جریان تعیین کنید که این توان ازکجا تأمین میشود .

۹- توان و انرژی ولتاژ و جریان شاخه عنصری نسبت به‌جهت‌های قراردادی متناظر اندازه‌گیری شده‌اند (برای همه زمان t) و نتیجه چنین است :

$$v=\cos 2t \qquad\qquad i=\cos(2t+40^\circ)$$

توان تحویل داده شده به‌این عنصر را محاسبه و رسم کنید. انرژی تحویل‌داده شده به‌این شاخه را از زمان $t=0$ تا $t=10$ ثانیه تعیین کنید .

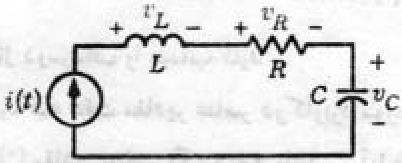
۱۰- عناصر RLC خطی و تغییر ناپذیر بازمان مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۰-۲ الف) از عناصر خطی و تغییرناپذیر بازمان تشکیل شده است . برای هریک از جریانهای ورودی زیر (که برحسب آمپر داده شده‌اند) v_R ، v_L ، v_C را برای $t>0$ محاسبه کرده و شکل موجهای متناظر را رسم کنید .

الف - $i(t)=0.2\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{4}\right)$

ب - $i(t)=e^{-\frac{1}{2}t}$

پ - $i(0)$ درشکل (مسأله ۱۰ - ۲ ب) داده شده است .

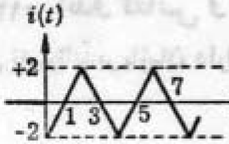
ت - $i(0)$ درشکل (مسأله ۱۰ - ۲ پ) داده شده است .



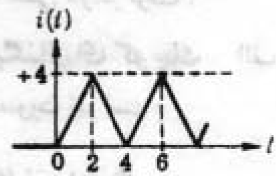
$L = 5\ \text{H},\quad R = 10\ \Omega,\quad C = 0.1\ \text{F}$

توجه کنید: $v_C(0) = 0$

(الف)



(ب)



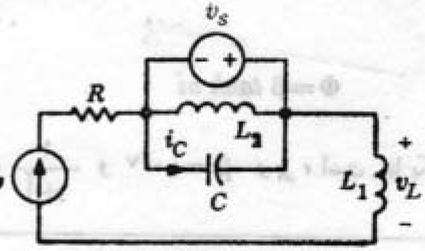
(پ)

شکل (مسأله ۱۰-۲)

۱۱- مدار RLC خطی تغییر ناپذیر بازمان بامنابع درمدار خطی تغییر ناپذیر با زمان نشان داده شده درشکل (مسأله ۱۱ - ۲) ولتاژ $v_s(t)$ و جریان $i_s(t)$ بصورت زیر داده شده‌اند :

$$v_s(t)=A\cos\omega t \quad \text{و} \quad i_s(t)=Be^{-\alpha t}$$

(که درآن A و B و α و ω مقادیر ثابتی میباشند) $v_L(t)$ و $i_C(t)$ را محاسبه کنید .



شکل (مسأله ۱۱-۲)

۱۲- تقریب خطی سلف غیرخطی فرض کنید که سلفی دارای مشخصهٔ $\Phi = ۱۰^{-۲}(۱ - i^{۲})i$ باشد .

الف - اگر جریان داخل سلف (برحسب آمپر) بصورت :

$$i(t) = ۲ \times ۱۰^{-۲} \cos ۲\pi ۶۰ t$$

باشد ولتاژ دوسرسلف را حساب کنید .

ب ـ فرض کنید که دقت مقادیر عناصر درکاربرد موردنظر ، یک درصد باشد یعنی تولرانس(۱) مقادیر عناصر یک درصد باشد . آیا باجریان بکار رفته :

$$i(t) = ۲ \times ۱۰^{-۲} \cos ۲\pi ۶۰ t$$

و تولرانس فوق میتوان سلف بالا را بعنوان سلف خطی درنظرگرفت ؟

۱۳- اندوکتانس و ظرفیت در سیگنالهای کوچک الف ـ یک سلف غیرخطی تغییرناپذیر بازمان دارای مشخصه‌ای بصورت زیر است :

$$\Phi = ۱۰^{-۲} \tanh i + ۱۰^{-۴} i$$

مقدار اندوکتانس سیگنال کوچک (خطی) را نسبت به‌جریان بایاس رسم کنید .

ب ـ یک خازن غیرخطی تغییرناپذیر با زمان دارای مشخصه‌ای بصورت زیر است :

$$q = ۱ - e^{-|v|}$$

این معادله فقط برای آن مقادیر v که از چند دهم ولت بزرگترباشد معتبر است . مقدار ظرفیت سیگنال کوچک (خطی) را نسبت به ولتاژ بایاس رسم کنید .

۱۴- سلف غیرخطی مشخصهٔ Φi یک سلف‌داده شده باتقریب خوبی برمنحنی تابع زیر منطبق است .

$$\Phi = \beta \tanh \alpha i$$

که درآن $\alpha = ۱۰^{۲} \frac{۱}{\text{آمپر}}$ و $\beta = ۱۰^{-۷}$ وبر ، است. با بکار بردن تقریب مناسبی ،

---

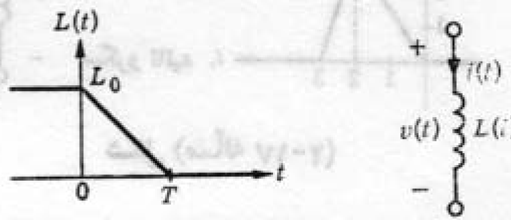
۱ — Tolerance

ولتاژ ناشی از برقراری جریانهای همزمان سینوسی و ثابت (به‌ترتیب i_{ac} و i_{dc}) که بصورت جفت‌های زیر داده شده‌اند را تعیین کنید :

الف ـ $I_{dc}=16\times10^{-3}$ آمپر ، $I_{ac}(t)=10^{-4}\sin10^{7}t$ آمپر

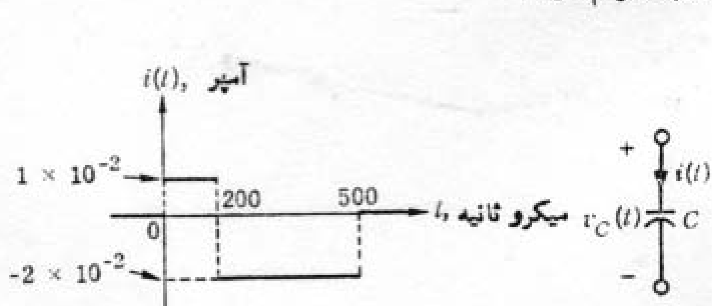
ب ـ $I_{dc}=-4\times10^{-3}$ آمپر ، $I_{ac}(t)=10^{-4}\sin10^{7}t$ آمپر

۱۵- سلف خطی تغییرپذیر بازمان از یک سلف‌خطی‌تغییرپذیر بازمان که وابستگی با زمان آن توسط منحنی نشان داده شده درشکل (مسأله ۱۰ - ۲) مشخص میشود جریان ثابت $i(t)=I_0$ آمپر میگذرد (I_0 مقدار ثابتی بوده و $-\infty<t<\infty$) . $v(t)$ را محاسبه کنید .



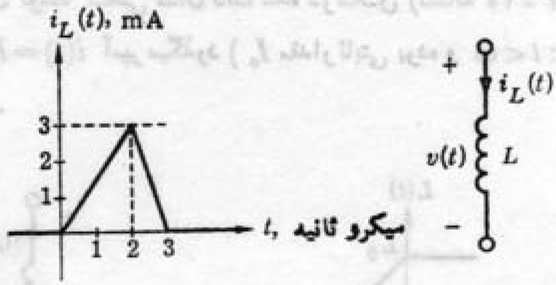
شکل (مسأله ۱۵-۲)

۱۶- انرژی ذخیره شده درخازن‌خطی جریان $i(t)$ که توسط منحنی‌نشان داده شده درشکل (مسأله ۱۶ - ۲) مشخص میشود از یک خازن خطی تغییرناپذیر بازمان باظرفیت $C=2\mu F$ میگذرد . اگر داشته باشیم $v_C(0)=0$ ، ولتاژ $v_C(t)$ ، توان لحظه‌ای $p(t)$ ، تحویل‌داده شده بوسیله منبع وانرژی ذخیره شده $\mathcal{E}_E(t)$ ، درخازن‌رابرای $t\geqslant0$ محاسبه و رسم کنید .



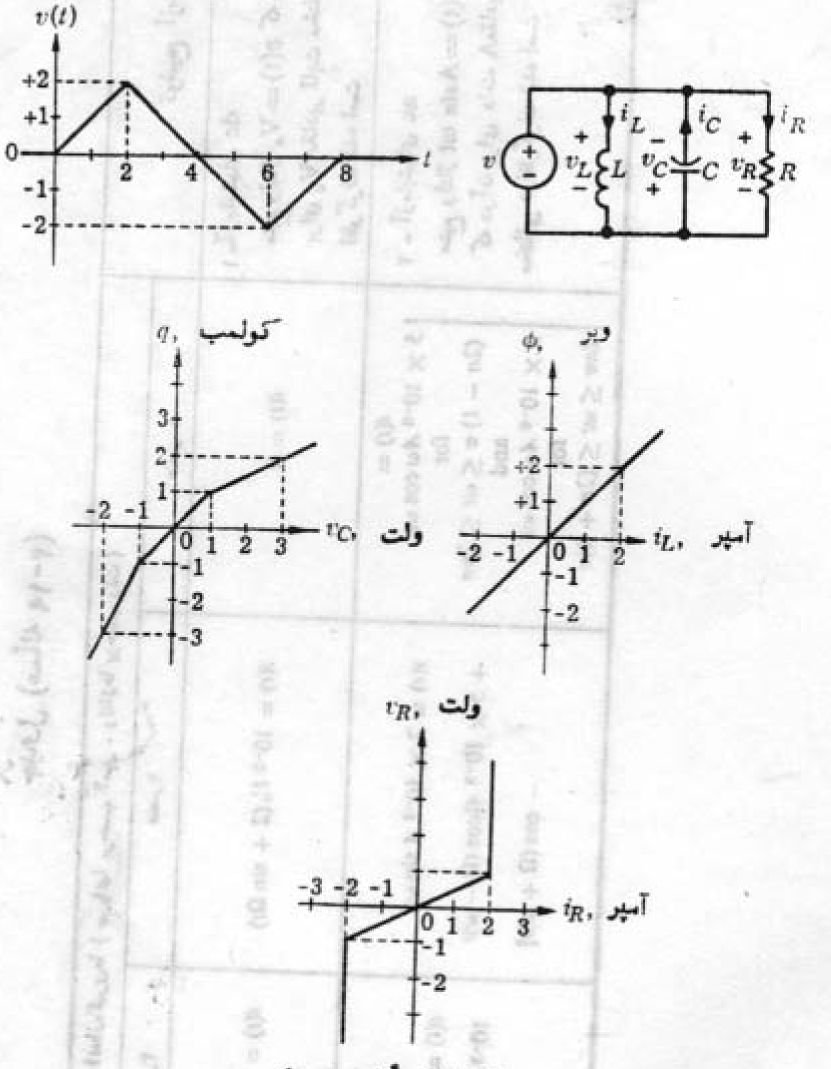
شکل (مسأله ۱۶-۲)

۱۷- توان وانرژی ذخیره شده درسلف خطی یک سلف خطی تغییرناپذیر بازمان با اندوکتانس $L=10$ میلی‌هانری درمداری که جریان وابسته بزمان $i_L(t)$ نشان داده شده درشکل (مسأله ۱۷ - ۲) ازآن میگذرد ، کار میکند . ولتاژ $v_L(t)$ ، توان لحظه $p(t)$ تحویل داده شده بوسیله منبع وانرژی‌ذخیره شده $\mathcal{E}_M(t)$ درسلف را برای $t \geqslant 0$ محاسبه و رسم کنید .



شکل (مسأله ۱۷-۲)

۱۸- عناصر RLC غیرخطی و تغییرناپذیر بازمان ولتاژ $v(t)$ که بوسیله منحنی نشان داده شده درشکل (مسأله ۱۸ - ۲) مشخص میشود بیک مدار موازی RLC تغییرناپذیر بازمان که هریک از اجزاء آن با یک منحنی مشخصه تعیین شده‌اند وصل شده است با فرض اینکه $i_L(0)=0$ باشد. جریانهای $i_L(t)$ و $i_C(t)$ و $i_R(t)$ را محاسبه و رسم کنید .



شکل (مسأله ۱۸-۲)

۱۹- مدل سازی دسته‌ای از عناصر مداری‌دوسر، که ناشناخته‌اند (مقاومتها ، خازنها ، سلفها ومنابع) برای تشخیص‌موردآزمایش قرارمیگیرند. نمونه‌ای از ورقه‌آزمایش که متناظر با چهار عنصر میباشد درجدول (مسئله ۱۹ - ۲) عرضه شده است . مشخصه هریک از عناصر را تعیین کنید .

جدول (مسأله ۱۹-۲)

توضیح آزمایش	اندازه‌گیری‌ها (جریانها برحسب آمپر ، ولتاژها برحسب ولت)			
	عنصر ۱	عنصر ۲	عنصر ۳	عنصر ۴
۱ـ آزمایشهای dc منبع ولتاژ $v(t)=V_0$ که درآن برای V_0 مقادیر ثابت مختلفی در نظر گرفته شده است	$i(t)=0$	$i(t)=10^{-2}V_0(2+\sin\Omega t)$	$i(t)=10^{-3}V_0^3$	$i(t)=10^{-3}$
۲ ـ آزمایشهای ac منبع ولتاژ $v(t)=A\sin\omega t$ که درآن برای دامنه A مقادیر مختلفی درنظر گرفته شده است	$i(t)=\begin{cases}5\times10^{-6}A\omega\cos\omega t & \text{for } (2n-1)\pi\le\omega t\le 2n\pi \\ \text{and} & \\ 2\times10^{-6}A\omega\cos\omega t & \text{for } 2n\pi\le\omega t\le(2n+1)\pi\end{cases}$	$i(t)=2\times10^{-2}A\sin\omega t + 5\times10^{-3}A[\cos(\Omega-\omega)t - \cos(\Omega+\omega)t]$	$i(t)=10^{-3}A^3\sin^3\omega t$	$i(t)=10^{-3}$

فصل سوم

مدارهای ساده

در فصل اول دو قانون کیرشف را در مورد مدارهای فشرده معرفی نموده و روی این حقیقت تأکید کردیم که این قوانین به ماهیت عناصر مدار بستگی ندارند بلکه تنها برروی مقادیر لحظه‌ای که جریان و ولتاژ شاخه‌ها میتوانند بگیرند محدودیت‌های خطی ایجاد میکنند و چون این محدودیتها فقط به نحوه بهم پیوستن عناصر مدار بستگی دارند آنها را «محدودیتهای توپولوژیکی»(۱) گویند.

در فصل دوم خواص عناصر مدار دو سر را به تفصیل مطالعه نمودیم. در یک مدار داده شده، هرشاخه با رابطه شاخه‌ای خود، یعنی رابطه‌ای بین ولتاژ و جریان شاخه مشخص میشود. محدودیتهای توپولوژیکی و روابط شاخه‌ای برای تمام شاخه‌ها در یک مدار، آنرا بطور کامل توصیف میکنند. مسأله تجزیه تحلیل مدار، تعیین جریان و ولتاژ تمام شاخه‌های مدار میباشد*. این ولتاژها و جریانها، **متغیرهای شبکه**(۲) نامیده میشود. بسیاری از مفهومهای اساسی و روشهای اصلی که در حل مسائل تجزیه تحلیل مدار مفید هستند موضوعات اصلی این کتاب میباشند. دراین فصل بعضی نظرها و تکنیک‌های مقدماتی برای تجزیه تحلیل مدارهای ساده ارائه خواهد شد. این مدارها فقط از یک «نوع عنصر» مدار ساخته شده‌اند یعنی آنها فقط شامل مقاومت، سلف یا خازن میباشند.

در بحث زیر راحت‌تر است که مفهوم معادل بودن معرفی شود. «مدارهای یک قطبی را وقتی **معادل** گویند که مشخصه آنها برحسب ولتاژ و جریان قطب همواره یکی باشد». در فصل پیش ما قبلاً در مورد شکلهای ساده مدارهای معادل تونن و نرتن به منظور تبدیل منابع ولتاژ به منابع جریان و برعکس بحث کرده‌ایم. این مدارهای معادل حالتهای خاصی از یک قطبی‌های معادل

---

* ـ البته در موارد بسیاری تنها میخواهیم ولتاژ وجریان بعضی شاخه‌ها و یا بعضی ترکیبهای خطی ولتاژها و جریانهای شاخه‌ها را بدانیم.

۱- Topological constraints　　۲- Network Variables

میباشند . در این فصل یک قطبی‌های معادل کلی‌تری بدست خواهیم آورد . لفظ «معادل» غالباً برای بیان این حقیقت که مدارهای متفاوت دارای مشخصهٔ الکتریکی یکسان برحسب متغیرهای مربوطه ولتاژ و جریان میباشند بکار میرود . اغلب، واژهٔ «شاخه‌های معادل» را بکار میبریم درایصورت متغیرهای مربوطه ما ولتاژ شاخه و جریان شاخه میباشند .

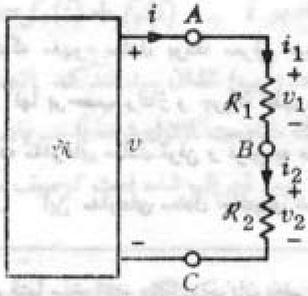
۱- اتصال سری مقاومتها

معنی اتصال سری[۱] عناصر مدار بطور حسی آشکار است. در فصل قبل دربارهٔ اتصال سری یک مقاومت و یک منبع ولتاژ بحث کرده‌ایم. دراین بخش، روش عمل کلی‌تری برای اتصال سری مقاومتها ارائه خواهیم داد.

مثال ۱ مدار شکل (۱-۱) راکه درآن دو مقاومت غیر خطی R_1 و R_2 درگره B بهم وصل شده‌اند درنظر بگیرید. گره‌های A و C به بقیهٔ مدار که با $\mathcal{N}$ مشخص گردیده وصل شده است. یک قطبی متشکل از R_1 و R_2 که سرهای آن گره‌های A و C میباشند، «اتصال سری مقاومتهای R_1 و R_2 نامیده میشود». برای منظور فعلی ما ماهیت $\mathcal{N}$ اهمیت ندارد . دو مقاومت R_1 و R_2 بوسیلهٔ مشخصه‌هایشان چنانکه درصفحه iv درشکل (۱-۲) نشان داده شده است، معین میشوند. میخواهیم مشخصهٔ اتصال سری R_1 و R_2 ، یعنی مشخصهٔ یک مقاومت معادل اتصال سری را معین کنیم.

اولاً، KVL درمورد حلقهٔ ABCA لازم میدارد که :

$$v = v_1 + v_2 \qquad (۱-۱)$$



شکل ۱-۱- اتصال سری R_1 و R_2

۱- Series

سپس ، KCL درمورد گره‌های A و B و C لازم میدارد که :

$$i=i_1 \qquad i_1=i_2 \qquad i_2=i$$

آشکار است که یکی از سه معادله فوق زائد است. آنها را میتوان باینصورت خلاصه کرد:

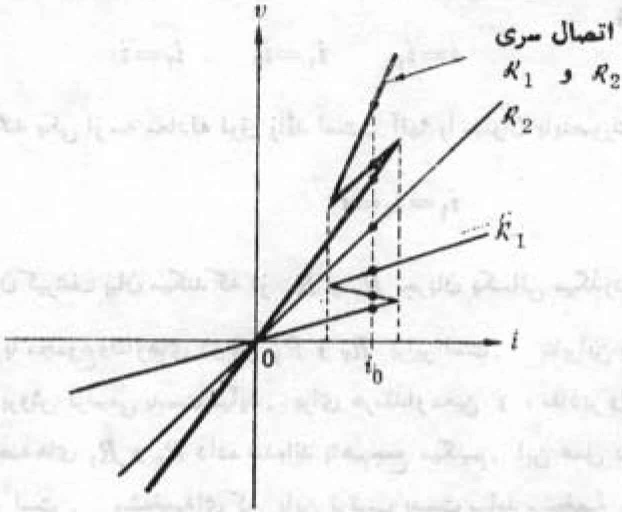
$$i_1=i_2=i \tag{۱-۲}$$

بنابراین قانون کیرشف بیان میکند که از R_1 و R_2 جریان یکسانی میگذرد و ولتاژ دو سر اتصال سری با مجموع ولتاژهای دو سر R_1 و R_2 برابر است. بنابراین مشخصهٔ اتصال سری بآسانی بروش ترسیمی بدست میآید. برای هرمقدار معین i ، مقادیر ولتاژهائی را که بوسیله مشخصه‌های R_1 و R_2 داده شده‌اند باهم‌جمع میکنیم. این عمل در شکل (۲-۱) تشریح شده است . مشخصه‌ای که باین ترتیب بدست میآید مشخصهٔ مقاومت معادل اتصال سری R_1 و R_2 نامیده میشود. ملاحظه کنید که دراین مثال R_2 یک مقاومت خطی و R_1 یک مقاومت غیرخطی کنترل شده بوسیله ولتاژ است،یعنی جریان مقاومت R_1 بوسیله یک‌تابع (تک ارز) ولتاژ مشخص میشود. در شکل (۲-۱) دیده میشود که اگر جریان i_0 باشد سه مقدار ممکن برای ولتاژ در مشخصه R_1 مجاز میباشد ، پس R_1 کنترل شده بوسیلهٔ جریان نیست . تذکر این مطلب جالب است که اتصال سری دارای مشخصه‌ای میباشد که نه کنترل شده با ولتاژ و نه کنترل شده با جریان است.

درمثال فوق ، با جمع کردن ولتاژهای متناظر دو سر مقاومتها برای‌جریان یکسان ، مشخصهٔ‌اتصال سری دو مقاومت را بطور ترسیمی بدست آوردیم . از نظر تحلیلی،مشخصهٔ مقاومت معادل اتصال سری دو مقاومت R_1 و R_2 را فقط زمانی که هردوکنترل شده بوسیلهٔ جریان باشند ، میتوان معین کرد. مقاومتهای کنترل شده بوسیلهٔ جریان R_1 و R_2 دارای مشخصه‌هائی هستند که ممکن است با معادلاتی بشکل زیر توصیف شوند :

$$v_1=f_1(i_1) \qquad v_2=f_2(i_2) \tag{۱-۳}$$

که درآن ، جهت‌های قراردادی در شکل (۱-۱) نشان داده شده‌اند. نظر به معادلات (۱-۱) و (۲-۱) ، اتصال سری دارای مشخصه‌ای بشکل زیراست:



شکل ۲-۱- اتصال سری دو مقاومت R_1 و R_2 مثال ۱

$$v = f_1(i_1) + f_2(i_2) \qquad (۱-٤)$$
$$= f_1(i) + f_2(i)$$

بنابراین نتیجه میگیریم که مدار دوسر مشخص شده بامعادله ولتاژ - جریان (٤-۱)، مقاومت دیگری است که این چنین مشخص میشود:

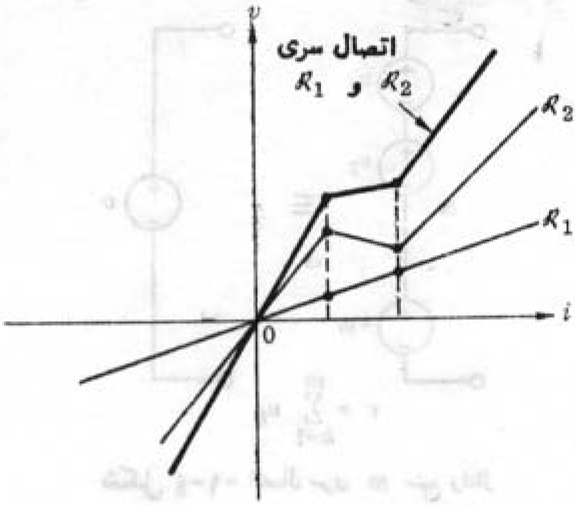
$$v = f(i) \qquad (\text{۵-۱ الف})$$

که در آن:

$$f(i) = f_1(i) + f_2(i) \quad \text{برای تمام مقادیر } i \qquad (\text{۵-۱ ب})$$

معادلات (۵-۱ الف) و (۵-۱ ب) نشان میدهند که اتصال سری دو مقاومت کنترل شده بوسیلهٔ جریان، معادل یک مقاومت کنترل شده با جریان R است و مشخصه آن با تابع $f(\cdot)$ که در رابطه (۵-۱ ب) تعریف شده است توصیف میشود. این مشخصه در شکل (۲-۱) نشان داده است.

با استدلال مشابه میتوان بیان کرد که اتصال سری m مقاومت کنترل شده باجریان بامشخصه‌های توصیف‌شده با $v_k = f_k(i_k)$ ، $k = 1, 2, \ldots, m$ معادل یک مقاومت کنترل شده بوسیله جریان است که مشخصهٔ آن با $v = f(i)$ توصیف میشود که درآن



شکل ۳-۱- اتصال سری دو مقاومت کنترل شده با جریان

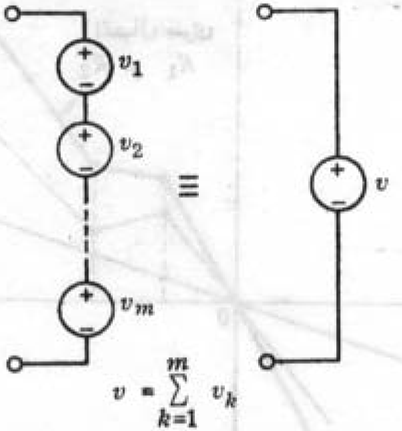
$f(i) = \sum_{k=1}^{m} f_k(i)$ برای تمام مقادیر i. اگر در حالت خاص همهٔ مقاومتها خطی باشند، یعنی $v_k = R_k i_k$ و m , ... , $k = 1, 2$ ، مقاومت معادل نیز خطی است و $v = Ri$ که در آن :

$$R = \sum_{k=1}^{m} R_k \qquad (1-6)$$

مثال ۲ مدار شکل (۱-۴) را درنظر بگیرید که در آن m منبع ولتاژ بطور سری بهم‌وصل شده‌اند. واضح است که‌این، یک حالت خاص از اتصال سری m مقاومت کنترل شده باجریان‌است. باتعمیم معادله (۱-۱) ملاحظه میکنیم که ترکیب سری m منبع‌ولتاژ، معادل یک منبع ولتاژ تنها میباشد که ولتاژ دوسر آن v است بطوریکه :

$$v = \sum_{k=1}^{m} v_k \qquad (1-7)$$

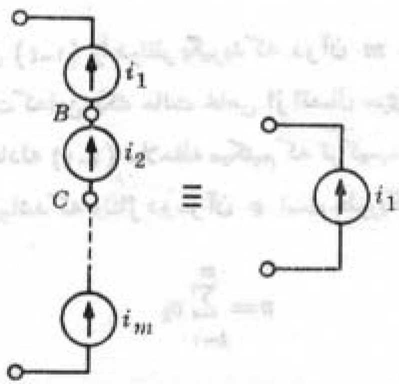
مثال ۳ اتصال سری m منبع جریان را مطابق شکل (۱-۵) درنظر بگیرید. فوراً ملاحظه میشود که‌چنین اتصالی معمولاً KCL را نقض میکند . در حقیقت کاربرد



شکل ٤-١- اتصال سری m منبع ولتاژ

KCL درگره‌های B و C لازم میدارد که $i_1 = i_2 = i_3 = \cdots$. بنابراین درنظر گرفتن اتصال سری منابع جریان‌ازنظر فیزیکی دارای معنانیست مگر اینکه شرط فوق‌برقرار باشد. پس اتصال سری m منبع جریان مشابه ، معادل یک چنین منبع جریانی است.

مثال ٤ اتصال سری یک مقاومت خطی R_1 و یک منبع ولتاژ v_2 را مطابق شکل (١-٦ الف) درنظر بگیرید. مشخصهٔ آنها در یک صفحهٔ iv کشیده شده و درشکل (١-٦ ب) نمایش داده شده است . اتصال سری دارای مشخصه‌ای مطابق



شکل ٥-١- اتصال سری منابع جریان فقط زمانی عملی است که

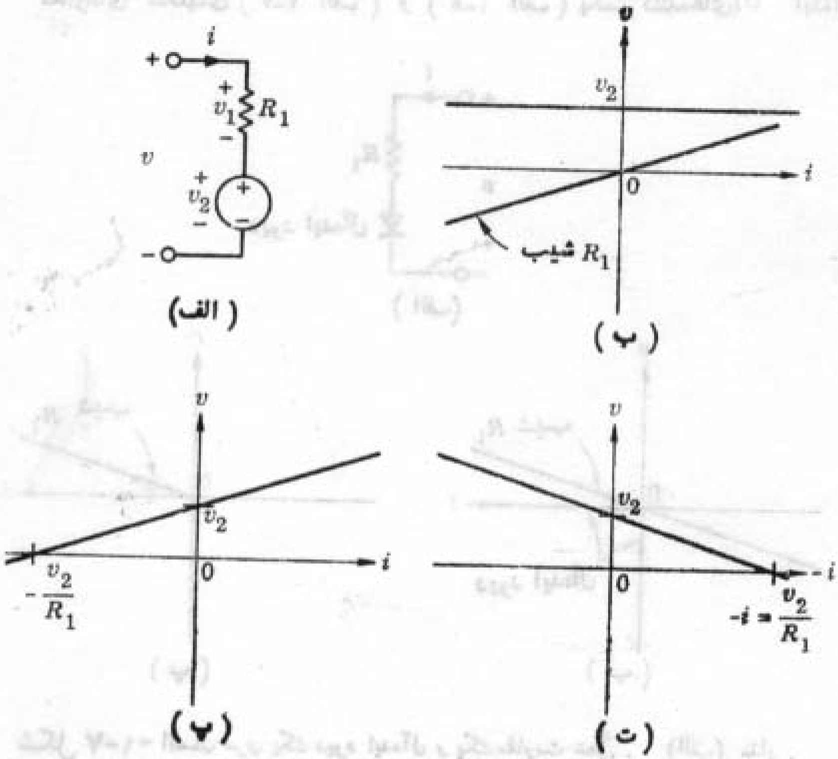
$$i_1 = i_2 = \cdots = i_m$$

شکل (۱-۶ پ) است. برحسب مشخص سازی تابعی[1] داریم:

$$\boxed{v=v_1+v_2=R_1 i+v_2} \qquad (1-8)$$

چون R_1 یک ثابت معلوم و مقدار v_2 نیز معلوم است،معادله (۱-۸) همهٔ مقادیر ممکن v و i را بهم مرتبط میسازد و مطابق شکل (۱-۶ پ) معادله یک خط مستقیم میباشد. در شکل (۱-۶ ت) مشخصه را درصفحهٔ $v(-i)$ رسم میکنیم و دوباره مشخصهٔ باتری اتومبیل را که دربخش ۲ فصل دوم در موردآن بحث شد تشخیص میدهیم که درآن برای باتری جهت مخالف جهت قرار دادی متناظر بکار رفته است.

مثال ۵ مدار شکل (۱-۷ الف) را که در آن یک مقاومت خطی به یک دیود



شکل ۱-۶- اتصال سری یک مقاومت خطی و یک منبع ولتاژ

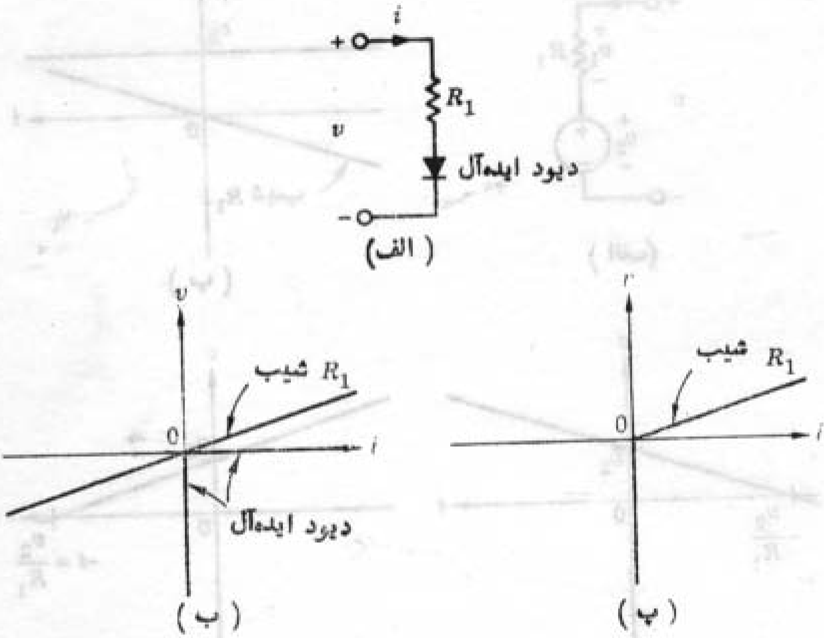
1- Functional characterization

ایده‌آل وصل شده است درنظر بگیرید. مشخصه‌های آنها در روی یک نمودار رسم شده و در شکل (۷-۱ ب) نشان داده شده‌اند. اتصال سری دارای مشخصه‌ای مطابق شکل (۷-۱ پ) می‌باشد و بااستدلال زیر بدست آمده است.

ابتدا برای جریانهای مثبت میتوان بسادگی عرضهای دو منحنی را باهم جمع کرد. سپس برای ولتاژ منفی در دو سر دیود، دیود ایده‌آل بمنزله یک مدار باز است. پس اتصال سری مجدداً یک مدار باز است. جریان i نمیتواند منفی باشد.

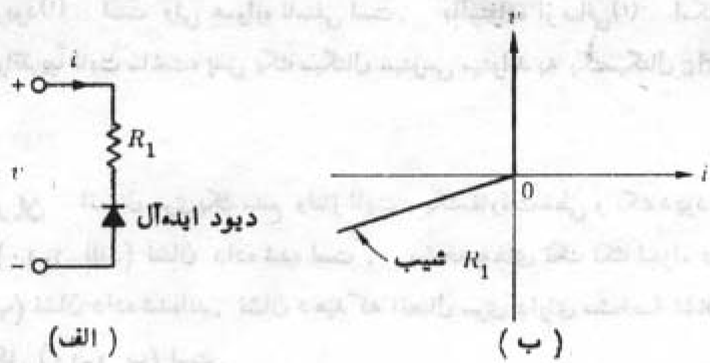
برای تشریح اینکه دیود ایده‌آل یک عنصر دو طرفه نیست فرض کنید آنرا مطابق شکل (۸-۱ الف) معکوس کنیم. باهمان استدلال، مشخصه‌ای مطابق شکل (۸-۱ ب) پیدا میکنیم.

مدارهای شکلهای (۷-۱ الف) و (۸-۱ الف) یکسوکننده‌های[۱] ایده‌آل



شکل ۷-۱- اتصال سری یک دیود ایده‌آل و یک مقاومت خطی. (الف) مدار. (ب) مشخصهٔ هرعنصر. (پ) مشخصهٔ اتصال سری

۱- Rectifier



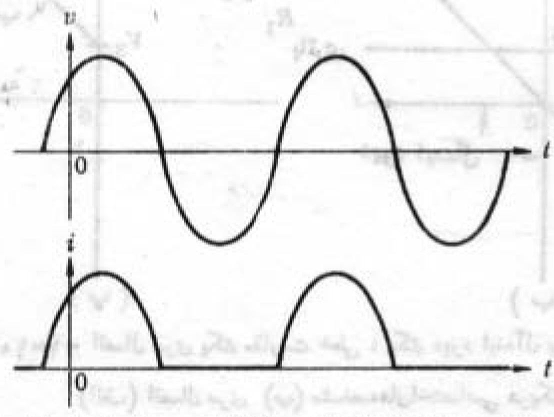
شکل ۸-۱- اتصال سری مشابه اتصال شکل(۷-۱)است بجز اینکه دیود معکوس شده است

(الف) مدار . (ب) مشخصهٔ اتصال سری

میباشند. گمریم یک منبع ولتاژ به یک قطبی شکل (۷-۱ الف) وصل شود و دارای یک شکل موج سینوسی :

$$v_s(t) = A\cos(\omega_0 t + \Phi) \tag{۱-۹}$$

مطابق شکل (۹-۱ الف) باشد. جریان i که از اتصال سری میگذرد مطابق شکل (۹-۱ ب) یک تابع متناوب‌از زمان است. ملاحظه کنید که ولتاژ وارده $v(\cdot)$ یک تابع متناوب از زمان با مقدار متوسط صفر است. جریان $i(\cdot)$ نیز یک تابع متناوب از زمان

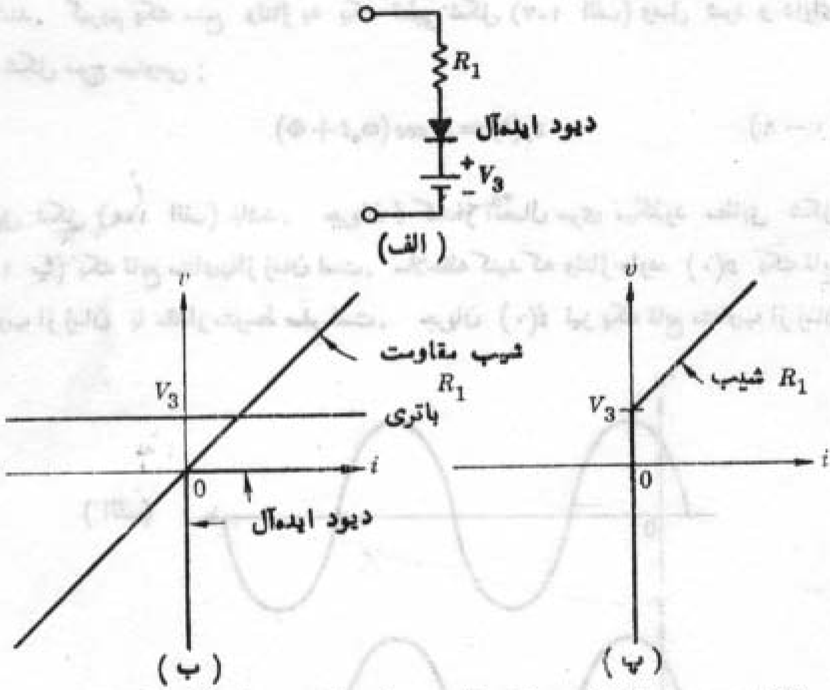


شکل ۹-۱- برای ولتاژ ورودی نشان داده شده در(الف) ، جریان حاصله برای مدار شکل (۷-۱ الف) در (ب) نشان داده شده است .

با همان پریود(۱) است ولی همواره نامنفی است. با استفاده از صافی(۲) امکان دارد این جریان را تقریباً ثابت ساخت، پس یک سیگنال سینوسی میتواند به یک سیگنال dc تبدیل شود.

تمرین اتصال سری یک منبع ولتاژ ثابت، یک مقاومت خطی و یک دیود ایده‌آل در شکل (۱۰-۱ الف) نشان داده شده است. مشخصه‌های تک تک اجزاء در شکل (۱۰-۱ ب) نشان داده شده‌اند. نشان دهید که اتصال سری دارای مشخصهٔ نشان داده شده در شکل (۱۰-۱ پ) است.

خلاصه در مورد اتصال سری عناصر، KCL جریان یکسانی در همهٔ عناصر (شاخه‌ها) برقرار میکند و KVL لازم میدارد که ولتاژ دو سر اتصال سری برابر مجموع



شکل ۱۰-۱- اتصال سری یک مقاومت خطی، یک دیود ایده‌آل و یک باتری.

(الف) اتصال سری (ب) مشخصه‌های اختصاصی هریک (پ) مشخصه کلی.

۱- Period ۲- Filter

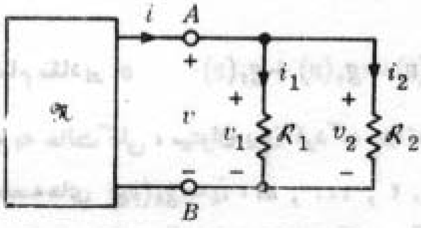
ولتاژهای دو سر همهٔ شاخه‌ها باشد. بنابراین اگر همهٔ مقاومتهای غیر خطی، کنترل‌شده باجریان باشند مقاومت معادل‌اتصال سری دارای یک مشخصه $v=f(i)$ است که باجمع کردن توابع $f_k(\cdot)$ که‌تک تک مقاومتهای کنترل شده با جریان را مشخص میکنند بدست میآید. درمورد مقاومتهای‌خطی مجموع مقاومتهای تک تک عناصر، مقدار مقاومت معادل‌را میدهد، یعنی برای m مقاومت خطی سری:

$$\boxed{R=\sum_{k=1}^{m} R_k}$$

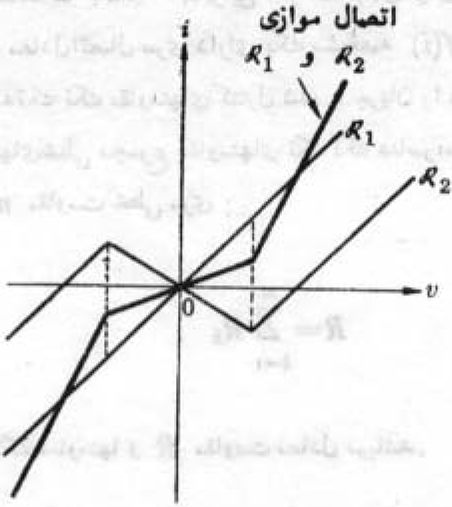
که در آن R_k تک تک مقاومتها و R مقاومت معادل میباشد.

۲- اتصال موازی مقاومتها

مدار شکل (۲-۱) را که درآن دومقاوت R_1 و R_2 بطور موازی درگره‌های A و B وصل شده‌اند درنظر بگیرید. گره‌های A و B به بقیهٔ مدارکه با N نشان داده شده است نیز وصل شده‌اند. توصیف دقیق N برای منظور فعلی ما دارای اهمیت نیست. گیریم دو مقاومت با مشخصه‌هایشان که در شکل (۲-۲) نشان داده شده و در صفحه vi رسم شده‌اند معین شوند. میخواهیم مشخصهٔ اتصال موازی R_1 و R_2 را پیدا کنیم. بنابراین‌،قوانین کیرشف ملزم‌میدارند که R_1 و R_2 دارای‌ولتاژشاخه‌یکسان میباشند و جریان داخل‌اتصال موازی،مساوی مجموع جریانهای داخل هریک ازمقاومتها است. بدین ترتیب مشخصهٔ اتصال موازی با جمع کردن مقادیر جریان مجاز از مشخصه‌های R_1 و R_2 درازاء هر ولتاژ ثابت v بدست میآید. این عمل در شکل (۲-۲) تشریح گردیده است.



شکل ۲-۱- اتصال موازی دو مقاومت



شکل ۲-۲- مشخصه‌های R_1 و R_2 و اتصال موازی آنها

مشخصه‌ای که این چنین بدست آمده مشخصهٔ مقاومت «معادل» اتصال موازی میباشد.

از نظر تحلیلی، اگر R_1 و R_2 کنترل شده با ولتاژ باشند مشخصهٔ آنها را میتوان بشکل زیر توصیف کرد:

$$i_1=g_1(v_1) \qquad i_2=g_2(v_2) \tag{۲-۱}$$

و از نظر قوانین کیرشف، اتصال موازی دارای مشخصه‌ای است که باین صورت توصیف میشود.

$$i=i_1+i_2=g_1(v)+g_2(v) \tag{۲-۲}$$

بعبارت دیگر اتصال موازی با تابع $g(\cdot)$ که بصورت زیر است توصیف میگردد:

$$i=g(v) \tag{الف ۲-۳}$$

که در آن:

$$g(v)=g_1(v)+g_2(v) \qquad \text{برای تمام مقادیر } v \tag{ب ۲-۳}$$

باتعمیم این نتیجه به حالت کلی، میتوان بیان کرد که «اتصال موازی m مقاومت کنترل شده باولتاژ بامشخصه‌های $i_k=g_k(v_k)$، $k=1, 2, \ldots, m$، معادل یک مقاومت کنترل شده با ولتاژ تنها با مشخصهٔ $i=g(v)$ است که در آن برای تمام مقادیر v،

$g(v)=\sum_{k=1}^{m} g_k(v)$ «. اگر درحالت‌خاص همهٔ‌مقاومتها خطی باشند ، یعنی $i_k=G_k v_k$ ،
m , ... , ۲ , $k=1$ ،مقاومت معادل نیز خطی است و $i=Gv$ که در آن :

$$\boxed{G=\sum_{k=1}^{m} G_k} \qquad (۲-۴)$$

G رسانائی مقاومت معادل است. برحسب مقادیر مقاومت‌ها داریم :

$$R=\frac{1}{G}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{m} G_k}$$

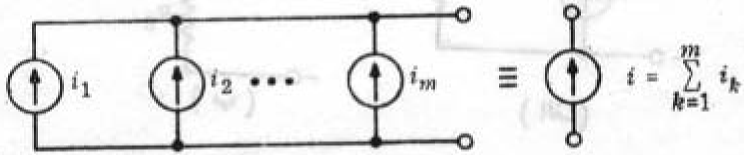
یا :

$$\boxed{\frac{1}{R}=\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{R_k}} \qquad (۲-۵)$$

مثال ۱ اتصال موازی m منبع جریان مطابق شکل (۳-۲) معادل یک منبع جریان تنها است که جریان آن برابر است با :

$$\boxed{i=\sum_{k=1}^{m} i_k} \qquad (۲-۶)$$

مثال ۲ اتصال موازی منابع ولتاژ ، KVL را نقض میکند بجزدریک موردجزئی که همهٔ منابع ولتاژ برابر باشند .



شکل ۳-۲- اتصال موازی منابع جریان $i=\sum_{k=1}^{m} i_k$

مثال ۳ اتصال موازی یک منبع‌جریان i_1 و یک مقاومت خطی با مقاومت R_2 طبق شکل (۴-۲ الف) را میتوان با یک مقاومت معادل که به صورت زیر مشخص میشود نشان داد :

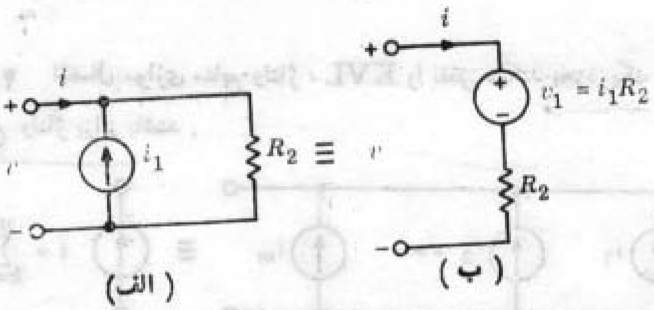
$$\boxed{i=-i_1+\frac{1}{R_2}v} \qquad (۲-۷)$$

معادله (۲-۷) را میتوان چنین نوشت :

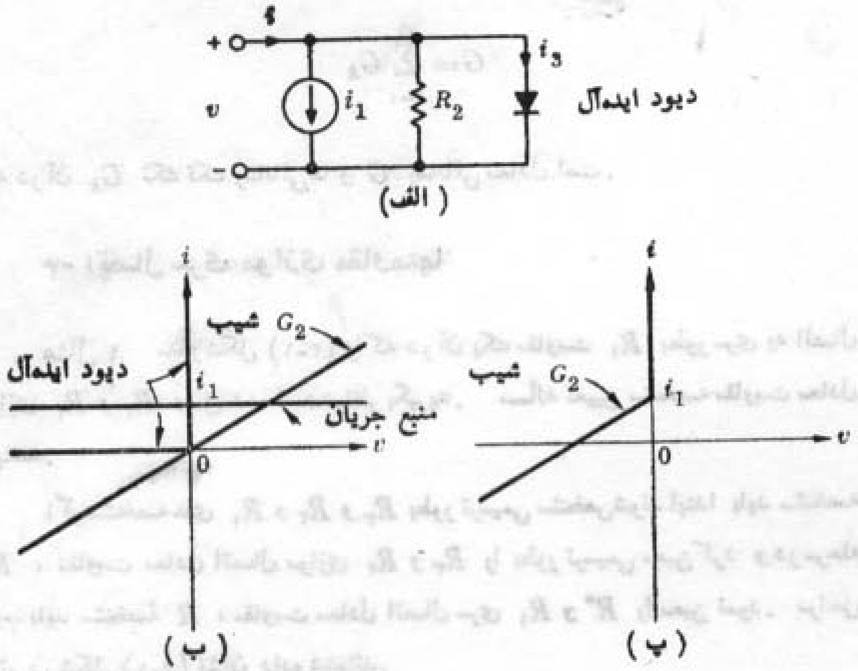
$$\boxed{v=i_1R_2+iR_2} \qquad (۲-۸)$$

با تعبیر ولتاژ v بصورت مجموع دو جمله،میتوان مدار معادل دیگری متشکل از یک منبع ولتاژ $v_1=i_1R_2$ و یک مقاومت خطی با مقاومت R_2 مطابق شکل (۴-۲ ب) ، بدست آورد. این معادل‌بودن که در بخش ۲ فصل دوم نیز درمورد آن بحث شد، حالت خاصی از قضیه مدار معادل تونن ونرتن است و در تجزیه و تحلیل مدار بسیار مفید می‌باشد.

مثال ٤ اتصال موازی یک منبع جریان ، یک مقاومت خطی و یک دیود ایده‌آل در شکل (۵-۲ الف) و مشخصه‌های آنها در شکل (۵-۲ ب) نشان داده شده است . مقاومت معادل دارای مشخصهٔ نشان داده شده در شکل (۵-۲ پ) است. مجدداً باید خاطرنشان ساخت که در مورد یک دیود ایده‌آل جریان تابعی از ولتاژ نیست. هرچند میتوان بااستفاده از استدلال فیزیکی مشخصهٔ حاصل را بدست آورد ، یعنی برای مقادیر منفی v مشخصه مقاومت معادل از جمع کردن سه منحنی بدست میآید.



شکل ٤-۲- یک قطبی‌های معادل که یک حالت سادهٔ قضایای مدار معادل تونن و نرتن را تشریح میکنند



شکل ۵-۲- اتصال موازی یک منبع جریان ، یک مقاومت خطی و یک دیود ایده‌آل
(الف) مدار (ب) مشخصه هرعنصر (پ) مشخصه اتصال موازی

برای مقادیر مثبت i_3 ،دیود ایده‌آل یک مدار با اتصال کوتاه وبنابراین ولتاژ دوسر آن همواره صفر است. در نتیجه اتصال موازی دارای مشخصهٔ نشان داده در شکل (۵-۲ پ) است.

خلاصه برای اتصال موازی عناصر ، KVL لازم میدارد که ولتاژهای دو سر عناصر یکی باشند و KCL لازم میدارد که جریان درون اتصال موازی مساوی مجموع جریان همه شاخه‌ها باشد. در مورد مقاومتهای غیر خطی کنترل شده با ولتاژ ، مقاومت معادل اتصال موازی دارای مشخصه $i=g(v)$ میباشد که با جمع کردن تک‌تک توابع $g_k(\cdot)$ که هریک از مقاومتهای کنترل شده با ولتاژ را جداگانه مشخص می کنند بدست میاید. در مورد مقاومتهای‌خطی،مجموع تک تک رسانائی‌ها ، رسانائی مقاومت معادل‌را میدهد. بنابراین برای m مقاومت خطی موازی داریم :

$$G=\sum_{k=1}^{m} G_k$$

که در آن G_k تک تک رسانائی‌ها و G رسانائی معادل است.

۳- اتصال سری موازی مقاومتها

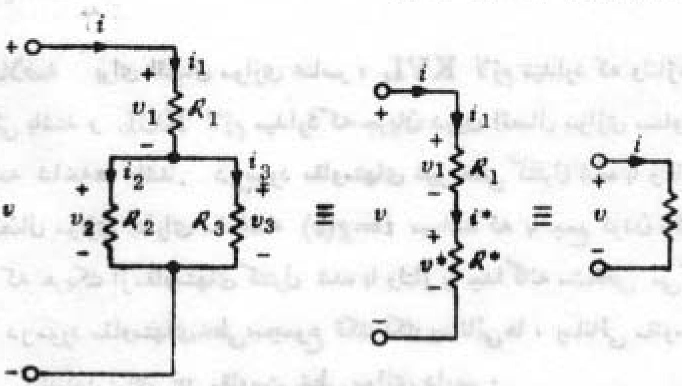
مثال ۱ مدار شکل (۳-۱) را که در آن یک مقاومت R_1 بطور سری به اتصال موازی R_2 و R_3 وصل شده است درنظر بگیرید. مسأله تعیین مشخصه مقاومت معادل میباشد.

اگر مشخصه های R_1 و R_2 و R_3 بطور ترسیمی مشخص‌شوند ابتدا باید مشخصه R^*، مقاومت معادل اتصال موازی R_2 و R_3 را بطور ترسیمی معین کرد و در مرحله دوم باید مشخصهٔ R، مقاومت معادل اتصال سری R_1 و R^* را معین نمود. مراحل لازم در شکل (۳-۱) نشان داده شده‌اند.

گیریم مشخصه‌های R_2 و R_3 کنترل شده باولتاژ باشند و بصورت زیر مشخص شوند.

$$i_2=g_2(v_2) \qquad \text{و} \qquad i_3=g_3(v_3) \qquad (۳-۱)$$

که‌درآن $g_2(0)$ و $g_3(0)$ توابع تک ارز میباشند. اتصال موازی‌دارای مقاومت‌معادل R^* است که باینصورت مشخص میشود:



شکل ۱-۳- اتصال سری موازی مقاومتها و ساده کردن متوالی آن

$$i^* = g(v^*) \qquad (۲-۲)$$

که در آن طبق شکل (۲-۱) i^* و v^* جریان شاخه و ولتاژ شاخهٔ مقاومت R^* هستند. اتصال موازی لازم میدارد که ولتاژهای $v_۲$ و $v_۳$ مساوی v^* باشند. جریان حاصله i^* با مجموع $i_۲$ و $i_۳$ برابر است. بنابراین مشخصه R^* با مشخصه‌های $R_۲$ و $R_۳$ بصورت زیر مربوط میشود:

$$g(v^*) = g_۲(v^*) + g_۳(v^*) \qquad \text{برای تمام مقادیر } v^* \qquad (۲-۳)$$

گیریم که $g_۲(\cdot)$ و $g_۳(\cdot)$ طبق شکل (۲-۳ الف) مشخص شود. $g(\cdot)$ با جمع دو تابع بدست میآید.

قدم بعدی بدست‌آوردن مشخصه اتصال سری $R_۱$ و R^* است. گیریم که مشخصه $R_۱$ کنترل شده با جریان باشد و بصورت زیر مشخص گردد.

$$v_۱ = f_۱(i_۱) \qquad (۲-۴)$$

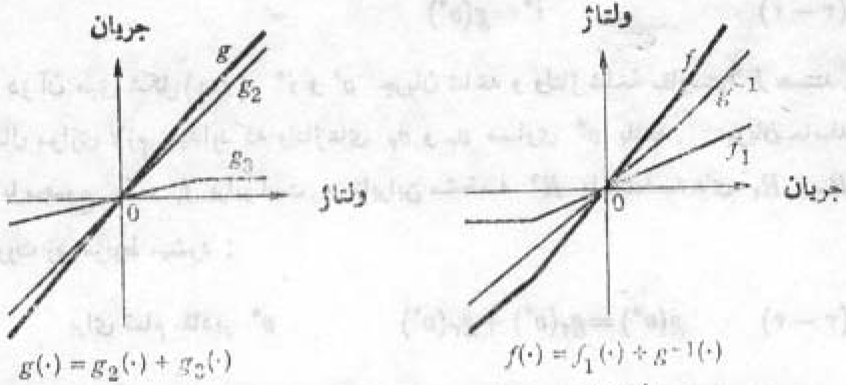
که در آن $f_۱(\cdot)$ مطابق شکل (۲-۳ ب) یک تابع تک ارز است. اتصال سری $R_۱$ و R^* دارای مقاومت معادل R، طبق شکل (۲-۱) است. مشخصه R را که بصورت زیر مشخص میشود:

$$v = f(i) \qquad (۲-۵)$$

باید تعیین کرد. واضح است که اتصال سری لازم میدارد که جریانهای $i_۱$ و i^* یکسان بوده و برابر i باشند و بسادگی ولتاژ v مجموع $v_۱$ و v^* است. اگرچه برای جمع کردن دو ولتاژ باید اول بتوانیم v^* را برحسب i^* پیدا کنیم، از رابطه (۲-۲) میتوان نوشت:

$$v^* = g^{-1}(i^*) \qquad (۲-۶)$$

که در آن $g^{-1}(\cdot)$ تابع معکوس $g(\cdot)$ است. درمورد مثال فوق، تابع معکوس $g^{-1}(\cdot)$ درصفحه جریان - ولتاژ در شکل (۲-۳ ب) مستقیماً از تابع $g(\cdot)$ در صفحهٔ ولتاژ - جریان در شکل (۲-۳ الف) رسم شده است. این عمل بآسانی با معکوس نمودن منحنی $g(\cdot)$ و تشکیل تصویر آینه‌ای آن نسبت به خط مستقیمی که از مبداء میگذرد وبا



(الف) (ب)

شکل ۲-۳-۲ مثال ۱ : اتصال سری موازی مقاومتها

محورها زاویه ۴۵° میسازد ، انجام میگیرد. بنابراین اتصال سری R_1 و R^* با تابع $f(\cdot)$ از رابطه (۳-۵) مشخص میشود که در آن :

$$f(i)=f_1(i)+g^{-1}(i) \qquad \text{برای تمام مقادیر } i$$

این مشخصه نیز در شکل (۳-۲ ب) رسم شده است. بنابراین مرحله اساسی در بدست آوردن مشخصه نهائی این سؤال است که آیا $g^{-1}(\cdot)$ بعنوان یک تابع تک‌ارز وجود دارد یانه ؟ اگر تابع معکوس وجود نداشته باشد ، روش تبدیل با شکست مواجه میشود. در حقیقت هیچ نمایش معادلی بصورت توابع تک ارز وجود ندارد. یک معیار ساده که وجود چنین طرز نمایشی را تضمین میکند آنست که همهٔ مقاومتها دارای مشخصه‌های افزایشی یکنوای دقیق[1] باشند. بعنوان مثال ، مقاومتهای خطی با مقاومت مثبت ، افزایشی یکنوا میباشند. مقاومت معادل R برای مدار شکل (۳-۱) با فرض خطی بودن همهٔ مقاومتها برابر است با :

$$\boxed{R=R_1+\frac{1}{1/R_2+1/R_3}} \qquad (۳-۷)$$

که در آن R_1 و R_2 و R_3 بترتیب عبارتند از مقاومتهای R_1 و R_2 و R_3.

تمرین مداری که در شکل (۳-۳) نشان داده شده شبکهٔ نردبانی نامحدود[2]

۱- Strictly Monotonic ۲- Infinite Ladder Network

نامیده میشود . همه مقاومتها خطی هستند و مقاومتهای سری دارای مقاومت R_s و مقاومتهای موازی دارای مقاومت R_p میباشند. مقاومت ورودی R یعنی مقاومت یک قطبی معادل را تعیین کنید.

راهنمائی : چون نردبان از رشتهٔ نامحدودی از طبقات مشابه تشکیل میابد (یک R_s سری و یک R_p موازی) میتوان طبقه اول را منتهی بیک زنجیر نامحدود با همان تعداد زیاد از طبقات کاملاً مشابه درنظر گرفت. بنابراین اگر طبقه اول به یک مقاومت با مقاومت R منتهی شود مقاومت ورودی R تغییر نخواهد کرد.

تا حال مسأله تعیین مشخصه‌های مقاومت معادل اتصالهای سری ، موازی و سری-موازی مقاومتها را بررسی کردیم. در تجزیه و تحلیل مدار اغلب پیدا کردن ولتاژها و جریانها در قسمتهای مختلف مدار وقتی منابع بکار میروند ، توجه ما را جلب میکند. مثالهای زیر نحوهٔ حل این مسائل را تشریح میکند.

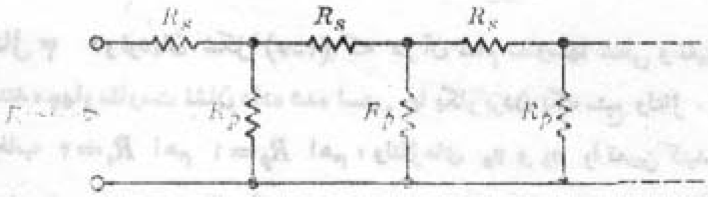
مثال ۲ مدارسادهٔ نشان داده شده درشکل (۳-٤) را درنظر بگیرید که در آن R_1 و R_2 مقاومتهای کنترل شده باولتاژ میباشند و به‌اینصورت مشخص میشوند :

$$i_1 = ۲ + v_1 + v_1^{۲} \quad \text{و} \quad i_2 = ۳v_2 \qquad (۳-۸)$$

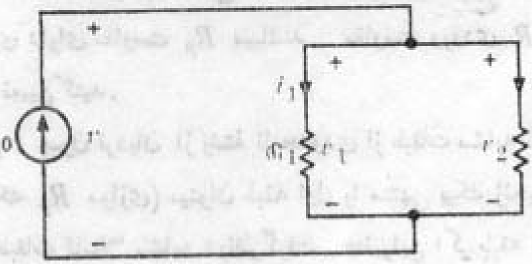
i_0 یک منبع جریان ثابت با جریان ۲ آمپر است. منظور ما یافتن جریانهای i_1 و i_2 و ولتاژ v است. چون $v = v_1 = v_2$ ،مشخصه مقاومت معادل ترکیب موازی بسادگی بدست میآید.

$$i = i_1 + i_2$$

$$= ۲ + v + v^{۲} + ۳v = ۲ + ٤v + v^{۲} \qquad (۳-۹)$$



شکل ۳-۳- یک نردبان نامحدود متشکل از مقاومتهای خطی . R_s را مقاومت سری و R_p را مقاومت موازی مینامیم . R مقاومت ورودی یعنی مقاومت یک قطبی معادل میباشد .



شکل ٤-۳- مثال ۲ : اتصال موازی مقاومتها و یک منبع جریان

برای بدست آوردن ولتاژ v به ازاء جریان $i = i_0 = ۲$ آمپر، لازمست معادله (۳-۹) را حل کنیم. بنابراین :

$$v^{۲} + ٤v + ٦ = ۲$$

یا :

$$v = -۲ \quad \text{ولت} \qquad (۳-۱۰)$$

چون $v = v_1 = v_2$، با جایگزینی (۳-۱۰) در (۳-۸) بدست میآوریم :

$$i_1 = ۸ \quad \text{آمپر}$$

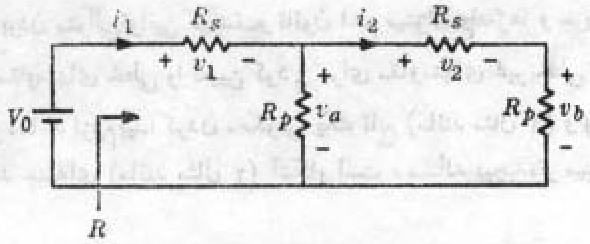
و

$$i_2 = -٦ \quad \text{آمپر}$$

تمرین توان تلف شده در هریک از مقاومتها را تعیین کنید و نشان دهید که مجموع تلفات توان آنها با توان تحویل داده شده بوسیله منبع جریان برابر است.

مثال ۳ درنردبان شکل (۳-٥) که در آن تمام مقاومتها خطی و تغییر ناپذیر با زمان هستند، چهار مقاومت نشان داده شده است. با بکار بردن یک منبع ولتاژ $V_0 = ۱۰$ ولت وانتخاب $R_s = ۲$ اهم $R_p = ۱$ اهم، ولتاژهای v_a و v_b را تعیین کنید.

ابتدا مقاومت ورودی R یک قطبی معادل راکه منبع ولتاژ V_0 با آن روبرو میشود پیدا میکنیم. برمبنای روش اتصال سری ـ موازی مقاومتها، بلافاصله فرمولی مشابه معادله (۳-۷) پیدا میکنیم، بنابراین :



شکل ۵-۳-۳ مثال ۳ : یک نردبان با مقاومتهای خطی

$$R=R_s+\frac{۱}{۱/R_p+۱/(R_s+R_p)}$$

$$=۲+\frac{۱}{۱+۱/۳}$$

$$=۲\frac{۳}{۴} \text{ اهم}$$

بنابراین جریان i_1 باینصورت داده میشود :

$$i_1=\frac{V_0}{R}=\frac{۱۰}{۲\frac{۳}{۴}}=\frac{۴۰}{۱۱} \text{ آمپر}$$

ولتاژ شاخهٔ v_1 باینصورت داده میشود :

$$v_1=R_s i_1=\frac{۸۰}{۱۱} \text{ ولت}$$

با استفاده از KVL برای حلقه اول بدست میآید :

$$v_a=V_0-v_1=\frac{۳۰}{۱۱} \text{ ولت}$$

با دانستن v_a فوراً تعیین میکنیم :

$$i_2=\frac{v_a}{R_s+R_p}=\frac{\frac{۳۰}{۱۱}}{۳}=\frac{۱۰}{۱۱} \text{ آمپر}$$

ازقانون اهم داریم :

$$v_b=R_p i_2=\frac{۱۰}{۱۱} \text{ ولت}$$

بنابراین بابکار بردن متوالی قوانین کیرشف و قانون اهم میتوان ولتاژها و جریانهای هراتصال سری ـ موازی مقاومتهای خطی را تعیین کرد. برای مقاومتهای غیر خطی، همانطورکه از مشکلات ممکن، مانند لزوم پیدا کردن معکوس یک تابع (مانند مثال ۱) و پیدا کردن جواب یک معادله چند جمله‌ای (مانند مثال ۲) آشکار است، مسأله پیچیده‌تر میباشد.

تمرین ۱ برای نردبان نامحدود شکل (۳-۳) نسبت R_s/R_p را چنان تعیین کنید که ولتاژ هر گره نصف ولتاژ گره قبلی باشد.

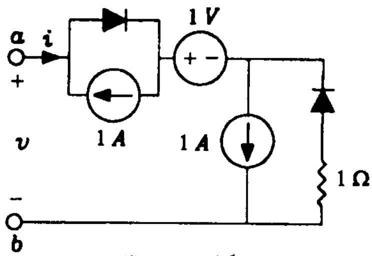
تمرین ۲ فرض کنید میخواهیم یک نردبان محدود مثلاً یک زنجیر متشکل از ۱۰ طبقه را با نسبت R_s/R_p یافته شده در تمرین ۱ طرح کنیم. این زنجیر را چگونه ختم کنیم تا آنکه خاصیت تشریح شده در تمرین ۱ برقرار باشد؟

در مورد مدارهای مقاومتی که بشکل اتصال سری ـ موازی نیستند، تجزیه وتحلیل بازهم پیچیده‌تر است. در فصلهای ۱۰ و ۱۱ برای تجزیه تحلیل مدارهای با مقاومت خطی، روشهای عمومی ارائه خواهیم کرد. بااین حال معرفی مثالی از نوع غیر سری ـ موازی که میتوانیم در حال حاضر بااستدلال فیزیکی ساده حل کنیم مفید است.

مثال ٤ مدار پل[۱] شکل (۳-٦) را درنظر بگیرید و توجه کنید که بشکل یک اتصال سری ـ موازی نیست. فرض کنید که چهار مقاومت یکسان هستند. واضح است که بعلت تقارن، جریان i_b باتری باید بطور مساوی در گره A و همچنین در گره B تقسیم شود. یعنی $i_1=i_2=i_b/2$ و $i_3=i_4=i_b/2$. در نتیجه جریان i_0 باید صفر باشد.

تمرین دوازده مقاومت خطی هریک با مقاومت R برروی یالهای یک مکعب چیده شده‌اند. درهر رأس مکعب مقاومتها بهم لحیم شده‌اند. دو گره که در دو رأس متقابل قطر مکعب قراردارند ❶ و ❷ نامیده می‌شوند. مقاومت معادل بین گره‌های ❶ و ❷ چقدر است؟ (راهنمائی: پرسپکتیو[۲] مکعب را رسم کرده و بااستفاده از بحث‌های تقارن، چگونگی تقسیم جریان درهر گره را تعیین کنید).

۱- Bridge ۲- Perspective



شکل تمرین ۳.

اگر منبع ولتاژ $v_s(t) = ۲\cos\frac{\pi t}{۲}$ را در سرهای a و b وصل کنیم، جریان $i(t)$ گذرنده از مدار را تعیین و شکل موج آن را برای یک پریود رسم کنید.

در مورد مدارهای مقاومتی که به شکل اتصال سری-موازی نیستند، تجزیه و تحلیل باز هم پیچیده‌تر است. گرچه در فصلهای ۱۰ و ۱۱ برای تجزیه و تحلیل مدارهای با مقاومت خطی، روشهای عمومی ارائه خواهیم کرد؛ لیکن بیان روشهای تحلیل مدارهای مقاومتی ساده با استفاده از روش تحلیل گره و روش تحلیل مش دراین مرحله، بسیار سودمند است.

* روشهای تحلیل مدارهای مقاومتی

همان‌طوری که می‌دانیم منظور از تحلیل یک مدار به دست آوردن ولتاژ و جریان تمام شاخه‌ها و یا دستهٔ معینی از شاخه‌ها است. اساس کلیهٔ روشهای تحلیل مدار اعمال مناسب قوانین KCL و KVL و نوشتن درست معادلات شاخه‌ها می‌باشد. یعنی نقطهٔ شروع هر روش تحلیل مدار نوشتن تمام معادلات KCL و KVL و همچنین تمام معادلات شاخه‌ها است. اختلاف اصلی میان روشهای مختلف تحلیل مدار در تعداد و نوع متغیرهایی است که نهایتاً به عنوان متغیرهای مدار در نظر گرفته شده و بقیهٔ متغیرهای باقیمانده حذف می‌شوند. در میان روشهای کلی تحلیل مدار می‌توان از دو روش مهم **تحلیل گره** و **تحلیل مش** نام برد. چون اعمال این روشها در مدارهای مقاومتی خطی به معادلات جبری خطی منجر می‌شوند که به سادگی با روش کرامر حل می‌شوند، از این‌رو بهتر است هرچه زودتر با این روشها و کاربرد آنها در تحلیل مدارهای مقاومتی آشنا شویم و تجربیات مفیدی در به کارگیری آنها در حل انواع مدارهای متفاوت کسب کنیم و سپس آنها را به راحتی به مدارهای مرتبهٔ بالاتر که شامل سلف‌ها و خازن‌ها بوده و به معادلات دیفرانسیل منجر می‌شوند، اعمال کنیم.

*-۱ روش تحلیل گره

همان طوری‌که از نام روش تحلیل گره برمی‌آید، دراین روش متغیرهای مورد نظر **ولتاژ گره‌ها** هستند و چون ولتاژ گره‌ها نسبت به هم سنجیده می‌شوند بنابراین ابتدا گرهی را به عنوان **گره مبنا** با ولتاژ دلخواه انتخاب می‌کنیم. سپس با به کارگیری روش تحلیل گره ولتاژ گره‌های دیگر را نسبت به این گره مبنا به دست

می‌آوریم. بنابراین تعداد متغیرهای انتخاب شده برابر تعداد گره‌ها منهای یک خواهد بود. از آنجایی که انتخاب ولتاژ گره مبنا دلخواه است، معمول براین است که برای راحتی کار ولتاژ گره مبنا را صفر انتخاب کنیم. معمولاً گره‌ای راکه تعداد بیشتری شاخه یا منبع ولتاژ به آن وصل شده است به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم. گره مبنا را با علامت زمین، یعنی به‌صورت ⏚ ، مشخص می‌کنیم. بدیهی است چون ولتاژ هر شاخه برابر تفاضل ولتاژ گره‌های دوسر آن شاخه است، پس با معلوم بودن ولتاژ گره‌ها، ولتاژ تمام شاخه‌ها به دست می‌آیند. چون مدار را مقاومتی فرض کردیم بنابراین با معلوم بودن ولتاژ هر شاخه جریان آن شاخه نیز به راحتی به دست می‌آید.

از آن‌جا که اساس روش تحلیل گره نوشتن معادلات KCL در تمام گره‌ها به استثنای گره مبنا است، پس ابتدا باید تمام منابع ولتاژ سری با مقاومتها را به منابع جریان موازی با آنها تبدیل کرد. همچنین چون جهت واقعی جریان در شاخه‌ها را نمی‌دانیم هنگام نوشتن معادلات KCL جهت تمام شاخه‌ها را جهت‌های خارج شونده از گره در نظر می‌گیریم.

با توجه به آنچه که گفته شد می‌توان مراحل مختلف روش تحلیل گره را به شرح زیر بیان نمود:

۱ـ ابتدا گره‌ای را به عنوان گره مبنا انتخاب کرده و ولتاژ آن را صفر درنظر بگیرید.

۲ـ همه گره‌های مدار را شماره گذاری کنید و گره مبنا را با شمارهٔ صفر نشان دهید.

۳ـ ولتاژ گره‌ها را نسبت به گره مبنا به عنوان متغیرهای مدار انتخاب کنید.

۴ـ قانون KCL را در تمام گره‌های مدار به‌جز گره مبنا بنویسید (معادلات گره) و سعی کنید معادلات حاصل منحصراً برحسب ولتاژ گره‌ها نوشته شوند. یعنی متغیرهای دیگر را برحسب ولتاژ گره‌های انتخاب شده بیان کنید.

۵ـ منابع وابسته را از هر نوع که باشند مانند منابع نابسته در نظر بگیرید و پس از اعمال KCL به گره‌ها، سعی کنید فقط متغیرهای ولتاژ گره‌ها در معادلات ظاهر شوند.

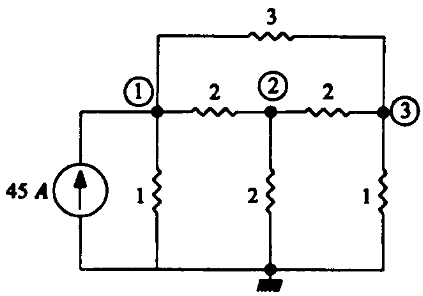
۶ـ در حالت کلی، اعمال مراحل فوق به هر مدار مقاومتی به n معادلهٔ n مجهولی برحسب متغیرهای ولتاژ گره منجر می‌شود (n تعداد گره‌ها به استثنای گره مبنا است). این معادلات را با روش کرامر یا هر روش دیگری که راحت‌تر باشد، حل کنید و ولتاژ گره‌ها را به دست آورید.

۷ـ ولتاژ هر شاخه برابر تفاضل ولتاژ گره‌های دوسر آن شاخه است و جریان هر شاخه با استفاده از رابطهٔ اساسی آن شاخه، که دراین فصل تمام شاخه‌ها را مقاومتی فرض می‌کنیم، به دست می‌آید.

مثال ۱ مدار شکل (*۱-۱) را با روش تحلیل گره تحلیل کنید و ولتاژ گره‌های آن را به دست آورید. مقادیر رسانایی‌ها برحسب مهو داده شده‌اند.

مدار دارای چهار گره است. یکی از آنها را به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم و ولتاژ آن را برای راحتی صفر در نظر می‌گیریم. گره‌های دیگر مدار را با شماره‌های ۱ ، ۲ و ۳ مشخص می‌کنیم و ولتاژ آنها را به

ترتیب با e_1 ، e_2 و e_3 نشان می‌دهیم. با اعمال KCL در سه گره ① ، ② و ③ به دست می‌آوریم:



شکل *۱-۱ مثال ۱.

$$e_1 + 2(e_1 - e_2) + 3(e_1 - e_3) = 45 \qquad (1-*)$$

$$2(e_2 - e_1) + 2e_2 + 2(e_2 - e_3) = 0 \qquad (2-*)$$

$$3(e_3 - e_1) + 2(e_3 - e_2) + e_3 = 0 \qquad (3-*)$$

توجه کنید که اگر سه معادلهٔ فوق را با هم جمع کنیم به دست می‌آوریم:

$$e_1 + 2e_2 + e_3 = 45 \qquad (4-*)$$

معادلهٔ (*-۴) نشانگر اعمال KCL در گره مبنا است. یعنی اعمال KCL در گره مبنا معادلهٔ مستقلی از نوشتن KCL در گره‌های دیگر به دست نمی‌دهد و بدین دلیل است که در تحلیل گره ما KCL را در همهٔ گره‌های مدار به استثنای گره مبنا می‌نویسیم.

معادلات (*-۱)، (*-۲) و (*-۳) پس از ساده کردن به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$6e_1 - 2e_2 - 3e_3 = 45 \qquad (5-*)$$

$$-2e_1 + 6e_2 - 2e_3 = 0 \qquad (6-*)$$

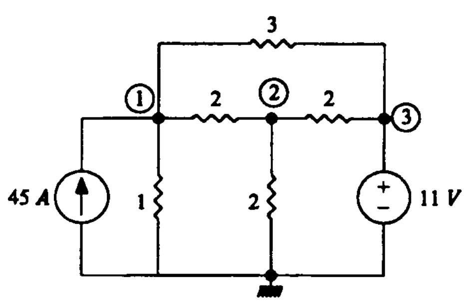
$$-3e_1 - 2e_2 + 6e_3 = 0 \qquad (7-*)$$

از حل دستگاه معادلات فوق با روش کرامر یا هر روش دیگر به دست می‌آوریم:

$e_1 = 16$ ولت , $e_2 = 9$ ولت , $e_3 = 11$ ولت

بدیهی است با دانستن ولتاژ گره‌ها می‌توان ولتاژ و جریان تمام شاخه‌ها را تعیین کرد.

مثال ۲ فرض کنید در مدار شکل (*۱-۱) مقاومت یک اهمی وصل شده به گره ③ را با منبع ولتاژ ۱۱ ولتی مطابق شکل (*۱-۲) تعویض کنیم. بار دیگر مدار را تحلیل کرده و ولتاژ گره‌ها را بدست آورید.



شکل *۱-۲ مثال ۲.

گرچه مدار دارای سه گره و یک گره مبنا است، لیکن ولتاژ گره ③ دیگر مجهول نبوده و برابر ۱۱ ولت است. در حقیقت با انتخاب دو متغیر مجهول e_1 و e_2 و اعمال KCL فقط در گره‌های ① و ② به دست می‌آوریم:

$$6e_1 - 2e_2 = 78 \qquad (۸-*)$$

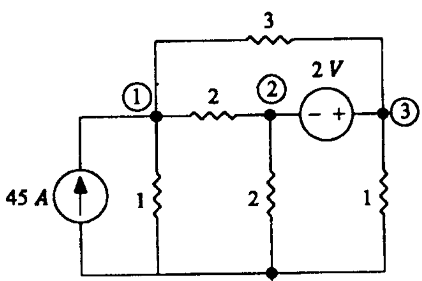
$$-2e_1 + 6e_2 = 22 \qquad (۹-*)$$

از حل این دو معادله، مقادیر ولتاژهای گره‌ها را به‌صورت $e_1 = 16$ ولت و $e_2 = 9$ ولت، به‌دست می‌آوریم.

تبصرهٔ ۱ گرچه ولتاژ گره (۳) مجهول نبود، ولی اعمال KCL به این گره مستلزم معرفی یک متغیر جدید I_E به نام جریان گذرنده از منبع ولتاژ ۱۱ ولتی است. بنابراین نوشتن KCL در گره‌ای که منبع ولتاژی به آن وصل است، متغیر جدیدی را وارد معادلات می‌کند که اثر نوشتن یک معادلهٔ اضافی را از میان می‌برد. در نتیجه، در هنگام به کار بردن روش تحلیل گره اعمال KCL در گره‌هایی که منابع ولتاژ به آنها وصل است، چندان مؤثر نخواهد بود.

تبصرهٔ ۲ در مثال ۱ چنین به دست می‌آوریم که $e_3 = 11$ ولت، یعنی ولتاژ شاخهٔ یک اهمی برابر ۱۱ ولت است. ما این شاخه را با منبع ولتاژی جایگزین کردیم که ولتاژ آن دقیقاً برابر ولتاژ همین شاخه بود و به طوری که ملاحظه کردیم ولتاژ گره‌های دیگر همان مقادیر قبلی به دست آمد و هیچ تغییری در ولتاژ گره‌های مدار به وجود نیامد. در حقیقت این مطلب بیانگر یک قضیهٔ مهم مدار به نام **قضیهٔ جانشینی** است که در فصل ۱۶ بیان و اثبات خواهد شد. مفهوم اصلی این قضیه آن است که اگر پس از تحلیل یک مدار، هر شاخهٔ آن را با یک منبع ولتاژ یا منبع جریان نابسته که مقادیر آنها به ترتیب برابر ولتاژ شاخه یا جریان شاخه باشد، جایگزین کنیم، هیچ‌گونه تغییری در مقادیر ولتاژ و جریان شاخه‌ها حاصل نمی‌شود.

مثال ۳ همان مدار مثال ۱ را باردیگر در نظر بگیرید و مقاومت $\frac{1}{2}$ اهمی وصل شده میان گره‌های (۲) و (۳) را با منبع ولتاژ نابستهٔ ۲ ولتی مطابق شکل (*۱-۳) جایگزین کنید. ولتاژ گره‌های این مدار را به دست آورید.



شکل *۱-۳ مثال ۳.

البته چون ولتاژ شاخهٔ وصل شده میان گره‌های (۲) و (۳) در مثال ۱ برابر ۲ ولت بود، مطابق قضیهٔ جانشینی انتظار داریم ولتاژ گره‌های مدار تغییر نکرده، همان مقادیر به دست آیند. اکنون این مدار را با روش تحلیل گره حل می‌کنیم و نتایج مورد انتظار را به دست می‌آوریم.

در این مدار سه ولتاژ گره مجهول داریم؛ لیکن میان e_2 و e_3 رابطهٔ $e_3 - e_2 = 2$ برقرار است. با توجه به تبصرهٔ ۱ مثال ۲، اعمال KCL به تنهایی در گره (۲) یا گره (۳) چندان سودمند نخواهد بود؛ زیرا جریان گذرنده از منبع ۲ ولتی به عنوان یک متغیر اضافی در معادلات ظاهر خواهد شد. لیکن با اعمال KCL در گره مرکب متشکل از گره‌های (۲) و (۳) که شاخهٔ منبع ولتاژ در درون آن قرار می‌گیرد، نیازی در به کارگیری جریان گذرنده از منبع ولتاژ ۲ ولتی نخواهد بود. بنابراین، با نوشتن KCL در گره مرکب متشکل از گره‌های

② و ③ به دست می‌آوریم:

$$۲(e_۲-e_۱)+۲e_۲+۳(e_۳-e_۱)+e_۳=۰$$

که پس از ساده کردن به صورت $-۵e_۱+۴e_۲+۴e_۳=۰$ درمی‌آید. با توجه به اینکه KCL در گره ① تغییر نکرده است، پس سه معادلهٔ سه مجهولی برحسب ولتاژهای گره $e_۱$، $e_۲$ و $e_۳$ به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$۶e_۱-۲e_۲-۳e_۳=۴۵$$

$$-۵e_۱+۴e_۲+۴e_۳=۰$$

$$e_۳-e_۲=۲$$

از حل این سه معادله ولتاژهای گره $e_۱$، $e_۲$ و $e_۳$ به ترتیب $e_۱=۱۶\,V$، $e_۲=۹\,V$ و $e_۳=۱۱\,V$ به دست می‌آیند، که همان مقادیر به دست آمده در مثال ۱ است.

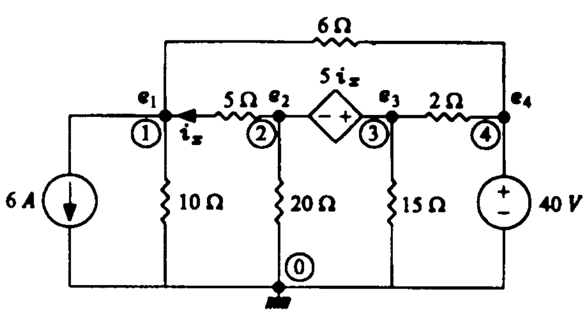
تبصرهٔ ۱ در اعمال روش تحلیل گره اگر منبع ولتاژی به دو گره زمین نشده، وصل شده باشد؛ راحت‌تر است که KCL را در گره مرکب متشکل از این دو گره بنویسیم تا نیازی به معرفی متغیر اضافی دیگری به عنوان جریان منبع ولتاژ نباشد.

تبصرهٔ ۲ در اعمال روش تحلیل گره تفاوت چندانی میان منابع وابسته و منابع نابسته وجود ندارد. می‌توان مراحل گفته شده در روش تحلیل گره را عیناً در مورد آنها نیز اجرا کرد و هرجا که لازم باشد به جای متغیر کنترل کنندهٔ منبع وابسته، مقدار آن را برحسب ولتاژهای گره‌ها قرار داد و نهایتاً معادلات گره را به دست آورد.

مثال ٤ مدار داده شده در شکل (*۱-۴) را با روش تحلیل گره حل کنید و ولتاژ گره‌ها را به دست آورید.

این مدار دارای چهار گره و یک گره مبنا است و چون منبع ولتاژ ۴۰ ولتی به گره ④ وصل شده است پس $e_۴=۴۰$. همچنین چون میان گره‌های ② و ③ منبع ولتاژ وابستهٔ $۵i_x$ وصل شده است پس داریم:

$$e_۳-e_۲=۵i_x=۵\frac{(e_۲-e_۱)}{۵}=e_۲-e_۱$$



شکل *۱-۴ مثال ۴.

که در این‌جا، به جای جریان کنترل کنندهٔ i_x مقدار آن را برحسب ولتاژ گره‌ها یعنی $\frac{e_۲-e_۱}{۵}$ قرار دادیم. با ساده کردن معادلهٔ اخیر به دست می‌آوریم $e_۳=۲e_۲-e_۱$. یعنی ولتاژ $e_۳$ را می‌توان برحسب ولتاژ گره‌های $e_۱$ و $e_۲$ نوشت و درحقیقت دو متغیر مجهول $e_۱$ و $e_۲$ داریم. با نوشتن

KCL در گره ① و گره مرکب متشکل از گره‌های ② و ③ به دست می‌آوریم:

$$\frac{e_۱}{۱۰}+\frac{۱}{۵}(e_۱-e_۲)+\frac{۱}{۶}(e_۱-۴۰)=-۶$$

$$\frac{۱}{۵}(e_۲-e_۱)+\frac{۱}{۲۰}e_۲+\frac{۱}{۱۵}(۲e_۲-e_۱)+\frac{۱}{۲}(۲e_۲-e_۱-۴۰)=۰$$

این معادلات پس از ساده کردن به صورت زیر درمی‌آیند:

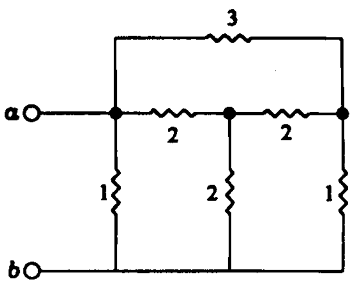
$$\frac{۷}{۱۵}e_۱-\frac{۱}{۵}e_۲=\frac{۲}{۳}$$

$$-\frac{۲۳}{۳۰}e_۱+\frac{۸۳}{۶۰}e_۲=۲۰$$

از حل این دو معادله برحسب $e_۱$ و $e_۲$ به دست می‌آوریم: $e_۱=۱۰\,V$ و $e_۲=۲۰\,V$. با در نظر گرفتن $e_۳=۲e_۲-e_۱$ داریم: $e_۳=۳۰\,V$.

تمرین ۱ منبع ولتاژ کنترل شده با جریان i_x را با منبع جریان نابستهٔ ۳ آمپری با جهت از راست به چپ جایگزین کرده، بار دیگر مسأله را حل کنید. آیا می‌توانید با استفاده از قضیهٔ جانشینی راه ساده‌تری برای حل این مسأله پیشنهاد کنید؟ (جواب: ۳ آمپر)

مثال ۵ مقاومت معادل دیده شده در سرهای a و b مدار شکل (*۱-۵) را تعیین کنید. رسانایی‌ها برحسب مهو داده شده‌اند.



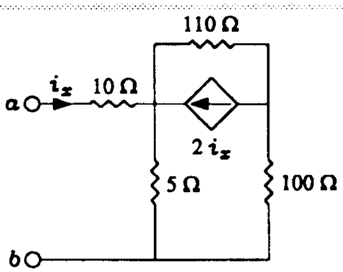
شکل *۱-۵ مثال ۵.

می‌توان منبع جریان آزمایشی دلخواه I_T را در سرهای a و b وصل کرد و ولتاژ V_T میان این دوسر را محاسبه نمود. مقاومت معادل دیده شده در سرهای a و b از رابطهٔ:

$$R_{in}=\frac{V_T}{I_T}$$

به دست خواهد آمد. از آنجایی که مقدار I_T دلخواه است، می‌توان برای ساده کردن کار از نتیجهٔ محاسبات مثالهای قبلی استفاده کرد و مانند مثال ۱ مقدار I_T را برابر ۴۵ در نظر گرفت که دراین صورت مقدار V_T که همان $e_۱$ است برابر ۱۶ ولت خواهد بود؛ پس $R_{in}=\frac{۱۶}{۴۵}\,\Omega$.

تمرین ۲ مقاومت معادل دیده شده در سرهای a و b مدار شکل (*۱-۶) را به دست آورید. (جواب: ۲۰ اهم)



شکل *۱-۶

۴-۴ روش تحلیل مش

مش ساده‌ترین حلقه‌ای است که شاخه‌ای در درون آن نباشد. از این‌رو مش فقط در مدارهایی تعریف می‌شود که به آنها مدارهای مسطح گویند. یعنی مدارهایی که بتوان شکل آنها را روی یک صفحهٔ کاغذ چنان رسم کرد که هیچ دو شاخه‌ای همدیگر را به‌جز در گره‌ها قطع نکنند. با این تعریف مش، روشن است که هر شاخهٔ یک مدار یا در یک مش تنها قرار می‌گیرد (شاخه‌های بیرونی) و یا در دو مش مشترک است (شاخه‌های درونی).

در روش تحلیل مش متغیرهای مورد نظر را جریانهای فرضی در نظر می‌گیرند که در مش‌ها در گردش هستند و از این‌رو اگر شاخه‌ای در دو مش مشترک باشد جریان هر دو مش از آن شاخه می‌گذرد. انتخاب جهتی برای نشان دادن جریان فرضی یک مش اختیاری است، ولی معمول بر آن است که جهت همهٔ مش‌ها را در جهت عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیرند. بنابراین اگر جهت همهٔ مش‌ها را در جهت عقربه‌های ساعت در نظر بگیریم، جریان گذرنده از شاخه‌های مشترک میان دو مش برابر تفاضل جریان آن دو مش خواهد بود. در فصل ۱۰ نشان داده خواهد شد که تعداد مش‌های یک مدار، برابر تعداد شاخه‌ها منهای تعداد گره‌ها به علاوه یک، یعنی $l = b - n_t + 1$ است، که در آن b تعداد شاخه‌ها، n_t تعداد گره‌ها و l تعداد مش‌ها است. همان‌طوری که از قبل می‌دانیم l در واقع همان تعداد متغیرهای مستقل جریان شاخه، در یک مدار است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که جریانهای مش‌ها، متغیرهای مستقل از هم می‌باشند. اساس روش تحلیل مش، نوشتن معادلات KVL در تمام مش‌ها است که از حل این معادلات جریانهای مش‌ها به دست می‌آیند. با معلوم بودن جریان مش‌ها، می‌توان جریان شاخه‌ها و در نتیجه ولتاژ شاخه‌ها را به دست آورد. بنابراین مراحل مختلف روش تحلیل مش را می‌توان به شرح زیر توصیف نمود:

۱- ابتدا منابع جریان موازی با مقاومتها را به منابع ولتاژ سری با آنها تبدیل کنید.

۲- مش‌ها را شماره‌گذاری کرده و جریانهای آنها را در جهت عقربه‌های ساعت به عنوان متغیرهای مدار انتخاب کنید.

۳- جریان شاخه‌ای که فقط در یک مش قرار دارد برابر جریان آن مش و جریان شاخه‌ای که در دو مش مشترک است برابر تفاضل جریانهای آن دو مش است.

۴- قانون KVL را در کلیهٔ مش‌های مدار بنویسید و سعی کنید معادلات حاصل، منحصراً برحسب جریان مش‌ها نوشته شوند؛ یعنی متغیرهای دیگر را برحسب جریانهای مش‌ها بیان کنید.

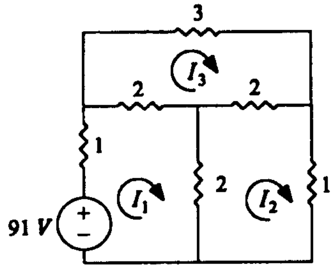
۵- منابع وابسته را مانند منابع نابسته در نظر بگیرید و پس از اعمال KVL در مش‌ها سعی کنید کلیهٔ متغیرها را برحسب جریانهای مش‌ها بیان کنید.

۶- در حالت کلی، اعمال مراحل فوق در هر مدار مقاومتی به یک دستگاه l معادلهٔ l مجهولی برحسب جریانهای مش‌ها منجر می‌شود که از حل این معادلات جریان مش‌ها به دست می‌آیند.

۷- جریان شاخه‌ها از روی جریان مش‌ها و ولتاژ شاخه‌ها از روی جریان شاخه‌ها به دست می‌آیند.

مثال ۱ مـدار نشـان داده شـده در شکـل (*۲-۱) را بـا روش تحلیل مش تحلیل کنید و جریانهای مش‌هـا را بـه دست آوریـد. مقادیر مقاومتها برحسب اهم داده شده‌اند.

ابتدا جریانهای مش‌ها را به صورت $I_۱$، $I_۲$ و $I_۳$ در جهت عقربه‌های ساعت انتخاب کنید. دراین مدار شش مقاومت وجود دارد. سه تا از این مقاومتها شاخه‌های بیرونی بوده و فـقط در یک مش قرار دارند و سه تای دیگر مقاومتها شاخه‌های درونی بوده و در دو مش مشترک هستند. اعمال KVL دراین مش‌ها معادلات زیر را به دست می‌دهد:



شکل *۲-۱ مثال ۱.

$$I_۱ + ۲(I_۱ - I_۳) + ۲(I_۱ - I_۲) = ۹۱$$
$$۲(I_۲ - I_۱) + ۲(I_۲ - I_۳) + I_۲ = ۰$$
$$۳I_۳ + ۲(I_۳ - I_۲) + ۲(I_۳ - I_۱) = ۰$$

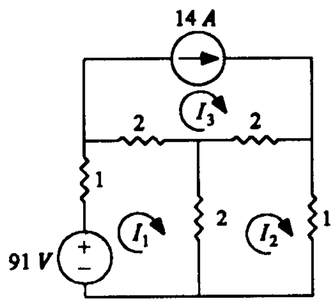
پس از ساده کردن، سه معادلهٔ سه مجهولی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$۵I_۱ - ۲I_۲ - ۲I_۳ = ۹۱$$
$$-۲I_۱ + ۵I_۲ - ۲I_۳ = ۰$$
$$-۲I_۱ - ۲I_۲ + ۷I_۳ = ۰$$

از حل این معادلات داریم: $I_۱ = ۳۱A$، $I_۲ = ۱۸A$ و $I_۳ = ۱۴A$. با معلوم بودن جریان مش‌ها، جـریان شاخه‌ها و ولتاژ شاخه‌ها به راحتی به دست می‌آیند.

مثال ۲ مدار نشان داده شده در شکل (*۲-۲) را با روش مش تحلیل کنید.

گرچه مدار دارای سه مش است، لیکن جریان مش ۳ مجهول نیست، و مقدار آن برابر $۱۴A$ است. در حقیقت دو مجهول $I_۱$ و $I_۲$ داریم که با نوشتن KVL در مش‌های ۱ و ۲ دو معادلهٔ زیر را به دست می‌آوریم:



شکل *۲-۲ مثال ۲.

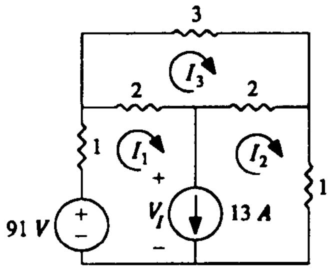
$$I_۱ + ۲(I_۱ - ۱۴) + ۲(I_۱ - I_۲) = ۹۱$$
$$۲(I_۲ - I_۱) + ۲(I_۲ - ۱۴) + I_۲ = ۰$$

از حـل ایـن دو مـعادله مـقادیر جـریانهای مش‌هـا بـه صـورت $I_۱ = ۳۱A$ و $I_۲ = ۱۸A$ به دست می‌آیند.

تبصرهٔ ۱ گرچه جریان مش ۳ مجهول نیست، لیکن اعمال KVL دراین مش مستلزم به کار بردن متغیر مجهول V_I نشان دهندهٔ ولتاژ دوسر این منبع جریان است. بنابراین نوشتن KVL در مش ۳ که متغیر اضافی V_I را معرفی می‌کند، کمک چندانی در حل این مدار نمی‌کند.

تبصرهٔ ۲ جریان گذرنده از منبع جریان همان جریان مش ۳ در مثال ۱، در نظر گرفته شده است تا یک‌بار دیگر کاربرد قضیهٔ جانشینی مورد توجه قرار گیرد.

مثال ۳ مدار نشان داده شده در شکل (*۲-۳) را با روش مش تحلیل کنید.



شکل *۲-۳ مثال ۳.

توجه کنید شاخه‌ای که شامل منبع جریان ۱۳ آمپری است در دو مش مشترک است و بنابراین رابطهٔ $I_۱ - I_۲ = ۱۳$ برقرار است. ولتاژ دوسر منبع جریان را با V_I نشان دهید. اعمال KVL در مش‌های ۱ و ۲ معادلات زیر را به دست می‌دهد:

$$I_۱ + ۲(I_۱ - I_۳) + V_I = ۹۱$$
$$۲(I_۲ - I_۳) + I_۲ - V_I = ۰$$

متغیر V_I در معادلهٔ اول با علامت + و در معادلهٔ دوم با علامت − ظاهر می‌شود. اگر این دو معادله را با هم جمع کنیم به دست می‌آوریم:

$$I_۱ + ۲(I_۱ - I_۳) + ۲(I_۲ - I_۳) + I_۲ = ۹۱ \Rightarrow ۳I_۱ + ۳I_۲ - ۴I_۳ = ۹۱$$

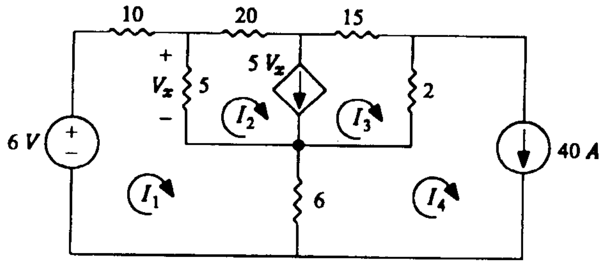
این معادله نشان دهندهٔ معادلهٔ KVL در حلقهٔ مرکب متشکل از مش‌های ۱ و ۲ می‌باشد (مش حالت خاصی از حلقه است). بنابراین می‌توانستیم از اول معادلهٔ KVL را دراین حلقه بنویسیم که هیچ متغیر اضافی در آن ظاهر نمی‌شد. مش ۳ هیچ تغییری نکرده و معادلهٔ KVL درآن، همان معادلهٔ نوشته شده در مثال ۱ است. از این‌رو سه معادلهٔ به دست آمده برحسب جریانهای مش این مدار به صورت زیر است:

$$۳I_۱ + ۳I_۲ - ۴I_۳ = ۹۱$$
$$I_۱ - I_۲ = ۱۳$$
$$-۲I_۱ - ۲I_۲ + ۷I_۳ = ۰$$

از حل این معادلات به دست می‌آوریم: $I_۱ = ۳۱A$ ، $I_۲ = ۱۸A$ و $I_۳ = ۱۴A$.

تبصره در اعمال روش تحلیل مش، اگر شاخه‌ای تنها از یک منبع جریان تشکیل شود و این شاخه فقط در یک مش قرار داشته باشد، جریان آن مش معلوم است و نیازی به نوشتن KVL در آن مش نمی‌باشد. لیکن اگر این منبع در دو مش مشترک باشد تفاضل جریان آن دو مش معلوم است و به جای نوشتن KVL در هر یک از آن دو مش، راحت‌تر است که KVL را در حلقهٔ متشکل از آن دو مش بنویسیم.

مثال ٤ مدار نشان داده شده در شکل (*۲-۴) را با روش مش تحلیل کنید. مقادیر رسانایی‌ها برحسب مهو داده شده‌اند.



شکل *۲-۴ مثال ۴.

این مدار چهار مش دارد که جریان مش چهارم آن معلوم است، یعنی $I_۴ = ۴۰$. همچنین تفاضل جریانهای مش‌های دوم و سوم برحسب V_x بیان می‌شود که خود V_x برحسب تفاضل جریانهای $I_۱$ و $I_۲$ قابل بیان است، یعنی:

$$I_۲ - I_۳ = ۵V_x = ۵\left(\frac{۱}{۵}(I_۱ - I_۲)\right) = I_۱ - I_۲$$

بنابراین $I_۳$ را می‌توان برحسب $I_۱$ و $I_۲$ بیان کرد. یعنی: $I_۳ = ۲I_۲ - I_۱$
برای حل این مدار به دو معادله نیاز داریم که می‌توان با نوشتن KVL در مش ۱ و مش مرکب متشکل از مش‌های ۲ و ۳ آنها را به دست آورد. یعنی:

$$-۶ + \frac{۱}{۱۰} I_۱ + \frac{۱}{۵}(I_۱ - I_۲) + \frac{۱}{۶}(I_۱ - ۴۰) = ۰$$

$$\frac{۱}{۲۰} I_۲ + \frac{۱}{۱۵}(۲I_۲ - I_۱) + \frac{۱}{۲}(۲I_۲ - I_۱ - ۴۰) + \frac{۱}{۵}(I_۲ - I_۱) = ۰$$

با ساده کردن این معادلات به دست می‌آوریم:

$$\frac{۷}{۱۵} I_۱ - \frac{۱}{۵} I_۲ = \frac{۲}{۳}$$

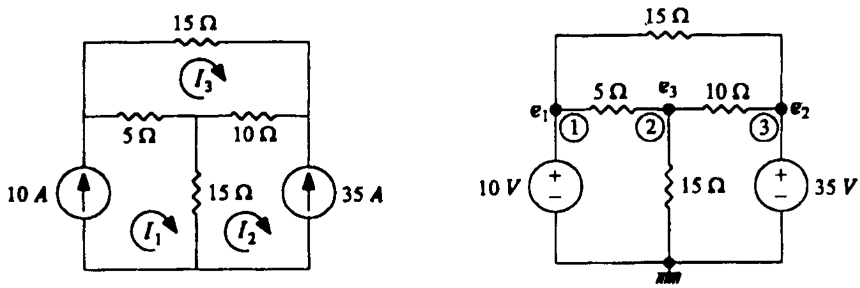
$$-\frac{۲۳}{۳۰} I_۱ + \frac{۸۳}{۶۰} I_۲ = ۲۰$$

از حل این دو معادله به دست می‌آوریم: $I_۱ = ۱۰\,A$ و $I_۲ = ۲۰\,A$ و بنابراین $I_۳ = ۲I_۲ - I_۱ = ۳۰\,A$ و $I_۴ = ۴۰\,A$.

*-۳ انتخاب روش تحلیل مناسب

سوال مهمی که اغلب مطرح می‌شود این است که برای تحلیل یک مدار داده شده کدام یک از دو روش تحلیل گره یا روش تحلیل مش مناسب‌تر است. بدیهی است روش تحلیل مناسب بستگی به شکل مدار و منابع موجود در آن دارد. به‌طور کلی برای تحلیل یک مدار داده شده روشی مناسب است که به معادلاتی با تعداد متغیرهای کمتر منجر شود. بنابراین قبل از آنکه روش تحلیل را انتخاب کنید به دقت به شکل مدار داده شده توجه کنید و مشخص کنید که با انتخاب روشهای تحلیل گره و مش چند متغیر مجهول در نظر گرفته می‌شود. روشی را انتخاب کنید که به تعداد متغیرهای مجهول کمتر منجر شود.

مثال مدارهای داده شده در شکلهای (*۳-۱ الف و ب) را با روش مناسب تحلیل کنید.



(ب) (الف)

شکل *۳-۱ مثال.

مدار شکل (الف) دارای سه گره و یک گره مبنا است و ولتاژ دو گره آن معلوم هستند، یعنی $e_{۱} = ۱۰\,V$ و $e_{۲} = ۳۵\,V$. پس این مدار یک متغیر مجهول $e_{۳}$ دارد که با نوشتن KCL در گره ③ مقدار آن به دست می‌آید. یعنی:

$$\frac{e_{۳} - ۱۰}{۵} + \frac{e_{۳}}{۱۵} + \frac{e_{۳} - ۳۵}{۱۰} = ۰$$

از حل این معادله به دست می‌آوریم: $e_{۳} = ۱۵\,V$.

اگر می‌خواستیم مدار شکل (الف) را با روش تحلیل مش حل کنیم، سه متغیر مجهول جریان مش باید در نظر می‌گرفتیم و در نتیجه سه معادلهٔ سه مجهولی به دست می‌آوردیم. بنابراین برای مدار شکل (الف) روش تحلیل گره مناسب‌تر است.

در مدار شکل (ب) سه مش داریم که جریان دوتا از آنها معلوم است، یعنی $I_{۱} = ۱۰\,A$ و $I_{۲} = -۳۵A$. پس این مدار یک متغیر مجهول $I_{۳}$ دارد که با نوشتن KVL در مش ۳ مقدار آن به دست می‌آید. یعنی:

$$۱۵I_{۳} + ۱۰(I_{۳} + ۳۵) + ۵(I_{۳} - ۱۰) = ۰$$

که از آن به دست می‌آوریم: $I_{۳} = -۱۰\,A$.

اگر می‌خواستیم مدار شکل (ب) را با روش تحلیل گره حل کنیم، سه متغیر مجهول ولتاژ گره باید در نظر می‌گرفتیم و در نتیجه سه معادلهٔ سه مجهولی به دست می‌آوریم. بنابراین برای مدار شکل (ب) روش تحلیل مش مناسب‌تر است.

*۴-۳ تقسیم کنندهٔ ولتاژ و تقسیم کنندهٔ جریان

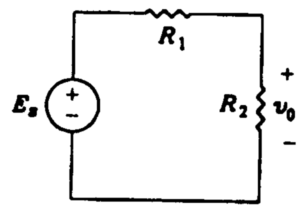
مدار سادهٔ نشان داده شده در شکل (*۴-۱) را در نظر بگیرید که در آن ولتاژ E میان دو مقاومت $R_{۱}$ و $R_{۲}$

تقسیم می‌شود. این مدار را **تقسیم کنندهٔ ولتاژ** گویند. واضح است که اگر بخواهیم ولتاژ خروجی v_o را در دوسر مقاومت $R_۲$ حساب کنیم، به راحتی از رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم:

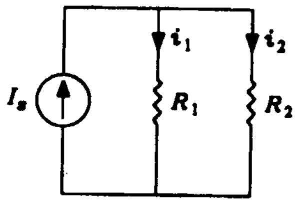
$$v_o = \frac{R_۲}{R_۱ + R_۲} E_s$$

اکنون مدار نشان داده شده در شکل (*۴-۲) را در نظر بگیرید که در آن جریان I_s میان دو مقاومت $R_۱$ و $R_۲$ تقسیم می‌شود. این مدار را **تقسیم کنندهٔ جریان** گویند. واضح است که اگر بخواهیم جریان $i_۲$ گذرنده از مقاومت $R_۲$ را حساب کنیم، به راحتی از رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم:

$$i_۲ = \frac{R_۱}{R_۱ + R_۲} I_s$$



شکل *۴-۱

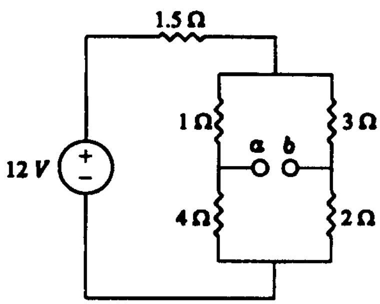


شکل *۴-۲

تمرین در مدار مقاومتی داده شده در شکل (*۴-۳)

الف ـ با استفاده از ایدهٔ تقسیم کنندهٔ ولتاژ، ولتاژ دوسر a و b یعنی v_{ab} را تعیین کنید.

ب ـ اکنون شاخهٔ ab را اتصال کوتاه کنید. با استفاده از ایدهٔ تقسیم‌کنندهٔ جریان، جریان گذرنده از شاخهٔ اتصال کوتاه را تعیین کنید.



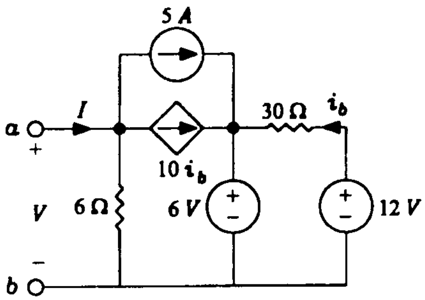
شکل *۴-۳

*-۵ مشخص‌سازی یک مدار خطی در دوسر آن

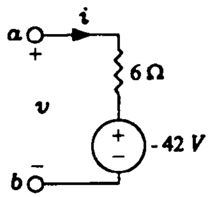
گاهی اوقات ما فقط به رفتار یک مدار خطی در دوسر دلخواه آن علاقه‌مندیم. این مدار خطی ممکن است از ترکیب هر تعداد مقاومت خطی، منابع وابسته و منابع نابسته تشکیل شده باشد، اما تنها رفتار این مدار در سرهای مشخص شدهٔ آن مورد توجه می‌باشد. در چنین مواردی این مدار را می‌توان به صورت اتصال سری یک منبع ولتاژ با یک مقاومت (**مدار معادل تونن**) و یا اتصال موازی یک منبع جریان با یک مقاومت (**مدار معادل نرتن**) نمایش داد. گرچه قضایا و مفاهیم مربوط به مدارهای معادل تونن و نرتن در فصل ۱۶ به تفصیل ارائه خواهد شد، لیکن نظر به اهمیت، سادگی و گسترهٔ کاربردهای این قضیه و اعمال راحت آنها در مدارهای مقاومتی، مناسب دیدیم که موضوع مدارهای معادل تونن و نرتن را در قالب مدارهای مقاومتی، هر چه

زودتر مطرح کنیم، تا ضمن آشنایی با این مفاهیم مهم، فرصت‌های بیشتری برای استفاده از آنـها در ادامـهٔ مطالب درس به دست آوریم.

مثال ۱ مدار نشان داده شده در شکـل (*۵-۱) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم این مدار را برحسب متغیرهای ولتاژ و جریان در دوسر آن یعنی V و I توصیف کنیم. به سـهولت دیـده مـی‌شود کـه $i_b = \frac{۱۲-۶}{۳۰} = \frac{۱}{۵}$ و با اعمال KVL در مش سمت چپ به دست می‌آوریم: $V = ۶(I - ۵ - ۱۰i_b)$. بـا جـایگزینی $i_b = \frac{۱}{۵}$ بـه دست می‌آوریم: $V = ۶I - ۴۲$. یعنی از لحاظ رفتار در سرهای a و b، این مدار، معادل یک مقاومت ۶ اهمی است که با یک منبع ولتاژ ۴۲- ولتی به طور سری وصل شده است. این مدار در شکل (*۵-۲) نشـان داده شـده است و آن را مدار معادل تونن دیده شده در سرهای a و b گویند.

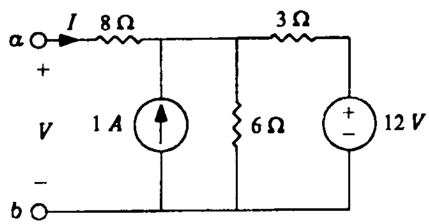


شکل *۵-۱ مثال ۱.

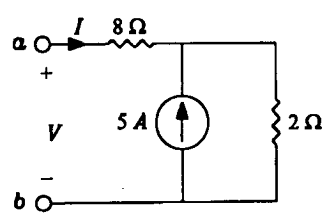


شکل *۵-۲ مدار معادل تونن شکل (*۵-۱).

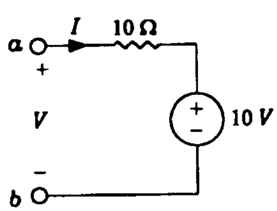
مثال ۲ مـدار نشـان داده شـده در شکـل (*۵-۳-الف) را در نظر بگیرید. می‌توان با تبدیل منبع ولتاژ ۱۲ ولتی سری با مقاومت ۳ اهمی به یک منبع جـریان ۴ آمپری موازی با مقاومت ۳ اهمی، و سپس جایگزینی منابع جریان موازی ۴ آمپری و ۱ آمپری با یک مـنبع جریان ۵ آمپری و مقاومتهای موازی ۳ اهمی و ۶ اهمی با یک مقاومت ۲ اهمی مدار شکل (*۵-۳ب) را به دست آورد. با تبدیل منبع جریان ۵ آمپری موازی با مقاومت ۲ اهمی به یک منبع ولتاژ ۱۰ ولتی سری با مقاومت ۲ اهمی و جایگزینی مقاومتهای ۸ اهمی و ۲ اهمی سری با یک مقاومت ۱۰ اهمی، مدار معادل شکل (*۵-۳پ) را به دست می‌آوریم که مدار معادل تونن دیده شده در سرهای a و b است.



شکل *۵-۳ الف مثال ۲.



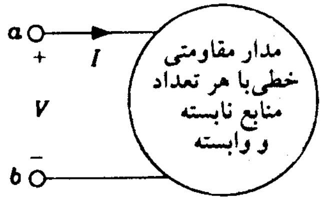
شکل *۵-۳ ب مثال ۲.



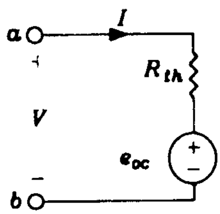
شکل *۵-۳ پ مدار معادل تونن شکل (*۵-۳الف).

با تعمیم نتایج به دست آمده از مثال‌های ۱ و ۲ می‌توان بیان کرد که اگر از دوسر دلخواه a و b هر مدار مقاومتی، مطابق شکل (*۵-۴ الف) به آن مدار نگاه کنیم، رابطهٔ میان ولتاژ V و جریان I در سرهای a و b را می‌توان به صورت یک رابطهٔ خطی به شکل $V = \alpha I + \beta$ بیان کرد. تونن ثابت کرده است که α همان مقاومت دیده شده در سرهای a و b و β همان ولتاژ مدار باز دیده شده در این دوسر است که از این به بعد آنها را به‌ترتیب با R_{th} و e_{oc} مطابق شکل (*۵-۴ ب) نشان می‌دهیم.

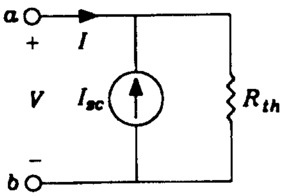
بدیهی است که می‌توان با انجام یک تحلیل مداری، ولتاژ e_{oc} دوسر دلخواه هر مدار را به راحتی به دست آورد. با صفر کردن منابع نابسته، R_{th} ، مقاومت دیده شده در هر دو سر مدار را نیز می‌توان به سادگی تعیین کرد و بنابراین مدار معادل تونن دیده شده در هر دوسر مدار را با روشهای تحلیل مداری مطابق شکل (*۵-۴ ب) تعیین نمود.



شکل *۵-۴ الف



شکل *۵-۴ ب



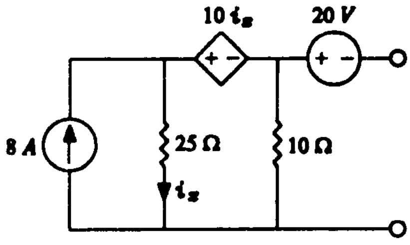
شکل *۵-۴ پ

تبصرهٔ ۱ همان‌طور که قبلاً گفته شد، برای محاسبهٔ مقاومت دیده شده در هر دوسر دلخواه یک مدار مقاومتی با هر تعداد منابع نابسته و منابع وابسته، ابتدا باید منابع نابستهٔ موجود در مدار را صفر نمود (یعنی منابع ولتاژ نابسته را اتصال کوتاه و منابع جریان نابسته را مدار باز کرد). سپس یک منبع ولتاژ آزمایشی V_T را در دوسر مدار قرار داد و با انجام یک تحلیل مداری، جریان I خارج شونده از منبع ولتاژ را به دست آورد. مقاومت دیده شده در سرهای مدار، به سادگی از رابطهٔ $R_{th} = V_T/I$ تعیین می‌شود. همچنین می‌توان به جای منبع ولتاژ آزمایشی V_T یک منبع جریان آزمایشی I_T در سرهای مدار وصل نمود و با انجام یک تحلیل مداری، ولتاژ V دو سر منبع جریان را تعیین نمود و سپس مقاومت دیده شده در سرهای مدار را مجدداً از رابطهٔ $R_{th} = V/I_T$ به دست آورد.

تبصرهٔ ۲ مدار معادل تونن شکل (*۵-۴ ب) را می‌توان به صورت مدار معادل نرتن شکل (*۵-۴ پ) نیز نشان داد که در آن: $i_{sc} = \dfrac{e_{oc}}{R_{th}}$. نرتن ثابت کرد که جریان i_{sc} را می‌توان از اتصال کوتاه کردن سرهای a و b در شکل (*۵-۴ الف) و تعیین جریان گذرنده از این شاخهٔ اتصال کوتاه در جهت a به b ، تعیین نمود.

تبصرهٔ ۳ برای تعیین مدارهای معادل تونن و نرتن دیده شده از دوسر دلخواه هر مدار خطی، کافی است که دو تا از سه مقدار e_{oc} ، i_{sc} و R_{th} را تعیین کنیم. از آنجایی که محاسبهٔ جداگانهٔ هریک از این مقادیر امکان‌پذیر است، معمولاً در تعیین مدارهای معادل تونن و نرتن از این سه مقدار، آن دوتایی را که تعیین آنها ساده‌تر باشد، محاسبه می‌کنند.

مثال ۳ در مدار شکل (*۵-۵ الف) هر یک از کمیت‌های e_{oc} ، R_{th} و i_{sc} را جداگانه محاسبه کرده و درستی رابطهٔ $e_{oc} = R_{th} \cdot i_{sc}$ را بررسی کنید.



شکل *۵-۵ الف مثال ۳.

محاسبهٔ e_{oc} : با نوشتن KVL در مش وسط در شکل (*۵-۵ الف) به دست می‌آوریم:

$$۱۰i_x + ۱۰(۸ - i_x) - ۲۵i_x = ۰ \quad \Rightarrow \quad i_x = ۳/۲$$

$$e_{oc} = -۲۰ + ۱۰(۸ - ۳/۲) = ۲۸ \text{ ولت}$$

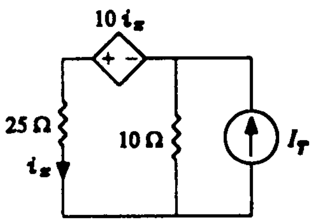
محاسبهٔ i_{sc} : ابتدا شاخهٔ ab را اتصال کوتاه می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که جریان گذرنده از مقاومت ۱۰ اهمی برابر $۸ - i_x - i_{sc}$ است. با نوشتن KVL در مش وسط در شکل (*۵-۵ ب) داریم:

$$۱۰i_x + ۱۰(۸ - i_x - i_{sc}) - ۲۵i_x = ۰ \quad \Rightarrow$$

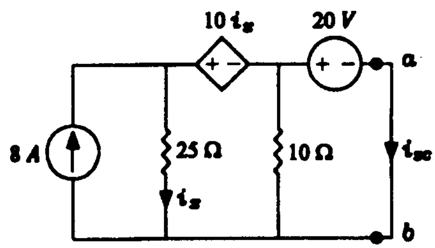
$$۲i_{sc} + ۵i_x = ۱۶ \qquad (*۵-۱)$$

با توجه به مش سمت راست بدیهی است که:

$$۲۰ = ۱۰(۸ - i_x - i_{sc}) \quad \Rightarrow \quad i_x + i_{sc} = ۶ \qquad (*۵-۲)$$



شکل *۵-۵ پ محاسبهٔ R_{th}.



شکل *۵-۵ ب محاسبهٔ جریان i_{sc}.

از حل معادلات (*۵-۱) و (*۵-۲) نتیجه می‌شود که: $i_{sc} = \frac{۱۴}{۳}, \; i_x = \frac{۴}{۳}$

محاسبهٔ R_{th} : برای محاسبهٔ R_{th} کلیهٔ منابع نابسته را صفر کرده و منبع جریان I_T را مطابق شکل (*۵-۵ پ) به مدار وصل می‌کنیم و ولتاژ V دوسر آن را حساب می‌کنیم. با اعمال KVL در مش سمت چپ در شکل (*۵-۵ پ) داریم:

$$۱۰i_x + ۱۰(I_T - i_x) - ۲۵i_x = ۰ \quad \Rightarrow \quad i_x = \frac{۲}{۵}I_T$$

جریان گذرنده از مقاومت ۱۰ اهمی برابر $I_T - i_x$ است. پس:

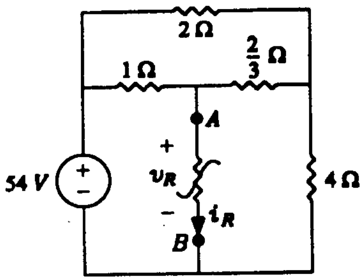
$$V = ۱۰(I_T - i_x) = ۱۰(I_T - \frac{۲}{۵}I_T) = ۶I_T$$

و بنابراین:

$$R_{th} = \frac{V}{I_T} = ۶\,\Omega$$

بدیهی است که رابطهٔ $e_{oc} = R_{th} \cdot i_{sc}$ برقرار است.

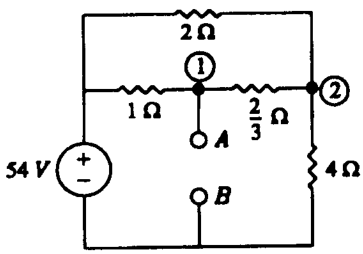
مثال ٤ در مدار شکل (*۵-۶ الف) مقاومت غیرخطی $\mathscr{R}$ با رابطهٔ $v_R = ۶i_R^{۳} - \frac{۲}{۳} i_R$ توصیف می‌شود. جریان گذرنده از این مقاومت را با استفاده از مدار معادل تونن دیده شده توسط مقاومت غیرخطی $\mathscr{R}$ تعیین کنید.



شکل *۵-۶ الف مثال ۴.

ابتدا مقاومت غیرخطی $\mathscr{R}$ را باز کرده و مدار معادل تونن دیده شده از دوسر A و B شکل (*۵-۶ ب) را تعیین می‌کنیم. با انجام تحلیل‌های ساده به راحتی به دست می‌آوریم:

$$e_{oc} = ۴۸\ V \quad , \quad R_{th} = \frac{۲}{۳}\,\Omega$$

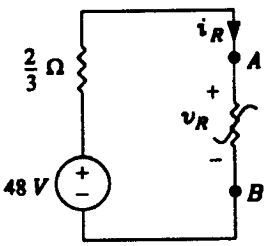


شکل *۵-۶ ب

بنابراین با جایگزینی مدار داده شده در شکل (*۵-۶ الف) با مدار شکل (*۵-۶ ب) که در آن مدار معادل تونن دیده شده از دوسر مقاومت غیرخطی جایگزین بقیهٔ مدار شده است، مدار سادهٔ شکل (*۵-۶ پ) را به دست می‌آوریم. با اعمال KVL در حلقهٔ موجود داریم:

$$۴۸ = \frac{۲}{۳} i_R + v_R = \frac{۲}{۳} i_R + ۶i_R^{۳} - \frac{۲}{۳} i_R \quad \Rightarrow$$

$$i_R^{۳} = ۸A \quad \Rightarrow \quad i_R = ۲A$$

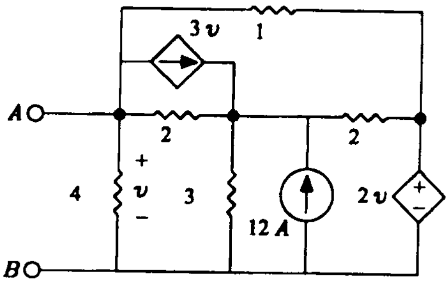


شکل *۵-۶ پ

*۶-۶ محاسبهٔ همزمان e_{oc} و R_{th} در مدار معادل تونن

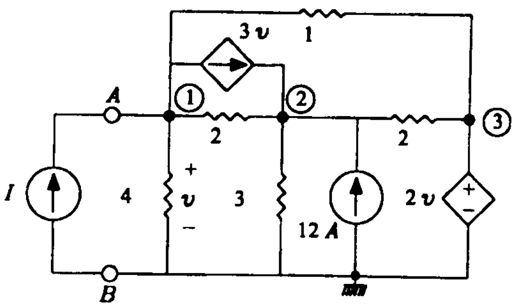
علاوه بر آن که می‌توان e_{oc} و R_{th} را جداگانه برای هر مدار داده شده، محاسبه کرد، می‌توان هر دوی آنها را به طور همزمان نیز تعیین نمود. برای این منظور بدون آنکه منابع نابستهٔ موجود در مدار داده شده را صفرکنیم، منبع جریان I را در دوسر مدار وصل کرده و سعی می‌کنیم ولتاژ V دوسر آن را محاسبه کنیم. اگر این ولتاژ را بتوان نهایتاً به صورت $V = \alpha I + \beta$ درآورد، دراین صورت β همان ولتاژ مدار باز و α مقاومت معادل تونن دیده شده در دوسر مدار است. مثال ۵ این روش محاسبه را تشریح می‌کند.

مثال مـدار نشـان داده شـده در شکـل (*۶-۱ الف) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم مدار معادل تونن دیده شـده در سـرهای A و B را از طـریق مـحاسبهٔ همزمان e_{oc} و R_{th} تعیین کنیم. رسانایی‌های این مدار برحسب مهو داده شده‌اند.



شکل *۶-۱ الف مثال ۵.

ابتدا منبع جریان I را در سرهای A و B وصل کرده و مدار را با روش تحلیل گره حل می‌کنیم، مدار دارای سه گره است؛لیکن به گره ③ منبع ولتاژ کنترل شـده بـا ولتـاژ $۲v$ وصل شده و بـنابرایـن $v_۳ = ۲v_۱$ و مـی‌توان فــقط بــانوشتن KCL درگــره‌های ① و ② مدار را تحلیل کرد. بـا اعـمال KCL در گره‌های ① و ② به دست می‌آوریم:



شکل *۶-۱ ب مثال ۵.

$$۴v_۱ + ۲(v_۱ - v_۲) + ۳v_۱ + (v_۱ - ۲v_۱) = I$$
$$۲(v_۲ - v_۱) + ۳v_۲ - ۳v_۱ - ۱۲ + ۲(v_۲ - ۲v_۱) = ۰$$

از حل این دو معادله برحسب متغیر مجهول $v_۱$ به دست می‌آوریم:

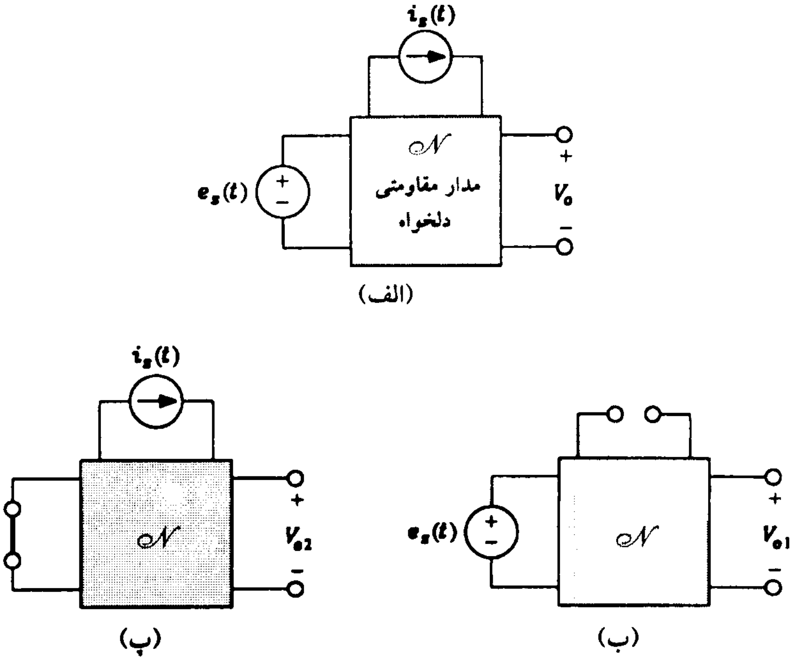
$$v_۱ = \frac{۷}{۳۸} I + \frac{۲۴}{۳۸}$$

بنابراین: $e_{oc} = \frac{۲۴}{۳۸}$ و $R_{th} = \frac{۷}{۳۸}$.

*۷- جمع آثار در مدارهای مقاومتی خطی

قضیهٔ جمع آثار یکی از مهمترین قضایای مدارهای خطی است که در فصل ۱۶ با تفصیل بیشتر مطرح و اثبات خواهد شد. لیکن چون استفاده از این قضیه ما را در تحلیل و درک مطالب مربوط به مدارهای مختلف بسیار کمک می‌کند، مناسب دیدیم که دراین فصل آن را به طور مختصر مرور کنیم تا دانشجویان بتوانند هرچه زودتر با این قضیهٔ اساسی آشنا شده و از آن در درک و حل مسائل مداری دیگر استفاده کنند.

مدار مقاومتی خطی دلخواه $\mathcal{N}$ را که در آن برای سادگی فقط دو منبع نابستهٔ $e_s(t)$ و $i_s(t)$ فرض شده‌اند را مطابق شکل (*۷-۱ الف) درنظر بگیرید. ولتاژ خروجی v_o این مدار که از اعمال همزمان دو منبع نابستهٔ $e_s(t)$ و $i_s(t)$ حاصل می‌شود یقیناً متأثر از وجود هر دو منبع خواهد بود. قضیهٔ جمع آثار به سادگی بیان می‌کند که پاسخ حاصل از اعمال همزمان دو یا چند منبع نابسته، برابر مجموع پاسخ‌های حاصل از اعمال



شکل (*۷-۱) جمع آثار در مدارهای مقاومتی خطی.

هر یک از این منابع به تنهایی است؛ به شرط آنکه دیگر منابع نابستهٔ موجود در مدار برابر صفر قرار داده شوند. توجه کنید که منابع وابسته عیناً در مدار باقی می‌مانند. همان‌طوری که می‌دانیم برای صفر کردن یک منبع ولتاژ نابسته، آن را اتصال کوتاه و برای صفر کردن یک منبع جریان نابسته، آن را مدار باز می‌کنیم. در مدار شکل (*۷-۱ الف) برای آنکه v_o را حساب کنیم باید مدارهای داده شده در شکلهای (*۷-۱ ب) و (*۷-۱ پ) را تحلیل کرده و ولتاژ خروجی $v_{o۱}$ و $v_{o۲}$ را در هر حالت محاسبه کنیم و سپس مقادیر به دست آمده را با هم جمع کنیم تا ولتاژ خروجی v_o مورد نظر حاصل شود؛ یعنی: $v_o = v_{o۱} + v_{o۲}$.

مثال در مدار شکل (*۷-۲ الف) ولتاژ خروجی v_o را با استفاده از جمع آثار تعیین کنید.

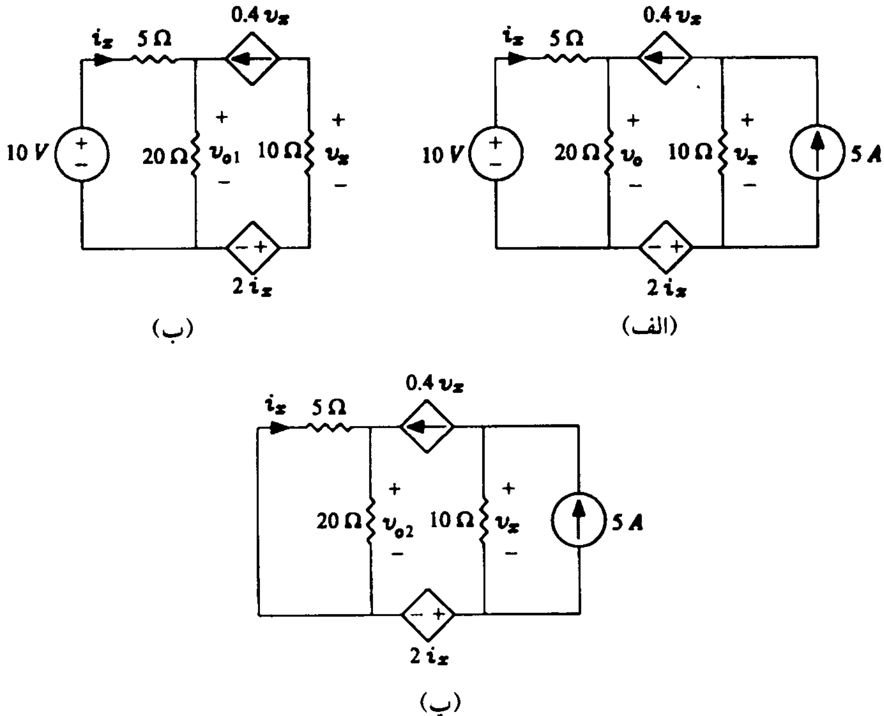
ابتدا منبع جریان ۵ آمپری را صفر کرده (مدار باز می‌کنیم) و مدار شکل (*۷-۲ ب) را تحلیل می‌کنیم. چون جریان $۰/۴v_x$ در خلاف جهت ولتاژ v_x از مقاومت ۱۰ اهمی می‌گذرد؛ پس:

$$۱۰ \times ۰/۴ v_x = -v_x \quad \Rightarrow \quad v_x = ۰$$

بنابراین: $v_{o۱} = \frac{۲۰}{۲۰+۵} \times ۱۰ = ۸V$ به دست می‌آید.

اکنون منبع ولتاژ ۱۰ ولتی را صفر کرده (اتصال کوتاه می‌کنیم) و مدار شکل (*۷-۲ پ) را تحلیل می‌کنیم. جریان گذرنده از مقاومت ۱۰ اهمی برابر $۵ - ۰/۴v_x$ است؛ بنابراین:

$$۱۰(۵ - ۰/۴v_x) = v_x \quad \Rightarrow \quad v_x = ۱۰ \text{ ولت}$$



شکل *۷-۲ مثال.

جریان $0{,}4v_x$ در مقاومتهای ۲۰ اهمی و ۵ اهمی به ترتیب به نسبت ۱ و ۴ تقسیم می‌شود؛ پس:

$$v_{o2} = 20 \times \frac{1}{5} \times 0{,}4 v_x = 16 \text{ ولت}$$

بنابراین با استفاده از جمع آثار ولتاژ خروجی v_o به صورت زیر به دست می‌آید:

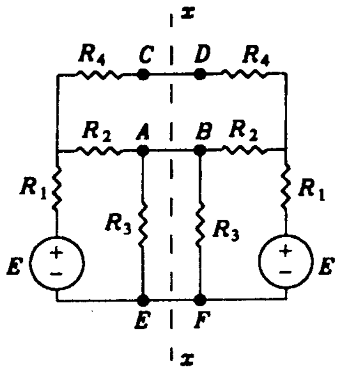
$$v_o = v_{o1} + v_{o2} = 8 + 16 = 24 \text{ ولت}$$

*-۸ استفاده از تقارن در حل مدارهای مقاومتی

بعضی مدارها ممکن است ساختار متقارن خاصی داشته باشند که تعیین ولتاژ یا جریان تعدادی از شاخه‌ها یا تعیین ولتاژ برخی از گره‌ها را به مراتب راحت‌تر می‌کنند. شناخت این تقارن و استفادهٔ مناسب از آن، تحلیل مدارهای متقارن را بسیار ساده می‌کند.

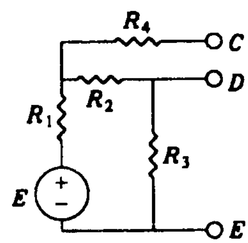
مثال ۱ مدار متقارن نشان داده شده در شکل(*۸-۱) را درنظربگیرید. این مدار نسبت به محور xx کاملاً متقارن است. با استفاده از تقارن، هر جریانی که در شاخهٔ AB در اثر منبع ولتاژ سمت راست حاصل می‌شود، جریان دیگری با همان مقدار، لیکن در جهت برعکس دراثر منبع ولتاژ سمت چپ حاصل می‌شود. بنابراین با استفاده از تقارن نتیجه می‌شود که جریان گذرنده از شاخهٔ AB صفر است. همین مطلب را می‌توان در مورد

شاخه‌های CD و EF نیز بیان کرد. بنابراین می‌توان این شاخه‌ها را حذف کرد و مدار را به دو قسمت متقارن تقسیم نمود که قسمت سمت چپ آن در شکل (*۸-۲) نشان داده شده است. بنابراین از مقاومت $R_۴$ جریانی عبور نمی‌کند و جریان گذرنده از مقاومتهای $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ برابر و مساوی $\frac{E}{R_۱+R_۲+R_۳}$ خواهد بود.

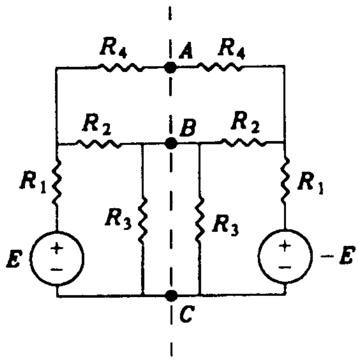


شکل *۸-۱

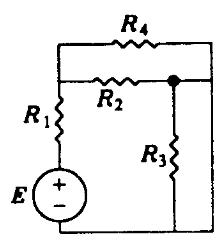
اکنون فرض کنید که جهت یکی از منابع را تعویض کنیم و مدار را به صورت شکل (*۸-۳) درآوریم. بدیهی است، اگر اثر منبع ولتاژ E روی ولتاژ گره نقطهٔ A واقع بر محور تقارن، برابر V باشد، اثر منبع ولتاژ $E-$ روی ولتاژ این گره برابر $V-$ بوده و بنابه



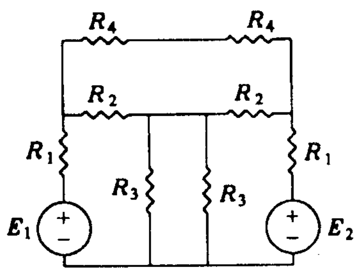
شکل *۸-۲



شکل *۸-۳



شکل *۸-۴



شکل *۸-۵

قضیهٔ جمع آثار ولتاژ گره A برابر صفر خواهد بود. همین مطلب را می‌توان در مورد گره‌های B و C واقع بر محور تقارن نیز بیان کرد. بنابراین نقاط A، B و C را می‌توان اتصال کوتاه کرد و مدار را به دو قسمت متقارن تقسیم نمود که قسمت چپ آن در شکل (*۸-۴) نشان داده شده است.

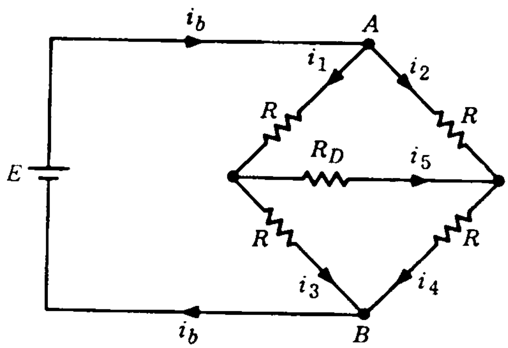
به این ترتیب مقاومت $R_۳$ اتصال کوتاه شده، جریان گذرنده از آن صفر می‌شود. مقاومتهای $R_۲$ و $R_۴$ با هم موازی و حاصل با مقاومت $R_۱$ سری می‌شود. پس جریان گذرنده از مقاومت $R_۱$ چنین می‌شود:

$$I = \frac{E}{R_۱ + R_۲ \| R_۴}$$

که در آن $R_۲ \| R_۴$ مقاومت اتصال موازی $R_۲$ و $R_۴$ بوده و برابر $\frac{R_۲ R_۴}{R_۲ + R_۴}$ است. می‌توان با استفاده از تقسیم‌کنندهٔ جریان، جریان شاخه‌های $R_۲$ و $R_۴$ را نیز به راحتی به دست آورد.

اکنون بار دیگر مدار شکل (۰۸-۱) را در نظر بگیرید. این بار منابع ولتاژ موجود در دو سمت مدار مطابق شکل (۰۸-۵) کاملاً متفاوت هستند. با کمی تفکر می‌توان به‌جای $E_۱$ مقدار $\frac{E_۱ + E_۲}{۲} + \frac{E_۱ - E_۲}{۲}$ و به‌جای $E_۲$ مقدار $\frac{E_۱ + E_۲}{۲} - \frac{E_۱ - E_۲}{۲}$ قرار داد و با استفاده از جمع آثار، حل مسأله را به ترکیب دو حالت گفته شدهٔ قبل برگرداند و با استفاده از تقارن، جریان شاخه‌ها را به راحتی محاسبه نمود.

مثال ۲ مدار پل شکل (۰۸-۶) را در نظر بگیرید و توجه کنید که به شکل یک اتصال سری- موازی نیست. فرض کنید که چهار مقاومت یکسان هستند. واضح است که به علت تقارن، جریان i_b باتری باید به طور مساوی در گره A و همچنین در گره B تقسیم شود. یعنی $i_۱ = i_۲ = i_b/۲$ و $i_۳ = i_۴ = i_b/۲$. در نتیجه $i_۵$ باید صفر باشد.

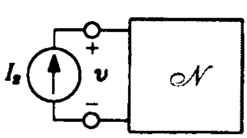


شکل ۰۸-۶ مثال ۲: یک مدار پل متقارن.

تمرین دوازده مقاومت خطی هر یک با مقاومت R برروی یالهای یک مکعب چیده شده‌اند. در هر رأس مکعب، مقاومت‌ها به هم لحیم شده‌اند. دو گره‌ای که در دو رأس مقابل قطر مکعب قرار دارند، ① و ② نامیده‌می‌شوند. مقاومت معادل بین ① و ② چقدر است؟ (راهنمایی: پرسپکتیو مکعب را رسم کرده و با استفاده از بحث‌های تقارن، چگونگی تقسیم جریان در هر گره را تعیین کنید.)

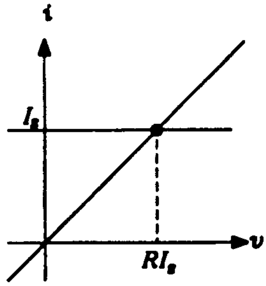
۰۹- تعیین نقاط کار مدارهای غیرخطی

یک قطبی مقاومتی $\mathcal{N}$ نشان داده شده در شکل (۰۹-۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید که منبع جریان I_s را به دوسر آن وصل کنیم. می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان ولتاژ دوسر v را همواره و به طور یکتا تعیین کرد. برای روشن شدن موضوع، سه حالت زیر را در نظر بگیرید:



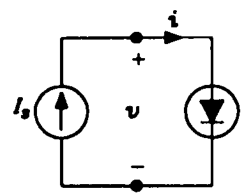
شکل ۰۹-۱

حالت ۱ $\mathcal{N}$ از یک مقاومت خطی R تشکیل می‌شود. مشخصهٔ vi این مقاومت در شکل (۰۹-۲) داده شده است. واضح است محل تلاقی این مشخصه با خط $i = I_s$ ولتاژ دوسر یک قطبی $\mathcal{N}$ را تعیین می‌کند و نقطهٔ I_s , RI_s را نقطهٔ کار یک قطبی $\mathcal{N}$ گویند.

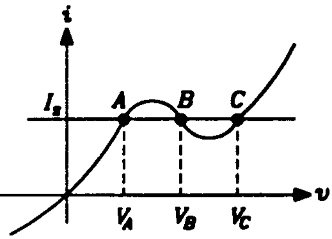


شکل *۹-۲

حالت ۲ فرض کنید $\mathcal{N}$ از یک دیود تونلی با مشخصهٔ داده شده در صفحهٔ vi مطابق شکل (*۹-۳الف) تشکیل شود. ملاحظه می‌شود محل تلاقی خط $i = I_s$ با این مشخصه می‌تواند در نقاط A، B یا C در شکل (*۹-۳ب) قرار گیرد و مدار می‌تواند سه نقطهٔ کار Q_1، Q_2 و Q_3 با مختصات $(V_A\ ,\ I_s)$، $(V_B\ ,\ I_s)$ و $(V_c\ ,\ I_s)$ داشته باشد. بنابراین مدارهای غیرخطی ممکن است دارای چند جواب و یا چند نقطهٔ کار باشند.

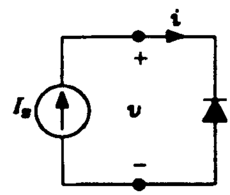


شکل *۹-۳ الف

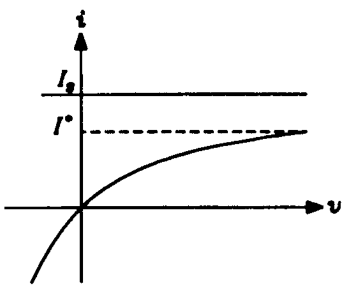


شکل *۹-۳ ب

حالت ۳ فرض کنید $\mathcal{N}$ از یک دیود پیوندی pn با مشخصهٔ داده شده در صفحهٔ vi مطابق شکل (*۹-۴



شکل *۹-۴ الف



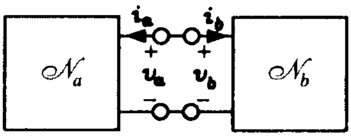
شکل *۹-۴ ب

الف) تشکیل شود. در این مدار دیود پیوندی به طور معکوس وصل شده است و چون جریان وصل شده I_s از جریان اشباع I^* بیشتر است پس طبق شکل (*۹-۴ ب) خط I_s منحنی مشخصهٔ دیود را قطع نمی‌کند و به عبارت دیگر چنین مداری، نقطهٔ کاری ندارد یعنی مدار غیرخطی فوق دارای جواب نمی‌باشد.

از بررسی سه حالت فوق ملاحظه می‌کنیم که یک مدار غیرخطی ممکن است دارای یک جواب (جواب یکتا)، چند جواب و یا هیچ جواب باشد و این یکی از تفاوت‌های اساسی رفتار مدارهای غیرخطی با مدارهای خطی است.

* ۱۰-۰ تحلیل DC

منظور از تحلیل DC یک مدار تعیین نقاط کار آن مدار برای ورودی dc است که مفهوم مهمی در الکترونیک است. مفهوم اصلی تحلیل dc با مدار سادهٔ نشان داده شده در شکل (*۱۰-۱) تشریح می‌شود. فرض کنید دو مدار یک قطبی غیرخطی با مشخصه‌های:



شکل *۱۰-۱

$$f_a(v_a, i_a) = ۰ \qquad , \qquad f_b(v_b, i_b) = ۰$$

توصیف شوند و ما این دو یک قطبی را به صورت اتصال موازی به هم وصل کنیم. می‌خواهیم متغیرهای دوسر یک قطبی‌ها را بعد از اتصال تعیین کنیم. با استفاده از معادلات کیرشف در نقاط اتصال داریم:

$$i_a + i_b = ۰$$

$$v_a = v_b$$

اگر متغیرهای دوسر یک قطبی‌های به هم پیوسته را مثلاً به صورت v و i درنظر بگیریم؛ داریم:

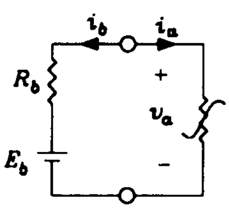
$$v = v_۱ = v_۲ \qquad\qquad i = i_a = -i_b$$

با قرار دادن این روابط در توصیف یک قطبی‌ها به دست می‌آوریم:

$$f_۱(v, i) = ۰ \qquad , \qquad f_۲(v, -i) = ۰$$

این دو رابطه دو معادلهٔ جبری غیرخطی برحسب v و i هستند که می‌توان آنها را با روشهای عددی، ترسیمی یا خطی تکه‌ای حل کرد و مقادیر v و i یعنی نقاط کار یک قطبی‌های به‌هم پیوسته را تعیین کرد.

مثال فرض کنید یک قطبی مقاومتی $\mathcal{N}_a$ کنترل شده با ولتاژ به صورت $f_a(v_a, i_a) = i_a - ۴v_a^۲ = ۰$ و یک قطبی مقاومتی $\mathcal{N}_b$ اتصال سری یک منبع ولتاژ dc و یک مقاومت خطی R_b مانند شکل (*۱۰-۲) باشد. در این صورت داریم:



شکل *۱۰-۲

$$f_b(v_b, i_b) = v_b - R_b i_b - E_b = ۰$$

با در نظر گرفتن $v = v_a = v_b$ و $i = i_a = -i_b$ دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را به دست می‌آوریم:

$$i = ۴v^۲$$

$$v + R_b i - E_b = ۰$$

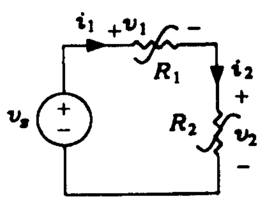
که با حذف i به دست می‌آوریم:

$$۴R_b v^۲ + v - E_b = ۰$$

در حالت خاص $E_b = ۲V$ و $R_b = \frac{۱}{۴}\Omega$ معادله به صورت $v^۲ + v - ۲ = ۰$ درمی‌آید که دارای جوابهای $v = ۱, -۲$ می‌باشد که به ترتیب مقادیر $i = ۴, ۱۶$ را به دست می‌دهد. بنابراین یک قطبی‌های به هم وصل شدهٔ موازی دارای دو نقطهٔ کار $Q_۱ = \begin{vmatrix} ۱ \\ ۴ \end{vmatrix}$ و $Q_۲ = \begin{vmatrix} -۲ \\ ۱۶ \end{vmatrix}$ است.

در عمل کمتر مسائل غیرخطی پیش می‌آیند که به طور تحلیلی قابل حل باشند. دراین گونه موارد از روشهای ترسیمی استفاده می‌شود. می‌توان مشخصهٔ یک قطبی $f_a(v_a, i_a) = f_a(v, i)$ را در صفحهٔ iv رسم کرد و مشخصهٔ یک قطبی $f_b(v_b, i_b)$ را با توجه به محدودیت اتصال به صورت $f_b(v, -i)$ در همان صفحه رسم نمود. نقاط تلاقی این دو مشخصه، نقاط کار مورد نظر را به دست خواهند داد.

*-۱۱ مشخصهٔ انتقال



شکل *۱۱-۱

مدار نشان داده شده در شکل (*۱۱-۱) راکه در آن دو مقاومت غیرخطی کنترل شده با جریان با مشخصه‌های $v_۱ = f_۱(i_۱)$ و $v_۲ = f_۲(i_۲)$ به طور سری با منبع ولتاژ v_s وصل شده‌اند، درنظر بگیرید. اگر منبع ولتاژ را به صورت ورودی و ولتاژ $v_۲$ را به صورت خروجی در نظر بگیریم؛ توصیف $v_۲$ برحسب تابعی از v_s را مشخصهٔ انتقال این مدار گویند که گاهی اوقات به صورت تحلیلی محاسبه و گاهی اوقات به صورت ترسیمی نمایش داده می‌شود. در مدار شکل (*۱۱-۱) داریم:

$$v_s = v_۱ + v_۲ = f_۱(i_۱) + f_۲(i_۲) = f_۱(i) + f_۲(i) = f(i)$$

$$v_۲ = f_۲(i_۲) = f_۲(i)$$

معادلات $v_s = f(i)$ و $v_۲ = f_۲(i)$ معادلات پارامتری مشخصهٔ انتقال مطلوب است. چنانچه بتوان پارامتر i را بین این دو معادله حذف نمود مشخصهٔ انتقال به صورت تحلیلی به دست می‌آید. در صورتی که حذف پارامتر i امکان‌پذیر نباشد، با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای i و محاسبهٔ v_s و $v_۲$ به ازای آنها، می‌توان مشخصهٔ انتقال را به صورت یک منحنی در صفحهٔ $v_s v_۲$ به صورت ترسیمی به دست آورد.

مثال فرض کنید $v_۱ = f_۱(i_۱) = i_۱ + i_۱^۳$ و $v_۲ = f_۲(i_۲) = i_۲ + ۲i_۲^۲$. می‌خواهیم مشخصهٔ انتقال $v_۲$ نسبت به v_s را به دست آوریم:

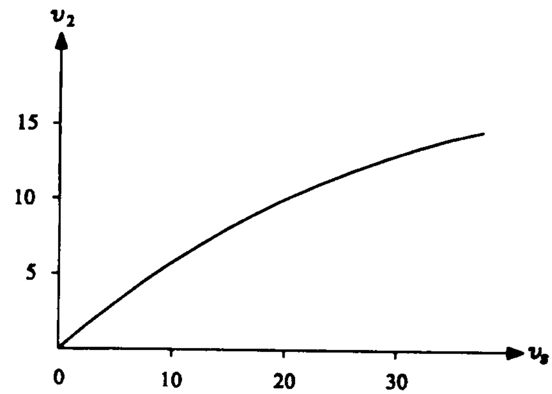
$$v_s = f_۱(i_۱) + f_۲(i_۲) = f(i) = i^۳ + ۲i^۲ + ۲i$$

$$v_۲ = ۲i^۲ + i$$

چون حذف i بین این دو معادله به راحتی امکان‌پذیر نیست، مشخصهٔ انتقال را به صورت ترسیمی به دست می‌آوریم. برای این منظور چند مقدار برای i در نظر گرفته و مقادیر متناظر v_s و v_2 را به دست می‌آوریم. این مقادیر در جدول زیر نشان داده شده‌اند:

i	۰	۰٫۵	۱	۱٫۵	۲	۲٫۵	۳
v_s	۰	۱٫۶۲۵	۵	۱۰٫۸۷۵	۲۰	۳۳٫۱۲۵	۱۰۵
v_2	۰	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱

مشخصهٔ انتقال v_2 برحسب v_s به طور ترسیمی در شکل (۱۱*-۲) نشان داده شده است.



شکل ۱۱*-۲ مشخصهٔ انتقال v_2 برحسب v_s.

*-۱۲ آشنایی با نرم‌افزار اسپایس در حل مدارهای الکتریکی

واژهٔ Spice ترکیبی از حروف اول کلمات Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis است که نشان دهندهٔ نرم‌افزاری برای تحلیل و طراحی مدارهای مجتمع الکترونیکی می‌باشد. این نرم‌افزار مهندسان برق را قادر می‌سازد تا مدارهای مورد نظر خود را برروی کامپیوتر شبیه‌سازی کرده، عملکردهای مختلف مدار را قبل از ساخت فیزیکی آن بررسی کنند. از آنجایی که تحلیل هر مدار الکترونیکی، مستلزم محاسبهٔ نقطهٔ کار و تحلیل dc آن مدار است، از این‌رو نرم‌افزار اسپایس امکان راحتی برای حل مدارهای الکتریکی فراهم می‌آورد. هدف ما دراین بخش ارائهٔ نکات مهم و مطالب اساسی این نرم‌افزار است تا دانشجویان بتوانند برای یادگیری بیشتر و بهتر مدارهای الکتریکی از امکانات این نرم‌افزار استفاده نمایند و تحلیل و طراحی مدارهای مختلف را با آن تجربه کنند.

نرم‌افزار اسپایس براساس شکل خاصی از روش تحلیل گره، یعنی تحلیل اصلاح شدهٔ گره نوشته شده است و جهت استفاده از آن لازم است ساختار مدار، نوع عناصر و مقادیر آنها را قبلاً در فایلی آماده کرده، سپس این فایل را وارد کامپیوتر نمود و با فراخوانی برنامه و اجرای آن، نتایج مورد نظر را به دست آورد. برای

درک و یادگیری خواص و تحلیل مدارهای الکتریکی هر دانشجوی مهندسی برق باید قادر باشد با به‌کار گرفتن روشهای تحلیل ارائه شده دراین درس، هر مدار داده شده را تحلیل کرده و به خواص آن پی ببرد. با بزرگتر شدن ابعاد مدار و با افزایش تعداد عناصر به‌کار رفته در ساختار مدار، حجم محاسبات ریاضی لازم برای تحلیل دستی این مدارها آنچنان پیچیده می‌شود که اغلب از حوصله و توانایی هر فرد خارج می‌گردد. در چنین مواردی منطقی است که جهت کاستن از زحمت و وقت محاسبات به سوی کامپیوترهای دیجیتال روی بیاوریم.

برنامه‌های کامپیوتری کوچک و بزرگ متعددی دراین زمینه وجود دارد که متداول‌ترین آنها نرم‌افزار Spice است که در بیشتر کامپیوترهای بزرگ در دسترس می‌باشد. صورت خاصی از این نرم‌افزار به‌نام PSpice برای کامپیوترهای شخصی طراحی شده و مورد استفادهٔ آموزشی دانشجویان قرار می‌گیرد.

*-۱۲-۱ توضیحات کلی

روش کلی استفادهٔ از Spice شامل سه مرحله است: در مرحلهٔ اول یک فایل منبع ایجاد می‌کنیم که شامل اطلاعات ساختاری مدار و نوع تحلیلی که باید صورت بگیرد و همچنین خروجی‌های مورد نظری که باید چاپ شوند، می‌باشد. در مرحلهٔ دوم فایل منبع را وارد کامپیوتر می‌کنیم که موجب اجرای برنامه شده و فایل خروجی را به وجود می‌آورد. مرحلهٔ سوم چاپ نتایج یا رسم منحنی‌ها از روی فایل خروجی است. خط اول هر فایل منبع، دستور عنوان است که هیچ کار محاسباتی انجام نمی‌دهد و به صورت عنوان به کار گرفته می‌شود. سطر آخر فایل منبع، دستور END. است که علامت "." نیز جزء دستور است. قبل از آنکه نحوهٔ ایجاد فایل منبع مورد بحث قرار گیرد، توضیحات کلی سودمندی در مورد فرمت Spice به شرح زیر ارائه می‌گردد:

۱ـ فرمت ورودی، یک فرمت با نوع دلخواه است. میدان‌ها توسط یک یا چند فاصله خالی یا کاما از هم جدا می‌شوند. فاصله‌های خالی اضافی، در نظر گرفته نمی‌شوند.

۲ـ محتوای یک سطر را می‌توان در صورت لزوم در سطر بعدی ادامه داد، که دراین صورت یک علامت + در ستون اول سطر بعدی قرار داده می‌شود. اسپایس خواندن مطالب را از ستون دوم آغاز می‌کند.

۳ـ هر میدان نام، باید با یک حرف (از A تا Z) شروع شود و می‌توان حداکثر ۸ علامت حرفی یا عددی در میدان قرار داد.

۴ـ یک میدان عددی می‌تواند یک میدان صحیح مانند (4 , 12 , 8 -) یا یک میدان اعشاری مانند (2.5 , 3.14 , -1.414) باشد. یک میدان صحیح یا اعشاری می‌تواند با یک توان صحیح دنبال شود مانند (2.136E3 , 7E - 6).

۵ـ جهت سهولت نمایش اعداد بزرگ یا اعداد کوچک، ضرایب تغییر مقیاس به صورت نمادهای حرفی

مانند K , M , N به کار می‌روند که به صورت پسوندی به دنبال اعداد نوشته می‌شوند. مفهوم واقعی این پسوندها در جدول ۱ نشان داده شده است. مثلاً 2M یا 2G به ترتیب نشان دهندهٔ 2×10^{-3} و 2×10^{9} می‌باشند. اگر علاوه بر نمادهای تغییر مقیاس ذکر شده در جدول ۱، حروف دیگری نیز به دنبال کمیت‌های عددی قرار داده شوند، این حروف نادیده گرفته می‌شوند؛ مثلاً اعداد 2 , 2V , 2A , 2OHM که نشان دهندهٔ عدد 2 هستند. ضمن اینکه اعداد 2M , 2MA , 2MOHM همگی نشان دهندهٔ عدد 2×10^{-3} هستند.

جدول ۱ـ ضرایب تغییر مقیاس به کار رفته در Spice

نام	نماد	صورت نمایی	مثال	مقدار
فِمتو	F	1E − 15	12.2F	12.2×10^{-15}
پیکو	P	1E − 12	150 PF	150×10^{-12}
نانو	N	1E − 9	1.2 Ns	1.2×10^{-9}
میکرو	U	1E − 6	18 UF	18×10^{-6}
میلی	M	1E − 3	2.3 MSec	2.3×10^{-3}
کیلو	K	1E + 3	7 KOHM	7×10^{3}
مِگا	MEG	1E + 6	1.6 MHZ	1.6×10^{6}
گیگا	G	1E + 9	2.3 GHZ	2.3×10^{9}
تِرا	T	1E + 12	3.5 THZ	3.5×10^{12}

۶ـ علامت * در ستون اول به منزلهٔ توضیح است. دستورهایی که علامت اول آنها * باشد جنبهٔ توضیحی داشته و توسط Spice هیچ کاری روی آنها انجام نمی‌گیرد. چنین توضیحاتی برای روشن شدن برنامه، نوشته می‌شوند و می‌توانند در هر جای برنامه قرار داده شوند.

* ۳-۱۲-۲ استفاده از Spice در برنامهٔ تحلیل مدار

۱ـ از آن جایی که اسپایس برمبنای روش تحلیل اصلاح شدهٔ گره عمل می‌کند، بنابراین ابتدا تمام گره‌های مدار را شماره‌گذاری می‌کنیم. لازم نیست شماره‌ها متوالی باشند، ولی عادت براین است که به گره مبنا شمارهٔ 0 داده می‌شود. وقتی تمام گره‌ها شماره‌گذاری شد، مدار با مشخص کردن هر عنصری که بین گره‌های آن وصل است، به صورت کامل توصیف می‌شود.

۲ـ ولتاژ هر گره دلخواه N به صورت V(N) نوشته می‌شود.

۳ـ محتوای هر شاخه با دستور مشخص‌سازی شاخه تعیین می‌شود که دارای سه میدان است. یکی برای نام عنصر، دیگری گره‌هایی که عنصر به آنها وصل است که ترتیب، در آنها مهم است. گره اول به عنوان گرهی با

علامت مثبت تلقی می‌شود. میدان سوم شامل مقدار عنصر است.

۴ـ حرف اول نام عنصر، نوع عنصر را برای برنامه مشخص می‌کند و باید یکی از حروف زیر باشد:

R مقاومت

V منبع ولتاژ

I منبع جریان

E منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ

F منبع جریان کنترل شده با جریان

G منبع جریان کنترل شده با ولتاژ

H منبع ولتاژ کنترل شده با جریان

نام هر عنصر می‌تواند حداکثر ۸ کاراکتر داشته باشد، که ممکن است حروف یا اعداد باشند، اما کاراکتر اول باید یکی از حروف بالا باشد.

۵ـ نام گره‌هایی که عنصر به آن وصل است، در میدان دوم داده می‌شود. مثلاً:

R56 N1 N2

مقاومتی را نشان می‌دهد که بین گره‌های N1 و N2 وصل است و فرض می‌شود ولتاژ N1 علامت مثبت دارد.

۶ـ مقدار عنصر در میدان سوم داده می‌شود و می‌تواند عدد صحیح یا اعشاری یا توان‌دار باشد. مثلاً:

R56 N1 N2 12.5

۷ـ در حالت کلی مشخص‌سازی داریم:

```
Rxxx   N1   N2   r
Vxxx   N1   N2   DC   VS
Ixxx   N1   N2   DC   IS
```

در مورد منابع، گرهی که نام آن، اول برده شده است، گره با علامت مثبت در نظر گرفته می‌شود. (در مورد منابع نابستهٔ ولتاژ و جریان، باید نوع منبع یعنی DC یا AC مشخص شود. اگر AC باشد، باید اندازه و زاویهٔ فاز آن نیز داده شود.)

۸ـ در مورد منابع، می‌توان ترتیب گره‌های دوسر را برعکس کرد و مقدار عنصر را در یک منفی ضرب نمود.

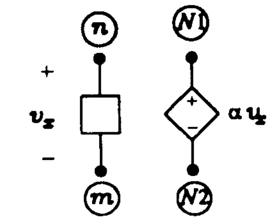
```
Vxxx   N2   N1   DC   - VS
Ixxx   N2   N1   DC   - IS
```

۹ـ برنامهٔ اسپایس علاوه بر ولتاژ تمام گره‌ها، جریان گذرنده از منابع ولتاژ نابسته را نیز تعیین و در اختیار می‌گذارد. بنابراین جریان گذرنده از یک منبع ولتاژ نابسته را می‌توان به عنوان جواب درخواست نمود و به صورت I(Vxxx) نوشت. دراین صورت جریانی که از گره N1 به گره N2 در منبع ولتاژ Vxxx جاری

می‌شود، به دست خواهد آمد.

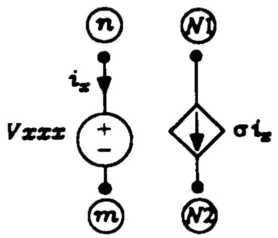
۱۰ـ فرمت دستور شاخه برای منابع کنترل شده با توجه به شکل‌های زیر چنین است:

منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ



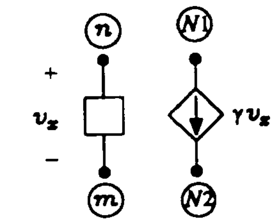
Exxx N1 N2 n m α

منبع جریان کنترل شده با جریان



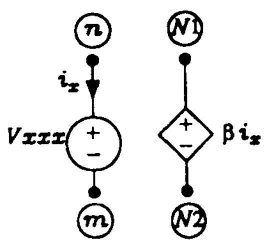
Fxxx N1 N2 Vxxx σ

منبع جریان کنترل شده با ولتاژ



Gxxx N1 N2 n m γ

منبع ولتاژ کنترل شده با جریان



Hxxx N1 N2 Vxxx β

توجه کنید وقتی که متغیر کنترل کننده، جریان شاخه باشد؛ جریان باید جریان گذرنده از یک منبع ولتاژ نابسته باشد و اگر چنین منبعی موجود نباشد، منبع ولتاژ ساختگی Vxxx را با مقدار صفر در نظر می‌گیریم.

۱۱ـ دستور اول هر برنامهٔ Spice باید دستور تیتر یا عنوان باشد. این دستور می‌تواند هدف اجرای برنامه را نشان دهد. این دستور در خروجی عیناً چاپ خواهد شد.

۱۲ـ دستورهای توضیح می‌توانند در هر جای برنامه قرار داده شوند. هر دستوری که با * در ستون اول شروع می‌شود، دستور توضیح است. این دستورها توسط برنامه اجرا نمی‌شوند ولی در لیست برنامه چاپ می‌شوند. اگر بخواهیم دستوری را به طور موقت از برنامه حذف کنیم یک علامت * جلوی آن قرار می‌دهیم.

۱۳- **دستور کنترل جواب یا دستور مشخص‌سازی خروجی:** یکی از این دستورها چنین است:

.DC SNAME VSTART VSTOP VINCR

در اینجا SNAME نام منبع ولتاژ یا منبع جریان نابسته‌ای است که مقدار آن از VSTART شروع شده و هر بار به مقدار VINCR به آن اضافه می‌شود (اگر چنین بخواهیم) تا به VSTOP برسد. اگر حلقهٔ تکراری مورد نظر نباشد، قرار دهید: VSTART = VSTOP و VINCR = 1. مثلاً:

.DC V12 3 3 1

یعنی مدار فقط یک‌بار با قرار دادن منبع V12 برابر ۳ ولت، حل خواهد شد. توجه کنید که این دستور فقط برای منابع ولتاژ یا جریان نابسته است.

در یک تحلیل اگر لازم باشد دو منبع، هریک از مقدار اولیه‌ای شروع و به مقدار نهایی ختم شوند و هر یک نموی داشته باشند و به‌ازای هر مقدار منبع اول، تمام مقادیر منبع دوم مورد محاسبه قرار گیرند، از دستور کنترل DC. استفاده می‌شود. در این صورت دستور کنترل DC. شامل ۹ میدان خواهد بود. میدان اول برای مشخص کردن DC. و نوع تحلیل، چهار میدان بعد برای مشخص کردن منبع اول و چهار میدان بعد برای مشخص کردن منبع دوم. اغلب از این توانایی برای رسم مشخصه‌های خروجی قطعات نیمه‌هادی استفاده می‌شود.

.DC SR1 START1 STOP1 INCR1 SR2 START2 STOP2 INCR2

به ازای هر مقدار متغیر دوم، متغیر اول تمام مقادیر خود را از START1 تا STOP1 پیش می‌برد.

۱۴- اگر دستور DC. نوشته نشود، ولتاژ تمام گره‌ها چاپ خواهد شد.

۱۵- اگر به جای دستور DC. دستور OP. نوشته شود، ولتاژ تمام گره‌ها $V(N_i)$ نسبت به گره مبنا همراه با جریان گذرنده از منابع ولتاژ آنها چاپ خواهد شد. OP نشان دهندهٔ *Operating Point* یا نقطهٔ کار است.

۱۶- در مدارهای بزرگ تنها به مقدار چند متغیر جواب علاقه‌مندیم؛ از این‌رو بهتر است دستور DC. قرار داده شود و فقط مقادیری که مورد نظر است، درخواست شود.

۱۷- **دستور مشخص‌سازی خروجی یا دستور چاپ** چنین است:

.PRINT DC OV1 OV2 ...

که در آن OV1 ، OV2 ، ... متغیرهای مطلوبی هستند که باید مقدار آنها چاپ شوند. ولتاژ گره‌ها به صورت V(N1) ، V(N2) ، ... و ولتاژ شاخه‌ها به صورت V(N1, N2) در نظر گرفته می‌شوند. جریان منابع ولتاژ به صورت I(Vxxx) نوشته می‌شود که در آن Vxxx نام منبع ولتاژ نابسته است.

۱۸- برای تعیین جریان یک شاخه، منبع ولتاژی با مقدار صفر در آن قرار می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم:

Vxxx N1 N2

نیازی به تعیین مقدار صفر برای این منبع نیست. اگر مقدار منبع داده نشود، خود برنامه مقدار آن را صفر در

نظر می‌گیرد (*Default*). بنابراین جریان این منبع یعنی I(Vxxx) همان جریان شاخهٔ مطلوب خواهد بود که در دسترس قرار می‌گیرد.

۱۹ـ اگر مقدار منبعی در ورودی تغییر داده شود (به کمک دستور DC.) می‌توان خروجی متناظر را با استفاده از دستور PLOT. رسم کرد.

```
.PLOT    DC    OV1    OV2    ...
```

که دراین حالت مقادیر OV1 ، OV2 ، ··· برحسب تغییر مقادیر ورودی رسم خواهند شد.

۲۰ـ دستور آخر هر برنامهٔ اسپایس END. است که به صورت:

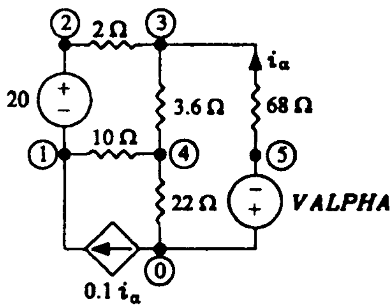
```
.END
```

نوشته می‌شود.

۲۱ـ به‌جز سطر تیتر، تعریف زیرمدارها، دستور OP. و دستور END.، ترتیب بقیهٔ دستورها کاملاً دلخواه است.

مثال ۱ مدار نشان داده شده در شکل (*۱۲-۱) را با استفاده از اسپایس تحلیل کنید.

ابتدا گره‌ها را شماره گذاری می‌کنیم. برای مشخص کردن جریان i_α که منبع جریان وابسته را کنترل می‌کند از یک منبع ولتاژ با نام VALPHA با مقدار صفر استفاده می‌کنیم. این منبع ولتاژ در شاخه‌ای که جریان i_α ، جریان دارد اضافه شده است. دستورهای زیر، ساختار مدار و مقادیر هر عنصر را کاملاً مشخص می‌کنند.



شکل *۱۲-۱

```
Example of simple DC problem.
F1        0    1    VALPHA    0.1
VALPHA    0    5    DC        0
V1        2    1    DC        20
R1        1    4    10
R2        4    0    22
R3        2    3    2
R4        .3   4    3.6
R5        3    5    68
.END
```

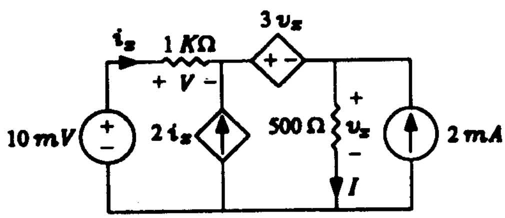
خروجی برنامه به صورت زیر خواهد بود:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	−14.1230	(2)	5.8770	(3)	3.2967	(4)	−1.1732
(5)	0.0000						

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME CURRENT
VALPHA -4.848E-02
V1 -1.290E+00
TOTAL POWER DISSIPATION 2.58E+01 WATTS

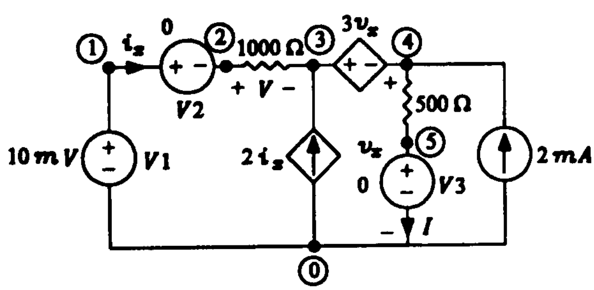
توجه کنید که توان تلف شده **توان خالصی است که توسط منابع ولتاژ نابسته ایجاد می‌شود.** اگر یک منبع وابسته یا یک منبع جریان، توانی ایجاد کند، مقدار آن منظور نمی‌شود. توانی که منبع ۲۰ ولتی ایجاد می‌کند، ۲۵٫۸ وات است. توانی که در مقاومت‌ها تلف می‌شود، ۲۵٫۸۷ وات است. اختلاف این دو، یعنی ۰٫۰۷ وات، توانی است که توسط منبع جریان کنترل شده با جریان تولید می‌شود.

مثال ۲ اکنون فرض کنید که می‌خواهیم مدار نشان داده شده در شکل (*۱۲-۲ الف) را با اسپایس تحلیل کنیم که در آن I جریان گذرنده از مقاومت ۵۰۰ اهمی و V ولتاژ دوسر مقاومت ۱kΩ، متغیرهای خروجی مطلوب می‌باشند.



شکل *۱۲-۲ الف

متغیر کنترل کننده برای منبع جریان کنترل شده با جریان، یک منبع ولتاژ صفر ولتی است که به طور سری در شاخه‌ای که جریان کنترل کننده وجود دارد، قرار داده می‌شود. به علامت مثبت منبع ولتاژ صفر ولتی نسبت به جهت جریان i_x توجه کنید. این منبع را با **V2** نشان می‌دهیم. منبع ولتاژ صفر ولتی V3 برای در دسترس قرار دادن جریان مورد نظر **I به کار رفته است.** پس از شماره‌گذاری شاخه‌ها، مدار شکل (*۱۲-۲ ب) به دست می‌آید.



شکل *۱۲-۲ ب

دستورهای زیر ساختار مدار و مقدار هر عنصر را معرفی می‌نمایند. چون جهت i_x، **جهت گذرنده از منبع** نیست، بنابراین ناچار یک منبع دیگر تعریف کردیم.

```
A TYPICAL  EXAMPLE
V1      1      0      DC      10M
V2      1      2
R1      2      3      1K
F1      0      3      V2      2
E1      3      4      4       5      3
R2      4      5      500
V3      5      0
I1      0      4      DC      2E-3
.DC     V1     10M    10M     1
*THE CURRENT I IS I(V3)
*THE VOLTAGE V IS V(2, 3)
.PRINT      DC      I(V3)      V(2,3)
.END
```

با توجه به دستور DC. قرار داده شده دراین فایل، فقط مقدار متغیرهای مورد نظر چاپ می‌شود. بنابراین پس از اجرای این برنامه با اسپایس، جواب‌های زیر به دست می‌آیند:

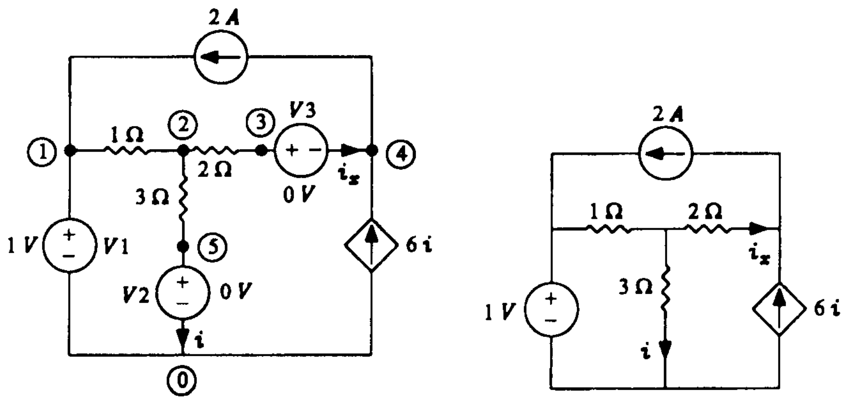
$$I(V3) = 2.900\ E-04$$

$$V(2,3) = -5.700\ E-01$$

مثال ۳ مدار شکل (*۱۲-۳ الف) را با استفاده از اسپایس حل کنید و i_x را به دست آورید.

با توجه به لزوم در اختیار داشتن جریان دو شاخه، دو منبع ولتاژ صفر ولتی متناظر آنها به مدار اضافه شده است. گره‌ها را به طور دلخواه شماره گذاری کرده‌ایم. مدار آمادهٔ تحلیل با اسپایس در شکل (*۱۲-۳ب) داده شده است. فایلی که این مدار را توصیف می‌کند، چنین است:

```
EXAMPLE 3
V1      1      0      DC      1
R1      1      2      1
R2      2      5      3
R3      2      3      2
I1      4      1      DC      2
V2      5      0
V3      3      4
F1      0      4      V2      6
.DC     V1     1      1       1
.PRINT       DC     I(V3)
.END
```



(الف) (ب)

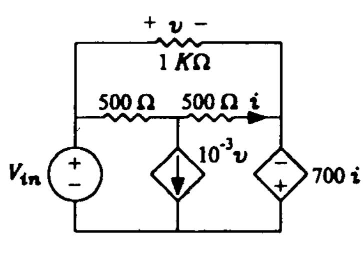
شکل *۱۲-۳ مثال ۳

جریان گذرنده از منبع ولتاژ صفر ولتی V2 متغیر کنترل کنندهٔ منبع جریان کنترل شده است. جریان گذرنده از منبع ولتاژ صفر ولتی V3 جریان مورد نظر i_x است. V1 از مقدار اولیهٔ ۱ ولت به مقدار نهایی ۱ ولت با نمو ۱ ولت برده می‌شود. می‌توانستیم این دستور را با دستور OP. که ولتاژ تمام گره‌ها و جریان تمام منابع ولتاژ را چاپ می‌کند، جایگزین کنیم. اما این دستور، بیشتر از آنچه که مورد نیاز است، خروجی می‌دهد. نتیجهٔ به دست آمده از اسپایس چنین است:

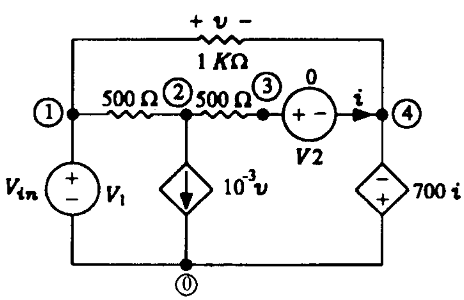
$$i_x = \mathrm{I(V3)} = -1.000$$

اگر مقدار منبع خاصی در یک مدار تغییر کند، می‌توان اثر تغییرات خروجی را به راحتی با اسپایس محاسبه کرد. برای انجام این‌کار مقدار منبع را در دامنهٔ مشخص شده، با استفاده از دستور DC. تغییر می‌دهیم. مثال بعدی این‌کار را نشان می‌دهد.

مثال ٤ در مدار شکل (*۱۲-۴ الف) ولتاژ خروجی v را وقتی که منبع ولتاژ ورودی v_{in} از ۱۰ - ولت تا ۳۰ + ولت تغییر می‌کند، به دست آورید.



شکل *۱۲-۴ الف

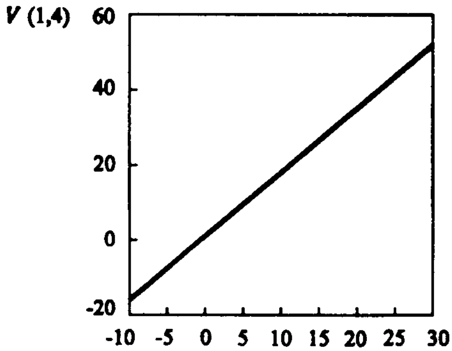


شکل *۱۲-۴ ب

برای مشخص کردن جریان کنترل کنندهٔ i از منبع ولتاژ صفر ولتی استفاده شده است. مدار مورد

تحلیل با اسپایس در شکل (*۱۲-۴ ب) داده شده است. فایلی که این مدار را توصیف می‌کند، چنین است:

```
EXAMPLE   4
V1     1     0     DC    1
R1     1     2     500
R2     2     3     500
R3     1     4     1K
V2     3     4
G1     2     0     1     4     1M
H1     0     4     V2    700
.DC    V1    -10   30    1
.PRINT  DC     V(1, 4)
.PLOT   DC     V(1, 4)
.END
```



شکل (*۱۲-۴ پ)

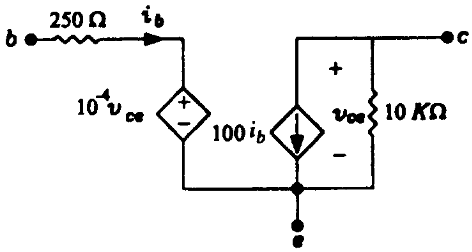
با استفاده از پروب PROBE موجود در اسپایس منحنی v به صورت نشان داده شده در شکل (*۱۲-۴ پ) رسم می‌شود. البته به دست آوردن این منحنی با دست خسته کننده است؛ لیکن اسپایس این کار را به سرعت انجام می‌دهد. دستور PRINT. تمام مقادیر ولتاژ خروجی را چاپ خواهد کرد.

تعیین مقاومت ورودی یک مدار به‌کمک اسپایس

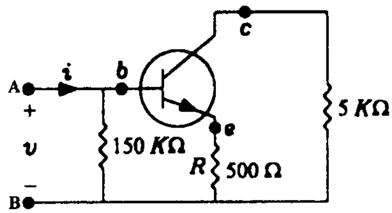
به طوری که می‌دانیم برای تعیین مقاومت ورودی یک مدار، یک منبع جریان آزمایشی I_T را در دوسر آن قرار داده، ولتاژ V_T دوسر منبع جریان را محاسبه می‌کنیم. نسبت $\frac{V_T}{I_T}$ مقاومت دیده شده در سرهای مدار را به دست می‌دهد. اگر مقدار I_T را برابر ۱ در نظر بگیریم، مقدار V_T همان مقاومت ورودی خواهد بود. مثال ۵ این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال ۵ مدار نشان داده شده در شکل (*۱۲-۵ الف) یک تقویت کنندهٔ ترانزیستوری بای‌پولار را نشان می‌دهد. مقاومت ورودی در سرهای A و B را حساب کنید.

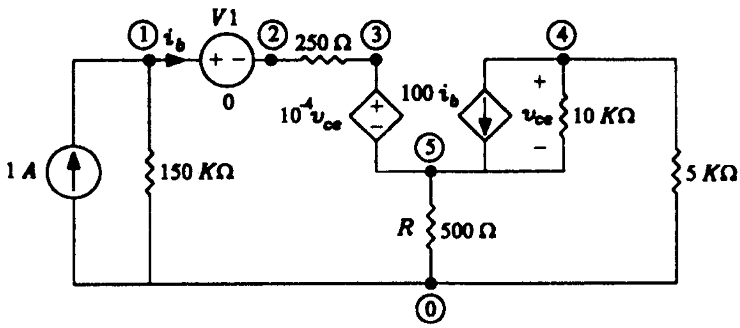
ابتدا ترانزیستور بای‌پولار را با مدل خطی سیگنال کوچک آن مطابق شکل (*۱۲-۵ ب) جایگزین می‌کنیم. مدار معادل ترانزیستور از دو منبع کنترل شده و دو مقاومت تشکیل می‌شود. جریان کنترل کنندهٔ منبع جریان کنترل شده، برابر i_b است. با جایگزینی مدار معادل ترانزیستور بای‌پولار در شکل (*۱۲-۵الف) و شماره گذاری گره‌ها و معرفی منبع ولتاژ صفر ولتی V1 برای تعیین جریان i_b ، مدار شکل (*۱۲-۵پ) را به دست می‌آوریم. فایلی که این مدار را توصیف می‌کند، چنین است:



(ب)



(الف)



(پ)

شکل *۱۲–۵ مثال ۵.

```
EXAMPLE 5
I1      0     1      DC     1
R1      1     0      150K
V1      1     2
R2      2     3      250
R3      4     5      10K
R4      4     0      5K
R5      5     0      500
E1      3     5      4      5      1E-4
F1      4     5      V1     100
.DC     I1    1      1      1
.PRINT        DC     V(1)
.END
```

خروجی حاصل از اجرای این برنامه، ولتاژ گره ① خواهد بود که همان مقاومت ورودی در سرهای مدار شکل (*۱۲–۵ الف) است که چنین است:

$$R_{eq} = V(1) = 27020\ \Omega$$

تبصره ۱۵ می‌توان از اسپایس برای انجام کارهای طراحی به صورت محاسبات تکراری استفاده کرد؛ مثلاً

فرض کنید می‌خواهیم در مدار شکل (*۱۲-۵ الف)، مقدار R را چنان تعیین کنیم که بـه ازای آن مـقاومت ورودی $R_{eq} = 5k\,\Omega$ باشد. با مراجعه به برنامهٔ بالا و کاهش R در هر تکرار، دنبالهٔ نتایج زیـر را بـه دست می‌آوریم:

مرحله	R	R_{eq}
1	500	2.702 E4
2	100	6.631 E3
3	50	3.505 E3
4	75	5.087 E3
5	74	5.025 E3
6	73	4.962 E3
7	73.5	4.994 E3

با انجام این تکرار به طور نسبتاً سریعی به مقدار $R = 73.5$ می‌رسیم، که مقدار $R_{eq} \cong 5\,k\,\Omega$ را بـه دست می‌دهد.

تبصرهٔ ۲ چون ولتاژ مدار باز میان هر دو گره دلخواه از هر مداری را می‌توان با استفاده از اسپایس تعیین کرد، و هم‌اکنون یاد گرفتیم که مقاومت دیده شده از هر دو سر هر مدار را نیز می‌توان با استفاده از اسپایس به دست آورد؛ بنابراین تعیین مدار معادل تونن دیده شده در هر دوسر دلخواه یک مدار به راحتی با استفاده از اسپایس انجام‌پذیر است. ضمن اینکه این کار را دستور دیگری به‌نام دستور TF. که هـم‌اکـنون شـرح داده خواهد شد، تعیین می‌کند.

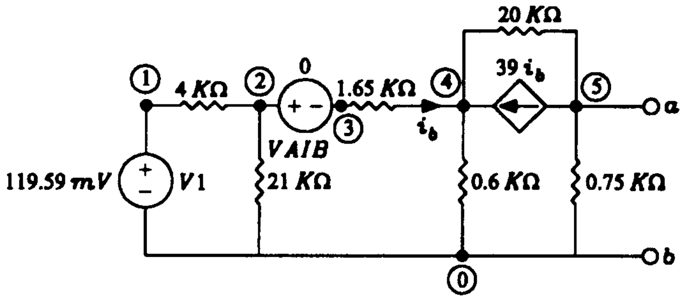
دستور کنترل TF.

منظور از TF تابع تبدیل یا Transfer Function است. این دستور نسبت متغیر خروجی به متغیر ورودی را به دست می‌دهد که به نام بهرهٔ تابع تبدیل گفته می‌شود. این دستور همچنین مقاومت ورودی نسبت بـه سرهای منبع ورودی، و مقاومت خروجی نسبت به سرهای عنصر خروجی را نیز به دست می‌دهد. شکـل کلی آن چنین است:

$$.\text{TF} \quad \underbrace{\text{OUTVAR}}_{\text{متغیر خروجی}} \quad \underbrace{\text{INSRC}}_{\text{منبع ورودی}}$$

با در اختیار داشتن ولتاژ خروجی و مقاومت در سرهای خروجی می‌توان از این دستور کنترل برای تعیین مدار معادل تونن نسبت به سرهای مشخص شده استفاده کرد.

مثال ۶ مدار معادل تونن دیده شده در سرهای a و b مدار نشان داده شده در شکل (*۱۲-۶) را با استفاده از دستور کنترل TF. تعیین کنید.



شکل *۱۲-۶ مثال ۶.

با معرفی منبع ولتاژ صفر ولتی VAIB و شماره‌گذاری گره‌ها، فایلی که این مدار را توصیف می‌کند چنین است:

```
Example 6 finding THEVENIN equivalent with spice.
V1     1        0     DC      119.59 E-3
R1     1        2     4k
R2     2        0     21k
R3     3        4     1.65k
R4     4        0     0.6k
R5     4        5     20k
R6     5        0     0.75k
F1     5        4     VAIB    39
VAIB   2        3     DC      0
.TF    V(5, 0)        V1
.END
```

خروجی اسپایس به صورت زیر خواهد بود.

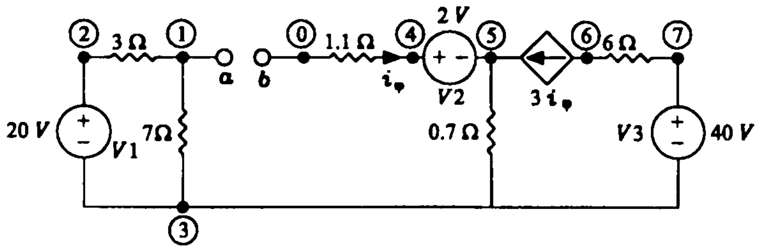
```
      NODE    VOLTAGE    NODE    VOLTAGE    NODE    VOLTAGE
       (1)     0.1196     (2)     0.0882     (3)     0.0882
       (4)     0.0822     (5)    -0.1000
**** SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
      V(5, 0)/V1 = -8.359 E-01
      INPUT RESISTANCE AT  V1 = 1.523E+04
      OUTPUT RESISTANCE AT V(5, 0) = 7.446 E+02
```

یعنی مدار معادل تونن به صورت $e_{oc} = -99.96$ و $R_{th} = 744.6\ \Omega$ به دست می‌آید.

مثال ۷ با استفاده از اسپایس مدار معادل تونن را نسبت به سرهای a و b در مدار شکل (*۱۲-۷) به دست آورید.

توجه کنید i_φ جریان گذرنده از منبع ولتاژ ثابت است و بنابراین لازم نیست منبع ولتاژی با مقدار صفر معرفی شود. همچنین توجه کنید که فقط یک شاخه به گره b وصل است. **اسپایس لازم دارد که حداقل**

دو شاخه به هر گرهی وصل شوند. برای رفع این مشکل دو کار می‌توان انجام داد. یکی اینکه مقاومتی با مقدار زیاد میان گره b و هر گره دیگر وصل شود؛ مثلاً با مقدار 10^6، دوم اینکه خازنی میان گره b و هر گره دیگر وصل شود. خازن در تحلیل dc مانند مدار باز عمل می‌کند. دراین مثال، مقاومت $10^6\Omega$ را میان گره b و گره ③ وصل می‌کنیم.



شکل *۱۲-۷ مثال ۷.

توجه کنید که ما گره b را به عنوان گره مبنا انتخاب کرده‌ایم. بنابراین ولتاژ تونن قسمتی از خروجی مدار است. با استفاده از منبع ولتاژ ۲ ولتی V2، برای اندازه‌گیری جریان i_φ و شماره‌گذاری گره‌ها فایلی که مدار را توصیف می‌کند، چنین است:

```
EXAMPLE 7 finding THEVENIN equivalent
R1    1        2    3
R2    1        3    7
V1    2        3    DC    20
R3    0        4    1.1
R4    0        3    1E6
V2    4        5    DC    2
R5    5        3    0.7
F1    6        5    V2    3
R6    6        7    6
V3    7        3    DC    40
.TF   V(1, 0)       V1
.END
```

خروجی اسپایس به صورت زیر خواهد بود:

```
NODE   VOLTAGE      NODE   VOLTAGE    NODE   VOLTAGE
 (1)   12.0000      (2)    18.0000    (3)    - 2.0000
 (4)   2.200 E - 06 (5)    - 2.0000   (6)    38.0000
 (7)   38.0000
**** SMALL-SIGNAL  CHARACTERISTICS
     V(1, 0)/V1 = 7.000 E - 01
     INPUT RESISTANCE AT V1 = 1.000 E+01
     OUTPUT RESISTANCE AT V(1, 0) = 6.0000 E+00
```

از این‌رو ولتاژ تونن، برابر ۱۴ ولت و مقاومت معادل تونن، ۶ اهم است.

دستور کنترل SENS.

حساسیت یک مفهوم مهم فیزیکی و مهندسی است که در بررسی و مقایسهٔ مدارها و سیستم‌ها می‌تواند نقش مهمی ایفا کند. در بسیاری از موارد روشهای مختلف طراحی به چند مدار متفاوت با مشخصه‌های خروجی یکسان منجر می‌شوند و یکی از مفاهیمی که در انتخاب یک طرح از میان چند طرح موجود مورد استفاده قرار می‌گیرد، مفهوم حساسیت است. منظور از حساسیت خروجی یک مدار نسبت به یک پارامتر، تعیین تغییرات خروجی به ازای تغییر جزیی آن پارامتر است.

دستور کنترل SENS. برای به دست آوردن حساسیتهای سیگنال کوچک dc هر متغیر خروجی مشخص نسبت به هر پارامتر مدار، به کار می‌رود. صورت کلی دستور تعیین حساسیت به کمک دستور کنترل SENS. چنین است:

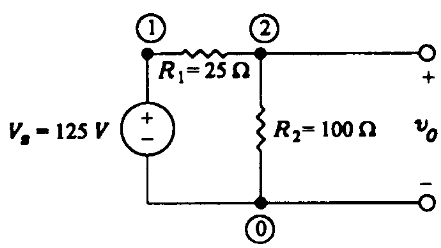
.SENS vname

که در آن vname نام متغیر مداری است (یا لیستی از نامهای متغیر مدار است) که نسبت به آن تحلیل حساسیت انجام می‌گیرد.

مثال ۸ مدار نشان داده شده در شکل (*۱۲-۸) یک تقسیم کنندهٔ ولتاژ است و می‌خواهیم حساسیت ولتاژ خروجی را نسبت به هر یک از پارامترهای مدار که همان مقاومتهای R_1 ، R_2 و منبع ولتاژ ورودی V_s هستند، تعیین کنیم.

پس از شماره گذاری گره‌ها فایلی که مدار را توصیف می‌کند، چنین است:

```
EXAMPLE OF SENSITIVITY  ANALYSIS
V1      1       0       DC      125
R1      1       2       25
R2      2       0       100
.SENS   V(2, 0)
.END
```



شکل *۱۲-۸ مثال ۸.

اسپایس مقادیر تحلیل dc و تحلیل حساسیت را باهم چاپ می‌کند.

DC SENSITIVITIES OF OUTPUT V(2 , 0)

Element name	*Element value*	*Element sensitivity (volts / unit)*	*Normalized sensitivity (volts / percent)*
R1	2.500 E 01	– 8.000 E – 01	–2.000 E – 01
R2	1.000 E 02	2.000 E – 01	2.000 E – 01
V1	1.250 E02	8.000 E – 01	1.000 E 00

ستون سوم نشان می‌دهد که اگر متغیر خاصی یک واحد تغییر کند، متغیر خروجی چقدر تغییر خواهد کرد. ستون چهارم نشان می‌دهد که اگر متغیر خاصی یک درصد تغییر کند، متغیر خروجی چند درصد تغییر خواهد کرد.

از تحلیل سادهٔ dc مدار به دست می‌آوریم: $v_{\circ} = V(2) = ۱۰۰$. این وقتی است که R1، R2 و V1 مقادیر نامی خود را بگیرند. از تحلیل داده‌های حساسیت، نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱ـ اگر R1 یک اهم اضافه شود، v_o به مقدار ۰٫۸ ولت کاهش می‌یابد؛ یعنی $v_o = ۹۹٫۲$.

۲ـ اگر R1 یک درصد اضافه شود، v_o به مقدار ۰٫۲ کاهش می‌یابد؛ یعنی $v_o = ۹۹٫۸$.

۳ـ اگر R2 به مقدار یک اهم اضافه شود، v_o به مقدار ۰٫۲ اضافه می‌شود؛ یعنی $v_o = ۱۰۰٫۲$.

۴ـ اگر R2 به مقدار یک درصد اضافه شود، v_o به مقدار ۰٫۲ اضافه می‌شود؛ یعنی $v_o = ۱۰۰٫۲$.

۵ـ اگر V1 به مقدار یک ولت اضافه شود، v_o به مقدار ۰٫۸ ولت اضافه می‌شود؛ یعنی $v_o = ۱۰۰٫۸$.

۶ـ اگر V1 به مقدار یک درصد اضافه شود، v_o به مقدار ۱ ولت اضافه می‌شود؛ یعنی $v_o = ۱۰۱$.

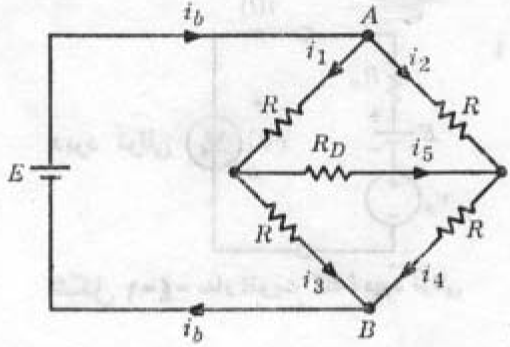
تبصره چون مدار خطی داریم **قضیهٔ جمع آثار** قابل اعمال است. بنابراین می‌توان اثرات همزمان آنها را با هم پیدا کرد. مثلاً اگر R1 به مقدار یک اهم افزایش و R2 به مقدار یک درصد کاهش و V1 به مقدار ۰٫۵ ولت افزایش یابد، اثرات آنها روی v_o چنین خواهد بود:

$$v_o = ۱۰۰ - ۰٫۸ - ۰٫۲ + ۰٫۴ = ۹۹٫۴$$

٤ – تجزیه و تحلیل سیگنال کوچک

چنانکه در بخش ۳ گفته شد، تجزیه و تحلیل مدارهای با مقاومتهای غیرخطی دشوار است. مشخصهٔ معادل اتصال سری ـ موازی مقاومتهای غیرخطی را به دست آوردیم و برای نشان دادن چگونگی محاسبهٔ تقسیم جریان در دو مقاومت غیرخطی موازی به معرفی یک مثال ساده پرداختیم. تجزیه و تحلیل کلی مدارهای ساخته شده از مقاومتهای غیرخطی از حدود برنامهٔ این کتاب خارج است. اگرچه در فصل ۱۸ بعضی حقایق اساسی مربوط به این مدارها پی‌ریزی خواهد شد.

یک فن ویژه و بسیار مهم در مهندسی، تجزیه و تحلیل سیگنال کوچک یک سیستم غیرخطی است. با یک مدار مقاومتی شامل یک دیود تونلی به تشریح ایدهٔ اساسی خواهیم پرداخت. در فصل ۱۷ هنگام بحث



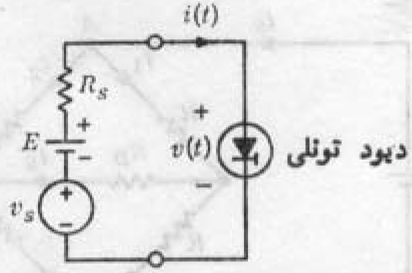
شکل ۶-۳- مثال ٤ : یک مدار پل متقارن .

٤- تجزیه تحلیل سیگنالهای کوچك

چنانکه در بخش پیش گفته شد، تجزیه وتحلیل مدارهای با مقاومت غیر خطی دشوار است. مشخصهٔ معادل اتصال سری ـ موازی مقاومتهای غیر خطی را بدست آوردیم و برای نشان دادن چگونگی محاسبهٔ توزیع جریان دومقاومت غیر خطی موازی به معرفی یک مثال ساده پرداختیم. تجزیه و تحلیل کلی مدارهای ساخته شده از مقاومتهای غیر خطی از حدود برنامهٔ این کتاب خارج است. اگرچه در فصل هیجدهم بعضی حقایق اساسی مربوط باین مدارها توسعه داده خواهد شد.

یک فن ویژه و بسیار مهم در مهندسی، تجزیه و تحلیل سیگنالهای کوچک یک سیستم غیر خطی است. با یک مدار مقاومتی شامل یک دیود تونلی به تشریح ایدهٔ اساسی خواهیم پرداخت. درفصل هفدهم هنگام بحث درمورد دوقطبی‌های غیر خطی، این مفهوم بیشتر مورد بحث قرار خواهد گرفت .

مثال مدار شکل(۱-٤)را درنظربگیرید که درآن یک دیود تونلی (یک مقاومت غیر خطی کنترل شده باولتاژ) بیک مقاومت خطی با مقاومت R_s و یک ورودی متشکل از یک منبع ولتاژ ثابت E و یک منبع **ولتاژ تغییر پذیر بازمان** $v_s(t)$ وصل شده است. در بحث کنونی فرض می‌شود که برای تمام مقادیر E ، t $|v_s(t)| \ll$ ، که بدینمعنی است که ولتاژ **تغییر پذیر با زمان** درتمام لحظات (از نظر قدر مطلق) بمراتب کوچکترازمنبع dc است. درکاربردهای عملی منبع تغییر پذیر با زمان متناظر با سیگنال



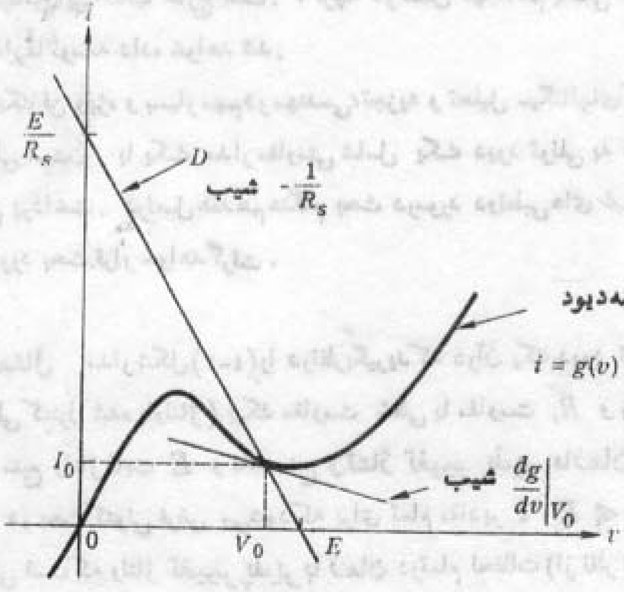
شکل ۱-٤- مدار تقویت کنندهٔ دیود تونلی

است و منبع dc بایاس نامیده میشود. مسأله تعیین ولتاژ $v(t)$ و جریان $i(t)$ برای دیود تونلی نشان‌داده شده در شکل (۱-٤) میباشد.

اکنون بااستفاده از قوانین کیرشف و معادلات شاخهٔ همهٔ عناصر در مدار، معادلات لازم را بدست میآوریم. ابتدا، KCL بیان میکند که از هرعنصر مدار شکل (۱-٤) جریان یکسان $i(t)$ میگذرد. سپس با بکار بردن KVL برای حلقه داریم :

$$E+v_s(t)=R_s i(t)+v(t) \quad \text{برای تمام مقادیر } t \qquad (٤-١)$$

گیریم که مشخصهٔ دیود تونلی با معادلهٔ زیر توصیف شود :



شکل ۲-٤- مشخصهٔ دیودتونلی و مشخصهٔ بقیه مدار

$$i = g(v) \qquad (۴-۲)$$

این مشخصهٔ درصفحه vi درشکل (۲-۴) رسم شده است با ترکیب (۱-۴) و (۲-۴) داریم :

$$E + v_s(t) = R_s g[v(t)] + v(t) \qquad \text{برای تمام مقادیر } t \qquad (۴-۳)$$

این معادله‌ایست که در آن $v(t)$ تنها مجهول است و چون برای تمام مقادیر t برقرار است ، پس معادله (۳-۴) بایستی برای هرمقدار t حل شود و تابع مجهول $v(\cdot)$ نقطه به نقطه پیدا شود.

قبل از اقدام به حل (۳-۴) از این حقیقت که ورودی مجموع دو جمله یعنی منبع dc با ولتاژ E و منبع تغییرپذیر بازمان $v_s(t)$ است استفاده میکنیم. با درنظر گرفتن فقط منبع dc درمرحلهٔ اول مسئله را میتوان آسانتر حل کرد. پس از پیدا کردن جواب dc مسأله ، منبع تغییر پذیر بازمان‌را درنظر میگیریم وتمامی مسأله را با روش سیگنال کوچک تجزیه تحلیل میکنیم.

«قدم اول» برای تمام مقادیر t، $v_s(t) = 0$ است. منبع ولتاژ نابسته v_s درشکل (۱-۴) یک مدار اتصال کوتاه میشود. KVL میدهد :

$$E - R_s i = v \qquad (۴-۴)$$

دیود تونلی با مشخصه‌اش مطابق شکل (۲-۴) توصیف میشود . دو معادلهٔ (۲-۴) و (۴-۴)دارای دومجهول v و i میباشد. مسأله را به روش ترسیمی حل میکنیم. درشکل (۲-۴) خط مستقیمی که با D نامگذاری شده ، مکان کلیهٔ نقاط (v , i) است که در معادله (۴-۴) صدق میکند. بطریق مشابه ، مشخصهٔ دیود تونلی مکان کلیهٔ نقاط (v , i) است که درمعادله (۲-۴) صدق میکند. بنابراین هرنقطه (v , i) که هم روی خط D و هم روی مشخصه دیود تونلی قراردارد ، دارای مختصات (v , i) است که درمعادلات (۲-۴) و (۴-۴) صدق میکند. بنابراین هرنقطه تقاطع خط D و مشخصهٔ‌دیود تونلی، یک‌جواب‌دستگاه توصیف شده بامعادلات (۲-۴) و (۴-۴) رامیدهد. درموقعیت کنونی ، چنانکه درشکل (۲-۴) نشان داده شده است‌فقط یک جواب (V_o , I_o) وجود دارد. بنابراین (V_o , I_o) درمعادلات (۲-۴) و (۴-۴) صادق است یعنی:

$$E - R_s I_\circ = V_\circ \qquad \text{(الف ۴ − ۵)}$$

و:

$$I_\circ = g(V_\circ) \qquad \text{(ب ۴ − ۵)}$$

$(V_\circ , I_\circ)$ «نقطه کار[1]» نامیده میشود. اکنون به حل کامل مسأله می‌پردازیم.

«قدم دوم» ولتاژ v_s متحد با صفر نیست. معادلاتیکه این وضع را توصیف‌میکنند عبارتند از:

$$E + v_s(t) - R_s i(t) = v(t) \qquad \text{برای تمام مقادیر } t \qquad \text{(الف ۴ − ۶)}$$

و

$$i(t) = g[v(t)] \qquad \text{برای تمام مقادیر } t \qquad \text{(ب ۴ − ۶)}$$

برای‌هرمقدار t ،مکان‌تمام نقاط $(v(t) , i(t))$ که در معادله(۶-۴ الف) صدق میکند خط مستقیمی موازی خط D در صفحهٔ vi شکل (۲-۴) است. اگر $v_s(t) > o$ باشداین خط بالای D و اگر $v_s(t) < o$ باشد پائین D است. مکان کلیه نقاط $(v(t) , i(t))$ که در معادله (۶-۴ ب) صدق میکنند مشخصه دیود تونلی است که برحسب زمان ثابت باقی میماند. بنابراین هرنقطه $(v(t) , i(t))$ که هم روی خط مستقیم و هم روی مشخصه قرار دارد در(۶-۴ الف) و (۶-۴ ب) صدق میکند. بطور خلاصه، نقطه تقاطع جواب را مشخص میکند. بنابراین ،معادلات (۶-۴) را میتوان همواره بروش ترسیمی حل کرد.

ما فرض کرده‌ایم که برای تمام مقادیر t ، $E \gg | v_s(t) |$. روش تجزیه و تحلیل سیگنال کوچک که یک‌روش‌حل تقریبی است ، تا زمانی معتبر است که $| v_s(t) |$ کوچک باشد. قدم اول نوشتن جواب $(v(t) ، i(t))$ بصورت مجموع دو جمله است. بنابراین :

$$v(t) = V_\circ + v_1(t) \qquad \text{(الف ۴ − ۷)}$$

و:

$$i(t) = I_\circ + i_1(t) \qquad \text{(ب ۴ − ۷)}$$

توجه‌داشته باشید که $(V_\circ , I_\circ)$ نقطه کار است یعنی جواب بازاء $v_s(t) = o$. چون $v_s(t)$ کوچک فرض شده است جواب $(v(t) , i(t))$ در نزدیکی $(V_\circ , I_\circ)$ قرار دارد

1- Operating Point

بنابراین $v_1(t)$ و $i_1(t)$ را میتوان بصورت یک انحراف[۱] در جواب dc، $(V_\circ , I_\circ)$ درنظر گرفت. این انحراف از منبع سیگنال کوچک $v_s(t)$ ناشی میشود. حال $v_1(t)$ و $i_1(t)$ را برای تمام مقادیر t تعیین میکنیم. ابتدا مشخصه دیود تونلی $i=g(v)$ را درنظر بگیرید. بااستفاده ازمعادله (۴-۷ الف) و (ب) داریم:

$$I_\circ+i_1(t)=g[V_\circ+v_1(t)] \tag{۴-۸}$$

چون بنابه فرض $v_1(t)$ کوچک است میتوان طرف راست معادله (۴-۸) را باسری تیلور[۲] بسط داد و فقط دو جملهٔ اول را بصورت یک تقریب درنظر گرفت. بنابراین:

$$I_\circ+i_1(t)\approx g(V_\circ)+\left.\frac{dg}{dv}\right|_{V_\circ}v_1(t) \tag{۴-۹}$$

با جایگزینی (۴-۵ ب) در (۴-۹)، یک معادلهٔ ساده برای $i_1(t)$ و $v_1(t)$ بدست میآوریم بنابراین:

$$i_1(t)\approx\left.\frac{dg}{dv}\right|_{V_\circ}v_1(t) \tag{۴-۱۰}$$

جملهٔ $\left.\frac{dg}{dv}\right|_{V_\circ}$ شیب منحنی مشخصه دیود تونلی در نقطه کار $(V_\circ , I_\circ)$ میباشد، همانطورکه درشکل (۴-۲) نشان داده شده است. گیریم که چنین نشان دهیم:

$$\left.\frac{dg}{dv}\right|_{V_\circ}\triangleq G=\frac{1}{R} \tag{۴-۱۱}$$

و G «را رسانائی سیگنال کوچک دیود تونلی درنقطه کار $(V_\circ , I_\circ)$ بنامیم». توجه داشته باشید که G «منفی» است. بنابراین درمورد منبع سیگنال کوچک v_s دیود تونلی یک مقاومت خطی اکتیو[۳] است چون تا آنجاکه v_s مورد نظر است مشخصهٔ مقاومتی دیود تونلی دارای یک «مبداء» در $(V_\circ , I_\circ)$ است و مشخصه درحوالی $(V_\circ , I_\circ)$ مشخصه یک مقاومت خطی با مقاومت منفی است. بنابراین:

$$i_1(t)=Gv_1(t)\quad \text{یا}\quad v_1(t)=Ri_1(t) \tag{۴-۱۲}$$

۱- Perturbation ۲- Taylor

۳- Active

به منظور محاسبه $v_1(t)$ و $i_1(t)$ ، ابتدا باید به معادلهٔ اصلی KVL یعنی معادله (٤-٦ الف) ، بازگردیم و آنرا با معادلات (٤-٧ الف) و (٤-٧ ب) ترکیب کنیم دراین صورت بدست میآوریم.

$$E+v_s(t)-R_s[I_\circ+i_1(t)]=V_\circ+v_1(t) \qquad (٤-١٢)$$

بااستفاده از اطلاعات حاصل از (٤-٥ الف) که $I_\circ$ و $V_\circ$ را بهم مربوط میسازد معادله زیر که $i_1(t)$ و $v_1(t)$ را بهم ربط میدهد بدست میآید :

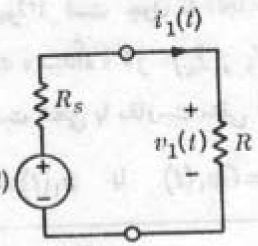
$$v_s(t)-R_si_1(t)=v_1(t) \qquad (٤-١٤)$$

معادلات (٤-١٢) و (٤-١٤) یک دستگاه دو معادله «خطی» جبری با دو مجهول $v_1(t)$ و $i_1(t)$ تشکیل میدهند و بسادگی حل میگردند. چون G در (٤-١٢) یک مقدار ثابت است، (٤-١٢) معادله شاخهٔ یک مقاومت خطی تغییر ناپذیر با زمان (اکتیو) را توصیف میکند. معادله (٤-١٤) بسادگی معادله KVL را برای مدار نشان داده شده در شکل (٤-٣) نشان میدهد. این مدار «مدار معادل سیگنال کوچک» [در اطراف نقطه کار $(V_\circ , I_\circ)$] مدار دیود تونلی شکل (٤-١) نامیده میشود. از (٤-١٢) و (٤-١٤) بسادگی جواب را محاسبه میکنیم.

$$i_1(t)=\frac{v_s(t)}{R_s+R} \qquad (٤-١٥)$$

و :

$$v_1(t)=Ri_1(t)=\frac{Rv_s(t)}{R_s+R} \qquad (٤-١٦)$$



شکل ٣-٤- مدار معادل سیگنال کوچک

در موقعیت کنونی $R=\frac{1}{G}$ و G منفی است. از اینرو باانتخاب مناسب R_s ، میتوان $v_1(t)$ رابسیار بزرگتراز $v_s(t)$ ساخت. درآنصورت‌ولتاژ متغیر $v_1(t)$ در دو سر دیود بسیار بزرگتر از ولتاژ وارد شده $v_s(t)$ است. چون جریانهای تغییر پذیر با زمان درمنبع ولتاژ v_s و مقاومت R یکسانند ، قدرت سیگنالی که به مقاومت داده شده تقویت گردیده است. درواقع مدار شکل(۱-٤) یک تقویت کننده دیود تونلی ساده است. منبع dc و مقاومت R_s که «مدار با یاس» را تشکیل میدهند نقطه کار (V_0 , I_0) را طبق معادلات (٥-٤ الف) و (٥-٤ ب) تعیین میکنند. شیب مشخصه دیود تونلی در نقطه کار یعنی رسانائی معادل سیگنال کوچکGومقدار R_sضریب‌تقویت تقویت کننده یعنی $\frac{R}{R+R_s}$ را تعیین میکنند.

البته تجزیه و تحلیل فوق ، چون ازکلیه عناصر پارازیتی (مانند خازن پارازیت) دیود تونلی صرفنظر گردید بسیارساده شده است. درهرحال،باین ترتیب چگونگی کاربرد قوانین اساسی در حل بعضی مسائل جالب تشریح میگردد.

۵ مدارهای با خازنها یا سلفها

اتصالهای سری وموازی‌تنها خازن‌هاو یا تنها سلف‌ها را میتوان بروشی مشابه‌اتصال مقاومتها بررسی کرد. برای سادگی ، این واقعیت را برای حالت خطی تغییر ناپذیر بازمان بررسی خواهیم کرد.

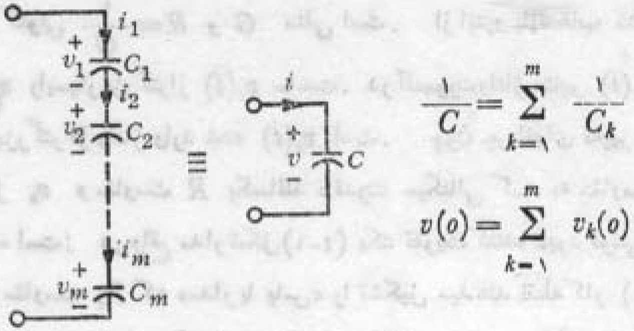
۱-۵- اتصال سری خازنها

اتصال سری خازنها را مطابق‌شکل (۱-٥)درنظر بگیرید. مشخص سازی شاخه‌ای خازنهای خطی تغییر ناپذیر با زمان عبارتست از:

$$v_k(t)=v_k(o)+\frac{1}{C_k}\int_o^t i_k(t')dt' \qquad (٥-١)$$

با بکار بردن KCL در همه گره‌ها بدست میآوریم:

$$i_k(t)=i(t) \qquad k=1 , 2 , \ldots , m \qquad (٥-٢)$$



شکل ۱-۵- اتصال سری خازنهای خطی

بااستفاده از KVL داریم :

$$v(t)=\sum_{k=1}^{m}v_k(t) \qquad (۵-۳)$$

در لحظه $t=0$:

$$v(o)=\sum_{k=1}^{m}v_k(o) \qquad (۵-۴)$$

با ترکیب معادلات (۵-۱) تا (۵-۴) بدست میآوریم :

$$v(t)=v(o)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{C_k}\int_{o}^{t}i(t')dt' \qquad (۵-۵)$$

بنابراین خازن معادل بصورت زیر داده میشود :

$$\frac{1}{C}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{C_k} \qquad (۵-۶)$$

بنابراین بیان میکنیم که «اتصال سری m خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان هریک با ظرفیت C_k و ولتاژ اولیه $v_k(o)$، معادل با یک خازن‌خطی تغییر ناپذیر با زمان باظرفیت C است که درمعادله (۵-۶) داده شده و ولتاژ اولیه آن چنین است» :

$$v(o)=\sum_{k=1}^{m} v_k(o) \qquad (\text{۵}-\text{۷})$$

اگر بجای ظرفیت، الاستانس[1] یعنی $S_k=\frac{1}{C_k}$ را بکار بریم ، دراینصورت معادلهٔ (۵-۶) چنین میشود :

$$\boxed{S=\sum_{k=1}^{m} S_k} \qquad (\text{۵}-\text{۸})$$

این بدینمعنی است که الاستانس خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان که معادل اتصال سری m خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان با الاستانسهای S_k ، $k=1, 2, \ldots, m$ است برابر مجموع m الاستانس میباشد. بنابراین الاستانس برای خازن ، نقش مقاومت را برای یک مقاومت بازی میکند.

تمرین - انرژی کل ذخیره شده در خازنها را برای اتصال سری حساب کنید و آنرا با انرژی ذخیره شده در خازن معادل مقایسه کنید :

۵-۲ اتصال موازی خازنها

در مورد اتصال موازی m خازن باید فرض کنیم که همهٔ خازنها دارای ولتاژ اولیه یکسان میباشند. زیرا درغیر اینصورت KVL در لحظهٔ $t=o$ نقض میشود. بسادگی میتوان نشان داد که در مورد اتصال موازی m خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان با ولتاژ اولیه یکسان $v_k(o)$ ، خازن معادل برابر است با :

$$\boxed{C=\sum_{k=1}^{m} C_k} \qquad (\text{۵}-\text{۹})$$

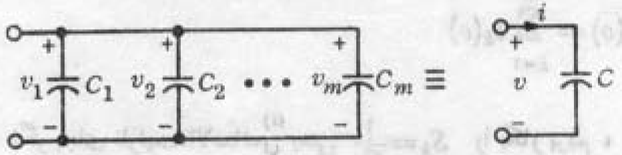
و :

$$v(o)=v_k(o) \qquad (\text{۵}-\text{۱۰})$$

این مطلب درشکل (۵-۲) نشان داده شده است.

مثال - فرض کنید اتصال موازی دوخازن خطی تغییر ناپذیر با زمان را با ولتاژهای

۱- Elastance



$$C=\sum_{k=1}^{m} C_k$$
$$v(o)=v_k(o)$$
$$k=1,2,\cdots,m$$

شکل ۲-۵- اتصال موازی خازنهای خطی

متفاوت درنظر میگیریم. در شکل (۳-۵) خازن ۱ دارای ظرفیت C_1 و ولتاژ V_1 و خازن ۲ دارای ظرفیت C_2 و ولتاژ V_2 است. در لحظه $t=o$ کلید بسته میشود بطوریکه دوخازن بطورموازی بهم وصل میشوند. بلافاصله پس از بستن کلید، درمورد ولتاژ دوسراتصال موازی چه میتوان گفت ؟

ابتدا از (۹-۵) میدانیم که اتصال موازی دارای یک ظرفیت معادل میباشد.

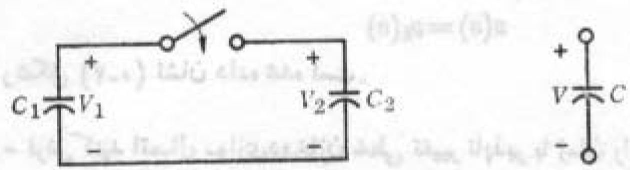
$$C=C_1+C_2 \tag{۵-۱۱}$$

در لحظه $t=o-$ (بلافاصله پیش از بسته شدن کلید) بار ذخیره شده در دو خازن عبارتست از:

$$Q(o-)=Q_1(o-)+Q_2(o-) \tag{۵-۱۲}$$
$$=C_1V_1+C_2V_2$$

چون اصل بقاء بار الکتریکی یک اصل اساسی فیزیکی است. پس در لحظه $t=o+$ (بلافاصله پس‌از بسته شدن کلید) داریم:

$$Q(o+)=Q\ (o-) \tag{۵-۱۳}$$



شکل ۳-۵- اتصال موازی دو خازن باولتاژهای متفاوت

ازروابط (۵-۱۱) تا (۵-۱۳) میتوان ولتاژ جدید دو سر اتصال موازی خازنها را پیدا کرد. گیریم ولتاژ جدید V باشد، پس :

$$CV=C_1V_1+C_2V_2$$

یا :

$$\boxed{V=\frac{C_1V_1+C_2V_2}{C_1+C_2}} \qquad (۵-۱۴)$$

از نظر فیزیکی این پدیده رامیتوان چنین تشریح کرد: فرض کنید که V_1 بزرگتر از V_2 و C_1 برابر C_2 باشد، بنابراین در لحظهٔ $t=o-$ بار $Q_1(o-)$ بزرگتر از $Q_2(o-)$ است. در $t=o$ ، لحظه‌ایکه کلید بسته میشود ، آناً مقداری بار از خازن اول به خازن دوم میرود این مطلب بیان میدارد که در $t=o$ یک ضربه جریان از خازن ۱ به خازن ۲ جاری میشود. در نتیجه در $t=o+$ ولتاژ دوسر دو خازن یکسان شده به مقدارمتوسط V که اصل بقاء بار ایجاب میکند میرسد.

این پدیده مشابه برخورد دوذرهٔ باجرمهای متفاوت m_1 و m_2 و به ترتیب باسرعتهای v_1 و v_2 میباشد. پیش از برخورد، مقدار حرکت[1] $m_1v_1+m_2v_2$ است و پس از برخورد، مقدار حرکت $(m_1+m_2)v$ است. بنابه اصل بقای مقدار حرکت، سرعت v پس از برخورد بشکل زیر داده میشود.

$$v=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$$

این معادله نظیر معادلهٔ (۵-۱۴) است.

تمرین انرژی کل ذخیره شده در خازنها را پیش از بسته شدن کلید و پس ازبسته شدن کلید حساب کنید. اگر مقادیر دو انرژی یکی نیستند تفاوت انرژی کجا رفته است؟ این سئوال پس از مطالعهٔ فصل ۴ روشن خواهد شد.

۵-۳ اتصال سری سلفها

اتصال سری m سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان در شکل (۵-۴) نشان داده شده

۱ - Momentum

است. گیریم سلف‌ها بصورت زیر مشخص شده باشند :

$$v_k = L_k \frac{d}{dt} i_k \qquad k = ۱, ۲, \ldots, m \qquad (۵-۱۵)$$

وگیریم جریان اولیه $i_k(o)$ باشد. بااستفاده از KCL در تمام گره‌ها داریم :

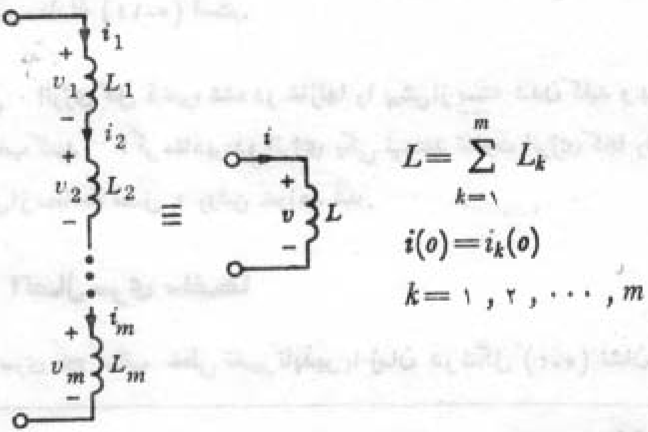
$$i = i_k \qquad k = ۱, ۲, \ldots, m \qquad (۵-۱۶)$$

بنابراین در $t=o$ ، $i(o)=i_k(o)$ ، $k=۱, ۲, \ldots, m$ ، یعنی KCL لازم میداردکه دراتصال سری m سلف ، همهٔ مقادیر اولیهٔ جریانها در داخل سلف‌ها یکسان باشند. بااستفاده از KVL بدست میاوریم :

$$v = \sum_{k=۱}^{m} v_k \qquad (۵-۱۷)$$

با ترکیب معادلات (۵-۱۵) تا (۵-۱۷) داریم :

$$\boxed{v = \sum_{k=۱}^{m} L_k \frac{di}{dt}} \qquad (۵-۱۸)$$



شکل ٤-۵- اتصال سری سلف‌های خطی

بنابراین اندوکتانس سلف معادل بصورت زیر داده میشود :

$$L = \sum_{k=1}^{m} L_k \qquad (۵-۱۹)$$

پس نتیجه میگیریم که «اتصال سری m سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان ، هریک با اندوکتانس L_k و جریان اولیه $i(o)$ ، معادل یک سلف تنها با اندوکتانس $L = \sum_{k=1}^{m} L_k$، با همان‌جریان اولیه $i(o)$ است».

۵-٤ اتصال موازی سلف‌ها

بروش مشابهی میتوان‌اتصال موازی سلف های خطی تغییر ناپذیر بازمان نشان داده شده در شکل (۵-۵) را پیدا کرد. نتیجه بسادگی با معادلات زیر بیان میشود.

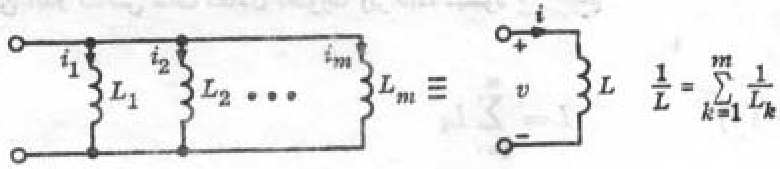
$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{L_k} \qquad (۵-۲۰)$$

و :

$$i(o) = \sum_{k=1}^{m} i_k(o) \qquad (۵-۲۱)$$

تبصره ۱- اگراندوکتانس معکوس $\Gamma_k \triangleq \frac{1}{L_k}$ ، $k = 1, 2, \ldots, m$ را تعریف کنیم رابطه (۵-۲۰) بیان میکند که اندوکتانس معکوس معادل Γ ، m سلف موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان،هریک با اندوکتانس معکوس Γ_k ، برابر مجموع m اندوکتانس معکوس میباشد بنابراین :

$$\boxed{\Gamma = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_k} \qquad (۵-۲۲)$$



شکل ۵-۵- اتصال موازی سلف‌ها

بنابراین اندوکتانس معکوس، همان نقش رسانائی برای یک مقاومت را ، برای یک سلف بازی میکند.

تبصره ۲- درمورد اتصال سلف‌ها،متناظر اصل بقاء بار ، اصل بقاء شار(۱) میباشد برای سلف‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان،شارکلی در m سلف عبارتست از :

$$\boxed{\Phi=\sum_{k=1}^{m} L_k I_k} \qquad (۵-۲۳)$$

که درآن L_k و I_k به ترتیب اندوکتانس و جریان لحظه‌ای سلف k ام میباشند.

خلاصه

- در اتصال سری عناصر ، جریان درداخل همهٔ عناصریکسان است. ولتاژدو سر اتصال سری برابر با مجموع ولتاژهای دو سر هریک از عناصر است.
- دراتصال موازی عناصر ، ولتاژ دو سرهمهٔ عناصر یکسان است. جریان داخل اتصال موازی برابر با مجموع جریانهای داخل هریک از عناصر است.
- جدول (۱-۳) فرمولهای اتصالات سری و موازی را برای مقاومتها ، خازنها و سلف‌های خطی خلاصه میکند.

۱- Flux

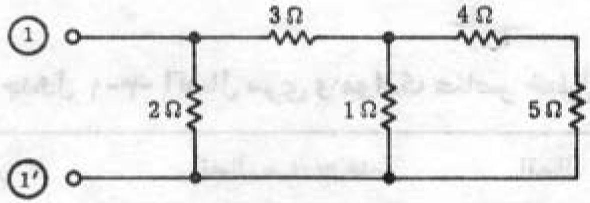
جدول ۱-۳- اتصال سری و موازی عناصر خطی

نوع عنصر	اتصال سری m عنصر	اتصال موازی m عنصر
مقامتها		
مقاومت $=R$	$R=\sum_{k=1}^{m} R_k$	$G=\sum_{k=1}^{m} G_k$
رسانائی $=G$		
خازنها		
ظرفیت $=C$	$S=\sum_{k=1}^{m} S_k$	$C=\sum_{k=1}^{m} C_k$
ظرفیت معکوس $=S$		
سلف‌ها		
اندوکتانس $=L$	$L=\sum_{k=1}^{m} L_k$	$\Gamma=\sum_{k=1}^{m} \Gamma_k$
اندوکتانس معکوس $=\Gamma$		

مسائل

۱- اتصال سری - موازی مقاومتهای خطی مدار نردبانی نشان‌داده شده در شکل (مسأله ۱-۳) شامل مقاومتهای خطی مشخص شده در شکل میباشد. مقاومت یک‌قطبی دیده شده در سرهای ❶ و ❶' چقدر است؟

۲- تجزیه و تحلیل مدارهای خطی مقاومتی یک منبع ولتاژ ثابت ۱۰ ولت به یک قطبی شکل (مسأله ۱-۳) اعمال میشود کلیه جریانهای شاخه را تعیین کنید.



شکل (مسأله ۱-۳)

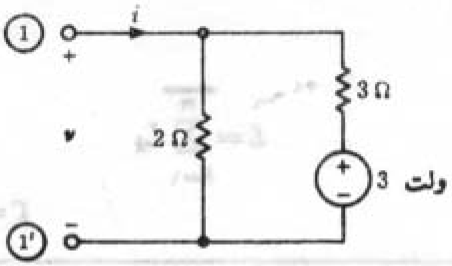
۳- مشخص سازی و مدارهای معادل یک قطبی‌های مقاومتی برای مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۳-۳) :

الف ـ مشخصهٔ یک قطبی ′۱۱ ، یعنی معادله‌ایکه یک قطبی را برحسب ولتاژ قطب و جریان قطب توصیف میکند تعیین کنید.

ب ـ مشخصه را در صفحهٔ $v\,i$ رسم کنید.

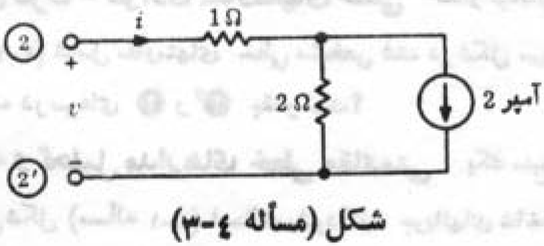
پ - مدار معادل تونن را رسم کنید.

ت ـ مدار معادل نرتن را رسم کنید.



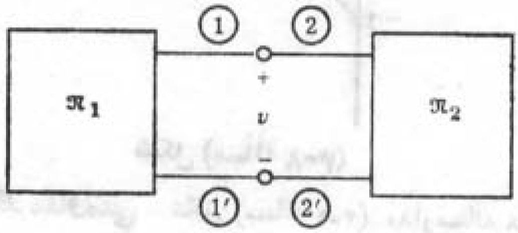
شکل (مسأله ۳-۳)

٤- یک قطبی مقاومتی برای مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ٤-۳) قسمتهای (الف) ، (ب) ، (پ) و (ت) مسأله ۳ را تکرار کنید.



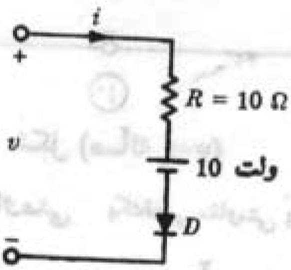
شکل (مسأله ٤-۳)

۵- حل مدار مقاومتی اگر دو یک قطبی در شکلهای (مسأله ۳-۳) و (مسأله ۳-۴) پشت به پشت ، همانطورکه در شکل (۳-۵) نشان داده شده ، بهم وصل شوند ولتاژ v حاصل چقدر است؟ اگر سر ′۲ به سر ۱ و سر ′۱ به سر ۲ وصل گردد، ولتاژ v چقدر است؟



شکل (مسأله ۵-۳)

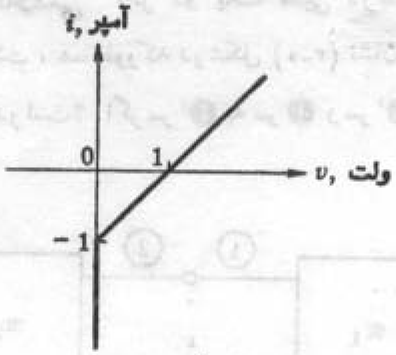
۶- مدار مقاومت منبع ، دیود مشخصه $v\,i$ مدارنشان‌داده شده درشکل (مسأله ۶-۳) راکه درآن D یک دیود ایده‌آل است ، بطور ترسیمی و تحلیلی توصیف کنید.



شکل (مسأله ۶-۳)

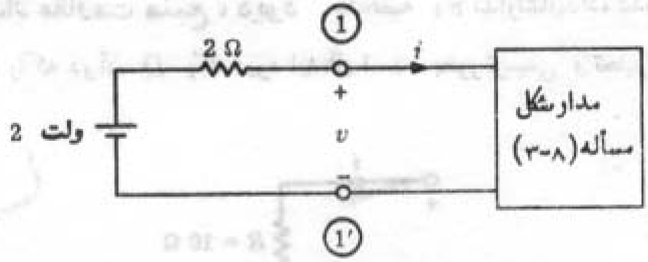
۷- مدار دیودی فرض کنید که اتصال دیود D در شکل (مسأله ۶-۳) معکوس شود. مشخصهٔ مدار جدید را بطور تحلیلی و ترسیمی توصیف کنید.

۸- ترکیب مدارهای مقاومتی مداری راکه از اتصال موازی یک‌مقاومت، یک دیود ایده‌آل و یک منبع جریان تشکیل شده و باید دارای مشخصهٔ $v\,i$ نشان داده شده در شکل (مسأله ۸-۳) باشد پیدا کنید.



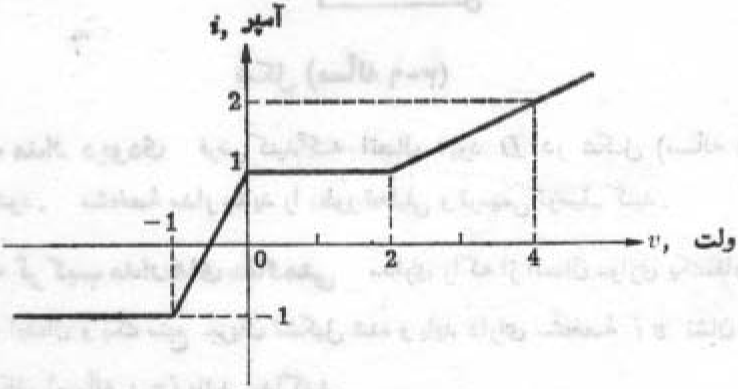
شکل (مسأله ۸-۳)

۹- حل مدار مقاومتی شکل (مسأله ۹-۳) ، مدار مسأله ۸ را نشان میدهد که به اتصال سری یک منبع ولتاژ ثابت ۲ ولتی و یک مقاومت ۲ اهمی وصل شده است جریان درون منبع ولتاژ و توان تحویل داده شده به مدار را تعیین کنید.



شکل (مسأله ۹-۳)

۱۰- ترکیب مدار مقاومتی یک‌قطبی مقاومتی با مقاومتهای خطی، دیودهای



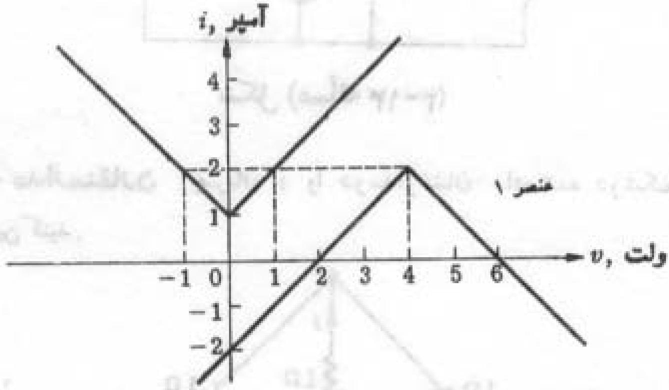
شکل (مسأله ۱۰-۳)

ایده‌آل و منابع تا بسته طوری طرح کنید که دارای مشخصهٔ vi نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۰-۳) باشد.

۱۱- اتصال سری و موازی مقاومتهای غیر خطی فرض کنید که دو عنصر مقاومتی که مشخصهٔ vi آنها در شکل (مسأله ۱۱-۳) نشان داده شده است داده شده باشند.

الف - مشخصهٔ vi اتصال سری این دو عنصر را پیدا کنید.

ب - مشخصهٔ vi اتصال موازی این دو عنصر را پیدا کنید.



شکل (مسأله ۱۱-۳)

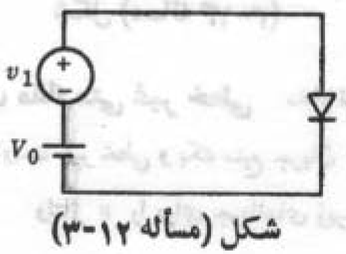
۱۲- مدارهای معادل سیگنال کوچک در مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۲-۳) ، دیود ژرمانیوم دارای یک مشخصهٔ vi بصورت زیر است :

$$i=I_s(e^{qv/kT}-۱) \qquad I_s=۰٫۰۰۰\ mA \quad \text{و} \quad kT/q \approx ۰/۰۲۶ \text{ ولت}$$

منبع سیگنال v_1 یک سینوسوئید است

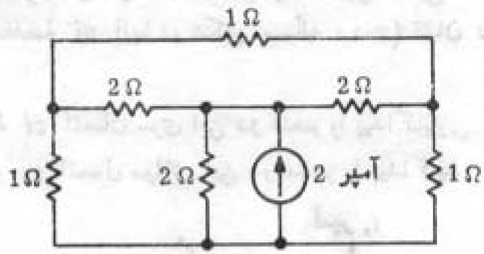
$$v_1=۱۰^{-۳}\sin ۲\pi ۶۰ t \quad \text{ولت}$$

مدارهای معادل‌سیگنال کوچک‌رابترتیب برای‌ولتاژهای بایاس $V_0=$ ۰٫۱ , ۰ , ۰٫۱— ولت تعیین کنید.



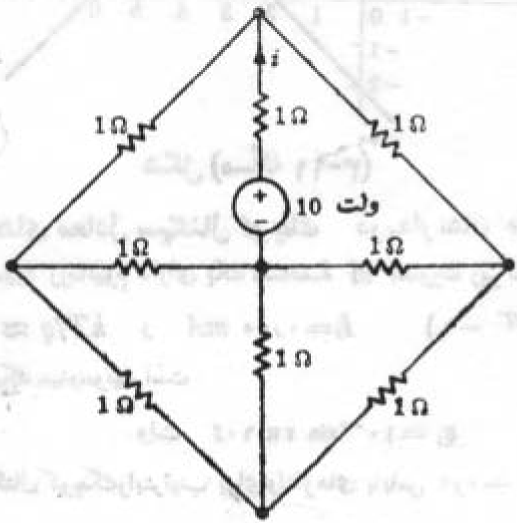
شکل (مسأله ۱۲-۳)

۱۳- مدار متقارن برای مدار نشان‌داده شده در شکل (مسأله ۱۳-۳) جریانها را در همهٔ مقاومتها تعیین کنید. (راهنمائی: آیا میتوانید حل این مدار را با استفاده از تقارن پیدا کنید؟)



شکل (مسأله ۱۳-۳)

۱٤- مدار متقارن جریان i را در مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۱٤-۳) تعیین کنید.



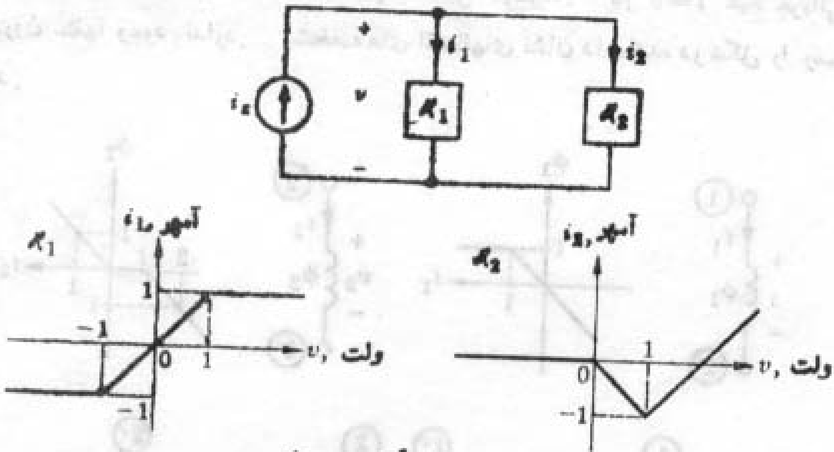
شکل (مسأله ۱۴-۳)

۱۵- حل مدارهای مقاومتی غیر خطی مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۵-۳) شامل دو مقاومت غیر خطی و یک منبع جریان است مشخصهٔ دو مقاومت در شکل نشان داده شده‌اند. ولتاژ v را برای جریانهای زیر تعیین کنید.

الف ـ آمپر $i_s = 1$

ب ـ آمپر $i_s = 10$

پ ـ آمپر $i_s = 2\cos t$



شکل (مسأله ۱۵-۳)

۱۶- حل مدار مقاومتی غیر خطی در مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۵-۳) منبع جریان i_s را با اتصال سری یک منبع ولتاژ v_s و یک مقاومت خطی با مقاومت ۲ اهم جانشین کنید. ولتاژ v را برای مقادیر زیر تعیین کنید.

الف ـ ولت $v_s = 1$

ب ـ ولت $v_s = 10$

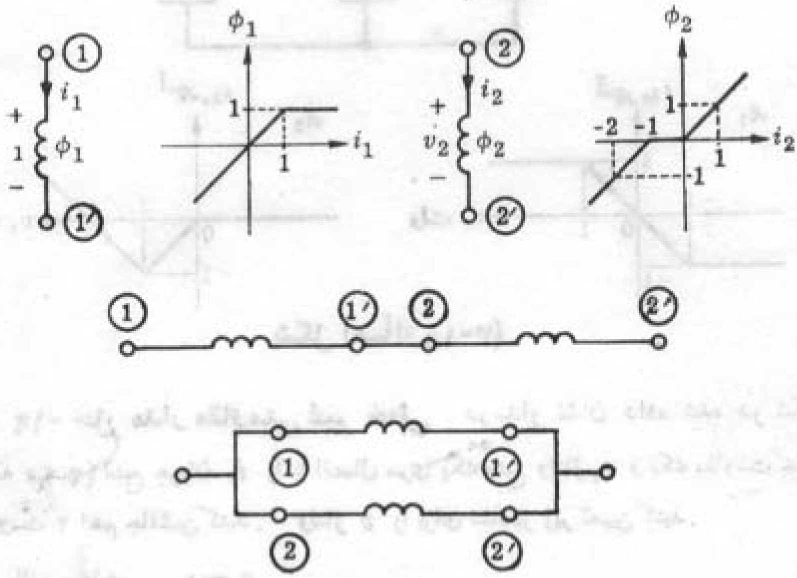
پ ـ ولت $v_s = 2\cos t$

۱۷- قطع و وصل در خازنها سه خازن مجزای خطی تغییر ناپذیر با زمان به ظرفیت‌های ۱،۲و۳ فاراد و ولتاژهای اولیه بترتیب ۱،۲و۳ ولت داده شده‌اند. سه خازن با کلید زنی لحظه‌ای، همزمان بطور موازی وصل میشوند. ولتاژ حاصل دوسر اتصال موازی چقدر است؟ انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازنها را قبل از اتصال و بعد از اتصال حساب کنید.

۱۸- قطع و وصل در سلف‌ها دو سلف خطی با اندوکتانس های ۱و۲ هانری و جریانهای بترتیب ۲و۱ آمپر بصورت یک اتصال سری درآورده میشوند. جریان حاصل

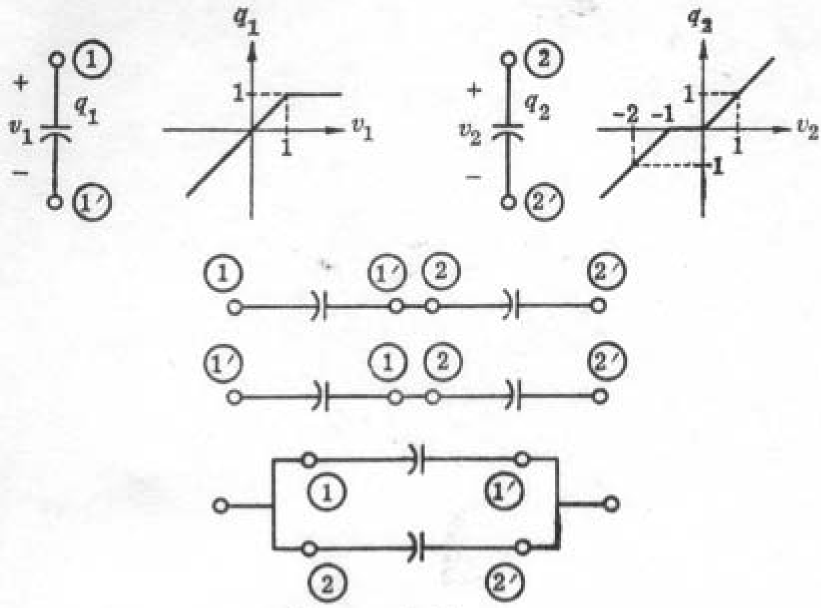
چقدر است ؟ انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سلف‌ها را قبل‌از اتصال و بعداز اتصال حساب کنید.

۱۹- اتصال سلفهای غیر خطی مشخصه‌های دو سلف‌غیرخطی با منحنی‌های Φi متناظرشان طبق شکل (مسأله ۱۹-۳) مشخص میشوند. در $t=0$ هیچ جریانی در درون سلفها وجود ندارد. مشخصه های اتصالهای نشان داده شده در شکل را رسم کنید.



شکل (مسأله ۱۹-۳)

۲۰- اتصال خازنهای غیر خطی مشخصه‌های دوخازن غیر خطی با منحنی qv متناظرشان همانطورکه درشکل (مسأله ۲۰-۳) نشان داده شده مشخص میشوند. در $t=0$ بار روی هریک از خازنها صفر است. مشخصه‌های اتصالهای نشان داده شده درشکل را بکشید. انرژی ذخیره شده در هراتصال را وقتیکه ولتاژ دو سر اتصال ۱ — ، ۱و۲ ولت است تعیین کنید.



شکل (مسأله ۲۰-۳)

۳*

تقویت کننده‌های عملیاتی

مدارهای مجتمع یا تراشه‌های نیمه‌هادی انقلابی در طراحی مدارهـای دیـجیتال بـه وجـود آورده و کـامپیوترهای شخصی را به ما عرضه کرده‌اند. گرچه به طور عام دراین باره کمتر صحبت می‌شود، اما مدارهای مجتمع با فراهم آوردن بلوک‌های ساختمانی کوچک مشتمل بر تعداد زیادی مقاومتها و تـرانـزیستورها، انـقلابی نـیز در طـراحـی مدارهای خطی ایجاد کرده‌اند.

شاید پرکاربردترین این ابزارها، تقویت کننده‌های عملیاتی یا آپ‌امپ‌ها هستند. تقویت کننده‌های عملیاتی با مقاومت ورودی بالا و مقاومت خروجی پایین و بهرهٔ ولتاژ بزرگ مشخص می‌شوند. تقویت‌کننده‌های عملیاتی در سیستم‌های تقویت کنندهٔ صوتی به کار برده می‌شوند. همچنین آنـها در بـسیاری از کـاربردهای ابـزار دقـیق مـانند سنجه‌های چندکارهٔ دیجیتال (مولتی‌مترها) ظاهر می‌شوند که در آن ولتاژهای کوچک را تقویت می‌کنند.

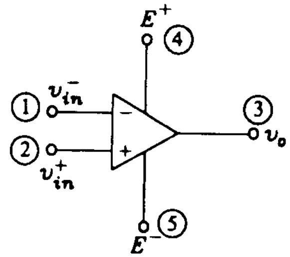
جزئیات تحلیل ولتاژها و جریانهای درونی تقویت‌کننده عملیاتی به ندرت مورد نیاز است و معمولاً فقط لازم است که مشخصه‌های سرهای آن در نظر گرفته شوند. با معرفی کردن یک عنصر مداری به نام **تقویت کنندهٔ عملیاتی ایده‌آل**، اغلب تحلیل را ساده‌تر می‌کنیم.

۱- مدل‌های آپ‌امپ

تقویت کننده‌های عملیاتی گرچه روزگاری از بهم پیوستن ترانزیستورها، خازنها و مقاومتهای جدا از هم (گسسته) ساخته می‌شدند، اما امروزه به وسیلهٔ مدارهای مجتمع بر روی یک قطعهٔ سیلیکون مربعی چند میلیمتری ساخته می‌شوند، که قیمت آن کمتر از یک دلار است. تقویت کنندهٔ عـملیاتی کـه بـه اختصار آن را آپ‌اَمپ (op-amp) می‌گویند در انواع مختلف بسته‌بندی‌ها در بـازار وجـود دارد. نـوع متداول آن، بسته‌بندی با ۸ سر یا بیشتر است که بعضی از این سرها ممکن است به هیچ محلی در درون آن متصل نباشند. در درس مدارهای الکتریکی مشخصه‌های بیرونی آپ‌اَمپ و رفتار آن در سرها مورد توجه قرار می‌گیرد. ساختمان درونی آپ‌امپ در درس الکترونیک مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

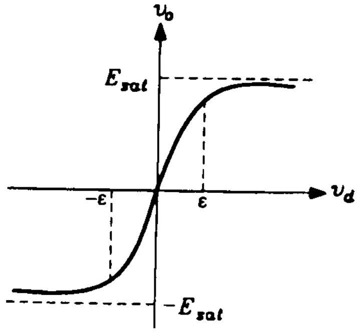
یک آپ امپ در ساده‌ترین حالت دارای ۵ سر است که در شکل (۱-۱) نشان داده شده‌انـد. از طریق سرهای ④ و ⑤ منابع تغذیهٔ لازم برای کارکرد مناسب آپ‌اَمپ اعمال می‌شود؛ یعنی منابع

E^+ و E^- که مقدار متداول آنها در حدود ۱۵+ ولت و ۱۵- ولت است، ($E^+ = ۱۵$ و ۱۵ - = E^-). سر ① را معکوس کنندهٔ علامت گویند و آن را با v_{in}^- نشان می‌دهند و هر سیگنالی که به این سر وصل شود، علامت آن معکوس می‌شود.



شکل ۱-۱ نماد یک آپ‌امپ با منابع تغذیه و سرهای ورودی و خروجی.

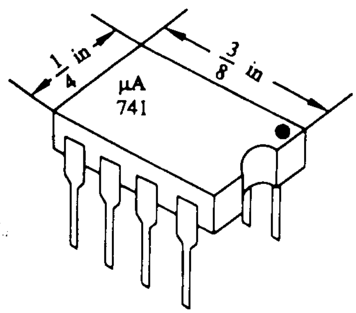
سر ② را سر غیرمعکوس کنندهٔ علامت گویند و آن را با v_{in}^+ نشان می‌دهند. سر ③ ، سر خروجی آپ امپ است و ولتاژ خروجی v_o تابعی از تفاضل v_{in}^+ و v_{in}^- است که آن را با سیگنال $v_d = v_{in}^+ - v_{in}^-$ نشان می‌دهند. ارتباط تابعی v_o با v_d یک ارتباط تابعی غیرخطی است و مقدار v_o برای مقادیر بزرگتر v_d که در حدود چند دهم میلی ولت می‌باشد به حد اشباع می‌رسد. ارتباط ولتاژ خروجی v_o برحسب ولتاژ ورودی v_d در شکل (۱-۲) نشان داده شده است.



شکل ۱-۲ ولتاژ خروجی مدار باز v_o برحسب تابعی از ولتاژ ورودی v_d .

منابع تغذیهٔ E^+ و E^- صرفاً برای بایاس کردن ترانزیستورهای درون آپ‌امپ به کار می‌روند و هنگامی که آپ‌امپ به طور مناسب بایاس شود و کار مورد نظر خود را انجام دهد، منابع تغذیه اثر خاصی روی نحوهٔ کارکردن و سیگنال خروجی نخواهند داشت. از این‌رو در مدارهای کاربردی معمولاً منابع تغذیه در شکل نشان داده نمی‌شوند.

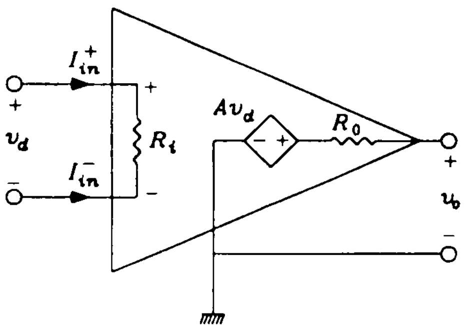
همان طوری که در شکل (۱-۲) نشان داده شده است، برای مقادیر کوچک v_d یعنی $-\varepsilon < v_d < \varepsilon$ ، ارتباط تابعی خروجی و ورودی یک ارتباط خطی است؛ یعنی $v_o = A\,v_d$ ، که در آن A (شیب مشخصه) در حدود $۱۰^۵$ یا بیشتر است. بنابراین برای آن‌که v_o به حد اشباع نرسد، لازم است ε در حدود یک دهم میلی ولت یا کمتر باشد که به این ناحیه، ناحیهٔ عملکرد خطی آپ‌امپ گویند. در خارج این ناحیه آپ‌امپ رفتار غیرخطی دارد و برای مقادیر v_d بزرگتر از ε ، خروجی آپ‌امپ به حد اشباع می‌رسد که مقدار این ولتاژ اشباع برابر ولتاژ منابع تغذیهٔ آن است.



شکل ۱-۳ شمای ظاهری یک بسته‌بندی آپ امپ.

شمای ظاهری یک آپ امپ μA ۷۴۱ در شکل (۱-۳) نشان داده شده است. برخی سرهای خروجی آن برای تنظیم عملکرد مدار داخلی آپ‌امپ به‌کار می‌رود که این سرها را با *offset null* نشان می‌دهند. بعضی دیگر از سرها به هیچ جایی در درون آپ امپ وصل نشده‌اند و آنها را با NC نمایش می‌دهند. از این سرها می‌توان به عنوان گره‌های اتصال برای وصل کردن دو عنصر استفاده کرد.

در ناحیهٔ خطی مشخصه‌های سرهای ورودی آپ امپ را با یک مقاومت ورودی R_{in} و مشخصهٔ سر خروجی را با یک منبع ولتاژ وابستهٔ $v_o = Av_d$ که به طور متوالی با یک مقاومت خروجی R_o قرار دارد، مطابق شکل (۱-۴) مدل‌سازی می‌کنیم. ولتاژ خروجی آپ‌امپ معمولاً نسبت به گره زمین سنجیده می‌شود. A بهرهٔ ولتاژ مدار باز و I_{in}^+ و I_{in}^- جریانهای ورودی در سرهای آپ امپ هستند.



شکل ۱-٤ مدل آپ‌امپ که مقاومت ورودی R_i و مقاومت خروجی R_o و بهرهٔ ولتاژ A و جریانهای ورودی I_{in}^+ و I_{in}^- را نشان می‌دهد.

در بیشتر تحلیل‌های مداری، مدل به مراتب ساده‌تری را از آپ‌امپ در نظر می‌گیریم. بهرهٔ ولتاژ مدار باز A معمولاً بسیار بزرگ است و توسط سازنده هم چندان کنترل نمی‌شود (در بعضی آپ‌امپ‌ها A از 10^5 بزرگتر است). بنابراین برای ساده کردن مدل، آن را به‌طور تقریبی برابر بی‌نهایت می‌گیریم؛ یعنی:

$$A = \infty$$

بهرهٔ بسیار بالای آپ امپ، پس‌خور منفی خروجی را لازم دارد. جزئی از ولتاژ خروجی v_o به ورودی آپ‌امپ پس‌خور می‌شود و از ولتاژ ورودی کم می‌کند تا ولتاژ v_d را تشکیل دهد. بهرهٔ بی‌نهایت A موجب می‌شود که ولتاژ خروجی v_o در حد مورد نظر قرار گیرد و از این رو:

$$v_d = \frac{v_o}{A} = 0$$

مقدار مقاومت ورودی برای یک آپ امپ در حدود ۲ مگا اهم است (در بعضی از آپ‌امپ‌ها به بزرگتر از 10^{12} اهم نیز می‌رسد). از این‌رو می‌توان فرض کرد که جریان ورودی آپ امپ یعنی I_{in} برابر صفر است؛ یعنی:

$$I_{in} = \frac{v_d}{R_{in}} = 0$$

فرض جریان ورودی صفر، معادل فرض مقاومت ورودی بی‌نهایت است، پس:

$$R_{in} = \infty$$

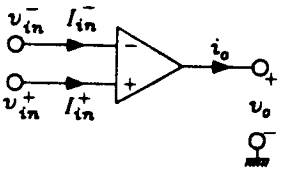
مقاومت خروجی کوچک R_o که در حدود ۱۰۰ اهم یا کمتر می‌باشد، اساساً به منظور محدود کردن جریان خروجی برای عملکرد خطی آن است. بنابراین فرض می‌کنیم که:

$$R_o = 0$$

برحسب مدل شکل (۱-۴) این تقریبها یک منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ را با بهرهٔ بی‌نهایت و ولتاژ کنترل v_d به ما می‌دهد. این مدل را یک عنصر جدید مدار به نام آپ‌اَمپ ایده‌آل نامگذاری می‌کنیم.

۱-۱ تعریف آپ امپ ایده‌آل

آپ امپ ایـــــده‌آل یک عـــنصر مــــداری است کـــه در آن $v_d = v_{in}^+ - v_{in}^- = 0$ و جریانهای ورودی $I_{in}^+ = I_{in}^- = 0$، لیکن پس‌خور منفی موجب می‌شود که مقدار ولتاژ خروجی در حد مورد نظر قرار گیرد. نماد یک آپ‌اَمپ ایده‌آل در شکل (۱-۵) نشان داده شده است.



شکل ۱-۵ نماد یک آمپ امپ ایده‌آل.

تبصره ۱ وقتی KCL را به نماد یک آپ‌اَمپ ایده‌آل اعمال می‌کنیم، باید دقت و توجه کافی داشته باشیم؛ زیرا که جریان زمین i_g معمولاً در شکل نشان داده نمی‌شود. از این‌رو وقتی KCL را در یک سطح دربرگیرندهٔ سرهای آپ‌اَمپ اعمال می‌کنیم، ظاهراً با تناقضی روبرو می‌شویم؛ زیرا جریان‌های ورودی I_{in}^- و I_{in}^+ در حدود صفر هستند در حالی که جریان خروجی I_o در حدود صفر نمی‌باشد. بنابراین لازم است جریان زمین نیز در شکل نشان داده شود تا اعمال KCL با تناقضی همراه نباشد.

تبصره ۲ عملکرد ناحیهٔ خطی یک آپ‌اَمپ توسط ولتاژهای تغذیه و جریان خروجی آپ‌اَمپ محدود می‌شود. برای تحلیل در درون ناحیهٔ خطی، ما از مدل ایده‌آل آپ‌اَمپ استفاده می‌کنیم که یک منبع ولتاژ وابسته با بهرهٔ بی‌نهایت است و توسط ولتاژ $v_d = v_{in}^+ - v_{in}^-$ کنترل می‌شود. برای کاربردهای وسیع مداری در نظر گرفتن ناحیهٔ خطی کفایت می‌کند. بررسی خواص غیرخطی آپ‌اَمپ به یک درس پیشرفتهٔ دیگر مانند الکترونیک واگذار می‌شود.

تبصره ۳ ولتاژ خروجی v_o و جریان خروجی I_o یک آپ‌اَمپ باید در سه شرط زیر صدق کنند تا آپ‌اَمپ در ناحیهٔ خطی عمل کند:

$$|v_o| < E_{sat}$$

$$|I_o| < I_{sat}$$

$$\left|\frac{dv_o(t)}{dt}\right| < SR$$

ولتاژ اشباع E_{sat} و جریان اشباع I_{sat} و حد نرخ تغییرات (*Slew Rate*)، پارامترهای یک آپ‌امپ هستند. مثلاً در مورد آپ‌امپ ۷۴۱ μA که با ولتاژ ۱۵+ و ۱۵- تغذیه می‌شود، داریم: $E_{sat} = 14\ V$ ،

$I_{sat} = ۲mA$ و V/sec $SR = ۵۰۰,۰۰۰$. این مشخصه‌ها نشان می‌دهند که آپ‌امپ نمی‌تواند ولتاژ خروجی دلخواه بزرگ یا جریان خروجی دلخواه بزرگ را تولید کند و یا نرخ تغییرات ولتاژ خروجی نمی‌تواند به طور دلخواه بسیار وسیع باشد.

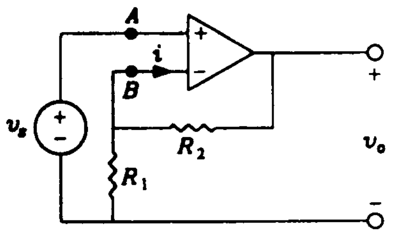
تبصره ٤ چون در مدل آپ‌اَمپ ایده‌آل $v_d = v_{in}^{+} - v_{in}^{-} = ۰$ در نظر گرفته می‌شود، از این رو گویند سرهای ورودی آپ‌اَمپ اتصال کوتاه مجازی شده است. یعنی گرچه هیچ اتصالی میان سرهای v_{in}^{-} و v_{in}^{+} وجود ندارد، ولی ولتاژ آنها مثل هم است و می‌توان چنین تصور کرد که این سرها با یک شاخه اتصال کوتاه شده‌اند.

۲- مدارهای آپ‌امپ

در این بخش مدل آپ‌اَمپ ایده‌آل را برای تحلیل بعضی مدارهای ساده ولی مهم که به عنوان قطعات ساختمانی اصلی در مدارهای بسیار پیچیده مورد استفاده قرار می‌گیرند، به کار می‌بریم.

مثال ۱ تقویت کنندهٔ غیر معکوس کنندهٔ علامت

تقویت کننده غیر معکوس کنندهٔ علامت، مداری است که در آن ولتاژ ورودی v_s در یک عدد مثبت ضرب می‌شود. این مدار از یک تقویت کنندهٔ عملیاتی به همراه پس‌خور مطابق شکل (۲-۱) استفاده می‌کند. ما مدل آپ‌اَمپ ایده‌آل را برای تعیین بهرهٔ ولتاژ مدار بستهٔ $\frac{v_o}{v_s}$ بکار می‌بریم. نقاط A و B که دو سر ورودی آپ‌اَمپ هستند هم پتانسیل می‌باشند، پس $v_B = v_s$ و چون جریان i ورودی آپ‌اَمپ صفر است، پس مقاومتهای $R_۲$ و $R_۱$ عملاً با هم سری هستند و می‌توان از ایدهٔ تقسیم کنندهٔ ولتاژ، ولتاژ دوسر مقاومت $R_۱$ را به صورت زیر نوشت:



شکل ۲-۱ تقویت کنندهٔ ولتاژ غیر معکوس کنندهٔ علامت.

$$v_{R_۱} = \frac{R_۱}{R_۱ + R_۲} v_o$$

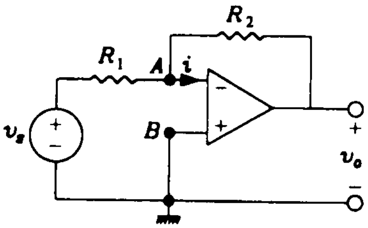
با توجه به اینکه $v_{R_۱} = v_B = v_s$ بهرهٔ ولتاژ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{R_۱ + R_۲}{R_۱}$$

این بهرهٔ ولتاژ را بهرهٔ ولتاژ مدار بسته می‌گویند. چون نسبت $\frac{R_۱ + R_۲}{R_۱}$ برای مقادیر مثبت $R_۱$ و $R_۲$ همواره بزرگتر از یک است، پس این مدار مانند یک تقویت کننده‌ای عمل می‌کند که ولتاژ ورودی v_s را در یک عدد مثبت بزرگتر از یک ضرب می‌کند. تا وقتی که ولتاژ خروجی آپ‌اَمپ اشباع نشود، این مدار مانند یک تقویت کننده رفتار می‌کند.

مثال ۲ تقویت‌کنندهٔ معکوس‌کنندهٔ علامت

اکنون مداری را مورد تحلیل قرار می‌دهیم که سیگنال ورودی را در یک عدد منفی ضرب می‌کند. این مدار معکوس‌کنندهٔ علامت، یک قطعهٔ ساختمانی اصلی دیگری است که در مدارهای بسیار پیچیده مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مدار در شکل (۲-۲) نشان داده شده است که در آن سر (-) در بالای شکل است. توجه کنید که ما پس‌خور را همیشه به سر معکوس‌کنندهٔ علامت یعنی (-) اعمال می‌کنیم. نقاط A و B هم پتانسیل هستند و چون گره B زمین شده است، پس $v_A = v_B = 0$. چون جریان i ورودی به آپ‌آمپ برابر صفر است، پس با اعمال KCL در گره A به دست می‌آوریم:



شکل ۲-۲ تقویت‌کنندهٔ ولتاژ معکوس‌کنندهٔ علامت.

$$\frac{v_s - v_A}{R_1} + \frac{v_o - v_A}{R_2} = 0$$

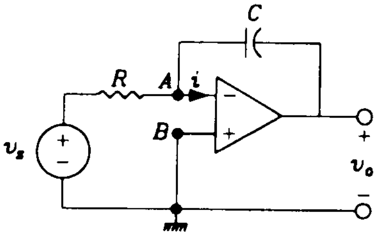
با قرار دادن $v_A = 0$ به دست می‌آوریم:

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_s$$

توجه کنید که علامت ولتاژ خروجی v_o مخالف علامت ولتاژ ورودی v_s است. به همین دلیل است که به این مدار، تقویت‌کنندهٔ معکوس‌کنندهٔ علامت می‌گویند. در واقع این مدار وقتی تقویت‌کننده است که $R_2 > R_1$ باشد. همچنین لازم است که ولتاژ خروجی آپ‌امپ اشباع نشود تا مدار مانند یک تقویت‌کننده عمل کند.

مثال ۳ مدار انتگرال‌گیر

مدارهای با تقویت‌کنندهٔ عملیاتی، نه تنها عملیات جبری مانند ضرب کردن در یک ثابت مثبت یا منفی را انجام می‌دهند (مثالهای ۱ و ۲)، بلکه انتگرال‌گیری را نیز انجام می‌دهند. شکل (۲-۳)، مداری را نشان می‌دهد که ولتاژ خروجی آن انتگرال ولتاژ ورودی آن است. این مدار انتگرال‌گیر به عنوان یکی از قطعات بسیاری از ابزارهای الکترونیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد.



شکل ۲-۳ یک مدار انتگرال‌گیر.

نقاط A و B هم پتانسیل‌اند و چون نقطهٔ B زمین شده است، پس $v_A = v_B = 0$. چون جریان i ورودی به آپ‌آمپ صفر است، با اعمال KCL در گره A به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_s - v_A}{R} + C\frac{d}{dt}(v_o - v_A) = 0$$

با قرار دادن $v_A = 0$ ، به دست می‌آید:

$$C\frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{R}v_s$$

و با انتگرال‌گیری از این معادله داریم:

$$v_o = -\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} v_s\, dt$$

ملاحظه می‌شود که در این مدار ولتاژ خروجی v_o مساوی $\left(-\frac{1}{RC}\right)$ برابر انتگرال ولتاژ ورودی v_s است.

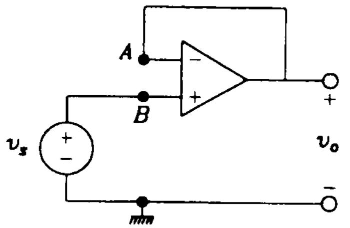
تبصره اگر جای خازن C و مقاومت R را با هم عوض می‌کردیم، با تحلیل مشابه مثال ۳ به دست می‌آوریم:

$$v_o = -RC\frac{dv_s}{dt}$$

یعنی مدار مانند یک مشتق‌گیر عمل می‌کند. در عمل چون مشتق‌گیر الکترونیکی نسبت به نویز بسیار حساس است، از این رو از چنین کاربردی حتی‌المقدور خودداری می‌شود.

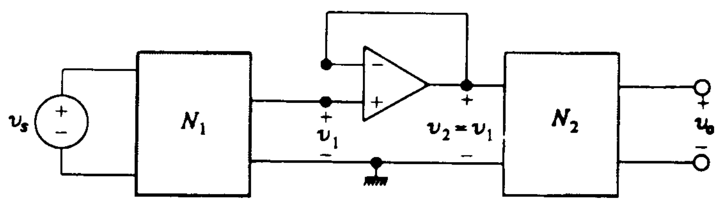
مثال ٤ تعقیب‌کنندهٔ ولتاژ

ساده‌ترین مدار تقویت کنندهٔ عملیاتی، مدار تعقیب کنندهٔ ولتاژ نشان داده شده در شکل (۲-۴) است. بدیهی است که ولتاژ خروجی این مدار برابر همان ولتاژ ورودی v_s است.



شکل ۲-٤ مدار تعقیب کنندهٔ ولتاژ.

مزیت اصلی مدار تعقیب‌کنندهٔ ولتاژ آن است که هر بارِ دلخواهی در سرهای خروجی وصل کنیم، ولتاژ v_o را نمی‌تواند تغییر دهد. شکل موج ولتاژ v_o فقط شکل موج ولتاژ ورودی را تعقیب می‌کند. این مدار را گاهی تقویت کنندهٔ ایزوله کننده نیز گویند و برای جلوگیری از اثر بار شدگی یک مدار به وسیلهٔ مدار دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مطلب در شکل (۲-۵) نشان داده شده است که در آن ولتاژ خروجی مدار N_1 وقتی که با یک مدار دلخواه N_2 بار شود، هیچ گونه تغییری نمی‌کند و گویند مدار تعقیب کنندهٔ

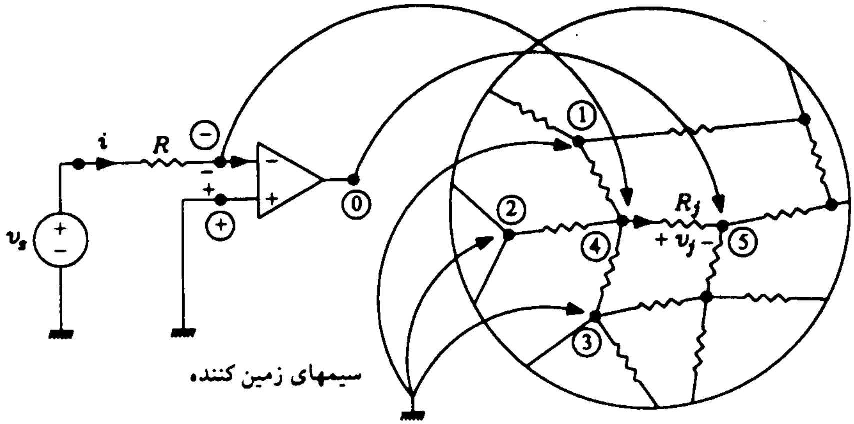


شکل ۲-۵ ایزوله کردن دو مدار N_1 و N_2 توسط مدار تعقیب کنندهٔ ولتاژ.

ولتاژ، دو مدار N_1 و N_2 را از هم ایزوله کرده است که موجب می‌شود N_1 و N_2 جداگانه تحلیل یا طراحی شوند.

مثال ۵ اندازه‌گیری مقاومت بدون بریدن سیمها

فرض کنید مدار مقاومتی خطی قرارگرفته در درون دایرهٔ شکل (۲-۶)، قسمتی از یک مدار را نشان دهد که می‌خواهیم مقدار هر یک از مقاومتها را بدون بریدن سیمهای آن اندازه‌گیری کنیم. این مسأله وقتی پیش می‌آید که مداری به خاطر یک مقاومت معیوب از کار می‌افتد و ما می‌خواهیم مقاومت معیوب را با مقایسهٔ مقدار آن با مقدار نامی شناسایی کنیم.



شکل ۲-۶ یک آشکارساز خطای آپ‌امپی.

برای نشان دادن این که چگونه این مدار کار می‌کند، فرض کنید بخواهیم مقدار مقاومت R_j را بدون بریدن سیمهای دوسر آن اندازه‌گیری کنیم. یکی از سرهای مقاومت R_j را به سر معکوس کنندهٔ آپ‌امپ وصل کنید (در شکل (۲-۶) گره ۴ به سر (-) آپ‌امپ وصل شده است). سپس سر دوم این مقاومت را به سر خروجی آپ‌امپ وصل کنید (گره ۵ در شکل (۲-۶) به سر خروجی آپ امپ وصل شده است). با توجه به هم پتانسیل بودن سرهای ورودی آپ‌امپ، پتانسیل گره ۴ برابر صفر است و برای آنکه جریان وارد شونده به این گره تماماً از مقاومت R_j عبور کند، لازم است به جز گره ۵، تمام گره‌های دیگر وصل شده به گره ۴ دارای پتانسیل صفر باشند. از این رو با سیمهای زمین کننده، گره‌های انتهایی کلیهٔ مقاومتهای وصل شده به گره ۴ را، به استثنای گره ۵، به گره زمین وصل می‌کنیم. به این ترتیب مقاومت R_j در مسیر پس‌خور آپ‌امپ قرار می‌گیرد و تمام جریان i که از مقاومت R می‌گذرد، از مقاومت R_j عبور می‌کند و داریم $i = \frac{v_s}{R}$ و $v_j = R_j i = \frac{R_j}{R} v_s$. چون ولتاژ v_j بدون بریدن سیمها قابل اندازه‌گیری است، پس $R_j = R\frac{v_j}{v_s}$ و به این ترتیب مقدار مقاومت R_j را بدون بریدن سیمهای آن تعیین کردیم.

۳- تحلیل گره در مدارهای با آپ امپ ایده‌آل

می‌توان تحلیل گره را به راحتی در مدارهای شامل آپ‌امپ ایده‌آل به کار گرفت. در اعمال این تحلیل به نکات زیر باید توجه کرد:

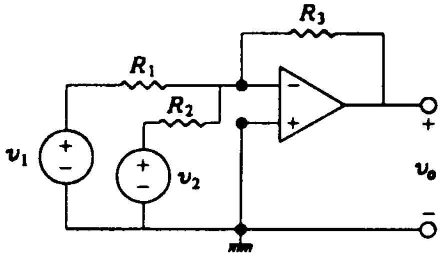
۱- جریان وارد شونده به هر سر ورودی آپ‌امپ ایده‌آل برابر صفر است.

۲- اختلاف پتانسیل میان سرهای ورودی آپ‌امپ ایده‌آل برابر صفر است.

۳- جریان خروجی آپ‌امپ برابر صفر نمی‌باشد. این جریان در معادلهٔ KCL نوشته شده در گره خروجی به کار می‌رود. اعمال KCL در گره خروجی، یک مجهول اضافی به نام جریان خروجی را به معادلات گره اضافه می‌کند. بنابراین اگر هدف، تعیین جریان خروجی آپ‌امپ نباشد، لزومی ندارد که KCL را در گره خروجی آپ‌امپ بنویسیم.

مثال ۷ مقدار ولتاژ خروجی v_o را در مدار شکل (۳-۱) تعیین کنید.

چون سرهای آپ‌امپ هم پتانسیل است و سر (+) آن زمین شده است، پس ولتاژ سر (-) آن نیز صفر است. با اعمال KCL در گره سر منفی آپ‌امپ و با صفر گرفتن جریان ورودی آپ‌امپ داریم:



شکل ۳-۱ (مثال ۷)

$$\frac{v_1 - 0}{R_1} + \frac{v_2 - 0}{R_2} + \frac{v_o - 0}{R_3} = 0$$

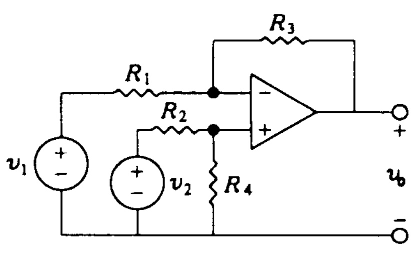
و یا:

$$v_o = -\frac{R_3}{R_1}v_1 - \frac{R_3}{R_2}v_2$$

به عبارت دیگر، این مدار ترکیب خطی دو ولتاژ v_1 و v_2 را با ضرایب دلخواه $\frac{R_3}{R_1}$ و $\frac{R_3}{R_2}$، که از طریق انتخاب مناسب مقادیر مقاومتها به دست می‌آیند، به وجود می‌آورد.

مثال ۸ مقدار ولتاژ خروجی v_o را در مدار شکل (۳-۲) تعیین کنید.

سرهای آپ‌امپ هم پتانسیل بوده و پتانسیل آنها را v فرض می‌کنیم. چون جریان ورودی آپ‌امپ صفر است با نوشتن معادلهٔ گره سر (+) به دست می‌آوریم:

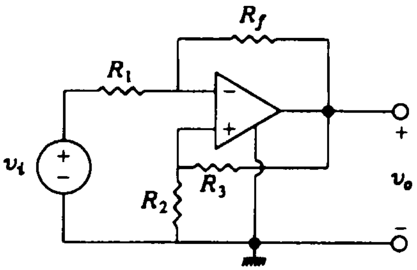


شکل ۳-۲ (مثال ۸)

ولتاژ v_o به دست آمده از اسپایس در شکل (۴-۱-پ) نشان داده شده است که با استفاده از PROBE برنامهٔ اسپایس به دست آمده است. بدیهی است محاسبهٔ این نتایج با دست بسیار وقتگیر خواهد بود.

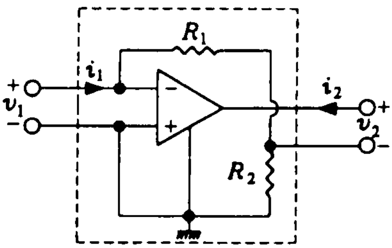
مسائل

۱- در مدار شکل (مسألهٔ ۳*-۱) فرض کنید آپ‌امپ در ناحیهٔ خطی عمل می‌کند. بهرهٔ ولتاژ $\frac{v_o}{v_i}$ را به‌دست آورید. حدود تغییرات v_i برای آنکه عملکرد در ناحیهٔ خطی قرار گیرد، کدام است؟



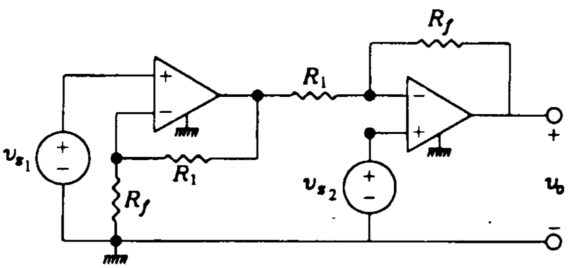
شکل (مسألهٔ ۳*-۱)

۲- نشان دهید که مدار شکل (مسألهٔ ۳*-۲) یک منبع جریان کنترل شده با جریان (CCCS) را تحقق می‌دهد.



شکل (مسألهٔ ۳*-۲)

۳- در مدار شکل (مسألهٔ ۳*-۳) با فرض این که هر دو آپ‌امپ یکسان بوده و در ناحیهٔ خطی عمل می‌کنند، v_o را برحسب v_{s1} و v_{s2} به‌دست آورید.



شکل (مسألهٔ ۳*-۳)

فصل چهارم

مدارهای مرتبه اول

در دوفصل پیش سه نوع اساسی اجزاء مدار را مفصلاً بررسی کردیم و بعضی مدارهای ساده را تجزیه و تحلیل نمودیم . اتصال سری و موازی اجزاء مداری را که ازیک نوع عنصر تشکیل شده باشد درنظر گرفته با آوردن مثالهائی نشان دادیم که چگونه یک قطبی‌های معادل را بدست آورده جواب آنها را پیدا میکنیم . دراین مثالها ما هم روشهای تحلیلی وهم روشهای ترسیمی بکار بردیم . درهر یک ازاین روشها و حتی در مدارهائیکه تنها از یک نوع عنصر تشکیل می‌یابند ، هرچه این مدارها پیچیده باشند ، تنها عملیات جبری مورد نیاز بوده معادلات دیفرانسیل دخالت نمی‌یابند .

ما دراین فصل مدارهائی راکه از بیش از یک نوع عنصر تشکیل می‌یابند تجزیه و تحلیل‌کرده و درنتیجه از عمل‌هائی مانند مشتق‌گیری و/یا انتگرال‌گیری‌استفاده خواهیم کرد . چون بحث ما تنها به مدارهایی‌که با معادله‌های دیفرانسیل مرتبه اول توصیف میشوند محدود میباشد آنهـا را « مدارهای مرتبه اول[1] » خواهیم‌خواند . نخست مداری راکه شامل یک مقاومت ویک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان می‌باشد تجزیه و تحلیل نموده و این مثال ساده را درهمه این فصل برای یافتن بعضی نتایج اساسی مربوط به مدارها و سیستمهای خطی‌که تغییرناپذیر با زمان میباشند بکار خواهیم برد . نخست مفهومهای پاسخ ورودی صفر[2] ، پاسخ حالت صفر[3] وپاسخ کامل را همراه با یادآوری مختصر حل معادله‌های دیفرانسیل مطالعه میکنیم و سپس توابع پله و ضربه را مطالعه‌کرده و نشان خواهیم داد که چگونه پاسخ‌های پله وضربه بدست می‌آیند . درفصلهای بعد ، مدارهای ازمرتبهٔ بالاتر یعنی مدارهائی‌که با معادله‌های دیفرانسیل مرتبه بالاتر توصیف میشوند را مطالعه خواهیم‌کرد . مدارهای مرتبه اول ساده غیرخطی یا مدارهائی‌که با زمان تغییرپذیرند درپایان این فصل بطورمختصر مطالعه خواهند شد. منظور اساسی ما آنستکه روشهای ساده و درعین‌حال سودمندی که در حل مدارهای با عنصرهای غیرخطی و یا

---

۱ — First order circuits ۲ — Zero input response

۳ — Zero state response

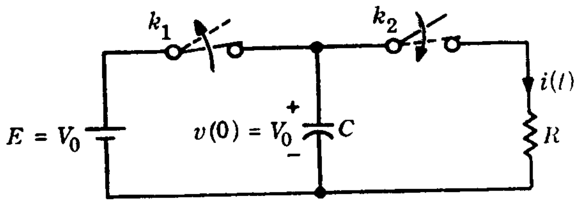
تغییرپذیر با زمان بکار می‌آیند را بیان نموده در نتیجه تفاوت بین این مدارهارا با مدارهائی که شامل عنصرهای خطی و تغییرناپذیر با زمان هستند آشکار سازیم .

درآنچه پس‌ازاین خواهیم‌گفت ، برای ساده‌کردن برخی توصیفها ، اصطلاحات زیر را بکار میبریم : یک مدار فشرده را **خطی** گویند هرگاه هریک از اجزاء آن یک عنصر خطی یا یک منبع نابسته باشد . بهمین‌سان گویند یک مدار فشرده **تغییر ناپذیر با زمان** است هرگاه هریک از جزءهای آن یک عنصر تغییرناپذیر با زمان یا یک منبع نابسته باشد بدینسان اجزاء یک « مدارخطی تغییرناپذیر با زمان» ، عناصر خطی تغییرناپذیر با زمان یا منابع نابسته هستند . بطریقی مشابه ، مداری راکه حاوی یک یا چند عنصر غیرخطی غیراز منابع نابسته باشد **مدارغیرخطی** ، و مداری را که حاوی یک یا چند عنصر تغییرپذیر با زمان غیر ازمنابع نابسته باشد **مدار تغییرپذیر بازمان** گویند . دلیل اینکه چرا منابع نابسته بطور جدا درنظرگرفته میشوند بعد روشن خواهد شد .

۱- مدار خطی تغییر ناپذیر بازمان مرتبه اول ، پاسخ ورودی صفر

۱-۱- مدار RC (مقاومت وخازن)

در مدار شکل (۱ - ۱) خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان با ظرفیت C بوسیلهٔ یک منبع ولتاژ ثابت به پتانسیل V_0 بار شده است . درلحظهٔ $t=0$ بطور همزمان کلید k_1 باز و کلید k_2 بسته میشود ، پس دراین لحظه، خازن بارشده ازمنبع قطع شده وبه مقاومت خطی تغییرناپذیر بازمان R متصل میشود . اکنون آنچه راکه روی میدهد بطور فیزیکی توصیف میکنیم. بعلت باری که درخازن ذخیره شده است $(Q_0=CV_0)$ جریانی درجهت



شکل ۱-۱- یک خازن بار شده به یک مقاومت متصل شده است
(درلحظه $t=0$ ، k_1 باز و k_2 بسته میشود)

قراردادی تصریح شده $i(t)$ ، مطابق شکل (۱ - ۱) برقرار میگردد . بار ذخیره شده در خازن بتدریج کاهش یافته بالاخره به‌صفر میرسد وجریان $i(t)$ نیز کاهش یافته بهمین ترتیب به‌صفر میرسد . دراین عمل انرژی الکتریکی که درخازن ذخیره شده است بصورت حرارت در مقاومت تلف خواهد شد .

اکنون آنچه راکه دربارهٔ نظریه مدار میدانیم برای تجزیه و تحلیل این مسأله بکار میبریم . توجه خود را به‌حالت $t \geqslant 0$ محدود کرده مدار RC را بار دیگر بصورت شکل (۲ - ۱) رسم می‌کنیم . چنانکه می‌بینیم جهت‌های قراردادی برای ولتاژ و جریان شاخه‌ها بخوبی مشخص شده‌اند . V_0 همراه باعلامتهای $+$ و $-$ کنار خازن،مقدار وپلاریته[1] ولتاژ اولیه خازن‌را معین‌میکنند . ازقانونهای کیرشف و توپولوژی مدار (اتصال موازی R و C) این معادله‌ها بدست می‌آیند :

$$(۱-۱) \qquad \text{KVL}: \quad v_C(t) = v_R(t) \qquad t \geqslant 0$$

$$(۱-۲) \qquad \text{KCL}: \quad i_C(t) + i_R(t) = 0 \qquad t \geqslant 0$$

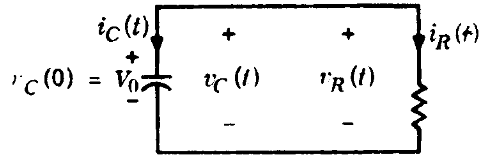
دومعادلهٔ شاخه برای دوعنصر مدار چنین میباشند :

$$(۱-۳) \qquad \text{مقاومت}: \quad v_R = R\, i_R$$

$$(\text{۱-۴ الف}) \qquad \text{خازن}: \quad i_C = C\frac{dv_C}{dt} \quad \text{و} \quad v_C(0) = V_0$$

معادلهٔ (۴ - ۱ الف) بصورت هم‌ارز زیر نوشته میشود :

$$(\text{۱-۴ ب}) \qquad v_C(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t')\, dt'$$



شکل ۲-۱- یک مدار RC ، $v_C(0) = V_0$

۱ — Polarity

باید متوجه بود که درمعادلهٔ (۴ - ۱ الف) شرط اولیه ولتاژ خازن باید همراه با :

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

نوشته شود وگرنـه حالت خازن کاملا" مشخص نخواهد بود . این نکته از معادلـهٔ دیگر شاخه که بصورت (۴ - ۱ ب) نوشته شده است آشکار میباشد .

درمداری کـه در بالا دیدیم ، چهار معادله و چهار مجهول داریم کـه مجهولها دو ولتاژ شاخه v_C و v_R و دوجریان شاخه i_C و i_R میباشند. پس توصیف مدار ازلحاظ ریاضی کامل است و میتوان معادله‌ها را نسبت به هریک ازمتغیرها یا همهٔ آنها حل کرد . فرض کنیم میخواهیم ولتاژ دوسرخـازن را تعیین کنیم . با تـرکیب معادلـه‌های (۱ - ۱) تـا (۴ - ۱ الف) برای $t \geqslant o$ خواهیم داشت :

$$C\frac{dv_C}{dt} = i_C = -i_R = -\frac{v_R}{R} = -\frac{v_C}{R} \quad \text{و} \quad v_C(o) = V_0$$

و یا :

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = o \qquad t \geqslant o \quad \text{و} \quad v_C(o) = V_0 \qquad (۱-۵)$$

این یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن باضرایب ثابت است که جواب آن بصورت نمایی[۱] زیر میباشد :

$$v_C(t) = K\,e^{s_0 t} \qquad (۱-۶)$$

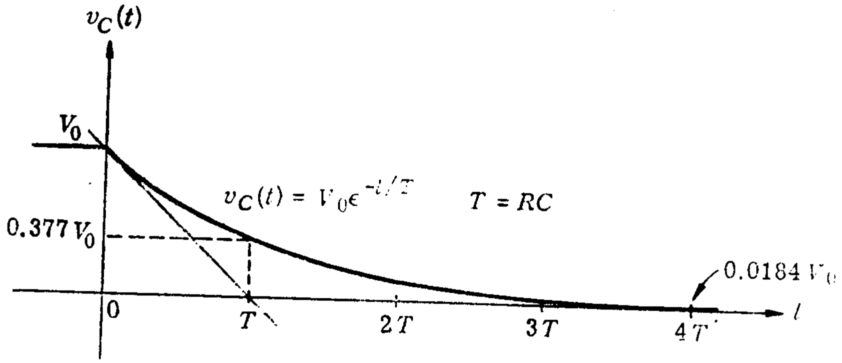
که درآن :

$$s_0 = -\frac{۱}{RC} \qquad (۱-۷)$$

میتوان درستی این جواب را باجایگزینی عبارتهای (۱-۶) و (۱-۷) درمعادله دیفرانسیل (۱-۵) تحقیق کرد . درمعادلهٔ (۱ - ۶) ، K ثابتی است که با شرایط اولیه معین میشود . اگر درمعادلهٔ (۱ - ۶) ، $t = o$ قرار دهیم خواهیم داشت :

$$v_C(o) = K = V_0$$

۱ — Exponential



شکل ۳-۱- تخلیه خازن شکل (۲-۱) با یک منحنی نمائی داده شده است .

پس جواب مساله چنین میباشد :

$$v_C(t) = V_0\, e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \qquad t \geqslant 0 \tag{۱ — ۸}$$

باید باین نکته مهم توجه نمود که درمعادلـهٔ (۸ - ۱) ، $v_C(t)$ برای $t \geqslant 0$ معین شده است زیرا بموجب مشخصات فیزیکی اولیه برای $t < 0$ ولتاژ دوسرخازن مقداریست ثابت، درصورتیکه از معادلهٔ (۸-۱) ، بدون درنظرگرفتن $t \geqslant 0$ ، حتی برای مقدارهای منفی t یک عبارت نمایی بدست می‌آیـد . درشکـل (۳-۱) ولتاژ v_C بصورت یک تابع زمان رسم شده است. روشن است هرگاه v_C معلوم باشد میتوان سه متغیر دیگر شاخه را بآسانی‌بدست آورد . از معادلهٔ (٤ - ۱ الف) داریم :

$$i_C(t) = C\,\frac{dv_C}{dt} = -\,\frac{V_0}{R}\, e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \qquad t \geqslant 0 \tag{۱ — ۹}$$

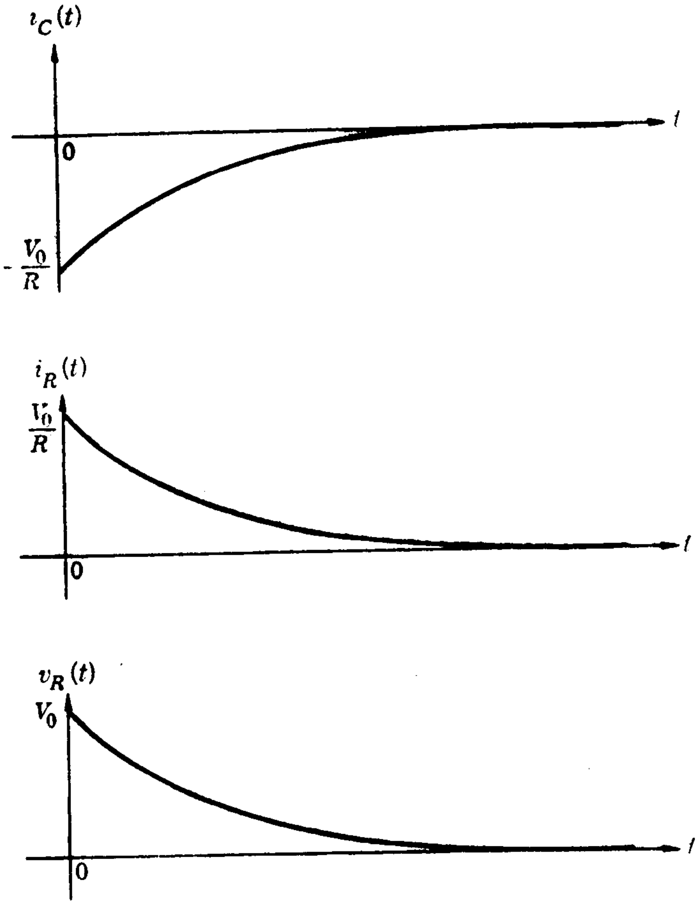
از معادلهٔ (۲-۱) داریم :

$$i_R(t) = -\,i_C(t) = \frac{V_0}{R}\, e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \qquad t \geqslant 0 \tag{۱ — ۱۰}$$

از معادلهٔ (۳-۱) داریم :

$$v_R(t)=v_C(t)=V_0 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \qquad t \geqslant 0 \qquad (۱-۱۱)$$

این منحنی‌ها درشکل (۴-۱) رسم شده‌اند .



شکل ۴-۱- متغیرهای شبکه i_C ، i_R و v_R که برای $t \geqslant 0$ نسبت به زمان رسم شده‌اند .

تمرین - ثابت کنید خط راست شکل (۳ - ۱) که در $t=o^+$ برمنحنی $v_C(t)$ مماس است محور زمان را درنقطه‌ای بطول $T=RC$ قطع میکند .

اکنون شکل موج $v_C(o)$ را با دقت بیشتری بررسی میکنیم . همچنانکه در شکل (۳ - ۱) نشان داده شده‌است، گوئیم ولتاژ دوسرخازن بطور نمایی با زمان کاهش می‌یابد. چون منحنی‌های نمایی و مدارهای RC ساده درکارهای روزانه مهندسان برق بسیار دیده میشوند دانستن خواص آنها بطور دقیق بسیار اهمیت دارد . یک منحنی نمایی را می‌توان با دو عدد مشخص کرد . یکی عرض منحنی در زمان مشخص ، مثلاً $t=o$ ، و دیگری **ثابت زمانی**[1] T که با رابطهٔ :

$$f(t)=f(o)\,e^{-\frac{t}{T}}$$

تعریف میشود . درمنحنی شکل(۳-۱) ، $f(o)=V_0$ و $T=RC$ است . شایسته است برخی‌خواص سادهٔ منحنی نمایی را بیادداشت. با فرض $V_0=1$ یعنی $v_C(o)=1$ می‌بینیم که برای $t=T$ داریم :

$$v_C(T)=e^{-1}\approx ۰٫۳۷۷$$

و برای $t=4T$ داریم :

$$v_C(4T)=e^{-4}\approx ۰٫۰۱۸۴$$

پس در زمانی برابر با ثابت زمانی، منحنی نمایی تقریباً به ۳۸ درصد ودر زمانی برابربا‌چهار برابر ثابت زمانی منحنی نمایی تقریباً به دو درصد مقدار اولیه خود میرسد .

تبصره - درمعادله‌های (۶ - ۱) و (۷ - ۱) بُعد[2] جملهٔ :

$$s_0=-\frac{1}{T}=-\frac{1}{RC}$$

معکوس زمان‌یعنی‌فرکانس بوده وبرحسب‌رادیان برثانیه‌اندازه‌گیری‌میشود وآنرا «فرکانس طبیعی[3]» مدار می‌خوانند. چنانکه درفصلهای بعدخواهیم‌دید مفهوم «فرکانس طبیعی»

---

۱ — Time constant

۲ — Dimension

۳ — Natural frequency

درمدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان اهمیت بسیار دارد .

تمرین - میدانیم که واحد ظرفیت فاراد و واحد مقاومت اهم است . نشان دهید که واحد $T=RC$ ، ثانیه است .

درتجزیه و تحلیل مدار ، ما تقریباً همواره به رفتار یک متغیر خاص شبکه که **پاسخ** (وگاه خروجی[1]) نامیده میشود توجه داریم . چنانکه میدانیم متغیرهای شبکه ولتاژ شاخه یا جریان شاخه و یا یک ترکیب خطی ولتاژهای شاخه‌ها و جریانهای شاخه‌ها است. همچنین ممکن است متغیر یک شبکه بار یک خازن یا شار یک سلف نیز باشد. درمثال بالا، هریک از منحنی‌های شکلهای (۳-۱) و (۴-۱) را میتوان پاسخ شبکه دانست . پاسخهای شبکه عموماً معلول منابع نابسته‌ای که آنها را بعنوان ورودی[2] درنظر میگیریم ، یا شرطهای اولیه ، و یا هردو میباشند. درمثال بالا ورودی موجود نیست و پاسخ تنها دراثر ولتاژ اولیه خازن بدست آمده است. بدین‌سبب این پاسخ را پاسخ ورودی صفر می‌نامند . درحالت کلی **پاسخ ورودی صفر** به پاسخ شبکه‌ای اتلاق میشود که هیچگونه ورودی نداشته باشد . پاسخ ورودی صفر به شرایط اولیه و مشخصات مدار بستگی دارد . پاسخ ورودی صفر یک مدار سادهٔ RC یک منحنی نمایی است که با فرکانس طبیعی :

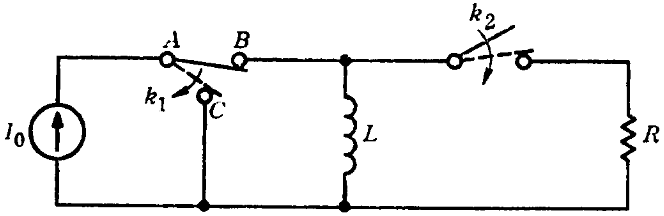
$$s_0 = -\frac{۱}{RC}$$

و ولتاژ اولیه V_0 کاملاً مشخص میشود .

۲-۱- مدار RL (مقاومت - سلف)

نوع دیگر مدارمرتبه اول مدار RL است که ما پاسخ ورودی صفرآن را بررسی خواهیم کرد . چنانکه درشکل (۵ - ۱) دیده میشود ، برای $t<0$ کلید k_1 درنقطهٔ B واقع شده است وکلید k_2 باز است و درسلف خطی تغییرناپذیر با زمان با اندوکتانس L جریان ثابت I_0 برقرار میباشد . درلحظهٔ $t=0$ کلید k_1 را به نقطهٔ C چرخانده k_2 را می‌بندیم . پس برای $t \geqslant 0$ سلفی که جریان اولیه آن I_0 میباشد به مقاومت خطی

۱ — Output ۲ — Input



شکل ۵-۱- برای $t<o$ کلید k_1 نقطه A را به نقطه B وصل نموده و کلید k_2 باز است. پس برای $t<o$ جریان I_0 ازداخل سلف L میگذرد . درلحظه $t=o$ کلید k_1 را به نقطه C چرخانیده و کلید k_2 را می‌بندیم دراینصورت منبع جریان با خود اتصال کوتاه شده وجریان سلف باید ازمقاومت R بگذرد .

تغییرناپذیر بازمان R متصل میشود . انرژی ذخیره شده درمیدان مغناطیسی که درنتیجه جریان I_0 درسلف بوجود آمده بتدریج کاهش یافته بصورت حرارت درمقاومت تلف میشود . جریان درحلقهٔ RL بطور یکنواخت کاهش یافته بالاخره بسوی صفر می‌گراید .

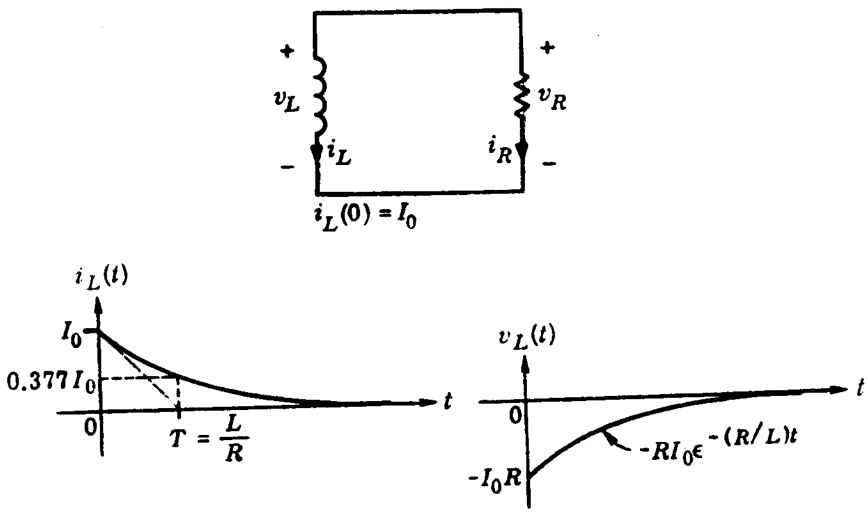
میتوان این‌مدار را بطریق‌مشابه بانوشتن‌قوانین کیرشف ومعادله های شاخه ها تجزیه وتحلیل نمود وبدین‌منظور برای $t \geqslant o$ بار دیگر مدار را مطابق شکل(۶-۱) رسم‌می‌کنیم . دراین شکل جهت‌های قراردادی ولتاژ و جریان همه شاخه‌ها بخوبی نشان داده شده‌است . با استفاده از قانون جریان کیرشف خواهیم داشت $i_R=-i_L$ و قانون ولتاژ کیرشف بیان میدارد که $v_L-v_R=o$ میباشد. با بکار بردن‌معادله های شاخه برای هردوعنصر یعنی:

$$v_L=L\left(\frac{di_L}{dt}\right) \quad , \quad i_L(o)=I_0 \quad , \quad v_R=R\,i_R$$

معادله دیفرانسیل زیر برحسب جریان i_L بدست می‌آید :

$$L\frac{di_L}{dt}+R\,i_L=o \qquad t\geqslant o \qquad i_L(o)=I_0 \qquad (۱-۱۲)$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی همگن ازمرتبه اول با ضرایب ثابت ، و درست بهمان



شکل ۱-۶- یک مدار RL با $i_L(o)=I_0$
و شکل موجهای آن برای $t \geqslant o$

صورت معادله پیش یعنی(۱-۵) ، میباشد . پس جواب آن‌هم ، بجز طرز نمایش ، بهمان صورت است :

$$i_L(t)=I_0\, e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \qquad t \geqslant o \qquad (۱-۱۳)$$

که درآن $T=\frac{L}{R}$ ثابت زمانی و $s_0 \triangleq -\frac{R}{L}$ فرکانس طبیعی است . نمایش هندسی جریان i_L و ولتاژ v_L درشکل (۱-۶) دیده میشوند .

۱-۳- پاسخ ورودی صفر بصورت تابعی ازحالت اولیه

برای مدارهای RC و RL که در بالا درنظرگرفتیم ، پاسخهای ورودی صفر بترتیب چنین میباشند :

$$v(t)=V_0\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad i(t)=I_0\, e^{-\frac{R}{L}t} \qquad t \geqslant o \qquad (۱-۱٤)$$

شرایط اولیه بترتیب با V_0 و I_0 مشخص‌شده‌اندومقادیر V_0 و I_0 بترتیب «حالت‌اولیه(۱)»

---

۱ —Initial state

مدارهای RC و RL نام دارند . اگر ما نحوهٔ وابستگی شکل موج پاسخ ورودی صفر را به‌حالت اولیه درنظر گیریم به نتیجه زیربیرسیم :

« برای مدارهـای مرتبه اول خطی تغییرنـاپذیر با زمان ، پاسخ ورودی صفر کـه بصورت شکل موج درنظرگرفته شده در فاصلهٔ $o \leqslant t < \infty$ تعریف می‌شود، یک تابع خطی حالت اولیه است . »

اکنون این بیان را با درنظرگرفتن یک مدار RC ثابت می‌کنیم . یعنی میخواهیم نشان دهیم که شکل‌موج $v(\cdot)$ درمعادلهٔ (۱۴-۱) یک‌تابع خطی حالت اولیه V_0 میباشد . بدین‌منظور لازم است شرطهای همگنی و جمع‌پذیـری تابع تحقیق شوند . (بخش ۳ - ۲ ضمیمه الف دیده شود) . خاصیت همگن بودن آشکار است زیرا اگر حالت اولیه درثابت k ضرب شود از معادلهٔ (۱۴ - ۱) می‌بینیم کـه تمام شکل موج در ثابت k ضرب میشود . جمع‌پذیری هم بسادگی دیده می‌شود . پاسخ ورودی صفر متناظر با حالت اولیه V'_0 ،

$$v'(t)=V'_0\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geqslant o$$

و پاسخ ورودی صفر متناظر باحالت اولیه دیگر V''_0 ،

$$v''(t)=V''_0\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geqslant o$$

و پاسخ ورودی صفر متناظر با حالت اولیهٔ $V'_0+V''_0$ ،

$$(V'_0+V''_0)\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geqslant o$$

میباشد . این شکل موج مجموع دوشکل موج پیش است. پس خاصیت جمع‌پذیری‌برقرار است و چون وابستگی پـاسخ ورودی صفر به حالت اولیه واجد شرطهای لازم برای همگنی و جمع‌پذیری است این وابستگی یک تابع خطی میباشد .

تبصره - این‌خاصیت برای مدارهای غیرخطی‌برقرار نیست. برای نشان دادن‌این مطلب مدار RC شکل (۷ - ۱ الف) را درنظر میگیریم. دراینجا خازن خطی و تغییرناپذیر

با زمان باظرفیت یک فاراد ومقاومت غیرخطی با مشخصهٔ $i_R = v_R^3$ میباشد. هردوعنصر دارای ولتاژ شاخهٔ v بوده و اگر جریان شاخه‌ها را برحسب v بیان کنیم از KCL معلوم میشودکه

$$C\frac{dv}{dt} + i_R = \frac{dv}{dt} + v^3 = 0 \qquad v(0) = V_0$$

پس :

$$\frac{dv}{v^3} = -dt$$

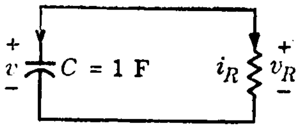
اگر درفاصله 0 و t انتگرال بگیریم، ولتاژ، مقدار اولیه V_0 ومقدار نهائی $v(t)$ را میگیرد و خواهیم داشت :

$$-\frac{1}{2[v(t)]^2} + \frac{1}{2V_0^2} = -t$$

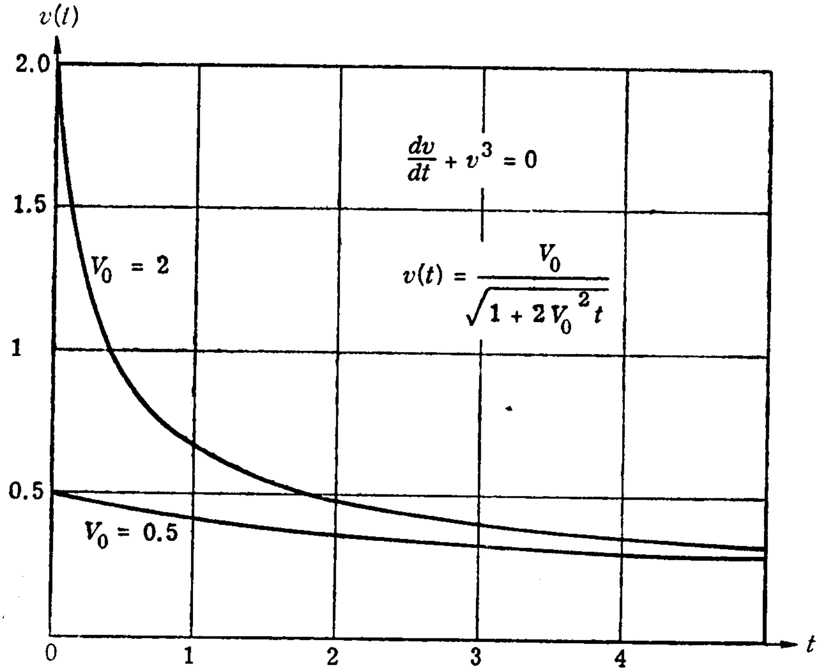
یا :

$$v(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1 + 2V_0^2 t}} \qquad t \geqslant 0 \qquad (1-10)$$

این پاسخ ورودی صفر مدار غیرخطی RC استکه در زمان $t=0$ ازحالت اولیهٔ V_0 شروع میشود. نمایش هندسی شکل‌موجهای‌متناظر با $V_0 = 0.5$ و $V_0 = 2$ درشکل (۱-۷ ب) دیده میشوند . مسلم استکه نمیتوان‌منحنی بالا (برای $V_0 = 2$) را باضرب کردن عرضهای نقطه‌های منحنی پائین در ٤ بدست آورد . روشن است پاسخ ورودی صفر تابع خطی حالت اولیه نیست . این نکته از لحاظ آزمایشگاهی بسیار مهم است . فرض کنیم در یک گزارش آزمایشگاهی تصویری از پاسخ ورودی صفر یک مدار مرتبه اول که دراسیلوسکوپ دیده میشود ، را برای $V_0 = 1$ داریم . اگر مدار خطی باشد، عرض نقطه‌های پاسخ ورودی صفر برای هرحالت اولیه دیگر ، مثلاً $V_0 = k$ ، درست k برابر عرض نقطه‌های منحنی استکه در دست داریم . درصورتیکه درحالت غیرخطی باید بار دیگر آزمایش کرد یامعادله دیفرانسیل‌متناظر را برای حالت اولیه $V_0 = k$ حل نمود .



(الف)

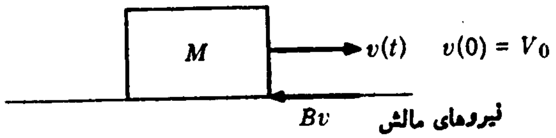


(ب)

شکل ۷-۱- مدار غیرخطی RC و دو پاسخ ورودی صفر آن . خازن خطی است وظرفیت $C = ۱$ فاراد دارد . مشخصه مقاومت غیرخطی $i_R = v_R^۳$ میباشد .

۴-۱- مثال مکانیکی

اکنون یک سیستم مکانیکی راکه با آن آشنایی داریم درنظر میگیریم که رفتاری مشابه مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان RL و RC که دربالا دیدیم داشته باشد . درشکل (۸ - ۱) جسمی بجرم M که درلحظهٔ $t=o$ با سرعت اولیه V_0 حرکت میکند



شکل ۸-۱- یک سیستم مکانیکی که با معادله دیفرانسیل مرتبه اول توصیف میشود .

دیده میشود . سرعت حرکت این جسم بعلت مالش(۱) بتدریج کاهش می‌یابد . مالش را همواره با نیروهای مالش که درجهت مخالف سرعت v ، مطابق شکل (۸ - ۱) ، اثر میکنند نشان‌میدهند . گیریم که این نیرو متناسب با اندازهٔ سرعت یعنی $f=Bv$ باشد که درآن ثابت B را ضریب میرائی(۲) گویند . از قانون دوم حرکت نیوتن برای $t \geqslant 0$ داریم :

$$M\frac{dv}{dt} = -Bv \qquad v(0)=V_0 \tag{۱-۱۶}$$

و بنابراین :

$$v(t)=V_0\, e^{-\left(\frac{B}{M}\right)t} \qquad t \geqslant 0 \tag{۱-۱۷}$$

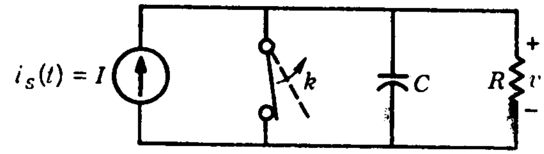
که درآن $\frac{M}{B}$ نمایش ثابت زمانی سیستم مکانیکی و $\frac{B}{M}$ – فرکانس طبیعی‌است .

۲- پاسخ حالت صفر

۲-۱- ورودی جریان ثابت

درمدار شکل (۲-۱) منبع‌جریان i_s با کلید k به مدار RC موازی خطی تغییرناپذیر با زمان متصل شده است . برای سادگی نخست حالتی را درنظر میگیریم که درآن جریان i_s ثابت و برابر I است. پیش از باز شدن کلید، منبع جریان درمدار اتصال کوتاه ، جریان گردشی(۳) بوجود می‌آورد. درلحظهٔ $t=0$ کلید باز شده، منبع جریان به مدار RC وصل

۱ — Friction ۲ — Damping ۳ — Circulating Current



شکل ۱-۲- مدار RC با ورودی منبع جریان . درلحظه $t=o$ کلید باز میشود .

میشود . از KVL می‌بینیم که ولتاژ دوسر هرسه عنصر یکی است . این ولتاژ را با v نشان داده وفرض میکنیم v پاسخ موردنظر باشد. بانوشتن KCL برحسب v معادله زیر:

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=i_s(t)=I \qquad t\geqslant o \tag{۲−۱}$$

که درآن I یک ثابت است برای شبکه بدست می‌آید . فرض میکنیم خازن بدون باراولیه باشد پس شرط اولیه چنین خواهد بود :

$$v(o)=o \tag{۲−۲}$$

پیش ازحل معادله‌های (۱ - ۲) و (۲ - ۲) آنچه راکه پس از باز شدن کلید روی خواهد داد بررسی می‌کنیم. درلحظهٔ $t=o^+$ ، یعنی‌درست پس‌از بازشدن کلید، بموجب آنچه درفصل ۲ گفتیم ، چون ولتاژ دوسر خازن نمی‌تواند جهش ناگهانی داشته باشد مگر اینکه جریان بی‌نهایت بزرگی درآن برقرار شود، ولتاژ دوسرخازن صفراست، وچون درلحظهٔ $t=o^+$ ، ولتاژ دوسرخازن‌هنوز صفراست بموجب قانون‌اهم جریان داخل مقاومت هم باید برابر صفر باشد . پس ، دراین لحظه همه جریان منبع وارد خازن میگردد . بموجب معادلهٔ (۱ - ۲) این عمل موجب افزایش ولتاژ میشود و درنتیجه داریم :

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{o^+}=\frac{I}{C} \tag{۲−۳}$$

با گذشت زمان v افزایش یافته و $\frac{v}{R}$ ، جریان‌داخل‌مقاومت نیز افزایش می‌یابد . مدتی دراز پس از باز شدن کلید، خازن کاملاً پر شده ولتاژ عملاً ثابت میماند و پس ازآن

$\frac{dv}{dt} \approx o$ است و همهٔ جریان منبع از داخل مقاومت گذشته و خازن مانند یک مدار باز عمل می‌کند ، یعنی :

$$v \approx RI \qquad (۲-۴)$$

این نتیجه از معادلهٔ (۱ - ۲) نیز برمی‌آید و درشکل (۲ - ۲) نیز نشان داده شده است و گوئیم مدار « بحالت دائمی[1] » رسیده است . اکنون تنها باید نشان داد که تغییر کلی ولتاژ چگونه انجام میگیرد . بدین‌منظور از روش تحلیلی زیر استفاده می‌کنیم.

جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی و ناهمگن را میتوان بصورت زیر نوشت :

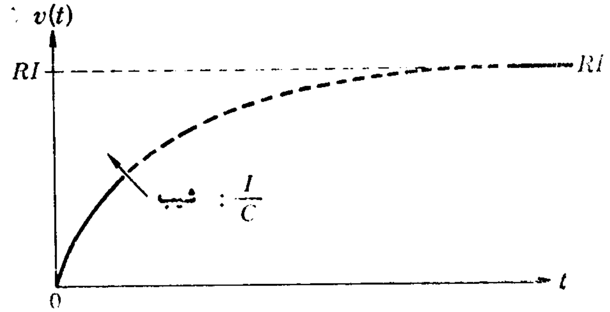
$$\boxed{v = v_h + v_p} \qquad (۲-۵)$$

که درآن v_h یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل همگن و v_p ، یک‌جواب‌خاص‌معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن است . البته v_p به‌ورودی مدار بستگی‌دارد . دراین مسأله جواب عمومی معادلهٔ همگن چنین است :

$$\boxed{v_h = K_1 e^{s_0 t}} \quad s_0 = -\frac{1}{RC} \qquad (۲-۶)$$

که درآن K_1 ثابتی‌است دلخواه . برای یک ورودی‌جریان ثابت مناسب‌ترین جواب‌خاص یک مقدار ثابت است :

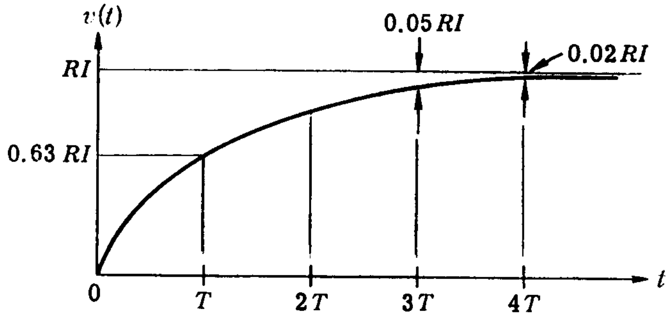
$$\boxed{v_p = RI} \qquad (۲-۷)$$



شکل ۲-۲- رفتار اولیه و نهائی ولتاژ دوسرخازن

---

[1] — Steady state



شکل ۳-۲- پاسخ ولتاژ مدار RC ناشی ازمنبع ثابت I چنانکه درشکل (۱-۲) با $v(o)=o$ نشان داده شده است .

زیرا ثابت RI معادله دیفرانسیل (۱ - ۲) را برمی‌آورد . با جایگزینی روابط (۶ - ۲) و (۷ - ۲) در رابطه (۵ - ۲) جواب کلی معادلهٔ (۱ - ۲) بدست می‌آید :

$$\boxed{v(t)=K_1\, e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}+RI} \qquad t\geqslant o \qquad (۲-۸)$$

که درآن K_1 را باید از شرط اولیه‌ای که با معادلهٔ (۲-۲) مشخص میشود بدست آورد . با قراردادن $t=o$ درمعادلهٔ (۸ - ۲) چنین داریم :

$$v(o)=K_1+RI=o$$

پس :

$$K_1=-RI \qquad (۲-۹)$$

بنابراین عبارت ولتاژ بصورت تابعی از زمان چنین میباشد .

$$\boxed{v(t)=RI\left(1-e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}\right)} \qquad t\geqslant o \qquad (۲-۱۰)$$

منحنی شکل(۳-۲) نشان میدهد چگونه ولتاژ بطور نمایی بمقدار حالت دائمی خود نزدیک میشود . درزمانی درحدودچهاربرابر ثابت زمانی‌مدار ، ولتاژبمقداری‌میرسد که تقریباً ۲ درصد با مقدار نهایی RI متفاوت است .

تمرین ۱- پاسخ حالت صفر مدار شکل(۱-۲) را با مقیاسی مناسب برای حالتهای زیر رسم کنید :

الف : $I=200\ mA$ ، $R=1k\Omega$ (10^{3} اهم) و $C=1\mu F$ (10^{-6} فاراد)

ب : $I=2\ mA$ ، $R=50\ \Omega$ و $C=5\ nF$ (10^{-9} فاراد)

تمرین ۲- درباره شدن خازن مدار شکل(۱-۲) از لحاظ انرژی بحث کنید. بگفته دقیقتر ،

الف ـ شکل موجهای $p_s(\cdot)$ (توانی که منبع تحویل داده است) و $p_R(\cdot)$ (توان تلف شده درمقاومت) و $\mathcal{E}_C(\cdot)$ (انرژی ذخیره شده‌درخازن) را محاسبه کرده منحنی های آنها را رسم کنید .

ب ـ بازده این عمل یعنی نسبت انرژی که سرانجام درخازن ذخیره می‌شود به انرژی که منبع تحویل میدهد (یعنی $\int_0^{\infty} p_s(t)\,dt$) را حساب کنید .

۲-۲- ورودی سینوسی

اکنون همان مدار را با ورودی متفاوتی درنظر میگیریم . فرض کنیم منبع بارابطه سینوسی زیر داده شده باشد :

$$i_s(t)=A_1\cos(\omega t+\Phi_1) \qquad t\geqslant 0 \qquad (2-11)$$

دراین رابطه ثابت A_1 را « دامنه » وثابت ω را « فرکانس » (زاویه‌ای) ورودی سینوسی مینامند . فرکانس برحسب رادیان برثانیه اندازه گرفته میشود . ثابت Φ_1 را « فاز[1] » گویند. اکنون به‌حل این‌معادله که تعبیرفیزیکی آن‌را دربخش بعدخواهیم دیدمی‌پردازیم. چون دراین‌حالت بجز ورودی بقیه مدار مانند حالت پیش است جواب معادلـه دیفرانسیل همگن بهمان‌صورت پیش میباشد (معادلهٔ (۲-۶)) . پس لازم‌است که تنها برای ورودی سینوسی یک جواب خاص بیابیم . شایسته‌ترین جواب خاص یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثـابت برای یک ورودی سینوسی ، یک تابع سینوسی با همان فرکـانس است .

1 — Phase

ازاینرو v_p را باید بدین‌صورت نوشت :

$$v_p(t) = A_2 \cos(\omega t + \Phi_2) \qquad (۲-۱۲)$$

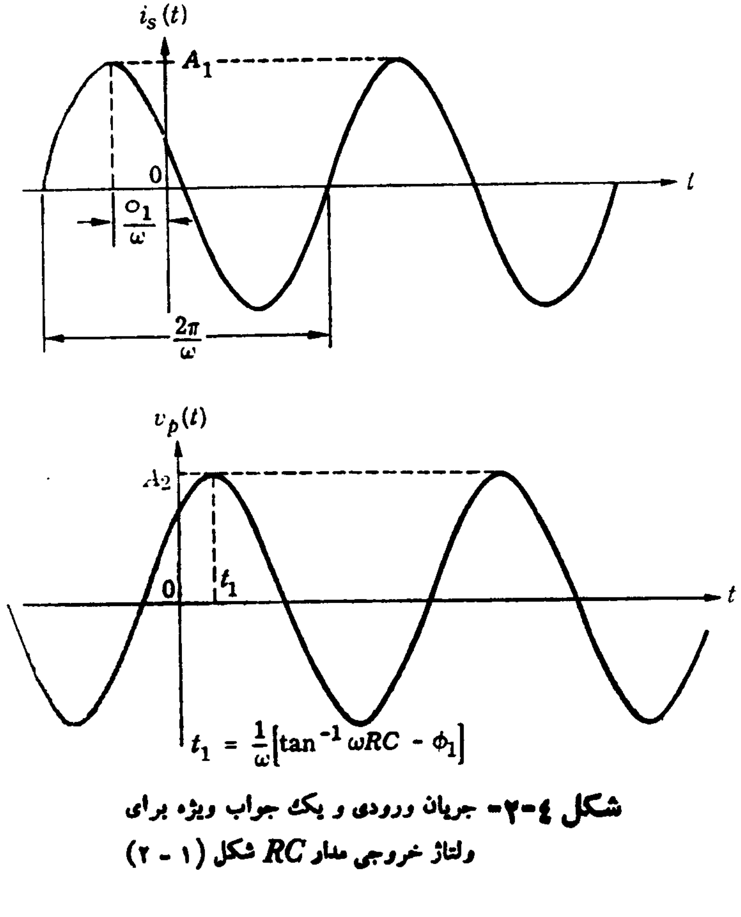
که درآن A_2 و Φ_2 ثابت‌هائی هستند که باید تعیین کرد . بدین‌منظور رابطهٔ (۲-۱۲) را در معادلهٔ دیفرانسیل زیر میگذاریم .

$$C\frac{dv_p}{dt} + \frac{1}{R}v_p = A_1 \cos(\omega t + \Phi_1) \qquad (۲-۱۳)$$

که خواهیم داشت :

$$-CA_2\omega \sin(\omega t + \Phi_2) + \frac{1}{R}A_2 \cos(\omega t + \Phi_2) = A_1 \cos(\omega t + \Phi_1)$$

برای همه $t \geqslant 0$



شکل ۴-۲- جریان ورودی و یک جواب ویژه برای ولتاژ خروجی مدار RC شکل (۱ - ۲)

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی وگسترش عبارتهای $\sin(\omega t+\Phi_2)$ ، $\cos(\omega t+\Phi_2)$ و $\cos(\omega t+\Phi_1)$ برحسب ترکیب خطی $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ و برابر گذاردن جداگانه ضریبهای $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ این نتیجه‌ها بدست می‌آیند:

$$A_2=\frac{A_1}{\sqrt{(1/R)^2+(\omega C)^2}} \tag{۲-۱۴}$$

و:

$$\Phi_2=\Phi_1-\tan^{-1}\omega RC \tag{۲-۱۵}$$

دراینجا $\tan^{-1}\omega RC$ نمایش زاویه‌ایست درفاصلهٔ ۰ تا °۹۰ که تانژانت آن برابر ωRC است . این جواب خاص و جریان ورودی درشکل (۲-۴) رسم شده‌اند . درفصل هفتم روشی کلی‌تر و زیباتر برای یافتن این جواب خاص خواهیم‌دید.

تمرین- معادله‌های (۲-۱۴) و (۲-۱۵) را به تفصیل بدست آورید .

بنابراین جواب کلی معادلهٔ (۲-۱۳) چنین است :

$$v(t)=K_1 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}+A_2\cos(\omega t+\Phi_2) \qquad t\geq 0 \tag{۲-۱۶}$$

با گذاشتن $t=0$ خواهیم داشت :

$$v(0)=K_1+A_2\cos\Phi_2=0 \tag{۲-۱۷}$$

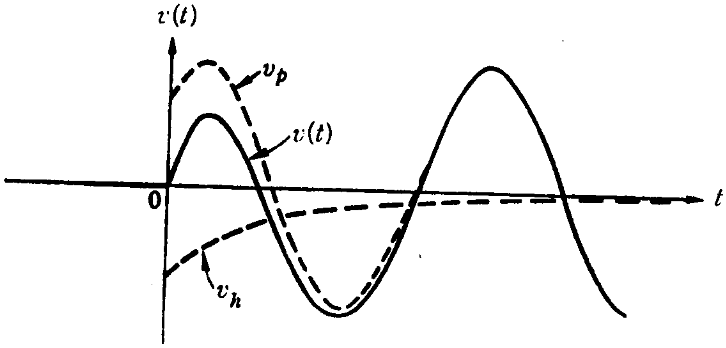
یعنی :

$$K_1=-A_2\cos\Phi_2 \tag{۲-۱۸}$$

پس پاسخ چنین خواهد بود :

$$\boxed{v(t)=-A_2\cos\Phi_2\, e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}+A_2\cos(\omega t+\Phi_2) \qquad t\geq 0} \tag{۲-۱۹}$$

که درآن A_2 و Φ_2 درمعادله‌های (۲-۱۴) و (۲-۱۵) تعریف شده‌اند . منحنی v یعنی پاسخ حالت صفر به‌ورودی $A_1\cos(\omega t+\Phi_1)$ درشکل (۲-۵) دیده میشود .



شکل ۵-۲- پاسخ ولتاژ مدار شکل (۱-۲) با $v(0)=0$
و $i_s(t)=A_1\cos(\omega t+\Phi_1)$

در دوحالتی که دراین بخش دیدیم ولتاژ v را پاسخ و منبع جریان i_s را ورودی درنظر گرفتیم . شرط اولیه درمدار صفر بوده یعنی پیش از وارد آوردن ورودی، ولتاژ دوسر خازن برابر با صفر بود . درحالت کلی اگر همه شرطهای اولیه درمدار صفر باشند گوئیم مدار در **حالت‌صفر**(۱) است+ . پاسخ مداری که ازحالت‌صفر شروع میکند منحصراً معلول ورودی آنست. بموجب تعریف ، **پاسخ حالت صفر** یک مدار پاسخ آن به یک ورودی است که در زمان دلخواه t_0 بمدار وارد شود بشرط آنکه مدار درست پیش از وارد آوردن این ورودی (یعنی در زمان t_0-) درحالت صفر باشد . درمحاسبهٔ پاسخ حالت صفر هدف اصلی، رفتار پاسخ برای $t\geq t_0$ است. بدین‌منظورچنین «قرار میگذاریم» : برای $t<t_0$ ورودی و پاسخ حالت صفر را متحد باصفر میگیریم .

+ درفصل سیزدهم ثابت خواهیم کرد که اگر ولتاژ دوسرهمه خازنها وجریان‌اولیه داخل همه سلفهای یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان برابر صفر باشد این مدار درحالت صفر خواهد بود .

۱ — Zero State

۳- پاسخ کامل : حالت گذرا و حالت دائمی

۳-۱- پاسخ کامل

پاسخ یک مدار به تحریک ورودی وشرطهای اولیه روبهم، پاسخ کامل[۱] نام دارد. بنابراین پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر حالتهای خاص پاسخ کامل هستند. دراین بخش نشان خواهیم داد که :

« برای مدار ساده خطی تغییرناپذیر با زمان RC پاسخ کامل برابر است با مجموع پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر آن مدار+. »

مدار شکل (۳-۱)، که درآن خازن دارای بار اولیه میباشد یعنی :

$$v(0)=V_0\neq 0$$

را درنظر گرفته یک ورودی جریان درلحظهٔ $t=0$ بمدار وصل میکنیم. بموجب تعریف، پاسخ کامل شکل موج $v(\cdot)$ است که معلول تحریک ورودی $i_s(\cdot)$ و حالت اولیه V_0 روبهم میباشد. از لحاظ ریاضی این پاسخ جواب معادله زیر است :

$$C\frac{dv}{dt}+Gv=i_s(t) \qquad t\geqslant 0 \qquad (۳-۱)$$

با شرط

$$v(0)=V_0 \qquad (۳-۲)$$

که درآن V_0 ولتاژ اولیه دوسر خازن است. گیریم v_i پاسخ ورودی صفر باشد، بنا به تعریف v_i جواب معادله زیر است :

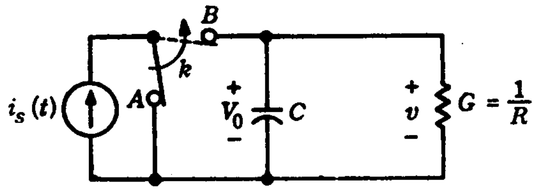
$$C\frac{dv_i}{dt}+Gv_i=0 \qquad t\geqslant 0$$

با شرط

$$v_i(0)=V_0$$

+ درواقع این بیان برای هرمدارخطی (تغییرپذیر یا تغییرناپذیر بازمان) درست است.

۱ — Complete Response



شکل ۱-۳- مدار RC با $v(o)=V_0$ با یک منبع جریان $i_s(t)$ تحریک میشود. درلحظه $t=o$ کلید k ازنقطه A به نقطه B چرخانیده میشود .

گیریم v_0 پاسخ حالت صفر باشد . بنا بتعریف ، این پاسخ جواب معادله زیر است :

$$C\frac{dv_0}{dt}+Gv_0=i_s(t) \qquad t\geqslant o$$

با شرط

$$v_0(o)=o$$

ازجمع این چهار معادله میتوان معادله زیر را بدست آورد :

$$C\frac{d}{dt}(v_i+v_0)+G(v_i+v_0)=i_s(t) \qquad t\geqslant o$$

با شرط

$$v_i(o)+v_0(o)=V_0$$

اما چنانکه ازاین دو معادله برمی‌آید شکل موج $v_i(\cdot)+v_0(\cdot)$ هم معادله دیفرانسیل (۳-۱) وهم شرطهای اولیهٔ(۳-۲) را برمی‌آورد. وچون جواب معادلهٔ دیفرانسیلی بصورت (۳-۱) با شرطهای اولیه (۳ - ۲) یکتا است ، جواب کامل پاسخ v بدین‌صورت میباشد :

$$v(t)=v_i(t)+v_0(t) \qquad t\geqslant o$$

یعنی پاسخ کامل v برابر بامجموع پاسخ ورودی صفر v_i وپاسخ‌حالت صفر v_0 میباشد.

مثال- گیریم ورودی یک مدار RC منبع جریان ثابت $i_s=I$ باشد که درلحظهٔ $t=o$ وارد میشود . میتوان بآسانی پاسخ کامل مدار را نوشت زیرا پاسخ ورودی صفر و

پاسخ حالت صفر را محاسبه کرده‌ایم . پس :

$$v(t)=v_i(t)+v_0(t) \qquad t\geqslant 0$$

از معادلهٔ (۸-۱) چنین داریم :

$$v_i(t)=V_0 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \qquad t\geqslant 0$$

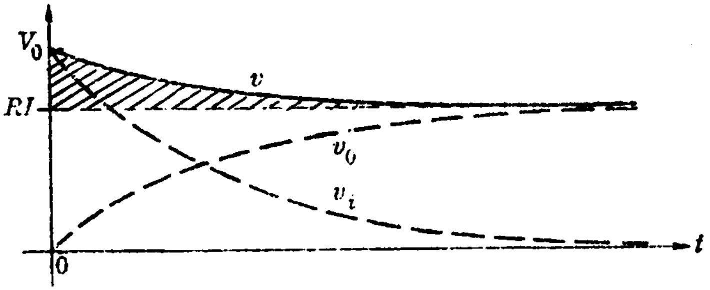
همچنین از معادلهٔ (۱۰-۲) چنین داریم :

$$v_0(t)=RI\left(1-e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}\right) \qquad t\geqslant 0$$

درنتیجه پاسخ کامل چنین است :

$$\underbrace{v(t)}_{\text{پاسخ کامل}} = \underbrace{V_0 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}}_{\text{پاسخ ورودی صفر } v_i} + \underbrace{RI\left(1-e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}\right)}_{\text{پاسخ حالت صفر } v_0} \qquad t\geqslant 0 \qquad (۲-۳)$$

پاسخها درشکل (۲-۳) نشان داده شده‌اند .



شکل ۲-۳- پاسخ ورودی صفر ، پاسخ حالت صفر وپاسخ کامل یک مدار ساده RC . تحریک ورودی یک منبع جریان ثابت است که در $t=0$ اعمال میشود .

مسلم است که از لحاظ محاسباتی محض، یافتن پاسخ کامل مستلزم حل معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن با شرطهای اولیهٔ معین است و ممکن است نیازی به تجزیهٔ آن بصورت پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر نباشد . از سوی دیگر از لحاظ فیزیکی، این نکته که پاسخ کامل برابر است بامجموع پاسخ حالت صفر (معلول ورودی تنها) وپاسخ ورودی صفر (معلول شرطهای اولیه) بسیار جالب است و این تجزیه یک نتیجهٔ اساسی نظریه مدار و در واقع نظریه سیستمهای خطی میباشد .

تبصره - ما درفصل ششم ثابت خواهیم کرد که برای مدار RC موازی‌خطی تغییر ناپذیر بازمان ، و برای ورودی دلخواه i_s ، میتوان‌پاسخ کامل را صریحاً بدین‌صورت نوشت:

$$\underbrace{v(t)}_{\text{پاسخ کامل}} = \underbrace{V_0\, e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} + \underbrace{\int_0^t \frac{1}{C}\, e^{-\left(\frac{t-t'}{RC}\right)} i_s(t')\, dt'}_{\text{پاسخ حالت صفر}}$$

تمرین- با جایگزینی مستقیم نشان دهید که عبارت پاسخ کامل که دربالا داده شده است معادله‌های (۳-۱) و (۳-۲) را برمی‌آورد .

۳-۲- حالت گذرا وحالت دائمی

درمثال پیش میتوان پاسخ کامل را با راهی دیگر تجزیه نمود . پاسخ کامل‌معلول حالت اولیهٔ V_0 و ورودی جریان ثابت I درمعادله (۳-۳) چنین نوشته میشود :

$$\underbrace{v(t)}_{\text{پاسخ کامل}} = \underbrace{(V_0 - RI)\, e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}}_{\text{حالت گذرا}} + \underbrace{RI}_{\text{حالت دائمی}} \qquad t \geqslant 0 \qquad (۳-۴)$$

همچنانکه درقسمت هاشور زده شکل (۳-۲) نشان داده شده است جملهٔ اول یعنی تفاضل شکل موج $v(\cdot)$ و ثابت RI یک تابع نمایی میرا[1] است . برای مقادیر بزرگ t جملهٔ

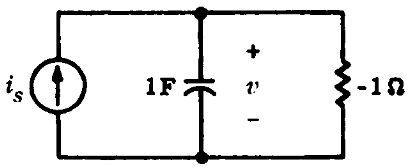
۱ — Decaying

اول ناچیز و جمله دوم ازآن بسیار بزرگتراست. بدین سبب جمله اول را «حالت گذرا[۱]» و جمله دوم را « حالت دائمی[۲] » گویند . دراین‌مثال واضح است که پاسخ حالت صفر وپاسخ ورودی صفر هردو درحالت گذرا سهیم هستند درصورتیکه حالت دائمی تنها محلول پاسخ حالت صفر میباشد. از لحاظ فیزیکی حالت گذرا نتیجهٔ دوعلت است ، یکی شرطهای اولیه درمدار و دیگری وارد آمدن ناگهانی ورودی . و اگر رفتار مدار با پیشرفت زمان خوب باشد این حالت گذرا کم کم ازمیان‌میرود وحالت دائمی تنها معلول تحریک ورودی، دارای شکل موجی است که با شکل موج ورودی ارتباط بسیار نزدیک دارد . مثلاً اگر ورودی‌ثابت باشد پاسخ‌حالت‌دائم نیزمقداری‌است ثابت‌واگر ورودی یک‌سینوسی بافرکانس ω باشد پاسخ حالت دائمی نیز یک سینوسی با همان فرکانس خواهد بود . درمثال بخش (۲-۲) ورودی برابر با $i_s=A_1\cos(\omega t+\Phi_1)$ و پاسخ آن (همچنانکه از معادلهٔ (۱۹-۲) برمی‌آید) دارای جزء حالت دائمی $A_2\cos(\omega t+\Phi_2)$ و جزء گذرای :

$$-A_2\cos\Phi_2\, e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}$$

میباشد . بحث کامل حالتهای گذرا و دائمی درفصل هفتم دیده خواهد شد .

تمرین- مداری که‌درشکل(۳-۳) دیده میشود دارای یک‌خازن خطی یک فارادی و یک مقاومت خطی با مقاومت منفی ۱ — اهم است. درلحظهٔ $t=0$ هنگامی که منبع جریان وارد میشود مدار درحالت صفر است ، چنانکه برای $t\geqslant 0$ داریم $i_s=I_m\cos\omega t$ (I_m و ω مقادیر ثابتی هستند) . پاسخ v را محاسبه ورسم کنید . آیاحالت دائمی‌سینوسی وجود دارد ؟ توضیح دهید .



شکل ۳-۳- تمرین حالت دائمی. توجه کنید که مدار دارای یک مقاومت ، با مقاومت « منفی » است .

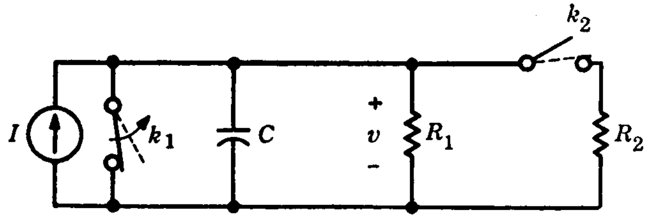
---

۱ — Transient State ۲ — Steady State

تبصره ۵- تذکر این نکته حائزاهمیت است که گاه میتوان باورودی سینوسی وانتخاب لحظهٔ خاصی برای وارد نمودن این ورودی، حالت گذرا را کاملاً حذف کرد. ما این نتیجه را با همان مثال بخش (۲-۲) نشان خواهیم داد. چنانکه میدانیم مسأله موردنظر تعیین پاسخ حالت صفر یک مدار RC به ورودی جریان $A_1 cos(\omega t+\Phi_1)$ بود. جواب این مسأله بصورت معادلهٔ (۲-۱۶) و برحسب ثابت K_1 بدست آمده بود ولی بایستی این ثابت را با شرطهای اولیه تعیین کرد. واضح است که اگر K_1 صفر باشد حالت گذرایی وجود نداشته و v درمعادلهٔ (۲-۱۶) یک سینوسی محض خواهد بود. چنانکه می‌بینیم در معادلهٔ (۲-۱۷)، K_1 به ولتاژ اولیه دوسرخازن وهم‌چنین به مقدار شکل موج ورودی در لحظهٔ $t=o$ بستگی دارد. درواقع اگر وتنها اگر، $\Phi_2=\pm ۹۰°$ باشد $K_1=o$ خواهدبود. ازلحاظ فیزیکی این بدان معنی است که اگر درلحظهٔ $t=o$، ولتاژ حالت‌دائمی دوسرخازن یعنی، $A_2 cos\,\Phi_2$ برابر ولتاژ اولیه دوسرآن یعنی، $v(o)$ باشد پاسخ حالت صفر، حالت گذرایی نخواهد داشت. برای آنکه $\Phi_2=\pm ۹۰°$ باشد، معادلهٔ (۲-۱۵) مستلزم آنست که فاز تحریک ورودی برابر $\pm ۹۰°+tan^{-1}\omega CR$ انتخاب شود. میتوان از این بحث چنین نتیجه گرفت که اگر در لحظهٔ $t=o$ ولتاژ دوسر خازن معین باشد وارد آوردن ناگهانی منبع جریان سینوسی یک حالت گذرا بوجود می‌آورد مگراینکه دامنه و فاز ورودی سینوسی بطورمناسب‌طوری تنظیم شوند که جزء حالت دائمی v درلحظهٔ $t=o$ برابر ولتاژ اولیهٔ دوسر خازن گردد.

۳-۳- مدارهای با دو ثابت زمانی

اغلب درمدارهایی که کلید قطع و وصل دارند مسأله هایی شامل محاسبهٔ حالتهای گذرا پیش می‌آیند، واکنون می‌خواهیم چنین‌مسائلی را با مداری که درشکل (۳-٤) نشان داده شده است مطالعه کنیم. گیریم خازن و مقاومتها خطی و تغییرناپذیر با زمان و خازن بدون بار اولیه است. برای $t<o$ کلید k_1 بسته وکلید k_2 باز است. در $t=o$ کلید k_1 را بازکرده منبع جریان ثابت را بمدار موازی R_1C وصل می‌کنیم. خازن بتدریج با ثابت زمانی $T_1 \triangleq R_1C$ پر می‌شود. اکنون گیریم که در زمان $t=T_1$ کلید k_2 بسته شود. می‌خواهیم شکل موج ولتاژ را در دوسرخازن، برای $t\geqslant o$ بدست‌آوریم. میتوان‌مسأله‌را به‌دوجزء تقسیم‌نمود: یکی‌فاصله $[o, T_1]$ و دیگری فاصلهٔ $[T_1, \infty)$.



شکل ٤-۳- یک مسأله حالت گذرای ساده . درلحظه $t=0$ کلید $k_۱$ باز شده و درلحظه $t=T_۱ \triangleq R_۱C$ کلید $k_۲$ بسته میشود .

نخست ولتاژ را درفاصلهٔ $[0 , T_۱]$ ، پیش‌ازاینکه کلید $k_۲$ بسته شود تعیین میکنیم . بنا بفرض چون $v(0)=0$ است میتوان پاسخ حالت صفر را فوراً تعیین نمود . درنتیجه

$$v(t)=\begin{cases} 0 & t\leqslant 0 \\ R_۱ I\left(۱-e^{-\frac{t}{T_۱}}\right) & 0\leqslant t\leqslant T_۱ \end{cases} \qquad (۳-۵)$$

درلحظهٔ $t=T_۱$:

$$v(T_۱)=R_۱ I\left(۱-\frac{۱}{e}\right) \qquad (۳-٦)$$

این ، شرط اولیه قسمت دوم مسأله است. چون کلید $k_۲$ برای $t>T_۱$ بسته است یک ترکیب موازی C و $R_۱$ و $R_۲$ داریم و ثابت زمانی این مدار چنین است :

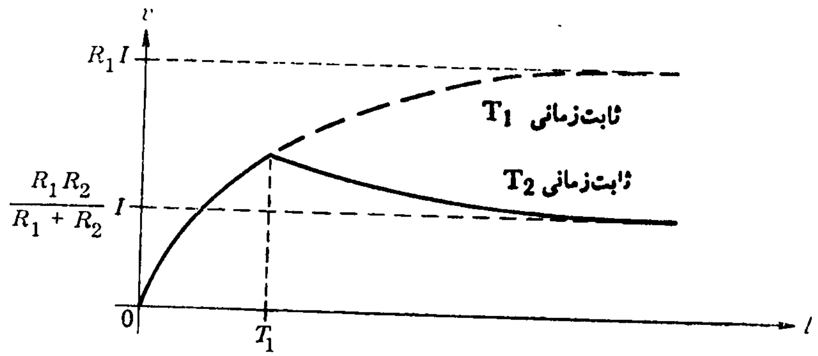
$$T_۲=C\left(\frac{R_۱ R_۲}{R_۱+R_۲}\right) \qquad (۳-۷)$$

و تحریک ورودی I میباشد . برای $t\geqslant T_۱$ پاسخ کامل این قسمت دوم چنین است :

$$v(t)=R_۱ I\left(۱-\frac{۱}{e}\right)e^{-\frac{t-T_۱}{T_۲}}+ \qquad (۳-۸)$$

$$\frac{R_۱ R_۲}{R_۱+R_۲} I\left(۱-e^{-\frac{t-T_۱}{T_۲}}\right) \qquad t\geqslant T_۱$$

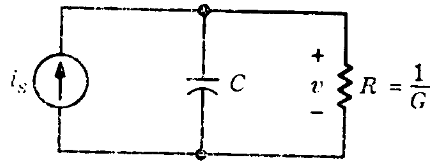
شکل موج $v(\cdot)$ درشکل (۳-۵) دیده میشود .



شکل ۵-۳- شکل موج ولتاژ برای مدار شکل (۴-۳)

۴- خطی بودن پاسخ حالت صفر

مسلم است که پاسخ حالت‌صفر «هر» مدار خطی یک تابع‌خطی تحریک ورودی‌است، یعنی وابستگی شکل موج پاسخ حالت صفر به شکل موج تحریک ورودی با یک تابع‌خطی بیان میشود. باید دانست که هرمنبع نابسته دریک مدار خطی بعنوان ورودی درنظر گرفته میشود. اکنون این نتیجه را با مدار خطی تغییرناپذیر با زمان RC که در بالا دیدیم تشریح می‌کنیم (به شکل (۱-۴) مراجعه شود). گیریم ورودی آن شکل موج جریان $i_s(\cdot)$ و پاسخ آن شکل موج ولتاژ $v(\cdot)$ باشد. میخواهیم مطلب زیر را بطور مشروح نشان دهیم:



شکل ۱-۴- مدار خطی تغییرناپذیر با زمان
با ورودی i_s و پاسخ v

« پاسخ حالت صفر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان RC موازی (که درشکل (۱-٤) دیده میشود) یک تابع خطی تحریک ورودی است، یعنی وابستگی شکل موج پاسخ حالت صفر به شکل موج تحریک ورودی دارای خاصیتهای جمع‌پذیری و همگنی است » .

۱- نخست درجمع پذیری بررسی میکنیم . دو جریان ورودی i_1 و i_2 را که هردو درلحظهٔ t_0 وارد میشوند درنظر میگیریم. میدانیم که منظور از i_1 (و همچنین i_2) شکل موج جریانی‌است که درلحظهٔ t_0 شروع شده و ازآن پس ادامه می‌یابد . پاسخهای حالت صفر متناظر را v_1 و v_2 می‌نامیم. بموجب تعریف، v_1 جواب یکتای معادلهٔ دیفرانسیل زیر است :

$$C\frac{dv_1}{dt}+Gv_1=i_1(t) \qquad t\geqslant t_0 \tag{٤-١}$$

با شرط

$$v_1(t_0)=0 \tag{٤-٢}$$

بطریقی مشابه ، v_2 جواب یکتای معادله دیفرانسیل زیر است :

$$C\frac{dv_2}{dt}+Gv_2=i_2(t) \qquad t\geqslant t_0 \tag{٤-٣}$$

با شرط

$$v_2(t_0)=0 \tag{٤-٤}$$

از جمع معادله‌های (۱-٤) و (۳-٤) وبا درنظر گرفتن (۲-٤) و (٤-٤) می‌بینیم که تابع v_1+v_2 معادلهٔ زیر را برمی‌آورد :

$$C\frac{d}{dt}(v_1+v_2)+G(v_1+v_2)=i_1(t)+i_2(t) \qquad t\geqslant t_0 \tag{٤-٥}$$

با شرط

$$v_1(t_0)+v_2(t_0)=0 \tag{٤-٦}$$

اکنون گوئیم که بموجب تعریف، پاسخ حالت‌صفر ورودی i_1+i_2 ، که درلحظهٔ $t=t_0$ وارد می‌شود جواب یکتای معادلهٔ دیفرانسیل زیر است :

$$C\frac{dy}{dt}+Gy=i_{1}(t)+i_{2}(t) \qquad t\geqslant t_{0} \tag{۴-۷}$$

با شرط

$$y(t_{0})=0 \tag{۴-۸}$$

با استفاده ازقضیه یکتایی[1] درموردجواب این معادله دیفرانسیل وبامقایسهٔ (۴-۵) و (۴-۶) با (۴-۷) و (۴-۸) باین نتیجه میرسیم که شکل موج $v_{1}(\cdot)+v_{2}(\cdot)$ ، پاسخ حالت صفر شکل موج ورودی $i_{1}(\cdot)+i_{2}(\cdot)$ است وچون این استدلال برای «هر» ورودی دلخواه i_{1} و i_{2} که در «هر» لحظه دلخواه t_{0} وارد شوند برقرار است ، معلوم میشود که «پاسخ حالت صفر مدار RC تابعی از تحریک ورودی است که دارای خاصیت جمع پذیری است.»

۲- اکنون همگنی را بررسی میکنیم . تحریک ورودی i_{1} (که در زمان t_{0} وارد میشود) وتحریک ورودی ki_{1} که درآن k ثابت حقیقی دلخواهی است را درنظر میگیریم . بموجب تعریف، پاسخ حالت صفر دراثرورودی i_{1} معادله های (۴-۱) و (۴-۲) را برمی‌آورد. بطریقی مشابه ، پاسخ حالت صفر دراثر ورودی ki_{1} معادلهٔ دیفرانسیل زیر را برمی‌آورد:

$$C\frac{dy}{dt}+Gy=ki_{1}(t) \qquad t\geqslant t_{0} \tag{۴-۹}$$

با شرط

$$y(t_{0})=0 \tag{۴-۱۰}$$

چون (۴-۱) و (۴-۲) را در «ثابت» k ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$C\frac{d}{dt}(kv_{1})+G(kv_{1})=ki_{1}(t) \qquad t\geqslant 0 \tag{۴-۱۱}$$

با شرط

$$kv_{1}(t_{0})=0 \tag{۴-۱۲}$$

اگر این چهار معادله را با یکدیگرمقایسه کنیم، با استفاده ازقضیه یکتایی جواب معادله های

۱ — Uniqueness theorem

دیفرانسیل معمولی ، باین نتیجه میرسیم که پاسخ حالت صفر دراثر تحریک ki_1 برابر است با kv_1 ، وچون این استدلال برای «هر» شکل موج ورودی‌دلخواه $i_1(\cdot)$ و « هر » زمان اولیه دلخواه t_0 و «هر»ثابت دلخواه k برقراراست، پس‌معلوم‌می‌شود که « پاسخ‌حالت‌صفر یک مدار RC تابعی از تحریک ورودی است که دارای خاصیت همگنی میباشد. »

بنا به تعریف تابع خطی، چون پاسخ‌حالت صفر ، یک تابع جمع‌پذیر وهمگن تحریک ورودی‌است ، پس یک «تابع خطی» تحریک‌ورودی‌میباشد ودرنتیجه گفته ما ثابت میشود .

« اپراتور $\mathcal{Z}_{t_0}$ » . میتوان خطی بودن پاسخ حالت صفر ، را بطور سمبلیک[1] با تعریف اپراتور[2] $\mathcal{Z}_{t_0}$ بیان کرد . برای مدار RC کـه درشکل (۱ - ٤) دیده می‌شود ، گیریم $\mathcal{Z}_{t_0}(i_s)$ نمایش « شکل موج » پاسخ حالت صفر مدار RC به ورودی شکل موج $i_s(\cdot)$ باشد . زیر نویس t_0 در $\mathcal{Z}_{t_0}$ نمایش آنستکه در زمان t_0 مدار RC درحالت صفر بوده و ورودی درلحظهٔ t_0 وارد شده است . پس معنای دقیق خطی بـودن پاسخ حـالت صفر چنین است :

۱- برای همه شکل موجهای ورودی $i_1(\cdot)$ و $i_2(\cdot)$ (که برای $t \geqslant t_0$ معین و برای $t < t_0$ متحد با صفر گرفته میشود) پاسخ حالت‌صفر برای ورودی $i_1(\cdot)+i_2(\cdot)$ برابر بـا مجموع پاسخ حالت صفر معلول ورودی $i_1(\cdot)$ تنها و پـاسخ حالت صفر معلول ورودی $i_2(\cdot)$ تنها میباشد ، یعنی :

$$\mathcal{Z}_{t_0}(i_1+i_2)=\mathcal{Z}_{t_0}(i_1)+\mathcal{Z}_{t_0}(i_2) \qquad (٤-١٣)$$

۲- برای همه عددهای حقیقی α و برای همه شکل موجهای $i(\cdot)$ ، پاسخ حالت صفر معلول ورودی $\alpha i(\cdot)$ برابر است با α برابر پاسخ حـالت صفر معلول ورودی $i(\cdot)$ ، یعنی :

$$\mathcal{Z}_{t_0}(\alpha i)=\alpha\, \mathcal{Z}_{t_0}(i) \qquad (٤-١٤)$$

تبصره ۱- اگرخازن‌ومقاومت شکل (۱-٤) خطی و « تغییرپذیر بازمان » باشند ،

---

۱ — Symbolically   ۲ — Operator

برای $t \geqslant t_0$ معادلهٔ دیفرانسیل چنین خواهد بود :

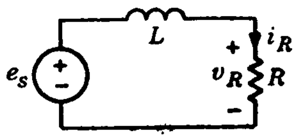
$$\frac{d}{dt}\,[C(t)\,v(t)]+G(t)\,v(t)=i_s(t) \qquad (۴-۱۰)$$

پاسخ حالت صفر باز یک تابعی خطی تحریک ورودی میباشد . در واقع اثبات جمع‌پذیری و همگنی تنها مستلزم تغییر مختصر خواهد بود . این اثبات هنوز معتبر است زیرا :

$$\frac{d}{dt}\,[\,C(t)\,v_1(t)\,]+\,\frac{d}{dt}\,[\,C(t)\,v_2(t)\,]=\,\frac{d}{dt}\,\Big\{C(t)\,[v_1(t)+v_2(t)\,]\Big\}$$

تبصره ۲- حقیقت زیر که ما آنرا تنها برای حالت خاص ثابت کردیم درحالت کلی نیز برقرار است . مدار دلخواهی راکه شامل عنصرهای خطی (تغییرپذیر یا تغییرناپذیر بازمان) است درنظر میگیریم و فرض میکنیم که این مدار تنها بوسیلهٔ یک منبع نابسته تحریک شود و جریان یا ولتاژ یک شاخه دلخواه آن پاسخ موردنظر باشد. بدینسان پاسخ حالت صفر یک تابع خطی تحریک ورودی است. اثبات این نتیجه به تجزیه و تحلیل کلی شبکه‌ها وابسته‌است (که درفصل ششم خواهیم‌دید) . مثلاً مدارخطی RL که درشکل (۴-۲) نشان‌داده شده وتحریک ورودی آن منبع ولتاژ e_s و پاسخ آن جریان i_R است‌دارای این خاصیت میباشدکه پاسخ حالت‌صفرآن $i_R(\cdot)$ یک تابع خطی تحریک ورودی $e_s(\cdot)$ میباشد .

تبصره ۳- از اثبات مدار ساده خطی RC که در بالا دیدیم بآسانی معلوم میشود که « پاسخ کامل » یک تابع خطی تحریک ورودی « نیست » (مگراینکه مدار ازحالت صفر شروع نماید). اکنون باثبات‌این‌موضوع بازگشته ملاحظه میکنیم که‌اگرمدار درحالت اولیه $V_0 \neq 0$ باشد ، یعنی درمعادلهٔ (۴-۲) ، $v_1(t_0)=V_0$ و درمعادلهٔ (۴-۴) ، $v_2(t_0)=V_0$ باشددراینصورت‌درمعادلهٔ(۴-۶) ، $[v_1(t_0)+v_2(t_0)]=2V_0$ خواهد بود



شکل۲-۴- مدارخطی RL باورودی e_s
و پاسخ i_R

که برابر ولتاژ اولیه نمی‌باشد. این نتیجه باردیگر این نکته مهم را تأییدمی‌کندکه رابطهٔ ورودی وپاسخ یک مدار، بوسیله شرطهای اولیه توأم بامعادله دیفرانسیل مشخص‌میشود. ما درفصل ششم نشان خواهیم دادکه پاسخ کامل هرمدار خطی‌را میتوان صریحاً برحسب شکل موج ورودی وپاسخ ورودی صفر نوشت‌که درآن، عبارت اخیر تنها به شرطهای اولیه مدار بستگی دارد .

تمرین- منظور ازاین تمرین‌آنستکه نشان دهیم اگر مداری شامل عناصر غیرخطی باشد پاسخ حالت صفر آن لزوماً یک تابع خطی تحریک ورودی نخواهد بود . بدین‌منظور مدار شکل (۲-٤) را درنظرگرفته وگیریم مقاومت‌آن غیرخطی بوده و مشخصه‌اش بصورت

$$v_R = a_1 i_R + a_3 i_R^3$$

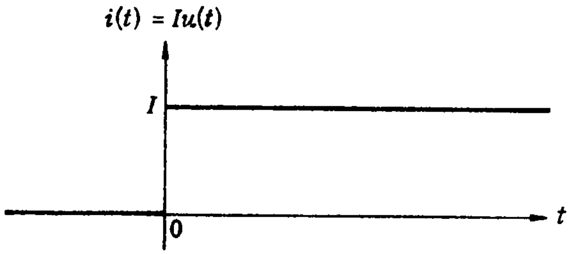
باشدکه درآن a_1 و a_3 ثابت‌های‌مثبتی‌هستند. نشان دهیدکه اپراتور $\mathcal{Z}_{t_0}$ دارای‌خاصیت جمع‌پذیری نیست .

۵- خطی بودن و تغییر ناپذیری بازمان

ما درفصل‌دوم ، عناصر مدار را برحسب خطی یاغیرخطی‌بودن، تغییرپذیری یا تغییر ناپذیری بازمان رده بندی نمودیم و دربخش پیش برای یک حالت ساده نشان دادیم که برای مدارهای خطی ، پاسخ حالت صفر ، یک تابع خطی تحریک ورودی است وگفتیم‌که این نتیجه برای مدارهای تغییرپذیر وتغییرناپذیر بازمان، هردو ، برقرار است. دراین‌بخش ما تفاوت میان پاسخهای یک مدار باعناصر تغییرناپذیر بازمان و مدار با عناصر تغییرپذیر با زمان را بررسی خواهیم‌کرد . این مطالعه از لحاظ درك اهمیت « تغییرناپذیری بازمان » برای ما بسیار سودمند خواهد بود .

۵-۱- پاسخ پله

تا اینجا ما هروقت منبع نابسته‌ای‌را به مداری‌وصل کردیم کلیدی بکار بردیم تانشان دهیم که دریک زمان‌معین $t=0$ ، کلید باز یا بسته شده و ورودی درمدار شروع به عمل مینماید . میتوان با بکار بردن یک تابع پله راه دیگری برای توصیف عمل وارد نمودن یک ورودی ، که در زمان‌معینی مانند $t=0$ شروع می‌شود ، عرضه نمود . مثلاً میتوان

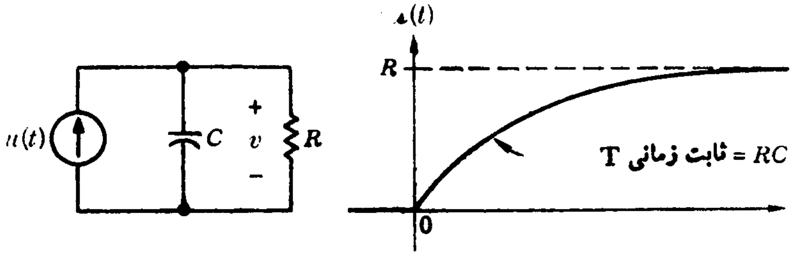


شکل ۱-۵- تابع پله با اندازهٔ I

یک منبع جریان ثابت را که درلحظهٔ $t=0$ وارد مدار میشود توسط منبع جریانی که بطور همیشگی به مدار وصل شده است (بدون کلید) و مطابق شکل (۱-۵) دارای شکل موج تابع پله میباشد نمایش‌داد. بنابراین برای $t<0$ ، $i(t)=0$ ،برای $t>0$ ، $i(t)=I$ و در $t=0$ جریان از صفر به I می‌جهد .

پاسخ حالت صفر یک‌مدار به‌ورودی پله واحد $u(\cdot)$ ، **پاسخ پله** نامیده شده و با s نشان داده میشود . بعبارت دقیقتر ، $s(t)$ پاسخ مدار درلحظهٔ t است بشرطیکه :

(۱) ورودی آن تابع پله واحد $u(\cdot)$ باشد . (۲) درست قبل از وارد کردن ورودی پله واحد، مدار درحالت صفر باشد . همانطوریکه قبلاً گفته شد ، ما قرار داد $s(t)=0$ برای $t<0$ را می‌پذیریم . برای مدار RC خطی تغییرناپذیر با زمان شکل (۲-۵) ، پاسخ پله برای همه t عبارتست از :



شکل ۲-۵- پاسخ پله یک مدار ساده RC

$u(t) = 0 \quad t \leq 0$
$u(t) = 1 \quad t > 0$

$$\boxed{s(t) = u(t)\,R\,(1 - e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t})} \qquad (۵-۱)$$

توجه کنید که وجود $u(t)$ درمعادلهٔ (۵-۱) ، نشان دادن این را که نتیجه فوق ، مانند حالات قبل ، فقط برای $t \geqslant 0$ درست است غیرضروری میسازد .

۵-۲- خاصیت تغییرناپذیری بازمان

دراینجا منظور ما تمرکز روی یک خاصیت اصلی مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان است. ابتدا با یک بحث حسی شروع کرده سپس به توصیف رسمی(۱) خاصیت تغییرناپذیری با زمان میپردازیم .

یک مدار دلخواه خطی تغییرناپذیر بازمان که با یک منبع نابسته تنها تحریک شده است را درنظرگرفته و یکی از متغیرهای شبکه را بعنوان پاسخ انتخاب کنید . مثلاً ممکن است که مدار RC موازی که قبلاً درنظرگرفته شده است را بکار برد . گیریم که ولتاژ v_0 پاسخ حالت صفر مدار به‌ورودی منبع جریان i_0 که درلحظهٔ $t=0$ شروع میشود باشد. برحسب اپراتور $\mathcal{Z}_0$ داریم :

$$v_0 \triangleq \mathcal{Z}_0(i_0) \qquad (۲-۵ الف)$$

زیرنویس 0 اپراتور $\mathcal{Z}_0$ مخصوصاً نشان میدهد که لحظهٔ شروع، $t=0$ میباشد. بنابراین v_0 جواب منحصر بفرد معادلهٔ دیفرانسیل زیر است :

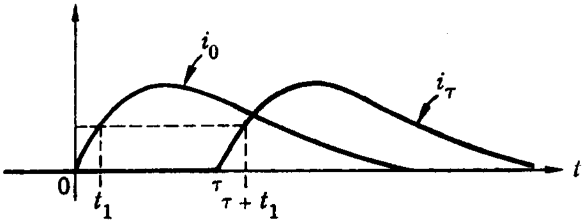
$$C\frac{dv_0}{dt} + Gv_0 = i_0(t) \qquad t \geqslant 0 \qquad (۲-۵ ب)$$

با شرط

$$v_0(0) = 0 \qquad (۲-۵ پ)$$

درحل (۲-۵ ب) و (۲-۵ پ) ما فقط به $t \geqslant 0$ علاقمندیم . با قرارداد قبلی فرض میکنم که برای $t<0$ ، $i_0(t)=0$ و $v_0(t)=0$ باشد . حال فرض کنید که بدون تغییر دادن فرم شکل موج $i_0(\cdot)$ آنرا بطور افقی انتقال دهیم تا اینکه در زمان τ

۱ — Formal



شکل ۳-۵- شکل موج i_τ نتیجه انتقال شکل موج i_0 بمقدار τ ثانیه است

شروع کند ، $\tau \geqslant o$ (به شکل (۳-۵) مراجعه شود) . منحنی‌حاصل ، تابع جدید $i_\tau(\cdot)$ را تعریف میکند که زیرنویس τ نشان دهندهٔ زمان شروع جدید است. از روی منحنی‌واضح است که عرض i_τ در زمان $\tau+t_1$ برابر عرض i_0 در زمان t_1 میباشد وچون t_1 اختیاری است بنابراین :

$$i_\tau(\tau+t_1)=i_0(t_1) \qquad \text{برای همه } t_1$$

و اگر $t=\tau+t_1$ قرار دهیم بدست می‌آوریم :

$$i_\tau(t)=\begin{cases} i_0(t-\tau) & t\geqslant\tau \\ o & t<\tau \end{cases} \qquad (۵-۳)$$

حال ، v_τ ، پاسخ مدار RC به‌ورودی i_τ را درنظر گیرید ، با فرض اینکه در زمان صفر ، مداردرحالت‌صفر است ، داریم :

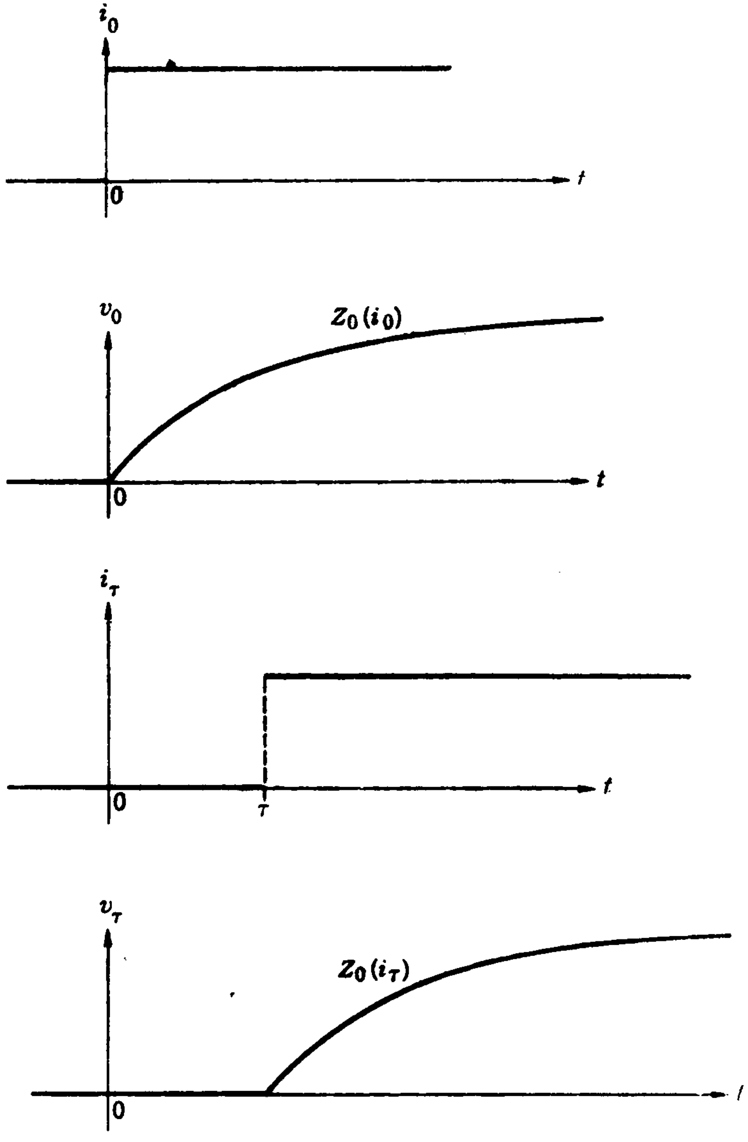
$$v_\tau \triangleq \mathcal{Z}_0(i_\tau) \qquad (\text{۴ — ۵ الف})$$

بعبارت دقیقتر ، v_τ پاسخ منحصر بفرد معادلهٔ زیر است :

$$C\frac{d}{dt}v_\tau(t)+Gv_\tau(t)=i_\tau(t) \qquad t\geqslant o \qquad (\text{۴ — ۵ ب})$$

با شرط

$$v_\tau(o)=o \qquad (\text{۴ — ۵ پ})$$



شکل ۴-۵- تشریح خاصیت تغییرناپذیری بازمان

بطور حسی، ما انتظار داریم که شکل موج v_τ همان شکل‌موج v_0 باشد که بمقدار τ انتقال داده شده است. در واقع چون مدار تغییرناپذیر با زمان است پاسخ آن به i_τ که در زمان τ وارد شده است، بجز یک انتقال زمانی، برابر پاسخ آن به i_0 که در زمان $t=0$ وارد شده است خواهد بود. این حقیقت درشکل (۴ - ۵) نشان داده شده است.

برای دانشجویانیکه علاقمند به‌استدلال مشروح باشند. اثبات زیر را در دومرحله بیان میکنیم:

۱- v_τ درفاصلهٔ $(0, \tau)$ بطور متحد مساوی‌صفراست، در واقع $v_\tau \equiv 0$، برای $0 \leqslant t \leqslant \tau$ درمعادلهٔ (۴ - ۵ ب) (بعلت اینکه دراین فاصله $i_\tau \equiv 0$) و در شرط اولیهٔ (۴ - ۵ پ) صدق‌میکند. چون درفاصله $0 \leqslant t \leqslant \tau$، $v_\tau \equiv 0$ است‌ازاینجا نتیجه می‌شود:

$$v_\tau(\tau)=0 \qquad (۵ — ۵)$$

۲- حال v_τ را برای $t \geqslant \tau$ باید تعیین نمود. برای‌این کار معادلهٔ (۵-۵) را بعنوان شرط اولیه بکار برده و اظهار میکنیم که شکل موج حاصل از انتقال v_0 بمقدار τ برای $t \geqslant \tau$ درمعادلات(۴ - ۵ ب) و (۵ - ۵) صدق‌میکند. برای‌اثبات این‌مطلب تحقیق‌میکنیم تابع y که بصورت $y(t) \triangleq v_0(t-\tau)$ تعریف میشود، برای $t \geqslant \tau$ درمعادله دیفرانسیل (۴ - ۵ ب) وشرط اولیه (۵-۵) صدق میکند.

با عوض کردن t با $t-\tau$ درمعادلهٔ (۲ - ۵ ب) بدست می‌آوریم که:

$$C\frac{d}{dt}[v_0(t-\tau)]+Gv_0(t-\tau)=i_0(t-\tau)=i_\tau(t) \qquad t \geqslant \tau \qquad (\text{۶ — ۵ الف})$$

و یا طبق تعریف:

$$C\frac{d}{dt}[y(t)]+Gy(t)=i_\tau(t) \qquad t\geqslant\tau \qquad (\text{۶ — ۵ ب})$$

که دقیقاً همان معادلهٔ (۴-۵ ب) برای $t \geqslant \tau$ میباشد. واضح است که شرایط اولیه نیز برقرار است زیرا:

$$y(\tau) \triangleq v_0(t-\tau)\Big|_{t=\tau}=v_0(0)=0$$

بعبارت دیگر تابع $y(t) \triangleq v_0(t-\tau)$ برای $t \geqslant \tau$ درمعادلهٔ دیفرانسیل (۴ ـ ۵ ب) و شرط اولیه (۵ ـ ۵) صدق میکند . این حقیقت ، توأم با $v_\tau \equiv 0$ درفاصلهٔ $[0 , \tau)$ لازم‌میدارد که « شکل‌موج v_0 که بمقدار τ تغییرمکان‌داده باشد برابر $\mathcal{Z}_0(i_\tau)$ » ، یعنی پاسخ حالت صفر به‌ورودی i_τ ، می‌باشد .

مثال- اگر $i_0(t)=Iu(t)$ باشد دراین‌صورت :

$$v_0(t)=u(t)\,RI\,(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad \text{برای همه } t$$

و پاسخ حالت صفر برای $i_\tau(t)=i_0(t-\tau)=Iu(t-\tau)$ مساوی است با :

$$v_\tau(t)=u(t-\tau)RI(1-e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}) \qquad \text{برای همه } t$$

تبصره ۱- استدلال گفته شده دربالا به‌مقدارخاص $\tau \geqslant 0$ وبه‌فرم شکل‌موج‌ورودی i_0 بستگی ندارد . بعبارت دیگر برای همه $\tau \geqslant 0$ و همه i_0 ، $\mathcal{Z}_0(i_\tau)$ عیناً مساوی $\mathcal{Z}_0(i_0)$ است که بمقدار τ انتقال داده شده است. این حقیقت را « خاصیت تغییرناپذیری بازمان » مدار خطی تغییرناپذیر بازمان RC نامند .

تبصره ۲- مشاهده این موضوع بسیارحائزاهمیت است که، دربحث اینکه معادلهٔ (۶ ـ ۵) درواقع همان معادلهٔ (۲ ـ ۵ ب) است که درآن $t-\tau$ بجای t جایگزین شده بود ، از ثابت بودن مقادیر C و G استفاده کردیم .

۳-۵- اپراتور انتقال

میتوان مفهوم تغییرناپذیری با زمان را با بکار بردن « اپراتور انتقال » دقیقاً بیان نمود . گیریم که $f(\cdot)$ شکل موج دلخواهی باشد که برای همه t تعریف شده است و T_τ اپراتوری باشد که وقتی روی f عمل‌میکند شکل‌موجی یکسان ولی‌انتقال یافته بمقدار

۱ — Translation

τ بوجودمی‌آورد. شکل‌موج انتقال یافته را $f_\tau(\cdot)$ نامیده و عرضهای آن بوسیله رابطه زیر داده میشوند :

$$f_\tau(t)=f(t-\tau) \qquad \text{برای همه } t$$

بعبارت دیگر ، نتیجه بکار بردن اپراتور T_τ روی شکل‌موج f ، شکل‌موج جدیدی است که با $T_\tau f$ نشان داده می‌شود ، بقسمی‌که درهرزمان t مقدار شکل‌موج جدید ، که با $(T_\tau f)(t)$ نشان داده می‌شود ، توسط رابطه زیر به مقادیر f مربوط میشود :

$$(T_\tau f)(t)=f(t-\tau) \qquad \text{برای همه } t$$

درطرزنمایش بحث‌قبلی‌داشتیم $f_\tau=T_\tau f$. اپراتور T_τ را **اپراتورانتقال**[1] نامند. حقیقت اینکه اپراتور انتقال یک اپراتور خطی است بسیار حائز اهمیت است. در واقع این اپراتور دارای خاصیت جمع‌پذیری است و بنابراین :

$$T_\tau(f+g)=T_\tau f+T_\tau g$$

یعنی نتیجه انتقال $f+g$ مساوی مجموع انتقال یافته f و انتقال یافته g است . این اپراتور همگن نیز میباشد . اگر α یک عدد حقیقی دلخواه و f یک شکل موج اختیاری باشد :

$$T_\tau[\alpha f]=\alpha T_\tau f$$

یعنی اگر شکل موج f را درعدد α ضرب کرده نتیجه را انتقال دهیم ، همان شکل موجی را بدست می‌آوریم که ابتدا f را انتقال داده سپس آنرا در α ضرب کنیم .

حال اپراتور انتقال را برای بیان خاصیت تغییرناپذیری با زمان بکار میبریم . مانند قبل ، گیریم $\mathcal{Z}_0(i_0)$ پاسخ‌مداری‌که در زمان صفر درحالت صفراست به‌ورودی i_0 باشد . قبلاً $v_0(t)$ برای نشان دادن مقدار پاسخ حالت صفر در زمان t بکار رفته بود [بمعادلهٔ (۲ - ۵ الف) مراجعه شود] . دلیل اینکه حالا $\mathcal{Z}_0(i_0)$ بکار میرود تأکیدوابستگی پاسخ حالت صفر به تمامی شکل‌موج‌ورودی $i_0(\cdot)$ وهمچنین تأکید زمانی‌است‌که مدار درحالت صفر میباشد . بخاطر نگهداشتن اینکه $\mathcal{Z}_0(i_0)$ تمامی شکل موج است نه فقط مقدار آن در زمان t ، حائز اهمیت است. با این‌طرز نمایش میتوان خاصیت تغییرناپذیری بازمان

۱ — Shift Operator

را که دربالا نشان داده شد بصورت زیر نوشت :

$$T_\tau[\mathcal{Z}_0(i_0)]=\mathcal{Z}_0[T_\tau i_0] \qquad \tau\geqslant 0 \text{ برای همه‌ورودی‌های } i_0 \text{ و همه } \qquad (\text{۷}-\text{٥})$$

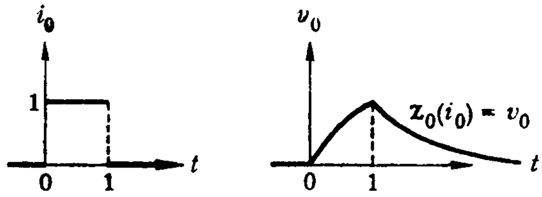
گرچه رابطه(۷-٥) را فقط برای یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان که شامل یک‌مقاومت و خازن موازی است ثابت کردیم ، این مطلب ، درواقع ، درمورد « هر » مدار خطی تغییرناپذیر با زمان و برای « هر » ورودی i و « هر » مقدار $\tau\geqslant 0$ معتبر است. معادله (۷ - ٥) خاصیت تغییرناپذیری با زمان مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان را بیان میدارد. این رابطـه در بدست آوردن نمایش کـانولـوشن[۱] پاسخ حـالت صفر درفصل ششم نقش اساسی خواهد داشت .

تبصره- میتوان خاصیت تغییرناپذیری با زمان راکه در رابطهٔ (۷ - ٥) بیان شد بدین‌ترتیب تعبیر نمودکه اپراتورهای T_τ و $\mathcal{Z}_0$ « جابجایی پذیرند »[۲]، یعنی ترتیب اثر دادن دو عامل هیچ تفاوتی نمی‌کند . گرچه شما عملیات زیادی کـه جابجایی پذیرند دیده‌اید (جمع اعداد حقیقی ، جمع ماتریس ها وغیره) ، عملهای زیادی هم وجود دارندکه جا بجایی پذیر نیستند (مثلاً ضرب ماتریسهای $n\times n$) . این حقیقت‌که برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان اپراتورهای T_τ و $\mathcal{Z}_0$ جابجایی‌پذیرند بسیار قابل ملاحظه‌است، زیرا در بسیاری از موارد اگر ترتیب دوعمل باهم تعویض شود نتایج حاصل بطور فاحشی متفاوت میگردد. مثلاً اگر (۱) هفت‌تیری را پرکرده و (۲) آنرا نزدیک شقیقه خود قرار داده و ماشهٔ آنرا بکشیم، نتیجه حاصل ازنتیجهٔ آنکه عمل (۲) را قبل‌ازعمل (۱) انجام دهیم بطورفاحشی متفاوت خواهد بود !

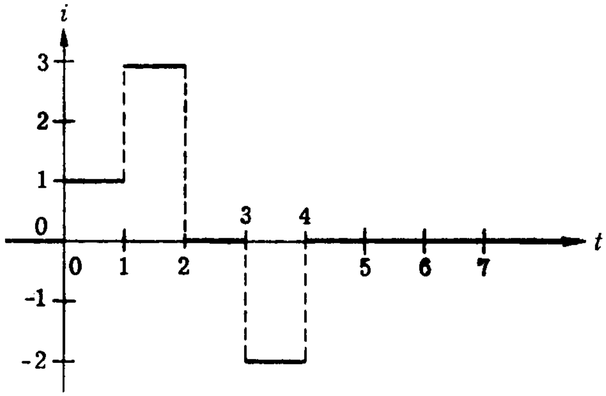
مثال- برای تشریح نتیجه خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان مثالی بیان میکنیم. مدار خطی تغییرناپذیر بـا زمان دلخـواهی را درنظرگرفته فرض‌کنیدکـه پاسخ حالت صفر v_0 به پـالس ورودی i_0 را مطابق شکـل (٥ - ٥) اندازه‌گیری نموده و شکـل موج v_0 را ثبت‌کرده‌ایم . با بکاربردن طرز نمایش قبلی این بدین معنی است‌که $v_0=\mathcal{Z}_0(i_0)$. مسأله ، تعیین پاسخ حالت صفر v به‌ورودی i نشان داده شده درشکل (٦-٥) میباشدکـه که درآن :

---

۱ — Convolution ۲ — Commutative



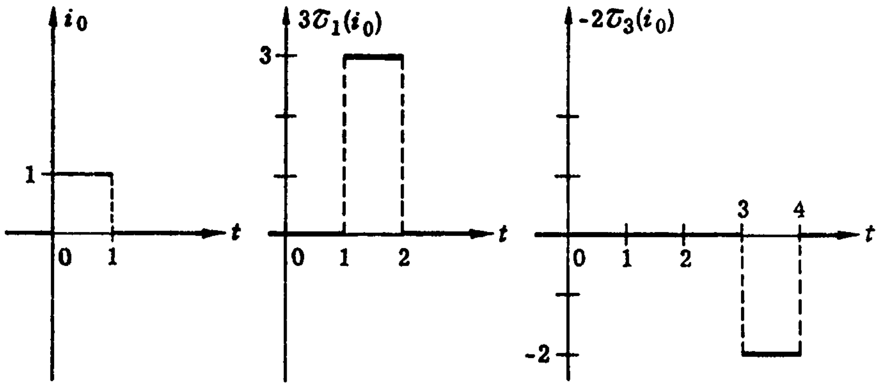
شکل ۵-۵- جریان i_0 و پاسخ حالت صفر v_0 متناظر باآن



شکل۶-۵- ورودی $i(t)$

$$i(t)=\begin{cases} ۱ & \text{برای } o<t\leqslant ۱ \\ ۳ & \text{برای } ۱<t\leqslant ۲ \\ o & \text{برای } ۲<t\leqslant ۳ \\ -۲ & \text{برای } ۳<t\leqslant ٤ \\ o & \text{برای } ٤<t \end{cases}$$

مشاهده قابل‌توجه‌اینستکه ورودی‌داده شده را میتوان بصورت ترکیب‌خطی i_0 ومضربهایی از i_0 که بطور زمانی انتقال یافته‌اند نمایش داد. این عمل درشکل (۷ ـ ٥) نشان داده شده است. مجموع سه تابع نشان داده شده مساوی i است. از منحنی‌های i و i_0 واضح است‌که :



شکل ۷-۵- تجزیه i برحسب پالسهای انتقال یافته

$$i = i_0 + ۳\mathcal{T}_۱(i_0) - ۲\mathcal{T}_۳(i_0)$$

پاسخ حالت صفر دراثر ورودی i را v نامیده و داریم :

$$v = \mathcal{Z}_0(i)$$
$$= \mathcal{Z}_0[i_0 + ۳\mathcal{T}_۱(i_0) - ۲\mathcal{T}_۳(i_0)]$$

ازخطی بودن پاسخ حالت صفر بدست می‌آوریم که :

$$v = \mathcal{Z}_0(i_0) + ۳\mathcal{Z}_0[\mathcal{T}_۱(i_0)] - ۲\mathcal{Z}_0[\mathcal{T}_۳(i_0)]$$

و از خاصیت تغییرناپذیری با زمان داریم :

$$v = \mathcal{Z}_0(i_0) + ۳\mathcal{T}_۱[\mathcal{Z}_0(i_0)] - ۲\mathcal{T}_۳[\mathcal{Z}_0(i_0)]$$

و چون $v_0 = \mathcal{Z}_0(i_0)$ پس داریم :

$$v = v_0 + ۳\mathcal{T}_۱[v_0] - ۲\mathcal{T}_۳[v_0]$$

و یا :

$$v(t) = v_0(t) + ۳v_0(t-۱) - ۲v_0(t-۳) \qquad t \geqslant 0 \text{ برای}$$

تبصره- روشی که برای محاسبهٔ v برحسب v_0 بکار رفت معمولاً به روش « اصل جمع آثار[1] » معروف است . توجه به این مطلب بسیار اهمیت دارد که ما باید ازخاصیت تغییرناپذیری با زمان و این حقیقت که پاسخ حالت صفر یک « تابع خطی » ورودی است کمک بگیریم .

تمرین- مدار آشنای خطی تغییرناپذیر با زمان RC نشان داده شده درشکل (۸ ـ ۰ الف) که درآن i_s ورودی و v پاسخ میباشد را درنظر گیرید .

الف : پاسخ حالت صفر به ورودی‌های زیر را محاسبه و رسم کنید :

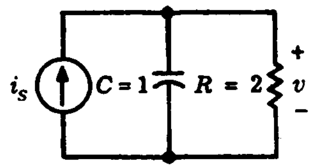
$$i_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leqslant 0.0 \quad \text{برای} \\ 0 & 0.0 < t \quad \text{برای} \end{cases}$$

$$i_2(t) = \begin{cases} 3 & 0 < t \leqslant 0.0 \quad \text{برای} \\ 0 & 0.0 < t \leqslant 2 \quad \text{برای} \\ -0.0 & 2 < t \leqslant 2.0 \quad \text{برای} \\ 0 & 2.0 < t \quad \text{برای} \end{cases}$$

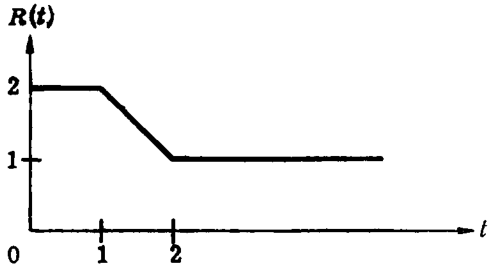
ب : حال فرض کنید که مقاومت تغییرپذیر بازمان ولی هنوز خطی باشد و مقاومت آن بصورت تابعی از زمان مطابق شکل (۸ ـ ۰ ب) باشد . فرض کنید که بخواهیم پاسخ این مدار را به ورودی i_2 حساب کنیم ، آیا هنوز میتوان روش بحث قبلی را بکار برد ؟ اگر جواب منفی است دلیلش را بطور خلاصه ذکر کنید .

---

۱ — Principle of Superposition



(الف)



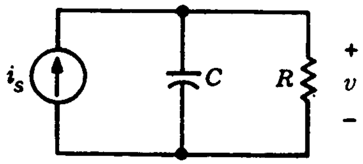
(ب)

شکل ۸-۵- (الف) یک مدار خطی ساده RC
(ب) مشخصه مقاومت تغییرپذیر
بازمان

۶- پاسخ ضربه

پاسخ حالت صفر یک مدار تغییرناپذیر بازمان را بیک ضربه «واحد» که در $t=0$ وارد شده‌است **پاسخ ضربه** مدارگفته با h نشان‌میدهند. بعبارت‌دقیقتر، $h(t)$ پاسخ مدار درزمان t است بشرطیکه (۱) ورودی آن‌ضربه واحد δ باشد و (۲) درست قبل از وارد نمودن ضربه، مدار در «حالت صفر» باشد. برای راحتی‌فرمولهای بعدی h را برای $t<0$ مساوی صفرتعریف می‌کنیم. ازآنجائیکه محاسبهٔ پاسخ ضربه برای‌مهندسین برق‌اهمیت بسیار زیادی دارد، سه روش برای محاسبهٔ آن ارائه خواهد شد.

« روش اول » درانیجا با تقریب، تابع پالس p_Δ را جایگزین تابع ضربه می‌نمائیم. برای بدست آوردن آشنایی اولیه با پاسخ ضربه، پاسخ ضربه مدار RC موازی نشان داده شده درشکل (۱-۶) را محاسبه می‌کنیم. ورودی مدار منبع جریان i_s، و پاسخ، ولتاژ خروجی v میباشد. چون، بنا به تعریف، پاسخ ضربه پاسخ حالت صفر به ورودی δ میباشد، پس پاسخ ضربه جواب معادله دیفرانسیل زیر است:



شکل ۱-۶- مدار خطی تغییرناپذیر بازمان RC

$$C\frac{dv}{dt}+Gv=\delta(t) \qquad (۶-۱)$$

با شرط

$$v(0-)=0 \qquad (۶-۲)$$

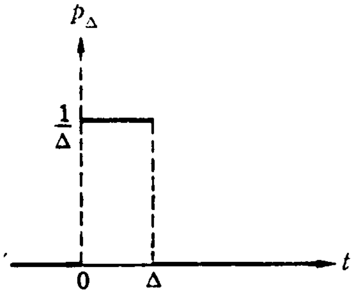
که درآن علامت $0-$ درست لحظهٔ قبل از $t=0$ را نشان میدهد .

بعلت وجود تابع ضربه درسمت راست معادله(۱ - ۶) لازم‌است که بین $0-$ و $0+$ تمایزی قائل شد . درلحظهٔ $t=0$ ، جریان بی‌نهایت زیادی در فاصلهٔ زمانی بی‌نهایت کوچکی وارد مدار میشود . این وضعیت، مشابه توپ گلفی است که در روی زدن‌گاه قرار گرفته است ودرلحظهٔ $t=0$ بوسیلهٔ چوگان زده میشود. واضح است که تمیزدادن سرعت توپ درلحظهٔ $0-$ ، یعنی درست قبل‌ازاینکه توپ زده شود ، از سرعت‌آن درلحظهٔ $0+$ ، یعنی درست بعدازاینکه توپ زده میشود ، اهمیت بسیار زیادی دارد .

معادلهٔ(۲ - ۶) بیان میدارد که مدار، درست قبل از وارد کردن ورودی ، درحالت صفر است . درحل معادلهٔ(۱ - ۶) ، باشکلاتی مواجه میشویم ، زیرا وقتی دقیقترصحبت کنیم δ یک تابع ریاضی « نیست » . ازاینرو ، جواب را باجایگزین نمودن تقریبی ضربه واحد δ با تابع پالس p_Δ و محاسبهٔ جواب حاصل و میل دادن $0 \leftarrow \Delta$ بدست خواهیم آورد . بخاطر بیاورید که p_Δ بصورت زیر تعریف شده است :

$$p_\Delta(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \quad \text{برای} \\ \dfrac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta \quad \text{برای} \\ 0 & \Delta<t \quad \text{برای} \end{cases}$$

و درشکل (۲ - ۶) رسم شده‌است. قدم اول بدست‌آوردن h_Δ ، یعنی پاسخ حالت صفرمدار



شکل ۲-۶- تابع پالس $p_\Delta(\cdot)$

RC به‌ورودی p_Δ میباشد که درآن Δ خیلی کوچکتر از ثابت زمانی RC انتخاب میشود . شکل موج h_Δ جواب معادله دیفرانسیل زیر است :

$$C\frac{dh_\Delta}{dt}+\frac{۱}{R}h_\Delta=\frac{۱}{\Delta}\qquad o<t<\Delta \qquad \text{(۳ - ۶ الف)}$$

$$C\frac{dh_\Delta}{dt}+\frac{۱}{R}h_\Delta=o\qquad t>\Delta \qquad \text{(۳ - ۶ ب)}$$

با شرط $h_\Delta(o)=o$. واضح است که $\frac{۱}{\Delta}$ مقدار ثابتی میباشد وبنابراین از (۳ - ۶ الف) داریم :

$$h_\Delta(t)=\frac{R}{\Delta}(۱-e^{-\frac{t}{RC}})\qquad o<t<\Delta \qquad \text{(۴ - ۶ الف)}$$

و این پاسخ حالت صفر به ورودی پلهٔ $\frac{۱}{\Delta}u(t)$ میباشد . از (۳ - ۶ ب) ، برای $t>\Delta$ ، h_Δ پاسخ‌ورودی‌صفراست که در $t=\Delta$ از $h_\Delta(\Delta)$ شروع‌میکند. بنابراین:

$$h_\Delta(t)=h_\Delta(\Delta)\,e^{-\frac{t-\Delta}{RC}}\qquad t>\Delta \qquad \text{(۴ - ۶ ب)}$$

پاسخ کامل h_Δ از روی(۴ - ۶ الف) و (۴ - ۶ ب) درشکل(۳ - ۶ الف) نشان داده شده است . از (۴ - ۶ الف) داریم :

$$h_\Delta(\Delta)=\frac{R}{\Delta}(۱-e^{-\frac{\Delta}{RC}})$$

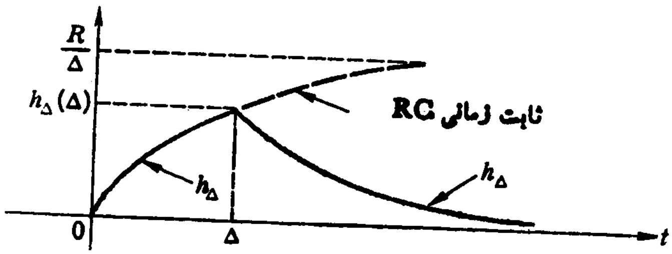
و چون Δ خیلی کوچکتر از RC میباشد ، با بکار بردن بسط :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

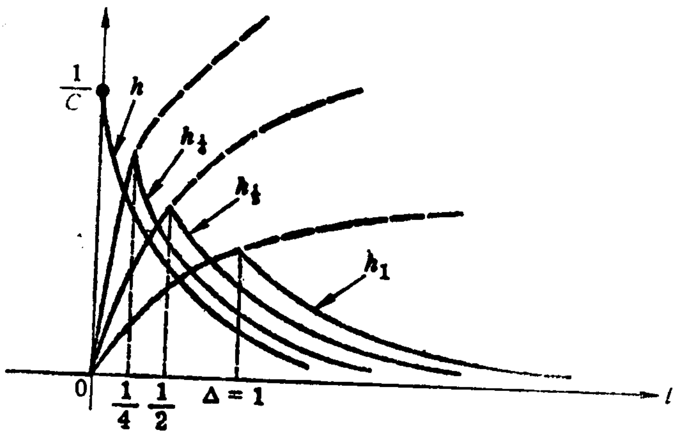
بدست می‌آوریم :

$$h_\Delta(\Delta) = \frac{R}{\Delta}\left[\frac{\Delta}{RC} - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta}{RC}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{C}\left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta}{RC}\right) + \cdots\right]$$



(الف)



(ب)

شکل ۳-۶- (الف) پاسخ حالت صفر p_Δ
(ب) پاسخها وقتیکه $\Delta \to 0$

بطریق‌مشابه، برای‌مقادیرخیلی کوچک Δ و $o<t<\Delta$ ، بابسط تابع‌نمایی‌در (۴-۶ الف) بدست می‌آید که :

$$h_\Delta(t) = \frac{1}{C}\,\frac{t}{\Delta} + \cdots \qquad o<t<\Delta$$

توجه کنید که شیب منحنی h_Δ درفاصلهٔ $(o\ ,\ \Delta)$ برابر $\frac{1}{C\Delta}$ میباشد. وچون Δ کوچک است این شیب خیلی زیاد است. وقتیکه $\Delta \to o$ شیب منحنی h_Δ درفاصلهٔ $(o\ ,\ \Delta)$ تند و تندتر گشته و $h_\Delta(\Delta) \to \frac{1}{C}$ ، و درحد ، h_Δ درلحظهٔ $t=o$ ازصفر به $\frac{1}{C}$ می‌جهد . برای $t>o$ از (۴ - ۶ ب) بدست می‌آوریم که :

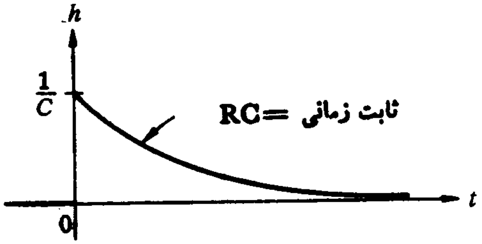
$$h_\Delta(t) \to \frac{1}{C}\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

و وقتیکه Δ بسمت صفر میل میکند ، h_Δ مطابق شکل (۳ - ۶ ب) بسمت پاسخ ضربه h میل میکند . با بخاطر آوردن قرارداد اینکه برای $t<o$ ، $h(t)$ را مساوی صفر قرار میدهیم میتوان نوشت :

$$h(t)=u(t)\,\frac{1}{C}\,e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \text{برای همه } t \qquad (۶-۵)$$

پاسخ ضربه h درشکل (۴ - ۶) نشان داده شده است .

محاسبهٔ h بطریق بالا دو تبصره زیر را لازم میدارد :



شکل ۴-۶- پاسخ ضربه مدار RC شکل (۱ - ۶)

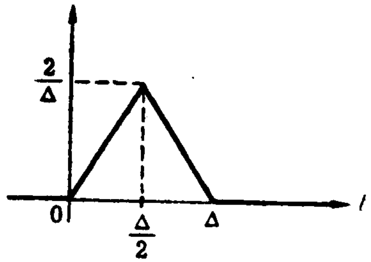
تبصره ۱ - منظورما ازمحاسبهٔ پاسخ ضربه به‌طریق‌فوق، نشان‌دادن این‌حقیقت‌است که این روش، یک‌روش بسیار سرراستی‌میباشد که فقط احتیاج‌به‌جایگزین نمودن تقریبی δ با یک پالس مناسب ، که دراینجا p_Δ است، دارد. تنها شرایطی‌که p_Δ باید درآنها صدق کند اینستکه دربیرون فاصلهٔ (o , Δ) مساوی صفر بوده و مساحت زیر p_Δ مساوی واحد باشد ، یعنی :

$$\int_o^\Delta p_\Delta(t)\, dt = ۱$$

واضح است که شکل p_Δ دربدست آوردن پاسخ هیچگونه اثری ندارد و بنابراین ما شکلی را انتخاب میکنیم که حداقل کار را لازم داشته باشد . البته می‌توانستیم پالس مثلثی نشان داده شده در شکل (۵ - ٦) را اختیار کنیم . توجه کنیدکه دامنه حداکثر پالس مثلثی دراینجا مساوی $\frac{۲}{\Delta}$ میباشد . برقراری چنین شرطی برای اینکه مساحت زیر پالس برای همه $\Delta > o$ مساوی واحد باشد لازم است .

تبصره ۲ - چون برای $t > o$ ، $\delta(t) = o$ است (یعنی برای $t > o$ ورودی بطور متحد برابر صفر است)، نتیجه می‌شود که برای $t > o$ پاسخ ضربه $h(t)$ همانند یک پاسخ ورودی صفر خاص میباشد . ما این موضوع را بعداً بکار خواهیم برد .

« رابطه بین پاسخ ضربه وپاسخ پله » حال میخواهیم یک‌رابطهٔ بسیارمهم‌میان پاسخ پله و پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان بدست‌آوریم ، بعبارت دقیقتر ، میخواهیم صحت مطلب زیر را نشان دهیم :



شکل ۵-٦- میتوان یک پالس مثلثی را نیز برای تقریب نمودن ضربه بکار برد .

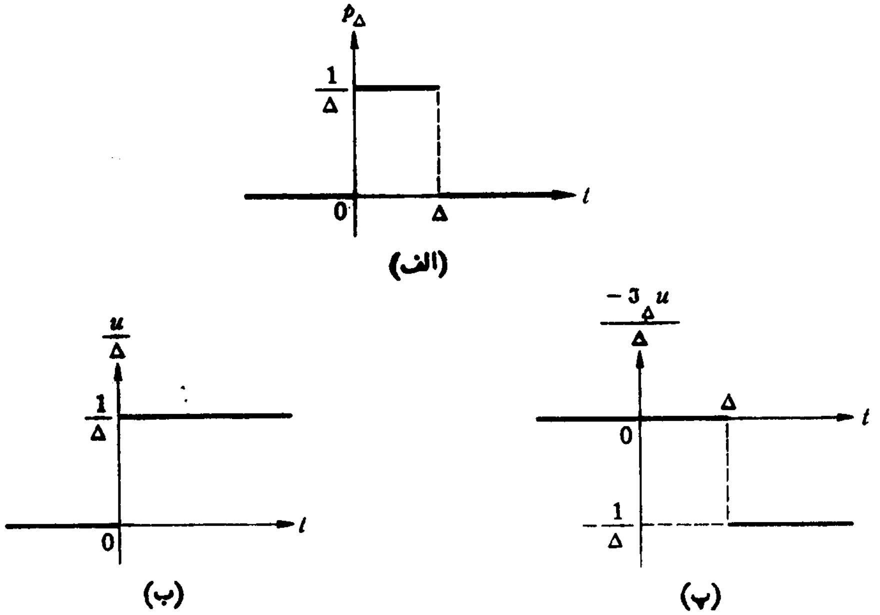
« پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان مشتق زمانی پاسخ پلهٔ آن است . »
بطورسمبلیک :

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(t')\,dt' \qquad \text{یا بطورمعادل} \qquad h=\frac{ds}{dt} \qquad (۶-۶)$$

ما این عبارت مهم‌را با جایگزین نمودن‌تقریبی‌ضربه باتابع پالس p_Δ ثابت میکنیم. گیریم که h_Δ پاسخ حالت صفر به‌ورودی p_Δ باشد ، یعنی :

$$h_\Delta \triangleq \mathcal{Z}_0(p_\Delta)$$

وقتیکه $\Delta \rightarrow 0$ ، تابع پالس p_Δ بسمت‌ضربه واحد δ میل کرده و h_Δ ، پاسخ‌حالت‌صفر به ورودی پالس p_Δ ، بسمت پاسخ ضربه h میل می‌نماید . حال p_Δ را بصورت مجموع



شکل ۶-۶- تابع پالس p_Δ شکل (الف) را میتوان بعنوان مجموع تابع پله شکل (ب) و تابع پله تأخیردار شکل (پ) درنظر گرفت

یک تابع پله ویک تابع پله تأخیردار مطابق شکل (۶ - ۶) درنظر میگیریم. بنابراین:

$$p_{\Delta} = \frac{1}{\Delta}[u(t) - u(t-\Delta)] = \frac{1}{\Delta}u + \frac{-1}{\Delta}T_{\Delta}u$$

از خطی بودن پاسخ حالت صفر داریم :

$$\mathcal{Z}_0(p_{\Delta}) = \mathcal{Z}_0\left(\frac{1}{\Delta}u + \frac{-1}{\Delta}T_{\Delta}u\right) \tag{۶ − ۷}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\mathcal{Z}_0(u) + \frac{-1}{\Delta}\mathcal{Z}_0(T_{\Delta}u)$$

چون مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان است اپراتورهای $\mathcal{Z}_0$ و T_{Δ} جابجایی پذیرند و بنابراین :

$$\mathcal{Z}_0(T_{\Delta}u) = T_{\Delta}\mathcal{Z}_0(u) \tag{۶ − ۸}$$

گیریم که پاسخ پله را بصورت زیر نشان دهیم :

$$s \triangleq \mathcal{Z}_0(u)$$

میتوان معادلات (۷ - ۶) و (۸ - ۶) را با هم ترکیب نموده وبدست آورد که :

$$h_{\Delta} \triangleq \mathcal{Z}_0(p_{\Delta}) = \frac{1}{\Delta}s - \frac{1}{\Delta}T_{\Delta}s$$

و یا :

$$h_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta}s(t) - \frac{1}{\Delta}s(t-\Delta)$$

$$= \frac{s(t) - s(t-\Delta)}{\Delta} \qquad \text{برای همه } t$$

حال وقتیکه $\Delta \to o$ ، عبارت سمت راست بصورت مشتق درمی‌آید وبنابراین :

$$\lim_{\Delta \to o} h_{\Delta}(t) = h(t) = \frac{ds}{dt}$$

تبصره- دو معادلهٔ (٦ - ٦) برای مدارهای خطی « تغییرپذیر بازمان » معتبر نیست، و نباید هم چنین انتظاری داشت زیرا که تغییرناپذیری بازمان دریک مرحله اساسی از اثبات این معادلات بکار رفت . بنابراین ، برای مدارهای خطی « تغییرپذیر بازمان » مشتق زمانی پاسخ پله ، پاسخ ضربه را بدست «نمیدهد» .

« روش دوم » دراین روش $h=\frac{ds}{dt}$ را بکارمیبریم . مدار RC موازی شکل (١-٦) را دوباره درنظرگرفته بخاطر آورید که s ، پاسخ پله آن بصورت زیر میباشد :

$$s(t)=u(t)\,R(۱-e^{-(\frac{۱}{RC})t})$$

اگر ما سمت راست را بصورت حاصلضرب دوتابع درنظرگرفته وقاعده مشتق گیری :

$$(uv)'=u'v+uv'$$

را بکار بریم پاسخ ضربه را بدست می‌آوریم :

$$h(t)=\delta(t)\,R(۱-e^{-(\frac{۱}{RC})t})+\frac{۱}{C}\,u(t)\,e^{-(\frac{۱}{RC})t}$$

جمله اول بطور متحد برابر صفر است ، زیرا برای $t\neq o$ ، $\delta(t)=o$ و برای $t=o$ ،

$$۱-e^{-(\frac{۱}{RC})t}=o$$

است . و بنابراین داریم :

$$h(t)=\frac{۱}{C}\,u(t)\,e^{-(\frac{۱}{RC})t}$$

البته این نتیجه با نتیجهٔ بدست آمده قبلی (٥ - ٦) یکسان است .

« روش سوم » دراین روش مستقیماً معادله دیفرانسیل را بکار برده نشان میدهیم که تابع h که بصورت زیر تعریف میشود :

$$h(t) = \frac{1}{C}\, u(t)\, e^{-\frac{t}{RC}}$$ برای همه t

جواب معادله دیفرانسیل زیر است :

$$(۶-۹) \qquad C\,\frac{d}{dt}(v) + Gv = \delta \qquad v(o-) = o$$ با شرط

برای اینکه تعصبی باین حالت نداشته باشیم جواب معادلهٔ (۹ - ۶) را y نامیده و نشان میدهیم که $y = h$ است. چون برای $t > o$ ، $\delta(t) = o$ میباشد و y جواب‌معادلهٔ (۹ - ۶) است ، باید داشته باشیم :

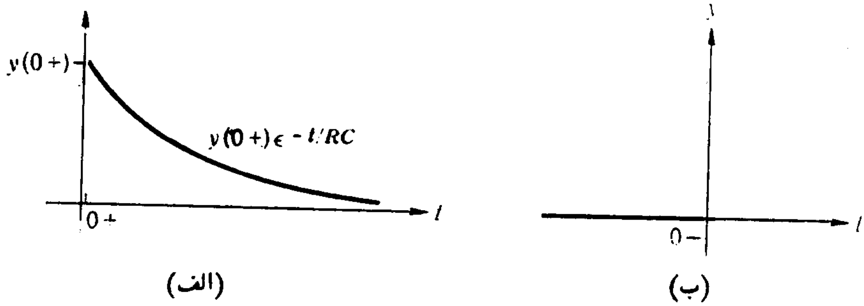
$$(۶-۱۰) \qquad y(t) = y(o+)\, e^{-\frac{t}{RC}}$$ برای $t > o$

و این درشکل (۷ - ۶ الف) نشان داده شده است. همچنین چون برای $t < o$ ، $\delta(t) = o$ است و در زمان $o-$ مدار درحالت صفر میباشد ، باید داشته باشیم :

$$(۶-۱۱) \qquad y(t) = o$$ برای $t < o$

و این درشکل (۷ - ۶ ب) نشان داده شده است . از ترکیب (۱۰-۶) و (۱۱-۶) نتیجه میگیریم که :

$$(۶-۱۲) \qquad y(t) = u(t)\, y(o+)\, e^{-\frac{t}{RC}}$$ برای همه t



شکل ۷-۶- پاسخ ضربه برای‌مدار RC موازی، (الف) - $y(t)$ برای $t > o$ (ب) - $y(t)$ برای $t < o$

حال باید $y(o+)$ ، یعنی مقدار جهش منحنی y در $t=o$ ، محاسبه گردد . در این محاسبه از مطلب معلوم زیر استفاده میکنیم :

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

با بکار بردن رابطهٔ (۱۲ - ۶) و درنظر گرفتن سمت راست آن بصورت حاصلضرب دو تابع بدست می‌آوریم که :

$$\frac{dy}{dt}(t)=\delta(t)\,y(o+)\,e^{-\frac{t}{RC}}+u(t)\,y(o+)\,\frac{-1}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

درجمله اول ، چون $\delta(t)$ درهمه جا بجز $t=o$ صفر است میتوان درجمله‌ای که در $\delta(t)$ ضرب میشود t را مساوی صفر قرار داد و بنابراین نوشت :

$$\frac{dy}{dt}(t)=\delta(t)\,y(o+)+u(t)\,y(o+)\,\frac{-1}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

با جایگزینی در (۹ - ۶) بدست می‌آوریم که :

$$\delta(t)\,Cy(o+)-u(t)\,y(o+)\,Ge^{-\frac{t}{RC}}+Gu(t)\,y(o+)e^{-\frac{t}{RC}}=\delta(t)$$

پس از حذف جملات مشابه ، تنها جمله‌ای که درسمت چپ باقی میماند مساوی است با $Cy(o+)\,\delta(t)$ ، وچون‌این‌جمله بایدباعبارت $\delta(t)$ سمت‌راست معادل باشد، بدست می‌آید که $y(o+)C=1$ ، بعبارت معادل :

$$y(o+)=\frac{1}{C}$$

باگذاشتن مقدار $y(o+)$ در (۱۲ - ۶) نتیجه میگیریم که جواب (۹ - ۶) در واقع همان h ، یعنی پاسخ ضربه که قبلاً محاسبه شده‌است میباشد .

تبصره- دربالا نشان دادیم که برای $t>o$ جواب معادله دیفرانسیل :

$$C\frac{d}{dt}(v)+Gv=\delta \qquad v(o-)=o \qquad \text{با شرط}$$

با جواب معادله دیفرانسیل زیر یکسان است :

$$C\frac{d}{dt}(v)+Gv=o \qquad v(o+)=\frac{1}{C} \qquad \text{با شرط} \qquad (6-13)$$

برای $t>o$. این موضوع را میتوان با انتگرال گیری دوطرف رابطهٔ (۹-۶) از $t=o-$ تا $t=o+$ مشاهده نموده و بدست آورد که :

$$Cv(o+)-Cv(o-)+G\int_{o-}^{o+}v(t')\,dt'=1$$

و چون v پایاندار[1] است :

$$G\int_{o-}^{o+}v(t')\,dt'=o$$

میباشد . همچنین چون $v(o-)=o$ ، پس از اینجا بدست میآوریم که :

$$v(o+)=\frac{1}{C}$$

درمعادلهٔ (۱۳ - ۶) اثر ضربه درزمان $t=o$ بادرنظرگرفتن شرط اولیه در زمان $t=o+$ منظور شده است .

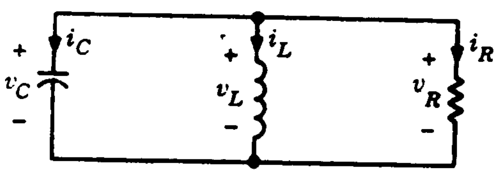
۱ — Finite

فصل پنجم
مدارهای مرتبه دوم

در فصل چهارم‌مدارهای الکتریکی مرتبه اول را مفصلاً مطالعه کردیم و با مدارهای خطی و غیر خطی هردومواجه شدیم . ما مدارهای خطی را مطالعه کرده و پاسخ کامل ، پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر آنها را محاسبه نمودیم . همچنین ثابت کردیم که برای مدارهای خطی ، پاسخ ورودی صفر،تابع خطی حالت اولیه و پاسخ حالت صفر تابع خطی ورودی است . این حقایق برای شبکه‌های خطی عمومی معتبر بوده و در فصل سیزدهم اثبات خواهند شد . در این فصل مدارهای مرتبه دوم را مطالعه خواهیم کرد . برای تشریح محاسبه پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر ، از یک مدار ساده موازی RLC (مقاومت ـ سلف ـ خازن) استفاده خواهیم کرد . همچنین با روش جدیدی برای توصیف یک مدار بنام روش فضای حالت(۱) مواجه خواهیم شد . این روش را نه تنها در مدارهای خطی ، بلکه در مدارهای غیر خطی نیز بکار خواهیم برد .

۱- مدار RLC خطی تغییر ناپذیر با زمان ، پاسخ ورودی صفر

در شکل (۱-۱) یک‌اتصال موازی از سه عنصر پسیو(۲) خطی تغییر ناپذیر بازمان داریم که عبارت از یک مقاومت ، یک سلف و یک خازن میباشند. معادلات شاخه‌های آنها چنین است ،



$v_C(0) = V_0 \qquad i_L(0) = I_0$

شکل ۱-۱- مدار RLC موازی ، هرسه جزء خطی ، تغییر ناپذیر با زمان و پسیو هستند

۱- State - Space　　　۲- Passive

(۱ — ۱ الف) $v_R = Ri_R$ یا $i_R = Gv_R$

(۱ — ۱ ب) $v_L = L\dfrac{di_L}{dt}$, $i_L(o) = I_0$ یا $i_L(t) = I_0 + \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_o^t v_L(t')dt'$

(۱ — ۱ پ) $v_C(t) = V_0 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_o^t i_C(t')dt'$ یا $i_C = C\dfrac{dv_C}{dt}$, $v_C(o) = V_0$

که در آن R ، G ، L ، C مقادیر «مثبت» بوده و بترتیب نمایشگر مقاومت ، رسانایی، اندوکتانس و ظرفیت میباشند . I_0 نشان دهنده جریان اولیه در داخل سلف و V_0 نمایشگر ولتاژ اولیه دردوسرخازن است. v_R ، v_L ، v_C ، i_R ، i_L و i_C شش متغیر شبکه میباشند. از KVL داریم :

(۱ — ۲) $v_C = v_R = v_L$

و از KCL داریم :

(۱ — ۳) $i_C + i_R + i_L = o$

رویهمرفته شش معادله داریم ، سه معادله در(۱-۱)، دومعادله در (۲-۱) و یک معادله در(۳-۱) . بنابراین میتوان انتظارداشت که شش متغیر مجهول شبکه‌را بتوان‌بطور یکتا تعیین نمود. درحقیقت توسعه درسی ما نشان خواهد داد که آنها واقعاً بطوریکتا تعیین میشوند.

مسأله مورد نظر اینست که مناسب‌ترین متغیررا انتخاب کرده وراحت‌ترین معادله‌را برحسب آن متغیر بنویسیم و برحسب آن متغیر حل کنیم ، و سپس پنج متغیر باقیمانده را محاسبه نمائیم. یک راه حل مسأله اینست که ولتاژ خازن v_C را بعنوان مناسب‌ترین متغیرانتخاب کنیم. بااستفاده از معادلات (۱-۱)تا(۳-۱) ، معادله انتگرال-دیفرانسیل(۱) زیر را برحسب متغیر v_C بدست میاوریم :

۱- Integrodifferential

$$C\frac{dv_C}{dt}+Gv_C+I_0+\frac{1}{L}\int_0^t v_C(t')dt'=0 \qquad (۱-۴)$$

و :

$$v_C(0)=V_0 \qquad (۱-۵)$$

هرگاه‌ولتاژ v_C بدست آید ، پنج متغیردیگرشبکه‌را میتوان‌از معادلات(۱-۱)و(۱-۲) بدست آورد. راه حل دیگر مسأله اینست که جریان سلف i_L بعنوان متغیر انتخاب شود. اگر معادلات شاخه را برای خازن و مقاومت بکار بریم ، از معادله (۱-۳) بدست میاوریم :

$$C\frac{dv_C}{dt}+Gv_R+i_L=0$$

چون در (۱-۲) ، $v_C=v_R=v_L$ است ، معادله بالا باینصورت درمیاید :

$$C\frac{dv_L}{dt}+Gv_L+i_L=0 \qquad (۱-۶)$$

حال معادله شاخه‌درمورد سلف را بکار میبریم‌تا معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیرکه درآن i_L بعنوان متغیر وابسته است بدست آید :

$$LC\frac{d^2i_L}{dt^2}+GL\frac{di_L}{dt}+i_L=0 \qquad (۱-۷)$$

شرایط اولیه لازم چنین است :

$$i_L(0)=I_0 \qquad (۱-۸)$$

و :

$$\frac{di_L}{dt}(0)=\frac{v_L(0)}{L}=\frac{v_C(0)}{L}=\frac{V_0}{L} \qquad (۱-۹)$$

معادله دیفرانسیل (۱-۷) با شرایط اولیه (۱-۸) و (۱-۹) دارای جواب منحصر بفرد i_L است. هرگاه‌جریان i_L بدست‌آید ، میتوان پنج متغیردیگر شبکه را از معادلات(۱-۱)و (۱-۲) بدست‌آورد. گیریم برای حل i_L از معادلات (۱-۷) تا (۱-۹) شروع کنیم.چون

هیچ منبعی مدار را تحریک نمیکند ، پاسخ i_L ، «پاسخ ورودی صفر» است.

برای راحتی عملیات ، فرض کنید دو پارامتر α و ω_0 بصورت زیر تعریف شوند :

$$\alpha \triangleq \frac{G}{2C} \qquad \omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{۱-۱۰}$$

پارامتر α **ثابت میرایی**[1] و پارامتر ω_0 (برحسب رادیان برثانیه) **فرکانس (زاویه‌ئی) تشدید**[2] نامیده میشود . $\omega_0 = 2\pi f_0$ است که در آن f_0 (برحسب هرتز[3]) فرکانس تشدید سلف و خازن است. دو پارامتر α و ω_0 رفتار مدار RLC را مشخص میکنند. با تقسیم معادله (۷-۱) به LC بدست میاید :

$$\boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0} \tag{۱-۱۱}$$

این یک معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت است . «چند جمله‌ای مشخصه» این معادله دیفرانسیل چنین است :

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 \tag{۱-۱۲}$$

صفرهای چند جمله‌ای مشخصه ، ریشه‌های مشخصه و یا بعبارت بهتر «فرکانس‌های طبیعی مدار» نامیده میشوند. این ریشه‌ها عبارتند از :

$$\left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \left\{\begin{matrix} -\alpha + \alpha_d \\ -\alpha - \alpha_d \end{matrix}\right. \tag{۱-۱۳}$$

که در آن:

$$\alpha_d \triangleq \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

شکل پاسخ ورودی صفر مدار به مقادیر نسبی α و ω_0 بستگی دارد . برحسب مقادیر نسبی α و ω_0 میتوان پاسخ ورودی صفر را به چهار حالت طبقه بندی کرد :

۱- Damping Constant ۲- Resonant Frequency

۳- Hertz

میرای‌شدید[۱] ، میرای بحرانی[۲] ، میرای ضعیف[۳] و بی‌اتلاف[٤]. سه حالت اول، شکل موجهای $i_L(0)$ راکه بصورت نمایی میرا هستند بوجود آورده درحالیکه حالت آخری متناظر با یک شکل موج سینوسی است.

۱- میرای شدید $(\alpha > \omega_0)$. فرکانس‌های طبیعی s_1 و s_2 هردو «حقیقی و منفی» هستند و پاسخ، مجموع دو تابع نمایی میرا است:

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \qquad (1-14)$$

که در آن ثابت‌های k_1 و k_2 به شرایط اولیه بستگی دارند.

۲- میرای بحرانی $(\alpha = \omega_0)$. دو فرکانس‌طبیعی مساوی‌وحقیقی میباشند ، یعنی $s_1 = s_2 = -\alpha$. پاسخ چنین است:

$$i_L(t) = (k + k't) e^{-\alpha t} \qquad (1-15)$$

که در آن ثابت‌های k و k' به شرایط اولیه بستگی دارند.

۳- میرای ضعیف $(\alpha < \omega_0)$. دو فرکانس طبیعی مزدوج مختلط[٥] هستند $(s_1 = -\alpha + j\omega_d$ و $s_2 = -\alpha - j\omega_d$ که در آن $\omega_d^2 \triangleq \omega_0^2 - \alpha^2)$. پاسخ باین شکل است:

$$i_L(t) = k e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta) \qquad (1-16)$$

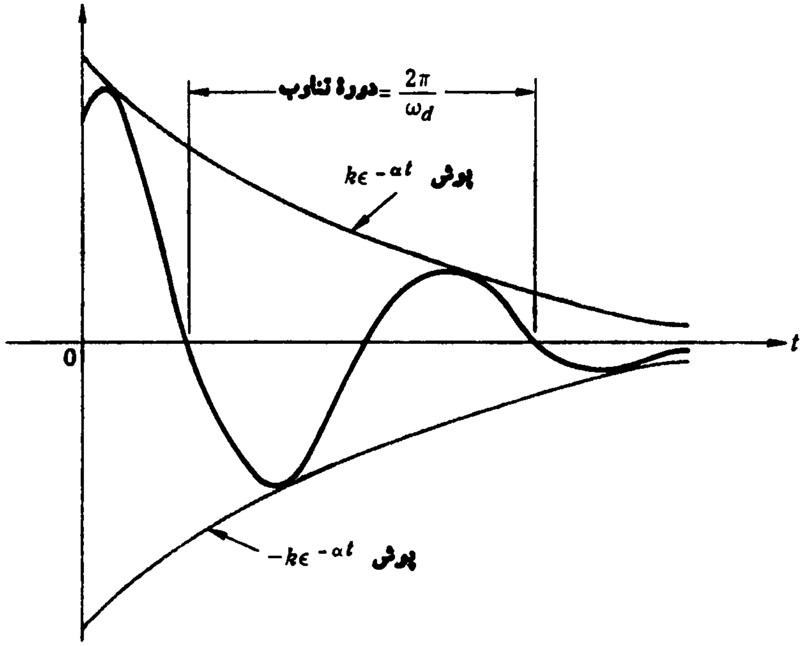
که درآن k و θ ثابت‌های حقیقی هستند که بشرایط اولیه بستگی دارند . یک نمونه ازشکل موج $i_L(0)$ در شکل (۲-۱) نشان داده شده است که درآن منحنی‌های نمایی کم رنگ، منحنی‌های پوش[٦] نامیده میشوند. توجه کنید که دامنه نوکهای[٧] شکل موج طبق پوش‌های نمایی میرا کاهش میابند.

٤- بی‌اتلاف $(G = 0$ و بنابراین $\alpha = 0)$. هردو فرکانس طبیعی انگاری[٨] هستند $(s_1 = j\omega_0 \quad , \quad s_2 = -j\omega_0)$. پاسخ چنین است:

۱- Overdamped
۲- Critically damped
۳- Underdamped
٤- Lossless
٥- Complex Conjugate
٦- Envelope
٧- Peak
٨- Imaginary

$$i_L(t) = k \cos(\omega_0 t + \theta) \qquad (۱-۱۷)$$

که در آن k و θ ثابت‌های حقیقی هستند که بشرایط اولیه بستگی دارند.

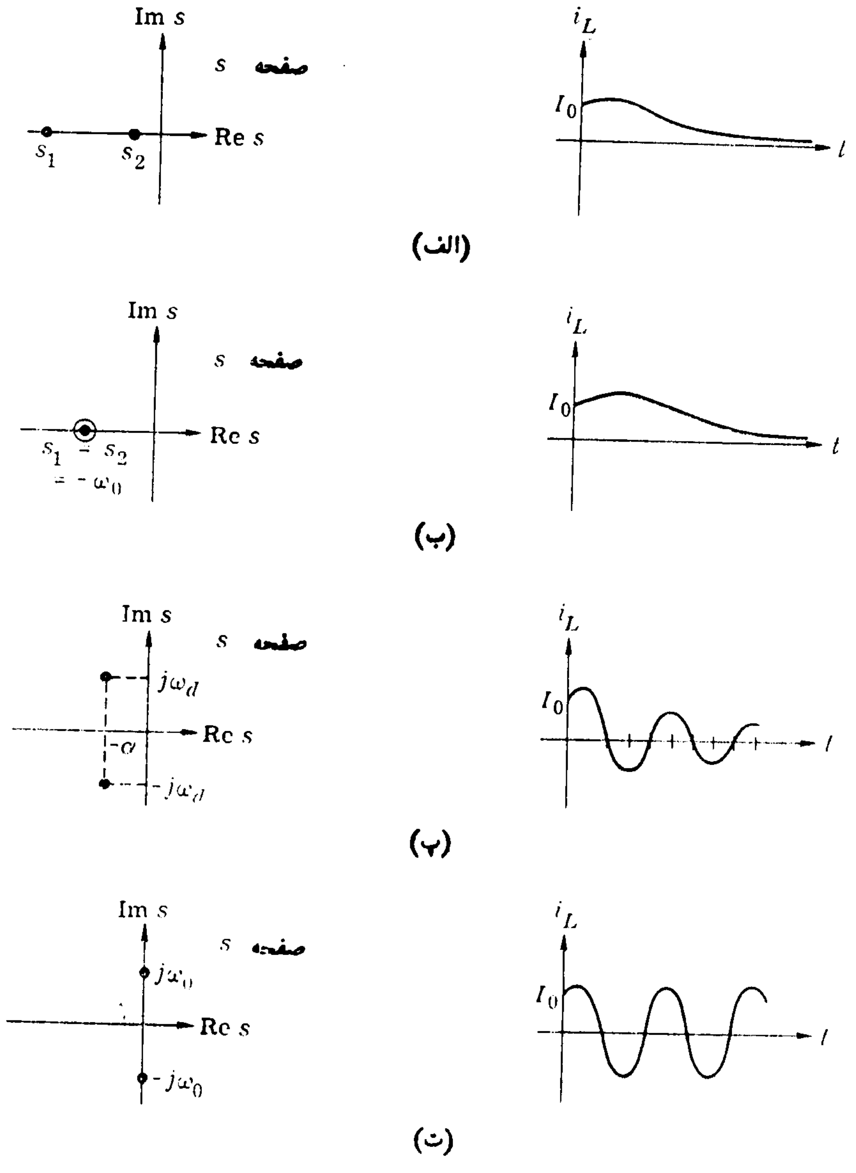


شکل ۲-۱- شکل موج $i_L(\cdot)$ برای حالت میرای ضعیف $(\alpha<\omega_0)$ مدار RLC موازی.

میتوان براحتی با جایگزینی مستقیم نشان داد که معادلات (۱-۱۴) تا (۱-۱۷) جواب کلی معادله دیفرانسیل همگن (۱-۱۱) میباشند. درهرمورد، دو ثابت دلخواه از شرایط اولیه داده شده در معادلات (۱-۸) و (۱-۹) تعیین میشوند. محاسبه ثابت‌های دلخواه از شرایط اولیه داده شده سرراست میباشد.

میتوان چهار حالت فوق را برحسب فرکانس‌های طبیعی، یعنی برحسب دو ریشه s_1 و s_2 معادلهٔ مشخصهٔ معادله دیفرانسیل نیز طبقه‌بندی کرد. چون فرکانس‌های طبیعی میتوانند حقیقی، مختلط و یا انگاری باشند، نشان دادن آنها در صفحه مختلط موسوم به «صفحه فرکانس مختلط[1]» آموزنده است. در صفحه فرکانس مختلط (صفحه s) محور افقی نمایشگر جزء حقیقی و محور عمودی نشان دهنده جزء انگاری میباشد. چهار

۱- Complex frequency plane



شکل ۳-۱- پاسخ‌های ورودی صفر مدار RLC موازی که برحسب محل قرارگرفتن فرکانس‌های طبیعی درسمت چپ وشکل موجها در طرف راست طبقه‌بندی شده‌اند.
(الف) میرای شدید $(\alpha > \omega_0)$. (ب) میرای بحرانی $(\alpha = \omega_0)$.
(پ) میرای ضعیف $(\alpha < \omega_0)$. (ت) بی‌اتلاف $(\alpha = 0)$.

حالت در شکل(۳-۱) تشریح شده‌اند ،که در آن محل فرکانس‌های طبیعی در صفحه s ، در سمت چپ نشان داده شده و شکل موج $i_L(0)$ متناظر در سمت راست رسم شده است. اهمیت صفحه فرکانس مختلط ، وقتیکه تبدیل لاپلاس[۱] در فصل سیزدهم معرفی میشود روشن‌تر خواهد شد. معهذا اکنون بایستی تشخیص داد که محل فرکانس‌های طبیعی در صفحه فرکانس مختلط شکل پاسخ را تعیین میکند.

تمرین - جواب معادله دیفرانسیل همگن (۱۱-۱) برای حالت میرای ضعیف را به‌صورت زیر نیز میتوان نوشت:

$$i_L(t)=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}$$

که در آن s_1 , s_2 ، k_1 و k_2 اعداد مختلط هستند و:

$$s_2=\overline{s_1}=-\alpha-j\omega_d \qquad k_2=\overline{k_1}$$

تیره‌های[۲] بالای حروف نمایشگر مزدوج مختلط میباشند. معادله (۱۶-۱) را از این جواب بدست آورید و نشان دهید که:

$$k=2|k_1| \qquad \text{و} \qquad \theta=\measuredangle k_1$$

«محاسبه ثابت‌های دلخواه» - فرض کنید حالت میرای شدید را درنظر بگیریم. جریان i_L بوسیله معادله (۱۴-۱) باینصورت داده میشود:

$$i_L(t)=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}$$

میخواهیم ثابت‌های k_1 و k_2 را از شرایط اولیه مشخص شده در معادلات (۸-۱) و (۹-۱) تعیین کنیم. با محاسبه $i_L(t)$ در (۱۴-۱) در لحظه $t=0$ بدست میاوریم:

$$i_L(0)=k_1+k_2=I_0 \tag{۱-۱۸}$$

با مشتق گیری از (۱۴-۱) و محاسبه مشتق در لحظه $t=0$ ، بدست میاوریم:

$$\frac{di_L(t)}{dt}(0)=k_1s_1+k_2s_2=\frac{V_0}{L} \tag{۱-۱۹}$$

۱- Laplace transform ۲- Bar

اگر معادلات (۱-۱۸) و (۱-۱۹) را برحسب k_1 و k_2 حل کنیم بدست میآوریم :

$$k_1=\frac{1}{s_1-s_2}\left(\frac{V_0}{L}-s_2 I_0\right) \qquad (1-20)$$

و :

$$k_2=\frac{1}{s_2-s_1}\left(\frac{V_0}{L}-s_1 I_0\right) \qquad (1-21)$$

با جایگذاری k_1 و k_2 در (۱-۱٤)، یک عبارت کلی برای شکل موج جریان $i_L(0)$ برحسب «حالت اولیه» مدار، یعنی جریان اولیه I_0 در سلف و ولتاژ اولیه V_0 در دو سر خازن بدست میآوریم. بنابراین :

$$i_L(t)=\frac{V_0}{(s_1-s_2)L}\left(e^{s_1 t}-e^{s_2 t}\right)+\frac{I_0}{s_1-s_2}\left(s_1 e^{s_2 t}-s_2 e^{s_1 t}\right) \qquad (1-22)$$

ولتاژ v_C دو سر خازن را میتوان از روی i_L حساب کرد زیرا $v_C=v_L$ و $v_L=L\frac{di_L}{dt}$ ، بنابراین :

$$v_C(t)=\frac{V_0}{s_1-s_2}\left(s_1 e^{s_1 t}-s_2 e^{s_2 t}\right)+\frac{L I_0 s_1 s_2}{s_1-s_2}\left(e^{s_2 t}-e^{s_1 t}\right) \qquad (1-23)$$

بطریق مشابه، میتوان برای حالت میرای ضعیف، جریان سلف و ولتاژ خازن را بصورت زیر بدست آورد :

$$i_L(t)=\frac{V_0}{\omega_d L}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t+I_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_d t+\frac{\alpha}{\omega_d}\sin\omega_d t\right) \qquad (1-24)$$

$$v_C(t)=V_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_d t-\frac{\alpha}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)-\frac{L\omega_0^2}{\omega_d}I_0 e^{-\alpha t}\sin\omega_d t \qquad (1-25)$$

تمرین ۱- فرمول‌های (۱-۲٤) و (۱-۲۵) را ثابت کنید.

تمرین ۲- ثابت کنید که برای حالت بی‌اتلاف، جریان سلف و ولتاژ خازن بصورت زیر داده میشوند:

$$i_L(t) = \frac{V_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t + I_0 \cos \omega_0 t \qquad (۱-۲۶)$$

$$v_C(t) = V_0 \cos \omega_0 t - \omega_0 L I_0 \sin \omega_0 t \qquad (۱-۲۷)$$

تمرین ۳- اگر $I_0 = ۱$ آمپر و $V_0 = ۱$ ولت باشد، برای هریک ازمدارهای RLC موازی زیر پاسخ های حالت صفر را تعیین و شکل موجهای $i_L(\cdot)$ و $v_C(\cdot)$ آنها را نسبت به t رسم کنید:

الف - $R = ۱$ اهم، $L = ۱$ هانری و $C = ۱$ فاراد

ب - $R = ۱$ اهم، $L = ۴$ هانری و $C = \frac{۱}{۴}$ فاراد

پ - $R = \infty$ ، $L = ۴$ هانری و $C = ۱$ فاراد

بایستی بخاطر داشت که حالت بی‌اتلاف در واقع یک حالت حدی، حالت میرای ضعیف است و اگر R بسمت بینهایت میل کند، $(\alpha = o)$، نوسان میرا تبدیل به نوسان سینوسی با فرکانس زاویه‌یی ω_0 میگردد.

«انرژی و ضریب Q» - بخاطر بیاورید که حالت اولیه بوسیله جریان اولیه I_0 درسلف و ولتاژ اولیه V_0 دو سرخازن در لحظه $t = o$ داده میشود. بنابراین، انرژی ذخیره شده اولیه مساوی مجموع $\frac{۱}{۲} L I_0^۲$ (درمیدان مغناطیسی) و $\frac{۱}{۲} C V_0^۲$ (درمیدان الکتریکی) میباشد. فرض کنید حالت میرای ضعیف را درنظر بگیریم. با گذشت زمان انرژی از خازن به سلف و از سلف به خازن انتقال می‌یابد و ضمن این نوسان، قسمتی از این انرژی بصورت حرارت در مقاومت تلف میشود. بنابراین انرژی کلی که در میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی باقی میماند بتدریج ازبین میرود. برای $R = \infty$ ، جریان داخل مقاومت همیشه صفر بوده و هیچ اتلاف انرژی وجود ندارد و بنابراین یک نوسان مداوم[۱] خواهیم داشت.

توجه کنید که پارامتر ω_0 بفرکانس نوسان میرا، $\omega_d = \sqrt{\omega_0^۲ - \alpha^۲}$ ، ارتباط

۱- Sustained Oscillation

دارد ، درحالیکه پارامتر α شدت میرایی نمایی را تعیین میکند. میرایی نسبی دریک نوسان میرا اغلب بوسیله یک عدد Q که بصورت زیر تعریف میشود مشخص میگردد :

$$Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \qquad (۱-۲۸)$$

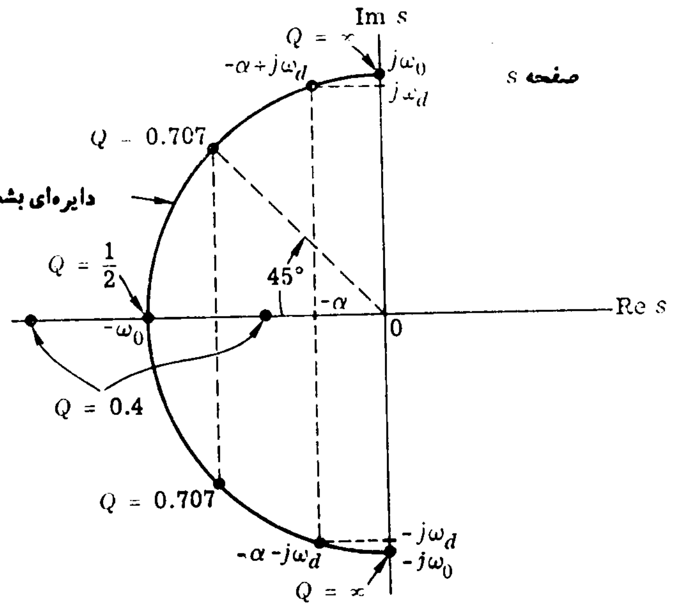
میتوان Q را بعنوان «ضریب کیفیت[۱]» یک مدار تشدید فیزیکی درنظر گرفت. هرقدر میرایی کمتر باشد Q بزرگتر خواهد بود. توجه کنید که در مدار RLC موازی ، برای «کاهش» میرایی لازم است که مقاومت را «افزایش» دهیم. یک مدار تشدید بی‌اتلاف دارای میرایی صفر یا Q بینهایت میباشد. در فصل هفتم نشان خواهیم داد که میتوان Q را به نسبت انرژی ذخیره شده وتوان تلف شده درهرسیکلی ارتباط داد.

چهار حالتی راکه مطالعه کردیم میتوان برحسب مقدار Q نیز طبقه‌بندی نمود. درحالت میرای شدید، $Q < \frac{1}{2}$ ، درحالت میرای بحرانی، $Q = \frac{1}{2}$ ، درحالت میرای ضعیف، $Q > \frac{1}{2}$ و درحالت بی‌اتلاف $Q = \infty$ است. در شکل (۴-۱) مقادیر Q به محل‌های فرکانس‌های طبیعی در چهار حالت ارتباط داده شده‌اند.

حالت بی‌اتلاف ($\alpha = 0$ ، $R = \infty$ و $Q = \infty$) یک حالت ایده‌ال‌است ، زیرا یک سلف فیزیکی همیشه دارای مقداری اتلاف میباشد. بنابراین در مدارهای «پسیو» عملی نمیتوان $Q = \infty$ ، پیدا کرد واین بدان معنی است که بدست‌آوردن نوسان سینوسی، ناشی ازحالت اولیه تنها درواقع غیر ممکن است. در بخش ۴ نشان خواهیم داد که اگر علاوه بر L و C دارای اتلاف ، بعضی‌ازعناصر اکتیو نیز درمدار بکار برده شود ، یک نوسان مداوم بدست خواهد آمد.

تمرین درمدارهای فشرده عملی ، Q هایی بامقدار چندین صد قابل دسترس است. برای بدست آوردن احساسی از معنای Q فرض کنید که $Q \gg 1$ باشد. ثابت کنید که دامنه نوسان میرا ، پس‌از Q پریود به ۴ر۳ درصد مقدار اولیه خود میرسد.

۱- Quality factor

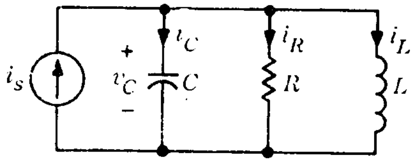


شکل ۴-۱- مکان فرکانس‌های طبیعی چهار حالت . در معادله مشخصه $s^2+2\alpha s+\omega_0^2=s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2=0$ فرکانس تشدید $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ را ثابت نگاهداشته و Q تغییر میکند . این متناظربامداری است که L و C در آن ثابت مانده و R تغییر میکند.

۲- مدار RLC خطی تغییر ناپذیر با زمان ، پاسخ حالت صفر

مطالعه مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان را ادامه میدهیم تا طرز محاسبه‌وخواص «پاسخ حالت‌صفر» راتشریح کنیم. بنابراین، درحالتی‌هستیم که درآن‌شرایط اولیه همه صفر بوده و ورودی بطور متحد مساوی صفر نیست. در بخش قبل ورودی بطور متحد مساوی صفر بود ولی شرایط اولیه همگی مساوی صفر نبودند.

در واقع منظور از پاسخ حالت صفر، پاسخ مدار به یک ورودی اعمال شده در یک زمان دلخواه t_0 میباشد، بشرط اینکه مدار در t_{0-} در حالت صفر باشد. علت اینکه بجای t_0 ، t_{0-} گفته میشود اینست که تأکید کنیم ، شرایط اولیه (جریان داخل سلف‌و



شکل ۱-۲- مدار RLC موازی با ورودی منبع جریان

ولتاژ دو سر خازن) درست قبل از اعمال ورودی صفر میباشند .

برای مدار شکل (۱-۲) از KCL چنین بدست میاید :

$$i_C+i_R+i_L=i_s \qquad (۲-۱)$$

با تکرار همان روش بخش ۱ ، معادله مدار را برحسب جریان سلف i_L بدست میاوریم، بنابراین :

$$LC\,\frac{d^2 i_L}{dt^2}+LG\,\frac{di_L}{dt}+i_L=i_s(t) \qquad t\geqslant 0 \qquad (۲-۲)$$

و :

$$i_L(0_-)=0 \qquad (۲-۳)$$

$$\frac{di_L}{dt}(0_-)=\frac{v_C(0_-)}{L}=0 \qquad (۲-۴)$$

سه معادله فوق متناظر با معادلات (۷-۱) ، (۸-۱) و (۹-۱) بخش قبلی است. تفاوت آنها دراین است که قبلاً ورودی صفر بود و شرایط اولیه غیر صفر بودند درحالیکه اکنون تابع ورودی ، همانطورکه در (۲-۲) دیده میشود $i_s(t)$ بوده و همه شرایط اولیه چنانکه در (۳-۲) و (۴-۲) داده شده است صفر هستند. بخاطر بیاورید که جواب معادله دیفرانسیل خطی نا همگن با ضرایب ثابت مجموع دو جمله است ، یعنی:

$$i_L=i_h+i_p \qquad (۲-۵)$$

که درآن i_h یک جواب معادله دیفرانسیل همگن ، یعنی جواب معادله (۲-۲) با $i_s=0$ بوده و i_p یک جواب خاص معادله دیفرانسیل ناهمگن میباشد. درمسألهما ، i_h در بخش قبل محاسبه شده است زیرا همان پاسخ ورودی صفر است و بخاطر دارید که شامل دو ثابت دلخواه میباشد. بجز حالت میرای بحرانی ، میتوان i_h را بصورت زیر نوشت :

$$i_h=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t} \tag{۲-۶}$$

البته اگر فرکانس های طبیعی مختلط باشند، درآنصورت :

$$s_2=\overline{s_1}=-\alpha-j\omega_d \quad \text{و} \quad k_2=\overline{k_1} \tag{۲-۷}$$

و میتوان i_h را بصورت زیرنیز نوشت :

$$i_h=2|k_1|e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\measuredangle k_1) \tag{۲-۸}$$

از طرف دیگر، i_p به ورودی بستگی دارد. چنانچه ورودی یک تابع پله باشد، راحت‌تر است که i_p بصورت یک ثابت انتخاب شود و اگر ورودی یک سینوسی باشد، راحت‌تر است که i_p بصورت یک سینوسی انتخاب گردد.

در بقیه این بخش، تنها پاسخ پله‌وپاسخ‌ضربه راحساب‌خواهیم کرد. محاسبه پاسخ حالت صفر برای یک ورودی سینوسی در فصل هفتم و برای ورودی‌های دلخواه در فصل ششم داده خواهد شد.

یک خاصیت مهم پاسخ حالت صفر یک مدار خطی آنست که این پاسخ تابع خطی ورودی است. ما به اثبات این مطلب نخواهیم پرداخت چونکه آن مشابه مدارهای مرتبه اول میباشد که در فصل چهارم داده شده است.

۲-۱- پاسخ پله

میخواهیم پاسخ پله مدار RLC موازی نشان داده شده در شکل(۲-۱) را محاسبه کنیم. بموجب تعریف،ورودی یک پله واحد بوده و شرایط اولیه صفر میباشند. بنابراین از معادلات (۲-۲) تا (۲-۴) داریم :

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}+LG\frac{di_L}{dt}+i_L=u(t) \tag{۲-۹}$$

$$i_L(0)=0 \tag{۲-۱۰}$$

$$\frac{di_L}{dt}(0)=0^+ \tag{۲-۱۱}$$

+ چون در معادله (۲-۹) ضربه وجود ندارد، لازم نیست که بین 0_- و 0_+ تمایزی قایل شویم.

راحت‌ترین جواب خاص معادله (۹-۲) چنین است :

$$i_p(t) = ۱ \qquad t \geqslant 0 \text{ برای} \qquad (۲-۱۲)$$

بنابراین، چنانچه فرکانس های طبیعی متمایز باشند، جواب کلی بصورت زیر خواهد بود :

$$i_L(t) = k_۱ e^{s_۱ t} + k_۲ e^{s_۲ t} + ۱ \qquad (۲-۱۳)$$

و چنانکه فرکانس های طبیعی مساوی هم باشند، جواب کلی باینصورت است :

$$i_L(t) = (k + k't)e^{-\alpha t} + ۱ \qquad (۲-۱۴)$$

اکنون بااستفاده‌ازشرایط اولیه (۱۰-۲) و (۱۱-۲) ثابت‌های $k_۱$ و $k_۲$ درمعادله(۱۳-۲) را تعیین میکنیم. در زمان $t = 0$ از معادلات (۱۰-۲) و (۱۳-۲) نتیجه میشود :

$$i_L(0) = k_۱ + k_۲ + ۱ = 0 \qquad (۲-۱۵)$$

با مشتق گیری‌از (۱۳-۲) و محاسبه‌مشتق‌در $t = 0$ بدست میاید:

$$\frac{di_L}{dt}(0) = k_۱ s_۱ + k_۲ s_۲ = 0 \qquad (۲-۱۶)$$

از حل دو معادله فوق برحسب $k_۱$ و $k_۲$ داریم :

$$k_۱ = \frac{s_۲}{s_۱ - s_۲} \quad \text{و} \quad k_۲ = \frac{-s_۱}{s_۱ - s_۲} \qquad (۲-۱۷)$$

بنابراین پاسخ پله واحد چنین است :

$$i_L(t) = \left[\frac{۱}{s_۱ - s_۲} (s_۲ e^{s_۱ t} - s_۱ e^{s_۲ t}) + ۱ \right] u(t) \qquad (۲-۱۸)$$

فرکانس های طبیعی درحالت میرای ضعیف مختلط هستند، بنابراین :

$$\left.\begin{matrix} s_۱ \\ s_۲ \end{matrix}\right\} = -\alpha \pm j\omega_d$$

یا در مختصات قطبی[۱] (شکل (۲-۲) را ببینید) :

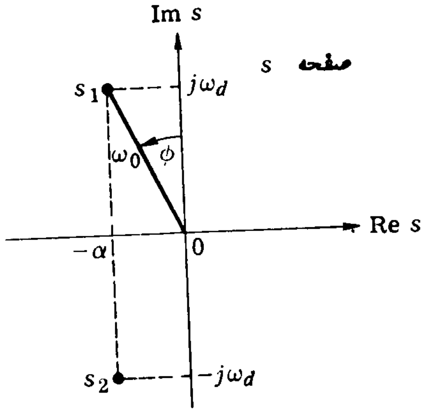
۱- Polar Coordinates

$$\left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = \omega_0 \, e^{\pm j\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}$$

که در آن :

$$|s_1| = |s_2| = \sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2} = \omega_0 \quad \text{و} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\alpha}{\omega_d} \qquad (۲-۱۹)$$

جمله اول (۲-۱۸) را میتوان باینصورت بیان کرد :



شکل ۲-۲- نمایش فرکانسهای طبیعی s_1 و s_2 برحسب مختصات قائم و قطبی، مینویسیم :

$$\left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = -\alpha \pm j\omega_d = \omega_0 \, e^{\pm j\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \alpha^2}$$

$$\sin \varphi = \frac{\alpha}{\omega_0} \,, \quad \cos \varphi = \frac{\omega_d}{\omega_0} \,, \quad \tan \varphi = \frac{\alpha}{\omega_d}$$

$$\frac{1}{s_1 - s_2}\left(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2j\omega_d}\,\omega_0 e^{-\alpha t}\left[e^{j\left(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \varphi\right)} - e^{-j\left(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \varphi\right)}\right]$$

$$= \frac{\omega_0}{2j\omega_d}\, e^{-\alpha t}\, 2j \sin\left(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$(۲-۲۰) \qquad = -\frac{\omega_0}{\omega_d}\, e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \varphi)$$

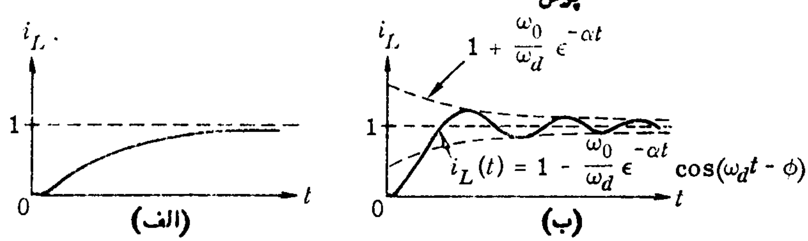
پاسخ پله واحد بصورت‌زیر درمیاید:

$$(۲-۲۱) \qquad i_L(t) = \left[-\frac{\omega_0}{\omega_d}\, e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t - \varphi) + 1\right]u(t)$$

نمونه شکل‌های پاسخ پله برای حالتهای میرای شدید و میرای ضعیف درشکل (۳-۲) داده شده‌اند.

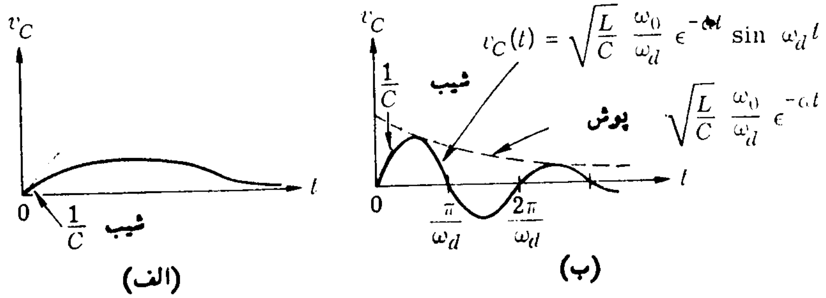
آموزنده است که پاسخ پله رابدو قسمت تفکیک کنیم ، جمله‌یی که یک نمایی میرا یا سینوسی میرا بوده و نمایشگر «حالت گذرا» است و جملهٔ ثابت مساوی واحد که نشان دهنده «حالت دائمی» است. درهردو حالت ، جریان i_L ازصفر شروع کرده و برای $t = \infty$ بمقدار واحد میرسد.

ولتاژ دو سر خازن مدار RLC موازی را میتوان با محاسبه $L\,\frac{di_L}{dt}$ بسهولت حساب کرد. بنابراین :



شکل ۳-۲- پاسخهای پله برای جریان سلف در مدار RLC موازی .

(الف) میرای شدید . (ب) میرای ضعیف



شکل ۴-۲- پاسخهای پله برای ولتاژ خازن مدار RLC موازی

$$v_C(t)=L\ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2}\ (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})u(t) \qquad (۲-۲۲)$$

و برای حالت میرای ضعیف :

$$v_C(t)=u(t)\sqrt{\frac{L}{C}}\ \frac{\omega_0}{\omega_d}\ e^{-\alpha t}\sin \omega_d t \qquad (۲-۲۳)$$

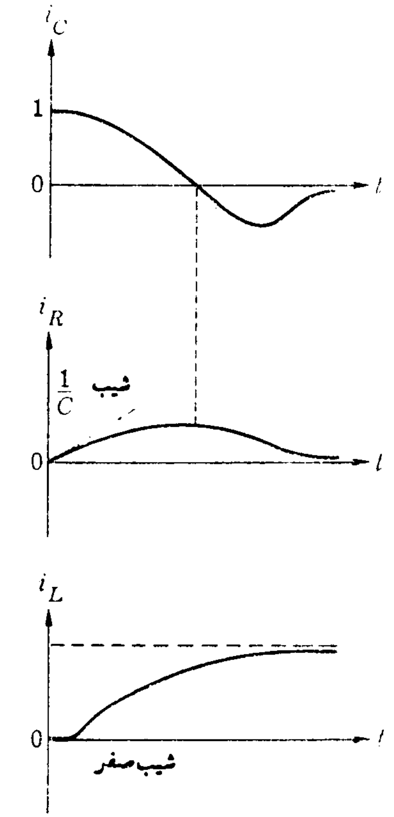
این توابع درشکل (۴-۲) رسم شده‌اند . در این مورد «حالت دائمی» بطور متحد مساوی صفر است . تمام جریان منبع سرانجام از داخل سلف میگذرد وچون این جریان ثابت است پس‌ولتاژ دو سر سلف بطور متحد مساوی صفر خواهد بود .

«تعبیر فیزیکی» یک منبع جریان ثابت بطورموازی بیک مدار RLC موازی که در حالت صفر قرار دارد اعمال میشود . واضح است که ولتاژ دو سر خازن و جریان داخل سلف نمیتوانند بطور ناگهانی تغییر کنند و بنابراین درست پس‌از اعمال ورودی،مقادیر آنها صفر است . این امرلازم میدارد که جریان داخل مقاومت نیز در ابتدا صفر باشد چونکه $v_R(0)=v_C(0)=0$ است . بنابراین در لحظه $t=0$ « همه » جریان منبع از داخل خازن میگذرد و موجب افزایش تدریجی ولتاژ میشود . «در لحظه $t=0_+$ ، خازن در مقابل اعمال ناگهانی منبع جریان ثابت محدود ، مانند یک مدار اتصال کوتاه رفتار میکند.» بمرور زمان ولتاژ دوسر خازن‌افزایش می‌یابد و جریان در مقاومت و سلف هردو جاری میشود . پس‌ازمدت زمان درازی مدار بیک حالت دائمی میرسد یعنی :

$$\frac{di_L}{dt}=0 \qquad \frac{d^2 i_L}{dt^2}=0$$

و بنابراین مطابق معادله (۲ ـ ۲) تمام جریان منبع از داخل سلف میگذرد. در نتیجه، چون جریان داخل مقاومت صفر است،ولتاژ دو سر مدار موازی صفر خواهد بود. «درزمان $t=\infty$ ، سلف درمقابل یک منبع جریان ثابت مانند یک مداراتصال کوتاه رفتار میکند.» برای حالت میرای شدید $\left(Q < \frac{۱}{۲}\right)$ ، جریانهای داخل خازن و مقاومت و سلف در شکل (۵-۲) رسم شده‌اند.

تمرین - برای یک مدار RLC موازی با $R=۱$ اهم ، $C=۱$ فاراد و $L=۱$ هانری ، جریانهای داخل سلف ، خازن و مقاومت راکه دراثر اعمال یک ورودی جریان پله یک آمپری حاصل میشود تعیین کنید. مدار در زمان $t=0_-$ در حالت صفر است. شکل موجها را رسم کنید.



شکل ۵-۲- شکلهای i_C ، i_R و i_L ناشی از یک ورودی جریان پله برای مدار RLC موازی (حالت میرای شدید $Q < \frac{۱}{۲}$)

۲-۲- پاسخ ضربه

اکنون پاسخ ضربه را برای مدار RLC موازی حساب میکنیم. بموجب تعریف، ورودی یک ضربه واحد بوده و در $t=o_-$ مدار در حالت صفر میباشد. بنابراین پاسخ ضربه i_L ،جواب معادله دیفرانسیل زیر خواهد بود.

$$LC\frac{d^{2}i_L}{dt^{2}}+LG\frac{di_L}{dt}+i_L=\delta(t) \qquad (۲-۲٤)$$

$$i_L(o_-)=o \qquad (۲-۲۵)$$

$$\frac{di_L}{dt}(o_-)=o \qquad (۲-۲٦)$$

چون محاسبه و درک فیزیکی پاسخ ضربه در تئوری مدار اهمیت بسزایی دارد ، بدینجهت مجدداً چند روش محاسبه و تعبیر برای آن عرضه خواهد شد و تنها ، حالت میرای ضعیف یعنی حالتی که فرکانس های طبیعی مدار مختلط میباشند درنظر گرفته خواهد شد.

«روش اول» - در این روش مستقیماً معادله دیفرانسیل را بکار می‌بریم . چون تابع ضربه $\delta(t)$ برای $t>o$ بطور متحد برابر صفر است ، پاسخ ضربه را میتوان بعنوان پاسخ ورودی صفرکه در $t=o_+$ شروع میشود درنظرگرفت . ضربه وارده در $t=o$ شرط اولیه‌ای در $t=o_+$ بوجود میاورد و پاسخ‌ضربه برای $t>o$ ، اساساً پاسخ ورودی صفر ناشی از آن شرط اولیه است . پس مسأله،تعیین این شرط اولیه میباشد. فرض کنید هردو طرف معادله (۲-۲٤) را از $t=o_-$ تا $t=o_+$ انتگرال بگیریم ، بدست میاوریم :

$$LC\frac{di_L}{dt}(o_+)-LC\frac{di_L}{dt}(o_-)+LG\,i_L(o_+)-LG\,i_L(o_-)+\int_{o_-}^{o_+}i_L(t')dt'=1 \qquad (۲-۲۷)$$

که درآن مقدار سمت راست ، بااستفاده از حقیقت زیر بدست آمده است :

$$\int_{0_-}^{0_+} \delta(t')dt' = ۱$$

میدانیم که i_L نمیتواند در $t=0$ بجهد ، بعبارت دیگر، i_L یک تابع پیوسته است یعنی:

$$\int_{0_-}^{0_+} i_L(t')dt' = 0 \qquad \text{و} \qquad i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

زیرا اگر i_L پیوسته نبود ، $\frac{di_L}{dt}$ شامل یک ضربه و $\frac{d^۲ i_L}{dt^۲}$ شامل یک دوبلت میبود ، و معادله (۲-۲٤) هرگز نمیتوانست برقرار باشد چونکه در سمت راست هیچ تابع دو بلتی وجود ندارد. از (۲-۲۷) بدست میاوریم :

$$\frac{di_L}{dt}(0_+) = \frac{di_L}{dt}(0_-) + \frac{۱}{LC} = \frac{۱}{LC} \qquad (۲-۲۸)$$

تا آنجا که $t>0$ مورد نظر است ، معادله دیفرانسیل ناهمگن (۲-۲٤) با شرط اولیه داده شده در (۲-۲۵) و (۲-۲٦) معادل است با:

$$LC\frac{d^۲ i_L}{dt^۲} + LG\frac{di_L}{dt} + i_L = 0 \qquad (۲-۲۹)$$

با :

$$i_L(0_+) = 0 \qquad (۲-۳۰)$$

و :

$$\frac{di_L}{dt}(0_+) = \frac{۱}{LC} \qquad (۲-۳۱)$$

واضح است که برای $t \leqslant 0$ ، $i_L(t)$ صفر است. بنابراین جواب معادله بالا چنین است :

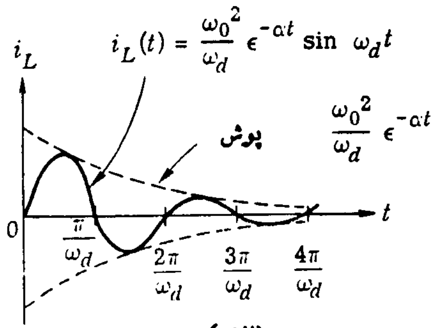
$$i_L(t) = u(t)\frac{\omega_0^۲}{\omega_d} e^{-\alpha t}\sin \omega_d t \qquad (۲-۳۲)$$

شکل موج جریان در شکل (۲-٦ الف) نشان داده شده است. توجه کنید که برای یک

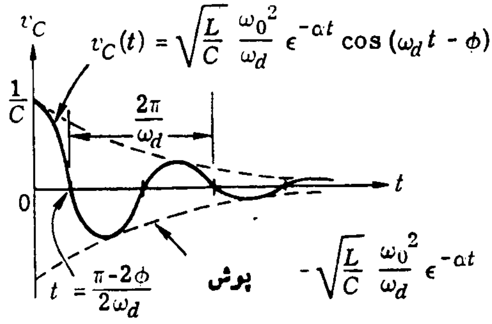
حالت اولیه داده شده $I_0=o$ و $V_0=\frac{1}{C}$ ، از پاسخ ورودی صفر (۱-۲۴) نیز میتوان (۲-۳۲) را بدست آورد.

تبصره اتصال موازی یک خازن و منبع جریان i_s را درنظر بگیرید. در فصل دوم نشان دادیم که این اتصال موازی ، معادل با اتصال سری همان خازن و منبع ولتاژ v_s میباشد که در آنجا :

$$v_s(t)=\frac{1}{C}\int_{o_-}^{t} i_s(t')dt' \qquad t\geqslant o$$



(الف)

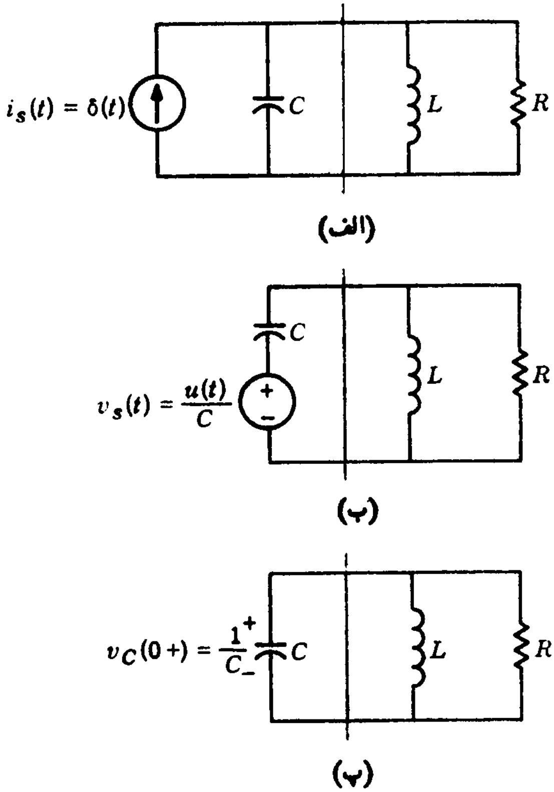


(ب)

شکل ۶-۲- پاسخ ضربه مدار RLC موازی برای حالت میرای ضعیف

$$\left(Q>\frac{1}{2}\right)$$

بنابراین منبع ولتاژ معادل منبع جریان ضربه، $\frac{1}{C}u(t)$ است، یعنی برای $t<0$ منبع ولتاژ بطور متحد برابر صفر و برای $t>0$ منبع ولتاژ مساوی ثابت $\frac{1}{C}$ است. اتصال سری یک خازن بی‌بار و منبع ولتاژ ثابت، معادل یک خازن بارشده با ولتاژ اولیه $\frac{1}{C}$ میباشد. بنابراین پاسخ ضربه یک مدار RLC موازی ناشی از یک جریان



شکل ۷-۲- مسأله تعیین پاسخ ضربه یک مدار RLC ، به مسأله تعیین پاسخ ورودی صفر یک مدار RLC تبدیل میشود . توجه کنید که اتصال موازی منبع جریان ضربه و خازن در شکل (الف) به اتصال سری خازن و یک منبع ولتاژ پله در شکل (ب) تبدیل شده و بالاخره به خازن بار شده شکل (پ) تبدیل گردیده است .

ضربه موازی باآن ، با پاسخ ورودی صفر آن مدار با $v_C(o_+)=\frac{1}{C}$ یکسان است. این برابری‌ها در شکل (۲-۷) تشریح شده است .

«جایگذاری مستقیم» اکنون باجایگذاری مستقیم (۲-۳۲) درمعادلات (۲-۲۴) تا (۲-۲۶) ثابت میکنیم که این جواب معادله است. این عمل از لحاظ آشنایی بامحاسباتی کـه شامل ضربه هستند تمرین با ارزشی است . واضح استکـه i_L داده شده توسط (۲-۳۲)شرایط اولیه(۲-۲۵)و(۲-۲۶)رابرمیاورد، یعنی، $i_L(o_-)=o$ و $\frac{di_L}{dt}(o_-)=o$.

آنچه باقی میماند این‌است‌که نشان دهیم (۲-۳۲) درمعادله دیفرانسیل (۲-۲۴) صدق میکند. با مشتق گیری از (۲-۳۲) بدست میآید :

(۲ − ۳۳)

$$\frac{di_L}{dt}=\delta(t)\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t\right)+\frac{u(t)\omega_0^3}{\omega_d}e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\varphi)$$

جمله اول بصورت $\delta(t)f(t)$ است وچون برای $t\neq o$ ، $\delta(t)$ مساوی صفر است پس دراین جمله میتوان $t=o$ قرارداد و $\delta(t)f(o)$ را بدست آورد ، ولی چون $f(o)=o$ است پس جمله اول ازبین میرود و داریم :

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{u(t)\omega_0^3}{\omega_d}e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\varphi) \qquad (۲-۳۴)$$

با مشتق گیری مجدد بدست میاوریم :

$$\frac{d^2i_L}{dt^2}=\delta(t)\,\frac{\omega_0^3}{\omega_d}\cos\varphi-u(t)\,\frac{\omega_0^4}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t+2\varphi) \qquad (۲-۳۵)$$

$$=\omega_0^2\delta(t)-u(t)\frac{\omega_0^4}{\omega_d}\,e^{-\alpha t}[\sin(\omega_d t+\varphi)\cos\varphi+\cos(\omega_d t+\varphi)\sin\varphi]$$

باجایگذاری معادلات (۲-۳۲) و (۲-۳۴) و (۲-۳۵) در (۲-۲۴)که برحسب ω_0 و α مجدداً بصورت زیر نوشته شده است :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\,\frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{2\alpha}{\omega_0^2}\,\frac{di_L}{dt}+i_L=\delta(t)$$

ملاحظه خواهیم کرد که سمت چپ ، چنانکه انتظار داشتیم ، مساوی $\delta(t)$ میگردد . بنابراین با جایگذاری مستقیم ثابت کردیم که (۲-۳۲) پاسخ ضربه مدار RLC موازی است.

تمرین - نشان دهید که پاسخ ضربه برای ولتاژخازن مدار RLC موازی چنین است :

$$v_C(t)=u(t)\sqrt{\frac{L}{C}}\ \frac{\omega_0^2}{\omega_d}\,e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\varphi) \qquad (۲-۳۶)$$

شکل موج تابع فوق در شکل (۲-۶ ب) نشان داده شده است.

«روش دوم» در این روش از رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله استفاده میکنیم. این روش تنها برای مدارهای با اجزاء خطی تغییر ناپذیر با زمان قابل استفاده است ، چونکه تنها برای اینگونه مدارها پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله میباشد.

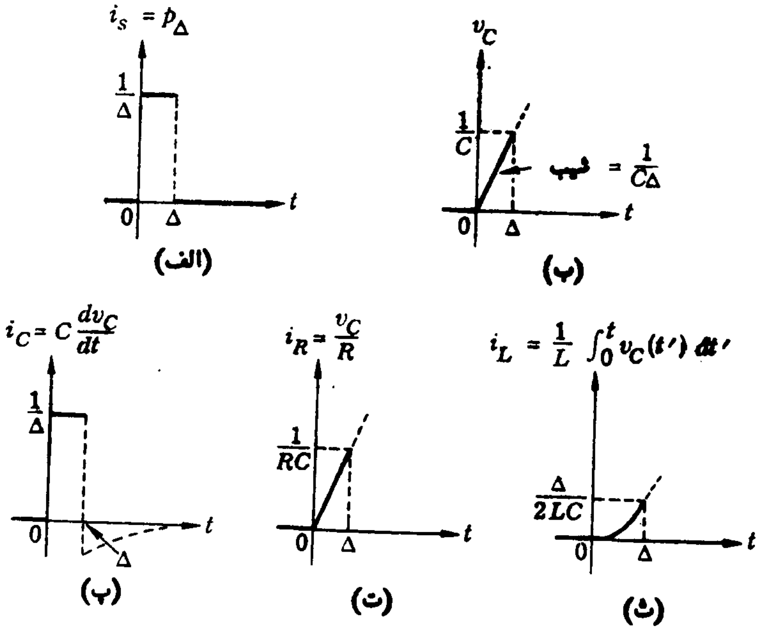
تمرین - نشان دهید که پاسخ های ضربه برای i_L درمعادله (۲-۳۲) و v_C درمعادله (۲-۳۶) را میتوان باشتق گیری از پاسخ های پله برای i_L در معادله (۲-۲۱) و v_C در معادله (۲-۲۳) بدست آورد.

«تعبیر فیزیکی» اکنون برای توضیح چگونگی رفتار جریانها و ولتاژهای تمام شاخه‌ها درمدار RLC موازی ، یک ورودی پالس $i_s(t)=p_\Delta(t)$ ، مطابق شکل (۲-۸ الف) بکار میبریم . بخاطر بسپارید چنانچه $\Delta \to 0$ ، پالس p_Δ بسمت ضربه میل کرده و پاسخ پالس بسمت پاسخ ضربه میل خواهد نمود . برای شروع کار فرض میکنیم Δ پایاندار و مثبت بوده ولی بسیار کوچک است. در بحث پاسخ پله آموختیم که در $t=0_+$ تمام جریان منبع بداخل خازن جاری میشود، یعنی :

$$i_C(0_+)=i_s(0_+)=\frac{1}{\Delta} \quad و \quad i_R(0_+)=i_L(0_+)=0$$

جریان داخل خازن با شدت اولیه $\frac{dv_C}{dt}(0_+)=\frac{i_C(0_+)}{C}=\frac{1}{C\Delta}$ موجب افزایش تدریجی ولتاژ دوسر خازن میگردد . چون توجه اصلی ما به مقادیر کوچک Δ است پس فرض

میکنیم در طول فاصله کوتاه $(\Delta \ , \ o)$ شیب منحنی ولتاژ ثابت بماند. دراینصورت مطابق شکل (۸-۲ ب) در زمان Δ ولتاژ بمقدار $\frac{1}{C}$ میرسد. جریان داخل مقاومت متناسب باولتاژ v_C بوده وبنابراین یک تابع خطی از t است(شکل(۸-۲ ت) را ببینید). جریان داخل سلف که متناسب باانتگرال v_L میباشد یک تابع سهمی از t است (شکل (۸-۲ ث) را ببینید). دراین فاصله، جریان داخل خازن بطوریکه در شکل (۸-۲ پ) نشان داده شده است ثابت میماند. البته این فرض که در فاصله $(\Delta \ , \ o)$ تمام جریان منبع از خازن میگذرد صحیح نیست. معهذا خطای موجود شامل جملاتی با درجه‌های بالاتر Δ میباشد و بنابراین وقتیکه $\Delta \to o$ این خطا صفر میشود. با مراجعه مجدد بشکل (۸-۲ الف) ملاحظه میکنیم وقتیکه $\Delta \to o$ ، i_s به‌یک ضربه δ تبدیل شده، v_C جهشی از o به $\frac{1}{C}$ پیدا میکند و i_C به‌یک ضربه δ تبدیل شده ، i_R جهشی از o به $\frac{1}{RC}$ پیدا میکند و i_L چنان است که:



شکل ۸-۲- تشریح فیزیکی پاسخ ضربه یک مدار RLC موازی ، p_Δ پالس ورودی است ، v_C ، i_C ، i_R و i_L بدست آمده نشان داده شده‌اند.

$$i_L(o_-)=i_L(o_+)=\frac{di_L}{dt}(o_-)=o \quad \text{و} \quad \frac{di_L}{dt}(o_+)=\frac{۱}{LC}$$

بالاخره وقتیکه $\triangle \to o$ ، از KCL ملاحظه میشود که :

$$i_C(o_+)=-i_R(o_+)-i_L(o_+)=\frac{-۱}{RC}$$

توجه کنید که این شرایط با آنهایی که از بکار بردن روش‌های دیگر، مثلاً در(۱-۳۱-۲) بدست آمده است مطابقت دارند.

۳- روش فضای حالت

تجزیه و تحلیل انجام شده در بخش‌های قبل تعمیم سر راست روشی بود که برای مدارهای مرتبه اول بکار رفت، یعنی ما یک متغیر مناسب‌را انتخاب کردیم (i_L درمورد بالا) و یک معادله دیفرانسیل برحسب این متغیر نوشتیم. چنانچه این معادله حل‌شود متغیرهای دیگر بسهولت محاسبه میشوند. معهذا راه دیگری برای درنظر گرفتن این مسأله وجود دارد. واضح است هرگاه شرایط اولیه جریان I_0 سلف و ولتاژ V_0 خازن معلوم باشند پاسخ ورودی صفر کاملاً معین میشود . بنابراین میتوان V_0 و I_0 را بعنوان مشخص کننده « حالت اولیه » مدار تصور نمود و حالت کنونی ($v_C(t)$ و $i_L(t)$) را برحسب حالت اولیه (I_0 , V_0) بیان کرد. بعبارت دیگر، میتوان رفتار یک مدار را بصورت یک مسیر(۱) در فضای دو بعدی درنظر گرفت که از حالت اولیه (I_0 , V_0) شروع میشود و برای هر t ، نقطه متناظر مسیر، $i_L(t)$ و $v_C(t)$ را معین میکند.

در واقع میتوان سؤال کرد که چرا ما یادگرفتن این جنبه جدید نیاز داریم . دلیل این موضوع نسبتاً ساده است. اول آنکه، این روش یک توصیف تصویری روشن از رفتار کامل مدار را بما میدهد و دوم آنکه، این روش تنها راه مؤثر تجزیه و تحلیل مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان است. در این حالتهای کلی‌تر، سعی مادر انتخاب یک متغیر مناسب و نوشتن معادله دیفرانسیلی از مرتبه بالاتر برحسب آن متغیر، به بسیاری از پیچیدگی‌های غیر ضروری منجر میگردد وبدین‌جهت یک محرک قوی برای یادگیری روش

۱- Trajectory

فضای حالت در زمینه ساده مدارهای خطی تغییر ناپذیر با زمان مرتبه دوم وجود دارد. یک مزیت دیگر این روش آنست که سیستم معادلات بدست آمده از روش فضای حالت، از لحاظ محاسبه و حل عددی آنها در کامپیوترهای دیجیتال و آنالوگ بسهولت قابل برنامه نویسی هستند. بررسی دقیق‌تر روش فضای حالت در فصل دوازدهم داده خواهد شد.

۳-۱- معادلات و مسیر حالت

اکنون همان مدار RLC موازی را که در بخش ۱ تشریح شد درنظر بگیرید و فرض کنید که ورودی منبع جریان موجود نباشد. میخواهیم پاسخ ورودی صفر را محاسبه کنیم. گیریم i_L و v_C را بعنوان متغیرها بکار برده و معادلات (۱-۱ ب) و (۱-۶) را مجدداً بصورت زیر بنویسیم:

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{1}{L}v_C \qquad t\geqslant 0 \qquad (۳-۱)$$

$$\frac{dv_C}{dt}=-\frac{1}{C}i_L-\frac{G}{C}v_C \qquad t\geqslant 0 \qquad (۳-۲)$$

دلیل اینکه معادلات‌را بصورت فوق مینویسیم (دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول همزمان) بعداً روشن خواهد شد. متغیرهای v_C و i_L دارای اهمیت فیزیکی زیادی هستند چونکه آنها با انرژی ذخیره شده در مدار ارتباط نزدیکی دارند. معادلات (۳-۱) و (۳-۲) معادلات دیفرانسیل همزمان مرتبه‌اول هستند و «معادلات حالت» مدار خوانده میشوند. جفت عددهای $(i_L(t)\ ,\ v_C(t))$ را «حالت مدار در زمان t» مینامند. طبیعتاً جفت $(i_L(o)\ ,\ v_C(o))$ را «حالت اولیه» میگویند، این جفت با شرایط اولیه زیر داده میشود:

$$i_L(o)=I_0 \qquad (۳-۳)$$

$$v_C(0)=V_0$$

از تئوری معادلات‌دیفرانسیل میدانیم که حالت اولیه داده شده (۳-۳) و معادلات (۳-۱) و (۳-۲) برای همه‌مقادیر $t\geqslant o$، مقدار $(i_L(t)\ ,\ v_C(t))$ را بطور یکتا معین میکنند. بنابراین چنانکه $(i_L(t)\ ,\ v_C(t))$ را بعنوان مختصات نقطه‌یی در صفحه i_L-v_C

درنظر بگیریم، دراینصورت هنگامیکه t از صفر تابینهایت زیاد میشود نقطه($(i_L(t), v_C(t))$ یک منحنی راکه از (I_0 , V_0) شروع میشود ، طی میکند. این منحنی «مسیر فضای حالت» خوانده میشود و صفحه (i_L , v_C) نیز «فضای حالت» مدارگفته میشود. جفت عددهای $(i_L(t) , v_C(t))$ را میتوان بعنوان مؤلفه‌های یک بردار $\mathbf{x}(t)$ که مبدأش مبدأ محورهای مختصات باشد درنظرگرفت بنابراین میتوان نوشت :

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

بردار $\mathbf{x}(t)$ را «بردار حالت» یا باختصار «حالت» نامند. بنابراین $\mathbf{x}(t)$ برداری است در فضای حالت که برای همه مقادیر $t \geqslant 0$ تعریف میشود. مؤلفه‌های این بردار، یعنی جریان i_L داخل سلف و ولتاژ v_C دو سر خازن را «متغیرهای حالت» گویند. با معلوم بودن حالت در زمان t ، یعنی با دانستن جفت عددهای $(i_L(t) , v_C(t))$ میتوان سرعت[۱] مسیر $\left(\frac{di_L}{dt}(t) , \frac{dv_C}{dt}(t)\right)$ را از معادلات حالت(۱-۳) و (۲-۳) بدست آورد.

مثال ۱- درمدار RLC موازی ، حالتهای میرای شدید ، میرای ضعیف و بی اتلاف را درنظر بگیرید و فرض کنید حالت اولیه $I_0=۱$ آمپر و $V_0=۱$ ولت باشد.

الف ـ میرای شدید. $R=۳$ اهم ، $L=۴$ هانری ، $C=\frac{۱}{۱۲}$ فاراد $(\alpha=۲ , \omega_0=\sqrt{۳})$. بنابراین فرکانس‌های طبیعی $s_1=-۱$ و $s_2=-۳$ هستند. از معادلات (۲۲-۱) و (۲۳-۱) بدست میاوریم :

$$i_L(t)=\frac{۱}{۸}(e^{-t}-e^{-۳t})+\frac{۱}{۲}(-e^{-۳t}+۳e^{-t})=\frac{۱۳}{۸}e^{-t}-\frac{۵}{۸}e^{-۳t}$$

و :

$$v_C(t)=\frac{۱}{۲}(-e^{-t}+۳e^{-۳t})+۶(e^{-۳t}-e^{-t})=-\frac{۱۳}{۲}e^{-t}+\frac{۱۵}{۲}e^{-۳t}$$

این شکل موجها در شکل (۱-۳ الف) رسم شده‌اند. اکنون t را بعنوان پارامتر بکار

۱- Velocity

برده و برای هرمقدار t ،حالت $(i_L(t)\ ,\ v_C(t))$ را در فضای‌حالت،یعنی صفحه‌ای که محور طولهای آن i_L و محور عرضهای آن v_C باشد رسم میکنیم. نتیجه بدست آمده در شکل (۱-۳ ب) نشان داده شده است. توجه کنید که مسیر از نقطه (۱ , ۱) برای $t=0$ شروع میشود و به مبدأ مختصات برای $t=\infty$ ختم میگردد.

ب - میرای ضعیف. $R=1$ اهم، $L=1$ هانری و $C=1$ فاراد $\left(\omega_d=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \omega_0=1\ ,\ \alpha=\frac{1}{2}\right)$. از معادلات (۱-۲٤) و (۱-۲۵) داریم:

$$i_L(t)=e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)=2e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-60^\circ\right)$$

و:

$$v_C(t)=e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)=2e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+60^\circ\right)$$

شکل موجها درشکل (۲-۳ الف) و مسیر در شکل (۲-۳ ب) رسم شده‌اند. توجه کنید که مسیر بشکل حلزونی[1] است که از نقطه (۱ , ۱) شروع شده و به‌مبدأ مختصات ختم میگردد.

پ - بی اتلاف. $L=\frac{1}{4}$ هانری و $C=1$ فاراد $(\omega_0=2\ ,\ \alpha=0)$.

ازمعادلات (۱-۲٦) و (۱-۲۷) داریم:

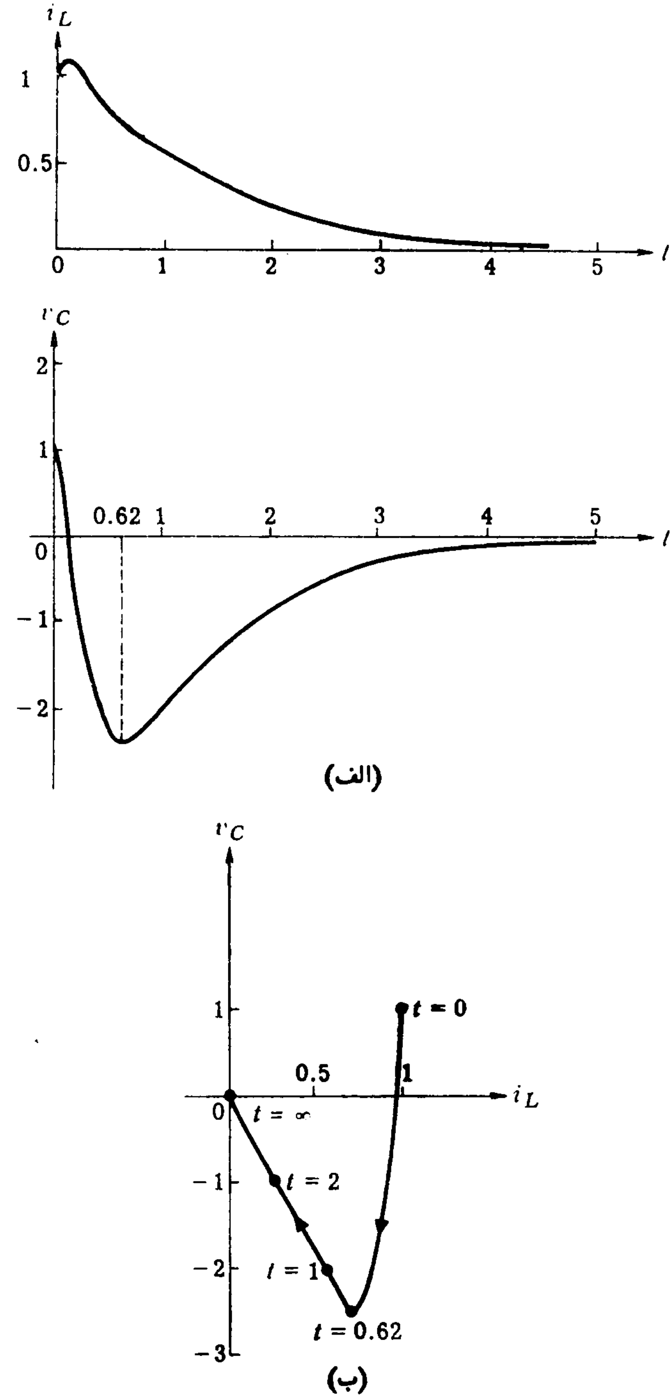
$$i_L(t)=\cos 2t+\frac{1}{8}\sin 2t=1{,}01\cos(2t-7^\circ)$$

و:

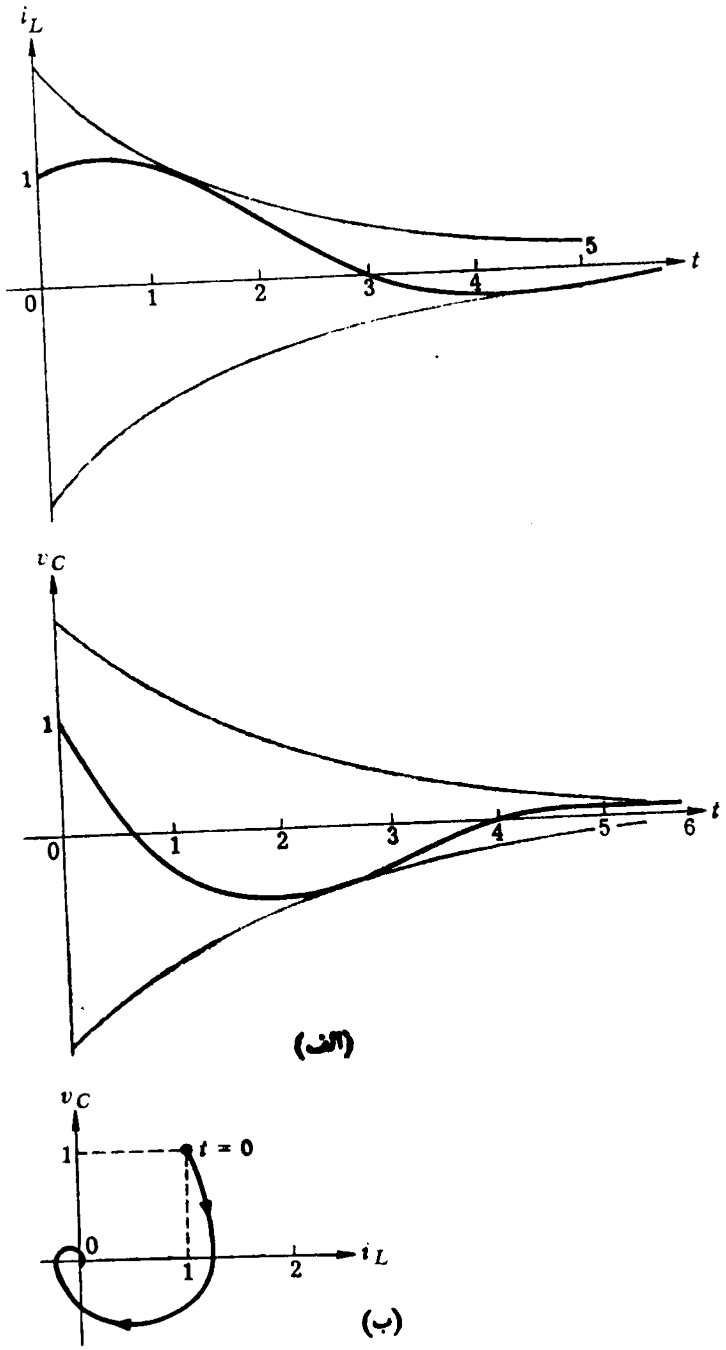
$$v_C(t)=\cos 2t-8\sin 2t=8{,}06\cos(2t+83^\circ)$$

شکل موجها و مسیر درشکل‌های (۳-۳ الف و ب) رسم شده‌اند. توجه کنید که دراین مورد، مسیر یک بیضی است که مرکزش در مبدأ مختصات قرار دارد و این نشان دهنده آنست که پاسخ ورودی صفر نوسانی است.

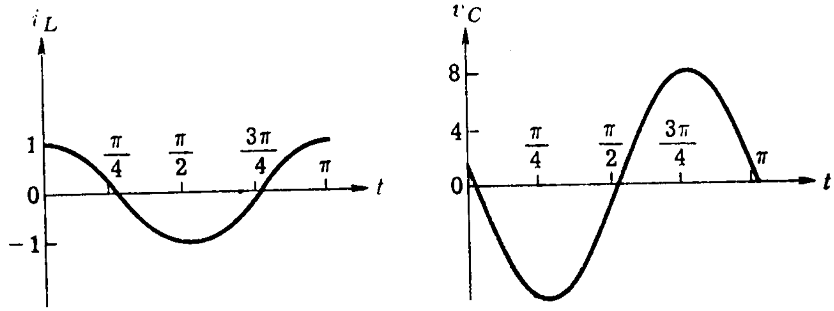
۱- Spiral



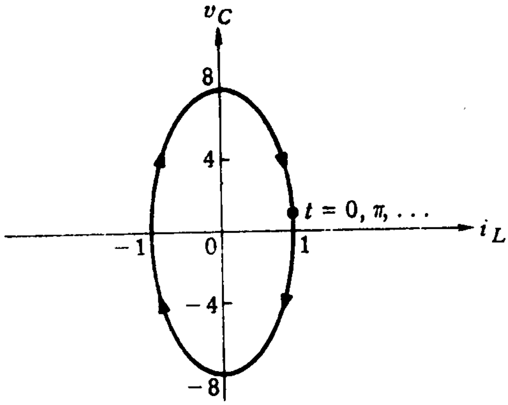
شکل ۱-۳- مدار RLC موازی میرای شدید . (الف) شکل موجهای i_L و v_C. (ب) مسیرحالت



شکل ۲-۳- مدار RLC موازی میرای‌ضعیف. (الف)شکل موجهای i_L و v_C . (ب)مسیر حالت



(الف)



(ب)

شکل ۳-۲- مدار LC موازی بی اتلاف .

(الف) شکل موجهای i_L و v_C .   (ب) مسیر حالت

۲-۳- نمایش ماتریسی

معادلات (۳-۱) و (۳-۲) را میتوان برحسب متغیرهای حالت بشکل ماتریسی بصورت زیر نوشت :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \qquad t \geqslant 0 \tag{۲ - ٤}$$

و :

$$\mathbf{x}(o) = \mathbf{x}_0 \tag{۲ - ٥}$$

که در آنجا :

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \qquad (۳-۶)$$

و :

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \qquad (۳-۷)$$

معادلات ماتریسی (۳-۴) و (۳-۵) ، بسیار شبیه معادله اسکالر زیر هستند :

$$\frac{dx}{dt} = ax \qquad x(o) = x_0 \qquad (۳-۸)$$

این معادله اسکالر دارای جواب شناخته شده $x(t) = e^{at}x_0$ میباشد . بطریق مشابه ، معادله ماتریسی دارای جواب زیر است :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \qquad t \geqslant 0 \qquad (۳-۹)$$

که درآن $e^{\mathbf{A}t}$ «ماتریسی» است که به $\mathbf{A}$ و t بستگی دارد. بعبارت هندسی ، این رابطه بردار حالت اولیه $\mathbf{x}_0$ را به بردار حالت $\mathbf{x}(t)$ درزمان t می‌نگارد[۱] . درواقع همانطورکه عبارت نمایی e^{at} بصورت سری توانی[۲] بسط داده میشود (که برای همه مقادیر t معتبر است) :

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \cdots$$

ماتریس $e^{\mathbf{A}t}$ نیز بصورت سری توانی بسط داده میشود (که برای همه مقادیر t معتبر است) :

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3\frac{t^3}{3!} + \cdots$$

که درآنجا $\mathbf{I}$ ماتریس واحد[۳] است. درسری اخیر هرجمله یک «ماتریس» میباشد و

۱- Map ۲- Power series ۳- Unit Matrix

بنابراین $e^{\mathbf{A}t}$ نیز یک ماتریس است. هرعنصر ماتریس $e^{\mathbf{A}t}$ تابعی از t است. تذکر این نکته حایز اهمیت است که معادله (۳-۹) یک «تابع خطی» را نمایش میدهد که بردار $\mathbf{x}_0$ (بردار حالت اولیه) را به بردار $\mathbf{x}(t)$ (بردار حالت در زمان t) می‌نگارد. گرچه بیشتر از این درباره نمایش و محاسبه $e^{\mathbf{A}t}$ صحبت نخواهیم کرد، معهذا این مطلب که معادله برداری (۳-۹) تمام مسیر فضای حالت را بوجود میاورد حایز کمال اهمیت است.

۳-۳- روش تقریبی برای محاسبه مسیر حالت

با توجه به معادلات (۳-٤) و (۳-۵) میتوان برای هر t ،معادله (۳-٤) را بعنوان تعریف کننده سرعت $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$ درطول مسیر درنقطه $\mathbf{x}(t)$ ازفضای حالت درنظر گرفت. بویژه با معلوم بودن حالت اولیه $\mathbf{x}(o)$ ، معادله (۳-٤) سرعت اولیه بردار حالت $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(o)$ را بما میدهد. میتوان برای محاسبه مسیر تقریبی از یک روش ساده مرحله بمرحله استفاده نمود. روش فوق متکی براین فرض است که اگر یک فاصله زمانی خیلی کوچک Δt درنظر گرفته شود، درطول این فاصله سرعت $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ تقریباً ثابت میماند، بعبارت دیگر، مسیر تقریباً یک پاره خط مستقیم است. بنابراین اگر در زمان o با حالت اولیه $\mathbf{x}_0$ شروع کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{d\mathbf{x}(o)}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \qquad (۳-۱۰)$$

و چون فرض میشود که درطول فاصله کوچک $(o\ ,\ \Delta t)$ سرعت ثابت میماند داریم:

$$\mathbf{x}(\Delta t)\approx \mathbf{x}_0+\frac{d\mathbf{x}}{dt}(o)\Delta t=\mathbf{x}_0+\mathbf{A}\mathbf{x}_0\,\Delta t \qquad (۳-۱۱)$$

برای فاصله بعدی، $(\Delta t\ ,\ ۲\Delta t)$ ،مجدداً فرض میکنیم که سرعت ثابت باشد و آنرا برمبنای مقدار تقریبی $\mathbf{x}(\Delta t)$ که بوسیله (۳-۱۱) داده میشود محاسبه میکنیم و داریم:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(\Delta t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(\Delta t) \qquad (۳-۱۲)$$

و بنابراین:

$$\mathbf{x}(۲\Delta t)\approx \mathbf{x}(\Delta t)+\mathbf{A}\mathbf{x}(\Delta t)\Delta t \qquad (۳-۱۳)$$

بهمین ترتیب برای محاسبه مقادیر تقریبی متوالی حالت ادامه میدهیم :

$$\mathbf{x}[(k+۱)\Delta t] \approx \mathbf{x}(k\Delta t)+\mathbf{A}\mathbf{x}(k\Delta t)\Delta t \qquad (۳-۱٤)$$
$$=(\mathbf{1}+\Delta t\mathbf{A})\mathbf{x}(k\Delta t)$$
$$k=o\ ,\ ۱\ ,\ ۲\ ,\ \ldots\ ,\ N$$

میتوان این روش را بسهولت برای کامپیوترهای دیجیتال بکار برد . در واقع میتوان نشان داد که چنانچه $\Delta t \to o$ ،مقادیر تقریبی متوالی $\mathbf{x}(\Delta t)$ ، $\mathbf{x}(۲\Delta t)$ ، ... ، $\mathbf{x}(N\Delta t)$ که بدینسان حساب میشوند ، بسمت نقاط واقعی مسیر واقعی میل میکنند. مقدار Δt که درعمل باید انتخاب شود به عاملهای زیر بستگی دارد. (۱) تعداد رقم‌های با معنی[۱] که در محاسبات نگهداری میشود، (۲) دقت مورد نیاز، (۳) ثابت‌های مسأله و (٤) طول فاصله زمانی که‌مسیر فوق‌در آن خواسته میشود. چنانچه مسیر فوق محاسبه شود ، میتوان بسهولت پاسخ مدار را تعیین نمود زیرا این پاسخ یکی‌از مؤلفه‌های حالت و یا ترکیب خطی آنها میباشد.

مثال ۲- گیریم این روش را برای محاسبه مسیر حالت مدار RLC موازی با میرایی ضعیف مثال ۱ بکار بریم. معادله حالت چنین است :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_۱}{dt} \\ \dfrac{dx_۲}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$$

و حالت اولیه عبارتست از :

$$\begin{bmatrix} x_۱(o) \\ x_۲(o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

گیریم $\Delta t=۰/۲$ ثانیه انتخاب شود. میتوان از (۱۱-۳) برای بدست‌آوردن حالت‌در Δt استفاده کرد ، بنابراین :

۱- Significant Figures

$$\begin{bmatrix} x_1(۰ر۲) \\ x_2(۰ر۲) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} + ۰ر۲ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ر۲ \\ ۰ر۶ \end{bmatrix}$$

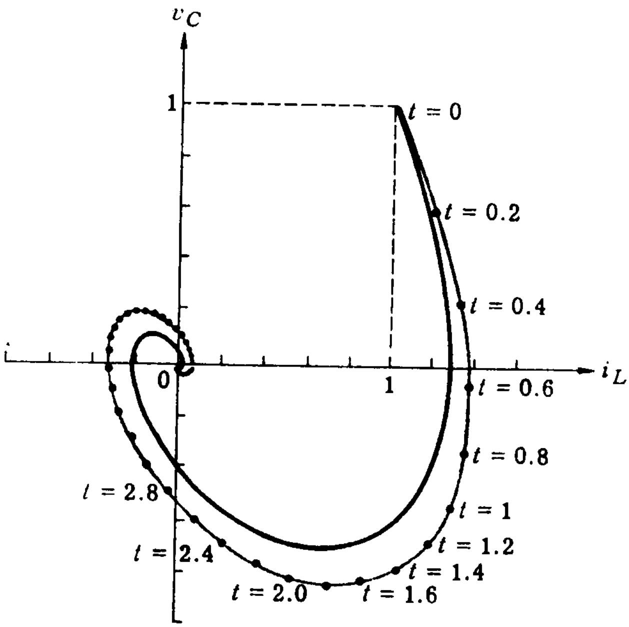
سپس از (۳-۱۳) ، حالت در $۲\Delta t$ بدست میاید و داریم :

$$\begin{bmatrix} x_1(۰ر٤) \\ x_2(۰ر٤) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ر۲ \\ ۰ر۶ \end{bmatrix} + ۰ر۲ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ر۲ \\ ۰ر۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ر۳۲ \\ ۰ر۲٤ \end{bmatrix}$$

در واقع میتوان از روی (۳-۱٤) ، حالت در $(k+۱)\Delta t$ را برحسب حالت در $k\Delta t$ بصورت زیر نوشت :

$$\mathbf{x}[(k+۱)\Delta t] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ر۲ \\ -۰ر۲ & ۰ر۸ \end{bmatrix} \mathbf{x}(k\Delta t)$$

شکل (۳-٤) مسیر را بصورت یک منحنی‌پیوسته و نقاطی که با $\Delta t = ۰ر۲$ ثانیه حساب شده‌اند نشان میدهد. چنانچه ، $\Delta t = ۰ر۰۰۲$ ثانیه رابکار می‌بردیم نقاطی که‌ازکاربرد



شکل ٤-۳- محاسبه مسیر حالت بااستفاده از روش مرحله بمرحله برای مثال ۲ با $\Delta t = ۰ر۲$ ثانیه.

مکررمعادله (۳-۱۴) بدست می‌آمدند همگی روی مسیر واقعی قرار میگرفتند.

تمرین - مسیر حالت مثال ۲ را برای موارد زیر محاسبه کنید:

الف - $\Delta t =$ ۰٫۱ ثانیه

ب - $\Delta t =$ ۰٫۵ ثانیه

نتایج حاصل را توضیح دهید.

تبصره - اگر یک مدار RLC موازی که درآن مقاومت، سلف و خازن «غیر خطی» ولی تغییر ناپذیر با زمان باشند را درنظر بگیریم دراینصورت با برقراری فرض‌های نسبتاً کلی در مورد مشخصه‌های آنها، معادلاتی بصورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{di_L}{dt} = f_1(i_L\ ,\ v_C) \quad , \quad \frac{dv_C}{dt} = f_2(i_L\ ,\ v_C) \qquad (۳-۱۵)$$

که درآن توابع f_1 و f_2 برحسب مشخصه‌های شاخه‌ها بدست میآیند.

توجه باین موضوع حایز اهمیت است که روش عمومی بدست آوردن محاسبه تقریبی مسیر دراین مورد نیز برقرار است و معادلات چنین هستند:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \qquad (۳-۱۶)$$

و معادلات متناظر با (۳-۱۱) و (۳-۱۲) اکنون چنین هستند:

$$\mathbf{x}(\Delta t) \approx \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\Delta t \qquad (۳-۱۷)$$

$$\mathbf{x}(2\Delta t) \approx \mathbf{x}(\Delta t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(\Delta t))\Delta t$$

در بخش ۵ مثالهایی دراین مورد داده خواهد شد.

۳-۴- معادلات حالت و پاسخ کامل

اگر مدار RLC موازی مطابق شکل (۲-۱) با یک منبع جریان تحریک شود، بطریق مشابهی میتوان معادلات حالت را نوشت. در مرحله اول، ولتاژ دو سر مدارموازی با حالتیکه هیچ منبعی وجود نداشت یکسان استو مانند معادله (۳-۱) بدست میاوریم که:

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{1}{L}v_C$$

سپس در معادله KCL بایستی اثر منبع جریان را دخالت داد. بنابراین در مقایسه با معادله (۲-۳) یک جمله اضافی لازم است و داریم:

$$\frac{dv_C}{dt}=-\frac{1}{C}i_L-\frac{G}{C}v_C+\frac{i_s}{C}$$

حالت اولیه همان است که توسط معادله (۳-۳) داده میشود:

$$i_L(o)=I_0$$

$$v_C(o)=V_0$$

اگر بردار $\mathbf{x}$ برای نشان دادن بردار حالت بکار رود، یعنی، $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$، معادله حالت بصورت ماتریسی چنین خواهد بود:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}w \qquad (۳-۱۸)$$

و حالت اولیه عبارتست از:

$$\mathbf{x}(o)=\begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \qquad (۳-۱۹)$$

در معادله (۳-۱۸):

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} o & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \qquad (۳-۲۰)$$

و:

$$\mathbf{b}w=\begin{bmatrix} o \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} i_s \qquad (۳-۲۱)$$

ماتریس های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{b}$ به اجزاء مدار بستگی دارند و ورودی با w نشان داده شده است.

معادله(۳-۱۸) یک معادله دیفرانسیل ماتریسی‌ناهمگن مرتبه اول است که مشابه معادله دیفرانسیل اسکالر خطی ناهمگن مرتبه اول زیر میباشد :

$$\frac{dx}{dt}=ax+bw \qquad (۳-۲۲)$$

جواب این معادله‌اسکالر که درشرط اولیه داده شده $x(o)=x_0$ صدق میکند چنین است :

$$x=e^{at}x_0+\int_{0}^{t} e^{a(t-t')}bw(t')dt' \qquad (۳-۲۳)$$

توجه کنید که پاسخ کامل بصورت مجموع دو جمله نوشته شده است. جمله اول، یعنی $e^{at}x_0$ پاسخ ورودی‌صفر است‌وجمله دوم، که بصورت انتگرال نمایش داده شده است‌پاسخ حالت صفر میباشد. بطریق مشابه، معادله ماتریسی (۳-۱۸) دارای جواب زیر است :

$$\mathbf{x}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0+\int_{0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-t')}\mathbf{b}w(t')dt' \qquad (۳-۲٤)$$

جمله‌اول ، یعنی $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$ پاسخ ورودی صفر است وجمله دوم، که بصورت‌انتگرال‌نمایش داده شده است‌پاسخ‌حالت صفر میباشد. اگر چه اثبات رابطه (۳-۲٤) دراینجا داده نخواهد شد معهذا صورت معادله (۳-۲٤) قابل توجه است . چنانکه دیده میشود مجدداً این عبارت به محاسبه $e^{\mathbf{A}t}$ بستگی دارد. روش تقریبی محاسبه $\mathbf{x}$ که در بخش (۳-۳) داده شد دراینجا نیز میتواند مورد استفاده قرار گیرد.

٤- نوسان ، مقاومت منفی و پایداری

ما دربخش‌های پیش مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان را به‌تفصیل بررسی کردیم و جواب‌های حالت میرای ضعیف را صریحاً بدست آوردیم . حالت خاص مورد توجه این بخش حالت بی اتلاف است که دارای پاسخ ورودی صفر نوسانی است. ما خواص‌چنین مداری‌را مطالعه خواهیم کرد و بعلاوه برخی توجهات فیزیکی خاص مربوط به‌آن رانیز بیان خواهیم نمود.

مدار LC موازی بی‌اتلاف را میتوان بعنوان حالت خاص یک مدار میرای ضعیف با $R=\infty$ (یا $G=o$, $\alpha=o$, $Q=\infty$) درنظر گرفت. در تشکیل دادن معادلات دیفرانسیل برحسب ولتاژ خازن یا جریان سلف و بدست آوردن معادلات حالت ، هیچ تفاوتی نسبت به مدار میرای ضعیف وجود ندارد. بعلاوه میتوان پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر را مستقیماً با قرار دادن $\alpha=o$ و $\omega_d=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ ، ازروی پاسخ حالت میرای ضعیف بدست‌آورد. اکنون پاره‌ای از این نتایج را مرور میکنیم. فرکانس های طبیعی مدار بی اتلاف $s=\pm j\omega_0$ ، $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ میباشد. پاسخ ورودی صفر یک سینوسی با همان فرکانس زاویه‌ای ω_0 است که این حقیقت در مثال ۱ بخش ۳ تشریح شد. مسیر حالت مطابق شکل (۳-۳ ب) یک‌بیضی است که ملزم میدارد پاسخ ورودی صفر یک مدار بی اتلاف ، یک نوسان مداوم باشد. انرژی ذخیره شده اولیه در خازن و / یا درسلف بطور بی‌پایان بیکدیگر منتقل میشوند.

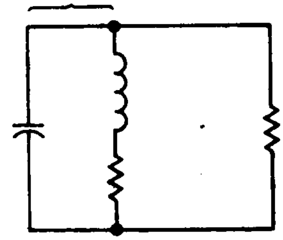
اکنون پاسخ حالت صفر را درنظر میگیریم. با مراجعه به بخش ۲ بخاطر میاوریم که پاسخ ضربه یک مدار LC بی اتلاف ، یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω_0 میباشد. پاسخ پله نیز شامل یک قسمت سینوسی با همان فرکانس است . در واقع اگردر زمان صفر مدار در حالت صفر بوده و در فاصله $[o\ ,\ T]$ (که در آن T هرزمان بزرگتر ازصفر میباشد) یک ورودی دلخواه بآن اعمال شود و پس‌از زمان T این ورودی مساوی صفر قرار داده شود ، دراینصورت برای زمانهای بعداز T پاسخ بصورت $K\sin(\omega_0 t+\theta)$ خواهد بود که در آن دامنه K و فاز θ به ورودی بستگی دارند.

مدار LC بی اتلاف ، یک مدار تشدید یا یک مدار تطبیق شده(۱) نامیده میشود. واژه «تطبیق شده» ملزم میدارد که فرکانس نوسان باتنظیم مقدار خازن یاسلف، با یک عدد داده شده $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}$ تطبیق داده شود. اگر مدار فیزیکی چنان میبود که سلف وخازن فیزیکی‌آن همانند مدل های سلف و خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان ما بودند ، یک نوسان ساز خطی(۲) بدست میآمد که بافرکانس زاویه‌ای ω_0 نوسان میکرد.

۱- Tuned Circuit ۲- Linear Oscillator

واضح است که عناصر فیزیکی همانند مدل‌های مداری ما نیستند و چنانکه در فصل دوم گفته شد یک سلف «فیزیکی» همیشه دارای مقدار معینی اتلاف است و مدل آن باید بصورت اتصال سری یک سلف و یک مقاومت درنظر گرفته شود. بنابراین در عمل یک مدار تطبیق شده فیزیکی (بتنهایی) یک نوسان ساز نیست و بشرطیکه اتلاف آن بقدر کافی کوچک باشد بصورت یک مدار با میرایی ضعیف رفتار میکند. در عمل، برای مدارهای تطبیق شده میتوان Q را تا حدود چندین صد بدست آورد. از نظر اصولی، بااستفاده از فوق رساناها(۱) میتوان مدارهایی با Q بینهایت نیز بدست آورد.

برای بدست آوردن یک نوسان ساز لازم است اتلاف موجود درهرمدار تطبیق شده فیزیکی را جبران نمود. واضح ترین وسیله برای اینکار وارد کردن عنصری بامقاومت‌منفی بمدار است بقسمی که نتیجه حاصل یک مدار بی اتلاف باشد. غالباً میتوان یک نوسان‌ساز نوعی‌را متشکل‌ازیک مدارتطبیق شده فیزیکی که بیک مقاومت با مقاومت‌منفی متصل‌است تصور نمود. این مطلب درشکل (۱-۴) تشریح شده است. درفصل دوم درباره خاصیت مقاومت منفی سیگنال کوچک یک دیود تونلی بحث شده است. بعداً خواهیم دید که بااستفاده از پس خورد(۲) در یک مدار ترانزیستوری نیز میتوان مقاومت منفی بدست آورد. همه این مقاومتهای منفی تقریبی هستند یعنی فقط درفاصله معینی از ولتاژها



شکل ۱-۴- یک نوسان ساز خطی ساده که دارای یک مدار تطبیق شده فیزیکی و یک مقاومت منفی است

۱- Superconductors ۲- Feedback

و جریانها و شاید فقط در باند معینی از فرکانس ، این گونه وسایل مانند مقاومتهای خطی تغییر ناپذیر با زمان با مقاومتهای منفی رفتار مینمایند. باوجود این، مدل یک مقاومت اکتیو خطی تغییر ناپذیر با زمان مفید بوده و ما آنرا برای تجزیه و تحلیل رفتار بعضی مدارهای ساده مرتبه دوم بکار خواهیم بود. درک کامل این مدارها در مطالعه مدارهای غیر خطی سودمند خواهد بود.

اکنون مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان مطابق شکل (۲-٤) را درنظر بگیرید که در آن مقاومت دارای یک مقاومت «منفی» ($R<o$ و $G<o$) میباشد. چند جمله‌ای مشخصه برای این مدار، $s^2+2\alpha s+\omega_0^2$ است که در آن $\alpha=\frac{G}{2C}$ منفی میباشد و ω_0 مانند حالت قبل مساوی $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ است. ریشه های معادله مشخصه فرکانس‌های طبیعی مدار هستند و چون $\alpha<o$ است میتوان آنها را بصورت‌زیر نوشت:

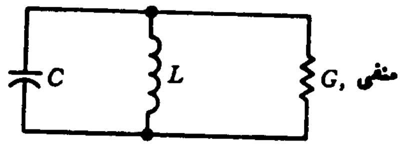
$$\left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = |\alpha| \pm \sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

$\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$ انگاری خالص و یا حقیقی است که در حالت اخیر از $|\alpha|$ کوچکتر میباشد. بنابراین فرکانس‌های طبیعی در نیمه راست صفحه فرکانس مختلط قرار دارند. ما پاسخ ورودی صفر را بررسی کرده و طبقه بندی زیر را انجام میدهیم :

۱- $|\alpha|<\omega_0$: دوفرکانس طبیعی مزدوج مختلط هستند ($s_1=|\alpha|+j\omega_d$ و $s_2=|\alpha|-j\omega_d$ که‌درآن $\omega_d^2=\omega_0^2-\alpha^2$). بنابراین پاسخ‌چنین است :

$$ke^{|\alpha|t}\cos(\omega_d t+\theta)$$

که در آن k و θ ثابت‌هایی هستند که بشرایط اولیه بستگی دارند.



شکل ۲-٤- مدار RLC موازی

۲- $|\alpha| > \omega_0$: دو فرکانس طبیعی s_1 و s_2 حقیقی و مثبت هستند و پاسخ مجموع دو نمایی «افزایشی» میباشد :

$$k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

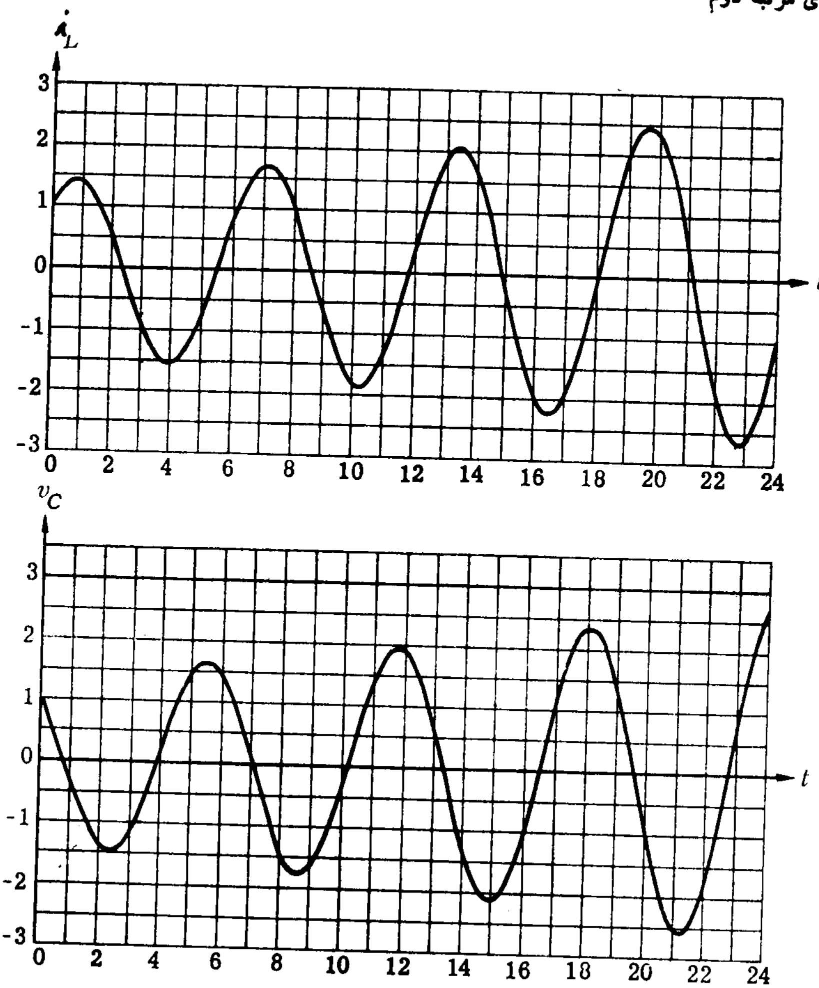
که درآن k_1 و k_2 بشرایط اولیه بستگی دارند.

پاسخ ها درهردو حالت شامل عوامل نمایی افزایشی میباشند و بنابراین با مرور زمان پاسخ ها بطور دلخواهی بزرگ میشوند. روش تعیین شکل موجهای i_L و v_C درست مانند موردی است که در آن مقاومت مثبت میباشد. منحنی‌های v_C و i_L برحسب t در شکل (۳-٤) و مسیرحالت برای یک مورد ($|\alpha| < \omega_0$) و حالت اولیه $v_C(0) = 1$ و $i_L(0) = 1$ در شکل (٤-٤) داده شده‌اند.

درک این پاسخ ها حائزکمال اهمیت است. مقاومت خطی دارای مقاومت «سنفی»، جزء «اکتیوی» است که بجای اینکه مانند مقاومت پسیو انرژی تلف نماید به سلف و خازن انرژی تحویل میدهد. بنابراین بدون هیچ ورودی، پاسخ ها پس‌از اینکه در اثر انرژی اولیه در سلف و / یا خازن شروع شدند میتوانند افزایش یابند. چنانکه قبلاً اشاره شده است، مقاومت خطی اکتیو تنها مدلی است که رفتار برخی از وسایل را در فاصله مشخص شده‌ای از ولتاژ و جریان بطور تقریبی نشان میدهد. اگر ولتاژها و جریانها خارج از این مقادیر مشخص شده افزایش یابند، محاسبات، دیگر رفتار فیزیکی واقعی مدار را نمایش نمیدهند. در اکثر موارد بایستی توصیف غیرخطی دستگاه را درنظر گرفت ونتایج ریاضی حاصل از فرض تقریب خطی را اصلاح نمود. چنانکه در بخش بعد نشان داده خواهد شد، ممکن است رفتار فیزیکی واقعی به نوسان غیر خطی منتهی شود و یا در موارد دیگر پاره‌ای از عناصر مدار نتوانند جریان زیاد را تحمل نموده و بالاخره بسوزند.

اکنون به‌تجزیه و تحلیل خطی خود برمیگردیم ودو مورد مقاومت‌های خطی اکتیو و پسیو را باهم درنظر میگریم . پاسخ های ورودی صفر مدارهای RLC موازی را میتوان بسه دسته تقسیم نمود.

«حالت اول» فرکانس‌های طبیعی در« نیمه چپ صفحه » قرار دارند، یعنی هردو فرکانس طبیعی s_1 و s_2 «جزءهای حقیقی منفی» دارند واین امرحالتهای میرای شدید، میرای بحرانی و میرای ضعیف بخش ۱ را شامل میشود. بعلت وجود عامل نمایی میرا



شکل ۳-۴- منحنی‌های i_L و v_C برای مدار RLC موازی شکل(۲-۴). به مقاومت اکتیو توجه کنید . فرض میشود که $|\alpha| < \omega_0$ است

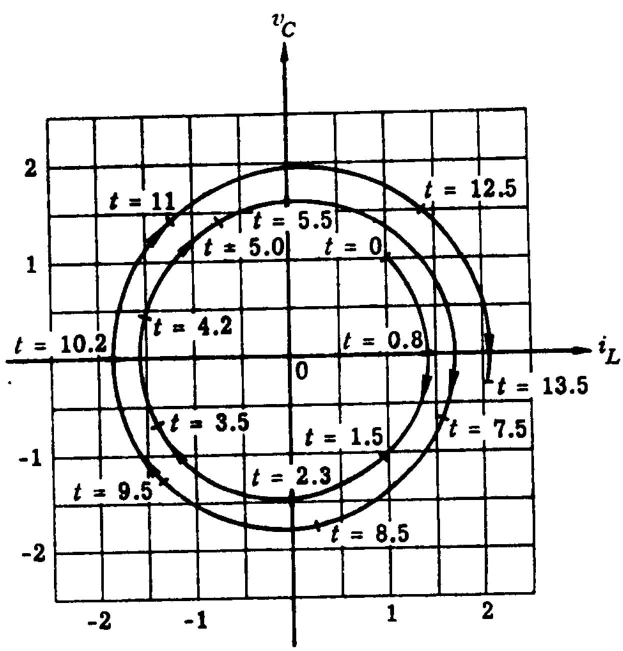
وقتیکه $t \to \infty$ ، پاسخ ورودی صفر بسمت صفر میل میکند. در فضای حالت وقتیکه $t \to \infty$ ،برای هرحالت‌اولیه مسیر حالت‌بسمت مبدأ میل میکند. چنین مداری را «پایدار مجانبی[1]» نامند. مسیرهای حالت شکل‌های (۱-۳ ب) و (۲-۳ ب) مثالهای نوعی هستند. چون مفهوم پایداری مجانبی بی‌اندازه حایز اهمیت است یکبار دیگر آنرا تکرار

۱- Asymptotically stable

میکنیم. مداری را **پایدار مجانبی** گویند که مسیر فضای حالت آن برای هرحالت اولیه وبرای ورودی‌صفر، کراندار[1] بماند و وقتیکه $t \to \infty$ ،مسیر بسمت مبدأ میل کند. شرط کراندار بودن تنها برای پایداری مدارهای غیر خطی خاص حایز اهمیت است.

«حالت دوم» فرکانس‌های‌طبیعی روی «محور انگاری» قرار دارند، یعنی s_1 و s_2 دارای جزء‌های حقیقی صفر میباشند. $s_1 = j2\pi f_0$ و $s_2 = -j2\pi f_0$. این حالت بی اتلاف است. پاسخ ورودی صفر یک سینوسی با فرکانس f_0 میباشد. در فضای حالت مسیر یک بیضی است که مرکز آن در مبدأ واقع است و مدار را «نوسانی» گویند.

«حالت سوم» فرکانس‌های طبیعی در «نیمه راست صفحه» قراردارند، یعنی s_1 و s_2 دارای جزء‌های حقیقی مثبت میباشند. این وضع متناظر باحالت مقاومت منفی است و وقتیکه $t \to \infty$ ، پاسخ‌ورودی صفر بیکران[2] میگردد. درفضای‌حالت‌وقتیکه $t \to \infty$ ، مسیربسمت‌بینهایت میل میکند و مدار را«ناپایدار» گویند. یک مثال‌نمونه‌ای مسیرشکل (۴-۴) میباشد. شکل موجهای متناظر i_L و v_C درشکل (۳-۴) نشان داده شده‌اند.



شکل ۴-۴- مسیر حالت مدار RLC شکل (۲-۴)

۱- Bounded ۲- Unbounded

۵- مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان

هنگامیکه در فصل چهارم مدارهای مرتبه اول غیر خطی و تغییر پذیر با زمان را بررسی میکردیم متوجه شدیم که گاهی میتوان این مسائل را بطور تحلیلی نیز حل نمود. علاوه برنشان دادن راه‌حل های ساده تحلیلی در فصل چهارم تأکید اصلی ،انشان دادن این واقعیت بود که در مدارهای غیرخطی خاصیت خطی‌بودن برقرار نبوده ودر مدارهای تغییرپذیر با زمان نیز خاصیت تغییر ناپذیری با زمان برقرار نمیباشد. در مدارهای غیر خطی وتغییر پذیر با زمان مرتبه دوم نیز برای پاره‌ای از مدارهای بسیار خاص ، روشهای تحلیلی وجود دارد. همچنین روش های ترسیمی گوناگونی موجود است که برای انواع زیادی ازشبکه ها میتوان آنها را با مزایای بیشتری بکار برد. درکتاب ها،معادلات و روشهای خاص زیادی مانند معادله ون‌درپل(۱) ، معادله‌ماتیو(۲) ، معادله‌دافین(۳) ، روش خطوط هم‌شیب(۴) و روش‌لینارد(۵) وجود دارند،ولی ما این روش های مرسوم را ارائه نخواهیم کرد ، زیرا اولاً،آنها موضوع هـای تخصصی ویژه‌ای بوده و بروشنی از حدود مطالب این کتاب خارج هستند ، ثانیاً،در عصر کامپیوترهای دیجیتال ، اینگونه معادلات وروش های خاص اهمیت خود را ازدست داده‌اند ، زیرا بجای درنظر گرفتن یک تقریب ناقص که بکمک آن مسأله را درقالب مسأله‌دیگری که حل‌آن معلوم است درآوریم ، حل‌بهترین مدل معلوم هم‌ارزانتر بوده و هم مفهوم مهندسی بیشتری دارد.

دراین بخش منظور ما ابتدا بیان رفتار فیزیکی پاره‌ای از مدارهای غیر خطی و سپس تشریح دقیق نوشتن معادلات‌دیفرانسیل اینگونه مدارهای غیر خطی میباشد. معادلاتی که از لحاظ محاسبات عددی راحت‌ترین شکل را دارند دستگاههای دومعادله دیفرانسیل‌خطی مرتبه اول می‌باشند(بجای‌یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم معمولی). در مورد مدارهای خطی ، این معادلات‌را معادلات حالت گویند ، درحالیکه درمورد مدارهای غیر خطی‌آنها‌را

۱- van der Pol

۲- Mathieu

۳- Duffin

۴- Isocline

۵- Liénard

«معادلات بصورت نرمال(۱)» می‌نامند.   یعنی :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{x}\ ,\ t\ ,\ w) \qquad (\text{۵}-\text{۱})$$

که در آن $\mathbf{x}$ نمایشگر برداری است که مولفه‌های آن متغیرهای انتخاب شده شبکه باشند (ولتاژها،جریان‌ها ، بارها‌وشارها) ، w نشان دهنده ورودی و $\mathbf{f}$ تابعی با مقدار برداری(۲) است.   معادله (۱-۵) تعمیم معادله حالت خطی زیر است :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}w \qquad (\text{۵}-\text{۲})$$

که در بخش ۲ درباره‌آن بحث شد. چنانکه قبلاً گفته شد، برای کارهای عددی میتوان روش انتگرال گیری مرحله بمرحله را بکار برد. دو مثال زیر این نکات را روشن میسازند.

مثال ۱- مدار RLC موازی نشان داده شده در شکل (۱-۵) که در آن سلف و خازن ، خطی و تغییر ناپذیر با زمان بوده ولی مقاومت یک عنصر غیر خطی با مشخصه نشان داده شده در شکل میباشد را درنظر بگیرید.   ممکن است در بعضی موارد مشخصه غیر خطی با یک چند جمله‌ای بصورت زیر تقریب گردد :

$$g(v) \approx -\alpha v+\beta v^{\text{۳}} \qquad (\text{۵}-\text{۳})$$

که در آن α و β ثابتهائی هستند که برای برازاندن(۳) منحنی شکل (۱-۵) انتخاب میشوند.   ابتدا میتوان ولتاژ v را به‌جریان سلف بصورت زیر ارتباط داد :

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{v}{L} \qquad i_L(o)=I_0 \qquad (\text{۵}-\text{۴})$$

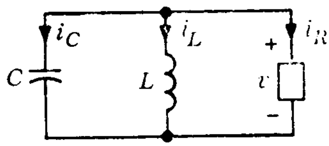
سپس با نوشتن معادله KCL برای مدار داریم :

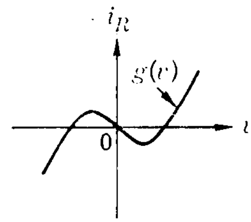
$$i_C=-i_L-i_R$$

و یا :

۱- Equations in the Normal Form

۲- Vector - valued function   ۳- Fit





شکل ۱-۵- نوسان ساز غیر خطی با یک مقاومت غیر خطی که مشخصه‌اش در صفحه vi_R نشان داده شده است

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{i_L}{C} - \frac{g(v)}{C} \qquad v(o) = V_0 \qquad (۵-۵)$$

با ترکیب معادلات (۵-۴) و (۵-۵) معادله‌ای بصورت نرمال خواهیم داشت :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{L} \\ -\frac{i_L}{C} - \frac{g(v)}{C} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad (۵-۶)$$

با حالت اولیه :

$$\mathbf{x}(o) = \begin{bmatrix} i_L(o) \\ v\ (o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_0 \qquad (۵-۷)$$

بامعلوم بودن حالت اولیه $\mathbf{x}_0$ ، اعداد L و C و مشخصه $g(\cdot)$ ، میتوان جواب را بوسیله روش مرحله بمرحله گفته شده در بخش ۳ بدست آورد . دراین روش باحالت اولیه داده شده $\mathbf{x}(o) = \mathbf{x}_0$ در (۵-۷) شروع کرده و حالت $\mathbf{x}(\Delta t)$ در زمان Δt را بوسیله معادله (۳-۱۷) محاسبه میکنیم. بنابراین :

$$\mathbf{x}(\Delta t) \approx \mathbf{x}(o) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\Delta t$$

و سپس چنین ادامه میدهیم :

$$\mathbf{x}(۲\Delta t) \approx \mathbf{x}(\Delta t) + \mathbf{f}[\mathbf{x}(\Delta t)]\Delta t$$

بنابراین میتوان مسیر را در فضای حالت یعنی صفحه $i_L v$ رسم نمود. دو نمونه از این مسیرها در شکل (۲-٥) ارائه شده است. مسیر اول که در شکل (۲-٥ الف) نشان داده شده است حالت اولیه زیر را دارد:

$$\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که باافزایش t مسیر بسمت منحنی‌بسته‌ای که «سیکل حد[1]» خوانده میشود میل میکند و این امر لازم میدارد که پس‌از مدتی، پاسخ ورودی صفر مدار غیرخطی، فوق‌العاده بیک حرکت تناوبی نزدیک شود یعنی بالاخره هردو شکل موج $i_L(٠)$ و $v(٠)$ بصورت توابع تناوبی از زمان درمیآیند. درشکل (۲-٥ ب)، از یک حالت اولیه متفاوت شروع میکنیم:

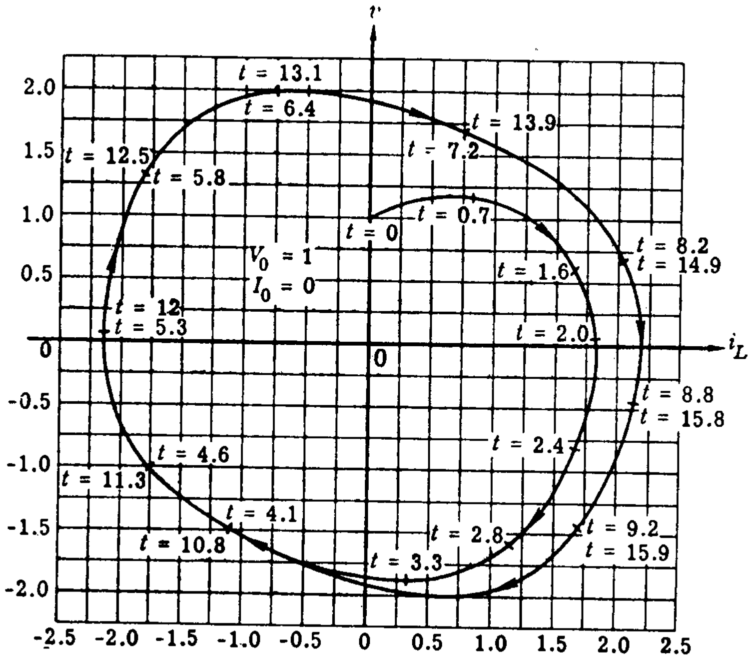
$$\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ١٫١٠ \\ ٢٫٠٧ \end{bmatrix}$$

مشاهده این نکته قابل توجه است که در این حالت باافزایش t مسیر از بیرون بسمت «همان» سیکل حد میل میکند.

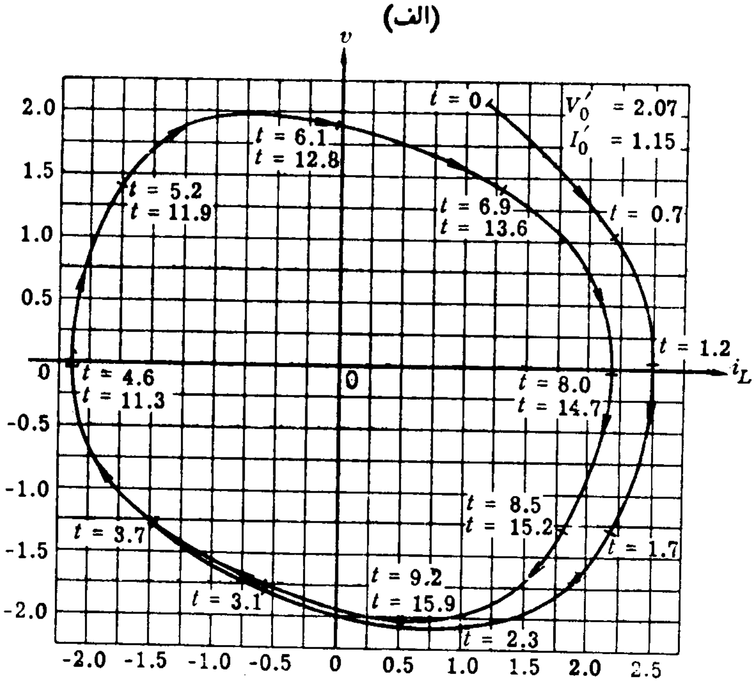
تبصره - باید خاطرنشان ساخت که تفاوت‌های مشخصی بین پاسخ ورودی صفر یک مدارخطی وپاسخ ورودی صفر یک مدار غیرخطی وجود دارد. مدار LC موازی‌خطی (حالت بی‌اتلاف) که با حالت اولیه دلخواهی شروع میشود بلافاصله به نوسان سینوسی میرسد و بعلاوه دامنه‌های نوسان i_L و v به حالت اولیه بستگی دارند. مدار غیر خطی پس‌از یک حالت گذرا به حالت نوسانی میرسد و دراین مثال بنظر نمیاید که دامنه نوسان به حالت اولیه بستگی داشته باشد.

«تقریب خطی تکه‌ای» اکنون رفتار فیزیکی مدار را برمبنای تقریب خطی تکه‌ای مشخصه مقاومت غیر خطی بیان میکنیم. دامنه تغییرات ولتاژ در دو سر مقاومت درشکل (۳-٥ الف) رابه سه ناحیه‌تقسیم میکنیم. درناحیه ۱، یعنی‌آنجائیکه $-\infty < v \leqslant -E_1$ است مشخصه مقاومت‌غیر خطی را باخط مستقیمی با شیب مثبت $\frac{1}{R_1}$ که محور i_R را

۱- Limit cycle



(الف)



(ب)

شکل ۲-۵- مسیرهای نوسان ساز غیر خطی شکل(۱-۵) . برای هردو شرایط اولیه سیکل حد یکسانی بدست میآید

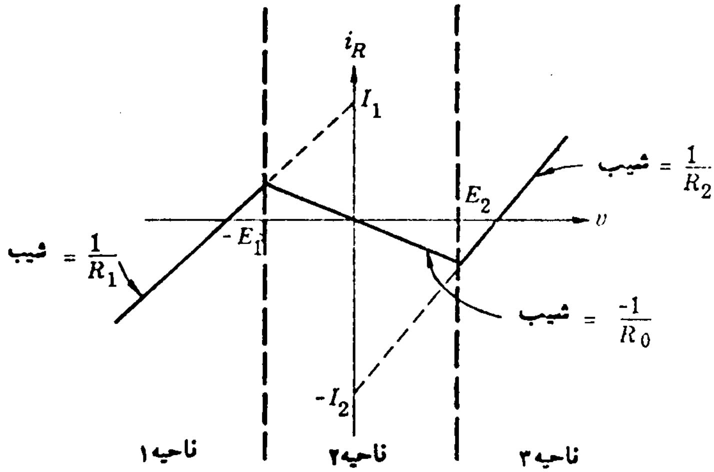
در نقطه‌یی بعرض I_1 قطع میکند تقریب میکنیم. بنابراین مقاومت غیر خطی در ناحیه ۱ را میتوان با اتصال موازی یک مقاومت خطی با مقاومت مثبت R_1 و یک منبع جریان ثابت I_1 جایگزین کرد. این جایگزینی در مدار معادل شکل (۳-۵ ب) نشان داده شده است. در ناحیه ۲، یعنی آنجائیکه $-E_1 < v < E_2$ است مشخصه مقاومت غیر خطی را با خط مستقیمی که از مبدأ گذشته و شیب منفی $-\frac{1}{R_0}$ دارد مطابق شکل (۳-۵ الف) تقریب میکنیم (توجه کنید که $R_0 > 0$). بنابراین مقاومت «اکتیو» غیرخطی در ناحیه ۲ را میتوان با یک مقاومت خطی با مقاومت «منفی» R_0 جایگزین کرد. این جایگزینی در مدار معادل شکل (۳-۵ پ) نشان داده شده است. در ناحیه ۳، یعنی آنجائیکه $E_2 < v < \infty$ است مشخصه مقاومت غیر خطی را با خط مستقیمی با شیب مثبت $\frac{1}{R_2}$ که محور i_R را در نقطه‌ای بعرض $-I_2$ قطع میکند (توجه کنید $I_2 > 0$ است) تقریب میکنیم. بنابراین مقاومت غیر خطی در ناحیه ۳ را میتوان با اتصال موازی یک مقاومت خطی با مقاومت مثبت R_2 و یک منبع جریان ثابت I_2 جایگزین کرد. این جایگزینی در مدار معادل شکل (۳-۵ ت) نشان داده شده است . بسته به ولتاژ دو سر مقاومت غیر خطی ، یکی از سه مدار معادل تقریبی شکل (۳-۵) را بایستی بکار برد.

باآشنایی که به‌تجزیه و تحلیل مدارهای RLC «خطی» موازی مرتبه دوم داریم، میتوان بسهولت مشخصه‌های مدار را در هریک‌از سه ناحیه مقاومت‌غیر خطی تعیین نمود. مسأله بعدی ما تعیین رفتار مدار در مرزهای[1] دو ناحیه خواهد بود. گیریم که حالت اولیه مدار $i_L = 2$ و $v = 0$ باشد که فرض میشود در ناحیه ۲ قرارگیرد. مدار RLC خطی موازی راکه در آن مقاومت خطی و اکتیو است میتوان (مانند بخش قبل) تجزیه و تحلیل نمود. مسیر، برای این مدار خطی از $(2 , 0)$ شروع شده و از مبدأ دور میشود و وقتیکه $t \to \infty$ چون مدار ناپایدار است، مسیر باید به بینهایت برسد . معهذا در لحظه t_1 مسیر به نقطه‌ای میرسد که در آن $v(t_1) = -E_1$ یا E_2 بوده و تقریب مقاومت منفی دیگر معتبر نخواهد بود. پس‌از اینکه مسیر از نقطه $[v(t_1) \;,\; i_L(t_1)]$ میگذرد ، در ناحیه ۱ و یا در ناحیه ۳ خواهیم بود و برای نمایش دستگاه لازم است ترکیب مقاومت پسیو خطی و منبع جریان ثابت بکار برده شود. بنابراین ، بسته

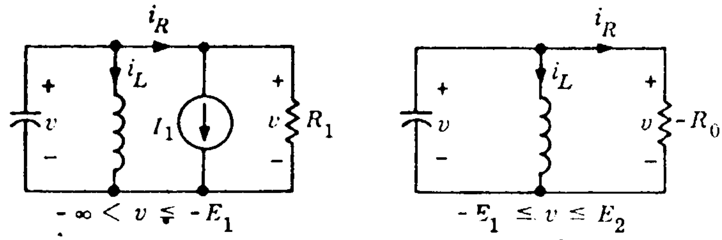
1- Boundary

بااینکه $v(t_1)$ مساوی $-E_1$ یا $+E_2$ باشد، مدار از تقریب خطی تکه‌ای شکل (۳-۵ پ) به شکل (۳-۵ ب) یا شکل (۳-۵ ت) برمیگردد.

فرض کنید شکل موج واقعی ولتاژ مطابق شکل (۵-٤) باشد. در زمان $t=0$ دستگاه در ناحیه ۲ است و در $t=t_1$ ولتاژ بمقدار $-E_1$ میرسد. بنابراین برای $t>t_1$ دستگاه در ناحیه ۱ است و بایستی مدار شکل (۳-۵ ب) را بکار برد و پاسخ کامل را

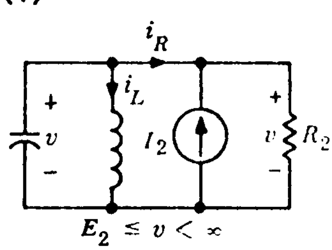


(الف)



(ب) ناحیه۱

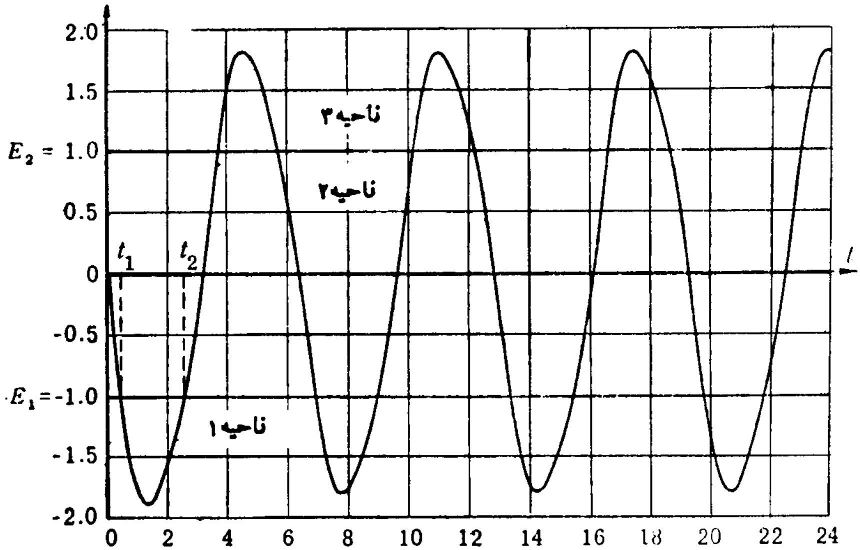
(پ) ناحیه۲

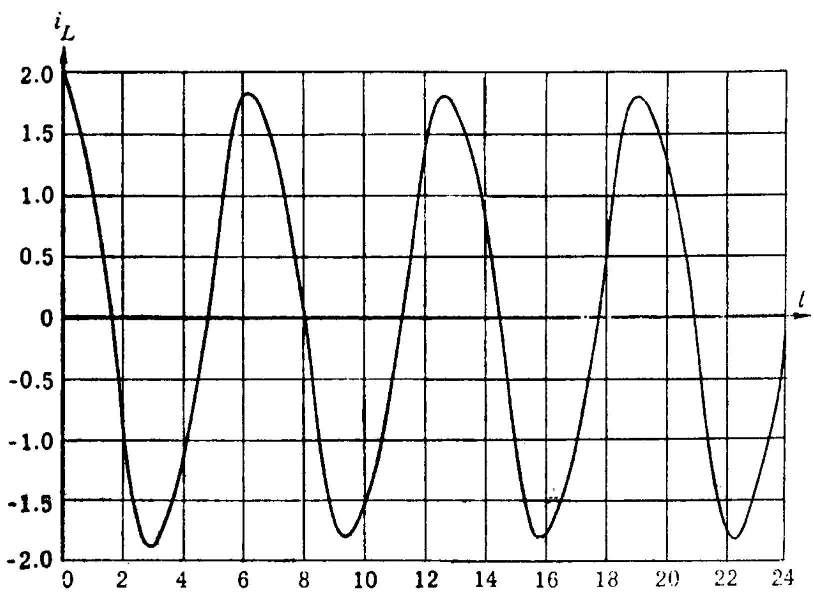


(ت) ناحیه ۳

شکل ۳-۵- تقریب خطی تکه‌ای نوسان ساز غیر خطی

برای حالت اولیه داده شده $(v(t_1), i_L(t_1))$ ، که در آن $v(t_1) = -E_1$ است محاسبه نمود. پاسخ را میتوان بسهولت با مدار معادل خطی شکل (۳-۵ ب) محاسبه





شکل ۴-۵- شکل موجهای v و i_L برای تقریب نشان داده شده در شکل (۳-۵) ، درانیجا $E_1 = E_2 = 1$ ولت است

کرد. این پاسخ درشکل (٤-٥) که در آن v و i_L برحسب زمان رسم شده‌اند نشان داده شده است. در $t=t_۲$ مجدداً ولتاژ $v(t_۲)=-E_۱$ است و برای $t>t_۲$ به عمل در ناحیه ۲ برمیگردد، پس باید مدار معادل شکل (۳-۵ پ) را بکار برد. بنابراین پاسخ مدار اکتیوشکل (۳-۵ پ) باحالات اولیه داده شده ($i_L(t_۲)$, $v(t_۲)$) را که در آن $v(t_۲)=-E_۱$ است محاسبه میکنیم. دستگاه سپس در ناحیه ۳ کارکرده و پس‌ازآن مجدداً به ناحیه ۲ برمیگردد. با ادامه این عمل، شکل موجهای ولتاژ و جریان بالاخره بیک حالت دائمی، یعنی یک رفتار تناوبی‌همچنانکه درشکل نشان داده شده است‌میرسند. درفضای حالت قسمتی از مسیر را که یک منحنی بسته باشد سیکل حد نامند.

مثال ۲- مدار LC موازی خطی شکل (٥-٥) را درنظر بگیرید که درآن خازن تغییر ناپذیر با زمان، ولی سلف‌تغییر پذیر با زمان است معادله KCL چنین است:

$$i_L+i_C=i_s \qquad (٥-٨)$$

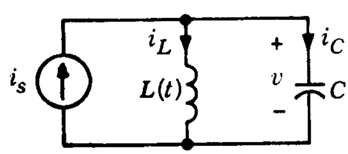
گیریم شار بعنوان متغیر شبکه بکار رود، دراینصورت:

$$i_L(t)=\frac{\Phi(t)}{L(t)} \qquad (٥-٩)$$

$$v=\frac{d\Phi}{dt} \qquad (٥-١٠)$$

برای خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان داریم:

$$i_C=C\,\frac{dv}{dt} \qquad (٥-١١)$$



شکل ٥-٥- مدار خطی تغییر پذیر با زمان، خازن C تغییر ناپذیر با زمان است ولی‌سلف $L(t)$ با زمان تغییر میکند

از ترکیب این چهار معادله ، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم که درآن Φ متغیر وابسته است بدست میآید. بنابراین :

$$C\frac{d^{2}\Phi}{dt^{2}}+\frac{\Phi}{L(t)}=i_{s}(t) \qquad (۵-۱۲)$$

اگر $L(t)$ یک تابع تناوبی بصورت زیر باشد :

$$L(t)=\frac{1}{a+b\cos\omega_{1}t} \qquad (۵-۱۳)$$

که در آن a و b هردو ثابت بوده و $b<a$ است ، معادله (۵-۱۲) بصورت معادله معروف ماتیو درمی‌آید و چنانچه ω_1 بطور مناسبی انتخاب گردد میتوان نشان داد که نوسالی با دامنه‌افزایشی‌نمایی در مدارحاصل میشود. این‌پدیده را «نوسان پارامتری(۱)» گویند. انرژی نوسان افزایشی توسط عاملی که موجب تغییر اندوکتانس میشود فراهم میگردد. در دوره‌های اولیه رادیو برای فراهم کردن اندوکتانس تغییر پذیر نوسان ساز از آلترناتورها(۲) استفاده میشد . بحث درباره جزئیات این مطلب درفصل نوزدهم داده شده است.

اکنون همان مدار را از نقطه نظر فضای حالت درنظر میگیریم و بار q خازن و شار Φ سلف را بعنوان متغیرهای وابسته بکار می‌بریم . از ترکیب معادلات (۵-۸) و (۵-۹) داریم :

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{\Phi}{L(t)}+i_{s}(t) \qquad (۵-۱۴)$$

از ترکیب معادلات (۵-۱۰) و (۵-۱۱) داریم :

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{q}{C} \qquad (۵-۱۵)$$

و بصورت ماتریسی داریم :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{-L(t)} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}i_{s}(t) \qquad (۵-۱۶)$$

۱- Parametric Oscillation ۲- Alternators

با حالت اولیه :

$$\begin{bmatrix} q(o) \\ \Phi(o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \Phi \end{bmatrix} \qquad (۵-۱۷)$$

میتوان مجدداً معادلات را با بکار بردن روش انتگرال گیری مرحله بمرحله بطور عددی حل نمود.

۶- مدارهای دوگان و تشابهی

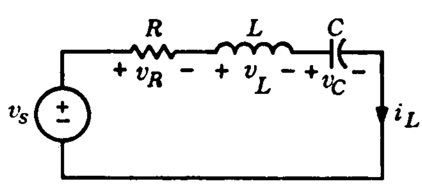
۱-۶- دوگانی

تاکنون مدارهای مرتبه‌دوم خطی، غیرخطی، تغییر ناپذیر وتغییر پذیربا زمان را درنظر گرفتیم‌ولی‌خود رابه مدارهای RLC موازی محدود ساختیم. فرض کنید مثال‌ساده‌دیگری مانند مدار RLC سری را درنظر بگیریم. رفتار این مدار بطور دقیقی با رفتار مدار RLC موازی مربوط میشود.

مدار شکل (۱-۶) راکه درآن اتصال سری یک مقاومت، سلف و خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان توسط یک منبع ولتاژ تحریک میشود درنظر بگیرید. تجزیه و تحلیل این مدار مشابه تجزیه وتحلیل مدار RLC موازی است. میخواهیم پاسخ کامل‌مدار یعنی پاسخی که ناشی از ورودی و حالت اولیه میباشد را تعیین کنیم. ابتدا لازم است معادله دیفرانسیلی برحسب یکی از ساده‌ترین متغیرهای شبکه بدست آوریم. برای هریک از سه شاخه، ولتاژ و جریان شاخه توسط معادله آن شاخه بهم مربوط میشوند. متغیرهای جریان بایستی در محدودیت‌های KCL صدق کنند یعنی :

$$i_L = i_R = i_C \qquad (۶-۱)$$

در حالیکه متغیرهای ولتاژ بایستی محدودیت‌های KVL را برآورند:



شکل ۱-۶- مدار RLC با ورودی منبع ولتاژ

$$v_L + v_R + v_C = v_s \qquad (۶-۲)$$

بنابراین معادله انتگرال دیفرانسیل زیر برحسب جریان حلقه (که با i_L مشخص شده) خواهیم داشت:

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L + V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i_L(t')dt' = v_s \qquad (۶-۳)$$

با شرط:

$$i_L(o) = I_0 \qquad (۶-۴)$$

اکنون میتوان معادلات (۳-۶) و (۴-۶) را برحسب i_L حل نمود. معهذا اگر ولتاژ v_C متغیر مورد توجه باشد، معادله فوق بیک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم تبدیل میشود و تنها لازم است که معادلات شاخه‌ها:

$$v_C = V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i_L(t')dt' \qquad i_L = C\frac{dv_C}{dt} \qquad (۶-۵)$$

در (۳-۶) جایگزین گردد. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم چنین است:

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = v_s \qquad (۶-۶)$$

با شرایط اولیه:

$$v_C(o) = V_0 \qquad (۶-۷)$$

و:

$$\frac{dv_C(o)}{dt} = \frac{i_L(o)}{C} = \frac{I_0}{C} \qquad (۶-۸)$$

معادلات (۶-۶) تا (۸-۶) برای تمام مقادیر $t \geqslant o$ ولتاژ خازن را کاملاً معین میکنند.

میتوان بسهولت تشابه میان تجزیه و تحلیل مدار RLC «سری» و مدار RLC «موازی» را تشخیص داد. در واقع اگر تغییرات سازگاری در طرز نمایش معرفی کنیم، میتوان به معادلات همانندی رسید. شاید از معادلات (۶-۶) تا (۸-۶) تاکنون متوجه شده باشیم که ولتاژ خازن در مدار RLC سری همان نقش جریان سلف در مدار RLC

موازی‌را ایفا میکند [معادلات(۱-۷) تا (۱-۹) را ببینید] ، بنابراین چنانچه تغییر و تبدیل مناسبی‌بکار رود حل مدار RLC سری را میتوان‌از روی حل مدار RLC موازی بدست آورد. این مفهوم راکه معمولاً «دوگانی(۱)» نامند در مثالهای زیر تشریح میکنیم. بحث جزئیات آن در فصل دهم داده خواهد شد.

مثال ۱- مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل (۲-۶) را درنظر بگیرید. میخواهیم آنرا با مدار RLC سری شکل(۱-۶) مقایسه کنیم. برای تمایز میان طرز نمایش و سمبلهای مدارهای سری و موازی علامت «کلاه(۲)» ($\hat{i}$) را برای مشخص کردن تمام پارامترها و متغیرهای مدار موازی بکار می‌بریم.

مثلاً با نوشتن معادله KVL برای مدار سری بدست میآید:

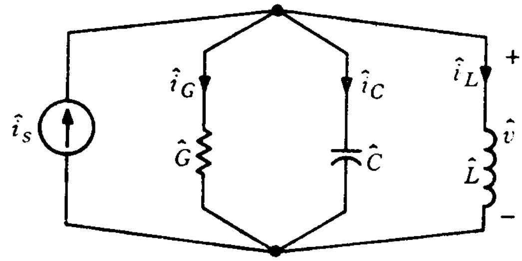
$$v_s = v_L + v_R + v_C$$

$$v_s = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt' + v_C(o)$$

بطریق مشابه،با نوشتن معادله KCL برای مدار موازی بدست میآید:

$$\hat{i}_s = \hat{i}_C + \hat{i}_G + \hat{i}_L$$

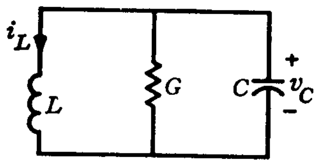
$$\hat{i}_s = \hat{C}\frac{d\hat{v}}{dt} + \hat{G}\,\hat{v} + \frac{1}{\hat{L}}\int_0^t \hat{v}(t')\,dt' + \hat{i}_L(o)$$



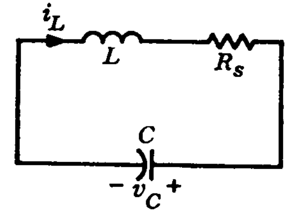
شکل ۲-۶- مدار RLC موازی با ورودی منبع جریان

۱- Duality
۲- Hat

جدول ۱-۵- پاسخ ورودی صفر یک مدار مرتبه دوم



$i_L(0) = I_0$
$v_C(0) = V_0$



$i_L(0) = I_0$
$v_C(0) = V_0$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{G}{C}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0$$

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R_s}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = 0$$

هردومعادله فرم یکسان $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ رادارند رابطه‌میان α و ω_0 واغلب‌توسط Q که تعریف آن‌بصورت زیراست داده میشود

$Q \triangleq \omega_0/2\alpha.$

$$\left.\begin{aligned}\omega_0 &\triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}}\\ \alpha &\triangleq \frac{G}{2C}\end{aligned}\right\} \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{C/L}}{G} = \omega_0 CR$$

$$\left.\begin{aligned}\omega_0 &\triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}}\\ \alpha &\triangleq \frac{R_s}{2L}\end{aligned}\right\} \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{L/C}}{R_s} = \frac{\omega_0 L}{R_s}.$$

حالت ۱ $\alpha > \omega_0$ یا $Q < ½.$ حالت میرای شدید $(s_1 = -\alpha + \alpha_d, s_2 = -\alpha - \alpha_d)$ درآنجا $\alpha_d \triangleq \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

$$i_L(t) = \frac{I_0}{s_1 - s_2}(s_1\epsilon^{s_2 t} - s_2\epsilon^{s_1 t}) + \frac{V_0}{(s_1 - s_2)L}(\epsilon^{s_1 t} - \epsilon^{s_2 t})$$

$$v_C(t) = I_0\frac{s_1 s_2 L}{s_1 - s_2}(\epsilon^{s_2 t} - \epsilon^{s_1 t}) + \frac{V_0}{s_1 - s_2}(s_1\epsilon^{s_1 t} - s_2\epsilon^{s_2 t})$$

$$v_C(t) = \frac{V_0}{s_1 - s_2}(s_1\epsilon^{s_2 t} - s_2\epsilon^{s_1 t}) + \frac{I_0}{(s_1 - s_2)C}(\epsilon^{s_1 t} - \epsilon^{s_2 t})$$

$$i_L(t) = V_0\frac{s_1 s_2 C}{s_1 - s_2}(\epsilon^{s_2 t} - \epsilon^{s_1 t}) + \frac{I_0}{s_1 - s_2}(s_1\epsilon^{s_1 t} - s_2\epsilon^{s_2 t})$$

حالت ۲ $\alpha = \omega_0$ or $Q = \frac{1}{2}$. **حالت میرای بحرانی** $(s_1 = s_2 = -\alpha)$	
$i_L(t) = I_0(1 + \omega_0 t)\epsilon^{-\omega_0 t} + \dfrac{V_0}{\omega_0 L}\omega_0 t\epsilon^{-\omega_0 t}$ $v_C(t) = -I_0\omega_0^2 Lt\epsilon^{-\omega_0 t} + V_0(1 - \omega_0 t)\epsilon^{-\omega_0 t}$	$v_C(t) = V_0(1 + \omega_0 t)\epsilon^{-\omega_0 t} + \dfrac{I_0}{\omega_0 C}\omega_0 t\epsilon^{-\omega_0 t}$ $i_L(t) = -V_0\omega_0^2 Ct\epsilon^{-\omega_0 t} + I_0(1 - \omega_0 t)\epsilon^{-\omega_0 t}$
حالت ۳ $\alpha < \omega_0$ or $Q > \frac{1}{2}$. **حالت میرای ضعیف** $(s_1 = -\alpha + j\omega_d, s_2 = -\alpha - j\omega_d)$ که $\omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ و $\sin\phi = \dfrac{\alpha}{\omega_0}$	
$i_L(t) = I_0\dfrac{\omega_0}{\omega_d}\epsilon^{-\alpha t}\cos(\omega_d t - \phi) + \dfrac{V_0}{\omega_0 L}\dfrac{\omega_0}{\omega_d}\epsilon^{-\alpha t}\sin\omega_d t$ $v_C(t) = -I_0\dfrac{\omega_0^2 L}{\omega_d}\epsilon^{-\alpha t}\sin\omega_d t + V_0\dfrac{\omega_0}{\omega_d}\epsilon^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi)$	$v_C(t) = V_0\dfrac{\omega_0}{\omega_d}\epsilon^{-\alpha t}\cos(\omega_d t - \phi) + \dfrac{I_0}{\omega_0 C}\dfrac{\omega_0}{\omega_d}\epsilon^{-\alpha t}\sin\omega_d t$ $i_L(t) = -V_0\dfrac{\omega_0^2 C}{\omega_d}\epsilon^{-\alpha t}\sin\omega_d t + I_0\dfrac{\omega_0}{\omega_d}\epsilon^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi)$
حالت ۴ $\alpha = 0$ or $Q = \infty$. **حالت بدون اتلاف** $(s_1 = j\omega_0, s_2 = -j\omega_0)$	
$i_L(t) = I_0\cos\omega_0 t + \dfrac{V_0}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t$ $v_C(t) = -I_0\omega_0 L\sin\omega_0 t + V_0\cos\omega_0 t$	$v_C(t) = V_0\cos\omega_0 t + \dfrac{I_0}{\omega_0 C}\sin\omega_0 t$ $i_L(t) = -V_0\omega_0 C\sin\omega_0 t + I_0\cos\omega_0 t$

اکنون فرض کنید که $L=\hat{C}$ و $R=\hat{G}$ و $C=\hat{L}$ و $v_C(o)=\hat{i}_L(o)$ باشد. دراینصورت دومعادله دارای ضرایب یکسان بوده و تنها از لحاظ طرزنمایش با هم متفاوت‌اند. بالنتیجه اگر برای تمام مقادیر $t \geqslant o$ ، روابط $i(o)=\hat{v}(o)$ و $v_s(t)=\hat{i}_s(t)$ نیز برقرار باشد، پاسخ‌ها یکسان خواهند بود ، یعنی برای تمام مقادیر $t \geqslant o$ ، $i(t)=\hat{v}(t)$ است. ایندو مدار را «دوگان[1]» نامند. بویژه هردو مدار پاسخ‌های ضربه و پله همانند خواهند داشت. لیست پاسخ های ورودی صفر هرمدار در جدول (۱-۵) داده شده است.

مثال ۲- برای اینکه دومدار دوگان باشند ، لازم نیست که حتماً «خطی» و «تغییر ناپذیر با زمان» باشند. دو مدار شکل (۳-۶) را درنظر بگیرید. سلف خطی تغییر پذیر با زمان مدار اول برای هرمقدار t با شیب مشخصه $L(t)$ آن مشخص میشود. بطریق مشابه خازن خطی تغییر پذیر با زمان مدار دوم با $\hat{C}(t)$ مشخص میگردد. مقاومت غیر خطی مدار اول با تابع $f(\cdot)$ مشخص میشود که منحنی آن همان مشخصه مقاومت است که در آن v برحسب i رسم میشود. مقاومت غیر خطی مدار دوم بوسیله همان منحنی مشخص میشود ، بشرطیکه در مشخصه آن $\hat{i}$ برحسب $\hat{v}$ رسم گردد (به تعویض جریان و ولتاژ توجه کنید). بعبارت دیگر، هردو مقاومت دارای مشخصه هایی هستند که با یک منحنی توصیف میگردد بشرطیکه مشخصه اول در صفحه iv و مشخصه دوم درصفحه $\hat{v}\,\hat{i}$ رسم شده باشند. اگر جریان داخل مقاومت اول i باشد ولتاژ دوسر آن $f(i)$ بوده ، و اگرولتاژ دوسر مقاومت دوم $\hat{v}$ باشد جریان داخل آن $f(\hat{v})$ است. برای مدار سری با استفاده از KVL داریم :

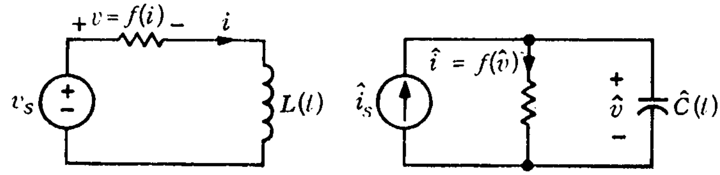
$$v_s(t)=\frac{d}{dt}\,[L(t)i(t)]+f(i(t))$$

برای مدار موازی بااستفاده از KCL داریم :

$$\hat{i}_s(t)=\frac{d}{dt}\,[\hat{C}(t)\,\hat{v}(t)]+f(\hat{v}(t))$$

فرض کنید که برای هرمقدار $t \geqslant o$ ، $L(t)=\hat{C}(t)$ باشد. دراینصورت دو معادله

۱- Dual



شکل ۳-۶- دو مدار دوگان ، توجه کنید که مقاومت‌ها غیر خطی هستند

بالا دارای شکل یکسان بوده و این دو مدار، «دوگان» خوانده میشوند . بالنتیجه چنانچه حالتهای اولیه یکسان بوده $[i(o)=\hat{v}(o)]$ و ورودی‌ها نیز دارای شکل موج مشابه باشند [برای همه مقادیر $t \geqslant o$ ، $v_s(t)=\hat{i}_s(t)$] پاسخ‌ها همانند خواهند بود ، یعنی شکل موج $i(\cdot)$ که برای $t \geqslant o$ تعریف میشود همانند شکل موج $\hat{v}(\cdot)$ است که برای $t \geqslant o$ تعریف میگردد .

اکنون این دومثال را بررسی نموده و مشاهده میکنیم که میان آنها تناظرهای یک‌بیک زیادی وجود دارد . معادله KVL یک مدار، متناظر با معادله KCL مدار دیگر است. حلقه یکی ازمدارها متناظر باگرهی از مدار دیگر است. جدول زیر اصطلاحات دوگان نوعی را نشان میدهد.

KVL	KCL
جریان	ولتاژ
حلقه	گره همراه با دسته شاخه‌هایی که بآن گره وصل اند
اجزاء بطور سری	اجزاء بطور موازی
سلف	خازن
مقاومت	مقاومت
منبع ولتاژ	منبع جریان

توجه باین نکته حایز اهمیت است که پاره‌ای از این تناظرها به «خواص گراف[۱]» مربوط بوده درحالیکه برخی دیگر به «ماهیت شاخه‌ها» مربوط است. بنابراین دربوجود آوردن دوگانی باید مفهوم گراف‌های دوگان نیز معرفی شود. بحث کامل این موضوع درفصل دهم داده خواهد شد. درحال حاضر میخواهیم تنها روی این حقیقت تأکید کنیم که مفهوم دوگانی درنظریه مدارها اهمیت زیادی دارد و میتوان جزئیات بسیاری از مدارها را بشرطیکه خصوصیات مدار دوگان معلوم باشد بدون تجزیه و تحلیل بخوبی درک کرد. درضمن‌درس، گاهاً از مفهوم دوگانی استفاده خواهیم کرد.

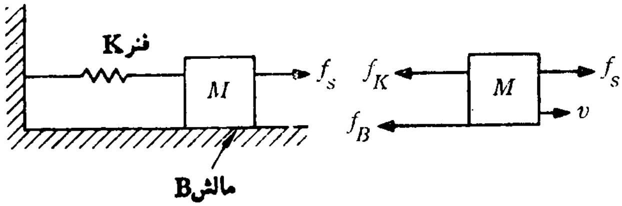
۲-۶- تشابه‌های الکتریکی و مکانیکی

ما در مکانیک کلاسیک با حرکت‌های هارمونیکی ساده، نوسانی میرا و نمایی میرا برخورد کرده‌ایم که کاملاً مشابه آنچه که تابحال دراین درس مطالعه کرده‌ایم میباشند. اکنون اجزاء اساسی مکانیکی و طرز تشکیل معادلات درسیستم‌های مکانیکی را مرورنموده و تشابه آنها را با مدارهای الکتریکی بررسی میکنیم.

مثال ۳- سیستم مکانیکی شکل (۴-۶) را درنظر بگیرید که در آن جسمی بجرم M بوسیله فنری با ضریب فنریت[۲] K بدیوار بسته شده است. این جسم توسط نیرویی که با f_s مشخص می‌شود کشیده میشود. سطح تماس میان جسم و زمین دارای نیروی مالشی است که حرکت جسم را کند می‌نماید و درهرلحظه از زمان در خلاف جهت سرعت اثر میکند. میتوان معادله حرکت جسم را بااستفاده از دیاگرام جسم آزاد[۳] مطابق شکل (۴-۶) نوشت. فرض کنید f_K نیرویی باشد که فنر روی جسم اعمال میکند و گیریم f_B نیروی مالشی باشد، دراینصورت نیروی کل که روی جسم اثر میکند مساوی $f_s - f_K - f_B$ است و این نیرو بموجب قانون نیوتن[۴] مساوی مشتق مقدارحرکت است. بنابراین:

$$f_s - f_K - f_B = \frac{d}{dt} Mv \qquad (۶-۹)$$

۱- Graph
۲- Spring Constant
۳- Free - body
۴- Newton



شکل ٤-٦- سیستم مکانیکی و دیاگرام جسم آزاد آن

که درآن v سرعت در جهت نیروی f_s است. این حقیقت بسیار معروف است که نیروی مالش تابعی از سرعت بوده و بصورت $f_B(\cdot)$ مشخص میگردد ، درحالیکه نیروی الاستیکی(۱) تابعی از تغییرمکان(۲) x است که با $f_K(\cdot)$ بیان میشود. گیریم معادله (۹-٦) را مجدداً بصورت زیر بنویسیم :

$$f_s = f_K(x) + f_B(v) + \frac{d}{dt} Mv \qquad (٦-١٠)$$

اکنون اتصال موازی یک مقاومت ، یک سلف ، یک خازن و یک منبع جریان i_s را درنظر میگیریم. میتوان معادله KCL را چنین نوشت:

$$i_s = i_L(\Phi) + i_R(\hat{v}) + \frac{d}{dt} C\hat{v} \qquad (٦-١١)$$

که درآنجا $C\hat{v}$ بار خازن خطی است و

$$\Phi(t) = \Phi(o) + \int_0^t \hat{v}(t')dt'$$

شار سلف غیر خطی است. $i_R(\cdot)$ و $i_L(\cdot)$ بترتیب جریان داخل سلف بصورت تابعی از شار و جریان داخل مقاومت بصورت تابعی از ولتاژ را نشان میدهند. درسیستم مکانیکی $v = \frac{dx}{dt}$ سرعت است و

۱- Elastic Force ۲- Displacement

$$x = x(o) + \int_{0}^{t} v(t')dt'$$

تغییرمکان میباشد. بعلاوه، اگر $f_s = i_s$ ، $f_K = i_L$ ، $f_B = i_R$ و $M = C$ باشد دو معادله همانند بوده و مدار RLC موازی را مشابه الکتریکی(۱) سیستم مکانیکی نامند. متغیر $\hat{v}$ (ولتاژ) درمدار تشابهی مانند متغیر مکانیکی v (سرعت) رفتار می‌نماید. "مفهوم تشابهی نظیر مفهوم دوگانی است بجز اینکه تشابه معمولاً" ، تنها معادل بودن دینامیکی دو سیستم را لازم میدارد درحالیکه دوگانی بودن ، علاوه براین تشابه ، ارتباط توپولوژیکی را نیز ایجاب میکند." برای بیان و درك بسیاری از پدیده‌های فیزیکی ، اغلب استفاده‌از ایده تشابهی مفید است زیرا افراد بسته به آموزش و تجربه‌خود همواره با نوعی از این سیستم‌ها آشنایی بیشتری دارند. چنانکه گفته شد مفهوم تشابهی تنها‌به‌سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان محدود نمیشود. متغیرها و اجزاء مشابه در جدول های زیر خلاصه شده‌اند.

سیستم‌های مکانیکی	مدارهای الکتریکی
نیرو f_s	جریان i_s
سرعت v	ولتاژ $\hat{v}$
تغییرمکان x	شار Φ
فنر	سلف
مالش	مقاومت
جرم	خازن

۱- Electric Analog

بعلاوه ، چنانچه سه جزء اصلی خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشند ، روابط تشابهی آشنای زیر بدست می‌آیند :

مدارهای الکتریکی		سیستم‌های مکانیکی	
خازن	$i = C\dfrac{d\hat{v}}{dt}$	جرم	$f = M\dfrac{dv}{dt}$
رسانا	$i = G\hat{v}$	مالش	$f = Bv$
سلف	$i(t) = i(0) + \dfrac{1}{L}\int_0^t \hat{v}(t')\, dt'$	فنر	$f(t) = f(0) + K\int_0^t v(t')\, dt'$

این دسته ازکمیت‌های تشابهی تنها دسته ممکن نمیباشند و بخصوص اگر بجای ارتباط دادن سیستم مکانیکی به مدار RLC «سوازی» ، آنرا به مدار RLC «سری» مربوط میکردیم ، دسته متفاوت دیگری ازکمیت‌های مشابه بدست میاوردیم . مثلاً میتوانستیم ولتاژ v_s را متناظر با نیروی f_s و جریان i_s را متناظر با سرعت v درنظر بگیریم .

خلاصه

● پاسخ های ورودی‌صفر مدارهای RLC پسیو خطی تغییر ناپذیر با زمان مرتبه دوم ، مطابق جدول (۱-۵) (صفحه‌های ۲۹۴ و ۲۹۰) به چهار دسته طبقه‌بندی میشوند.

● پاسخ های ورودی صفر یک مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان را میتوان برحسب مسیرهای حالت که درصفحه $i_L v_C$ برحسب پارامتر t رسم میشوند بیان نمود. حالت مدار در زمان t، بردار $\mathbf{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$ وحالت اولیه آن بردار $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ v_C(0) \end{bmatrix}$ است.

● مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان مرتبه دوم (پسیو یا اکتیو) را میتوان نسبت به محل فرکانس‌های طبیعی و ماهیت مسیرهای حالت آن مطابق جدول (۲-۵) نیز طبقه‌بندی کرد.

جدول ۲-۵- طبقه بندی مدارهای RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان

مدار RLC موازی	پسیو $G=\frac{1}{R}>0$	بی اتلاف $G=\frac{1}{R}=0$	آکتیو $G=\frac{1}{R}<0$
محل فرکانس‌های طبیعی	نیمه چپ صفحه s	محور $j\omega$	نیمه راست صفحه s
مسیرهای حالت	پایدار مجانبی	نوسانی	ناپایدار

● روش فضای حالت در تجزیه و تحلیل مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان بسیار مفید است. معادلات بصورت $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, w, t)$ هستند که در آن $\mathbf{x}$ حالت و w ورودی است و میتوان جواب را با محاسبه مرحله بمرحله بدست آورد.

● مفهوم مدارهای دوگان براین حقیقت استوار است که معادلات توصیف کنندهٔ مدارهای دوگان شکل یکسانی دارند

● اگر یک سیستم مکانیکی مشابه یک مدار الکتریکی باشد، دراینصورت هردو با معادلاتی که شکل یکسانی دارند توصیف میگردند.

مسائل

۱- محاسبه عبارتهای نمایی با بکار بردن طرز نمایش بخش ۱ نشان دهید که:

$$\frac{d}{dt}\, e^{-\alpha t}\cos \omega_d t=-\omega_0 e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t+\Phi)$$

$$\frac{d}{dt}\, e^{-\alpha t}\sin \omega_d t=\omega_0 e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\Phi)$$

۲- فرکانس‌های طبیعی فرض کنید که فرکانس های طبیعی یک مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان یکی از صورت‌های زیر باشد:

الف - $s_1 = -۲$ و $s_2 = ۳$

ب - $s_1 = s_2 = -۲$

پ - $s_1 = j۲$ و $s_2 = -j۲$

ت - $s_1 = ۲ + j۳$ و $s_2 = ۲ - j۳$

برای پاسخ های ورودی صفر، عبارتهای کلی بصورت توابع زمانی با مقدار حقیقی بیان کنید.

۳- ضریب Q برای یک مدار RLC داده شده با $Q = ۵۰۰$ چند پریود لازم است صبر شود تا پوش پاسخ ورودی صفر به مقدار ۱۰ درصد، ۱ درصد، ۰٫۱ درصد حداکثر مقدار آن در پریود اول برسد (درهرمورد جوابی با تقریب حداکثر نیم پریود بدست آورید).

٤- ضریب Q دو مدار RLC خطی تغییر ناپذیر با زمان را درنظر بگیرید که اولی یک مدار موازی بامقادیر اجزاء R' ، L و C و دومی یک مدار سری با مقادیراجزاء R و L و C میباشد. اگر قرار باشد دو مدار Q یکسان داشته باشند چه رابطه‌ای بین R و R' وجود دارد؟ وقتیکه $Q \to \infty$ ، چه اتفاق میافتد؟

۵- تعیین ثابت‌های دلخواه از روی شرایط اولیه با داشتن یک‌مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان با $\omega_0 = ۱۰$ رادیان برثانیه و $Q = \frac{۱}{۲}$ و $C = ۱$ فاراد، معادله دیفرانسیل را بنویسید. پاسخ ورودی صفر برای ولتاژ v_C دوسر خازن را تعیین کنید. شرایط اولیه $v_C(0) = ۲$ ولت و $i_L(0) = ۰$ آمپر میباشد.

۶- پاسخ‌های پله و ضربه برای مدار RLC موازی مسأله ۵ فرض کنید ورودی یک منبع جریان i_s باشد که بطور موازی بآن وصل شده است. پاسخ پله و پاسخ ضربه برای ولتاژ v_C را تعیین کنید.

۷- پاسخ کامل منبع جریان i_s رابطور موازی با مدار RLC مسأله ۵ وصل میکنیم و گیریم $i_s(t) = u(t) \cos ۲t$ باشد. پاسخ حالت صفر و پاسخ گذرا را تعیین کنید.

۸- پاسخ حالت دائمی سینوسی ، پاسخ گذرا و پاسخ کامل برای مدار RLC موازی مسأله ۰ گیریم که ورودی منبع جریان $i_s(t)=u(t)\cos 2t$ باشد که بطور موازی بآن وصل شده است. برای شرایط اولیه $v_C(o)=2$ ولت و $i_L(o)=0$ آمپر پاسخ کامل را تعیین کنید. جزء گذرا و جزء حالت دائمی را صریحاً مشخص سازید و نشان دهید که پاسخ کامل ، مجموع پاسخ ورودی صفر مسأله ۰ و پاسخ حالت صفر مسأله ۷ میباشد.

۹- حذف حالت گذرا منبع جریان i_s را بطور موازی با مدار RLC مسأله ۰ وصل میکنیم و گیریم $i_s(t)=u(t)\cos 2t$ باشد. آیا ممکن است شرایط اولیه را چنان انتخاب نمود که حالت گذرایی موجود نباشد؟ در چنین صورتی شرایط اولیه لازم را تعیین کنید، در غیر اینصورت جواب خود را توجیه نمائید.

۱۰- حل معادلات دیفرانسیل معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

الف - $$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+x=e^{-2t} \qquad x(o)=1 \quad , \quad \frac{dx}{dt}(o)=-1$$

ب - $$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0 \qquad x(o)=1 \quad , \quad \frac{dx}{dt}(o)=o$$

پ - $$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\cos t \qquad x(o)=o \quad , \quad \frac{dx}{dt}(o)=1$$

ت - $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=tu(t) \qquad x(o)=o \quad , \quad \frac{dx}{dt}(o)=o$$

۱۱- حل معادلات دیفرانسیل ماتریسی و مسیرهای حالت معادلات دیفرانسیل ماتریسی زیررا باروش تقریب متوالی حل کنید ومسیرهای حالت را رسم نمائید:

(الف) $$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{bmatrix} 1 & o \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(o)=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(ب) $$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & o \end{bmatrix}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(o)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

۱۲- پاسخ ضربه و تعویض منبع مدار RLC موازی خطی تغییرناپذیر با زمان با $\omega_0 = ۱$ رادیان بر ثانیه و $Q = ۱۰$ داده شده است. ورودی منبع ولتاژی است که بطور سری با سلف وصل شده است. برای ولتاژ v_C دو سر خازن، پاسخ ضربه را تعیین کنید (راهنمایی: از مدار معادل نرتن استفاده نمائید).

۱۳- پاسخ پله و پاسخ شیب برای مدار مسأله ۱۲، پاسخ پله و پاسخ شیب را تعیین کنید.

۱۴- خطی بودن پاسخ حالت صفر یک مدار RLC موازی خطی تغییرناپذیر با زمان داده شده است. پاسخ حالت صفر به ورودی سینوسی $i_1(t) = u(t) \cos ۲t$ چنین است:

$$v_1(t) = e^{-t} + ۲e^{-۲t} + \cos(۲t + ۶۰^\circ) \qquad t \geqslant 0$$

پاسخ کامل این مدار برای ورودی سینوسی $i_۲(t) = ۲u(t) \cos ۲t$، وقتیکه مدار از حالت اولیه معینی شروع میکند چنین است:

$$v_۲(t) = -e^{-t} + ۲e^{-۲t} + ۲\cos(۲t + ۶۰^\circ) \qquad t \geqslant 0$$

اگر مدار با همان حالت اولیه شروع کند، پاسخ کامل را به ورودی سینوسی:

$$i_۳(t) = ۵u(t) \cos ۲t$$

تعیین کنید.

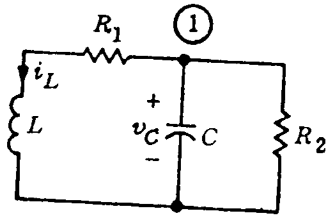
۱۵- پاسخ ورودی صفر، معادله دیفرانسیل و مسیر حالت مدار شکل (مسأله ۱۰-۵) خطی و تغییر ناپذیر با زمان است.

الف - معادله دیفرانسیلی با متغیر وابسته v_C بنویسید و شرایط اولیه مناسب را برحسب توابعی از $i_L(0)$ و $v_C(0)$ بیان کنید (راهنمایی: با بکار بردن متغیرهای v_C و i_L معادله گره را در گره ➊ و معادله حلقه برای i_L را بنویسید).

ب - پاسخ ورودی صفر $i_L(\cdot)$ و $v_C(\cdot)$ را محاسبه کنید.

پ - پاسخ ورودی صفر را بصورت یک بردار حالت، $\mathbf{x}(\cdot) = \begin{bmatrix} i_L(\cdot) \\ v_C(\cdot) \end{bmatrix}$ بنویسید، و مسیرهای حالت $\mathbf{x}_1(\cdot)$ و $\mathbf{x}_۲(\cdot)$ متناظر با $\mathbf{x}_1(0) = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\mathbf{x}_۲(0) = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$ را که در آن i_L در امتداد محور طولها و v_C در امتداد محور عرضها باشد رسم کنید.

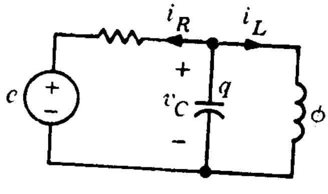
ت ـ آیا مسیر $\mathbf{x}_1(0)$ خاصیت ویژه‌ای دارد ؟ کدام مسیرهای دیگر ، درصورتیکه وجود داشته باشند ، این خاصیت مشابه را دارا میباشند ؟



شکل (مسأله ۱۵-۵)

۱۶- مسیر حالت مدار غیرخطی و انتگرال گیری تقریبی

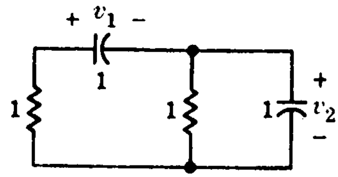
مدار RLC غیرخطی تغییر ناپذیر با زمان شکل (مسأله ۱۶-۵) عناصری دارد که چنین توصیف میشوند. $i_R = \alpha v_R$ ، $q = \beta v_C + \gamma v_C^{3}$ و $\Phi = \delta i_L$ که درآنجا $\alpha = ۲$ مهو $\beta = ۱$ فاراد، $\gamma = \frac{۱}{۳}$ فاراد بر ولت مربع و $\delta = \frac{۱}{۲}$ هانری است. منبعی که مدار را تحریک میکند ولتاژ $e(t) = \sin(۰٫۵t)$ ولت را دارد و در زمان $t = 0$ ولتاژ دو سر خازن $v_C(0) = ۲$ ولت و جریان داخل سلف $i_L(0) = -۲$ آمپر است. با بکار بردن $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$ بعنوان بردار حالت ، معادله حالت مدار را بنویسید و با استفاده از تقریب خطی متوالی یعنی $\mathbf{x}[(n+۱)\Delta t] \approx \mathbf{x}(n\Delta t) + \dot{\mathbf{x}}(n\Delta t)\Delta t$ با $\Delta t = ۰٫۲$ ثانیه و $n = 0 , ۱ , ۲ , \dots , ۱۰$ ، مسیر فضای حالت را رسم کنید. v_C و i_L را بصورت توابعی از زمان رسم کنید.



شکل (مسأله ۱۶-۵)

۱۷- تشکیل دادن معادلات دیفرانسیل و انرژی الف ـ در مدار شکل (مسأله ۱۷-۵) معادلات دیفرانسیل را برای $v_1(t)$ و $v_2(t)$ تشکیل دهید.

ب ـ گیریم $\mathcal{E}(t)=\frac{1}{2}[v_1^2(t)+v_2^2(t)]$ باشد. ثابت کنید برای همه مقادیر t، $\frac{d\mathcal{E}}{dt}\leqslant 0$ است.

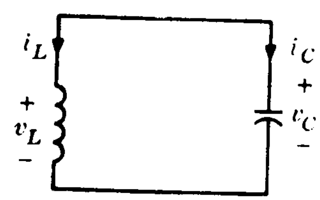


شکل (مسأله ۱۷-۵)

۱۸- مدارهای غیر خطی، معادلات بصورت نرمال و انرژی الف ـ برای مدار غیر خطی تغییر ناپذیر با زمان داده شده در شکل (مسأله ۱۸-۵) معادله دیفرانسیل را برحسب متغیرهای q و Φ بنویسید که در آن مشخصه سلف بصورت $i_L=\Phi+\Phi^3$ (Φ شار است) و مشخصه خازن بصورت $v_C=2q$ (q بار است) داده شده است.

ب ـ گیریم در زمان t_0 مقادیر شار و بار بترتیب Φ_0 و q_0 باشند. انرژی ذخیره شده در مدار چقدر است؟

پ ـ گیریم در زمان t_0، $q=0$ و $\Phi=2$ باشد. برای $t\geqslant t_0$ حداکثر مقدار $q(t)$ چقدر است؟ (راهنمایی: آیا هیچ اتلاف انرژی در مدار وجود دارد؟)



شکل (مسأله ۱۸-۵)

۱۹-مشخص سازی حالت و مسیر حالت برای مدار RLC سری خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل (مسأله ۱۹-۵)، $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$ را بعنوان بردار حالت بکاربرید

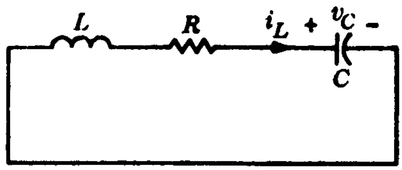
تنها اطلاعاتی که از اندازه‌گیری انجام شده این مدار در دست است، مشتق زمانی بردار حالت در دو مورد متفاوت میباشد یعنی :

در $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ و در $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} -15 \\ 10 \end{bmatrix}$

الف ـ مقادیر اجزاء R و L و C را تعیین کنید.

ب ـ مشتق بردار حالت در $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ را با دو روش محاسبه کنید. اول ، از معادله $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ استفاده کنید. دوم ، مشتق نامعلوم را با ترکیب خطی مناسب مشتق‌های داده شده مساوی قرار دهید.

پ ـ شیب $\dfrac{dv_C}{di_L}$ مسیر فضای حالت را در $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ حساب کنید.



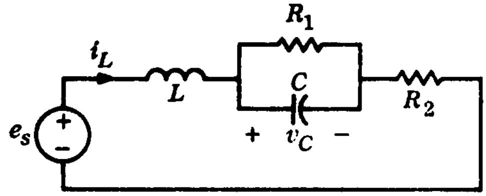
شکل (مسأله ۱۹-۵)

۲۰- پاسخ ضربه ، پاسخ کامل و حالت‌دائمی سینوسی مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۲۰-۵) از اجزاء خطی تغییر ناپذیر با زمان ساخته شده است. ولتاژ e_s ورودی و ولتاژ v_C پاسخ آن است. مقادیر اجزاء $R_1=2$ اهم و $R_2=3$ اهم و $L=1$ هانری و $C=0.20$ فاراد میباشد.

الف ـ پاسخ ضربه h را تعیین کنید.

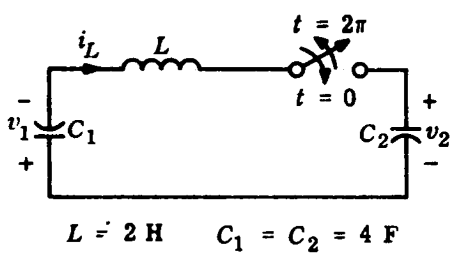
ب ـ پاسخ کامل ناشی از ورودی $e_s(t)=u(t)$ و حالت اولیه $i_L(0)=2$ آمپر و $v_C(0)=1$ ولت را محاسبه کنید.

پ ـ برای ورودی $e_s=5\cos 2t$ ، حالت دائمی سینوسی v_C ، i_L و v_{R_2} را محاسبه و رسم نمائید. نتایج را بصورت توابع زمانی با مقدار حقیقی بیان کنید.



شکل (مسأله ۲۰-۵)

۲۱- مدار بی‌اتلاف و مسیر حالت مدار LC خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل (مسأله ۲۱-۵) را درنظر بگیرید. قبل از زمان $t=0$ کلید باز بوده و ولتاژهای دوسر خازن‌ها بصورت $v_۱=۱$ ولت و $v_۲=۴$ ولت میباشند. در لحظه $t=0$ کلید را می‌بندیم و برای فاصله زمانی ۲π ثانیه آنرا در این وضع نگاه میداریم و سپس در $t=۲\pi$ ثانیه مجدداً آنرا بازکرده و پس‌از آن برای همیشه باز نگاه میداریم. برای $t>۲\pi$ ثانیه مقادیر $v_۱$ و $v_۲$ چقدر میباشد؟ مسیر حالت را درصفحه i_Lv_C رسم کنید ($v_C=v_۱+v_۲$). درمورد انرژی ذخیره شده در مدار پیش‌از زمان $t=0$ و پس‌از زمان $t=۲\pi$ ثانیه چه میتوان گفت؟ (راهنمایی: نتایج انتخاب خاص این فاصله زمانی را تجزیه و تحلیل نمائید).



شکل (مسأله ۲۱-۵)

۲۲- مقاومت منفی و پاسخ ورودی صفر درمدار شکل (مسأله ۱۰-۵) مقاومت $R_۲$ را به ۲- اهم تبدیل میکنیم.

الف ـ فرکانس های طبیعی مدار چیست؟

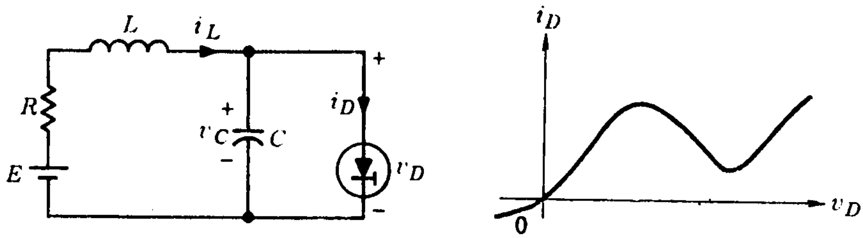
ب ـ چنانچه $i_L(0)=۱$ آمپر و $v_C(0)=۱$ ولت باشد پاسخ های ورودی صفر $i_L(۰)$ و $v_C(۰)$ را تعیین کنید.

پ ـ مسیر حالت را رسم کنید.

۲۳- مدار دوگان دوگان مدارشکل (مسأله ۱۰-۵) را رسم کنید و مقادیر همه اجزاء آنرا مشخص سازید.

۲۴- تشابه مکانیکی و مدارهای دوگان - برای سیستم مکانیکی شکل (۴-۶) دو مدار الکتریکی که مشابه‌های الکتریکی سیستم مکانیکی باشند رسم کنید.

۲۵- مدار غیر خطی و معادله دیفرانسیل بصورت نرمال مدار شکل (مسأله ۲۰-۵) یک نمونه مدار نوسان ساز دیود تونلی است. این دیود را بصورت مقاومتی که با مشخصه $i_D=g(v_D)$ معین میشود مدل میکنیم. معادله دیفرانسیل را بصورت نرمال با متغیرهای i_L و v_C بنویسید :



شکل (مسأله ۲۵-۵)

فصل ششم

مبانی مدارهای خطی و تغییرناپذیر بازمان

در دوفصل پیش مدارهای مرتبه‌اول ومرتبه‌دوم را مطالعه کردیم وبسیاری از مفاهیم وتکنیک‌های اساسی را بدست آوردیم . دراین فصل ابتدا برخی از نتایج مهم را خلاصه نموده و آنگـاه به تعمیم بعضی ازآنها میپردازیم . سپس به بررسی مقدماتی تجزیه و تحلیل گره و تجزیه و تحلیل مش درمورد مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان خواهیم پرداخت ونشان خواهیم داد که نتایج این‌تجزیه‌وتحلیل منجر به توصیف ورودی ـ خروجی[1] برمبنای یک معادله‌دیفرانسیل خطی‌مرتبه n ام باضرایب ثابت میگردد. همچنین روشی برای‌محاسبه پاسخ ضربه‌ازمعادله دیفرانسیل مرتبه n ام ارائه خواهد شد وآنگاه پاسخ‌های مربوط به ورودی‌های دلخواه را بررسی خواهیم کرد . بالاخره نمایش انتگرال کانولوشن[2] را دقیقاً بدست‌آورده وطرز‌محاسبه این انتگرال را با مثالهای متعدد روشن خواهیم ساخت .

۱- برخی تعاریف وخواص کلی

درفصل دوم سه جزء اصلی مدار یعنی ، مقاومت ، خازن وسلف را معرفی کردیم و یک طبقه بندی‌چهارگانه برای‌هرجزء قایل‌شدیم که عبارت‌بودنداز : خطی بودن یاغیرخطی بودن ، تغییرپذیر و یا تغییرناپذیر بازمان بودن .

برای تسهیل دربیان فرمول‌های‌آینده بازهم ازاین طبقه بندی چهارگانه یاد میکنیم . هرمدار با این خاصیت که هریک از اجزاء آن یک « عنصرخطی » و یـا یک منبع نابسته باشد یک **مدارخطی** نامیده میشود . بهمین ترتیب هرمدار با این خاصیت که هریک از اجزاء آن یک « عنصر تغییرناپذیر با زمان » ویا یک منبع نابسته باشد یک **مدار تغییر-ناپذیر بازمان** خواهد بود . بنابراین، یک **مدارخطی تغییر ناپذیر بازمان** مداری است که هریک از اجزاء آن یک « عنصرخطی تغییرناپذیر بازمان » ویا یک منبع نابسته

۱ — Input-Output description ۲ — Convolution integral

باشد. واضح است که اگر مداری خطی نباشد آنرا **مدار غیرخطی** و اگرمداری تغییرناپذیر با زمان نباشد ، آنرا **مدار تغییرپذیر بازمان** نامند .

دراین تعاریف، منابع نابسته بایستی بطور جداگانه مورد بررسی قرار گیرند زیرا (۱) ولتاژ دوسر یک منبع ولتاژ وجریان یک منبع جریان درتجزیه و تحلیل مدار نقشی را بازی میکنند که بانقش سایرمتغیرهای شبکه ویا اجزاء دیگر مدار تفاوت دارد، و (۲) تمام منابع نابسته عناصر غیرخطی وتغییرپذیر بازمان هستند(مثلاً ، یک‌منبع ولتاژ سینوسی میتواندبعنوان یک مقاوت غیرخطی تغییرپذیر بازمان موردبررسی قرارگیرد زیرا مشخصه آن برای هرزمان t یک خط افقی درصفحه iv میباشد که عرض آن یک تابع سینوسی از زمان است ، یعنی مشخصه آن خط راستی است که برای تمام زمانها از مبدأ « نمیگذرد ») .

علاوه براین بایستی تأکید نمود که مجموعه « تمام » ولتاژهای دوسر منابع ولتاژ نابسته و « تمام » جریانهای داخل منابع جریان نابسته بعنوان « ورودی‌های مدار » شناخته میشوند . بنابراین مداری که فقط شامل یک منبع نابسته باشد « مدار با یک ورودی » خوانده میشود. دراین فصل، تنها مدارهای با یک ورودی و با یک خروجی را موردبررسی قرار خواهیم داد ، یعنی مدارهایی که فقط شامل یک منبع نابسته بوده و تنها یک متغیر (خروجی) است که باید محاسبه گردد . ورودی میتواند شکل موج ناشی از یک منبع ولتاژ نابسته و یا یک منبع جریان نابسته باشد . این شکل موج ممکن است بصورت یک ثابت، یک تابع پله ، یک تابع ضربه ، یک تابع سینوسی و یا هر تابع دلخواه دیگری از زمان باشد . خروجی که میتوان آنرا « پاسخ » مدار نیز نامید، میتواند بصورت ولتاژ یک‌شاخه بخصوص ، جریان یک شاخه بخصوص و یا ترکیب خطی بعضی ولتاژ شاخه‌ها و جریان شاخه‌ها و یا بار روی یک خازن و یا شار[۱] داخل یک سلف باشد .

برای تمام مدارهای فشرده که دراین کتاب موردبحث می‌باشند قادر خواهیم بود یک معادله دیفرانسیل و یا دستگاهی ازمعادلات دیفرانسیل را بطریقی بنویسیم که از حل آنها تمام ولتاژهای شاخه‌ها و جریانهای شاخه‌ها محاسبه گردند .

برای اینکه بتوانیم‌جواب منحصر بفرد دستگاه معادلات‌دیفرانسیل‌را بدست‌آوریم باید علاوه‌برورودی‌ها، شرایطاولیه[۲] را نیزدقیقاً بدانیم . نحوهٔ بیان‌این‌شرایط اولیه بستگی‌به‌طرز

---

۱ — Flux ۲ — Initial conditions

نوشتن معادلات دیفرانسیل خواهد داشت . بخصوص درفصل سیزدهم نشان خواهیم داد که اگر درلحظه اولیه ، تمام ولتاژهای خازنها وجریانهای سلف‌ها معلوم باشند شرایط اولیه مطلوب بطور یکتا مشخص خواهند بود .

« هرمجموعه‌یی ازشرایط اولیه که همراه باورودی‌ها ، برای تمام زمانهای $t \geqslant t_0$ ، تمام متغیرهای مدار را بطور یکتا مشخص سازد **حالت مدار درزمان**(۱) t_0 نامیده میشود » .

ازبیان‌های فوق‌مشاهده میکنیم که‌حالت یک‌مدار در زمان t_0 همیشه میتواند مجموعه تمام ولتاژهای خازنها و جریانهای سلف‌ها درلحظه t_0 انتخاب شود. حالتی که درآن تمام شرایط اولیه صفر باشند **حالت صفر**(۲) خوانده میشود . برای مدارهای خطی اگر تمام ورودی‌هاصفر بوده ومدارهم درحالت صفر باشد تمام متغیرهای شبکه ازآن بعد برای‌همیشه صفر خواهند بود . وقتی ورودی درلحظه t_0 به مدار اعمال میشود ، مجموعه شرایط اولیه درلحظه t_0 که برای یکتا مشخص نمودن متغیرهای شبکه لازم است ، همانطورکه قبلاً گفته شد ، حالت مدار درلحظهٔ t_0 خوانده میشود که بطور خلاصه آنرا « حالت اولیه(۳) » میخوانیم. کلمه «اولیه» به‌حالت مدار درلحظه‌ای که ورودی اعمال میشود اشاره میکند.

پاسخ (خروجی) یک مدار را **پاسخ حالت صفر**(۴) مینامیم اگر این پاسخ مربوط به مداری‌باشد که ورودی‌درلحظه دلخواه t_0 بآن اعمال شده و مدار قبل‌ازاعمال این‌ورودی درحالت صفر بوده است (یعنی درلحظه t_{0-}) . همچنین پاسخ مداری را کـه ورودی آن بطور متحد ،ساوی صفر باشد **پاسخ ورودی صفر**(۵) خواهیم نـامید . واضح است کـه پاسخ حالت‌صفر، تنها ناشی‌از ورودی آن‌است وبطریق مشابه، پاسخ ورودی صفر، تنها ناشی از شرایط اولیه می‌باشد . این پاسخ ناشی از انرژی ذخیره شده اولیه درمدار خواهد بود .

پاسخ کامل(۶) عبارت از پاسخ مدار بـه مجموع ورودی و شرایط اولیه خواهد بود .

درفصل هـای پیش خواص مدارهای خطی تغییرناپـذیر با زمان مرتبه اول و دوم را بررسی کردیم . بعداً خواهیم دید کـه این خواص برای هرمدار خطی تغییرناپـذیر بازمان و یا تغییرپذیر بازمان نیز صادق است . برای مدارهای خطی (تغییرناپذیر یـا تغییرپذیر بازمان) :

---

۱ — State of a circuit at time t_0
۲ — Zero state
۳ — Initial state
۴ — Zero-state response
۵ — Zero-input response
۶ — Complete response

۱- «پاسخ کامل» مجموع پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر میباشد .

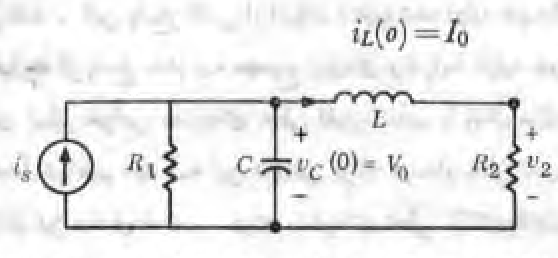
۲- «پاسخ حالت صفر» تابع خطی ورودی است .

۳- «پاسخ ورودی صفر» تابع خطی حالت اولیه میباشد .

۲- تجزیه و تحلیل گره و مش

درفصل سوم مدارهای ساده مقاومتی‌را که بصورت‌اتصال سری یا موازی عناصر بودند تجزیه و تحلیل نمودیم و برای آنها مدارهای معادلی بدست آوردیم . درفصل های چهارم وپنجم مدارهای شامل مقاومت ، خازن و سلف را بررسی کردیم . این مدارها توپولژی(۱) ساده‌یی داشتند بطوریکه یا مدار فقط شامل یک حلقه تنها بود که دراینصورت تنها یک معادله حلقه (KVL) رفتار مدار را مشخص میکرد و یا مدار فقط شامل دو گره بود که در اینصورت تنها یک معادله گره (KCL) رفتار مدار را مشخص میشود . برای مدارهای با توپولژی پیچیده لازم است روش های کلی و اصولی برای تجزیه و تحلیل آنها بدست آورد که این کار درفصل های‌نهم تادوازدهم انجام شده‌است . دراین بخش، مداری را که کمی مفصل‌تر از مداری‌است که درفصل پنجم مطالعه کردیم انتخاب میکنیم تا دو روش اساسی تجزیه و تحلیل مدار ، یعنی تجزیه و تحلیل گره وتجزیه و تحلیل مش را تشریح نمائیم .

برای شروع ، مدار ساده شکل (۱ - ۲) را درنظرمیگیریم که ورودی آن منبع‌جریان i_s وخروجی‌آن‌ولتاژ v_2 دوسرمقاومت R_2 میباشد . حالت‌اولیه با $v_C(o)=V_0$ و $i_L(o)=I_0$ بیان شده و جهت‌های قراردادی آنها درشکل نشان داده شده است .



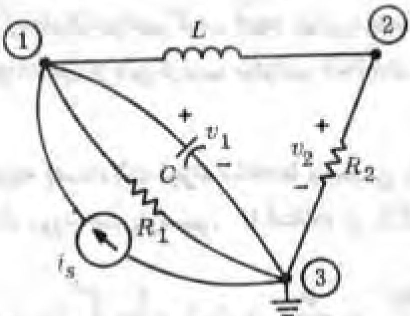
شکل۱-۲- مثال ساده‌یی که تجزیه وتحلیل گره و تجزیه وتحلیل مش را تشریح میکند . منبع جریان i_s ، ورودی و ولتاژ v_2 ، خروجی مدار میباشد .

۱ — Topology

۱-۲- تجزیه و تحلیل گره

اولین قدم درتجزیه و تحلیل گره شمارش تعداد گره‌های مدار میباشد. دراین مورد سه گره وجود دارد که آنها را بصورت ❶ و ❷ و ❸ علامت گذاری نموده‌ایم (به شکل (۲ - ۲) که تکرار شکل (۱ - ۲) بوده و برای تأکید گره‌ها میباشد مراجعه کنید).

واضح است که میتوان بین گره‌ها سه ولتاژ «جفت گره[۱]» تعریف نمود که بترتیب v_{13} ، v_{23} و v_{12} هستند. دراینجا این ولتاژها بترتیب ولتاژ شاخه‌هایی‌هستند که گره‌های ❶ و ❸ ، ❷ و ❸ ، ❶ و ❷ رابهم‌وصل‌میکنند. از KVL میدانیم که مجموع ولتاژها درهرحلقه بایستی مساوی‌صفر باشد، بنابراین KVL یک محدودیت خطی میان ولتاژهای سه جفت گره ملزم‌میدارد. اگر $v_{13}=v_1$ و $v_{23}=v_2$ تعیین‌شود، $v_{12}=v_1-v_2$ خواهد بود. معمولاً یک گره بنام «گره مبنا[۲]» انتخاب میشود (بعضی اوقات گره مأخذ[۳] ویا زمین هم خوانده شده و باعلامت ⏚ مشخص میگردد). دراینصورت ولتاژ سایرگره‌ها نسبت باین گره مبنا را «ولتاژهای گره‌ها[۴]» (یا ولتاژهای گره‌ها نسبت به مأخذ) مینامند. درمورد اخیر گره ❸ بعنوان مبنا بوده و ولتاژهای گره‌ها v_1 و v_2 میباشند.



شکل ۲-۲- مدار شکل (۱-۲) مجدداً رسم شده است تا علامت گذاری گره که اولین قدم تجزیه وتحلیل گره است تأکید شود.

---

۱ — Node-pair
۲ — Reference node
۳ — Datum node
۴ — Node voltages

واضح است که سایر ولتاژهای جفت گره‌ها نیز برحسب ولتاژهای v_1 و v_2 با استفاده‌ازقانون KVL قابل بیان هستند . بنابراین درحالت کلی اگر مداری دارای $n+1$ گره باشد، تعداد n ولتاژ گره بایستی‌مشخص گردد زیرا بادانستن‌آنها هرولتاژجفت گره وبویژه ولتاژهای شاخه‌ها بلافاصله تعیین میگردند . دربالا فقط از قانون ولتاژ کیرشف استفاده نمودیم ولی البته برای پیدا نمودن تمام ولتاژها و جریانهای شاخه‌ها و بخصوص پاسخ مطلوب ، لازم است از قانون جریان کیرشف نیز استفاده شود .

حال استنباط‌های قانون‌جریان کیرشف را دراین مدار بررسی میکنیم. البته برای‌اینکار میتوان سه معادله گره را برای گره‌های ❶ و ❷ و ❸ نوشت، معهذا واضح است که یکی از سه معادله‌اضافی[1] خواهد بود، زیرا با افزودن هردومعادله، معادله سوم نتیجه خواهد شد که ممکن‌است فقط دریک ضریب ۱ - با آن اختلاف داشته باشد . بنابراین برای این مدارسه گرهی ، KCL تنهادومعادله ناپسته گره بما خواهدداد. بآسانی میتوان نشان‌داد که درمداری با $(n+1)$ گره ، تنها n معادله ناپسته گره وجود خواهد داشت (البته این مطلب درفصل دهم نشان داده خواهد شد) . برای صرفه‌جویی در وقت ، بجای‌اینکه معادلات گره‌را صریحاً برحسب‌جریانهای‌شاخه‌ها بنویسیم، ازمعادلات شاخه‌ها استفاده نموده وجریانهارا مستقیماً برحسب ولتاژهای شاخه‌ها بیان‌میکنیم. همچنین تمام‌ولتاژهای شاخه‌ها را نیزبرحسب‌ولتاژهای گره‌هابیان‌خواهیم کرد. نتیجه نهایی، بدست‌آوردن دومعادله برای دوولتاژ نامعلوم گره‌ها خواهد بود و باین ترتیب میتوانیم ولتاژهای هردوگره ویا هریک از آنها را بدست آوریم .

حال‌میخواهیم باتوجه به‌معادلات اجزاء شاخه‌ها وهمچنین رابطه $v_{12}=v_1-v_2$ ، دومعادله گره را برای مثال موردبحث بنویسیم. با استفاده از KCL برای گره ❶ داریم،

$$C\frac{dv_1}{dt}+\frac{v_1}{R_1}+I_0+\frac{1}{L}\int_0^t (v_1-v_2)\,dt'=i_s(t) \qquad (۲-۱)$$

و برای گره ❷ ،

$$-I_0+\frac{1}{L}\int_0^t (v_2-v_1)\,dt'+\frac{v_2}{R_2}=0 \qquad (۲-۲)$$

---
۱ – Redundant

شرط اولیه اضافی داده شده چنین است :

$$v_1(o) = V_0 \qquad (۲-۳)$$

معادلات (۱ - ۲) و (۲ - ۲) دو معادلـه گره هستند که درآنها فقط دو ولتاژ گره v_1 و v_2 بعنوان متغیر ظاهر میشوند . معادلـه (۳ - ۲) یک شرط اولیه لازم برای مشخص نمودن یکتا جواب معادلات (۱ - ۲) و (۲ - ۲) میباشد .

هدف مسأله ما بدست آوردن یک معادلـه دیفرانسیل است که v_2 متغیر وابسته آن باشد .در فصل چهاردهم یک روش اصولی برای بدست آوردن معادلـه دیفرانسیل از روی یک دستگـاه معادلات انتگـرال - دیفـرانسیل[۱] ارائـه خواهد شد . درمورد مثال فوق ، ساده‌ترین روش‌اینست که ابتدا دومعادله (۱ - ۲) و (۲ - ۲) را باهم جمع کنیم تا داشته باشیم :

$$C\frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} = i_s \qquad (۲-۴)$$

با مشتق گیری از معادله (۲ - ۲) بدست می‌آید :

$$\frac{1}{L}v_2 - \frac{1}{L}v_1 + \frac{1}{R_2}\frac{dv_2}{dt} = o$$

و یا :

$$v_1 = v_2 + \frac{L}{R_2}\frac{dv_2}{dt} \qquad (۲-۵)$$

با مشتق گیری از (۵ - ۲) داریم :

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt} + \frac{L}{R_2}\frac{d^2v_2}{dt^2} \qquad (۲-۶)$$

معادله‌دیفرانسیل‌برای v_2 ازجایگذاری (۵ - ۲) و (۶ - ۲) در (۴ - ۲) بدست می‌آید . بنابراین ،

---

۱ — Integrodifferential equations

$$LC\,\frac{d^2 v_2}{dt^2}+\left(R_2 C+\frac{L}{R_1}\right)\frac{dv_2}{dt}+\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)v_2=R_2\, i_s \qquad (2-7)$$

شرایط اولیه لازم برای یکتا مشخص نمودن جواب (۷ - ۲) را میتوان از معادله (۳ - ۲) و معادلات اصلی (یا معادل آنها) با قراردادن $t=o$ بدست آورد+ . از (۲ - ۲) بدست می‌آوریم :

$$v_2(o)=R_2 I_0 \qquad (2-8)$$

و از (۵ - ۲) داریم :

$$\frac{dv_2}{dt}(o)=\frac{R_2}{L}\,[v_1(o)-v_2(o)]=\frac{R_2}{L}\,(V_0-R_2 I_0) \qquad (2-9)$$

تمرین - برای مدار شکل (۲ - ۲) معادله دیفرانسیلی که v_1 و i_s را بهم ربط میدهد بدست آورید . شرایط اولیه لازم برای مشخص نمودن جواب یکتای معادله را نیز مشخص سازید .

۲-۲- تجزیه و تحلیل مش

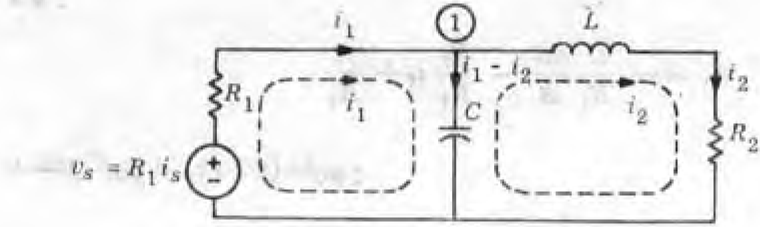
روش دیگری برای تجزیه و تحلیل یک شبکه کلی برپایه نوشتن معادلات مش[1] استوار است . مدار شکل (۱ - ۲) را که با استفاده از مدار معادل تونن ترکیب موازی i_s و مقاومت ، درشکل (۳ - ۲) دوباره رسم شده است درنظر میگیریم . داریم :

$$v_s=R_1\, i_s \qquad (2-10)$$

جریان درمش ۱ را (که شامل v_s و R_1 و C میباشد) با i_1 و جریان درمش ۲ را (که شامل C و L و R_2 میباشد) با i_2 مشخص میکنیم . جریان واقعی شاخه‌های منبع v_s و مقاومت R_1 برابر i_1 است و جریان شاخه‌های شامل سلف L و مقاومت R_2 برابر i_2 میباشد. جریان شاخه شامل خازن C ، مجموع جبری دوجریان مش، یعنی i_1-i_2 میباشد . این موضوع با بکار بردن KCL درگره ❶ نیز آشکار است .

+ فرض میشود که i_s تابع ضربه و یا تابع ویژه دیگری نمیباشد. اگر i_s شامل ضربه در $t=o$ باشد بایستی دقت بیشتری نمود . دراین مورد میتوان ازمعادلات ، بین $t=o_-$ تا $t=o_+$ انتگرال گرفت تا شرایط اولیه جدیدی در $t=o_+$ بدست آید .

1 – Mesh



شکل ۳-۲- مدار شکل (۱ - ۲) برای تجزیه و تحلیل مش مجدداً رسم شده است . توجه کنید که منبع جریان شکل (۱ - ۲) با استفاده ازمدار معادل تونن با منبع ولتاژ تعویض شده است.

حال KVL را درمشها بکار میبریم . در روابط KVL ، ولتاژ شاخه ها را صریحاً با استفاده ازمعادلات شاخه ها برحسب i_1 و i_2 بیان‌میداریم‌وبنابراین برای مش ۱ داریم :

$$R_1 i_1 + V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t (i_1 - i_2)\, dt' = v_s(t) \qquad (۲-۱۱)$$

و برای مش ۲ ،

$$L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t (i_2 - i_1)\, dt' = 0 \qquad (۲-۱۲)$$

شرط اولیه اضافی داده شده چنین است :

$$i_2(0) = I_0 \qquad (۲-۱۳)$$

معادلات (۱۱ - ۲) و (۱۲ - ۲) معادلات مش مدارمیباشند که درآنها تنها دوجریان مش i_1 و i_2 بعنوان متغیر داده میشوند. معادله (۲-۱۳) شرط اولیه لازم برای مشخص نمودن جواب بطور یکتا میباشد . برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل با متغیر خروجی v_2 تنها کافی است معادله دیفرانسیل‌مربوط به i_2 را بدست آوریم. ساده‌ترین راه ، جمع کردن دو معادله (۱۱ - ۲) و (۱۲ - ۲) است تا بدست آوریم :

$$R_1 i_1 + L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = v_s$$

و یا :

$$i_1 = -\frac{L}{R_1}\frac{di_2}{dt} - \frac{R_2}{R_1}i_2 + \frac{v_s}{R_1} \qquad (2-14)$$

با مشتق گیری از (۱۲ - ۲) داریم :

$$L\frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} - \frac{i_1}{C} = 0 \qquad (2-15)$$

با جایگذاری (۱٤ - ۲) در (۱۵ - ۲) بدست می‌آید :

$$LC\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left(R_2 C + \frac{L}{R_1}\right)\frac{di_2}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)i_2 = \frac{v_s}{R_1} \qquad (2-16)$$

شرایط اولیه از رابطه (۱۳ - ۲) بدست می‌آید که چنین است :

$$i_2(0) = I_0 \qquad (2-17)$$

با قراردادن $t=0$ از (۱۲ - ۲) بدست می‌آید :

$$\frac{di_2}{dt}(0) = \frac{1}{L}(V_0 - R_2 I_0) \qquad (2-18)$$

چون $v_2 = R_2 i_2$ و $v_s = R_1 i_s$ ، معادله برحسب v_2 و i_s چنین است :

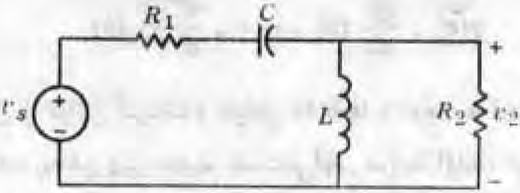
$$LC\frac{d^2 v_2}{dt^2} + \left(R_2 C + \frac{L}{R_1}\right)\frac{dv_2}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_2 = R_2 i_s \qquad (2-19)$$

وشرایط اولیه چنین میباشند :

$$v_2(0) = R_2 I_0 \qquad (2-20)$$

$$\frac{dv_2}{dt}(0) = \frac{R_2}{L}(V_0 - R_2 I_0) \qquad (2-21)$$

مثال فوق این حقیقت کلی را نشان میدهد که برای هرمدار خطی تغییرناپذیر با زمان



شکل ۴-۲- مدار برای تمرین تجزیه و تحلیل مش وتجزیه و تحلیل گره که درآن v_s ورودی و v_2 پاسخ میباشد .

که دارای یک ورودی و یک خروجی باشد همیشه میتوان یک معادله دیفرانسیل بطریقی نوشت که خروجی را به ورودی ارتباط دهد . البته هرچه مدار پیچیده‌تر باشد ، کار بیشتری لازم خواهدبود. اماهمانطور که درفصل های دهم و سیزدهم خواهیم دید برای این نوع مدارها روش‌های منظمی وجود دارد که ساده‌ترین معادله دیفرانسیلی که خروجی را به ورودی ارتباط میدهد بما خواهد داد .

تمرین- بابکاربردن تجزیه وتحلیل مش وتجزیه وتحلیل گره ، معادله دیفرانسیلی برای ولتاژ v_2 را در مدار شکل (۴ - ۲) بنویسید .

۳- نمایش ورودی - خروجی (معادله دیفرانسیل مرتبه n ام)

بطور کلی، برای مدارهای خطی تغییرناپذیربا زمان بایک ورودی ویک خروجی، رابطه بین خروجی و ورودی میتواند بایک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام باضرایب ثابت بیان شود، بنابراین،

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = b_0 \frac{d^m w}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} w}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m w \qquad (۳-۱)$$

که درآنجا y نمایشگرخروجی و w نماینده ورودی میباشد. ثابت های a_1 ، a_2 ، ... ، a_n و b_0 ، b_1 ، ... ، b_m به مقادیر عناصر و توپولوژی مدار بستگی دارند. شرایط اولیه چنین میباشند+ :

+ چنانکه بعداً خواهیم دید ، این مطلب صرفاً وقتی صحیح است که جمله $\frac{d^m w}{dt^m}$ شامل تابع ضربه $\delta(t)$ و یا هیچیک ازمشتقهای آن نباشد .

$$y(o)\ ,\ \frac{dy}{dt}(o)\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(o)$$

معادله دیفرانسیل از قوانین کیرشف و خواص شاخه‌ها با توجه به تجزیه و تحلیل های گره ومش همانطورکه دربخش پیش‌دیدیم بدست‌می‌آید. شرایط اولیه، ازحالت‌اولیه داده شده مدار و همچنین معادلات مدار تعیین میشوند. روش کلی برای نوشتن معادلات دیفرانسیل مرتبه n ام و تعیین شرایط اولیه درفصل های‌دهم‌ویازدهم‌وسیزدهم مورد بحث قرارخواهد گرفت. درحال حاضر فرض میکنیم که ارتباط بین ورودی وخروجی بصورت معادله (۳-۱) بیان شده و میخواهیم انواع پاسخ ها را مورد مطالعه قرار دهیم.

۳-۱- پاسخ ورودی صفر

پاسخ ورودی صفر عبارتست از پاسخ مدار وقتی که ورودی آن بطور متحد برابر صفر باشد. بنابراین سمت راست معادله(۳-۱) بطور متحد برابر صفر خواهد بود وبعبارت‌دیگر، معادله دیفرانسیل همگن میباشد. چند جمله‌ای مشخصه[۱] این معادله دیفرانسیل یک چند جمله‌یی از درجه n برحسب s میباشد:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

و صفرهای[۲] این چند جمله‌یی، s_i، $i=1, 2, \ldots, n$ «فرکانس های طبیعی متغیر شبکه y» نامیده میشوند. بخوبی معلوم است که اگر تمام فرکانس‌های طبیعی متمایز باشند، جواب معادله همگن چنین خواهد بود:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t} \qquad (۳-۲)$$

که‌درآنجا ثابت‌های k_i ازشرایط اولیه‌داده شده تعیین‌میشوند. هرگاه بعضی‌ازفرکانس‌های طبیعی مکرر شوند، معادله (۳-۲) را بایستی بطریقی اصلاح نمود تا توانهای t نیز چنانکه درضمیمه پ بیان شده‌است درآن وارد گردد. بعنوان مثال، اگر s_1، صفر مرتبه سوم چند

۱ — Characteristic polynomial ۲ — Zeros

جمله‌یی مشخصهٔ معادله دیفرانسیل باشد ، معادله (۲-۳) شامل :

$$k_1 e^{s_1 t} + k_2 t e^{s_1 t} + k_3 t^2 e^{s_1 t}$$

خواهد بود .

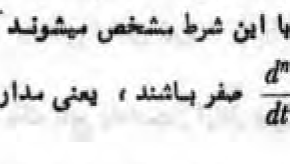
۲-۳- پاسخ حالت صفر

بطور کلی، پاسخ حالت صفر برای متغیر y درمعادله (۱ - ۲) بشکل زیرمیباشد (مجدداً فرض میشود تمام فرکانس های طبیعی متمایز باشند) .

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t} + y_p(t) \qquad (۳-۲)$$

که درآن $y_p(t)$ «یک» پاسخ خصوصی معادله (۱-۲) بوده و تنها به ورودی w بستگی خواهد داشت . n ثابت k_i با این شرط مشخص میشوند که تمام شرایط اولیه $y(o_-)$ ، $\frac{dy}{dt}(o_-)$ ، ... ، $\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(o_-)$ صفر باشند ، یعنی مدار درست درلحظهٔ قبل از اعمال ورودی درحالت صفر باشد .

مثال- مدار RC شکل (۱-۳) را درنظر بگیرید که درآن v_s ورودی و جریانی که از مقاومت میگذرد ، یعنی i ، خروجی است . درست درلحظهٔ قبل از اعمال ورودی خازن بی‌بار میباشد . از لحظه $t=o$ ببعد ، ورودی $v_s(t)=V_m \cos t$ به مدار اعمال میشود . بعبارت دیگر ، میتوان ازتابع پله $u(\cdot)$ استفاده کرده و برای تمام زمانهای t ، $v_s(t)=u(t)V_m \cos t$ قرار داد . ازقانون KVL بدست می‌آوریم :



شکل ۱-۳- یک مدار ساده RC

$$(۳-۴) \qquad Ri(t)+\frac{۱}{C}\int_{o}^{t} i(t')\,dt'=v_s(t)=u(t)\,V_m \cos t$$

و یا :

$$(۳-۵) \qquad R\frac{di}{dt}+\frac{۱}{C}\,i=\frac{dv_s}{dt}$$

توجه شود که (۵-۳) بصورت (۱-۳) میباشد. حال سمت‌راست (۵-۳) را محاسبه می کنیم. ازاینرو ،

$$\frac{dv_s}{dt}=V_m\frac{du}{dt}\cos t+V_m u(t)\frac{d}{dt}\cos t=V_m\delta(t)-V_m u(t)\sin t$$

وجود $V_m\delta(t)$ درسمت‌راست (۵-۳) موجب میشود که‌جریان i درلحظه $t=o$ ناپیوسته[۱] گردد . درحقیقت برای اینکه مقدار سمت چپ معادله (۵-۳) ضربه $V_m\delta(t)$ سمت راست رامتعادل کند ، $R\left(\frac{di}{dt}\right)$ بایستی شامل ضربه $V_m\delta(t)$ باشد و بدین‌جهت i شامل $\left(\frac{V_m}{R}\right)u(t)$ خواهد بود که یک تابع پله‌است. ازنظر فیزیکی، این‌مطلب بسهولت تشریح میگردد ، چون شکل موج ولتاژ $v_s(۰)$ کراندار است ، ولتاژ دوسرخازن C و مقاومت R کراندار بوده و درنتیجه جریان i کراندار خواهد بود و بالاخره بار و ولتاژ دوسرخازن C پیوسته میباشد. ازاین‌رو ، $v_C(o_-)=v_C(o_+)$ و با استفاده از KVL داریم که :

$$v_R(o_+)=v_s(o_+)-v_C(o_+)=V_m$$

بعبارت دیگر ،

$$i(o_+)=\frac{v_R(o_+)}{R}=\frac{V_m}{R}$$

بنابراین مشاهده میشود که اگرچه قبل از وصل کردن منبع ولتاژ v_s (یعنی در $t=o_-$) شرط اولیه صفراست، $i(o_-)=o$ ، ولی در $t=o_+$ شرط اولیه صفر نبوده و به‌ورودی بستگی خواهد داشت !

---

۱ — Discontinuous

لازم است متذکر شویم که جمله y_p در (۳-۳) میتواند «هر» پاسخ خصوصی باشد، یعنی بموجب تعریف، هرجوابی که درمعادله دیفرانسیل ناهمگن (۳-۱) صدق نماید. بعضی پاسخ های خصوصی خیلی راحت‌تر از سایرین هستند. برای ورودی پله، y_p برابر یک ثابت اختیار میشود+. برای ورودی سینوسی، y_p بصورت یک سینوسی با همان فرکانس انتخاب میشود، وبرای یک ورودی که یک چندجمله‌یی از t باشد، y_p بصورت یک چند جمله‌یی از t باهمان‌درجه انتخاب میشود (به‌ضمیمه پ مراجعه‌گردد). درفصل بعد برای حالتی که ورودی سینوسی است، بطور مفصل بحث خواهیم نمود.

۳-۳- پاسخ ضربه

محاسبه پاسخ ضربه تا اندازه‌یی ظریفترمیباشد زیرا سمت راست (۳-۱) شامل ضربه‌ها و مشتقهای ضربه‌ها خواهد بود. دراین زیر بخش با استفاده از مثالی، محاسبه مستقیم پاسخ ضربه ازمعادله دیفرانسیل را تشریح خواهیم کرد. دربخش ٤ نشان خواهیم داد که تعیین پاسخ حالت صفر برای یک ورودی دلخواه، تنها به‌اطلاع از پاسخ‌ضربه بستگی دارد و بدین‌جهت بسیارمهم‌است که از پاسخ ضربه‌آسودگی خیال پیدا کرده و روش‌محاسبه آنرا بخوبی فراگیریم.

حال میخواهیم نشان دهیم که چگونه میتوان پاسخ ضربه را مستقیماً از روی معادله دیفرانسیل (۳-۱) بدست آورد:

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_n y=b_0 w^{(m)}+b_1 w^{(m-1)}+\cdots+b_m w$$

با شرایط اولیه:

$$y(0_-)=y^{(1)}(0_-)=y^{(2)}(0_-)=\cdots=y^{(n-1)}(0_-)=0 \qquad (۳-٦)$$

برای سهولت‌طرزنمایش، بالانویس[۱] (n) را برای نمایش $\frac{d^n}{dt^n}$ بکار برده‌ایم. واضح است

+ اگر درمعادله دیفرانسیل، درجه m ازدرجه n بزرگتر باشد، آنگاه برای ورودی پله، y_p علاوه بریک مقدار ثابت، بایستی شامل ضربه و بعضی مشتقهای آن نیز باشد. این موضوع را بعداً بررسی خواهیم کرد.

۱ — Superscript

که اگر ورودی w یک ضربه واحد باشد، سمت راست معادله شامل تابع ضربه ومشتقهای متوالی آن خواهد بود. مشتقهای متوالی تابع ضربه را گاه «توابع ویژه[۱]» نیز میخوانند. از نظر نمایش داریم :

$$\frac{du}{dt}=\delta \qquad \text{و} \qquad \int_{-\infty}^{t}\delta(t')\,dt'=u(t)$$

$$\frac{d\delta}{dt}=\delta^{(1)} \qquad \text{و} \qquad \int_{-\infty}^{t}\delta^{(1)}(t')\,dt'=\delta(t)$$

$$\frac{d\delta^{(1)}}{dt}=\delta^{(2)} \qquad \text{و} \qquad \int_{-\infty}^{t}\delta^{(2)}(t')\,dt'=\delta^{(1)}(t)$$

....

$$\frac{d\delta^{(n)}}{dt}=\delta^{(n+1)} \qquad \text{و} \qquad \int_{-\infty}^{t}\delta^{(n+1)}(t')\,dt'=\delta^{(n)}(t)$$

تعیین مستقیم پاسخ ضربه h براین پایه قرارگرفته است که توابع ویژه سمت راست باید با توابع‌ویژه سمت چپ‌معادله(۱-۳)متعادل باشند. چون در (۱-۳) ، $w(t)=\delta(t)$ میباشد، بالاترین مرتبه تابع ویژه درسمت راست برابر $\delta^{(m)}$ بوده وچگونگی پاسخ ضربه h ، به‌مقادیر نسبی m و n بستگی خواهد داشت.

۱- $n>m$ (حالت مناسب[۲]). پاسخ‌ضربه h شامل هیچ نوع تابع‌ویژه‌ای نیست، اما چنانکه (۱-۳) لازم میدارد $\frac{d^nh}{dt^n}$ شامل $\delta^{(m)}$ میباشد.

۲- $n=m$. پاسخ ضربه h شامل یک ضربه $b_0\delta$ خواهد بود (دراینجا ، b_0 ضریب $w^{(m)}$ درمعادله (۱-۳) میباشد).

---

۱ — Singular functions ۲ — Proper case

۳- $n<m$. پاسخ ضربه h بیش ازیک تابع ویژه را شامل میگردد و ضریبی که برای هرتابع ویژه تعیین میشود بسهولت از متعادل نمودن دوطرف معادله حاصل میگردد .

دربحث جاری، خود را برای حالتی که $n>m$ میباشد محدود خواهیم کرد (حالت مناسب) . یادآوری‌میکنیم که بموجب تعریف، تابع ضربه $\delta(t)$ برای تمام زمانهای $t>o$ بطور متحد مساوی صفراست و درنتیجه مشتقهای متوالی ضربه ، یعنی توابع ویژه نیز دارای همین خاصیت خواهند بود. بنابراین برای ورودی ضربه واحد ، سمت راست معادله(۱-۳) برای $t>o$ بطور متحد مساوی صفر است و درنتیجه تا زمانیکه $t>o$ موردنظر میباشد ، پاسخ ضربه، معادل پاسخ ورودی صفرخواهد بود. توابع ویژه درسمت راست (۱ - ۳) اساساً شرایط اولیه در $t=o_+$ را مشخص‌میکنند، یعنی شرایطی، درست لحظه‌یی پس از اعمال ضربه میباشند. این‌شرایط چنین هستند:

$$h(o_+) \ , \ h^{(1)}(o_+) \ , \dots , \ h^{(n-1)}(o_+)$$

بنابراین ، تا زمانیکه $t>o$ موردنظر میباشد، میتوان پاسخ ضربه h را بهمان‌صورت جواب معادلـه همگن برحسب n ثـابت اختیاری k_i بیان نمود . با فرض اینکـه تمام ریشه‌های معادله مشخصه (۱-۳) متمایز باشند ، خواهیم داشت :

$$h(t)= \sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t} \qquad t>o \tag{۳-۷}$$

چون بموجب قـرارداد ، برای $t<o$ ، $h(t)=o$ میباشد و چون h هیچ تابع ویـژه‌یی را شامل نمیگردد میتوان نوشت (برای تمام t) :

$$h(t)=\Big(\sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t}\Big)u(t) \tag{۳-۸}$$

کاری که باقی میماند ، گذاشتن (۸-۳) درمعادله دیفرانسیل (۱-۳) و محاسبه n ثابت k_i میباشد . البته بایستی درمشتق گیری توابع ویژه دقت کافی مبذول گردد .

مثال- فرض کنید که معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده پاسخ y به‌ورودی w برای یک مدار داده شده بصورت زیر باشد :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+3y=\frac{dw}{dt}+2w \qquad (۳-۹)$$

میخواهیم پاسخ ضربه h این مدار را بدست آوریم. توجه کنید درمعادله (۳-۹)، $n=2$ و $m=1$ میباشد، ازاینرو این حالت یک حالت مناسب میباشد و درنتیجه پاسخ ضربه هیچ نوع تابع ویژه‌یی را شامل نمیگردد. ریشه‌های معادله مشخصهٔ معادله دیفرانسیل (۳-۹) برابر، $s_1=-1$ و $s_2=-3$ است. بنابراین میتوان پاسخ ضربه را بصورت زیر نشان داد:

$$h(t)=(k_1e^{-t}+k_2e^{-3t})\,u(t) \qquad (۳-۱۰)$$

با یکمرتبه مشتق گیری از h بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} h^{(1)}(t)&=(k_1e^{-t}+k_2e^{-3t})\,\delta(t)+(-k_1e^{-t}-3k_2e^{-3t})\,u(t)\\ &=(k_1+k_2)\,\delta(t)+(-k_1e^{-t}-3k_2e^{-3t})\,u(t)\end{aligned}$$

با یکمرتبه دیگر مشتق گیری بدست میآید:

$$h^{(2)}(t)=(k_1+k_2)\,\delta^{(1)}(t)+(-k_1-3k_2)\,\delta(t)+(k_1e^{-t}+9k_2e^{-3t})\,u(t)$$

با گذاشتن $w=\delta(t)$ و $y=h(t)$ درمعادله (۳-۹) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} h^{(2)}(t)+4h^{(1)}(t)+3h(t)&=(k_1+k_2)\,\delta^{(1)}(t)+(3k_1+k_2)\,\delta(t)\\ &=\delta^{(1)}(t)+2\delta(t)\end{aligned}$$

حال ضرایب $\delta^{(1)}(t)$ و $\delta(t)$ را در دوطرف مساوی هم قرار میدهیم:

$$k_1+k_2=1$$
$$3k_1+k_2=2$$

بنابراین ضرایب k_1 و k_2 چنین خواهند بود:

$$k_1=\frac{1}{2} \qquad \text{و} \qquad k_2=\frac{1}{2}$$

درنتیجه پاسخ ضربه ازمعادله (۱۰-۳) بصورت زیر بدست می‌آید :

$$h(t) = \frac{۱}{۲}(e^{-t} + e^{-۳t})\,u(t)$$

تمرین - پاسخ ضربه برای‌متغیر y راکه با معادلات دیفرانسیل زیرمشخص شده است بدست آورید :

$$\frac{dy}{dt} + ۲y = w$$

$$\frac{d^۲y}{dt^۲} + \frac{dy}{dt} + y = \frac{dw}{dt} + w$$

$$\frac{d^۳y}{dt^۳} + ۶\frac{d^۲y}{dt^۲} + ۱۱\frac{dy}{dt} + ۶y = \frac{d^۲w}{dt^۲} + w$$

٤- پاسخ به یك ورودی دلخواه

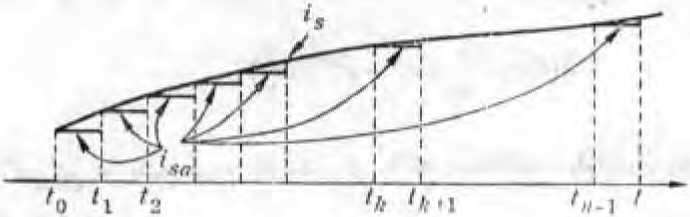
اکنون میدانیم که چگونه میتوان پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان را محاسبه نمود. دراین بخش نشان‌خواهیم داد که با استفاده از پاسخ ضربه این مدار میتوان پاسخ حالت صفر را برای هرنوع ورودی‌دلخواه بدست‌آورد. دراین محاسبه « خطی‌بودن[۱] و تغییرناپذیری بازمان[۲] » دوخاصیت بسیار اساسی برای بدست آوردن نتایج میباشند.

٤-۱- بدست‌آوردن انتگرال کانولوشن

دراینجا میخواهیم پاسخ حالت‌صفر $v(\cdot)$ یک مدارخطی‌تغییرناپذیر بازمان‌را به‌یک ورودی $i_s(\cdot)$ محاسبه کنیم . فرض میکنیم که ورودی درلحظه t_0 به‌مدار اعمال شود و مدار در زمان t_0 درحالت صفر قرارداشته باشد، وبنابراین‌میتوان برای $t < t_0$ ، $i_s(t) = o$ را درنظر گرفت .

مسأله ، محاسبه $v(t)$ ، یعنی‌پاسخ v درلحظه t برای‌هرزمان $t > t_0$ است، بافرض اینکه پاسخ ضربه h مدار برای ما معلوم است . بعنوان قدم اول، ورودی i_s را با تقریبی

۱ — Linearity ۲ — Time invariance



شکل ۱-٤- نمایش تقریبی i_s توسط i_{sa} که از پالسهای با عرض یکسان و متوالی تشکیل شده است .

بشرح زیر درنظر میگیریم . همانطورکه درشکل (٤-١) نشان داده شده است فاصله[۱] (t_0 , t) را به تعداد زیادی، مثلاً n فاصله کوچک با طول $\triangle$ تقسیم مینمائیم . نقاط این زیرقسمتها را t_1 ، t_2 ، ... ، t_k ، t_{k+1} ، ... ، t_{n-1} مینامیم . بنابراین :

$$t_1-t_0=t_2-t_1=\cdots=t_{k+1}-t_k=\cdots=\triangle$$

میباشد . توابع پله i_{sa} را با تقریب آنچنان به منحنی i_s ارتباط میدهیم که عرض منحنی تقریبی $i_{sa}(\cdot)$ درنقطه‌یی بطول t' مطابق روابط زیر باشد :

$$(٤-١)\quad i_{sa}(t')=\begin{cases} i_s(t_0) & t_0\leqslant t'<t_1\\ i_s(t_1) & t_1\leqslant t'<t_2\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ i_s(t_k) & t_k\leqslant t'<t_{k+1}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ i_s(t_{n-1}) & t_{n-1}\leqslant t'<t_n=t \end{cases}$$

بویژه توجه کنید که t' یک زمان دلخواه درفاصله $[t_0 , t]$ میباشد . ارتباط شکل موج $i_{sa}(\cdot)$ به شکل موج داده شده $i_s(\cdot)$ درشکل(٤-١) نشان داده شده است . واضح است که (برای بسیاری‌ازانواع ورودی‌ها) وقتی $n \to \infty$ ، (بنابراین $\triangle \to 0$) اختلاف میان پاسخ مدار به $i_s(\cdot)$ و $i_{sa}(\cdot)$ نیز بسمت صفر میل میکند (بآسانی میتوان نشان

۱ — Interval

دادکه این موضوع برای تمام i_s های پیوسته تکه‌ای[1] صادق است) .

توجه کنید که تقریب پله‌ای i_{sa} را میتوان بصورت مجموعی از پالس های مستطیلی درنظر گرفت و این امر درشکل (۲-٤) نشان داده شده است . تمام پالسها دارای عرض یکسان $\triangle$ بوده ، ولی ازلحاظ ارتفاع ومحل‌قرارگرفتن در روی محور زمان متفاوت‌میباشند. بیادآورید که درفصل دوم تابع پالس $p_\triangle$ را بصورت زیر تعریف نمودیم .

$$p_\triangle(t') = \begin{cases} 0 & t' \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\triangle} & 0 < t' < \triangle \\ 0 & \triangle \leqslant t' \end{cases}$$

هرگاه‌این‌تابع‌پالس $p_\triangle$ را بمیزان t_k بسمت«راست» انتقال‌دهیم، تابع پالس‌منتقل‌شده‌ای با نمایش زیر بدست می‌آید :

$$p_\triangle(t'-t_k) = \begin{cases} 0 & t' \leqslant t_k \\ \dfrac{1}{\triangle} & t_k < t' < t_k + \triangle \\ 0 & t_k + \triangle \leqslant t' \end{cases}$$

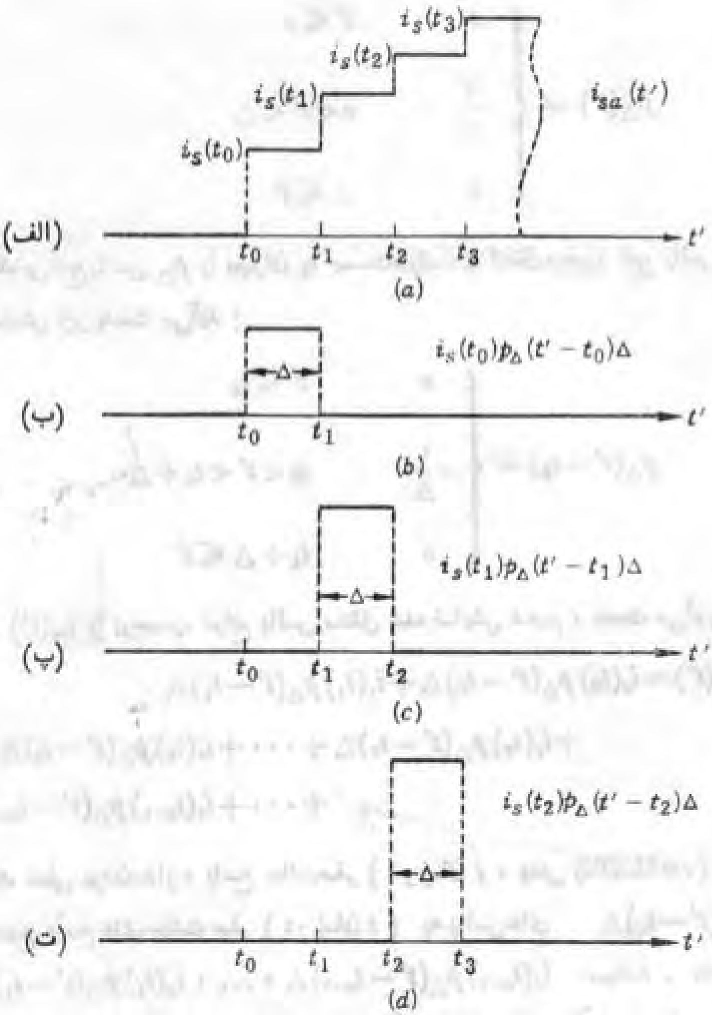
اگر $i_{sa}(t')$ را برحسب توابع پالس منتقل شده نمایش دهیم ، بدست می‌آوریم :

$$\begin{aligned} i_{sa}(t') = {} & i_s(t_0)\, p_\triangle(t'-t_0)\triangle + i_s(t_1)\, p_\triangle(t'-t_1)\triangle \\ & + i_s(t_2)\, p_\triangle(t'-t_2)\triangle + \cdots + i_s(t_k)\, p_\triangle(t'-t_k)\triangle \\ & + \cdots + i_s(t_{n-1})\, p_\triangle(t'-t_{n-1})\triangle \end{aligned} \tag{٤-۲}$$

بعلت خطی بودن‌مدار ، پاسخ حالت‌صفر (در زمان t ، یعنی زمان‌مشاهده) به i_{sa} ، برابر مجموع پاسخ های حالت صفر (در زمان t) به پالس‌های $i_s(t_0)\, p_\triangle(t'-t_0)\triangle$ ، $i_s(t_1)\, p_\triangle(t'-t_1)\triangle$ ، ... ، $i_s(t_{n-1})\, p_\triangle(t'-t_{n-1})\triangle$ میباشد . بنابراین ، مسأله به‌محاسبه پاسخ‌حالت‌صفرمدار (درزمان t) بیکی ازپالس‌ها مثلاً پالس $(k+1)$ ام، یعنی

۱ — Piecewise continuous

Δ $i_s(t_k)\,p_\Delta(t'-t_k)$ منجر میشود . هرگاه پاسخ حالت صفر مدار به $p_\Delta(0)$ را برابر $h_\Delta(0)$ بنامیم، با استفاده از خواص خطی بودن و تغییرناپذیری بازمان نتیجه میشود که پاسخ حالت صفر مدار به پالس $i_s(t_k)\,p_\Delta(t'-t_k)\Delta$ در زمان مشاهده t ، برابر $i_s(t_k)h_\Delta(t-t_k)\Delta$ خواهد بود . آرگومان h_Δ برابر $t-t_k$ است ، زیرا پالس $p_\Delta(t'-t_k)$ در زمان t_k بمدار اعمال شده است . بنابراین در زمان مشاهده که آنرا t



شکل ۲-۴- تابع تقریبی i_{sa} شکل (الف) میتواند بعنوان مجموع پالسهای مستطیلی شکلهای (ب) و (پ) و (ت) وغیره تعبیر شود .

مینامیم ، تنها $t-t_k$ ثانیه از زمان اعمال پالس گذشته است . با تکرار این استدلال برای هریک از پالس های (۴-۲) ، پاسخ حالت صفر برای i_{sa}(۰) چنین بدست می‌آید:

$$i_s(t_0)h_\triangle(t-t_0)\triangle+i_s(t_1)h_\triangle(t-t_1)\triangle$$
$$+\cdots+i_s(t_k)h_\triangle(t-t_k)\triangle+\cdots+i_s(t_{n-1})h_\triangle(t-t_{n-1})\triangle$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1} i_s(t_k)h_\triangle(t-t_k)\triangle \qquad (۴-۳)$$

قدم بعدی میل‌دادن $n\to\infty$ میباشد. چون $t-t_0$ ثابت بوده و $t-t_0=n\triangle$ است وقتی $n\to\infty$ ، درنتیجه $\triangle\to 0$. وقتی $\triangle\to 0$ ، نتایج زیر حاصل میشوند:

۱- تقریب پله‌ای i_{sa}(۰) بصورت ورودی اصلی i_s(۰) درمی‌آید .

۲- پاسخ حالت‌صفر به i_{sa}(۰) همان‌پاسخ حالت‌صفر به i_s(۰) ، یعنی، v(۰) میگردد .

۳- پاسخ حالت صفر $h_\triangle$(۰) به $p_\triangle$(۰) ، همان پاسخ ضربه h میشود .

۴- مجموع موجود در (۴-۳) تبدیل بانتگرال میشود ، بعبارت دیگر ،

$$v(t)=\int_{t_0}^{t} i_s(t')h(t-t')\,dt' \qquad t\geqslant t_0 \text{ برای}$$

این معادله برای هرزمان $t>t_0$ ، « ولتاژ خروجی حالت صفر » در زمان t را که ناشی‌از جریان ورودی i_s در زمان t_0 میباشد بدست میدهد .

« نتیجه » محاسبه « پاسخ حالت صفر » هرمدار خطی تغییرناپذیر بازمان به یک ورودی «دلخواه» منجر میشود به :

۱- تعیین « پاسخ ضربه » h

۲- محاسبه انتگرال :

$$\int_{t_0}^{t} h(t-t')\,i_s(t')\,dt'=v(t) \qquad t\geqslant t_0 \text{ برای} \qquad (۴-۴)$$

که درآنجا t_0 لحظه‌یی است که ورودی i_s به مدار اعمال میشود . این چنین انتگرالی را **انتگرال کانولوشن** مینامند .

قضیه فرعی[۱]- با نتیجه گیری‌مستقیم از (۴-۱) میتوان گفت که شکل‌موج $v(\cdot)$ ، یعنی « پاسخ‌حالت صفر یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان به یک‌ورودی « دلخواه » ، تابع خطی شکل موج ورودی $i_s(\cdot)$ میباشد» . (به تعریف یک تابع خطی درضمیمه الف ومثال ٤ بخش ۳-۲ درهمان ضمیمه مراجعه شود) .

تبصره ۱- هرمقدار جدید t که بخواهیم ولتاژ خروجی $v(t)$ را درآن‌حساب کنیم نیاز به یک انتگرال گیری جدید دارد زیرا ، عبارت زیر انتگرال[۲] نیز به t وابسته است .

تبصره ۲- توجه شود که حد پائین انتگرال ، t_0 ، زمانی است که درآن مدار درحالت صفر میباشد ، وهمچنین توجه کنید که حد بالای انتگرال ، t ، زمانی است که میخواهیم v را درآن حساب کنیم . نباید انتگرال را برای مقادیر بیش از t درحد بالا حساب نمود ، زیرا مقادیری که جریان‌ورودی پس از زمان t دارا میشود ، اثری روی پاسخ مدار در زمان t نخواهد داشت .

تبصره ۳- حال استدلال این بیان را ، که پاسخ حالت صفر در زمان t ، ناشی ازیک‌ضربه‌اعمال‌شده درلحظه t_k ، تابعی از $t-t_k$ میباشد، مجدداً بررسی‌میکنیم. درحالت کلی‌میتوان نوشت، $h(t\ ,\ t_k)$ ، یعنی پاسخ یک‌تابع‌دومتغیره است: t ، یعنی‌لحظه مشاهده و t_k ، یعنی‌لحظه‌یی که ضربه به‌مداراعمال شده‌است. حال «تغییرناپذیر بازمان» بودن‌مدار را بخاطر می‌آوریم، بدین‌معنی که برای هر T ، نتایجی که از انجام آزمایشی در زمان‌حال بدست می‌آید ، کاملاً مساوی همان نتایجی است که از انجام همان آزمایش در T ثانیه بعد بدست خواهد آمد ، و بویژه پاسخ حالت صفر در زمان t ، ناشی از ضربه اعمال شده در زمان t_k ، معادل باپاسخ‌حالت صفر در زمان $t+T$ ، ناشی‌از ضربه اعمال شده درزمان t_k+T خواهد بود و بنابراین :

$$h(t\ ,\ t_k)=h(t+T\ ,\ t_k+T) \qquad \text{برای تمام } T$$

چون این معادله برای تمام مقادیر T برقرار است ، عدد $h(t\ ,\ t_k)$ بطور یکتایی

---

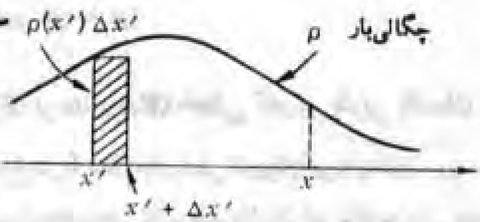
۱ — Corollary ۲ — Integrand

با تفاضل $t-t_k$ مشخص میگردد و درنتیجه نوشتن آن بصورت $h(t-t_k)$ تصدیق‌میشود.

تبصره ٤- مطلب جالبی که ازاین بحث نتیجه میشود اینست که چون درمحاسبه پاسخ حالت صفر توسط (٤-١) هیچگونه استفاده‌یی از نمایش معادله دیفرانسیل مدارهای «فشرده» نشده‌است، بنابراین هرگاه بروشی، پاسخ‌ضربه یک‌مدار گسترده[1] خطی‌تغییرناپذیر با زمان را بدانیم، آنگاه با استفاده از (٤ - ٤) میتوان « پاسخ حالت‌صفر » آنرا به «هر» ورودی دلخواه محاسبه نمود.

٤-٢- مثالی ازانتگرال کانولوشن درفیزیک

شاید تاکنون به‌انتگرال کانولوشن درفیزیک برخورد کرده‌اید. مثلاً فرض کنید که یک‌طناب نایلونی محکم‌داریم که روی آن‌مقداری بارالکتریکی توزیع نموده‌ایم. این‌طناب میتواندتسمه مولدواندوگراف[2] باشد. فرض کنیدمیخواهیم‌پتانسیل الکتروستاتیکی رادرنقطه x ازاین‌طناب، که ناشی‌ازتوزیع باریکنواخت باچگالی‌ρمیباشدودرشکل(٤-٣) نشان‌داده شده است‌حساب کنیم. بار واقع درفاصله کوچک (x' و $x'+\triangle x'$) مساوی $\rho(x')\triangle x'$ میباشد که درآن $\rho(x')$، چگالی‌باردرنقطه x' برحسب کولمب برمتر و $\triangle x'$، طول‌فاصله برحسب متراست. اگر این‌باربرابر ۱ کولمب‌می‌بود، پتانسیل درنقطه x مساوی $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\,|x-x'|}$ میشد (توجه کنید، بعلت اینکه فاصله بین‌دونقطه یک عدد مثبت‌است، کاربرد قدرمطلق $x-x'$ ضروری میباشد). حال با توجه باین واقعیت که پتانسیل دریک نقطه، تابعی



شکل ٣-٤- تشریح پتانسیل الکتروستاتیک مربوط به انتگرال کانولوشن

۱ — Distributed Circuit ۲ — Van de Graaff Generator

خطی از بار میباشد و با استفاده از خاصیت همگنی ، سهم پتانسیل نقطه x ناشی از بار $\rho(x')\triangle x'$ مساویست با :

$$\frac{\rho(x')\triangle x'}{۴\pi\varepsilon_0 \mid x-x' \mid}$$

با استفاده از خاصیت جمع‌پذیری و گذشتن به حد ، پتانسیل زیر بدست می‌آید:

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(x')\,dx'}{۴\pi\varepsilon_0 \mid x-x' \mid} \qquad (۴-۵)$$

هرگاه برای سهولت ،

$$h(r)=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_0 \mid r \mid}$$

باشد ، که درآن r معرف فاصله است ، رابطه(۵-۴) را میتوان بصورت زیر نوشت :

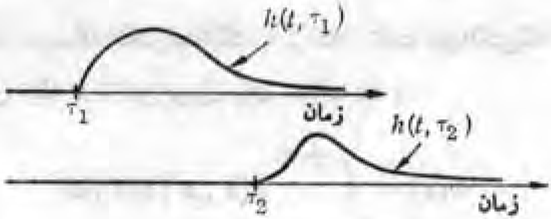
$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(x-x')\,\rho(x')\,dx'$$

تعبیر تابع h چنین است: $h(r)$ پتانسیل ناشی از « واحد » بار الکتریکی درفاصله r ازاین بارمیباشد . انتگرال کانولوشن بایستی از $-\infty$ تا $+\infty$ گرفته شود زیرا هرباری که روی این‌طناب محکم قرارگیرد ، خواه درسمت راست وخواه درسمت چپ نقطه x واقع باشد، درپتانسیل نقطه x سهیم خواهد بود .

۳-۴- تفسیری برمدارهای خطی تغییرپذیر بازمان

تاکنون فقط پاسخ ضربهٔ مدارهای‌خطی تغییرناپذیر بازمان‌را موردمطالعه قرارداده‌ایم . مفهوم‌پاسخ ضربه برای‌مدارهای‌خطی تغییرپذیربازمان نیز بکارمیرود . بموجب‌تعریف، پاسخ حالت صفر به یک ضربه واحد ، پاسخ ضربه نامیده میشود . بعنوان مثال مدارهای خطی تغییرپذیر بازمان ، یک تقویت کننده خطی‌را که ضریب تقویت(۱) آن به کندی بازمان تغییر

۱ — Gain



شکل ٤-٤- پاسخ‌های ضربه برای مدار تغییرپذیر بازمان . درمورد اول، یک‌ضربه واحد در زمان τ_1 و درمورد دوم، در زمان τ_2 به مدار اعمال شده است .

میکند درنظر میگیریم. برای چنین مداری پاسخ حالت صفر به ضربه واحدی که در زمان τ_1 اعمال‌میشود، یعنی $\delta(t-\tau_1)$ ، مساوی پاسخ حالت‌صفر برای‌ضربه‌واحد دیگری که درزمان τ_2 ، یعنی $\delta(t-\tau_2)$ بمدار اعمال میگردد نخواهد بود . علت این امر اینست که ضریب تقویت تقویت کننده در زمان τ_1 و لحظه‌یی بعد ازآن، از ضریب تقویت آن در زمان τ_2 و لحظه‌یی بعد ازآن متفاوت است . بالنتیجه دربیان پاسخ ضربه بایستی لحظه اعمال ضربه به مدار نیز بدقت تعیین شود . درحالت مورد بحث ، پاسخ ضربه ممکن است مشابه شکل (٤-٤) باشد . بطورکلی $h(t\ ,\ \tau)$ بیان کننده « پاسخ حالت صفر در زمان t » ناشی از « ضربه واحد اعمال شده در زمان τ » میباشد .

برای « مدارهای خطی تغییرپذیر بازمان » میتوان نشان داد که پاسخ حالت صفر تابع خطی ورودی است. درحقیقت با استفاده از خواص جمع‌پذیری و همگنی میتوان نشان داد که « پاسخ حالت صفر بـه یک ورودی « دلخواه » i_s که در زمان t_0 اعمال میشود برابر است» با :

$$v(t)=\int_{t_0}^{t} h(t\ ,t')\ i_s(t')\ dt' \qquad t\geqslant t_0 \qquad (٤-٦)$$

چنانچه فرمول فوق‌را با (٤-٤) مقایسه کنیم ، مشاهده خواهیم کرد که تنها تفاوت ایندوآنست که اکنون پاسخ ضربه تابعی از دومتغیر t و t' میباشد درحالیکه در (٤ — ٤)

تابعی از تفاضل $t-t'$ بود .

بطور مشابه، درمسأله الکتروستاتیک، اگر مثلاً ثابت دی‌الکتریک[1] ε ، تابعی از x' باشد ، پتانسیل نقطه x با این فرمول بیان خواهد شد :

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x\,,\,x')\,\rho(x')\,dx'$$

که درآنجا $g(x\,,\,x')$ ، پتانسیل نقطه x ، ناشی از یک بار نقطه‌یی واحد در x' میباشد.

۴-۴- پاسخ کامل

درفصل چهارم ثابت کردیم که برای یک مدار RC خطی تغییرناپذیر بازمان و از مرتبه اول ، پاسخ کامل مساوی مجموع پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی‌صفر میباشد . در حقیقت برای هرمدار خطی ، تغییرپذیر یا تغییرناپذیر بازمان ، بیان فوق صحیح میباشد . اثبات کلی وکامل این بیان درفصل سیزدهم داده خواهد شد . فعلاً این حقیقت را بصورت معادله زیر بیان میکنیم :

$$y(t)=z(t)+v(t)$$

یا :

$$y(t)=z(t)+\int_{t_0}^{t} h(t\,,\,t')w(t')\,dt' \qquad t\geqslant t_0 \quad \text{برای} \qquad (۴-۷)$$

که درآن z پاسخ ورودی‌صفر و v پاسخ حالت صفر ، w ورودی و y پاسخ کامل میباشد. از معادله (۴-۷) واضح است که « پاسخ کامل ، تنها موقعی یک تابع خطی ورودی‌است که پاسخ ورودی صفر ، بطور متحد برابر صفر باشد» .

تمرین ۱- فرض کنید که درمدار شکل (۲-۱) ، سلف L و مقاومت R_2 را حذف کنیم . گیریم i_s ورودی و v_C پاسخ باشد. عبارتی برای $v_C(t)$ ، یعنی پاسخ کامل‌مدار ، برحسب i_s و ولتاژ اولیه خازن V_0 پیدا نمائید .

---

۱ —Dielectric Constant

تمرین ۲- خازن C را از مدار شکل(۱-۲) حذف کنید. با درنظر گرفتن i_L بعنوان پاسخ ، عبارتی برای $i_L(t)$ ، یعنی پاسخ کامل مدار برحسب i_s وجریان‌اولیه سلف I_0 ، بدست آورید .

۵- محاسبه انتگرال‌های کانولوشن

دربخش قبل نشان دادیم که پاسخ حالت صفر v یک مدار خطی تغییرناپذیربازمان، به یک ورودی دلخواه $i_s(\cdot)$ که در زمان t_0 بمدار اعمال میشود ، با انتگرال کانولوشن ،

$$v(t)=\int_{t_0}^{t} h(t-t')\, i_s(t')\, dt' \qquad t\geqslant t_0 \text{ برای تمام } \qquad (۵-۱)$$

بیان میگردد که درآن h پاسخ ضربه واحدمیباشد. بنابراین باداشتن پاسخ‌ضربه h ، میتوان برای $t\geqslant t_0$ ، $v(t)$ ناشی‌از $i_s(\cdot)$ را که درلحظه t_0 بمدار اعمال‌میشود با انتگرال گیری رابطه (۵-۱) بدست‌آورد. دراین بخش با استفاده ازچند مثال، محاسبه انتگرال کانولوشن را تشریح خواهیم کرد . معهذا ابتدا دونتیجه ساده ولی مفید را بدست می‌آوریم .

۱- فرض کنید که‌ورودی i_s ، ضربه واحدی‌است که‌در $t_1>t_0$ بمدار اعمال‌میشود، یعنی، $i_s(t)=\delta(t-t_1)$. میخواهیم بوسیله (۵ - ۱) نشان دهیم که پاسخ v توسط $h(t-t_1)$ بیان میشود . از رابطه (۵-۱) داریم :

$$v(t)=\int_{t_0}^{t} h(t-t')\, \delta(t'-t_1)\, dt' \qquad t>t_0 \text{ برای} \qquad (۵-۲)$$

ازتعریف تابع‌ضربه میدانیم که $\delta(t'-t_1)$ برای تمام زمانها بجز $t'=t_1$ برابر صفراست . درنقطه $t'=t_1$ ، δ ویژه بوده و دارای خاصیت :

$$\int_{t_1-}^{t_1+} \delta(t'-t_1)\, dt' = ۱$$

میباشد . بنابراین میتوان بجای (۲-۵) چنین نوشت :

$$v(t)=\int_{t_{1-}}^{t_{1+}} h(t-t')\,\delta(t'-t_1)\,dt'$$

که درآن t_{1-} و t_{1+} بترتیب نمایشگر درست لحظه‌یی قبل ، و درست لحظه‌یی بعد از t_1 میباشند . برای مدارهای فشرده خطی تغییرناپذیر بازمان ، h درفاصله $(o\,,\,\infty)$ یک تابع پیوسته میباشد . بنابراین میتوان نوشت :

$$\text{برای} \quad t>o \qquad v(t)=h(t-t_1)\int_{t_{1-}}^{t_{1+}} \delta(t'-t_1)\,dt'=h(t-t_1) \qquad (۵-۳)$$

درنتیجه ، انتگرال کانولوشن دارای این خاصیت مهم است که (برای $t>t_1>t_0$) :

$$\int_{t_0}^{t} h(t-t')\,\delta(t'-t_1)\,dt'=h(t-t_1) \qquad (۵-۴)$$

معادله(۵-۴) را میتوان‌نتیجه مستقیم‌خطی بودن‌وتغییرناپذیری بازمان مدار دانست. زیرا بموجب تعریف ، $h(t)$ پاسخ‌حالت صفر در زمان t به ضربه « اعمال شده در زمان o » میباشد . تغییرناپذیری بازمان لازم میدارد که اگرضربه درلحظه t_1 به‌مدار اعمال شده باشد ، پاسخ حالت صفر همان شکل موج قبلی را داشته ، اما باندازه t_1 ثانیه انتقال یافته می‌باشد. بعبارت‌دیگر، دراینحالت پاسخ مساوی $h(t-t_1)$ خواهد بود [چنانکه توسط (۵-۴) پیش گوبی شد] .

۲- انتگرال کانولوشن (۵-۱) را میتوان با یک تغییر متغیر بصورت دیگری نوشت . گیریم $\tau=t-t'$ باشد که τ یک متغیر ساختگی(۱) جدید است ، آنگاه $t'=t-\tau$ و $-dt'=d\tau$ خواهد بود . حدپائین انتگرال برحسب متغیر جدید بصورت $\tau=t-t_0$ و حد بالای انتگرال بصورت $\tau=o$ خواهد شد . بنابراین :

---

۱ — Dummy variable

$$v(t)=\int_{t-t_0}^{o} h(\tau)\,i_s(t-\tau)\,(-d\tau)$$

$$(\text{o}-\text{o})\qquad =\int_{o}^{t-t_0} h(\tau)\,i_s(t-\tau)\,d\tau$$

چون τ و t' متغیرهای ساختگی انتگرال هستند، میتوان (o-o) را برای مقایسه با (۱ - o) مجدداً برحسب t' نوشت و بنابراین :

$$(\text{o}-۶)\qquad v(t)=\int_{o}^{t-t_0} h(t')\,i_s(t-t')\,dt' \qquad t\geqslant t_0 \text{ برای}$$

درنتیجه ، اگر $t_0=o$ باشد ، (۱ - o) و (۶ - o) هردودارای حدود انتگرال گیری یکسان خواهند بود ، یعنی بین o و t ،

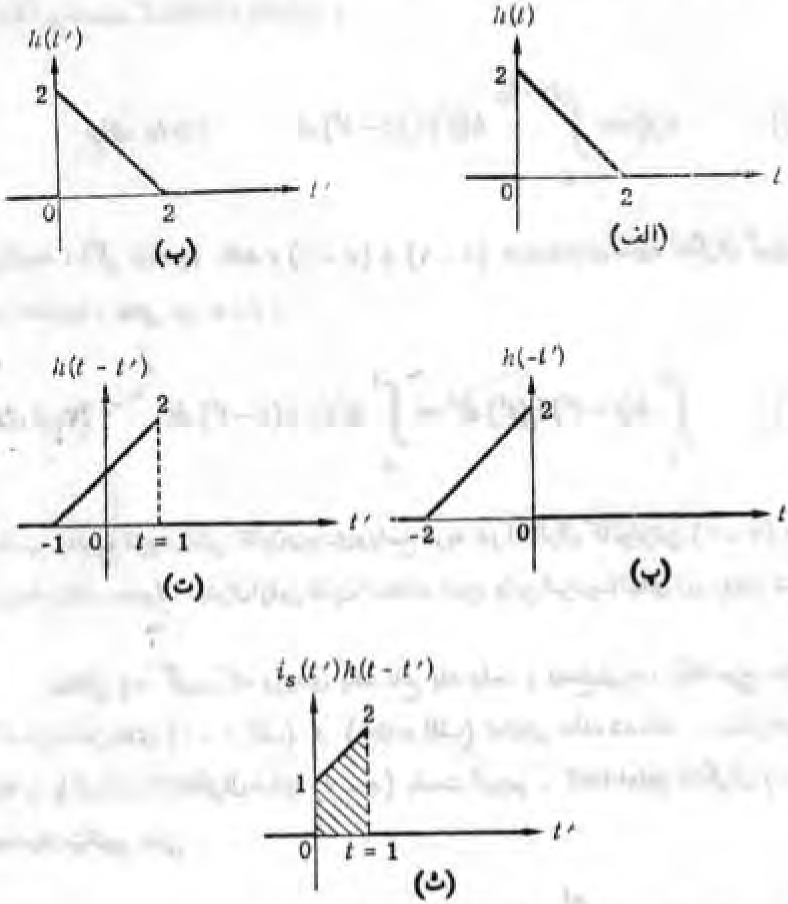
$$(\text{o}-۷)\qquad \int_{o}^{t} h(t-t')\,i_s(t')\,dt'=\int_{o}^{t} h(t')\,i_s(t-t')\,dt' \qquad t\geqslant o \text{ برای}$$

مطلب جالب توجه نقش تقارن ورودی وپاسخ ضربه در انتگرال کانولوشن (۷ - o) میباشد . درمحاسبات، معمولاً میتوان ازاین تقارن استفاده نمود واین امردرمثالهای زیر روشن شده‌است.

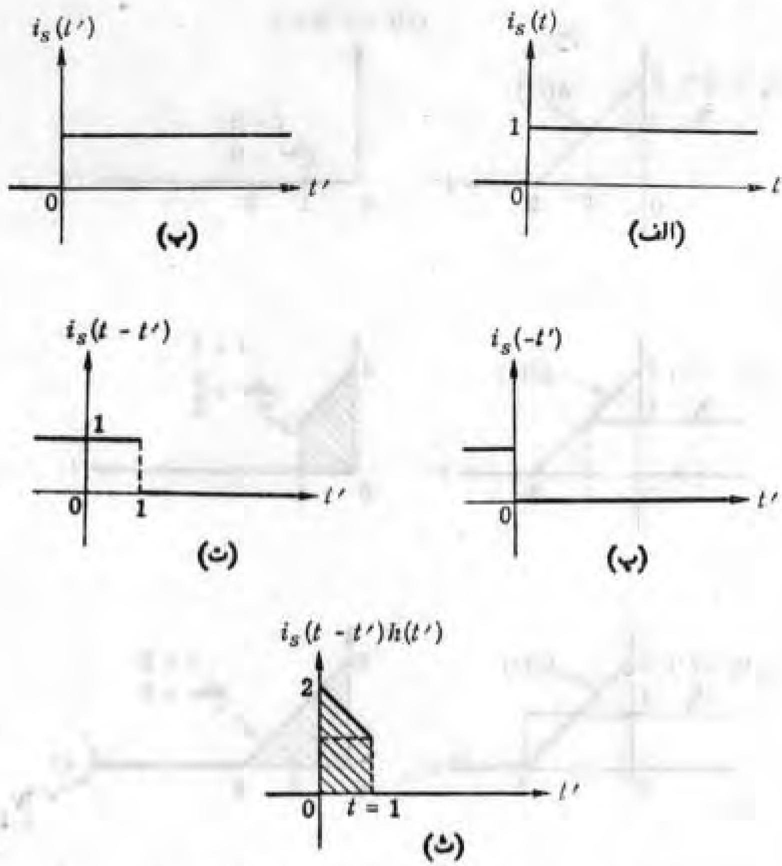
مثال ۱- گیریم که ورودی یک تابع پله واحد و پاسخ ضربه ، یک موج مثلثی باشد که درشکل های (۱ - o الف) و (۲ - o الف) نمایش داده شده‌اند . میخواهیم پاسخ پله را با استفاده ازانتگرال های (۷ - o) بدست آوریم . ابتدا اولین انتگرال (۷ - o) را محاسبه میکنیم یعنی :

$$(\text{o}-۸)\qquad v(t)=\int_{o}^{t} h(t-t')\,i_s(t')\,dt' \qquad t\geqslant o \text{ برای}$$

شکل (۱ - ۵ الف) نمایش هندسی پاسخ ضربه را بما میدهد . این شکل در (۱ - ۵ ب) تکرار شده است ، که درآن بجای متغیر t ، متغیر t' بکار رفته است . شکل (۱ - ۵ پ)، $h(-t')$ را برحسب t' نشان میدهد . توجه شود که این شکل تصویر آینه‌یی نمایش شکل قبل نسبت بمحور عرضها میباشد . شکل (۱ - ۵ ت) ، تابع $h(t-t')$ را برحسب t' نشان میدهد . توجه کنید که t مقدار ثابتی است (درشکل $t=1$ میباشد) . همچنین توجه کنید که نمایش شکل (۱ - ۵ ت) ، از انتقال شکل (۱ - ۵ پ) بمقدار t ثانیه ، بسمت راست حاصل شده است . شکل (۱ - ۵ ث) نمایش هندسی عبارت زیر انتگرال



شکل ۱-۵- مثالی برای تشریح محاسبه انتگرال کانولوشن با استفاده از معادله (۸-۵) . محاسبه برای $t=1$ انجام شده است .



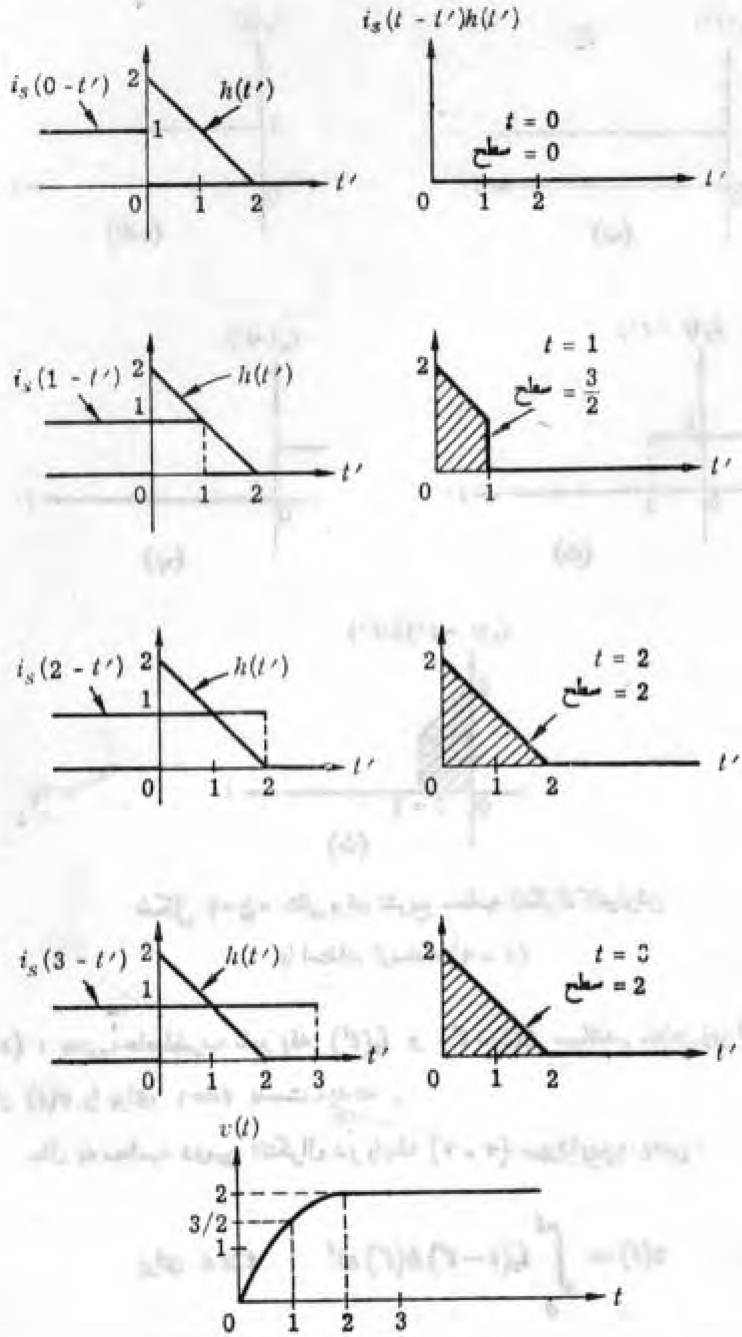
شکل ۲-۵- مثالی برای تشریح محاسبه انتگرال کانولوشن
با استفاده ازمعادله (۹ - ۵)

(۵-۸) ، یعنی، حاصلضرب تابع پله $i_s(t')$ و $h(t-t')$ میباشد. سطح زیر این شکل، مقدار $v(t)$ را برای $t=۱$ بدست میدهد.

حال به محاسبه دومین انتگرال در رابطه (۷ - ۵) میپردازیم، یعنی :

$$v(t)=\int_0^t i_s(t-t')\,h(t')\,dt' \qquad t\geqslant 0 \quad \text{برای} \qquad (۵-۹)$$

ابتدا i_s را برحسب t' رسم میکنیم (شکل ۲ - ۵ ب) . آنگاه تصویر آینه‌یی آنرا نسبت



شکل ۳-۵- مثال ۱ : تشریح محاسبه کانولوشن

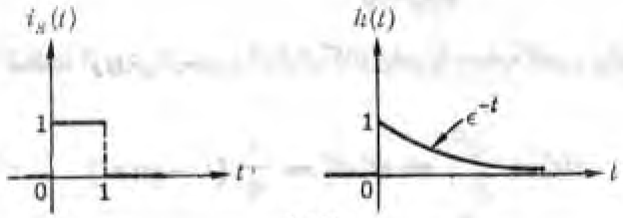
به محور عرضها یعنی $i_s(-t')$ را برحسب t' رسم میکنیم . سپس همه نمایش هندسی‌را بمیزان t ثانیه ، بسمت راست انتقال داده و $i_s(t-t')$ را برحسب t' بدست میآوریم (شکل ۲ ـ ۵ ت) . آنگاه حاصلضرب پاسخ ضربه $h(t')$ و $i_s(t-t')$ را رسم میکنیم (شکل ۲ ـ ۵ ث) . سطح زیر این‌شکل ، $v(t)$ را برای $t=۱$ تعیین‌میکند. واضح است کـه نتایج بدست آمده از هردوحالت مساوی خواهند بود . درشکل (۳ ـ ۵) نمایش های هندسی‌را که برای‌محاسبه انتگرال(۹ ـ ۵) برای مقادیر ۳ , ۲ , ۱ , $t=o$ بکار رفته ، رسم نموده‌ایم .

مثال ۲- پاسخ حالت‌صفر را برای‌ورودی‌وپاسخ‌ضربه‌داده شده درشکل(٤ ـ ۵ الف) تعیین نموده و رسم کنید . داریم :

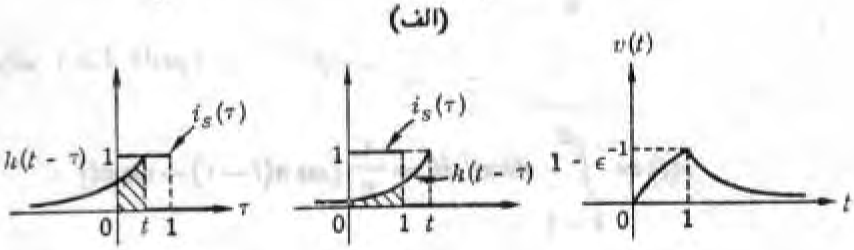
$$i_s(t)=u(t)-u(t-۱)$$
$$h(t)=e^{-t}u(t)$$

واضح است که پاسخ $v(t)$ برای t منفی صفر میباشد . برای $t\geqslant o$ از رابطه زیر استفاده میکنیم :

$$v(t)=\int_{o}^{t} h(t-t')\,i_s(t')\,dt'$$



(الف)



(ب)

شکل ٤-۵- مثال ۲ انتگرال کانولوشن

برای $0 \leqslant t < 1$ ، چون $i_s(t) = 1$ است داریم :

$$v(t) = \int_0^t e^{-(t-t')}\, dt' = 1 - e^{-t}$$

برای $t \geqslant 1$ ، چون $i_s(t) = 0$ ، تنها کافی است تا $t = 1$ انتگرال گرفته شود . بنابراین :

$$v(t) = \int_0^1 e^{-(t-t')}\, dt' = (e-1)\, e^{-t}$$

تعبیر هندسی این دومرحله و پاسخ مدار درشکل (۴ - ۵ ب) نشان داده شده‌اند .

مثال ۳- پاسخ حالت صفر را برای ورودی و پاسخ ضربهٔ نشان داده شده در شکل (۵ - ۵ الف) تعیین نمائید . داریم :

$$i_s(t) = u(t) \sin \pi t$$

$$h(t) = u(t) - u(t-1)$$

برای $t \leqslant 0$ داریم :

$$v(t) = 0$$

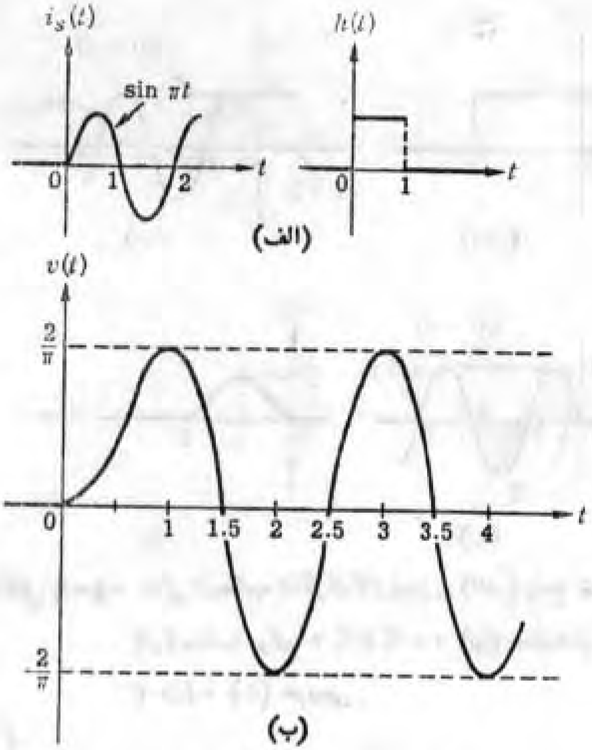
میخواهیم با استفاده از روش ترسیمی، انتگرال کانولوشن را حساب کنیم. برای $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$v(t) = \int_0^t \sin \pi t'\, dt' = \frac{1}{\pi}(1 - \cos \pi t)$$

برای $t \geqslant 1$ داریم :

$$v(t) = \int_{t-1}^t \sin \pi t'\, dt' = \frac{1}{\pi}[\cos \pi(t-1) - \cos \pi t]$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cos \pi t$$



شکل ۵-۵- مثال ۳ انتگرال کانولوشن

نتیجه درشکل (۵ - ۵ ب) نشان داده شده است . توجه کنید که پاسخ پس ازگذشت زمان «گذرا» ، که درفاصله $0 \leqslant t \leqslant 1$ میباشد ، سینوسی خواهد بود .

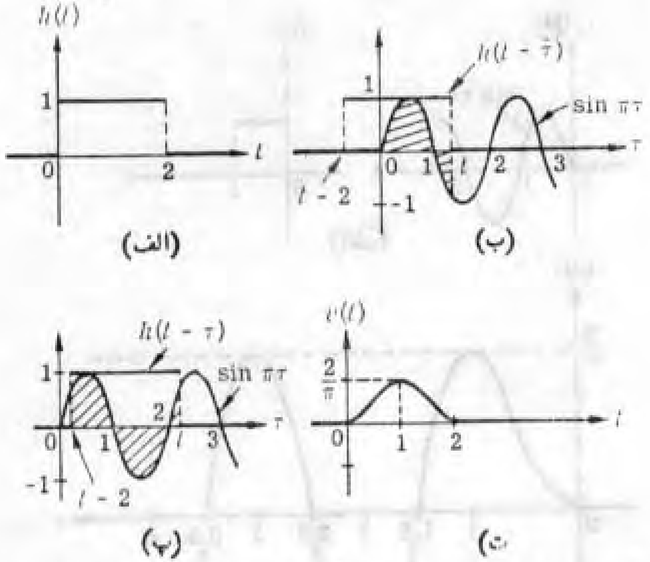
مثال ۴- برای همان ورودی مثال ۳ وپاسخ ضربه شکل (۶ - ۵ الف) که یک پالس مستطیلی با عرض ۲ ثانیه میباشد ، پاسخ حالت صفر را تعیین کنید . بنابراین :

$$i(t)=(\sin \pi t)u(t) \qquad h(t)=u(t)-u(t-2)$$

برای $t < 0$ داریم :

$$v(t)=0$$

برای $0 \leqslant t \leqslant 2$ (شکل ۶ - ۵ ب را ببینید) :



شکل ۹-۵- مثالی ازمحاسبه انتگرال کانولوشن. (الف) پاسخ ضربه، (ب) محاسبه برای $o \leqslant t \leqslant ۲$ ، (پ) محاسبه برای $t \geqslant ۲$ ، (ت) خروجی .

$$v(t) = \int_{o}^{t} \sin \pi t' \, dt' = \frac{۱}{\pi} (۱ - \cos \pi t)$$

برای $t \geqslant ۲$ (شکل ۹ ـ ۵ پ را ببینید) .

$$v(t) = \int_{t-۲}^{t} \sin \pi t' \, dt' = \frac{۱}{\pi} [\cos \pi (t - ۲) - \cos \pi t] = o$$

پاسخ $v(\cdot)$ درشکل(۹ ـ ۵ ت) نشان‌داده شده است. توجه کنید که برای $t \geqslant ۲$، پاسخ بطور متحد مساوی صفر میباشد. درحقیقت، برای $t \geqslant ۲$ ، پاسخ حالت صفر را میتوان یک تابع سینوسی با دامنه صفر تعبیر نمود .

خلاصه

● دراین فصل برخلاف فصل‌های قبل ، اساساً با روش‌هایی برخورد میکنیم که درتجزیه و تحلیل مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان مفید میباشند. سه روش عمده چنین است : (۱) تجزیه و تحلیل مش وگره ، (۲) تعیین پاسخ ضربهٔ یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام ، (۳) محاسبه انتگرال‌های کانولوشن .

● تجزیه و تحلیل گره برای‌مداری با $n+۱$ گره، برپایه نوشتن n معادله KCL در n گره ، برحسب مجموعه‌یی از n ولتاژ جفت گره قرار دارد .

● تجزیه و تحلیل مش برای مداری با m مش، برپایه نوشتن m معادله KVL برای m مش، برحسب مجموعه‌یی از m جریان مش قرار دارد .

● برای یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان بایک ورودی و یک‌خروجی ، با انجام عملیاتی درمعادلات گره یا مش، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام با ضرایب ثابت برای متغیر خروجی بدست میآید .

● پاسخ ضربه یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام مناسب، بصورت زیر میباشد :

$$h(t)=u(t)\left(\sum_{i=۱}^{n} k_i e^{s_i t}\right)$$

که درآن ، s_i ، $i=۱, ۲, \ldots, n$ ، n ریشه « متمایز » معادله مشخصه میباشند .

● برای مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان ، پاسخ حالت صفر v ، به‌هرورودی i_s که در زمان t_0 بمدار اعمال میشود، مساوی کانولوشن ورودی i_s که در زمان t_0 اعمال شده ، با پاسخ ضربه h میباشد . یعنی :

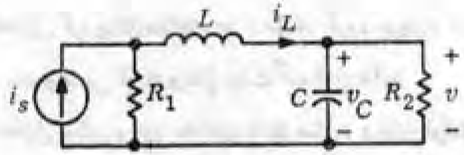
$$v(t)=\int_{t_0}^{t} h(t-t')\, i_s(t')\, dt' \qquad t\geqslant t_0 \text{ برای}$$

● برای تمام $t\geqslant 0$ داریم :

$$\int_{0}^{t} h(t-t')\, i_s(t')\, dt'=\int_{0}^{t} i_s(t-t')\, h(t')\, dt'$$

مسائل

۱ - تجزیه و تحلیل گره برای مدار نشان داده شده درشکل (مسأله ۱ - ٦) بابکار بردن تجزیه وتحلیل گره ، معادله دیفرانسیلی برحسب ولتاژ v بدست آورید. شرایط اولیه $i_L(o)=I_0$ و $v_C(o)=V_0$ داده شده‌اند .

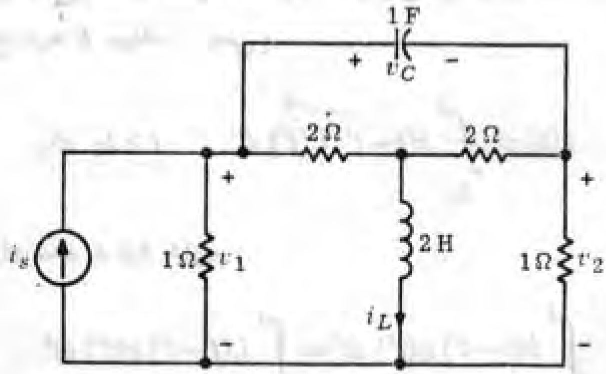


شکل (مسأله ۱-٦)

۲- تجزیه و تحلیل مش درمدار مسأله قبل ، منبع جریان را به منبع ولتاژ معادل تبدیل نموده ، آنگاه با بکاربردن تجزیه‌وتحلیل‌مش ، معادله دیفرانسیلی برحسب متغیر v بدست آورید .

۳- معادلات حالت معادلات حالت را برای مدار مسأله قبل بنویسید. v و i_L را بعنوان متغیرهای حالت بکار برید .

٤- تجزیه و تحلیل گره معادلات گره را برای مدار خطی تغییرناپذیر بازمان شکل (مسأله ٤ - ٦) بنویسید . معادلات دیفرانسیلی برای ولتاژهای v_1 و v_2 تعیین کنید . شرایط اولیه لازم برای هرمورد را برحسب $v_C(o)$ و $i_L(o)$ بیان کنید .



شکل (مسأله ٤-٦)

۵- تجزیه و تحلیل مش مسأله قبل‌را بابکار بردن تجزیه و تحلیل مش حل کنید .

٦- معادلات حالت معادلات‌حالت‌را برای مدار شکل(مسأله ٤ ـ ٦) بنویسید.

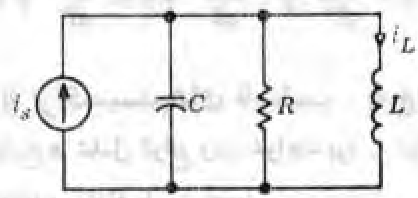
۷- شرایط اولیه و تحریک ضربه مدارخطی تغییرناپذیر بازمان RLC در شکل(مسأله ۷ ـ ٦) را درنظربگیرید. گیریم که h ، جریان سلف ناشی از $i_s=\delta$ بوده و $h(o_-)=\frac{dh}{dt}(o_-)=o$ باشد .

الف ـ مقادیر $h(o_+)$ و $\frac{dh}{dt}(o_+)$ را محاسبه کنید (برحسب R ، L و C) .

ب ـ مستقیماً نشان دهید که (با بررسی شرایط اولیه و گذاردن آنها در معادله دیفرانسیل):

$$i_L(t)=\int_o^t h(t-t')\,i_s(t')\,dt' \qquad t\geqslant o \text{ برای}$$

پاسخ حالت صفر به‌ورودی i_s میباشد .



شکل (مسأله ۷ - ٦)

۸- پاسخ ورودی‌صفر ، پاسخ ضربه و پاسخ پله معادله دیفرانسیل یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان ، بصوت زیر داده شده است :

$$\frac{d^3y}{dt^3}+4\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+2y=\frac{d^2w}{dt^2}+3w$$

شرایط اولیه عبارتند از :

$$y(o_-)=1 \qquad \frac{dy}{dt}(o_-)=2 \qquad \frac{d^2y}{dt^2}(o_-)=-1$$

پاسخ ورودی صفر، پاسخ ضربه و پاسخ پله را بدست آورید .

۹- پاسخ حالت صفر و پاسخ کامل برای مسأله ۸ ، اگر w ورودی سینوسی، $w(t)=\cos t$ باشد ، پاسخ حالت صفر را با دو روش مختلف بدست آورید . پاسخ کامل را برای شرایط اولیه داده شده محاسبه کنید .

۱۰- پاسخ ضربه پاسخ ضربه معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید :

الف- $$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=w$$

ب- $$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=\frac{dw}{dt}+w$$

پ- $$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=\frac{dw}{dt}+2w$$

ت- $$\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=\frac{d^2w}{dt^2}+2w$$

۱۱- پاسخ ضربه برای سیستم‌های نامناسب پاسخ ضربه معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید . پاسخ ها شامل توابع ویژه خواهند بود . توابع ویژه لازم را بامعادل نمودن جملات متناظر دوطرف معادله بدست آورید .

الف- $$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+2y=2\frac{d^2w}{dt^2}+0\frac{dw}{dt}+w$$

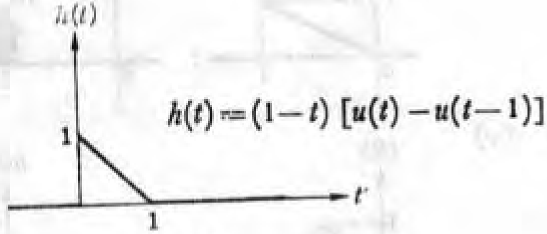
ب- $$\frac{dy}{dt}+2y=\frac{d^2w}{dt^2}+2\frac{dw}{dt}+2w$$

پ- $$\frac{d^2y}{dt^2}+0\frac{dy}{dt}+6y=2\frac{d^3w}{dt^3}+2\frac{d^2w}{dt^2}+w$$

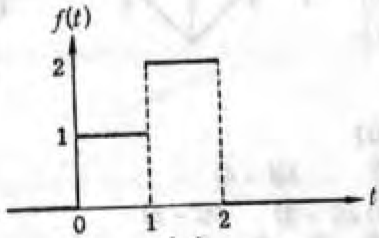
۱۲ - پاسخ حالت صفر یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان ، دارای پاسخ ضربه $h(\cdot)$ مطابق شکل (مسأله ۱۲ - ۶ الف) میباشد .

الف - پاسخ پله $s(\cdot)$ را حساب کنید .

ب - اگر سیستم در زمان 0_- درحالت صفر باشد ، پاسخ آنرا به شکل موج f نشان داده شده درشکل (مسأله ۱۲ - ۶ ب) پیداکنید .



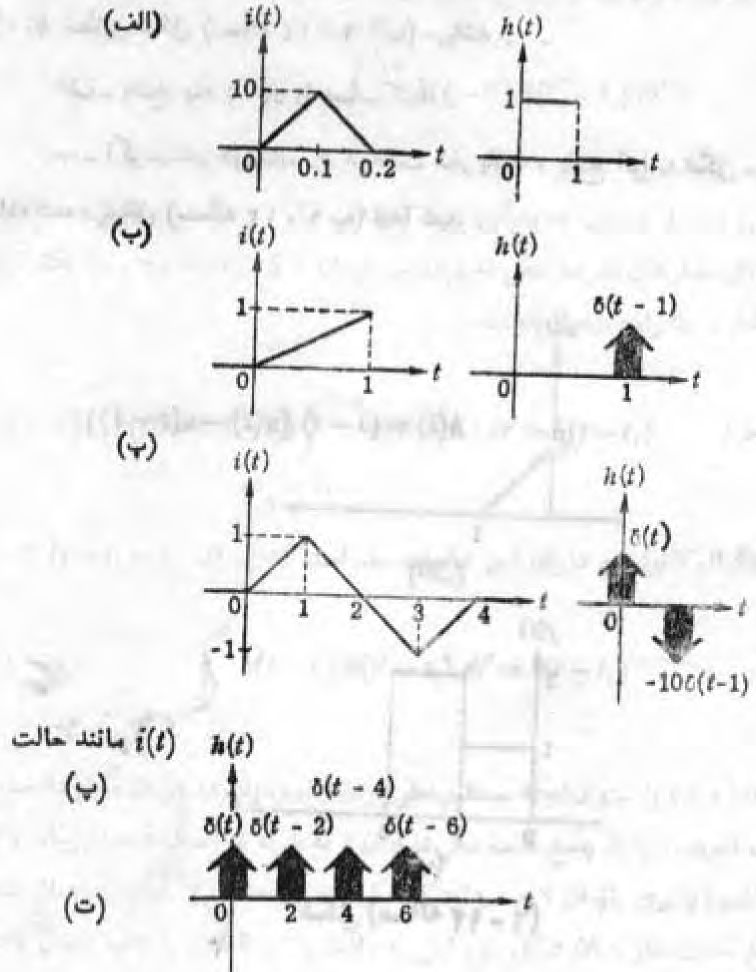
(الف)



(ب)

شکل (مسأله ۱۲ - ۶)

۱۳ - پاسخ حالت صفر پاسخ حالت صفر موارد زیر را بدون استفاده از انتگرال کانولوشن بدقت رسم کنید (شکل مسأله ۱۳ - ۶) . h نماینده پاسخ ضربه مدار خطی تغییرناپذیر بازمان مورد بررسی و i نمایش ورودی آن است .



شکل (مسأله ۱۳ - ٦)

۱٤- انتگرال کانولوشن مسأله۱۳ را با استفاده‌ازانتگرال کانولوشن‌حل کنید.

۱۵- پاسخ پله و پاسخ ضربه پاسخ‌حالت صفر h یک شبکه به جریان ورودی ضربه واحد درشکل (مسأله ۱۰ - ٦) رسم شده است.

الف ـ پاسخ حالت صفر را به‌ورودی پله واحد $i(t)=u(t)$ محاسبه و رسم کنید.

ب ـ پاسخ حالت صفر را برای پالس‌های $i(t) = \circ \Delta p_\Delta(t)$ ، برای مقادیر ۰ , ۱ , ۲ ر۰ $=\Delta$ ثانیه ، محاسبه و رسم کنید .

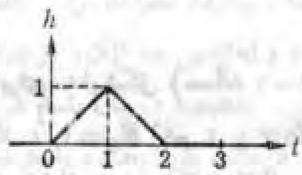
پ ـ فرض کنید که با تغییر طرح مدار توسط عناصر موجود ، میتوان h را بهرصورت دلخواه درآورد بشرطیکه :

(۱) $h(t) = o$ برای تمام $t < o$

(۲) $o \leqslant | h(t) | \leqslant \circ$ برای تمام $t \geqslant o$

(۳) $\int_o^\infty h(t)\, dt = ۱$

با این محدودیت‌های داده شده ، اگر بخواهیم پاسخ پلهٔ مدار اصلاح شده درکوتاهترین مدت به‌حالت دائمی خود برسد ، چه شکلی را برای h انتخاب خواهید نمود ؟



شکل (مسأله ۱۵ - ۶)

۱۶ - پاسخ پله شیب‌دار پاسخ ضربهٔ یک‌مدار خطی تغییرناپذیر با زمان بصورت زیر مشخص میگردد :

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{۱}{۱+t} & t \geqslant o \text{ برای تمام } \\ o & t < o \text{ برای تمام } \end{cases}$$

پاسخ حالت صفر v را برای تابع شیب واحد r که در لحظه $t_0 = ۱$ بمدار اعمال میشود محاسبه و رسم کنید .

۱۷ - انتگرال کانولوشن اگر پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان بصورت زیر داده شده باشد :

$$h(t) = \begin{cases} ۲e^{-t} & o \leqslant t < ۳ \\ o & t \geqslant o \end{cases}$$

پاسخ حالت صفر مدار را به ورودی زیر حساب کنید :

$$i_s(t) = \begin{cases} t\,u(t) & o \leqslant t < ۲ \\ o & t \geqslant ۲ \end{cases}$$

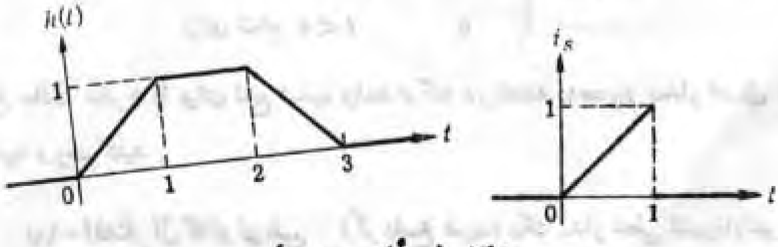
۱۸ - مدار تغییر پذیر بازمان برای یک مدار خطی تغییرپذیر بازمان ، اگر پاسخ در زمان t ناشی از ضربه واحد اعمال شده درلحظه τ بصورت زیر باشد :

$$h(t\,,\,\tau) = t - \tau^۲$$

با استفاده ازکانولوشن ، پاسخ را برای ورودی $i_s(t) = tu(t) + ۲u(t) - \delta(t)$ محاسبه نمائید .

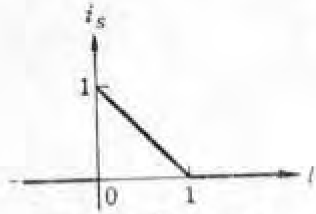
۱۹ - پاسخ کامل برای مدار شکل (مسأله ۱ - ۶) فرض کنید $R_1 = ۱$ اهم ، $L = ۱$ هانری ، $C = ۲$ فاراد ، $R_۲ = ۱$ اهم ، $I_0 = ۱$ آمپر و $V_0 = ۱$ ولت باشد. پاسخ‌ضربه وپاسخ کامل را برای ولتاژخروجی v ناشی ازپالس $i_{s1}(t) = u(t) - u(t-۱)$ حساب‌کنید . هرگاه ورودی به $i_{s۲}(t) = ۲i_{s1}(t)$ تبدیل شود پاسخ کامل بچه صورت خواهد بود ؟

۲۰ - انتگرال کانولوشن پاسخ حالت صفر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان را ازروی‌پاسخ ضربه $h(t)$ و ورودی i_s که‌درشکل (مسأله ۲۰-۶) نشان‌داده‌شده‌اند حساب کنید .



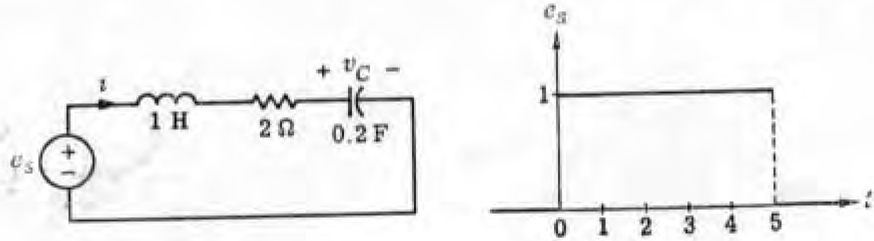
شکل (مسأله ۲۰ - ۶)

۲۱ - انتگرال کانولوشن مسأله ۲۰ را برای همان پاسخ ضربه ولی با ورودی دیگر i_s که درشکل (مسأله ۲۱ - ۶) نشان داده شده تکرار نمائید .



شکل (مسأله ۲۱ - ۶)

۲۲ - پاسخ ضربه ، پاسخ کامل و کانولوشن مدار خطی تغییرناپذیر بازمان RLC سری نشان داده شده درشکل (مسأله ۲۲ - ۶ الف) را که دارای ورودی e_s وپاسخ i میباشد درنظر بگیرید .



(الف) (ب)

شکل (مسأله ۲۲ - ۶)

الف - پاسخ ضربه را محاسبه و رسم کنید .

ب - عبارتی بنویسید که توسط آن بتوان پاسخ کامل را برای هرولتاژ ورودی e_s که در زمان $t=o$ بمدار اعمال‌میشود وبرای هرحالت‌اولیه $i_L(o)=I_0$ و $v_C(o)=V_0$ بدست آورد .

پ - پاسخ کامل را برای ۱ = I_0 آمپر ، ۱ − = V_0 ولت و e_s مطابق شکل (مسأله ۲۲ - ۶ ب) بدست آورده و رسم نمائید .

فصل هفتم

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

شکل موجهای سینوسی درعلوم و مهندسی نقش مهمی را بازی میکنند. درمدارهای الکتریکی، فرکانس سینوسی‌های موردنظر میتوانند از چند هرتز (سیکل درثانیه) تا حدود کیلوهرتز، مگا هرتز وگیگاهرتز[۱] تغییر کنند. همه ما با جریان سینوسی Hz ۵۰ که برای انتقال قدرت و استفاده در منازل بکار می‌رود آشنا هستیم. درآزمایشگاه نیز از مولدهای سیگنال سینوسی وآشکارسازهایی[۲] که دامنه‌های متعددی از فرکانس را دربردارند استفاده کرده‌ایم. بعنوان یک مهندس برق میدانیم که شکل موجهای سینوسی در زندگی حرفه‌ای ما بمنزله نان شب‌هستند، زیرا همانطورکه بعدآ خواهیم دید، اگر پاسخ یک مدارخطی‌تغییرناپذیر با زمان‌را به «هرتابع‌سینوسی» بدانیم، اصولاً پاسخ آنرا به «هرسیگنال» دیگر خواهیم دانست. بنابراین، یادگیری مؤثرترین روش کار با توابع سینوسی بسیارحایزاهمیت است.

درفصل‌چهارم مثال‌هایی را بیان نمودیم که درخلال آنها پاسخ مدارهای ساده‌به‌ورودی‌های‌سینوسی را بدست‌آوردیم. روش بکاررفته برای تعیین یک جواب خاص اگرچه سرراست بود ولی‌بسیارناشیانه است. دراین فصل روش بسیار ساده‌تر و ظریف‌تری را بدست خواهیم آورد که برپایه نمایش یک سینوسی با فرکانس داده شده، توسط یک عدد مختلط قراردارد.

۱- مرور اعداد مختلط

۱-۱- توصیف اعداد مختلط

ابتدا پاره‌ای حقایق اساسی درمورد اعداد مختلط را خلاصه میکنیم. گیریم z یک عدد مختلط باشد و x و y بترتیب جزء حقیقی و جزء انگاری آن باشند. دراینصورت:

$$z = x + jy \qquad (۱-۱)$$

---

۱ — Gigahertz   ۲ — Detector

که درآن $j=\sqrt{-1}$. همچنین میتوان نوشت:

$$\mathrm{Re}(z)=x \qquad \mathrm{Im}(z)=y \tag{۱—۲}$$

که درآن $\mathrm{Re}(\cdots)$ بمعنی «جزء حقیقی...» و $\mathrm{Im}\ (\cdots)$ بمعنی «جزء انگاری...» میباشد. سمت راست معادله (۱ — ۱) **نمایش مختصات‌قائم**[1] عدد مختلط z میباشد.
نمایش قطبی عدد مختلط z چنین است:

$$z=|z|\,e^{j\theta} \tag{۱—۳}$$

که درآن $|z|$ **اندازه** ویا **دامنه** z نامیده میشود و مقدار آن چنین است:

$$|z|=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \tag{۱—۴}$$

و θ **زاویه** ویا **فاز** z نامیده میشود و مقدار آن چنین میباشد:

$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{۱—۵}$$

گاهاً زاویه θ را بصورت $\measuredangle z$ مینویسیم. برحسب $|z|$ و θ داریم:

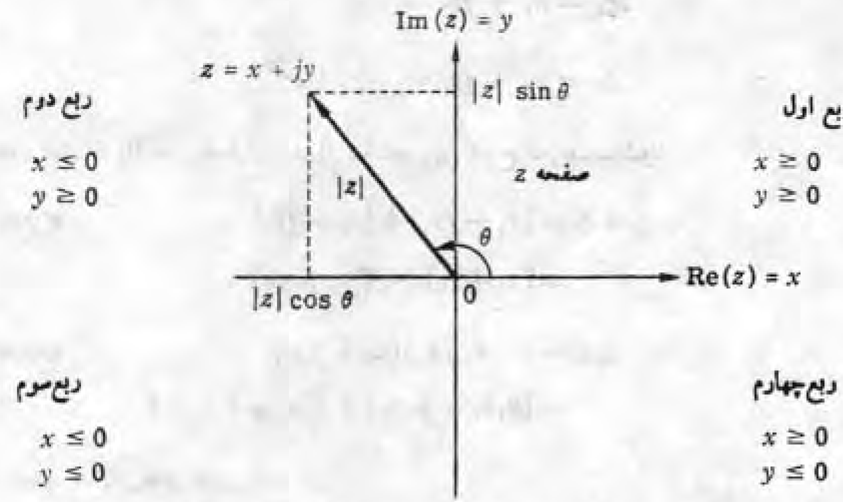
$$x=|z|\cos\theta \qquad y=|z|\sin\theta \tag{۱—۶}$$

این حقایق درشکل (۱ — ۱) تشریح شده‌اند که درآنجا عدد مختلط z با نقطه‌ای که مختصات آن $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ میباشد مربوط شده است. توجه کنید که فاز θ زاویه بین محور x و برداری است که از مبدأ شروع شده و به‌نقطه z ختم میگردد.

تبصره-زاویه θ محدودبه‌فاصله $[0\ ,\ 2\pi)$ یا $(-\pi\ ,\ \pi]$ می‌باشد+ ، وبنابراین θ توسط x , y بطوریکتا تعریف می‌شود. درمحاسبه θ با استفاده از رابطه(۵ — ۱) بایستی بخاطرداشته باشیم که هرگاه $\tan\theta$ معلوم باشد، زاویه θ درفاصله $[0\ ,\ 2\pi)$ بطوریکتا مشخص‌نخواهدبود. بعنوان‌مثال $\tan 26{,}6^\circ = 0{,}5$ است، ولی $\tan 206{,}6^\circ$ نیزمساوی $0{,}5$ خواهد بود. برای یکتا مشخص نمودن θ بایستی علامت‌های $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$

+ $[0\ ,\ 2\pi)$ نشان دهنده فاصله $0\leqslant\theta<2\pi$, $(-\pi\ ,\ \pi]$ نمایشگر فاصله $-\pi<\theta\leqslant\pi$ می‌باشد.

1 — Rectangular Coordinates



شکل ۱-۱- عدد مختلط و نمایش قطبی. هرعدد مختلط z متناظر با نقطه‌ای درصفحه z می‌باشدکه می‌تواند توسط جزءهای حقیقی و انگاری خود ویا توسط اندازه وفازش مشخص شود

را درنظر گرفت که مشخص کننده ربعی[۱] از صفحه مختلط میباشندکه z درآن قراردارد.

تمرین ۱- $\tan\theta$ را برای $0 \leqslant \theta < 2\pi$ برحسب θ رسم کنید.

تمرین۲ - اعداد مختلط زیر را بصورت قطبی بیان کنید: $1+j0.5$ ، $1+j10$ ، $1-j2$ ، $-1+j2$ و $-1-j2$

تمرین۳- اعداد مختلط زیررا بصورت مختصات‌قائم‌بیان کنید(یعنی، $z=x+jy$):
$5e^{j30^\circ}$ ، $5e^{j150^\circ}$ ، $10e^{-j45^\circ}$ ، $10e^{j240^\circ}$ و $2e^{j180^\circ}$.

۱-۲ عملیات با اعداد مختلط

قواعد عملیات اعداد مختلط همانند عملیات اعداد حقیقی‌است ، بشرط اینکه ازرابطه $j^2 = -1$ استفاده شود. این قواعدهمانند میباشند زیرا هم‌اعداد حقیقی وهم‌اعداد مختلط هردو از اصول یک میدان[۲] پیروی میکنند (ضمیمه‌الف، بخش ۱ — ۲ را ببینید). گیریم:

---

۱ - Quadrant ۲ - Field

$$z_1 = x_1 + jy_1 = |z_1| e^{j\theta_1}$$

$$z_2 = x_2 + jy_2 = |z_2| e^{j\theta_2}$$

دوعدد مختلط باشند. عملیات اعداد مختلط باین شرح تعریف میشوند:

« جمع »

$$z_1 + z_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

« ضرب »

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

وبرحسب نمایش‌های قطبی آنها :

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{j\theta_1} |z_2| e^{j\theta_2} = |z_1||z_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

تمرین - نشان دهید :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

و :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

« مزدوج مختلط » هرگاه عدد مختلط $z = x + jy$ **را داشته باشیم، گوئیم که عدد** مختلط $x - jy$ که با $\bar{z}$ نشان داده می‌شود **مزدوج مختلط**(۱) z **است. بآسانی** دیده می‌شود که هرگاه $z = |z| e^{j\theta}$ باشد آنگاه:

$$\bar{z} = |z| e^{-j\theta}$$

---

(1) Complex Conjugate

و :

$$z+\bar{z}=2x \qquad z-\bar{z}=2jy$$

وبسیار مهم‌تر :

$$z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2$$

و :

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}) \qquad y=\frac{1}{j2}(z-\bar{z})$$

تمرین - مقادیر زیر را حساب نموده و نتایج را ، هم‌بصورت مختصات قائم وهم‌بصورت مختصات قطبی بیان کنید.

$$\frac{(1+j1)(1+j2)}{j5(1-j1)} \qquad \text{و} \qquad 2e^{j30^\circ}-e^{-j45^\circ}$$

۲- فازورها و معادلات دیفرانسیل معمولی

۱-۲- نمایش یك سینوسی بوسیله یك فازور

یک « سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω » را بصورت هرتابعی از t که درفاصله $(-\infty , \infty)$ تعریف شده و دارای شکل زیر باشد ، تعریف کرده‌ایم :

$$A_m \cos(\omega t+\Phi) \tag{۱-۲}$$

که درآن ثابت‌های حقیقی A_m ، ω و Φ بترتیب **دامنه ، فرکانس زاویه‌ای**[1] **و فاز** سینوسی نامیده می‌شوند.

منظور ازآنچه که بیان خواهد شد ، بدست آوردن قضیه مهم زیر است.

قضیه اصلی مجموع جبری هرتعداد ازسینوسی‌ها با « فرکانس زاویه‌ای یکسان» ، مثلاً ω ، و هرتعداد از مشتق‌های آنها از هرمرتبه ، خود یک سینوسی با « همان » فرکانس زاویه‌ای ω می‌باشد.

مثال ۱ - تابع $f(\cdot)$ را که برای تمام مقادیر t بصورت زیر تعریف میشود درنظر بگیرید :

---

۱ - Angular frequency

$$f(t)=2\cos(2t+60^\circ)-4\sin 2t+\frac{d}{dt}2\sin 2t$$

توجه کنید که f مجموع دوسینوسی و مشتق سینوسی دیگر است که هریک ازاین‌سینوسی‌ها دارای فرکانس یکسان $\omega=2$ رادیان بر ثانیه میباشند. قضیه اصلی بیان میداردکه تابع f را میتوان بصورت یک سینوسی تنها با « همان » فرکانس زاویه‌ای نشان داد. برای بررسی این حقیقت با بسط مستقیم جمله کسینوسی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
f(t)&=2\cos 2t\cos 60^\circ-2\sin 2t\sin 60^\circ-4\sin 2t+4\cos 2t\\
&=\cos 2t-\sqrt{3}\sin 2t-4\sin 2t+4\cos 2t\\
&=5\cos 2t-(4+\sqrt{3})\sin 2t\\
&=\sqrt{5^2+(4+\sqrt{3})^2}\ \cos\left(2t+\tan^{-1}\frac{4+\sqrt{3}}{5}\right)\\
&=7{,}6\cos(2t+48{,}8^\circ)
\end{aligned}$$

که بصورت داده شده در معادله (۱ — ۲) میباشد.

اثبات قضیه اصلی در انتهای این زیربخش داده خواهد شد. ابتدا میخواهیم راجع به‌استنباطهای قضیه اصلی بحث کنیم. این قضیه بیان میدارد که میتوان روش‌های جبری را به‌سینوسی‌ها اعمال نمود. نخست توجه کنید که یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω، با دامنه A_m وفاز Φ بطورکامل مشخص میشود، و بدینجهت فکر « نمایش » یک سینوسی بوسیله عدد مختلط $A\triangleq A_m e^{j\Phi}$ برای ما حاصل میگردد. توجه کنید که $A_m=|A|$ اندازه عدد مختلط A و $\Phi=\measuredangle A$ فاز آن است. بعبارت دقیق‌تر، سینوسی $x(t)\triangleq A_m\cos(\omega t+\Phi)$ توسط عدد مختلط $A\triangleq A_m e^{j\Phi}$ «نمایش»داده‌میشود و برعکس با داشتن عدد مختلط، $A=A_m e^{j\Phi}$ و فرکانس زاویه‌ای ω، سینوسی را میتوان چنین بدست آورد.

$$x(t)=\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t}) \qquad (2-2)$$

در واقع :

$$\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})=\mathrm{Re}(A_m e^{j(\omega t+\Phi)})$$

$$=\mathrm{Re}[A_m \cos(\omega t+\Phi)+jA_m \sin(\omega t+\Phi)]$$

$$=A_m \cos(\omega t+\Phi)=x(t) \qquad (۲-۳)$$

توجه کنید که درمرحله آخر از «حقیقی» بودن A_m ، ω ، t و Φ استفاده کرده‌ایم. برای راحتی ، عدد مختلط A که سینوسی $A_m\cos(\omega t+\Phi)$ را نشان میدهد ، **فازور** [1] نمایش دهنده سینوسی خوانده میشود. برحسب تعریف فازور A با $A=A_m e^{j\Phi}$ بیان میشود .

مثال ۲- گیریم $v(t)=۱۱۰\sqrt{۲}\cos(۲\pi ٦۰ t+\frac{\pi}{۳})$ ولت باشد. دراینصورت فازور نمایش دهنده سینوسی چنین است :

$$A=۱۱۰\sqrt{۲}\,e^{j(\frac{\pi}{۳})}$$

یعنی:

$$v(t)=\mathrm{Re}(Ae^{j۲\pi ٦۰ t})$$

تبصره ۱- بایستی تأکید شود که دانستن نمایش فازوری یک سینوسی ، تنهامقادیر دامنه وفاز آنرا مشخص میسازد و اطلاعی ازفرکانس بدست نمیدهد. بنابراین هنگام محاسبات با فازورها ، بایستی فرکانس فازورها را درنظر داشت .

تبصره ۲- بطریق دیگر ، هرگاه یک سینوسی را بجای تابع کسینوس با تابع سینوس مشخص کنیم داریم :

$$y(t)=A_m \sin(\omega t+\Phi)$$

دراینصورت نیز نمایش فازوری $A \triangleq A_m e^{j\Phi}$ بقوت خود باقی است ، معهذا خود سینوسی را بایستی از رابطه زیر دوباره بدست آورد :

---

۱ - Phasor

$$y(t)=\mathrm{Im}(Ae^{j\omega t})$$

دراین کتاب منحصراً از نمایش جزء حقیقی استفاده شده است.

تبصره ۳- میخواهیم درصفحه‌مختصات‌مختلط، تابع $Ae^{j\omega t}$ وارسم کنیم. مختصات عدد مختلط $Ae^{j\omega t}$ چنین‌اند :

$$x(t)=\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t}) \qquad y(t)=\mathrm{Im}(Ae^{j\omega t})$$

میتوان $x(t)$ را تصویر نقطه $Ae^{j\omega t}$ روی محور x دانست که این نقطه با سرعت زاویه‌ای ω رادیان بر ثانیه ، روی دایره‌یی بشعاع A_m درخلاف جهت‌عقربه‌های ساعت، چنانکه درشکل(۱ - ۲) نشان داده‌شده است دوران میکند وبدینجهت $Ae^{j\omega t}$ را میتوان یک فازور دوار نامید. بهمین‌ترتیب تصویر نقطه $Ae^{j\omega t}$ روی محور y ، $y(t)$ را خواهد داد.

کاربرد عمده نمایش‌فازوری سینوسی‌ها درمحاسبه « جواب‌خاص‌معادلات دیفرانسیل خطی معمولی با ضرایب حقیقی ثابت » ، درحالتی که تابع تحریک یک سینوسی است ، میباشد. بعبارت دیگر ، معادله دیفرانسیل دارای چنین شکلی است :

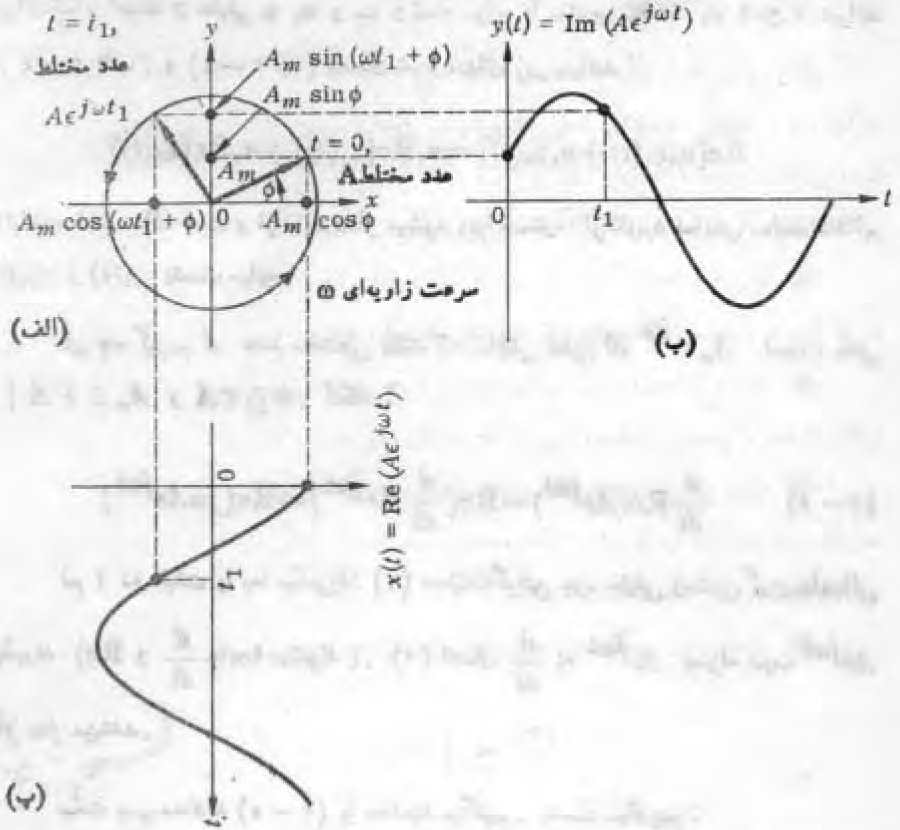
$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=A_m\cos(\omega t+\Phi)$$

که درآن a_0 ، a_1 ، ... ، a_n ، A_m ، ω و Φ «ثابت‌های حقیقی» میباشند. درواقع بموجب قضیه‌ای که قبلاً بیان شد هرگاه بجای x یک‌سینوسی با فرکانس زاویه‌یی ω را در سمت چپ جایگزین کنیم ، آنگاه تمام‌سمت چپ نیز معادل یک سینوسی با فرکانس ω خواهد بود و این درست همان است که سمت راست معادله لازم میدارد. بنابراین ، تنها مسأله واقعی، محاسبه دامنه و فاز سینوسی‌است که جواب خاص میباشد. برای این کار از فازورها استفاده میکنیم و این روش را ، **روش فازوری**[۱] مینامند.

بجای اینکه مستقیماً وارد محاسبات شویم، ابتدا سه لم[۲] را که نشان دهنده کارآیی روش‌فازوری میباشند بدقت بیان خواهیم کرد.

---

۱ - Phasor Method ۲ - Lemma



شکل ۱-۲- نمایش فازور دوار $A\epsilon^{j\omega t}$، (الف) میتوان $A\epsilon^{j\omega t}$ را بصورت یک بردار دوار درخلاف جهت عقربه‌های ساعت با فرکانس زاویه‌ای ω درنظرگرفت .

(ب) تصویر آن روی محور x. (پ) تصویر آن روی محور y

لم ۱- $\mathrm{Re}[\cdots]$ « جمع‌پذیر» و« همگن » است. بعبارت دیگر، گیریم z_1 و z_2 توابع دلخواه با مقادیر مختلطی از متغیر حقیقی t باشند و گیریم α یک عدد « حقیقی » باشد. « جمع‌پذیری » بدین معنی‌است که برای تمام چنین‌توابع z_1 و z_2، وتمام‌مقادیر t :

$$\mathrm{Re}[z_1(t) + z_2(t)] = \mathrm{Re}[z_1(t)] + \mathrm{Re}[z_2(t)] \qquad (\text{۴ − ۲ الف})$$

و « همگنی » بدین معنی است که برای تمام اعداد « حقیقی » α وتمام مقادیر t :

$$\mathrm{Re}[\alpha z_1(t)] = \alpha\,\mathrm{Re}[z_1(t)] \qquad (\text{۴ − ۲ ب})$$

برای تمام اعداد « حقیقی » α_1 و α_2 و تمام توابع با مقادیر مختلط z_1 و z_2 ، شرایط (۴ــ۲ الف) و (۴ــ۲ ب) معادل شرط تنهای زیر میباشد :

$$\mathrm{Re}[\alpha_1 z_1(t)+\alpha_2 z_2(t)]=\alpha_1 \mathrm{Re}[z_1(t)]+\alpha_2 \mathrm{Re}[z_2(t)]$$

اثبات مطلب ساده است و ازآن صرفنظر میشود زیرا مستقیماً ازکاربرد نمایش مختصاتقائم $z_1(t)$ و $z_2(t)$ بدست میاید.

لم ۲ــ گیریم A عدد مختلطی باشدکه نمایش قطبی آن $A_m e^{j\Phi}$ است ، یعنی $|A| \triangleq A_m$ و $\Phi \triangleq \measuredangle A$. آنگاه :

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})=\mathrm{Re}(\frac{d}{dt}Ae^{j\omega t})=\mathrm{Re}(j\omega Ae^{j\omega t}) \qquad (۲-۵)$$

لم ۲ دوحقیقت را بما میآموزد: (۱) عملیات‌گرفتن جزء حقیقی ومشتق گیری‌جابجائی پذیرند (Re و $\frac{d}{dt}$ جابجا میشوند). (۲) اعمال $\frac{d}{dt}$ به $Ae^{j\omega t}$ بمنزله ضرب $Ae^{j\omega t}$ در $j\omega$ میباشد.

سمت چپ معادله (۵ ــ ۲) را محاسبه میکنیم. بدست میآوریم :

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})=\frac{d}{dt}\mathrm{Re}(A_m e^{j(\omega t+\Phi)})$$

$$=\frac{d}{dt}[A_m \cos(\omega t+\Phi)]$$

$$=-\omega A_m \sin(\omega t+\Phi)$$

$$=\mathrm{Re}(j\omega A_m e^{j(\omega t+\Phi)})$$

$$=\mathrm{Re}(j\omega Ae^{j\omega t})$$

$$=\mathrm{Re}(\frac{d}{dt}Ae^{j\omega t})$$

لم ۳- گیریم A و B اعداد مختلط بوده و ω یک فرکانس زاویه‌ای باشد. تحت چنین شرایطی، رابطه:

$$\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})=\mathrm{Re}(Be^{j\omega t}) \quad \text{برای تمام مقادیر } t \qquad (۲-۶)$$

لازم میدارد که $A=B$ ، وبرعکس $A=B$ لازم میدارد که:

$$\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})=\mathrm{Re}(Be^{j\omega t}) \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

« اثبات » این مطلب را بدوقسمت بخش میکنیم. برای قسمت اول فرض کنید که:

$$\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})=\mathrm{Re}(Be^{j\omega t}) \quad \text{برای تمام مقادیر } t \qquad (۲-۷)$$

باید نشان داد که اعداد مختلط A و B برابر هستند. جزءهای حقیقی و انگاری A و B را بصورت زیر نشان میدهیم:

$$A\triangleq A_r+jA_i \qquad B\triangleq B_r+jB_i$$

ابتدا حالت $t=o$ را درنظرمیگیریم. چون $e^{j\omega t}\Big|_{t=o}=۱$ است، معادله (۷-۲) ملزم میدارد.

$$\mathrm{Re}(A)=\mathrm{Re}(B)$$

که چنین معنی میدهد:

$$A_r=B_r \qquad (۲-۸)$$

حال فرض میشود $t=\frac{\pi}{۲\omega}$. بنابراین $e^{j\omega t}\Big|_{t=\frac{\pi}{۲\omega}}=j$ و معادله (۷-۲) چنین میشود:

$$\mathrm{Re}(jA)=\mathrm{Re}(jB) \quad \text{یا} \quad \mathrm{Re}(jA_r-A_i)=\mathrm{Re}(jB_r-B_i)$$

بنابراین:

$$A_i=B_i \qquad (۲-۹)$$

بالاخره بموجب تعریف تساوی اعداد مختلط، معادلات (۸-۲) و (۹-۲) بمعنای $A=B$ هستند.

اکنون حالت معکوس را اثبات میکنیم. دراینجا فرض چنین است که $A=B$ ، و باید نشان دهیم :

$$\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})=\mathrm{Re}(Be^{j\omega t}) \qquad \text{برای تمام مقادیر } t$$

این نتیجه آنی است ، چون $A=B$ لازم میدارد که :

$$Ae^{j\omega t}=Be^{j\omega t} \qquad \text{برای تمام مقادیر } t$$

و بنابراین :

$$\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})=\mathrm{Re}(Be^{j\omega t}) \qquad \text{برای تمام مقادیر } t$$

« اثبات قضیه اصلی » برای سهولت حالت خاصی از سه سینوسی را درنظربگیرید :

$$x(t)\triangleq A_m\cos(\omega t+\Phi_1)=\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})$$

$$y(t)\triangleq B_m\cos(\omega t+\Phi_2)=\mathrm{Re}(Be^{j\omega t})$$

$$z(t)\triangleq C_m\cos(\omega t+\Phi_3)=\mathrm{Re}(Ce^{j\omega t})$$

بنابراین :

$$A\triangleq A_m e^{j\Phi_1}=A_r+jA_i$$

$$B\triangleq B_m e^{j\Phi_2}=B_r+jB_i$$

$$C\triangleq C_m e^{j\Phi_3}=C_r+jC_i$$

که A ، B و C سه فازوری هستند که بترتیب‌سینوسی‌های x ، y و z را نشان میدهند.

می‌خواهیم $x(t)+y(t)+\frac{d}{dt}z(t)$ را محاسبه کنیم. این مجموع را $\sum(t)$ مینامیم . دراینصورت :

$$\sum(t)=\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})+\mathrm{Re}(Be^{j\omega t})+\frac{d}{dt}\mathrm{Re}(Ce^{j\omega t})$$

از لم ۲ ، جمله سوم را میتوان چنین نوشت :

$$\mathrm{Re}(j\omega C e^{j\omega t})$$

با بکاربردن لم ۱ ، بدست میآید :

$$\sum(t)=\mathrm{Re}[(A+B+j\omega C)e^{j\omega t}]$$

بنابراین $\sum(\cdot)$ یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω میباشد. همچنین $\sum(\cdot)$ بشکل $\mathrm{Re}(Se^{j\omega t})$ است که درآن :

$$S=S_m e^{j\measuredangle S}=S_r+jS_i$$

S فازوری است که سینوسی $\sum(\cdot)$ را نشان میدهد. مطابق لم ۲ ، عدد مختلط S با $S=A+B+j\omega C$ بیان میشود. معادله آخر چنین لازم میدارد : هرگاه جزءهای حقیقی و انگاری را درنظر بگیریم، بدست میآید :

$$S_r=A_r+B_r-\omega C_i$$

$$S_i=A_i+B_i+\omega C_r$$

$$S_m=\sqrt{(A_r+B_r-\omega C_i)^2+(A_i+B_i+\omega C_r)^2}$$

$$\measuredangle S=\tan^{-1}\frac{A_i+B_i+\omega C_r}{A_r+B_r-\omega C_i}$$

که درآن $\measuredangle S$ مطابق قاعده‌ای که قبلاً بیان شد در ربع انتخاب شده واقع است.

روشن است که میتوان استدلال را برای مجموع هرتعداد سینوسی با فرکانس یکسان و هرتعداد مشتق آنها از هرمرتبه ، تعمیم داد.

تمرین ۱ - با استفاده از فرمول‌های استاندارد مثلثاتی نشان دهید :

$$A_m\cos\omega t+B_m\sin\omega t=\sqrt{A_m^2+B_m^2}\cos(\omega t-\Phi)$$

که درآن Φ با $\tan\Phi=\frac{B_m}{A_m}$ تعیین میگردد و ربعی که Φ درآن قراردارد باروابط زیر مشخص میگردد:

$$\cos\Phi=\frac{A_m}{\sqrt{A_m^2+B_m^2}} \qquad \sin\Phi=\frac{B_m}{\sqrt{A_m^2+B_m^2}}$$

تمرین ۲- همین نتایج را با استفاده از فازورها بدست آورید.

۲-۲- کاربرد روش فازوری درمعادلات دیفرانسیل

چنانکه در ابتدای این بخش گفته شد ، روش فازوری راحت‌ترین روش برای بدست آوردن جواب‌خاص یک معادله دیفرانسیل خطی‌باضرایب‌حقیقی‌ثابت ، وقتی که تابع تحریک سینوسی است ، میباشد. معادله زیر را درنظر بگیرید :

(۲—۱۰)

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=A_m\cos(\omega t+\Phi)$$

که a_0 ، a_1 ، . . . ، a_n ، A_m ، ω و Φ ثابت‌های حقیقی میباشند. بابکاربردن فازورها چنین قرارمیدهیم :

$$A\triangleq A_me^{j\Phi} \quad \text{و} \quad X\triangleq X_me^{j\psi} \qquad (۲—۱۱)$$

با جایگزین نمودن $\mathrm{Re}(Xe^{j\omega t})$ بجای $x(t)$ درمعادله دیفرانسیل بدست میاوریم :

$$a_0\frac{d^n}{dt^n}\mathrm{Re}(Xe^{j\omega t})+\cdots+a_n\mathrm{Re}(Xe^{j\omega t})=\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})$$

ازلم ۱ ، میتوان نوشت:

$$\frac{d^n}{dt^n}\mathrm{Re}(a_0Xe^{j\omega t})+\cdots+\mathrm{Re}(a_nXe^{j\omega t})=\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})$$

با کاربرد مکررلم ۲ ، بدست‌میاوریم :

$$\mathrm{Re}[a_0(j\omega)^nXe^{j\omega t}]+\cdots+\mathrm{Re}(a_nXe^{j\omega t})=\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})$$

مجدداً با استفاده ازلم ۱ ، داریم :

$$\mathrm{Re}\{ [a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(j\omega) + a_n] X e^{j\omega t} \} = \mathrm{Re}(A e^{j\omega t})$$

لم ۲ ، معادله جبری برای X را چنین بدست میدهد.

$$[a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(j\omega) + a_n] X = A \qquad (\text{۱۲ — ۲ الف})$$

یا :

$$X = \frac{A}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(j\omega) + a_n} \qquad (\text{۱۲ — ۲ ب})$$

بنابراین اندازه X چنین است :

$$(\text{۱۳ — ۲ الف})$$

$$X_m = \frac{A_m}{[\underbrace{(a_n - a_{n-2}\omega^2 + \cdots)^2}_{\text{توانهای زوج } \omega} + \underbrace{(a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \cdots)^2}_{\text{توانهای فرد } \omega}]^{\frac{1}{2}}}$$

و فاز X نیز چنین خواهد بود :

$$\psi = \Phi - \tan^{-1} \frac{a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \cdots}{a_n - a_{n-2}\omega^2 + \cdots} \qquad (\text{۱۳ — ۲ ب})$$

که درآن زاویه نشان داده شده با $\tan^{-1}(\cdot)$ مطابق قاعده‌ای که قبلاً بیان شد در ربع انتخاب شده قراردارد.

تبصره - معادله (۱۲ — ۲ الف) را میتوان برای **X** حل نمود و جوابی راکه در معادله (۱۲ — ۲ ب) داده شده بدست آورد. با شرط اینکه ω چنان باشد که :

$$a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} j\omega + a_n \neq 0$$

اگر برای ω موردنظر این چند جمله‌ای صفر باشد ، $j\omega$ یک فرکانس طبیعی بوده و در نتیجه یک جواب خاص بصورت $tA\cos(\omega t + \Phi)$ بایستی درنظر گرفت (بخش ۲ — ۳ ضمیمه **پ** را ببینید).

میتوان بآسانی مطالب قبل را درمورد یک مدارخطی تغییرناپذیر با زمان با یک ورودی w ویک‌خروجی y چنانکه توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف میشود تعمیم داد.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = b_0 \frac{d^m w}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} w}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m w \qquad (۲-۱٤)$$

که درآن a_1 ، a_2 ، … ، a_n و b_0 ، b_1 ، … ، b_m اعداد حقیقی‌هستند. اگر ورودی یک سینوسی بصورت داده شده زیر باشد:

$$w(t) = \text{Re}(Ae^{j\omega t}) = |A| \cos(\omega t + \Phi) \qquad (۲-۱۵ \text{ الف})$$

که درآن:

$$A \triangleq |A| e^{j\Phi} \qquad (۲-۱۵ \text{ ب})$$

آنگاه یک جواب خاص معادله (۱٤ — ۲) باینصورت است:

$$y(t) = \text{Re}(Be^{j\omega t}) = |B| \cos(\omega t + \psi) \qquad (۲-۱٦ \text{ الف})$$

که درآن:

$$B \triangleq |B| e^{j\psi} \qquad (۲-۱٦ \text{ ب})$$

ارتباط میان ورودی که برحسب فازور A بیان شده و قسمتی از خروجی (فقط جواب خاص) که با فازور B نشان داده شده را میتوان از معادله زیر بدست آورد.

$$[(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_n]B = [b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_m]A \qquad (۲-۱۷)$$

معادله (۱۷ — ۲) با «تعویض مشتق k ام $w(t)$ توسط $(j\omega)^k A$ برای $k=o$ تا m ، و تعویض مشتق k ام $y(t)$ توسط $(j\omega)^k B$ برای $k=o$ تا n » ازمعادله (۱٤ — ۲) مستقیماً بدست آمده است. بنابراین دراصل ، تعیین یک جواب خاص که بصورت معادله (۱٦ — ۲) بیان میشود بسهولت از معادله (۱۷ — ۲) انجام‌پذیر است. تنها کار لازم ،

عملیاتی با اعداد مختلط است تا بتوان جواب را بشکل معادله (۱۶ — ۲ الف) درآورد .

مثال ۳- مدار RLC سری خطی تغییر ناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۲—۲) را درنظر بگیرید. گیریم ورودی ، منبع ولتاژ سینوسی زیر باشد :

$$e_s(t)=\mathrm{Re}(Ee^{j\omega t})=|E|\cos(\omega t+\Phi)$$

فرض کنید ولتاژ خروجی‌را ولتاژ دوسرخازن درنظر بگیریم. دراینصورت معادله دیفرانسیل برای تمام مقادیر t چنین است :

$$LC\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}+RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=e_s(t) \qquad (۲-۱۸)$$

ویک جواب خاص بشکل زیر است :

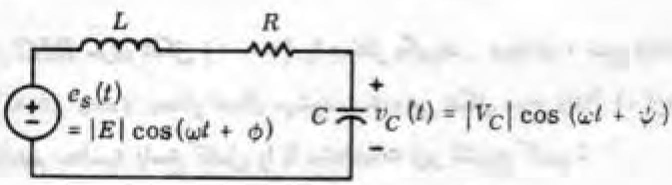
$$v_C(t)=\mathrm{Re}(V_Ce^{j\omega t})=|V_C|\cos(\omega t+\psi) \qquad (۲-۱۹)$$

رابطه میان فازور خروجی V_C که بایستی تعیین گردد و فازور ورودی E که معلوم است بشکل زیر میباشد:

$$[LC(j\omega)^2+RC(j\omega)+1]V_C=E \qquad (۲-۲۰)$$

توجه کنید که‌معادله(۲۰ — ۲)باجایگذاری $e_s(t)$ با E ومشتق k ام $v_C(t)$ با $(j\omega)^kV_C$ درمعادله (۱۸ — ۲) بدست میآید. بنابراین :

$$V_C=\frac{E}{1-\omega^2LC+j\omega RC} \qquad (۲-۲۱)$$



شکل ۲ - ۲-مدار RLC سری درحالت دائمی سینوسی

و بنابراین اندازه و فاز V_C چنین است :

$$|V_C| = \frac{|E|}{[(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\psi = \Phi - \tan^{-1}\frac{\omega RC}{1-\omega^2 LC}$$

جواب $v_C(t)$ که بصورت یک تابع حقیقی از زمان بیان میشود بسهولت ازمعادله (۱۹ — ۲) بدست میآید .

۳ پاسخ کامل و پاسخ حالت دائمی سینوسی

۳-۱ پاسخ کامل

یک مدارخطی تغییرناپذیر با زمان ، با ورودی سینوسی ، پاسخ کاملی بشکل زیردارد:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \qquad \text{برای تمام مقادیر } t \qquad (۳—۱)$$

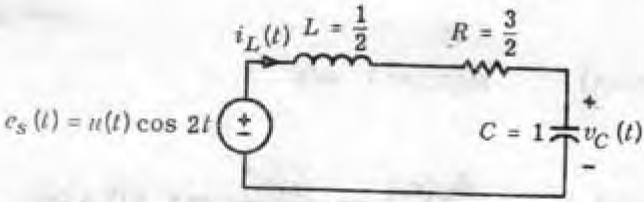
که درآن جواب خاص انتخاب شده $y_p(\cdot)$ یک سینوسی است که دارای همان فرکانس ورودی میباشد و $y_h(\cdot)$ جواب معادله دیفرانسیل همگن میباشد . با فرض اینکه تمام فرکانس های طبیعی مدار متمایز باشند (یعنی معادله مشخصه ریشه های مکرر نداشته باشد) داریم :

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t} \qquad (۳—۲)$$

که درآن s_i ها فرکانس های طبیعی و k_i ها ثابت های دلخواه میباشند که بایستی ازشرایط اولیه تعیین شوند. جواب خاص $y_p(\cdot)$ از بکاربردن نمایش فازوری یک سینوسی مطابق روشی که در بخش قبل نشان داده شد بسهولت بدست میآید. این گونه تجزیه پاسخ کامل توسط مثال زیر تشریح میگردد.

مثال ۱—مدار RLC سری شکل (۱ — ۲) را درنظر بگیرید. ورودی ، منبع ولتاژ سینوسی $e_s(\cdot)$ است که در $t=0$ بمدار اعمال میشود. خروجی شکل موج ولتاژ $v_C(\cdot)$ خازن میباشد. میخواهیم محاسبه پاسخ کامل را با مشخصات زیر تشریح کنیم :

$$e_s(t) = u(t)\cos 2t$$



شکل ۱-۳-۳-مدار RLC سری که محاسبه پاسخ کامل را تشریح میکند. حالت اولیه با $i_L(o_-)=۲$ و $v_c(o_-)=۱$ مشخص میشود

$L=\frac{۱}{۲}$ هانری $R=\frac{۳}{۲}$ اهم $C=۱$ فاراد

$v_C(o_-)=V_0=۱$ ولت $i_L(o_-)=I_0=۲$ آمپر

به‌تابع پله واحد $u(\cdot)$ که بصورت فاکتوری در رابطه e_s وجود دارد توجه کنید. این فاکتور برای توصیف اینکه ورودی e_s درلحظه $t=o$ بمدار اعمال میشود ضروری است، یعنی، برای $t<o$ ، $e_s(t)=o$ میباشد.

ابتدا طرز نوشتن معادله دیفرانسیل و تعیین شرایط اولیه لازم را مرور میکنیم. از KVL داریم:

$$L\,\frac{di_L(t)}{dt}+Ri_L(t)+v_C(t)=e_s(t) \qquad (۳-۳)$$

چون جریان i_L ، همان جریان درون خازن نیز میباشد داریم:

$$i_L(t)=C\,\frac{dv_C(t)}{dt} \qquad (۳-۴)$$

بنابراین، معادله (۳ — ۳) چنین میشود:

$$LC\,\frac{d^2v_C}{dt^2}+RC\,\frac{dv_C}{dt}+v_C=e_s(t)$$

ویا، با قراردادن مقادیر عددی،

$$\frac{۱}{۲}\,\frac{d^2v_C}{dt^2}+\frac{۳}{۲}\,\frac{dv_C}{dt}+v_C=u(t)\cos ۲t \qquad (۳-۵)$$

شرایط اولیه چنین است:

$$v_C(o_-)=۱ \text{ وات} \qquad (۶—۴ \text{ الف})$$

و :

$$\frac{dv_C(o_-)}{dt}=\frac{i_L(o_-)}{G}=۲ \text{ ولت بر ثانیه} \qquad (۶—۴ \text{ ب})$$

معادلات (۵ — ۴) و (۶ — ۴) خروجی v_C را کاملاً توصیف میکنند. پاسخ کامل نیز بسهولت بدست میآید. معادله مشخصه بصورت، $\frac{۱}{۲}s^۲+\frac{۳}{۲}s+۱$ میباشدوفرکانس های طبیعی $s_۱=-۱$ و $s_۲=-۲$ خواهند بود. بنابراین جواب معادله همگن بشکل زیر است:

$$v_h(t)=k_۱e^{-t}+k_۲e^{-۲t} \qquad (۷ - ۴)$$

راحت‌ترین جواب خاص چنین است:

$$v_p(t)=\mathrm{Re}(Ve^{j۲t})=|V|\cos(۲t+\psi) \qquad (۸ - ۴)$$

که در آن V نمایشگر فازور متغیرخروجی بوده و فازور ولتاژ خروجی نامیده میشود. ورودی را نیز برحسب فازور ولتاژ E چنین نشان میدهیم:

$$e_s(t)=\mathrm{Re}(Ee^{j۲t})=\cos ۲t$$

که $E=۱\,e^{j0}$ میباشد. فازور ولتاژ V ، مطابق قاعده‌ای که در بخش قبل بیان‌شد ، بسهولت از معادله (۵ — ۴) بدست میآید [جایگزین کردن مشتق k ام v_C با $(j\omega)^kV$] بنابراین:

$$\left[\frac{۱}{۲}(j\omega)^۲+\frac{۳}{۲}(j\omega)+۱\right]V=E$$

یا

$$V=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}\omega^۲+j\frac{۳}{۲}\omega} \qquad (۹ - ۴)$$

با $\omega=۲$ ،

$$V=\frac{۱}{-۱+j۳}=۰٫۳۱۶e^{-j۱۰۸٫۴^\circ}$$

از معادله (۸ — ۳) جواب خاص بدست میآید

$$v_p(t)=۰٫۳۱۶\cos(۲t-۱۰۸٫۴^\circ) \qquad (۳-۱۰)$$

جواب کامل چنین است:

$$v_C(t)=v_h(t)+v_p(t)$$

$$=k_1e^{-t}+k_۲e^{-۲t}+۰٫۳۱۶\cos(۲t-۱۰۸٫۴^\circ) \qquad (۳-۱۱)$$

ثابت‌های k_1 و $k_۲$ ازمعادلات (۶ — ۳ الف) و (۶ — ۳ ب) بدست میآیند. از (۶ — ۳ الف) و (۱۱ — ۳) داریم:

$$v_C(o)=۱=k_1+k_۲+۰٫۳۱۶\cos(-۱۰۸٫۴^\circ)$$

یا

$$k_1+k_۲=۱٫۱$$

از معادلات (۶ — ۳ ب) و (۱۱ — ۳) داریم

$$\frac{dv_C}{dt}(o)=۲=-k_1-۲k_۲-۰٫۳۱۶\times ۲\sin(-۱۰۸٫۴^\circ)$$

یا

$$k_1+۲k_۲=-۱٫۴$$

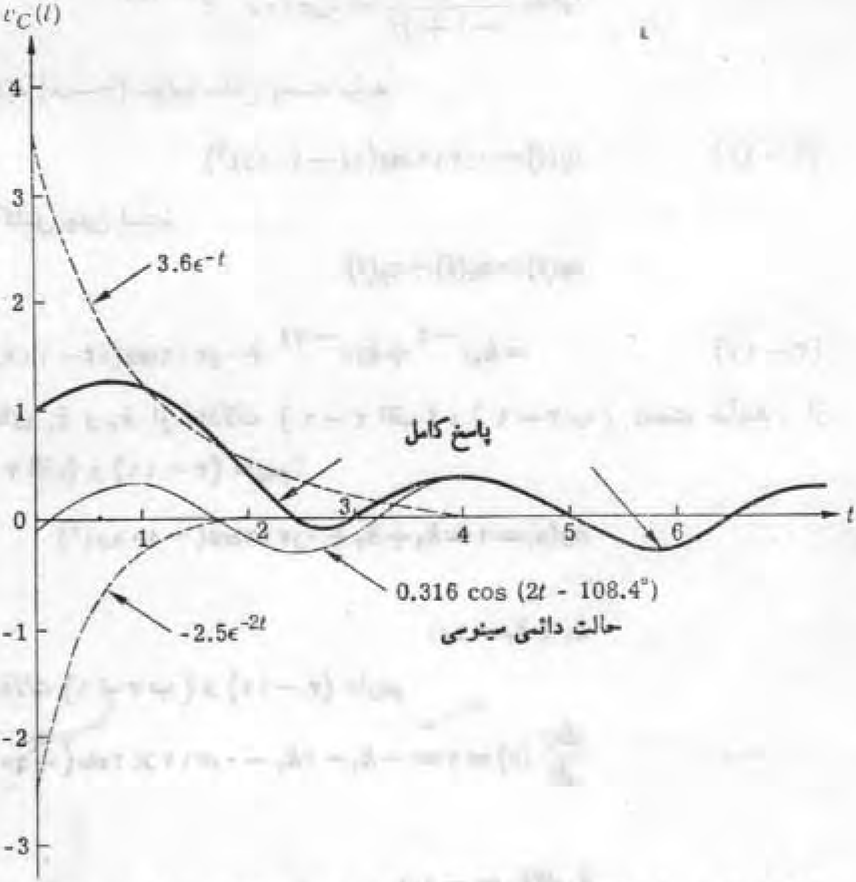
بنابراین:

$$k_1=۳٫۶ \quad و \quad k_۲=-۲٫۵$$

جواب کامل چنین است:

$$v_C(t)=۳٫۶e^{-t}-۲٫۵e^{-۲t}+۰٫۳۱۶\cos(۲t-۱۰۸٫۴^\circ) \qquad (۳-۱۲)$$

نمایش $v_C(t)$ درشکل (۲ — ۳) داده شده است. توجه کنید که پاسخ کامل را میتوان بدومولفه مجزای حالت گذرا و حالت دائمی تقسیم نمود. حالت گذرا همانند v_h ازمعادله (۷ — ۳) است و حالت دائمی همانند v_p ازمعادله (۱۰ — ۳) میباشد. همچنین توجه شودکه برای $t>۴$ ثانیه، پاسخ کامل اساساً پاسخ حالت دائمی سینوسی میباشد.



شکل ۲-۳-پاسخ کامل $v_C(\cdot)$ (نشان داده شده توسط خط کلفت) برابر مجموع حالت دائمی سینوسی (خط نازک) و جملات حالت گذرا (خطوط نقطه‌چین) میباشد

تبصره ۵- دربعضی مدارهای ساده میتوان حالت‌اولیه را چنان انتخاب نمود که‌پاسخ حالت دائمی‌سینوسی بلافاصله پس‌از اعمال ورودی حاصل‌شود. بعبارت دیگر، جمله‌حالت گذرا متحد با صفر باشد. روش انتخاب حالت اولیه برای این منظور برپایه دو واقعیت قراردارد (بخش‌های ۳ و ٤ فصل‌دوم را ببینید) : (۱) برای جریان کراندار ، ولتاژ دو سر یک خازن نمیتواند بطورلحظه‌ای تغییر کند و (۲) برای ولتاژ کراندارجریان داخل یک سلف نمیتواند بطور لحظه‌ای تغییر کند.

تمرین ۱- گیریم درشکل (۱ — ۲) اندوکتانس L برابر صفر باشد وبنابراین یک مدار RC سری بدست میآید. ولتاژ اولیه $v_C(o_-)$ دوسرخازن را چنان انتخاب کنید که پس از اعمال ورودی e_s هیچ حالت گذرائی موجود نباشد.

تمرین ۲- مدارشکل (۱ — ۲) را با $L=\frac{1}{2}$ هانری ، مانند مثال ۱ درنظر بگیرید. آیا ممکن است حالت اولیه $i_L(o_-)$, $v_C(o_-)$ را چنان انتخاب نمود که پس‌از اعمال ورودی e_s هیچ حالت گذرائی موجود نباشد؟ اگر چنین است ، حالت اولیه را تعیین کنید.

۲-۳ پاسخ حالت دائمی سینوسی

مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان دلخواه را که با یک منبع سینوسی تنها تحریک میشود درنظرمیگیریم. فرض کنید یکی از متغیرهای خاص شبکه مثلاً y مورد توجه ما میباشد. پاسخ y به ورودی سینوسی و حالت اولیه مشخص شده بشکل زیر است:

$$y(t)=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}+\cdots+k_ne^{s_nt}+A_m\cos(\omega t+\psi) \qquad (۲—۱۲)$$

که در آن ، بمنظور سهولت فرض کرده‌ایم که فرکانس های طبیعی ساده میباشند ، و k_1 ، k_2 ، . . . k_n ثابت‌هایی‌هستند که به‌حالت اولیه بستگی دارند و دامنه A_m و زاویه ψ جواب خاص، بسادگی از روش فازوری بدست میآیند.

مشاهده نکته زیر بسیار حایز اهمیت است. فرض کنید که تمام فرکانس های طبیعی در نیم‌صفحه باز چپ + فرکانس های مختلط قراردارند دراینصورت وقتی $t \to \infty$ ، در معادله (۱۳ — ۲) جملات $k_1e^{s_1t}$ ، $k_2e^{s_2t}$ ، . . . ، $k_ne^{s_nt}$ بسمت صفر میل میکنند. بعبارت‌دیگر، وقتی $t \to \infty$ ، $y(t)$ بطور دلخواه به‌سینوسی $A_m\cos(\omega t+\psi)$ نزدیک میشود. این‌امر ما را مجاز میدارد که حقیقت بسیار مهم زیر را بیان کنیم:

+ نیم‌صفحه «باز» چپ ، شامل نیم‌صفحه چپ مختصات مختلط میباشد که محور انگاری از آن «حذف شده» است. بعبارت دیگر ، نیم‌صفحه بازچپ ، شامل‌تمام نقاطی‌است که‌جزء حقیقی آنها منفی میباشد.

« صرفنظر از حالت اولیه و مشروط براینکه تمام فرکانس‌های طبیعی در نیم‌صفحه بازچپ واقع باشند، وقتی $t \to \infty$ ، پاسخ سینوسی خواهد شد. این پاسخ سینوسی را **پاسخ حالت دائمی سینوسی** مینامند. پاسخ حالت دائمی سینوسی را میتوان بسهولت از روش فازوری محاسبه نمود».

چنانکه در مثال ۱ دیده‌ایم ، حالت دائمی سینوسی با فازور V در معادله (۹ — ۳) توصیف میگردد وپاسخ حالت دائمی‌سینوسی‌توسط جواب خاص بدست آمده از روش‌فازوری، یعنی، $v_p(t) = \mathrm{Re}(Ve^{j2t})$ داده میشود.

برمبنای ملاحظات‌فوق ، میتوان مانند فصل پنجم ، بیان زیر را پذیرفت. وقتی تمام فرکانس‌های‌طبیعی یک مدارخطی‌تغییرناپذیر با زمان در«نیم‌صفحه بازچپ» باشند، گوئیم **مدار پایدار مجانبی** [۱] است. اگر یک یا چند فرکانس طبیعی آن در « نیم‌صفحه باز راست » واقع باشند گوئیم که مدار **ناپایدار**[۲] است. بنابراین وقتی $t \to \infty$ ، هرپاسخ ورودی‌صفریک مدار پایدار مجانبی بسمت صفر میل میکند. برای مدارهای ناپایدار فقط میتوان بیان نمود که وقتی $t \to \infty$ ، برای بسیاری ازحالت‌های اولیه ، پاسخ ورودی صفر بسمت بینهایت میل میکند.

بنابراین ، نتیجه مهم اینست که برای مدارهای « پایدارمجانبی » که توسط یک ورودی سینوسی تنها تحریک میشوند ، حالت اولیه هرچه باشد وقتی $t \to \infty$ ، هرمتغیر مدار بسمت حالت‌دائمی سینوسی متناظر میل میکند. این‌حقیقت را با این جمله بیان‌میکنیم « مدارهای پایدارمجانبی دارای پاسخ حالت دائمی سینوسی میباشند ».

تبصره- هرگاه مدار علاوه‌بر فرکانس‌های طبیعی واقع درنیم‌صفحه بازچپ، دارای فرکانس‌هایی از نوع انگاری خالص هم باشد ، بازگاهی اوقات میتوان پاسخ حالت دائمی را تعریف نمود. برای درک این‌تبصره لازم است حل معادلات دیفرانسیلی راکه ریشه‌های مشخصه انگاری خالص ویا ریشه‌های مکرر دارند مرور نمود. برای تشریح این‌دو حالت متفاوت دومثال زیر را بررسی میکنیم :

مثال ۲- گیریم چند جمله‌ای مشخصه یک معادله دیفرانسیل بصورت زیر باشد.

۱ - Asymptotically stable ۲ - Unstable

$$(s^2+\omega_0^2)^2=s^4+2\omega_0^2s^2+\omega_0^4$$

ریشه های مشخصه $s_1=s_2=j\omega_0$ و $s_3=s_4=-j\omega_0$ میباشند. جواب معادله دیفرانسیل همگن چنین است:

$$y_h(t)=(k_1+k_2t)e^{j\omega_0t}+(k_3+k_4t)e^{-j\omega_0t}$$

که میتوان برحسب کسینوس بصورت زیر نیز نوشت:

$$y_h(t)=K_1\cos(\omega_0t+\Phi_1)+K_2t\cos(\omega_0t+\Phi_2)$$

که درآن، K_1 ، K_2 ، Φ_1 و Φ_2 ثابت‌های حقیقی میباشند. واضح است که وقتی t زیاد میشود، $y_h(t)$ مقادیر دلخواه بزرگی بخود میگیرد که نشان میدهد مدار ناپایدار است. برای مقادیر بزرگ t ، درجواب کامل $y=y_h+y_p$ ، y_p درمقابل y_h قابل صرفنظر میباشد. ازاین‌مثال نتیجه میگیریم که هرگاه مداری دارای فرکانسهای‌طبیعی مکررباشدکه روی محور انگاری قرارگیرند، این مدار ناپایدار بوده و دارای پاسخ حالت دائمی سینوسی نیست.

مثال ۳- گیریم چند جمله‌ای مشخصه یک معادله دیفرانسیل بصورت $s^2+\omega_0^2$ باشد، ریشه های مشخصه $s_1=j\omega_0$ و $s_2=-j\omega_0$ میباشند. فرض کنید تابع‌تحریک یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ئی ω باشد که $\omega\neq\omega_0$ است. آنگاه جواب کامل بصورت زیر است:

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

که در آن:

$$y_h(t)=k_1e^{j\omega_0t}+k_2e^{-j\omega_0t}=K\cos(\omega_0t+\Phi)$$

که K و Φ ثابت‌های حقیقی میباشند و جواب خاص که از روش فازوری بدست میآید بصورت زیر است:

$$y_p(t)=B\cos(\omega t+\psi)$$

B و ψ ثابت‌های حقیقی میباشند. توجه کنید که y_h نوسانی بوده و بنابراین نمیتواند

بعنوان قسمت گذرای پاسخ کامل درنظر گرفته شود. اما با این‌حال، y_p یک سینوسی با همان فرکانس ورودی بوده و بنابراین میتواند بعنوان پاسخ حالت دائمی سینوسی تعریف شود، اگرچه پاسخ کامل شامل‌سینوسی دیگری با فرکانس متفاوت میباشد. این نوع پاسخ حالت دائمی سینوسی را میتوان با یک گیرنده تطبیق شده [۱] مناسب آشکار نمود.

ازطرف‌دیگر، هرگاه فرکانس زاویه‌ای ω ورودی بر ω_0 منطبق گردد، پاسخ کامل دارای جمله $At\cos(\omega t+\theta)$ خواهد بود که با زیاد شدن t بطور دلخواه زیاد میشود، و بنابراین پاسخ حالت دائمی وجود نخواهد داشت. ازاین مثال نتیجه میگیریم که اگر مدار دارای یک فرکانس طبیعی‌انگاری مثلاً در $j\omega_0$ باشد که ریشه ساده معادله مشخصه است و اگرفرکانس زاویه‌ای ω ورودی سینوسی، مساوی ω_0 نباشد، آنگاه پاسخ حالت دائمی سینوسی بخوبی معین است.

بطور خلاصه، «یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان که تمام فرکانس‌های طبیعی آن در داخل نیم‌صفحه بازچپ صفحه فرکانس مختلط واقع باشند، وقتی‌که توسط یک ورودی سینوسی تحریک شود، دارای پاسخ حالت دائمی سینوسی خواهد بود. بعلاوه اگر مدار دارای فرکانس‌های طبیعی انگاری ساده‌ای باشد که با فرکانس زاویه‌ای سینوسی ورودی متفاوت باشند، پاسخ حالت دائمی بازهم وجود خواهد داشت».

« پاسخ حالت دائمی سینوسی همیشه همان فرکانس ورودی را داشته و میتواند به‌مناسب‌ترین وجهی از روش فازوری بدست آید ».

تبصره- برای مدارهای‌خطی «تغییرپذیر با زمان» ویا مدارهای «غیرخطی» پاسخ حالت‌دائمی یک ورودی سینوسی (اگر وجود داشته باشد) معمولاً سینوسی نخواهد بود. این پاسخ ممکن است شامل چندین سینوسی باشد، حتی سینوسی‌هایی که فرکانس‌های‌آنها جزئی از فرکانس ورودی باشند (برای مثال، مسائل ۳، ۴ و ۵ این فصل را ببینید).

۳-۳ جمع آثار درحالت دائمی

حالتی‌را درنظربگیرید که‌درآن‌یک مدارخطی‌تغییرناپذیر با زمان که تمام‌فرکانس‌های طبیعی آن در نیم‌صفحه بازچپ قراردارند توسط دومنبع با فرکانس‌های « مختلف» تحریک

۱ - Tuned Receiver

شود. بعنوان مثال، میتوان موردی را درنظر گرفت که یک تقویت کننده صوتی[۱] تک‌نت حاصل از یک فلوت را تقویت میکند. سینوسی‌ها، نت اصلی و هارمونیکهای فلوت میباشند.

برای سهولت درانجام تجزیه و تحلیل، مدار RLC سری شکل (۳ — ۳) را درنظر میگیریم. معادله دیفرانسیل این مدار چنین است:

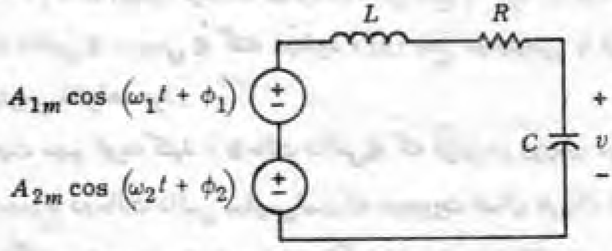
(۳ — ۱۴)

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+RC\frac{dv}{dt}+v=A_{1m}\cos(\omega_1 t+\Phi_1)+A_{2m}\cos(\omega_2 t+\Phi_2)$$

که ولتاژهای ورودی بترتیب دارای دامنه‌های A_{1m} و A_{2m}، فرکانس‌های ω_1 و ω_2 و فازهای Φ_1 و Φ_2 میباشند. جواب این معادله بصورت v_p+v_h میباشد که v_h جواب معادله همگن‌است. برای‌بدست‌آوردن یک جواب خاص (راحت v_p)، مشاهده میشود که‌اگر v_{p1} جواب خاص محاسبه شده با روش فازوری، وقتی که سینوسی $A_{1m}\cos(\omega_1 t+\Phi_1)$ بتنهایی مدار را تحریک میکند باشد، و اگر v_{p2} جواب متناظر برای وقتی که سینوسی $A_{2m}\cos(\omega_2 t+\Phi_2)$ بتنهایی مدار را تحریک‌میکند باشد، آنگاه $v_p=v_{p1}+v_{p2}$ است. درحقیقت طبق تعریف v_{p1}، داریم:

$$LC\frac{d^2v_{p1}}{dt^2}+RC\frac{dv_{p1}}{dt}+v_{p1}=A_{1m}\cos(\omega_1 t+\Phi_1)$$

وبرطبق تعریف v_{p2} داریم:



شکل ۳-۳-مدار RLC سری که با دومنبع ولتاژ سینوسی تحریک میشود

---

۱ - Audio Amplifier

$$LC\frac{d^2 v_{p2}}{dt^2}+RC\frac{dv_{p2}}{dt}+v_{p2}=A_{2m}\cos(\omega_2 t+\Phi_2)$$

ویا جمع کردن این دو معادله خواهیم‌داشت :

$$LC\frac{d^2}{dt^2}(v_{p1}+v_{p2})+RC\frac{d}{dt}(v_{p1}+v_{p2})+(v_{p1}+v_{p2})$$
$$=A_{1m}\cos(\omega_1 t+\Phi_1)+A_{2m}\cos(\omega_2 t+\Phi_2)$$

که از آن نتیجه میگیریم $v_{p1}+v_{p2}$ جواب خاص معادله (۱۴ — ۳) میباشد. با بکار بردن نتایج تجزیه و تحلیل فازوری می‌بینیم که :

$$v_p(t)=V_{1m}\cos(\omega_1 t+\Phi_1+\theta_1)+V_{2m}\cos(\omega_2 t+\Phi_2+\theta_2) \qquad (۳—۱۵)$$

که درآن:

$$V_{1m}e^{j(\theta_1+\Phi_1)}\triangleq\frac{A_{1m}e^{j\Phi_1}}{1-\omega_1^2 LC+j\omega_1 RC}$$

$$V_{2m}e^{j(\theta_2+\Phi_2)}\triangleq\frac{A_{2m}e^{j\Phi_2}}{1-\omega_2^2 LC+j\omega_2 RC}$$

توجه کنید که در مخرج‌های این‌دوعبارت بترتیب فرکانس‌های ω_1 و ω_2 را بکار بردیم. ما بایستی فرکانس ورودی ، سینوسی مناسب را بکاربریم. مشاهده این نکته بسیار مهم است که شرایط اولیه هرچه باشند وقتی $t\to\infty$ ، ولتاژ v بطور دلخواه به‌مقدار v_p که با معادله (۱۵ — ۳) داده میشود نزدیک میگردد. شکل موج $v_p(\cdot)$ را «حالت دائمی» می‌نامند و حالت دائمی « سینوسی » گفته نمیشود ، زیرا جمع دوسینوسی با فرکانس‌های مختلف دیگر سینوسی نخواهد بود.

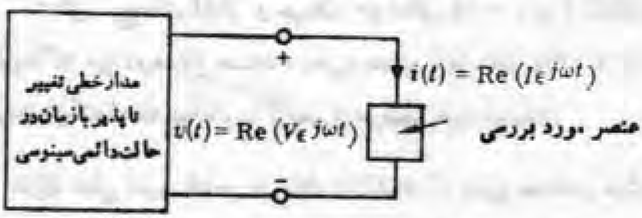
با این واقعیت مهم توجه کنید ، «حالت دائمی» که ازاین‌دو ورودی سینوسی نتیجه میشود مساوی مجموع دوحالت دائمی سینوسی‌است که درصورت اعمال هریک از دوسینوسی ورودی بطور جداگانه روی مدار بدست میاید. اگرچه این نتیجه فقط برای مدار RLC شکل (۳ — ۳) اثبات گردید ، ولی مشاهده اینکه این‌روش استدلال میتواند بهرمدار خطی تغییرناپذیر با زمان اعمال شود کار مشکلی نیست

٤ مفهوم‌های امپدانس و ادمیتانس

در دوبخش گذشته نشان دادیم که پاسخ حالت دائمی سینوسی را میتوان بسهولت با استفاده از نمایش فازوری یک سینوسی بدست آورد. همچنین آموختیم که در تعیین پاسخ حالت دائمی سینوسی، بجای حل یک معادله دیفرانسیل، تنها لازم است که یک معادله جبری را حل کنیم. بجای جمع، تفریق یا مشتق گیری سینوسی‌ها، میتوان اعداد مختلط نمایش‌دهنده آنهارا جمع ویا تفریق نمود. دراین بخش خواص دیگری از نمایش فازوری سینوسی‌ها را بررسی کرده ومفهوم های‌مهم «امپدانس»[1] و «ادمیتانس»[2] را بنیان گذاری خواهیم کرد. همچنین خواهیم دید که وقتی تنها پاسخ حالت دائمی سینوسی یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان‌را میخواهیم بدانیم، میتوان از نوشتن معادلات دیفرانسیل‌صرفنظر نمود و بجای آن معادلات جبری خطی لازم را مستقیماً از یک شبکه برحسب فازورهایی که نمایشگر ورودی، خروجی و سایر متغیرهای شبکه میباشند بدست آورد.

٤-۱ روابط فازوری برای اجزاء مدار

توصیف ولتاژ - جریان اجزاء مدارهای ساده درفصل‌دوم بتفصیل مطالعه شد. برای اجزاء خطی «تغییرناپذیر با زمان» مدار، اگرتنها توجه ما روی پاسخ‌حالت دائمی سینوسی باشد، میتوان با استفاده از نمایش فازوری ولتاژ و جریان، آنرا توصیف نمود. دراین زیربخش‌توصیف سه جزء اصلی مدار یعنی مقاومت‌ها، خازن‌ها و سلف‌ها را بدست خواهیم آورد. درهرحالت فرض میکنیم که جزء مورد بررسی به‌یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، چنانکه درشکل (۱ — ٤) نشان داده شده است متصل باشد و مدار درحالت دائمی سینوسی



شکل ۱-٤ - یک مدارخطی تغییرناپذیر با زمان درحالت دائمی سینوسی جزء مورد بررسی را تحریک میکند

---

۱ - Impedance
۲ - Admittance

با فرکانس زاویه‌ای ω قرار گرفته باشد. گیریم ولتاژ شاخه و جریان شاخه جزء موردنظر در حالت دائمی سینوسی چنین باشند:

$$v(t) = \mathrm{Re}(Ve^{j\omega t}) = |V| \cos(\omega t + \measuredangle V) \qquad (۴-۱)$$

و:

$$i(t) = \mathrm{Re}(Ie^{j\omega t}) = |I| \cos(\omega t + \measuredangle I) \qquad (۴-۲)$$

میخواهیم رابطه میان فازور ولتاژ V و فازور جریان I را برای هریک از سه جزء بدست آوریم:

«مقاومت» یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان، با مقاومت R و یا رسانایی $G = \frac{1}{R}$ چنین مشخص میشود:

$$v(t) = Ri(t) \qquad i(t) = Gv(t) \qquad (۴-۳)$$

برای بدست‌آوردن رابطه میان فازور ولتاژ و فازور جریان، معادلات (۴-۱) و (۴-۲) را در معادله (۴-۳) جایگزین میکنیم و با استفاده از لم ۳ بخش ۲ بدست میاوریم:

$$V = RI \qquad I = GV \qquad (۴-۴)$$

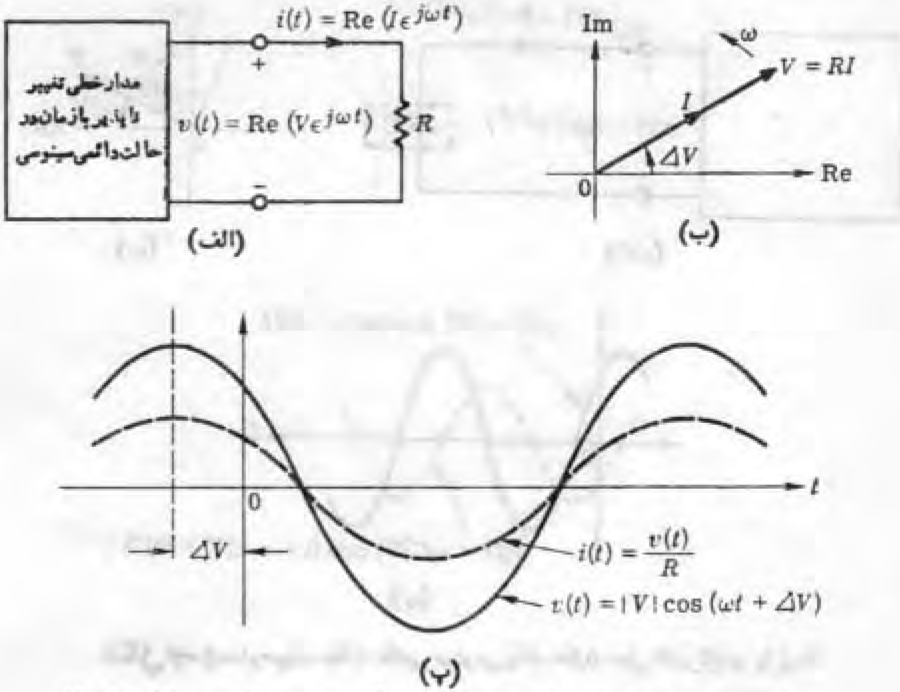
اگر چه مقاومت و رسانایی یک مقاومت همیشه اعداد حقیقی هستند، ولی فازور ولتاژ V و فازور جریان I معمولاً اعداد مختلط میباشند. رسم فازور ولتاژ و فازور جریان در صفحه مختلط مطابق شکل نشان داده شده در (۴-۲ ب) آموزنده است. چون R یک عدد حقیقی است اعداد مختلط V و I هم‌امتداد [1] بوده و بایستی دارای یک زاویه باشند، یعنی $\measuredangle I = \measuredangle V$. شکل موج‌های ولتاژ و جریان در شکل (۴-۲ پ) نشان داده شده‌اند. اصطلاحاً گویند که این دو هم‌فاز هستند، یعنی، منحنی آنها محور زمان را در یک لحظه قطع کرده و هردو در یک لحظه بمقدار ماگزیمم و می‌نیمم خود میرسند.

«خازن» یک خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان با ظرفیت C چنین مشخص میشود:

$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad (۴-۵)$$

---

۱ - Collinear



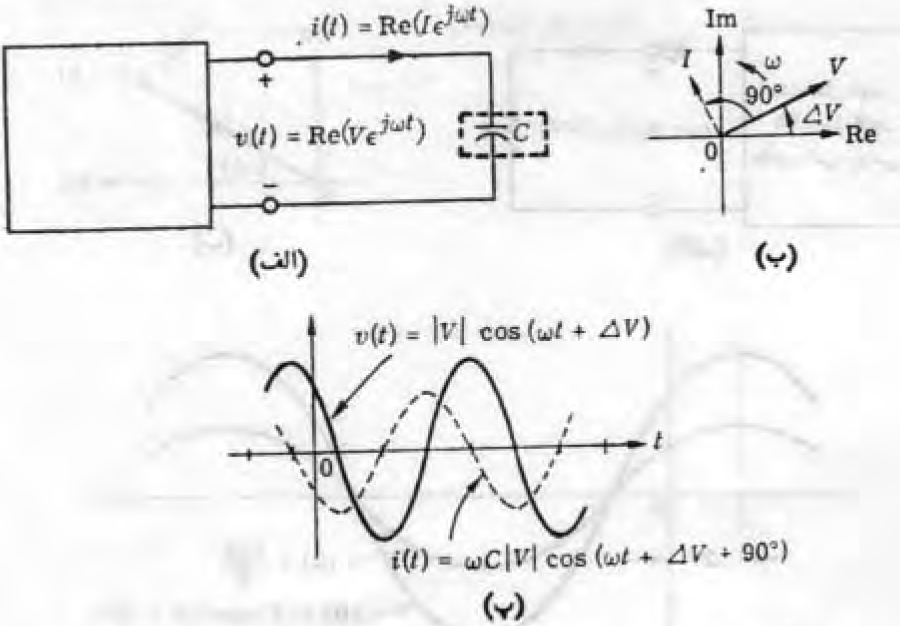
شکل ۲-٤-توصیف حالت دائمی سینوسی یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان

با استفاده از نمایش فازوری i و v در معادلات (۱ — ٤) و (۲ — ٤) وجایگزین کردن آنها در (٥ — ٤)، بدست میاوریم :

$$V=\frac{1}{j\omega C}I \qquad \text{یا} \qquad I=j\omega CV \qquad (٤-٦)$$

دربدست آوردن (٦ — ٤)، از لم ۲ بخش ۲ (یعنی اعمال $\frac{d}{dt}$ به $Ve^{j\omega t}$، معادل ضرب $Ve^{j\omega t}$ در $j\omega$ میباشد) استفاده شده است. بعلت‌وجود ضریب $j\omega$ درمعادله (٦ — ٤)، فازورجریان I و فازور ولتاژ V وقتی درصفحه مختلط رسم شوند مطابق شکل (۳ — ٤ب) دارای ۹۰° اختلاف فاز خواهند بود. فازور جریان از فازور ولتاژ «جلو»[1] می‌افتد زیرا $I=j\omega CV$ و $\measuredangle I=\measuredangle V+۹۰°$ است. درشکل (۳ — ٤ پ)، شکل موج‌های ولتاژ وجریان رسم شده‌اند وشکل موج جریان بمیزان یک چهارم سیکل برفازور ولتاژ پیشی‌دارد.

۱ - Leads



شکل ۳-۴- توصیف حالت دائمی سینوسی یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان

بایستی خاطرنشان کرد که برخلاف مورد مقاومت ، رابطه میان فازور جریان وفازور ولتاژ در اینجا به‌فرکانس زاویه‌ای ω بستگی دارد.

«سلف» یک‌سلف خطی‌تغییرناپذیربازمان با اندوکتانس L چنین‌مشخص‌میشود:

$$v = L\frac{di}{dt} \qquad (۴-۷)$$

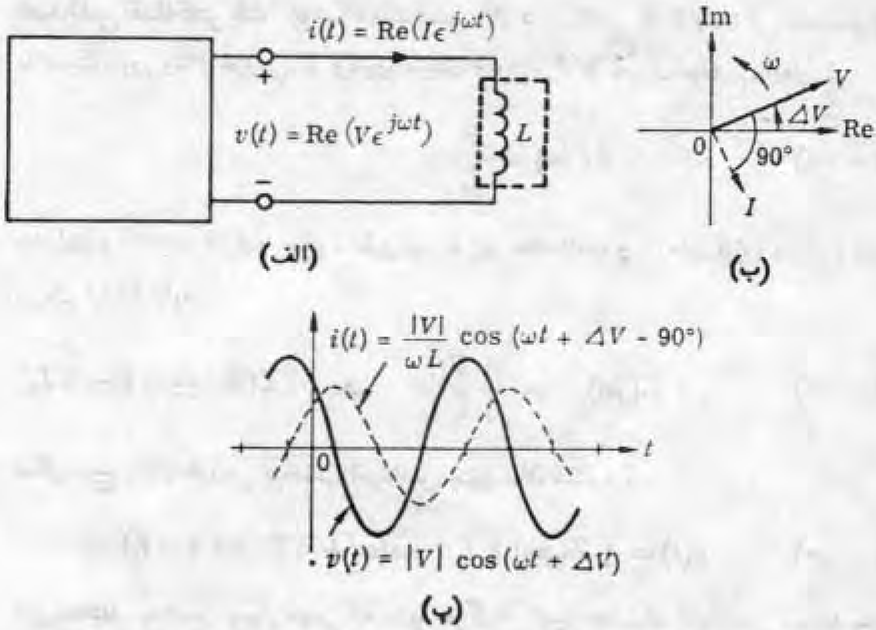
مثل مورد خازن ، روابط زیر را میان فازور ولتاژ و فازور جریان بدست میآوریم (برای یک سلف).

$$V = j\omega LI \qquad I = \frac{1}{j\omega L}V \qquad (۴-۸)$$

دراین‌مورد، فازور جریان‌از فازور ولتاژ بمقدار ۹۰° «عقب»[۱] میافتد، که‌معنی‌آن‌اینست که شکل موج جریان بمیزان یک چهارم سیکل از شکل موج ولتاژ عقب‌تر است. این فازورها

---

۱ - Lags



شکل ٤ - ٤- توصیف حالت دائمی سینوسی برای یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان

در شکل (٤ – ٤ ب و پ) تشریح شده‌اند. در اینجا نیز مثل مورد خازن، رابطه میان فازورهای جریان و ولتاژ به‌فرکانس بستگی دارد.

۲ - ٤- تعریف امپدانس و ادمیتانس

بحث روابط فازوری برای اجزاء مدار را میتوان برای شبکه‌های یک قطبی کلی با اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان، تعمیم داد. مدار شکل (٥ – ٤ الف) را درنظربگیرید که درآن شبکه یک قطبی N ازبهم‌پیوستن دلخواه اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان‌تشکیل شده است. ورودی یک منبع جریان سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω میباشد. بنابراین:

$$i_s(t) = \mathrm{Re}(I_s e^{j\omega t}) = |I_s| \cos(\omega t + \measuredangle I_s) \qquad (٤-٩)$$

گیریم پاسخ ولتاژ حالت دائمی سینوسی بصورت زیر باشد.

$$v(t) = \mathrm{Re}(V e^{j\omega t}) = |V| \cos(\omega t + \measuredangle V) \qquad (٤-١٠)$$

امپدانس نقطه تحریک[۱] «شبکه یک قطبی N درفرکانس ω یا بسادگی امپدانس‌را، با نسبت فازور ولتاژ خروجی V برفازور جریان ورودی I_s» تعریف میکنیم، یعنی :

$$Z(j\omega) \triangleq \frac{V}{I_s} \qquad (۴-۱۱)$$

بنابراین ، اندازه و فاز امپدانس ، طبق روابط زیر به‌اندازه‌ها و فازهای فازور ولتاژ و فازور جریان ارتباط دارد .

$$|Z(j\omega)| = \frac{|V|}{|I_s|} \quad \text{و} \quad \measuredangle Z(j\omega) = \measuredangle V - \measuredangle I_s \qquad (۴-۱۲)$$

شکل موج ولتاژ خروجی برحسب امپدانس چنین بیان میشود :

$$v(t) = |Z(j\omega)|\,|I_s| \cos(\omega t + \measuredangle Z(j\omega) + \measuredangle I_s) \qquad (۴-۱۳)$$

این معادله به‌نتایج بسیارمهمی که پایه هرگونه تعبیر محاسبات امپدانس میباشد منجر میگردد. بنابراین :

« اگر شبکه یک قطبی N دارای امپدانس نقطهٔ تحریک $Z(j\omega)$ بوده و جریان ورودی آن $I_s\cos(\omega t + \measuredangle I_s)$ باشد. آنگاه درحالت دائمی سینوسی ، ولتاژ قطب آن یک سینوسی‌با اندازه $|Z(j\omega)|\,|I_s|$ وفاز $\measuredangle V = \measuredangle Z(j\omega) + \measuredangle I_s$ خواهدبود». بعبارت دیگر، برای بدست‌آوردن دامنه ولتاژ سینوسی، دامنه جریان‌را دراندازه امپدانس (محاسبه شده درفرکانس مناسب) «ضرب» میکنیم و برای بدست آوردن فاز ولتاژ سینوسی ، فاز امپدانس‌را به‌فازجریان «میافزائیم» (بازهم‌محاسبه شده در فرکانس‌مناسب) $\measuredangle Z(j\omega)$.

درشکل (۵ - ۴ ب) ورودی یک منبع ولتاژ سینوسی است :

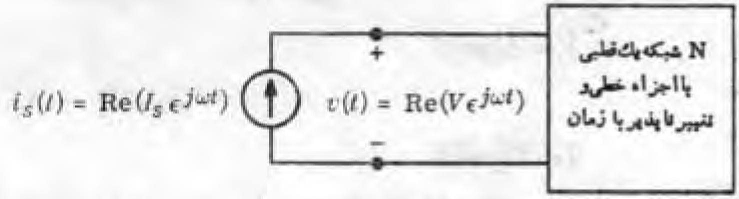
$$v_s(t) = \mathrm{Re}(V_s e^{j\omega t}) = |V_s| \cos(\omega t + \measuredangle V_s) \qquad (۴-۱۴)$$

و جریان i پاسخ حالت دائمی سینوسی است که چنین بیان میشود :

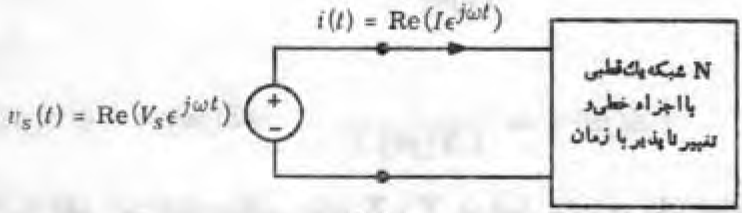
$$i(t) = \mathrm{Re}(I e^{j\omega t}) = |I| \cos(\omega t + \measuredangle I) \qquad (۴-۱۵)$$

---

۱ - Driving Point Impedance



(الف)



(ب)

شکل ۵ - ٤ - شبکه یک قطبی N که از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده ، (الف) به‌یک منبع جریان سینوسی، (ب) به‌یک منبع ولتاژسینوسی وصل‌شده است.

ادمیتانس نقطه تحریک شبکه « یک قطبی N درفرکانس ω » (یا بسادگی ادمیتانس) را با نسبت « فازور جریان خروجی I برفازور ولتاژ ورودی V_s » تعریف میکنیم یعنی :

$$Y(j\omega) \triangleq \frac{I}{V_s} \qquad (٤-١٦)$$

بنابراین ، اندازه و فاز ادمیتانس $Y(j\omega)$ طبق روابط زیر به‌اندازه‌ها و فازهای فازور ولتاژ و فازورجریان ارتباط دارد .

$$|Y(j\omega)| = \frac{|I|}{|V_s|} \quad , \quad \measuredangle Y(j\omega) = \measuredangle I - \measuredangle V_s \qquad (٤-١٧)$$

تبصره- اگرمنبع ولتاژ شکل (٥ — ٤ ب) طوری تنظیم‌شود که فازور V_s آن مساوی فازور ولتاژ خروجی V درشکل (٥ — ٤ الف) باشد. میتوان انتظار داشت که فازور پاسخ جریان I درشکل (٥ — ٤ ب) مساوی فازور منبع جریان I_s درشکل (٥ — ٤ الف) گردد .

بنابراین از (۱۱ — ٤) داریم :

$$V = Z(j\omega)I \qquad (٤-١٨)$$

از (۱٦ — ٤) داریم:

$$I = Y(j\omega)V \qquad (٤-١٩)$$

ازمعادلات (۱۸ — ٤) و (۱۹ — ٤) واضح است که برای تمام مقادیر ω :

$$Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)} \qquad (٤-٢٠)$$

و :

$$|Z(j\omega)| = \frac{1}{|Y(j\omega)|} \qquad \sphericalangle Z(j\omega) = -\sphericalangle Y(j\omega) \qquad (٤-٢١)$$

اثبات دقیق این رابطه معکوس میان Z و Y در فصل شانزدهم بیان خواهد شد.

تمرین-قاعده‌ای را که اندازه و فاز جریان را برحسب اندازه و فاز ولتاژ و $Y(j\omega)$ بدست میدهد دریک عبارت جمله‌ای بیان کنید.

از تعاریف گفته شده در مورد امپدانس و ادمیتانس ، بسرعت میتوان امپدانس‌ها و ادمیتانس‌های اجزاء R و L و C را بدست آورد :

فرکانس زاویه‌ای ω	(امپدانس) Z	(ادمیتانس) Y
مقاومت بامقاومت R	R	$G = \frac{1}{R}$
خازن باظرفیت C	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$
سلف با اندوکتانس L	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$

۵- تجزیه و تحلیل حالت دائمی‌سینوسی مدارهای ساده

قوانین کیرشف بیان میدارند که درهرلحظه از زمان ، جمع‌جبری ولتاژهای شاخه‌های معینی ویا جمع جبری‌جریانهای شاخه‌های معینی صفرمیباشند. اگر تنها حالت دائمی‌سینوسی مورد توجه بوده و اگر تنها لازم باشد که با شکل موجهای سینوسی با فرکانس یکسان

مواجه شویم ، میتوان بجای اینکه معادلات را برحسب خود سینوسی‌ها بنویسیم ، آنهارا برحسب‌فازورها بیان کنیم. بنابراین « درحالت دائمی سینوسی ، معادلات کیرشف‌را میتوان مستقیماً برحسب فازورهای ولتاژ و فازورهای جریان نوشت». بعنوان مثال گیریم معادله یک مش چنین نوشته شود :

$$v_1(t)+v_2(t)+v_3(t)=0$$

وفرض کنید که هریک از ولتاژها یک سینوسی بافرکانس «یکسان» ω باشد. دراینصورت داریم :

$$V_{1m}\cos(\omega t+\Phi_1)+V_{2m}\cos(\omega t+\Phi_2)+V_{3m}\cos(\omega t+\Phi_3)$$

$$=\mathrm{Re}(V_1e^{j\omega t})+\mathrm{Re}(V_2e^{j\omega t})+\mathrm{Re}(V_3e^{j\omega t})$$

$$=\mathrm{Re}[(V_1+V_2+V_3)e^{j\omega t}]=0$$

ازلم ۲ بخش ۲ میتوان‌بلافاصله یک‌معادله هم‌ارزبرحسب‌فازورهای ولتاژهای V_1 ، V_2 و V_3 نوشت. بنابراین :

$$V_1+V_2+V_3=0$$

البته ، با دانستن فازور وفرکانس ω ، همیشه میتوان توابع سینوسی زمانی را بدست آورد. بعنوان مثال ، اگر فازور ولتاژ در فرکانس‌زاویه ω توسط V داده شده باشد ، تابع سینوسی بسادگی چنین خواهد بود ،

$$v(t)=\mathrm{Re}(Ve^{j\omega t})=V_m\cos(\omega t+\Phi)$$

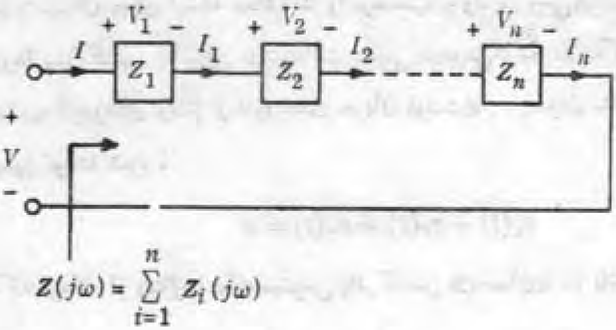
که درآن :

$$V\triangleq V_me^{j\Phi}$$

بطریق مشابه ، میتوان معادلات گره را برحسب فازورهای جریان نوشت .

۱ - ۵- بهم‌پیوستنهای سری - موازی

درابتدا، اتصالات سری و اتصالات موازی را درنظر میگیریم. درشکل (۱ — ۵) اجزاء مدار که‌بطورسری بهم‌وصل‌شده‌اند دیده میشود. درحالت‌دائمی سینوسی درفرکانس



شکل ۱-۵- امپدانس‌های سری

دادمشده ω ، هرجزء بایک‌امپدانس‌مشخص‌میشود . بانوشتن‌یک KCL درهر گره بلافاصله مشاهده میکنیم که جریانها برای تمام اجزاء یکسان هستند. برحسب فازورها داریم :

$$I_1 = I_2 = \cdots = I_n = I$$

با استفاده از KVL وبا نمایش فازوری ولتاژها ، داریم :

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

چون :

$$V_i = Z_i I_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

داریم:

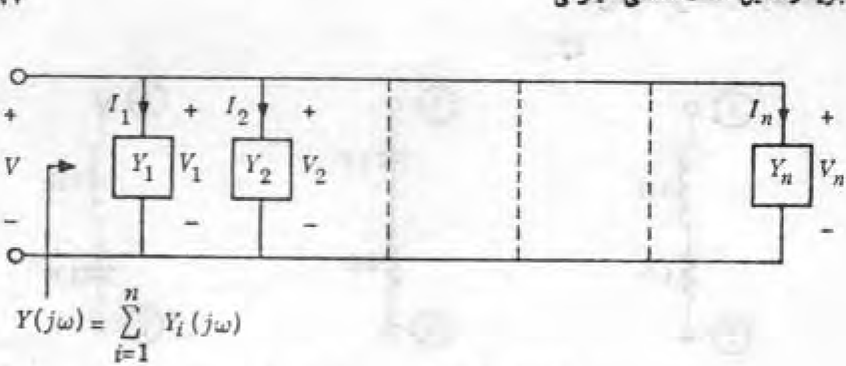
$$Z(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} Z_i(j\omega)$$

که درآن $Z = \frac{V}{I}$ امپدانس شبکه یک قطبی‌نشان داده شده در شکل (۱ — ۵) میباشد.

بطریق مشابه، درشکل (۲ — ۵) اجزاء ساده مدار که بطور موازی بهم‌وصل شده‌اند دیده میشود. هرجزء توسط امپدانس وبا ادمیتانس خود مشخص میشود. با استفاده از KVL داریم :

$$V_1 = V_2 = \cdots = V_n = V$$

بنابراین ولتاژهای تمام‌شاخه‌ها یکسان میباشند. با استفاده از KCL داریم :



شکل ۲-۵ - ادمیتانس‌های موازی

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

چون :

$$I_i = \mathrm{Y}_i V_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

داریم :

$$\mathrm{Y}(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i(j\omega)$$

که درآن $\mathrm{Y} = \frac{I}{V}$ ادمیتانس شبکه یک قطبی نشان داده شده درشکل (۲ — ۵) میباشد.

تمرین ۱- امپدانس های نقطه تحریک را بصورت توابعی از ω ، برای شبکه‌های یک قطبی نشان داده شده درشکل (۳ — ۵) تعیین کنید.

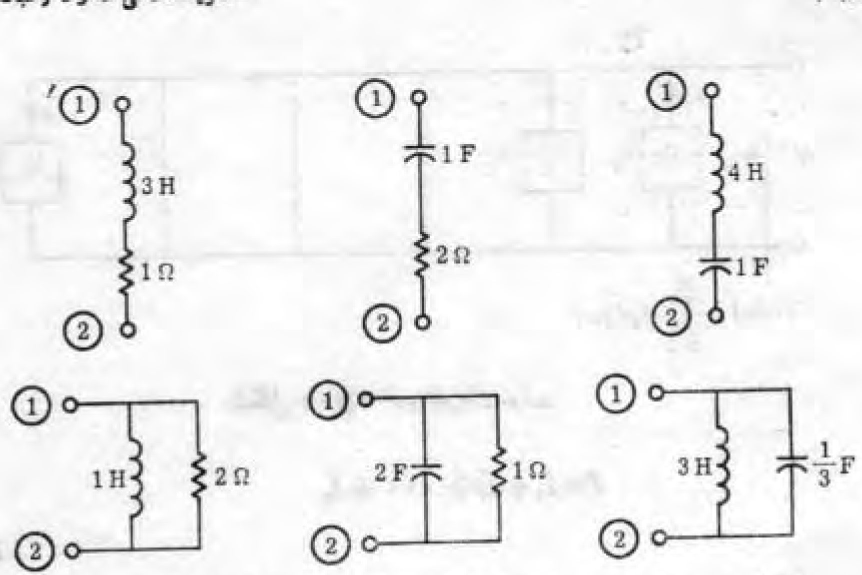
تمرین ۲- برای هریک از امپدانس‌ها ، اندازه و فاز را برحسب ω رسم کنید.

تمرین ۳- بفرض اینکه یک منبع جریان i_s به هریک ازشبکه های یک‌قطبی وصل شود، پاسخ هـای ولتاژ حالت دائمی (در دوسر گره‌هـای ❶ و ❷) را بـرای i_s های زیر تعیین کنید:

الف - $i_s = \cos t$

ب - $i_s = \cos 2t$

واضح است که مدارهای پیچیده‌تر را میتوان از ترکیب اجزاء بصورت سری وموازی



شکل ۳-۵- امپدانس‌های نقطه تحریک برای شبکه‌های یک قطبی که‌بایستی تعیین شوند

تجزیه وتحلیل نمود. بعنوان مثال ، درمدارشکل (۴ — ۵) که معمولاً «مدارنردبانی»[۱] گفته میشود ، امپدانس نقطه تحریک را میتوان چنین بیان کرد:

$$Z=Z_1+\cfrac{1}{Y_2+\cfrac{1}{Z_3+\cfrac{1}{Y_4+\cfrac{1}{Z_5}}}} \qquad (5-1)$$

که میتوان آنرا مجدداً چنین نوشت :

$$Z=Z_1+\cfrac{1}{Y_2+\cfrac{1}{Z_3+\cfrac{Z_5}{1+Y_4Z_5}}}$$

$$=Z_1+\cfrac{1}{Y_2+\cfrac{1+Y_4Z_5}{Z_5+Z_3(1+Y_4Z_5)}}$$

۱ - Ladder

$$=Z_1+\frac{Z_5+Z_3(1+Y_4Z_5)}{1+Y_4Z_5+Y_2[Z_5+Z_3(1+Y_4Z_5)]}$$

$$=\frac{Z_1[1+Y_4Z_5+Y_2Z_5+Y_2Z_3(1+Y_4Z_5)]+Z_5+Z_3(1+Y_4Z_5)}{1+Y_4Z_5+Y_2[Z_5+Z_3(1+Y_4Z_5)]}$$

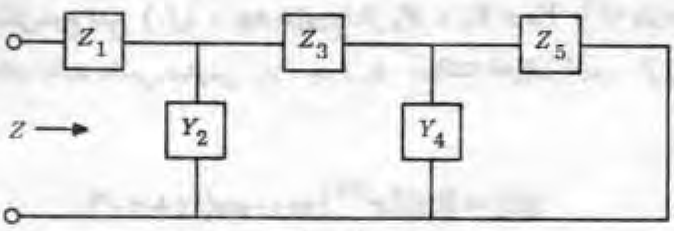
معادله (۱ — ۵) «گسترش کسرهای متوالی»[1] نامیده میشود. این گسترش درترکیب[2] مدارها مفید میباشد.

تمرین- امپدانس‌های نقطه‌تحریک برای شبکه‌های یک‌قطبی نشان داده شده در شکل (۵ — ۵) را تعیین کنید.

از مثالهای فوق مشاهده میشود که در تجزیه و تحلیل شبکه‌هایی که از اتصال‌سری و موازی اجزاء مدار درست شده‌اند تنها لازم است که اجزاء سری را با جمع امپدانس‌های تمام شاخه‌هایی که بطورسری‌هستند ترکیب نمود واجزاء موازی را با جمع ادمیتانس‌های تمام شاخه‌هائی که بطورموازی هستند ترکیب کرد. چون امپدانس نقطه تحریک بسادگی معکوس ادمیتانس نقطه تحریک میباشد، بنابراین در انتخاب امپدانس ویا ادمیتانس، برحسب اینکه دریک مورد خاص کدامیک مناسبتر هستند، میتوان انعطاف‌پذیر بود. در ترکیب موازی شکل (۲ — ۵) ادمیتانس‌را انتخاب میکنیم و درشبکه نردبانی نشان داده شده درشکل (۴ — ۵) متناوباً امپدانس و ادمیتانس را بکار میبریم.

۲-۵- تجزیه و تحلیل گره و مش درحالت دائمی سینوسی

برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان که بشکل اتصال سری ـ موازی اجزاء مدارنیستند، میتوان از دو روش عمومی تجزیه و تحلیل مدار یعنی تجزیه و تحلیل گره و



شکل ۴-۵ یک شبکه نردبانی ساده

1 - Continued - fraction expansion
2 - Synthesis

(الف) (ب)

شکل ۵-۵-امپدانس‌های نقطهٔ تحریک برای شبکه‌های یک قطبی که بایستی تعیین شوند

تجزیه‌وتحلیل مش استفاده نمود. ابتدا لازم است مجدداً تاکید شود که «تنها تجزیه وتحلیل حالت دائمی سینوسی مورد بررسی ما میباشد». بنابراین میتوان از فازورهای ولتاژها، فازورهای جریانها، امپدانس ها وادمیتانس ها درنوشتن معادلات KVL و KCL استفاده کرد. نوع معادلات حاصل، معادلات جبری خطی بوده و میتوان آنهارا توسط قاعده کرامر حل نمود. برای تشریح روشها دو مثال ذکر میگردد.

مثال ۱- گیریم در مدار شکل (۶ — ۵) ورودی منبع جریان زیر باشد:

$$i_s(t)=۱۰\cos(۲t+۳۰^\circ) \qquad (۵-۲)$$

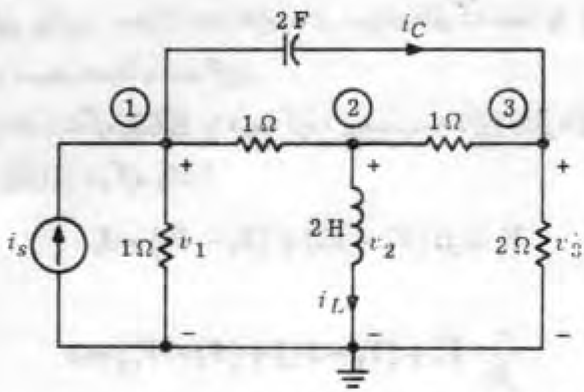
میخواهیم ولتاژ حالت دائمی سینوسی v_2 را در دو سر مقاومت ۲ اهمی پیدا کنیم.

ما ازتجزیه وتحلیل گره استفاده خواهیم کرد. گیریم گره مبنارا بصورت نشان داده شده در شکل انتخاب کرده و ولتاژهای گره‌ها نسبت به مبنا را v_1، v_2 و v_3 بنامیم. چون رویهمرفته چهار گره درمدار وجود دارد، میتوان سه معادله KCL برای آنها نوشت. بنابراین سه مجهول ما را، سه ولتاژ گره نسبت به مبنا تشکیل میدهند که میتوان آنهارا از روی سه معادله KCL تعیین کرد. قبل از شروع بنوشتن این معادلات، میخواهیم فازور منبع جریان I_s نمایشگر شکل موج منبع $i_s(\cdot)$، وسه فازور ولتاژ V_1، V_2 و V_3 راکه بترتیب نشان دهنده ولتاژهای حالت دائمی سینوسی v_1، v_2 و v_3 میباشند تعریف کنیم. از (۲ — ۵) داریم:

$$i_s(t)=\mathrm{Re}(I_s e^{j۲t})=۱۰\cos(۲t+۳۰^\circ)$$

ویا:

$$I_s \triangleq ۱۰e^{j۳۰^\circ} \qquad (۵-۳)$$



شکل ۶-۵ - مثال ۱ : تجزیه وتحلیل حالت دائمی سینوسی
که برپایه تجزیه‌وتحلیل گره قراردارد

توجه کنید که فرکانس زاویه‌ای $\omega = 2$ رادیان برثانیه میباشد. گیریم فازورهای ولتاژها با معادلات زیر تعریف شوند:

$$v_1(t) = \mathrm{Re}(V_1 e^{j2t})$$

$$v_2(t) = \mathrm{Re}(V_2 e^{j2t}) \qquad (۵ - ۴)$$

$$v_3(t) = \mathrm{Re}(V_3 e^{j2t})$$

بیاد آورید که برای بدست آوردن فازور جریان، فازور ولتاژ را در ادمیتانس آن جزء ضرب میکنیم. بعنوان مثال، گیریم جریان در سلف i_L بوده که توسط فازور جریان I_L نشان داده میشود. اگر V_2 داده شده باشد، میتوان I_L را چنین بدست آورد:

$$I_L = Y_L V_2 = \frac{1}{j\omega L} V_2 = \frac{1}{j4} V_2$$

بطریق مشابه، گیریم جریان خازن i_C بوده که توسط فازور جریان I_C نشان داده میشود. باتوجه باینکه ولتاژ دوسر خازن $v_1 - v_3$ میباشد، برحسب فازورها بدست میآوریم:

$$I_C = Y_C(V_1 - V_3) = j\omega C(V_1 - V_3) = j4\,(V_1 - V_3)$$

با تعقیب این روش، میتوان تمام فازورهای جریان‌های شاخه‌ها را برحسب فازورهای ولتاژهای گره نسبت به‌مبنا بدست آورد.

سپس معادلات گره KCL را درسه گره، برحسب‌سه فازورولتاژهای گره نسبت به‌مبنا مینویسیم. بنابراین درگره یک:

$$V_1+j4(V_1-V_3)+(V_1-V_2)=I_s$$

درگره دو:

$$\frac{1}{j4}V_2+(V_2-V_1)+(V_2-V_3)=0$$

و درگره سه:

$$\frac{1}{2}V_3+j4(V_3-V_1)+(V_3-V_2)=0$$

با مرتب کردن مجدد معادلات، بدست میاوریم:

$$(2+j4)V_1-V_2-j4V_3=I_s$$

$$-V_1+\left(2+\frac{1}{j4}\right)V_2-V_3=0$$

$$-j4V_1-V_2+\left(\frac{3}{2}+j4\right)V_3=0$$

این نتایج، دسته‌ای از سه معادله جبری خطی با ضرایب مختلط را تشکیل میدهند. فازور ولتاژ مطلوب V_3 را میتوان از قاعده کرامر بدست آورد. بنابراین:

$$V_3=\frac{\begin{vmatrix} 2+j4 & -1 & I_s \\ -1 & 2+\frac{1}{j4} & 0 \\ -j4 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j4 & -1 & -j4 \\ -1 & 2+\frac{1}{j4} & -1 \\ -j4 & -1 & \frac{3}{2}+j4 \end{vmatrix}}=\frac{2+j8}{6+j11.20}I_s$$

چون $I_s=10e^{j30^\circ}$ است :

$$V_3=6{,}450e^{j44^\circ}$$

بنابراین ، ولتاژ حالت دائمی سینوسی خروجی چنین است :

$$v_3(t)=6{,}450\cos(2t+44^\circ)$$

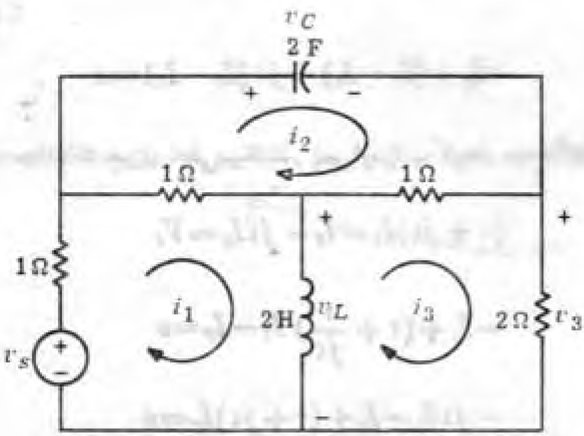
مثال ۲- میخواهیم با استفاده از تجزیه و تحلیل مش ، همان مسأله را حل کنیم. ابتدا با استفاده از مدار معادل نرتن ، منبع جریان را به منبع ولتاژ تبدیل میکنیم. مدار بدست آمده درشکل (۷ — ۵) نشان داد شده و منبع ولتاژ چنین است :

$$v_s(t)=10(\cos 2t+30^\circ)$$

و بنابراین فازور نشان دهنده v_s چنین است :

$$V_s=10e^{j30^\circ}$$

در تجزیه وتحلیل مش ، جریانهای مشها را بعنوان متغیرهای شبکه بکار می‌بریم. این جریانها i_1 ، i_2 و i_3 بصورت نشان داده شده درشکل(۷ — ۵) میباشند. نمایش‌های فازوری برای i_1 ، i_2 و i_3 بصورت زیر تعریف میشوند.



شکل ۷-۵- مثال ۲ : همان مدار شکل (۶ — ۵) با این تفاوت که بمنظور سهولت در تجزیه وتحلیل مش منبع جریان با منبع ولتاژ معادل تعویض شده است .

$$i_1(t)=\mathrm{Re}(I_1e^{j2t})$$

$$i_2(t)=\mathrm{Re}(I_2e^{j2t})$$

$$i_3(t)=\mathrm{Re}(I_3e^{j2t})$$

معادلات مشها را با استفاده از KVL برحسب فازورهای I_1 ، I_2 ، I_3 و V_s خواهیم نوشت. ابتدا لازم‌است که‌تمام فازورهای ولتاژهای شاخه‌ها را برحسب فازورهای جریانهای مشها I_1 ، I_2 و I_3 بیان کنیم. برای‌اینکار ، فازورهای جریانهای شاخه‌ها را در امپدانس شاخه‌ها ضرب میکنیم. بعنوان مثال ، فازور ولتاژ V_C برای خازن مساوی $\frac{1}{j4}I_2$ میباشد. بهمین‌ترتیب فازور ولتاژ V_L برای سلف مساوی $j4(I_1-I_3)$ است. سپس معادلات KVL برحسب فازورهای جریانهای مشها نوشته میشوند. بنابراین برای مش ۱ :

$$I_1+(I_1-I_2)+j4(I_1-I_3)=V_s$$

برای مش ۲ :

$$\frac{1}{j4}I_2+(I_2-I_3)+(I_2-I_1)=0$$

و برای مش ۳ :

$$2I_3+(I_3-I_2)+j4(I_3-I_1)=0$$

این سه‌معادله، معادلات جبری خطی‌میباشند. پس‌ازمرتب کردن مجددآنهاخواهیم‌داشت:

$$(2+j4)I_1-I_2-j4I_3=V_s$$

$$-I_1+(2+\frac{1}{j4})I_2-I_3=0$$

$$-j4I_1-I_2+(3+j4)I_3=0$$

با استفاده از قاعده کرامر ، I_3 را پیدا میکنیم. بنابراین :

$$I_2=\frac{\begin{vmatrix} 2+j4 & -1 & V_s \\ -1 & 2+\frac{1}{j4} & 0 \\ -j4 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j4 & -1 & -j4 \\ -1 & 2+\frac{1}{j4} & -1 \\ -j4 & -1 & 3+j4 \end{vmatrix}}=\frac{2+j8}{12+j22.5}V_s$$

چون $V_s=10e^{j30^\circ}$ و $V_2=2I_2$، داریم:

$$V_2=6.45e^{j44^\circ}$$

یا :

$$v_2(t)=6.45\cos(2t+44^\circ)$$

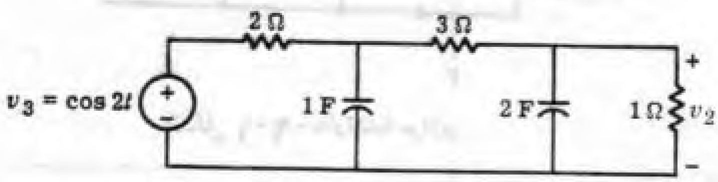
این جواب البته با آنچه توسط تجزیه وتحلیل گره بدست آمد مطابقت دارد.

تمرین ۱- معادلات حلقه برای مدار نردبانی نشان داده شده درشکل (۸ــ۵) را بنویسید. فرض میشود که مدار درحالت دائمی سینوسی قراردارد.

تمرین ۲- معادلات‌را برای ولتاژ حالت‌دائمی‌سینوسی v_2 در دوسرمقاومت ۱ اهمی حل کنید.

تمرین ۳- منبع ولتاژ را به‌منبع جریان تبدیل کرده و معادلات گره را برحسب فازورها بنویسید.

تمرین ٤- معادلات‌را برای ولتاژ حالت دائمی سینوسی v_2 برپایه تجزیه و تحلیل گره حل کنید.



شکل ۸-۵- یک مدار نردبانی درحالت دائمی سینوسی

۶-مدارهای تشدید

برای تشریح بیشتر تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی و مفاهیم فازور، امپدانس، ادمیتانس ویک مفهوم جدیدکه «تابع شبکه» (۱) گفته میشود از یک مدار تشدید استفاده خواهیم کرد. برای نشان‌دادن بسیاری از خواص مدارهای تشدید، نمایش‌های ترسیمی گوناگونی ارائه خواهد شد. این روش‌های ترسیمی برای تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مدارهای پیچیده‌تر مفید خواهند بود.

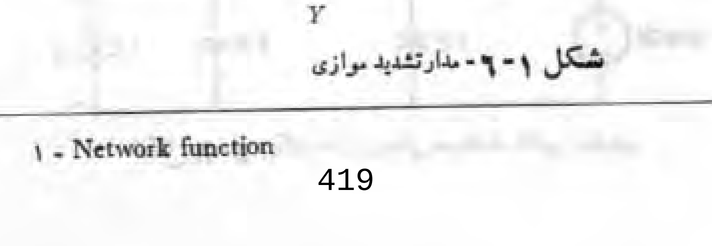
درعمل، دونوع مدار تشدید، یعنی مدار تشدید سری و مدار تشدید موازی حایز اهمیت‌میباشند. ما مدار تشدید RLC موازی شکل (۱ — ۶) را تجزیه وتحلیل خواهیم کرد. مدار تشدید سری دوگان مدار تشدید موازی است وچون مفهوم دوگانی را مختصراً بحث کرده‌ایم از تشریح جزئیات مدارهای تشدید سری صرفنظر میگردد. معهذا، بمنظور مراجعه، نتایج برای‌هردونوع مدار درجدول (۱ — ۷) درآخر این‌بخش خلاصه شده‌است.

۱-۶- امپدانس، ادمیتانس وفازورها

مدارتشدید شکل (۱ — ۶) راکه‌توسط یک منبع جریان سینوسی زیر تحریک میشود درنظر بگیرید:

$$i_s(t)=\mathrm{Re}(I_s e^{j\omega t})=|I_s|\cos(\omega t+\measuredangle I_s) \qquad (۱-۱)$$

ادمیتانس شبکه یک قطبی در فرکانس زاویه‌ای ω چنین است:



شکل ۱-۶- مدارتشدید موازی

---

۱ - Network function

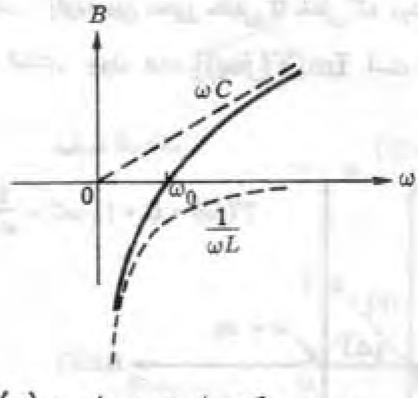
$$Y(j\omega)=G+j\omega C+\frac{1}{j\omega L} \qquad (۲-۱)$$

$$=G+j(\omega C-\frac{1}{\omega L})$$

بنابراین ، جزء حقیقی $Y(j\omega)$ یک ثابت و جزء انگاری آن تابعی از ω میباشد. جزء انگاری یک ادمیتانس ، **سوسپتانس**[۱] خوانده شده وبا B مشخص میگردد. درنتیجه:

$$B(\omega)=\omega C-\frac{1}{\omega L} \qquad (۲-۱)$$

سوسپتانس تابعی از ω بوده و درشکل (۲ - ۶) برحسب ω رسم شده است. درفرکانس $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ سوسپتانس صفر بوده و گفته میشود که مدار درحالت **تشدید** است. فرکانس f_0 را **فرکانس تشدید** مینامند. اهمیت کلمهٔ « تشدید » بعداً دراین بخش بحث خواهد شد.



شکل ۲-۶- منحنی سوسپتانس یک مدار تشدید موازی ، $B(\omega)$ برحسب ω.

توجه کنید که درفرکانس زاویه‌ای تشدید $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ رادیان برثانیه و $B(\omega_0)=0$ میباشد.

---

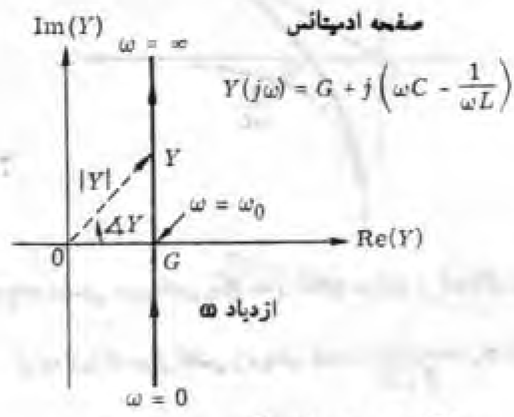
۱ - Susceptance

«صفحه‌های امپدانس و ادمیتانس» معادله(۲ — ۶) نشان میدهد که ادمیتانس، تابع فرکانس زاویه‌ای ω میباشد. با جدا کردن معادله (۲ — ۶) باجزاء حقیقی و انگاری بدست میآوریم :

$$\mathrm{Re}[Y(j\omega)]=G \qquad (\text{۴ — ۶ الف})$$

$$\mathrm{Im}[Y(j\omega)]=B(\omega)=\omega C-\frac{1}{\omega L} \qquad (\text{۴ — ۶ ب})$$

رفتار مشخصه ادمیتانس $Y(j\omega)$ را میتوان بصورت ترسیمی توصیف کرد. برای هر ω معین، میتوان $Y(j\omega)$ را بصورت یک نقطه در صفحه مختلط که دراین مورد **صفحه ادمیتانس** نامیده میشود رسم نمود. وقتی ω تغییر میکند، نقطه $Y(j\omega)$ تغییر کرده و معادلات (۴ — ۶ الف) و (۴ — ۶ ب) معادلات پارامتری منحنی طی شده توسط $Y(j\omega)$ را تشکیل میدهند (شکل ۳ — ۶ را ببینید). این منحنی **مکان**[۱] Y نامیده میشود. چون درحالت مورد بررسی ما طول G ثابت است، مکان خط مستقیمی بموازات محورانگاری بوده که محور حقیقی را در G قطع میکند. فاصله بین $Y(j\omega)$ تا مبدأ مساوی اندازه $|Y(j\omega)|$ میباشد. زاویه بین محور حقیقی تا خطی که مبدأ را به $Y(j\omega)$ وصل میکند، فاز $\measuredangle Y(j\omega)$ است. چون $\mathrm{Im}[Y(j\omega_0)]=0$ است، پس $Y(j\omega_0)=G$



شکل ۳-۶- مکان Y درصفحه ادمیتانس

---

۱ - Locus

میباشد. بنابراین در حالت تشدید $(\omega=\omega_0)$ ، ادمیتانس « می‌نیمم » بوده و فاز آن « صفر » است. تذکر این نکته‌جالب‌توجه است که ادمیتانس مدار تشدید موازی درحالت « تشدید » مساوی ادمیتانس مقاومت تنها میباشد. یعنی ترکیب خازن و سلف مثل یک مدار باز رفتار میکند.

تمرین- یک مدار تشدید موازی با $L=۱$ هانری ، $C=۱$ فاراد و $R=۱۰۰$ اهم را درنظر بگیرید. مکان Y را رسم کنید. بویژه نقاط نظیر:

$$\omega=o\ ,\ ۰٫۳۰\ ,\ ۰٫۹۹۵\ ,\ ۱٫۰۰\ ,\ ۱٫۰۰۵\ ,\ ۱٫۳۰\ ,\ \infty$$

رادیان برثانیه را مشخص نمائید.

امپدانس مدار تشدید موازی چنین است:

$$Z(j\omega)=\frac{۱}{Y(j\omega)}=\frac{۱}{G+jB(\omega)}=\frac{۱}{G+j(\omega C-\frac{۱}{\omega L})}$$

$$=\frac{G}{G^۲+B^۲(\omega)}+j\frac{-B(\omega)}{G^۲+B^۲(\omega)} \qquad (۵-۶)$$

بطریق مشابه ، میتوان امپدانس را در « صفحه امپدانس» مختلط رسم کرد. از معادله (۵ — ۶) داریم:

$$\mathrm{Re}[Z(j\omega)]=\frac{G}{G^۲+B^۲(\omega)} \qquad (\text{۶ — ۶ الف})$$

و:

$$\mathrm{Im}[Z(j\omega)]\triangleq X(\omega)=\frac{-B(\omega)}{G^۲+B^۲(\omega)} \qquad (\text{۶ — ۶ ب})$$

جزء انگاری یک‌امپدانس، **راکتانس**[۱] نامیده شده و معمولاً با $X(\omega)$ مشخص‌میشود. معادلات (۶ — ۶ الف) و (۶ — ۶ ب) را میتوان بعنوان معادلات پارامتری یک منحنی در صفحه امپدانس درنظرگرفت. این منحنی **مکان Z** نامیده میشود.

تمرین ۱-مکان Z را برای مدار RLC موازی با $L=۱$ هانری، $C=۱$ فاراد و $R=۱۰۰$ اهم رسم کنید.

---

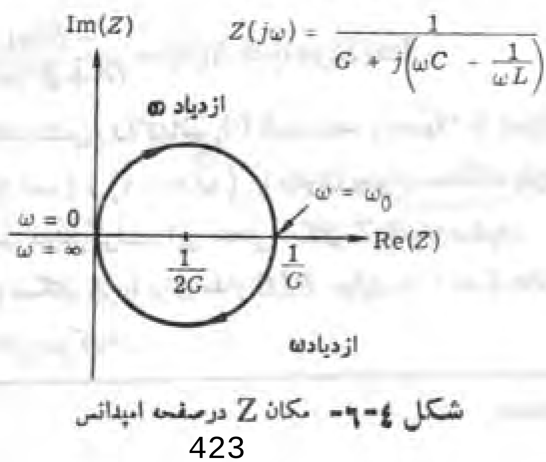
۱ - Reactance

تمرین ۲-ثابت کنید که مکان Z در صفحه امپدانس مختلط برای هرمدار RLC موازی یک دایره است که مرکز آن در $(\frac{1}{2G}, 0)$ واقع شده و شعاع آن $\frac{1}{2G}$ میباشد، چنانکه درشکل (۴-۶) نشان داده شده است. راهنمایی: معادله دایره چنین است:

$$[\mathrm{Re}(Z) - \frac{1}{2G}]^2 + [\mathrm{Im}(Z)]^2 = (\frac{1}{2G})^2 \qquad (۶-۷)$$

اهمیت تشدید با بررسی مکان Y درشکل (۳-۶) ویا مکان Z درشکل (۴-۶) روشن خواهد شد. اندازه امپدانس $|Z(j\omega)|$ بصورت تابعی از ω، بازاء $\omega=0$ ازمقدار صفر شروع شده، بصورت یکنوا افزایش یافته و در تشدید $(\omega=\omega_0)$ بمقدار «ماکسیمم» میرسد. درحالت تشدید، راکتانس $X(\omega_0)$ صفربوده و گفته میشود که $Z(j\omega_0)$ مقاومت خالص است. برای $\omega>\omega_0$، $|Z(j\omega)|$ بصورت یکنوا کاهش یافته و وقتی $\omega \to \infty$، بسمت صفر میل میکند. ازلحاظ فیزیکی درحالت تشدید، تمام جریان منبع جریان از مقاومت گذشته و جمع جریانهای خازن وسلف صفرمیباشد. درفرکانس‌های پائین $(\omega \ll \omega_0)$ قسمت اعظم جریان از درون سلف میگذرد. درفرکانس‌های بالا $(\omega \gg \omega_0)$ قسمت اعظم جریان از درون خازن میگذرد.

صفحه امپدانس



شکل ۴-۶- مکان Z درصفحه امپدانس

حال فازورهای ولتاژهای شاخه‌ها و جریان‌های شاخه‌ها را در نظر میگیریم. فازور ولتاژ V چنین بیان میشود :

$$V = ZI_s \qquad (۶-۸)$$

« دیاگرام فازوری » گیریم فازورهای جریان برای شاخه‌های مقاومت ، سلف و خازن بترتیب I_R ، I_L و I_C باشند. آنگاه:

$$I_R = GV \qquad I_L = \frac{1}{j\omega L} V \qquad I_C = j\omega CV \qquad (۶-۹)$$

واضح است که :

$$I_R + I_L + I_C = I_s \qquad (۶-۱۰)$$

برای روشن شدن روابط فوق گیریم داشته باشیم :

$$i_s(t) = \cos t = \mathrm{Re}(I_s e^{j\omega t})$$

یعنی :

$I_s = 1e^{j0}$ آمپر $\qquad \omega = 1$ رادیان بر ثانیه

گیریم مقادیر اجزاء چنین داده شده باشند :

$R = 1$ اهم $\qquad L = \frac{1}{4}$ هانری $\qquad C = 1$ فاراد

ادمیتانس مدار تشدید (برحسب مهو) درفرکانس زاویه‌ای $\omega = 1$ رادیان برثانیه چنین است.

$$Y(j1) = 1 + j(1-4) = 1 - j3 = \sqrt{10}\, e^{-j71/6^\circ}$$

بنابراین امپدانس (برحسب اهم) چنین است :

$$Z(j1) = \frac{1}{Y(j1)} = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{j71/6^\circ}$$

و فازور ولتاژ (برحسب ولت) چنین میباشد :

$$V=Z(j۱)I_s=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}e^{j۷۱٫۶°}$$

از معادله (۹ — ۶) با ۱=ω داریم (برحسب آمپر)

$$I_R=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}e^{j۷۱٫۶°} \qquad I_L=\frac{۴}{\sqrt{۱۰}}e^{-j۱۸٫۴°} \qquad I_C=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}e^{j۱۶۱٫۶°}$$

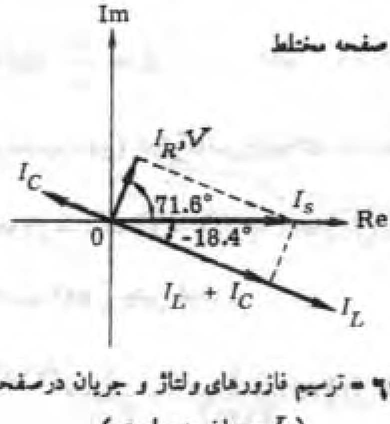
فازورهای ولتاژ V و جریانها در شکل (۵ — ۶) رسم شده‌اند. مشاهده میشود که : $I_R+I_L+I_C=I_s$ است .

حال فرض کنید درفرکانس تشدید ۲ $=\frac{۱}{\sqrt{LC}}=\omega_۰$ رادیان‌برثانیه ، یک ورودی سینوسی بمدار اعمال شود. گیریم ورودی چنین باشد:

$$i_s(t)=\cos ۲t=\mathrm{Re}(I_s e^{j۲t})$$

یعنی :

$$I_s = ۱e^{jo} \quad \text{آمپر} \qquad \omega=۲ \quad \text{رادیان برثانیه}$$



شکل ۵-۶ - ترسیم فازورهای ولتاژ و جریان درصفحه مختلط (I_s جریان منبع است)

ورودی دارای فرکانسی مساوی فرکانس تشدید مدار است. دیده میشود که ادمیتانس چنین میباشد .

$$Y(j2) = 1 \text{ مهو}$$

بنابراین ، فازور ولتاژ چنین است:

$$V = 1 \text{ ولت}$$

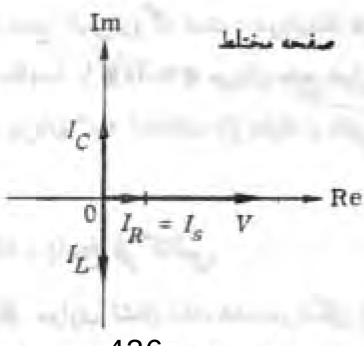
$$I_R = 1 \text{ آمپر} \qquad I_L = 2e^{-j90^\circ} \text{ آمپر} \qquad I_C = 2e^{j90^\circ} \text{ آمپر}$$

فازورها درشکل (۶—۶) رسم شده‌اند. تذکر این نکته جالب توجه است که اندازه‌های جریانهای‌شاخه‌ها در سلف وخازن دوبرابراندازه جریان ورودی میباشند. این امر تعجب‌آور نیست زیرا معادله (۱۰ — ۶) معادله‌ای با اعداد مختلط میباشد و درمورد اخیر I_L و I_C بترتیب -90° و $+90^\circ$ با I_s اختلاف فاز دارند.

مشاهده اثرمقاومت در رفتارکلی مدارتشدید نیز مطلب قابل‌توجهی میباشد. بعنوان مثال هرگاه درحالت بالا، بجای مقاومت ۱ اهمی یک‌مقاومت ۲۵۰ اهمی‌را قرارد‌هیم‌ومقادیر خازن وسلف بدون تغییر بمانند، بازهم فرکانس تشدید ۲ رادیان برثانیه بوده و :

$$Z(j2) = 250 \text{ اهم} \qquad \text{یا} \qquad Y(j2) = 4 \times 10^{-3} \text{ مهو}$$

بنابراین با همان جریان ورودی، یعنی $I_s = 1$ آمپر، بدست میآوریم :



شکل ۶—۶ - ترسیم فازورهای ولتاژ وجریان درحالت تشدید

$V=۲۵۰$ ولت

$I_C=j۵۰۰=۵۰۰e^{j۹۰^\circ}$ آمپر

$I_L=-j۵۰۰=۵۰۰e^{-j۹۰^\circ}$ آمپر

$I_R=۱$ آمپر

این جریانها و ولتاژها را میتوان چنین توجیه کرد: یک جریان بزرگ ۵۰۰ آمپری درمش LC جاری شده و جریان یک‌آمپری منبع ازمقاومت میگذرد. درحقیقت، نسبت اندازه جریان درسلف (یا خازن) به‌اندازه جریان منبع در «حالت تشدید» مساوی ضریب کیفیت Q مدار تشدید است. یعنی:

$$\frac{|I_L|}{|I_s|}=\frac{|I_C|}{|I_s|}=Q$$

بخاطرهمین پدیده است که هنگام اندازه‌گیری جریانها و ولتاژهای یک مدار تشدید بایستی دقت نمود. بعنوان مثال دریک مدارتشدید «سری» که دارای ورودی منبع ولتاژ با دامنه فقط چند ولت میباشد، ولتاژ دوسر سلف یا خازن ممکن‌است دامنه‌ای درحدود چند-صد ولت داشته باشد!

تبصره ۵- درتمام بحث‌های این‌بخش ما منحصراً حالت دائمی سینوسی را که درآن تمام ولتاژهای شاخه‌ها وتمام جریانهای شاخه‌ها در فرکانس یکسان بطورسینوسی با زمان تغییرمیکنند درنظر گرفتیم. بعنوان مثال، وقتی میگوئیم درحالت تشدید $Q\gg۱$، جریان سلف درمقایسه با جریان منبع خیلی‌بزرگ است، درحقیقت «منظور» اینست که «دامنه» جریان سینوسی سلف درمقایسه با «دامنه» جریان منبع خیلی بزرگ میباشد. درحقیقت، درحالت تشدید، این‌دو جریان ۹۰° اختلاف فاز دارند و وقتی یکی‌ازآنها ماکسیمم است، دیگری صفر میباشد.

۲-۶- تابع شبکه، پاسخ فرکانس

بازهم مدار RLC موازی نشان داده شده در شکل (۱ – ۶) موردنظر ما است. اکنون فرض میکنیم که خروجی واقعی مورد توجه برای‌مدار تشدید، جریان حالت دائمی

درمقاومت ، یعنی ($i_R(t)=\mathrm{Re}(I_R e^{j\omega t})$) باشد. دراینحالت نیز ورودی همان منبع جریان سینوسی ($i_s(t)=\mathrm{Re}(I_s e^{j\omega t})$) است. **تابع شبکه** «با نسبت‌فازور خروجی‌به‌فازور ورودی» تعریف میشود. گیریم تابع شبکه را با H مشخص کنیم ، دراینصورت تابع شبکه H که در $j\omega$ حساب شده است چنین میباشد .

$$H(j\omega)=\frac{I_R}{I_s}=\frac{GV}{I_s}=GZ(j\omega)=\frac{1}{1+jR(\omega C-\frac{1}{\omega L})}$$

$$=\frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)} \qquad (۶-۱۱)$$

که درآن:

$$Q\triangleq\frac{\omega_0}{2\alpha}=\omega_0 CR \qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (۶-۱۲)$$

توجه کنید که توابع شبکه معمولاً به‌فرکانس زاویه‌ای ω بستگی دارند و این امر در معادله (۱۱ — ۶) برای H دیده میشود. اندازه تابع شبکه H چنین است.

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\left[1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (۶-۱۳)$$

و فازآن چنین است :

$$\measuredangle H(j\omega)=-\tan^{-1}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

یا :

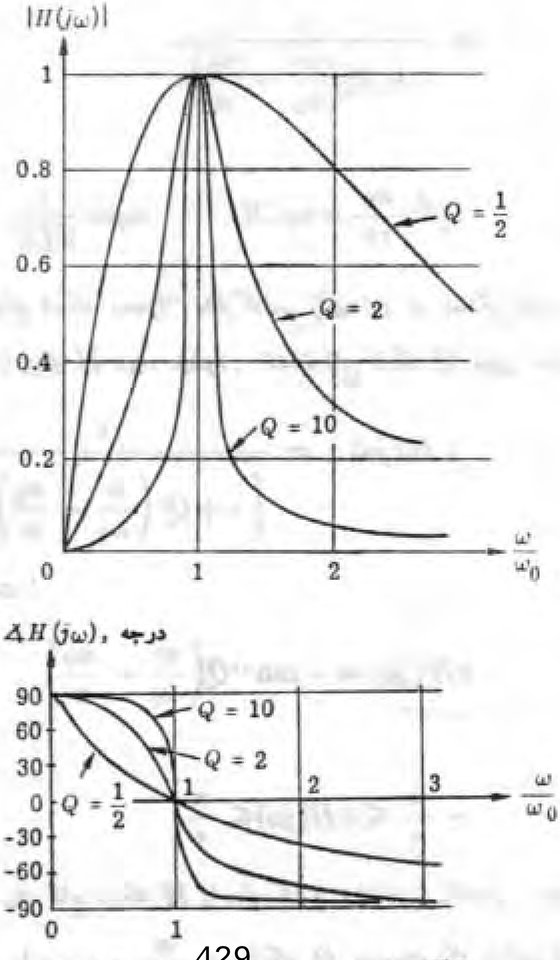
$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\measuredangle H(j\omega)\leqslant\frac{\pi}{2} \qquad (۶-۱۴)$$

دو پارامتر Q و ω_0 تابع شبکه H را بطورکامل مشخص میکنند. درشکل (۷ — ۶) اندازه و فاز H را برحسب $\frac{\omega}{\omega_0}$ درحالیکه Q بصورت یک پارامتر است رسم‌میکنیم.

این دو دسته منحنی‌ها، یعنی اندازه و فاز برحسب ω بسیار مفید میباشند چونکه در تمام فرکانس‌ها همه اطلاعات لازم برای هرمدار تشدید را بدست میدهند. برای پیدا کردن پاسخ حالت دائمی سینوسی i_R ناشی‌از ورودی $i_s = \mathrm{Re}(I_s e^{j\omega t})$ تنها لازم است که اندازه و فاز $H(j\omega)$ را از روی دسته منحنی‌ها پیدا کنیم. چون $I_R = H(j\omega) I_s$ ،

$$i_R(t) = \mathrm{Re}[H(j\omega) I_s e^{j\omega t}] \tag{٦-١٠}$$

$$= |H(j\omega)| |I_s| \cos[\omega t + \measuredangle I_s + \measuredangle H(j\omega)]$$



شکل ٧-٦ - پاسخ فرکانس مدارهای تشدید

تبصره ۱ - امپدانس و ادمیتانس نقطه تحریک‌حالتهای خاصی از مفهوم کلی‌توابع شبکه میباشند. اگر معادله (۱۵ — ۶) را با معادله (۱۲ — ٤) مقایسه کنیم ، مشاهده میشود که‌برای پیدا کردن شکل‌موج خروجی‌حالت دائمی سینوسی از روی شکل موج‌ورودی سینوسی و تابع شبکه قواعد یکسانی حکفرماست.

تبصره ۲ - دسته منحنی‌های شکل (۷ — ٦) ، برای مدار تشدید سری نشان داده شده درشکل (۸ — ٦) نیز صادق است وتنها لازم است که تعریف مناسبی برای Q رابکار برد یعنی $Q \triangleq \dfrac{\omega_0 L}{R_s}$ (جدول ۱ — ۵ را ببینید). تابع شبکه برای یک مدار سری با رابطه $H = \dfrac{V_R}{V_s}$ تعریف میشود.

تمرین- گیریم منبع جریان ورودی با $i_s(t) = \cos 2t$ مشخص شود. فازورهای جریان I_R را در مدارهای RLC موازی که با $\omega_0 = 1$ رادیان بر ثانیه وبترتیب با $Q = \frac{1}{2}$, ۲ , ۱۰ مشخص میشوند تعیین کنید.

«پاسخ فرکانس» چون $H(j\omega)$ تمام اطلاعات لازم مربوط به‌پاسخ حالت دائمی‌سینوسی را شامل میباشد، منحنی‌های اندازه وفاز $H(j\omega)$ (برحسب ω یا $\log\omega$) را **پاسخ‌فرکانس** مدار برای آن ورودی و خروجی مشخص شده گویند (در مورد مدارهای تشدید موازی ، ورودی و خروجی بترتیب I_s و I_R میباشند) برای بدست آوردن یک تعبیر فیزیکی ازپاسخ فرکانس ، پاسخ حالت دائمی سینوسی مدار را برای چندین مقدار فرکانس درنظر خواهیم گرفت. مثل حالت‌فوق گیریم $I_s(j\omega)$ نمایش فازوری جریان ورودی در فرکانس‌زاویه‌ای ω باشد. دراینصورت فازور خروجی که پاسخ حالت دائمی سینوسی را درفرکانس‌زاویه‌ای ω نشان میدهد ، $I_R(j\omega)$ بوده و از تعریف تابع شبکه داریم :

$$I_R(j\omega) = H(j\omega) I_s(j\omega) \qquad \text{(۱۶ — ۶ الف)}$$

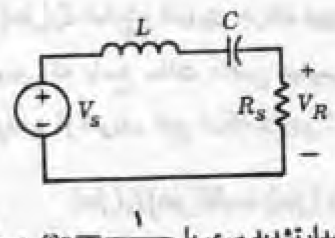
بنابراین ، اندازه فازور خروجی با رابطه زیر به‌اندازه فازور ورودی مربوط است :

$$|I_R(j\omega)| \triangleq |H(j\omega)|\,|I_s(j\omega)| \qquad \text{(۱۶ — ۶ ب)}$$

بطریق مشابه ، فاز فازور خروجی با رابطه زیر به‌فاز فازور ورودی‌مربوط است .

$$\sphericalangle I_R(j\omega)=\sphericalangle H(j\omega)+\sphericalangle I_s(j\omega) \qquad (\text{۱۶} - \text{۶ ب})$$

بخصوص ، اگر $H(j\omega)=1$ باشد ، فازورخروجی همانند فازور ورودی است . اگر $H(j\omega)=0$ باشد ، فازور خروجی صفر است. معادله (۱۱ — ۶) نشان میدهد که برای مدار تشدید ، تابع شبکه H در فرکانس تشدید مساوی ۱ و در $\omega=0$ و $\omega=\infty$ مساوی صفر است. بنابراین گویند که یک مدار تشدید ، در فرکانس تشدید سیگنال‌ها را عبور داده و در فرکانس‌های صفر و بینهایت مانع عبورآنها میشود. در سایر فرکانسها اندازه و فاز سیگنال‌ها طبق‌منحنی‌های شکل (۷ — ۶) تغییرمیکنند. بنابراین ، درست در نزدیکی‌های فرکانس تشدید ، سیگنالهای ورودی با کاهش کوچکی در اندازه و تغییر مختصری در فاز آنها از مدار عبور میکنند. در فرکانس‌های پائین ($\omega\ll\omega_0$) و در فرکانس‌های بالا ($\omega\gg\omega_0$) دامنه خروجی بمقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش مییابد. بخاطرهمین حقیقت، یک مدارتشدیدرا یک‌فیلتر «میان گذر»[1] مینامیم. مدارتشدیدتنها سیگنالهائی‌راکه فرکانس آنها درمجاورت فرکانس‌تشدید است از خود عبورمیدهد. شکل منحنی‌های اندازه و فاز یک مدار تشدید به‌ضریب کیفیت Q بستگی دارد. یک Q بزرگتر ، باند گذر باریکتری را بوجود میآورد. یک فیلتر میان گذر ایده‌ال دارای منحنی اندازه‌ای بصورت نشان داده شده در شکل (۹ — ۶) میباشد. درحالت ایده‌ال ، تمام سیگنالهای داخل باند گذر[2]، بدون هیچگونه تغییری در فاز واندازه عبور میکنند و در خارج از باند گذر خروجی بطور یکنواخت صفر است. معهذا، منحنی اندازه شکل (۹ — ۶) را ازنظر فیزیکی نمیتوان بدست آورد.



شکل ۸-۶- مدارتشدید سری با $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ و $Q=\frac{\omega_0 L}{R_s}$

1 - Band - pass filter
2 - Passband

برای یک مدار فیلتر عملی (مثل مدار تشدید) باند گذر را میتوان بطرق مختلفی تعریف کرد. متداول‌ترین تعریفی که بکار میرود ، **باند گذر ۳ - db** میباشد+ و آن بدین‌معنی است که در لبه‌های باند عبور، $|H(j\omega)|$ مساوی $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ برابر مقدار ماگزیمم باند گذر است. از معادله (۱۳ — ۶) دیده میشود که اندازه ماگزیمم $|H(j\omega)|$ در $\omega=\omega_0$ بوده و مقدار آن مساوی ۱ است. با قراردادن $H(j\omega)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ داریم :

$$|H(j\omega)| = \frac{۱}{\left[۱+Q^۲\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^۲\right]^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

یا :

+ کلمه db برای مخفف دسیبل (۱) بکار میرود. ولتاژها و جریانها را میتوان با فرمول‌های زیر برحسب دسیبل بیان کرد.

$$\text{ولتاژ}\Big|_{\text{برحسب دسیبل}} = ۲۰ \log \text{ ولتاژ}\Big|_{\text{برحسب ولت}}$$

(و بطریق مشابه برای جریان). تابع انتقال H که نسبت جریانها میباشد نیز برحسب دسیبل چنین بیان میشود :

$$|H(j\omega)|\Big|_{\text{برحسب دسیبل}} = ۲۰ \log |H(j\omega)|$$

چون درحالت مورد بررسی $H(j\omega_0)=۱$ ، پس تابع انتقال در ω_0 ، o db و $o°$ میباشد. چون $۲۰\log\frac{۱}{\sqrt{۲}}\approx -۳$ است ، اگر برای فرکانس ω_1 ، $|H(j\omega_1)|$ مساوی ۳db — باشد بدین معنی است که :

$$\frac{|H(j\omega_1)|}{|H(j\omega_0)|} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = ۰٫۷۰۷$$

۱ - Decibel

$$Q^{۲}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{۲}=۱$$

از حل معادله بالا برای مقادیر مثبت ω برحسب Q ، بدست می‌آید :

$$\frac{\omega}{\omega_0}=\sqrt{۱+\frac{۱}{۴Q^{۲}}}\pm\frac{۱}{۲Q} \qquad (۶-۱۷)$$

در مورد مقادیر بزرگ Q $(Q \gg ۱)$ ، با استفاده از :

$$\sqrt{۱+x}=۱+\frac{x}{۲}-\frac{x^{۲}}{۸}+\cdots$$

بدست می‌آوریم :

$$\frac{\omega}{\omega_0}\approx ۱\pm\frac{۱}{۲Q} \qquad (۶-۱۸)$$

بنابراین باند عبور را میتوان بصورت باند بین فرکانس های $\omega_۱$ و $\omega_۲$ تعریف نمود که درآن :

$$\text{برای } Q\gg ۱ \qquad \omega_۲\approx\omega_0\left(۱+\frac{۱}{۲Q}\right) \qquad \omega_۱\approx\omega_0\left(۱-\frac{۱}{۲Q}\right) \qquad (۶-۱۹)$$

فرکانس های :

$$f_۱=\frac{\omega_۱}{۲\pi} \quad , \quad f_۲=\frac{\omega_۲}{۲\pi}$$

فرکانس‌های‌قطع[۱] **۳-db** نامیده میشوند و $f_۲-f_۱=\triangle f$ را **نیز پهنای باند**[۲] **۳-db** گویند و برحسب هرتز چنین بیان میشود :

شکل ۹-۶- منحنی اندازه برای یک فیلترمیان‌گذر ایده‌ال

۱ - Cutoff ۲ - Bandwidth

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \approx \frac{\omega_0}{2\pi Q} = \frac{f_0}{Q} = \frac{\alpha}{\pi} \qquad (6-20)$$

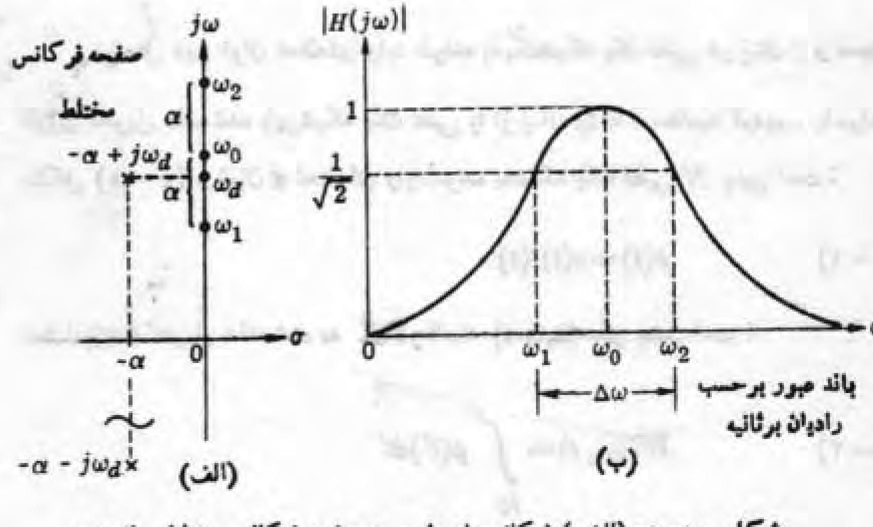
درفصل ۵ ، مدارهای مرتبه دوم را برحسب قرارگرفتن فرکانس‌های طبیعی آنها در صفحه فرکانس مختلط ویا برحسب مقدارضریب کیفیت Q طبقه‌بندی کردیم. برای $\frac{1}{2} < Q < \infty$ ، مدار را میرای ضعیف نامیده و فرکانس‌های طبیعی آنرا چنین مشخص کردیم :

$$\left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = -\alpha \pm j\omega_d$$

که درآن:

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}$$

و :



شکل ۱۰-۶- (الف) فرکانس‌های طبیعی درصفحه فرکانس مختلط وباند عبور نظیرآن برای‌یک مدارتشدید با Q بزرگ. (ب) منحنی اندازه (برای $Q \gg 1$ ، $\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$)

$$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \qquad (۶-۲۱)$$

صفحه فرکانس مختلط و همچنین منحنی اندازه در شکل (۶-۱۰) نشان داده شده‌اند تا بسیاری از روابط جالب میان محل‌های فرکانس‌های طبیعی در $\alpha\pm j\omega_d$ ، فرکانس تشدید ω_0 ، پهنای باند $\omega_2-\omega_1$ و فرکانس‌های قطع ω_1 و ω_2 ⟵ نشان داده شوند. شکل (۶-۱۰) برای حالتی که Q بزرگ میباشد رسم شده است.

برای $Q\gg 1$ ، با حذف جملات $\frac{1}{Q^2}$ ،از معادلات (۶-۱۹) و (۶-۲۱) روابط زیر حاصل میشوند:

$$\omega_d\approx\omega_0 \qquad \omega_1\approx\omega_0-\alpha \qquad \omega_2\approx\omega_0+\alpha \qquad (۶-۲۲)$$

نتایج اصلی مدارهای تشدید سری وموازی را برای راحتی درجدول (۷-۱) خلاصه میکنیم.

۷- توان درحالت دائمی سینوسی

درفصل دوم توان لحظه‌ای وارد شونده به یک شبکه یک قطبی در زمان t و همچنین انرژی تحویل داده شده باین شبکه یک قطبی را از زمان t_0 تا t محاسبه کردیم. با مراجعه بشکل (۷-۱) «توان» لحظه‌ای واردشونده به شبکه یک قطبی N چنین است:

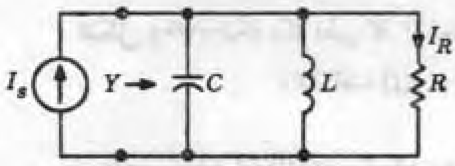
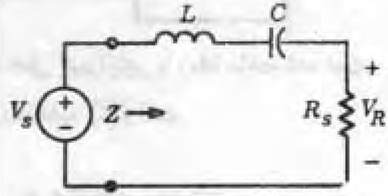
$$p(t)=v(t)i(t) \qquad (۷-۱)$$

و «انرژی» تحویل داده شده به N در فاصله (t_0 و t) نیز چنین است:

$$W(t_0\,,t)=\int_{t_0}^{t}p(t')dt' \qquad (۷-۲)$$

دراین بخش معادلات فوق را برای محاسبه توان و انرژی درحالت دائمی سینوسی بکار خواهیم برد.

جدول ۱ - ۷- خواص حالت دائمی سینوسی مدارهای تشدید

مدار تشدید موازی	مدارتشدید سری
	
$Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$	$Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0 L}{R_s} = \frac{\sqrt{L/C}}{R_s}$
$\alpha = \frac{1}{2RC}$	$\alpha = \frac{R_s}{2L}$
$H(j\omega) \triangleq \frac{I_R}{I_s}; \quad Y(j\omega) = \frac{1}{RH(j\omega)}$	$H(j\omega) \triangleq \frac{V_R}{V_s}; \quad Z(j\omega) = \frac{R_s}{H(j\omega)}$

$$\omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

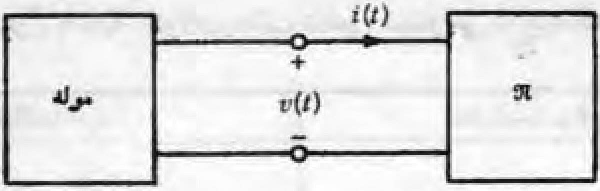
اگر $Q > \frac{۱}{۲}$ (حالت میرای ضعیف) فرکانسهای‌طبیعی برابر $-\alpha \pm j\omega_d$ هستند که درآنجا
$\omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0\sqrt{1 - 1/4Q^2}$. If $Q \gg 1$, $\omega_d \approx \omega_0$.

فرکانسهای قطع زاویه ۳-db

$$\begin{cases} \omega_1 \approx \omega_0 - \alpha = \omega_0\left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \\ \omega_2 \approx \omega_0 + \alpha = \omega_0\left(1 + \frac{1}{2Q}\right) \end{cases}$$

پهنای باند زاویه‌ای ۳-db $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx 2\alpha = \frac{\omega_0}{Q}$ رادیان برثانیه

$$\Delta f = f_2 - f_1 \approx \frac{f_0}{Q} \qquad \text{Hz}$$



شکل ۱-۷- شبکه یک قطبی N از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است.
ولتاژ قطب $v(t)$ و جریان قطب $i(t)$ است

۷-۱- توان لحظه‌ای ، توان متوسط و توان مختلط

فرض کنید که درحالت دائمی سینوسی، ولتاژ قطب شبکه یک قطبی N چنین باشد :

$$v(t)=V_m \cos(\omega t+\sphericalangle V)=\mathrm{Re}(Ve^{j\omega t}) \qquad (\text{۷ − ۲ الف})$$

که در آن :

$$V \triangleq V_m e^{j\sphericalangle V} \qquad V_m=|V| \qquad (\text{۷ − ۳ ب})$$

فرض کنید که جریان قطب شبکه چنین باشد :

$$i(t)=I_m \cos(\omega t+\sphericalangle I)=\mathrm{Re}(Ie^{j\omega t}) \qquad (\text{۷ − ۴ الف})$$

که درآن :

$$I \triangleq I_m e^{j\sphericalangle I} \qquad I_m=|I| \qquad (\text{۷ − ۴ ب})$$

آنگاه ازمعادله (۷ − ۱) ، « توان لحظه‌ای » وارد شوند، به N چنین است :

$$\begin{aligned} p(t)&=v(t)i(t) \qquad (\text{۷ − ۵})\\ &=V_m I_m \cos(\omega t+\sphericalangle V)\cos(\omega t+\sphericalangle I)\\ &=\frac{1}{2}V_m I_m \cos(\sphericalangle V-\sphericalangle I)+\frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t+\sphericalangle V+\sphericalangle I) \end{aligned}$$

جریان i ، ولتاژ v وتوان‌لحظه‌ای p درشکل(۷ − ۲) رسم‌شده‌اند. جمله‌اول دررابطه‌توان درمعادله(۷ − ۵) یک ثابت‌بوده درحالیکه جمله دوم یک‌سینوسی بافرکانس‌زاویه‌ای 2ω

میباشد. هرگاه توان متوسط را درطول یک پریود $T=\frac{2\pi}{\omega}$ محاسبه نمائیم ، جمله دوم همیشه مساوی صفر خواهد بود (زیرا مقدار متوسط هرسینوسی درطول هرمضرب صحیحی از پریود آن صفر است). بنابراین با نشان دادن «توان متوسط» بصورت P_{av} بدست میآریم:

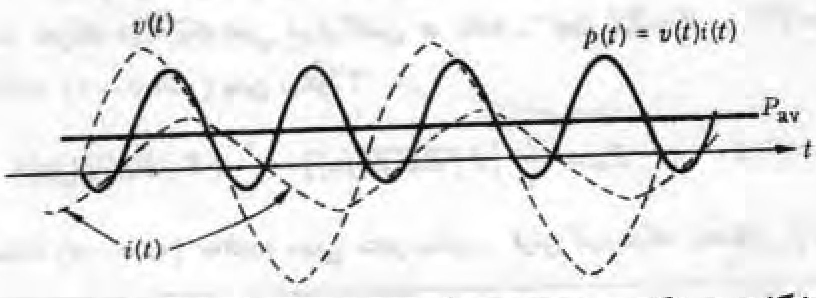
$$P_{av} \triangleq \frac{1}{T}\int_{0}^{T} p(t')dt' \qquad (\text{۶ — ۷ الف})$$

بنابراین :

$$P_{av} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\sphericalangle V - \sphericalangle I) \qquad (\text{۶ — ۷ ب})$$

تبصره ۱- زاویه $\sphericalangle V - \sphericalangle I$ که آرگومان کسینوس در معادله (۶ — ۷ ب) میباشد عبارت از اختلاف فاز بین ولتاژ سینوسی و جریان سینوسی است. چون $V=ZI$ ، $\sphericalangle V - \sphericalangle I = \sphericalangle Z$ است. یعنی $\sphericalangle V - \sphericalangle I$ مساوی زاویه امپدانس شبکه یک قطبی مورد بررسی نیزمیباشد. بنابراین میتوان با تغییر دادن زاویه امپدانس و درعین‌حال ثابت نگاه داشتن دامنه آن ، توان متوسط دریافت شده توسط یک شبکه یک قطبی را تغییرداد.

تبصره ۲- P_{av} عبارت ازمقدار متوسط توان لحظه‌ای $p(\cdot)$ که در «طول یک پریود» وارد شبکه یک قطبی‌میشودمیباشد. شکل نمونه‌ای از p برحسب زمان درشکل (۲ — ۷) نشان داده شده است. در بیشتر موارد ، شبکه یک‌قطبی N تنها شامل اجزاء پسیو میباشد ، یعنی تمام مقاومتها ، سلف‌ها و خازن‌ها مثبت هستند. درنتیجه سلف‌ها و



شکل۲-۷ - شکل موجهای ولتاژ و جریان حالت دائمی سینوسی، وتوان لحظه‌ای و متوسط

خازن‌ها انرژی ذخیره نموده و مقاومت‌ها انرژی تلف میکنند. بموجب اصل بقاء[۱] انرژی، توان متوسط وارد شونده به‌شبکه یک‌قطبی N درحالت دائمی سینوسی بایستی نامنفی ($\geqslant 0$) باشد. این‌حقیقت که توان «متوسط» همیشه بزرگتر ویا مساوی صفر است، ملزم نمیدارد که برای تمام مقادیر t، $p(t)\geqslant 0$ باشد. چنانکه درشکل (۲ — ۷) نشان داده شده است توان لحظه‌ای $p(t)$ میتواند در هر پریود، درفواصلی از زمان منفی باشد.

تبصره ۳- ساده‌ترین راه برای محاسبه توان‌متوسط که به‌شبکه یک قطبی N تحویل داده میشود بقرار زیر است. درحالت دائمی سینوسی عبارت:

$$P \triangleq \frac{1}{2} V\bar{I}$$

را بعنوان **توان مختلط** تحویل داده شده به‌شبکه یک‌قطبی N تعریف میکنیم. دراینجا از تیره بالای I بمنظور مشخص کردن مزدوج مختلط استفاده شده است. دراینصورت:

$$P=\frac{1}{2}\,|V|\,|I|\,e^{j(\measuredangle V-\measuredangle I)}$$

$$=\frac{1}{2}\,|V|\,|I|\cos(\measuredangle V-\measuredangle I)+j\frac{1}{2}\,|V|\,|I|\sin(\measuredangle V-\measuredangle I)$$

بموجب معادله (۶ — ۷)، جزء حقیقی توان مختلط P مساوی توان متوسط میباشد:

$$P_{av}=\mathrm{Re}(P)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}V\bar{I}\right) \qquad (\text{۷ — ۷ الف})$$

تبصره ۴- گیریم $Z(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ بترتیب امپدانس نقطه تحریک‌وادمیتانس نقطه تحریک شبکه یک قطبی درفرکانس ω باشند. چون $V=ZI$ و $I=YV$، معادله (۷ — ۷ الف) چنین میشود:

$$P_{av}=\frac{1}{2}\,|I|^2\,\mathrm{Re}[Z(j\omega)]=\frac{1}{2}\,|V|^2\,\mathrm{Re}[Y(j\omega)] \qquad (\text{۷ — ۷ ب})$$

معادله (۷ — ۷ ب) به‌نتیجه مهمی منجر میشود. فرض کنید شبکه یک‌قطبی از اجزاء

۱ - Conservation

« پسیو » ساخته شده باشد. دراینصورت کاملاً واضح است که P_{av} بایستی نامنفی باشد+. بنابراین امپدانس «نقطه تحریک» Z و ادمیتانس « نقطه تحریک » Y « هر » شبکه یک قطبی که از اجزاء « پسیو » ساخته شده باشد نامعادلات زیر را برمیآورد.

برای تمام مقادیر ω $\quad \mathrm{Re}[Y(j\omega)] \geqslant 0 \qquad \mathrm{Re}[Z(j\omega)] \geqslant 0$ $\qquad$ (۸ — ۷ الف)

ویا از معادله (۶ — ۷)، $\cos(\sphericalangle V - \sphericalangle I) \geqslant 0$ که معادل است با :

برای‌تمام مقادیر ω $\quad |\sphericalangle Y(j\omega)| \leqslant 90^\circ$ و $|\sphericalangle Z(j\omega)| \leqslant 90^\circ$ $\qquad$ (۸ — ۷ ب)

معادلات (۸ — ۷ الف) و (۸ — ۷ ب) بقدری مهم میباشند که درفصل نهم آنها را بروش دیگری نیز بدست خواهیم آورد.

۲-۷- خاصیت جمع‌پذیری توان متوسط

فرض کنید که شبکه یک قطبی N با یک ورودی ، که مجموع چندین سینوسی با فرکانس های «متفاوت» میباشد تحریک میشود و گیریم که شبکه یک قطبی درحالت دائمی باشد. دراینصورت هرورودی سینوسی، یک خروجی سینوسی با همان فرکانس ایجاد کرده وخروجی کل از مجموع این سینوسی‌ها تشکیل میشود فرض کنید جریان ورودی چنین باشد.

$$i(t) = I_{1m}\cos(\omega_1 t + \psi_1) + I_{2m}\cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

و امپدانس ورودی نیز تابع معلوم $Z(j\omega)$ باشد. آنگاه درحالت دائمی:

$$v(t) = I_{1m}\,|Z(j\omega_1)|\cos[\omega_1 t + \psi_1 + \sphericalangle Z(j\omega_1)]$$
$$+ I_{2m}\,|Z(j\omega_2)|\cos[\omega_2 t + \psi_2 + \sphericalangle Z(j\omega_2)]$$

برای سهولت $v(t)$ را باین شکل مینویسیم :

$$v(t) = V_{1m}\cos(\omega_1 t + \Phi_1) + V_{2m}\cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

که درآن :

+ این مطلب در فصل نهم اثبات خواهد شد .

$$\Phi_1 \triangleq \psi_1 + \measuredangle Z(j\omega_1)$$
$$\Phi_2 \triangleq \psi_2 + \measuredangle Z(j\omega_2)$$

توان لحظه‌ای که وارد شبکه یک قطبی N میشود چنین است :

$$p(t)=v(t)i(t)=\frac{1}{2}V_{1m}I_{1m}\cos(\Phi_1-\psi_1)$$
$$+\frac{1}{2}V_{2m}I_{2m}\cos(\Phi_2-\psi_2)+\frac{1}{2}V_{1m}I_{1m}\cos(2\omega_1 t+\Phi_1+\psi_1)$$
$$+\frac{1}{2}V_{2m}I_{2m}\cos(2\omega_2 t+\Phi_2+\psi_2)$$
$$+\frac{1}{2}V_{1m}I_{2m}\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\Phi_1+\psi_2]$$
$$+\frac{1}{2}V_{1m}I_{2m}\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\Phi_1-\psi_2]$$
$$+\frac{1}{2}V_{2m}I_{1m}\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\psi_1+\Phi_2]$$
$$+\frac{1}{2}V_{2m}I_{1m}\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\psi_1-\Phi_2] \qquad (۷-۹)$$

معادله (۹ — ۷) نشان میدهد که « توان لحظه‌ای » مساوی مجموع توانهای لحظه‌ای ، ناشی‌ازجریانها بافرکانس های ω_1 و ω_2 که بتنهائی‌روی مداراثر کنند «نیست» . درحقیقت مجموع فقط ازچهارجملهٔاول‌سمت‌راست‌معادله (۹ — ۷) تشکیل‌میشود . ازطرف‌دیگر « توان متوسط+ » مساوی‌مجموع توان‌متوسط در ω_1 و توان متوسط در ω_2 میباشد . درحقیقت‌وقتی

+ محاسبه مقدار متوسط سمت راست معادله (۹ — ۷) همیشه‌کار ساده‌ای نیست. موردی را درنظر بگیرید که فقط یک سینوسی تنها وجود دارد (معادله ۵ — ۷) دراین مورد سمت راست یک تابع تناوبی بوده و پریود آن $T \triangleq \frac{2\pi}{\omega}$ میباشد. بنابراین توان متوسط P_{av} با (۶ — ۷ الف)

←

مقدار متوسط گرفته شود تنها دو جمله اول سمت راست باقی میمانند. بعبارت دیگر، درحالت دائمی خاصیت جمع آثار[1] برای توان «متوسط» بشرط اینکه فرکانس ها متفاوت باشند برقرار است.

تمرین- بایک مثال نشان دهید که اگر دومنبع سینوسی دارای فرکانس «یکسان» بوده و هردو به یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان توان تحویل دهند، توان متوسط داده شده به مدار وقتی که هردو منبع باهم عمل میکنند، الزاماً مساوی مجموع توانهای متوسط

← داده میشود. حالت معادله (۹ — ۷) هرگاه فرکانس های ω_1 و ω_2 بطورهارمونیک بهم مربوط باشند، یعنی «اعداد درست»[2] n_1 و n_2 طوری وجود داشته باشند که $n_1\omega_1=n_2\omega_2$، ساده است. کوچکترین مضرب مشترک n_1 و n_2 را درنظرگرفته وآنرا n بنامید. گیریم $p_1\triangleq\frac{n}{n_1}$ و $p_2\triangleq\frac{n}{n_2}$ باشندکه p_1 و p_2 اعداد درست‌اند. دراینصورت سینوسی‌های با فرکانس‌های ω_1، ω_2، $\omega_1+\omega_2$ و $\omega_1-\omega_2$ دارای پریود «مشترک» $T_c=p_1\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)=p_2\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)$ میباشند و در نتیجه سمت راست (۹ — ۷) تناوبی با پریود T_c خواهد بود و بنابراین توسط معادله (۶ — ۷ الف) محاسبه شده که درآن بجای T، مقدار T_c جایگزین میشود و نتایج داده شده درمتن درس بلافاصله حاصل میگردند. اگر فرکانس‌های ω_1 و ω_2 بطور هارمونیک بهم مربوط نباشند (مثلاً اگر $\omega_1=1$ رادیان برثانیه و $\omega_2=\sqrt{2}$ رادیان‌برثانیه) آنگاه سمت‌راست‌معادله(۹ — ۷) یک تابع‌تناوبی نبوده و نمیتوان برای محاسبه آن از معادله (۶ — ۷ الف) استفاده نمود. اما مفهوم توان متوسط را بازهم میتوان بایک رابطه حدی بشرح زیر تعریف کرد.

$$P_{av}\triangleq\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}p(t)dt$$

نتایج بیان شده درمتن درس، اگرچه به‌محاسبات طولانی احتیاج دارند، مستقیماً ازاین تعریف‌اصلاح شده بدست میآیند.

---

1 - Superposition   2 - Integer

دومنبع وقتی که هریک بتنهائی روی مدارعمل میکنند نخواهدبود. امپدانس نقطه‌تحریک مدار را درفرکانس موردنظر Z بنامید.

۷-۳-مقادیر مؤثر ویا ریشه مقدار متوسط توان دوم

پاسخ حالت دائمی سینوسی یک مقاوت خطی تغییرناپذیر با زمان، با مقاوت R را درنظر بگیرید. از معادله (۱ — ۷) داریم:

$$p(t)=v(t)i(t)=Ri^2(t)=RI_m^2\cos^2(\omega t+\psi)$$

از معادله (۶ — ۷) یا (۷ — ۷) توان متوسط چنین است:

$$P_{av}=\frac{1}{2}I_m^2R=\frac{1}{2}I_mV_m$$

گیریم **مقدار مؤثر**[1] **یک شکل موج سینوسی** از تقسیم دامنه ویا مقدار نوک[2] آن بر $\sqrt{2}$ تعریف شود. بنابراین:

$$I_{eff}\triangleq\frac{I_m}{\sqrt{2}}\qquad V_{eff}\triangleq\frac{V_m}{\sqrt{2}}\tag{۷ — ۱۰}$$

و آنگاه:

$$P_{av}=I_{eff}^2R=I_{eff}V_{eff}\tag{۷ — ۱۱}$$

بعنوان مثال، ولتاژ معمولی خانگی ۲۲۰ ولت مؤثر است، که دامنه نظیر آن $220\sqrt{2}$ ولت میباشد. بطریق مشابه دربسیاری از ولتمترها و آمپرمترها، مقادیر مؤثر خوانده میشوند. برای بدست‌آوردن دامنه ویا مقدار نوک، بایستی مقدار مؤثر را در $\sqrt{2}$ ضرب‌نمود.

برای یک شکل «موج‌تناوبی» اما غیرسینوسی، مقدار مؤثر را میتوان برحسب انتگرال‌های زیر تعریف نمود.

$$I_{eff}\triangleq\left[\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}}\tag{۷ — ۱۲ الف}$$

---

۱ - Effective value ۲ - Peak value

$$V_{\text{eff}} \triangleq \left[\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t)dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{۱۲} - \text{۷ ب})$$

که‌درآن $i(\cdot)$ و $v(\cdot)$ توابع تناوبی باپریود T میباشند. اهمیت‌تعاریف (۱۲ — ۷ الف) و (۱۲ — ۷ ب) دراین‌است کـه توان متوسط تحویل شده بوسیله یک تابع تناوبی به‌یک مقاومت با مقاومت R مساویست با :

$$P_{av} = I_{\text{eff}}^2 R = \frac{V^2_{\text{eff}}}{R} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \quad (\text{۷-۱۳})$$

این موضوع واضح است زیرا طبق تعریف داده شده درمعادله (۶ — ۷) ، P_{av} چنین‌است:

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{v^2(t)}{R} dt \quad (\text{۷} - \text{۱۴})$$

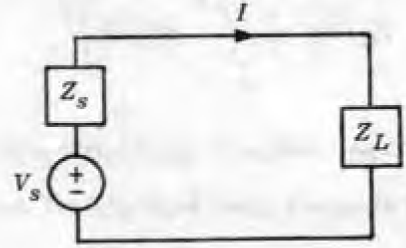
با مقایسه معادلات (۱۲ — ۷) و (۱۴ — ۷) معادله (۱۳ — ۷) بلافاصله حاصل میشود. درمعادله (۱۲ — ۷) مقادیرمؤثر ، برحسب ریشه دوم مقدارمتوسط توان دوم مقادیر ولتاژ وجریان تعریف شده‌اند و بنابراین نام « ریشه ـ مقدار متوسط ـ توان دوم»(۱) مصداق پیدا میکند .

۴-۷- قضیه انتقال توان ماکسیمم

مسأله‌ای با اهمیت عملی بسیار زیاد درشکل (۳ — ۷) تشریح شده است. دراین مدار Z_s نشان دهنده یک امپدانس پسیو « داده شده » و V_s نمایش فازوری منبع ولتاژ سینوسی « داده شده » درفرکانس زاویه‌ای ω میباشد. بنابراین :

$$v_s(t) = \text{Re}(V_s e^{j\omega t})$$

۱ - Root Mean Square Value



شکل ۳-۷- مداری که انتقال توان از یک منبع به یک بار را نشان میدهد

امپدانس Z_L ، یک امپدانس باریسیو را نشان میدهد که مقدار آن بایستی چنان انتخاب شود تاتوان متوسطی که‌وارد امپدانس‌بار Z_L (درحالت دائمی‌سینوسی) میگردد ماکسیمم باشد. بعنوان مثال ، ممکن‌است منظور طرح طبقه اول یک دستگاه رادار(۱) ویا تلسکوپ(۲) رادیویی باشد. منبع ولتاژ v_s امواج الکترومغناطیسی ورودی را نشان میدهد و امپدانس Z_s ، امپدانس فضای آزاد(۳)، کابل ها(۴) موج‌برها(۵) وغیره است که به‌مرحله اول منتهی میشود. مسأله انتخاب‌بهترین‌امپدانس ورودی Z_L برای طبقه اول است بطوریکه بالاترین توان ممکن باین طبقه تحویل شود.

قضیه‌انتقال‌توان ماکسیمم بیان میدارد که «آپتیمم مقدار امپدانس بار Z_{L0} مساوی مزدوج مختلط Z_s»، یعنی، $Z_{L0}=\bar{Z}_s$ میباشد.

«اثبات» تمام‌محاسباتی که‌ذیلاً انجام‌میشودشامل امپدانس هادرفرکانس زاویه‌ای ω منبع‌میباشند. به‌منظورسادگی‌طرزنمایش، Z_L را بجای $Z_L(j\omega)$ بکارخواهیم برد. توان متوسط تحویل شده به Z_L برحسب فازور جریان I چنین است.

$$P_{av}=\frac{1}{2}\,|I|^2\mathrm{Re}(Z_L)$$

چون :

$$I=\frac{V_s}{Z_s+Z_L}$$

---

۱ - Radar
۲ - Telescope
۳ - Free space
۴ - Cables
۵ - Waveguides

نتیجه میشود که :

$$P_{av}=\frac{1}{2}\,|V_s|^2\,\frac{\operatorname{Re}(Z_L)}{|Z_s+Z_L|^2}$$

گیریم ، جزءهای حقیقی و انگاری Z_s و Z_L بترتیب R_s ، R_L ، X_s و X_L باشند. داریم :

$$P_{av}=\frac{1}{2}\,|V_s|^2\,\frac{R_L}{(R_L+R_s)^2+(X_L+X_s)^2}$$

دراینجا V_s ، R_s و X_s داده شده‌اند و مقادیر R_L و X_L باید چنان انتخاب شوند تا P_{av} ماکسیمم گردد. چون‌راکتانس X_L میتواند مثبت ویامنفی‌باشد، میتوان $X_L=-X_s$ انتخاب نمود تا جمله $(X_L+X_s)^2$ درمخرج کسرمساوی صفر شود. بعنوان مثال ، گیریم Z_s اتصال سری یک مقاومت و یک سلف با اندوکتانس ۱ هانری بوده و $\omega=2$ رادیان برثانیه‌باشد. آنگاه $X_s=\omega L=2$ اهم‌خواهدبود. X_L مورد نیازمساوی ۲− اهم‌است که میتوان توسط یک خازن با ظرفیت $\frac{1}{4}$ فاراد بدست آورد. با این انتخاب X_L ، P_{av} چنین میشود :

$$P_{av}=\frac{1}{2}\,|V_s|^2\,\frac{R_L}{(R_L+R_s)^2} \qquad (۷-۱۵)$$

اکنون بایستی مقدار آپتیمم R_L را تعیین نمود. با گرفتن مشتق جزیی از P_{av} نسبت‌به R_L بدست میآوریم :

$$\frac{\partial P_{av}}{\partial R_L}=\frac{1}{2}\,|V_s|^2\,\frac{(R_L+R_s)^2-2(R_L+R_s)R_L}{(R_L+R_s)^4} \qquad (۷-۱۶)$$

برای آپتیمم کردن P_{av} ، $\frac{\partial P_{av}}{\partial R_L}$ را مساوی صفر قرارمیدهیم و درنتیجه از (۷ − ۱۶) ، $R_L=R_s$ بدست می‌آید. توان ماکسیمم از معادله (۷ − ۱۵) چنین است :

$$\max P_{av} = \frac{|V_s|^2}{8R_s} \qquad (7-17)$$

و در شرایطی بدست میاید که داشته باشیم :

$$Z_{L0} = R_s - jX_s = \bar{Z}_s \qquad (7-18)$$

وقتی این شرط برقرارباشد گویند امپدانس بار با امپدانس منبع بطور **مزدوج تطبیق شده**[1] است ویا بعبارت ساده‌تر گویند که بار با منبع **تطبیق شده** است.

معادله (۱۷ — ۷) توان متوسط ماکسیمم را که به‌بار تحویل میشود بدست میدهد. جالب‌توجه‌است که این توان‌را با توان متوسطی که توسط منبع تحویل داده میشود مقایسه کنیم واضح است که توان متوسط تحویل داده شده توسط منبع چنین است :

$$P_s = \frac{1}{2}|I|^2 \mathrm{Re}(Z_s + Z_L) \qquad (7-19)$$

در تحت شرایط تطبیق شده مزدوج (۱۸ — ۷) داریم :

$$I = \frac{V_s}{Z_{L0} + Z_s} = \frac{V_s}{2R_s}$$

بنابراین معادله (۱۹ — ۷) چنین میشود :

$$P_s = \frac{1}{2}\frac{|V_s|^2}{4R_s^2}2R_s = \frac{|V_s|^2}{4R_s} \qquad (7-20)$$

میتوان «بهره»[2] مدار را با نسبت توان متوسط تحویل شده به‌بار به‌توان متوسط تحویل داده شده توسط منبع تعریف نمود. با مقایسه معادلات (۱۷ — ۷) و (۲۰ — ۷) ملاحظه میکنیم که بهره مدار تطبیق شده مزدوج مساوی ۵۰ درصد است. برای رادارها و رادیو- تلسکوپ‌ها این حقیقت هیچ اهمیت ندارد ، زیرا انرژی موجود در امواج الکترومغناطیسی ورودی اگر توسط طبقه اول جذب نشود ازمیان خواهد رفت. برای مهندسین نیرو وضع کاملاً برعکس است. انرژی تحویل داده شده توسط منبع ارزش پولی داشته و شرکت‌های تولید نیرو به‌ازدیاد بهره بشدت علاقمند هستند و میخواهند توان متوسط تولید شده آنها

1 - Matched 2 - Efficiency

هرچه بیشتر به بار (یعنی مشتری) تحویل داده شود. نتیجتاً آلترناتورهای بزرگ هیچگاه بطور مزدوج تطبیق شده نیستند .

۵-۷- Q یک مدار تشدید

دراینجا یک تعبیر انرژی از ضریب کیفیت Q یک مدار تشدید را بیان خواهیم داشت. برای مدار تشدید موازی نشان داده شده درجدول (۱ − ۷) داریم :

$$Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \omega_0 CR$$

اگر V فازور ولتاژ در « حالت تشدید » باشد. میتوان نوشت:

$$Q = \omega_0 \frac{\frac{1}{2} C \mid V \mid^2}{\frac{1}{2} G \mid V \mid^2} \qquad (۷-۲۱)$$

عبارت $\frac{1}{2} G \mid V \mid^2$ درمخرج کسر، توان متوسط تلف شده درمقاومت‌را در حالت‌تشدید نشان میدهد. برای‌تعبیرعبارت صورت کسر ، بخاطر آورید که درفصل دوم نشان دادیم که انرژی الکتریکی ذخیره شده دریک خازن خطی چنین است :

$$\mathcal{E}_E(t) = \frac{1}{2} C v^2{}_C(t) \qquad (۷-۲۲)$$

و انرژی مغناطیسی ذخیره شده دریک سلف خطی چنین است:

$$\mathcal{E}_M(t) = \frac{1}{2} L i^2{}_L(t) \qquad (۷-۲۳)$$

برای مدار تشدید در فرکانس تشدید ولتاژ دو سر خازن چنین است:

$$v_C(t) = \mathrm{Re}(V e^{j\omega_0 t}) = \mid V \mid \cos(\omega_0 t + \measuredangle V) \qquad (۷-۲۴)$$

و جریان داخل سلف نیز چنین میباشد.

$$i_L(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{V}{j\omega_0 L} e^{j\omega_0 t}\right) = \frac{\mid V \mid}{\omega_0 L} \cos(\omega_0 t + \measuredangle V - 90^\circ)$$

$$= \frac{\mid V \mid}{\omega_0 L} \sin(\omega_0 t + \measuredangle V) \qquad (۷-۲۵)$$

از معادلات (۲۲ — ۷) تا (۲۰ — ۷) انرژی کل ذخیره شده چنین است :

$$\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_E(t)+\mathcal{E}_M(t)$$

$$=\frac{1}{2}C\,|V|^2\cos^2(\omega_0 t+\measuredangle V)+\frac{1}{2}L\frac{|V|^2}{\omega_0^2L^2}\sin^2(\omega_0 t+\measuredangle V)$$

چون $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$ است ، بدست می‌آوریم :

$$\mathcal{E}(t)=\frac{1}{2}C\,|V|^2 \qquad (۷-۲۶)$$

بنابراین ، درحالت تشدید انرژی کل ذخیره شده « ثابت » است ، یعنی انرژی کل ذخیره شده $\mathcal{E}(t)$ به t بستگی ندارد. ازمعادله (۲۱ — ۷) ، Q را میتوان چنین تعبیرکرد : « درحالت تشدید » :

$$Q=\omega_0\,\frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{توان متوسط تلف شده در مقاومت}} \qquad (۷-۲۷)$$

این فرمول برای مدار RLC سری در حالت تشدید نیز برقرار میباشد .

تمرین - نشان دهید که برای مدار RLC موازی ، درحالت تشدید:

$$Q=2\pi\,\frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی تلف شده دریک سیکل}} \qquad (۷-۲۸)$$

توجه کنید که درحالت تشدید ، پریود تمام شکل موجها $\frac{2\pi}{\omega_0}$ ثانیه است.

* ۸- نرمالیزه کردن امپدانس و فرکانس

مدارهای تشدیدی که در بخش ۶ بررسی کردیم دارای سه پارامتر یعنی مقاومت ، اندوکتانس وظرفیت میباشند. این‌چنین مدارهای تشدید معمولاً بعنوان فیلتر مورد استفاده قرارمیگیرند. یک نمونه مسأله طرح ممکن است بصورت زیر باشد : یک مدار تشدید سری طرح کنید که دارای سطح امپدانس Z_0 (یعنی، امپدانس درحالت تشدید) ، فرکانس تشدید ω_0 و پهنای باند $3-db$ ، $\Delta\omega$ باشد که درآن Z_0 ، ω_0 و $\Delta\omega$ مقادیر عددی تعیین شده هستند. برای نوشتن روابط بین اقلام تعیین شده و مقادیر اجزاء R و L و C برای مدار تشدید سری از جدول (۱ — ۷) استفاده میکنیم و بدست میآوریم :

$$\text{سطح امپدانس} = Z_0 = R \qquad (\text{۱} - \text{۸ الف})$$

$$\text{فرکانس زاویه‌ای تشدید} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (\text{۱} - \text{۸ ب})$$

$$\text{پهنای باند } 3\text{-db} = \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \qquad (\text{۱} - \text{۸ پ})$$

برای پیدا کردن L ، (۱ — ۸ پ) را بکار برده وبدست میآوریم :

$$L = \frac{R}{\Delta\omega} \qquad (\text{۲} - \text{۸ الف})$$

برای پیدا کردن C ، (۱ — ۸ ب) را بکار برده و بدست میآوریم :

$$C = \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2 R} \qquad (\text{۲} - \text{۸ ب})$$

روش دیگری برای طرح وجود دارد که معمولاً طراحان مجرب آنرا ترجیح میدهند . این روش با طرح یک مدار تشدید سری «نرمالیزه»[1] ، یعنی یک مدار تشدید سری با یک سطح امپدانس مساوی ۱ اهم ، یک فرکانس تشدید زاویه‌ای مساوی ۱ رادیان بر ثانیه وپهنای باند کسری زیر شروع میشود :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \qquad (\text{۸} - \text{۳})$$

گیریم L_0 ، R_0 و C_0 مقادیر اجزاء مدار نرمالیزه باشند. از معادلات (۱ — ۸ الف) و (۲ — ۸) داریم :

$$R_0 = 1 \qquad L_0 = Q \qquad C_0 = \frac{1}{Q} \qquad (\text{۸} - \text{۴})$$

برای بدست آوردن مقادیر اجزاء مدار موردنظر بایستی دو تصحیح انجام گیرد. ابتدا سطح امپدانس را به Z_0 میرسانیم وآنگاه فرکانس تشدیدرا به ω_0 تغییر میدهیم. میتوان نشان

---

۱ - Normalized

داد که مقاومت مطلوب با ضرب R_0 در Z_0 ، اندوکتانس با ضرب L_0 در $\frac{Z_0}{\omega_0}$ و ظرفیت مطلوب با ضرب C_0 در $\frac{1}{Z_0\omega_0}$ بدست میآید. بالاخره خواهیم داشت:

$$R = Z_0 \qquad \text{(۵ - ۸ الف)}$$

$$L = \frac{Q Z_0}{\omega_0} = \frac{Z_0}{\Delta\omega} \qquad \text{(۵ - ۸ ب)}$$

$$C = \frac{1}{Q\,\omega_0 Z_0} = \frac{\Delta\omega}{Z_0\omega_0^2} \qquad \text{(۵ - ۸ پ)}$$

البته ، نتایج نهایی با معادلات (۱ - ۸) و (۲ - ۸) توافق دارند.

برای عمومیت طرح های نرمالیزه دو دلیل وجود دارد. اول اینکه هرگاه مهندسی‌در بایگانی[1] خودطرح نرمالیزه یک فیلترمیان گذر را داشته باشد (بامشخصات مطلوب‌خاص)، او درحقیقت مقادیر اجزاء را برای هرفیلتر میان گذری‌ازاین نوع با هرسطح امپدانس دلخواه و با هرفرکانس میانی دلخواه بسهولت در اختیار دارد. دلیل دوم ساده بودن محاسبات عددی است زیرا جمع ، تفریق ، ضرب وتقسیم اعدادی‌که اندازه آنها کسری از واحد است بسیار ساده‌تر میباشند. بعلاوه خطاهای ناشی‌از روند کردن[2] اعداد که همیشه درمحاسبات اتفاق می‌افتند بسیار کم‌اهمیت‌تر خواهندبود. مدارهایی‌که درعمل بآنها برخورد میکنیم اغلب دارای مقاومتهایی درحدود چند صد اهم ، ظرفیت‌هایی درحدود چند پیکوفاراد و اندوکتانس‌هایی درحدود چند میکروهانری و فرکانس‌هایی درحدود مگاهرتز هستند. میتوان‌نشان داد که درنتیجه نرمالیزاسیون امپدانس وفرکانس ، این مقادیر اجزاء به‌حدود مقدار واحد رسیده و بنابراین محاسبات طولانی و خسته کننده نسبتاً ساده‌تر میشوند.

اکنون میخواهیم قاعده عمومی راکه با اعمال‌آن میتوان مقادیر اجزاء R و L و C مطلوب یک شبکه دلخواه را از روی مقادیراجزاء نرمالیزه R_0 ، L_0 و C_0 شبکه نرمالیزه بدست آورد بیان کنیم. گیریم r_n ضریب نرمالیزاسیون امپدانس باشد ویا بعبارت دقیق‌تر گیریم:

---

1 - File   2 - Roundoff

$$r_n \triangleq \frac{\text{سطح امپدانس مطلوب}}{\text{سطح امپدانس طرح نرمالیزه شده}}$$

وگیریم Ω_n ضریب نرمالیزاسیون فرکانس باشد ویا بعبارت دقیقتر گیریم :

$$\Omega_n \triangleq \frac{\text{فرکانس نمونه مطلوب}}{\text{فرکانس نمونه طرح نرمالیزه شده}}$$

دراینصورت ، مقادیر اجزاء مطلوب چنین داده میشوند :

$$R = r_n R_0 \quad \text{(۶—۸ الف)}$$

$$L = \frac{r_n}{\Omega_n} L_0 \quad \text{(۶—۸ ب)}$$

$$C = \frac{C_0}{r_n \Omega_n} \quad \text{(۶—۸ پ)}$$

اثبات منظم این قاعده بایستی برپایه روش‌های کلی تجزیه وتحلیل قرارگیرد که در فصل‌های دهم و یازدهم بیان خواهد شد. معهذا میتوان یک توجیه‌ادراکی[1] ازسه رابطه بالا بیان کرد. برای سهولت ، شبکه نرمالیزه $\mathcal{N}_0$ را که شامل هیچ منبعی نمیباشد درنظر میگیریم. پیشروی از مقادیر اجزاء نرمالیزه $\mathcal{N}_0$ به‌مقادیر اجزاء مطلوب را میتوان در دو مرحله انجام داد. درمرحله اول ، سطح امپدانس را میزان میکنیم و در مرحله دوم مقیاس فرکانس را تنظیم میکنیم. ابتدا مرحله اول را درنظربگیرید. از شبکه نرمالیزه $\mathcal{N}_0$ شروع میکنیم و امپدانس هرجزء را در r_n ضرب میکنیم تا شبکه $\mathcal{N}'$ بدست آید. هرمقاومت و اندوکتانس درشبکه $\mathcal{N}'$ ، r_n بار از مقاومت و اندوکتانس نظیر در شبکه $\mathcal{N}_0$ بزرگتر بوده و هرظرفیت درشبکه $\mathcal{N}'$ ، r_n بار ازظرفیت نظیر در $\mathcal{N}_0$ کوچکتر خواهد بود. توجه کنید که اگر $\mathcal{N}_0$ و $\mathcal{N}'$ را با دو منبع جریان یکسان درجفت گره‌های نظیر تحریک کنیم آنگاه ولتاژ گره‌های $\mathcal{N}'$ مساوی r_n برابر ولتاژ گره‌های نظیر در $\mathcal{N}_0$ خواهد بود.

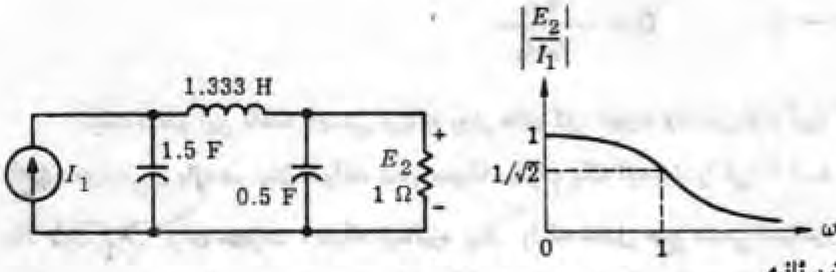
مرحله دوم میزان کردن فرکانس میباشد. شبکه $\mathcal{N}''$ ازتقسیم تمام اندوکتانس‌ها

---

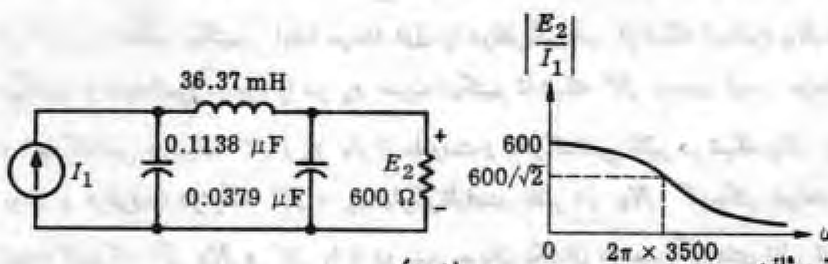
1 - Heuristic

و ظرفیت‌های شبکه $\mathcal{N}'$ بر Ω_n بدست میآید. توجه کنید که امپدانس هرشاخه شبکه $\mathcal{N}''$ درفرکانس ω'' هنوز مساوی r_n برابر امپدانس شاخه نظیر شبکه $\mathcal{N}_0$ در فرکانس ω' میباشد که درآن $\Omega_n = \frac{\omega''}{\omega'}$ است. بنابراین هرگاه دوشبکه $\mathcal{N}''$ و $\mathcal{N}_0$ درجفت گره‌های نظیر، بترتیب با دو منبع جریان سینوسی با فرکانس‌های ω'' و ω' تحریک شوند و اگر هردو شبکه درحالت دائمی سینوسی باشند، آنگاه هرولتاژ جفت گره $\mathcal{N}''$ با فازوری نمایش داده میشود که مساوی r_n برابرفازور نمایش‌دهنده ولتاژ جفت گره نظیر درشبکه $\mathcal{N}_0$ است.

مثال - شکل (۱ ـ ۸ الف) یک فیلتر پائین گذری[1] را نشان میدهد که امپدانس انتقالی[2] آن که با $\frac{E_2(j\omega)}{I_1(j\omega)}$ تعریف میشود چنانست که :



(الف)



(ب)

شکل ۱ - ۸ - فیلتر پائین گذر که نرمالیزاسیون امپدانس وفرکانس را مشخص میکند.
(الف) طرح نرمالیزه شده (ب) طرح واقعی

1 - Low - pass
2 - Transfer - Impedance

$$\left|\frac{E_۲}{I_۱}\right|^۲=\frac{۱}{۱+\omega^۶}$$

بعبارت دیگر، ضریب تقویت فیلتر یعنی $\left|\frac{E_۲}{I_۱}\right|$ در $\omega=o$ برابر یک و در $\omega=۱$ برابر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ بوده وهنگامیکه $\omega \to \infty$ ، بطوریکنواخت بسمت صفرمیل میکند. بهمین دلیل مدار یک فیلتر پائین گذر نامیده میشود. از روی شکل واضح است که امپدانس ورودی فیلتر (در $\omega=o$) برابر ۱ اهم است زیرا درحقیقت در فرکانس صفر امپدانس خازن‌ها بینهایت بوده (مدار باز) وامپدانس سلف‌ها صفر است (مدار اتصال کوتاه). فرض کنید میخواهیم در فرکانس $۳٫۵$ kHz سطح امپدانسی برابر ۶۰۰ اهم و $\left|\frac{E_۲}{I_۱}\right|$ را مساوی $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ داشته باشیم. دراینصورت $r_n=۶۰۰$ و $\Omega_n=۲\pi\times ۳٫۵\times ۱۰^۳=۲٫۱۹۹\times ۱۰^۴$ خواهدبود. مقادیر اجزاء مطلوب بسهولت ازمعادله (۹ — ۸) بدست میایند. فیلترمطلوب و پاسخ آن درشکل (۱ — ۸ ب) نشان داده شده است.

با بیان نرمالیزاسیون امپدانس، اولین مطالعه خود را درباره حالت دائمی سینوسی کامل کرده‌ایم. درفصل های بعد مرتباً از روش های این فصل استفاده کرده و خواص توابع مدار را بررسی خواهیم کرد.

خلاصه

● یک شکل موج سینوسی (با فرکانس زاویه‌ای ω)

$$x(t)=A_m\cos(\omega t+\Phi)$$

را میتوان با یک فازور نمایش داد:

$$A\triangleq A_m e^{j\Phi}$$

که مطابق آن :

$$x(t)=\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})=\mathrm{Re}(A_m e^{j(\omega t+\Phi)})$$

● بالعکس ، با داشتن فازور $A=A_m e^{j\Phi}$ وفرکانس زاویه‌ای ω ، میتوان‌شکل موج سینوسی $x(\cdot)$ را بطور یکتا تعیین نمود. بنابراین :

$$x(t)=\mathrm{Re}(Ae^{j\omega t})$$
$$=A_m \cos(\omega t+\Phi)$$

● برای مدارهای خطی تغییر ناپذیر با زمان ، اگر تمام فرکانس‌های طبیعی در نیمه بازچپ صفحه فرکانس مختلط واقع باشند ، گویند که مدار پایدار مجانبی است.

● برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان پایدارمجانبی ، پاسخ حالت دائمی سینوسی با پاسخ مدار به‌یک ورودی سینوسی وقتی $t \to \infty$ تعریف میشود. حالت دائمی سینوسی به‌حالت اولیه مدار بستگی‌ندارد. پاسخ حالت دائمی‌سینوسی همان فرکانس‌سینوسی ورودی را داراست.

● تابع شبکه برای یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان درحالت دائمی سینوسی با نسبت «فازور خروجی» به «فازور ورودی» تعریف میشود.

● امپدانس نقطه تحریک Z یک شبکه یک قطبی با اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان، عبارت ازتابع‌شبکه نظیر برای یک ورودی منبع جریان وپاسخ ولتاژ میباشد وبنابراین مساوی نسبت فازور ولتاژ خروجی به‌فازور منبع جریان است.

● ادمیتانس نقطه تحریک Y یک شبکه یک‌قطبی با اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ، عبارت از تابع شبکه نظیر برای یک ورودی منبع ولتاژ و پاسخ جریان میباشد و بنابراین مساوی نسبت فازور جریان خروجی به‌فازور منبع ولتاژ است.

● ادمیتانس نقطه تحریک Y یک شبکه یک قطبی $\mathcal{N}$ مساوی معکوس امپدانس نقطه تحریک Z شبکه $\mathcal{N}$ خواهد بود.

● امپدانس‌ها و ادمیتانس‌های نقطه تحریک برای اجزاء اصلی مدار چنین است:

	$Z(j\omega)$	$Y(j\omega)$
مقاومت	R	G
سلف	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$
خازن	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$

● «امپدانس» یک اتصال «سری» از شبکه‌های یک قطبی، مساوی مجموع امپدانس‌های تک‌تک شبکه‌های یک قطبی میباشد. «ادمیتانس» یک اتصال «موازی» از شبکه‌های یک قطبی مساوی‌مجموع ادمیتانس‌های تک‌تک شبکه‌های یک قطبی است.

● با داشتن تابع شبکه $H(j\omega)=\dfrac{V_0}{I_s}$ ، اگر ورودی شکل موج سینوسی $i_s(t)=|I_s|\cos(\omega t+\Phi)$ باشد آنگاه پاسخ حالت دائمی سینوسی چنین است:

$$v_0(t)=|H(j\omega)||I_s|\cos[\omega t+\Phi+\measuredangle H(j\omega)]$$

یعنی، دامنه خروجی از ضرب کردن دامنه ورودی در اندازه تابع شبکه بدست میآید و فاز خروجی از اضافه کردن فاز تابع شبکه به‌فاز ورودی بدست میآید.

● برای ورودی و خروجی مشخص منحنی‌های اندازه و فاز برحسب ω را پاسخ فرکانس یک مدار گویند.

● درحالت دائمی‌سینوسی، اگر ولتاژ قطب و جریان قطب‌یک شبکه‌یک قطبی $\mathcal{N}$ چنین باشند:

$$v(t)=\mathrm{Re}(Ve^{j\omega t})$$

$$i(t)=\mathrm{Re}(Ie^{j\omega t})$$

آنگاه توان «متوسط» تحویل داده شده به‌شبکه یک قطبی چنین است:

$$P_{av}=\frac{۱}{۲}|V||I|\cos(\measuredangle V-\measuredangle I)$$

$$=\frac{۱}{۲}\mathrm{Re}(V\bar{I})$$

$$=\frac{۱}{۲}|I|^{۲}\mathrm{Re}[Z(j\omega)]$$

$$=\frac{۱}{۲}|V|^{۲}\mathrm{Re}[Y(j\omega)]$$

که‌در آن $Z(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ بترتیب امپدانس وادمیتانس‌نقطه‌تحریک شبکه $\mathcal{N}$ میباشند.

● دریک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان درحالت دائمی ، توان «متوسط» کل که توسط چند منبع سینوسی با فرکانس‌های «متفاوت» بآن‌تحویل داده میشود مساوی مجموع توانهای متوسطی است که هرمنبع اگر بتنهایی مدار را تحریک میکرد بآن تحویل میداد .

مسائل

۱- نمایش‌های فازوری فازورهایی را که نشان‌دهنده توابع‌زمانی بامقدار حقیقی زیر می‌باشند ، تعیین کنید :

(الف) $۱۰\cos(۲t + ۳۰°) + ۵\sin ۲t$

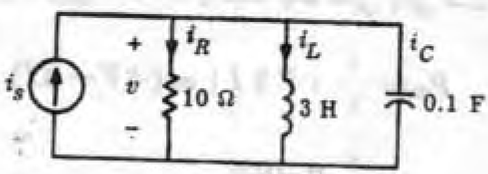
(ب) $\sin(۲t - ۹۰°) + \cos(۲t + ۴۵°)$

(پ) $\cos t + \cos(t + ۳۰°) + \cos(t + ۶۰°)$

۲ - محاسبه فازوری مدار خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (مسأله ۲ — ۷) درحالت دائمی سینوسی است :

(الف) فازورهای نشان دهنده توابع سینوسی از زمان زیر را محاسبه کنید : $i_s(t)$ ، $i_L(t)$ ، $i_R(t)$ ، $i_C(t)$ و $v(t)$ (یعنی I_s و I_L و I_R و I_C و V) .

(ب) ـ عبارتهایی برای توابعی زمانی با مقدار حقیقی $i_s(t)$ ، $i_L(t)$ ، $i_R(t)$ ، $i_C(t)$ و $v(t)$ بنویسید و آنهارا با مقیاس مناسب رسم کنید :



$$i_s(t) = ۱۰\cos\left(۲t - \frac{\pi}{۲}\right)$$

شکل (مسأله۲ - ۷)

۳- مقاومت غیرخطی وهارمونیکها گمریم v ولتاژ دو سر یک مقاومت غیرخطی با مشخصه زیر باشد :

$$v = ۵۰ i^۲$$

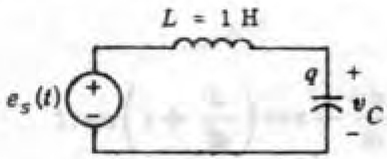
وقتی یک‌جریان $i = ۰{,}۰۱\cos ۳۷۷t$ ازداخل مقاومت غیرخطی میگذرد ولتاژ v راحساب کنید (نتیجه را برحسب مجموع سینوسی‌ها بیان کنید) . چه فرکانس هایی در خروجی وجود دارند ؟

۴ - خازن غیرخطی وهارمونیکهای فرعی مدار غیرخطی تغییرناپذیر با زمان مولد هارمونیک فرعی[1] راکه درشکل (مسأله ۴ — ۷) نشان داده شده است درنظر بگیرید. سلف خطی بوده و خازن دارای مشخصه زیر است :

$$v_c = \frac{۱}{۱۸} q + \frac{۲}{۲۷} q^۳$$

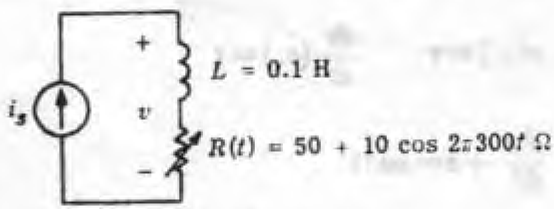
(الف) ـ تحقیق کنید که‌برای‌یک‌ورودی $e_s = \frac{۱}{۵۴}\cos t$ ولت ، یک پاسخ بصورت $q(t) = \cos\left(\frac{t}{۳}\right)$ کولمب ، معادله دیفرانسیل را برمیآورد (توجه کنید که نوسان بار با « یک سوم» فرکانس منبع صورت میگیرد) .

(ب) ـ برای بار بدست آمده در قسمت (الف) جریان درون منبع را محاسبه کنید .



شکل (مسأله ۴ - ۷)

۵ - مقاومت خطی تغییر پذیر با زمان مدار خطی تغییرپذیر با زمان نشان داده شده درشکل (مسأله ۵ — ۷) را درنظر بگیرید. وقتی جریان :



شکل (مسأله ۵ - ۷)

1- Subharmonic

$$i_s(t)=10^{-2}\cos\left[2\pi 60 t+\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

آمپر از مدار عبور میکند ولتاژ v را محاسبه کنید (نتیجه را برحسب مجموع سینوسی‌ها بیان کنید).

۶- فازورها ومعادلات دیفرانسیل جوابهای حالت دائمی معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید :

(الف) $$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+10x=\cos(2t+45^\circ)$$

(ب) $$\frac{d^3x}{dt^3}+6\frac{d^2x}{dt^2}+11\frac{dx}{dt}+6x=\sin 2t$$

(پ) $$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+x=\left(\frac{d}{dt}+1\right)\cos 2t$$

۷- معادلات دیفرانسیل، جواب کامل وجواب حالت دائمی جواب کامل معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید. نشان دهید که آیا جواب حالت دائمی برای هرمورد وجود دارد.

(الف) $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=\left(\frac{d}{dt}+1\right)\cos 2t$$

$$x(0_-)=1 \qquad \frac{dx}{dt}(0_-)=-1$$

(ب) $$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+x=\sin 2t$$

$$x(0_-)=1 \qquad \frac{dx}{dt}(0_-)=2$$

(پ) $$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\cos 2t$$

$$x(0_-)=1 \qquad \frac{dx}{dt}(0_-)=0$$

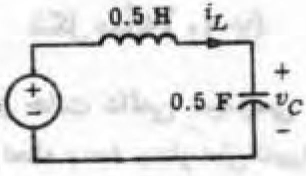
(ت)
$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\cos t$$

$$x(0_-)=1 \qquad \frac{dx}{dt}(0_-)=0$$

(ث)
$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+2x=\cos t$$

$$x(0_-)=1 \qquad \frac{dx}{dt}(0_-)=-1$$

۸ - فرکانس‌های طبیعی انگاری و پاسخ حالت دائمی مدار نشان‌داده شده درشکل (مسأله ۸ – ۷) از اجزاء خطی تغییرناپذیر بازمان ساخته شده است. ورودی e_s و پاسخ مدار v_C میباشد. با دانستن اینکه $e_s(t)=\sin 2t$ ولت و درلحظه $t=0$ ، حالت مدار $i_L=2$ آمپر و $v_C=1$ ولت است. پاسخ کامل را محاسبه کنید.



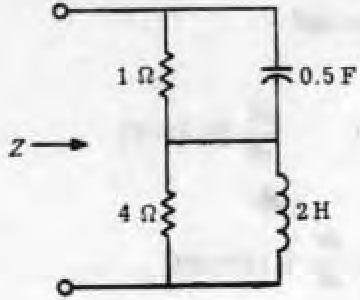
شکل (مسأله ۸-۷)

۹ - امپدانس نقطه تحریک مدار نشان داده شده درشکل (مسأله ۹ – ۷) دارای اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان است.

(الف) ـ امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ را تعیین کنید.

(ب) ـ مقادیر امپدانس را برای $\omega=0$ و $\omega=1$ رادیان بر ثانیه حساب کنید (امپدانس‌را برحسب اندازه و زاویه مشخص کنید).

(پ) ـ با استدلال فیزیکی مقادیر امپدانس در $\omega=0$ و $\omega=\infty$ را توضیح دهید.



شکل (مسأله ۹-۷)

۱۰ - جمع آثار در حالت دائمی برای مدار شکل (مسأله ۱۰ — ۷) ، با دانستن اینکه برای تمام مقادیر t ، $i_s(t) = ۱ + ۲\cos ۲t$ میباشد ، ولتاژ حالت‌دائمی v را تعیین کنید .

شکل مسأله (۱۰-۷)

۱۱ - پاسخ کامل و حالت دائمی سینوسی گیریم یک ولتاژ سینوسی $e_s(t) = ۲\cos ۱۰^۶t$ ولت در لحظه $t=0$ بمدار خطی تغییرناپذیر با زمان LC نشان‌داده شده در شکل (مسأله ۱۱ — ۷) اعمال شود .

الف ـ با دانستن $i(0) = ۱mA$ و $v(0) = 0$ ، برای $t \geqslant 0$ ، $i(t)$ را محاسبه و رسم کنید .

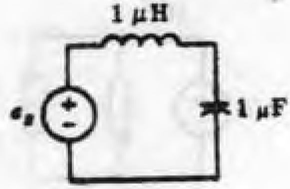
ب ـ فرض کنید که ما کنترل فاز Φ مولد ولتاژ e_s را داشته باشیم یعنی فرض کنید:

$$e_s(t) = ۲\cos(۱۰^۶t + \Phi)$$

مقدار مناسب Φ را اگر وجود داشته باشد چنان پیدا کنید که پاسخ بصورت زیر باشد :

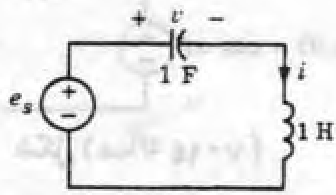
$$i(t) = ۱۰^{-۳}\cos ۱۰^۶t + A\sin ۱۰^۶t$$

که درآن A مقدار ثابتی است.



شکل (مسأله ۱۱-۷)

۱۲ - مدار بی اتلاف و پاسخ حالت دائمی مدار خطی تغییرناپذیر با زمان LC سری نشان داده شده درشکل (مسأله ۱۲ - ۷) را که درآن ورودی سینوسی $e_s(t)=E_m\cos(t+\Phi)$ میباشد در نظر بگیرید. معادله دیفرانسیلی برای $v(t)$ را تشکیل داده و نشان دهید که ولتاژ v بصورت $v(t)=\mathrm{Re}(Ve^{jt})$ نمیباشد که درآن V فازور نمایش دهنده $v(t)$ است توضیح دهید.



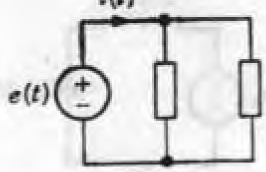
شکل (مسأله ۱۲-۷)

۱۳ - پاسخ حالت دائمی سینوسی برای تمام مقادیر t ولتاژ و جریان زیر داده شده‌اند.

$$e(t)=۵۰\sin\left(۱۰t+\frac{\pi}{۴}\right)$$

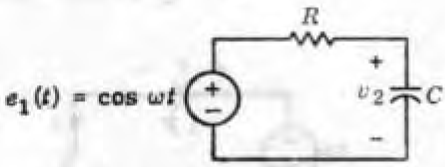
$$i(t)=۴۰۰\cos\left(۱۰t+\frac{\pi}{۶}\right)$$

اجزاء مناسب مدار خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده درشکل (مسأله ۱۳ - ۷) را پیدا کرده و مقادیر آنها را برحسب اهم، هانری وفاراد مشخص سازید.



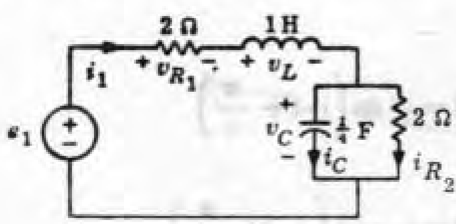
شکل (مسأله ۱۳ - ۷)

۱۴ - تابع شبکه و پاسخ حالت دائمی مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۴ — ۷) خطی و تغییرناپذیر با زمان بوده و درحالت دائمی سینوسی است. فرکانس ω که درآن $v_2(t)$ نسبت به $e_1(t)$ ، $45°$ عقب میافتد، برحسب مقادیر R و C پیدا کنید. دامنه $v_2(t)$ را درآن فرکانس بدست آورید.



شکل (مسأله ۱۴ - ۷)

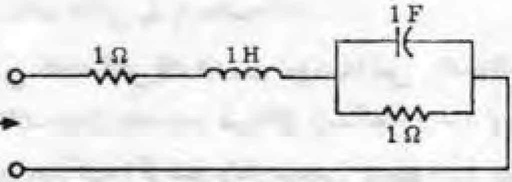
۱۵ - دیاگرام فازوری بافرض $v_C(t) = \cos 2t$ ، یک دیاگرام فازوری بسازید که تمام ولتاژها و جریانهای مشخص شده در شکل (مسأله ۱۵ — ۷) را نشان دهد. ولتاژ حالت دائمی $e_1(t)$ را پیدا کنید. (آنرا بصورت تابعی حقیقی از زمان نشان دهید).



شکل (مسأله ۱۵ - ۷)

۱۶ - اتصال سری امپدانسها امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۶ — ۷) را تعیین کنید. اگر یک منبع ولتاژ سینوسی

$v_s(t)=10\cos 2t$ به‌یک شبکه یک قطبی اعمال شود ، جریان قطب را در حالت دائمی سینوسی تعیین کنید.



شکل (مسأله ۱۶ - ۷)

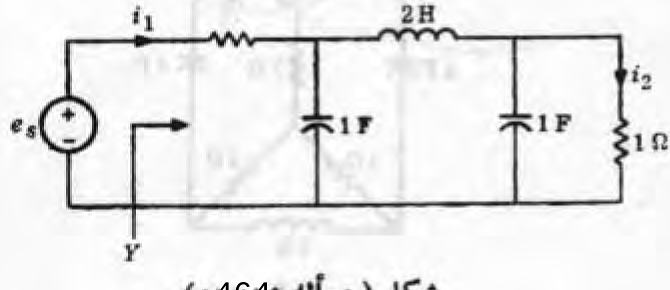
۱۷ - پاسخ فرکانس اندازه وفاز امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ مدار شکل (مسأله ۱۶ — ۷) را برحسب ω رسم کنید. اگرمنبع جریان $i_s(t)=1+\cos t+\cos 2t$ به‌شبکه یک قطبی اعمال شود ، ولتاژ حالت دائمی قطب را پیدا کنید.

۱۸ - مکان‌های امپدانس و ادمیتانس جزءهای حقیقی و انگاری امپدانس $Z(j\omega)$ مدار شکل (مسأله ۱۶ — ۷) را تعیین کنید. سوسپتانس را بصورت تابعی از ω تعیین‌نموده و رسم کنید. مکان امپدانس ومکان ادمیتانس شبکه یک قطبی را رسم نمائید.

۱۹ - مدار نردبانی و توابع شبکه برای مدار نردبانی نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۹ — ۷) :

(الف) ـ ادمیتانس نقطه‌تحریک $Y(j\omega)$ را تعیین کنید.

(ب) جریان حالت دائمی i_1 ، ناشی از منبع ولتاژسینوسی $e_s(t)=2\cos 2t$ را محاسبه کنید.

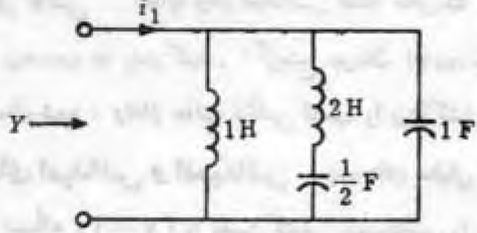


شکل (مسأله ۱۹ - ۷)

(پ) ـ ادمیتانس انتقالی $Y_{21}(j\omega)=\frac{I_2}{E_s}$ را که در آن I_2 و E_s بترتیب فازورهای نشان دهنده جریان سینوسی i_2 و ولتاژ سینوسی e_s میباشند تعیین کنید.

(ت) ـ جریان حالت دائمی i_2 را محاسبه کنید.

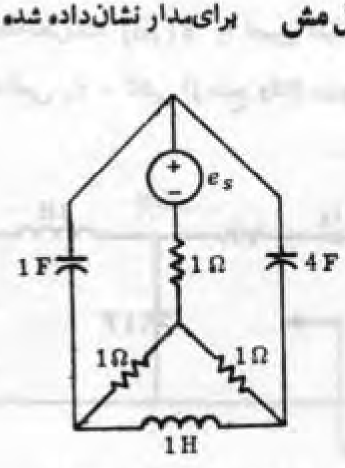
۲۰ - ادمیتانس نقطه تحریک ورسم سوسپتانس ادمیتانس نقطه تحریک $Y(j\omega)$ مدار بدون اتلاف نشان داده شده در شکل (مسأله ۲۰ – ۷) را تعیین کنید. سوسپتانس‌را برحسب ω رسم کنید اگر منبع ولتاژ سینوسی $e_s=\cos\omega t$ به‌شبکه یک قطبی اعمال شود، درباره جریان i_1 در $\omega=0$, ۱ , ۲ , ∞ چه میتوانید بگوئید؟



شکل (مسأله ۲۰ - ۷)

۲۱ - مدار دوگان مدار دوگان مدار نشان‌داده شده درشکل (مسأله ۲۰ – ۷) را تعیین کنید.

۲۲- تجزیه وتحلیل مش برای‌مدار نشان‌داده شده درشکل (مسأله ۲۲ – ۷)



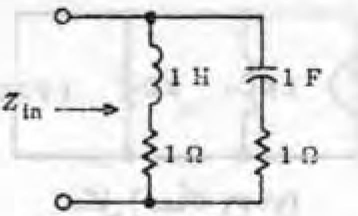
شکل (مسأله ۲۲ - ۷)

جریان حالت دائمی سینوسی درسلف و ولتاژ حالت دائمی سینوسی در دوسرخازن ۱ فارادی را تعیین کنید. منبع ولتاژ ورودی $e_s(t) = \cos 2t$ میباشد.

۲۳ - تجزیه و تحلیل گره اتصال سری منبع ولتاژ و مقاومت شکل (مسأله ۲۲ — ۷) را به‌اتصال موازی یک منبع جریان ومقاومت تبدیل کنید. با استفاده ازتجزیه و تحلیل گره ، جریان حالت دائمی سینوسی در سلف و ولتاژ حالت دائمی سینوسی در دو سر خازن ۱ فارادی را بدست آورید.

۲۴ - امپدانس نقطه تحریک و توان (الف) ـ امپدانس ورودی $Z_{in}(j\omega)$ را در فرکانس ω پیدا کنید.

(ب) ـ اگر ولتاژ ورودی $10\cos\omega t$ بوده و مدار درحالت دائمی سینوسی باشد ، توان لحظه‌ای ورودی به‌مدار (بصورت تابعی از زمان) چیست؟ (به‌شکل مسأله (۲٤ — ۷) رجوع شود).



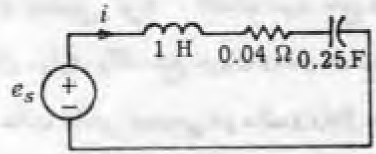
شکل (مسأله ۲٤ - ۷)

۲۵ - فازور ، انرژی و توان مدار RLC سری نشان داده شده درشکل (مسأله ۲۵ — ۷) از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است.

الف ـ با استفاده از روش فازوری پاسخ حالت دائمی سینوسی i را به ورودی $e_s = \sin\omega t$ ولت برای مقادیر ۲٫۰٤ , ۲٫۰۲ , ۲٫۰۰ = ω رادیان برثانیه حساب کنید. هرنتیجه را برحسب تابع حقیقی از زمان نشان دهید.

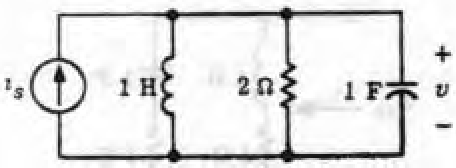
ب ـ انرژی‌های ذخیره شده در خازن $\mathcal{E}_E$ و درسلف $\mathcal{E}_M$ را بصورت توابعی از زمان برای ۲٫۰٤ و ۲٫۰۲ و ۲٫۰۰ = ω رادیان برثانیه محاسبه کنید.

پ ـ توان متوسط تلف شده درمقاومت را برای ۲٫۰۴ , ۲٫۰۲ , ۲٫۰۰ = ω رادیان برثانیه حساب کنید.



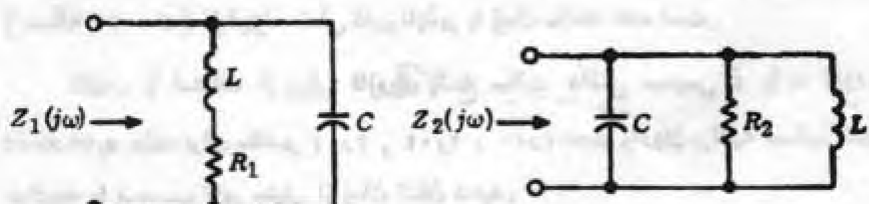
شکل (مسأله ۲۵ - ۷)

۲۶-امپدانس، پاسخ زمانی وجمع آثار اجزاء مدارنشان داده شده درشکل (مسأله ۲۶ − ۷) خطی وتغییرناپذیر بازمان هستند. باداشتن $i_s = 2\sin t + \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ ولتاژ حالت دائمی v را بصورت تابعی از زمان محاسبه و رسم کنید. ایده اصلی روش خود را توضیح دهید.



شکل (مسأله ۲۶-۷)

۲۷- پاسخ‌های فرکانس مدارهای تشدید شبکه‌های یک قطبی نشان داده شده درشکل (مسأله ۲۷ − ۷) را درنظر بگیرید. امپدانس‌های $Z_1(j\omega)$ و $Z_2(j\omega)$



$L = 10^{-3}$ H $R_1 = 10\ \Omega$
$C = 10^{-9}$ F $R_2 = 10^5\ \Omega$

شکل (مسأله ۲۷ - ۷)

را محاسبه کنید. اگر تنها فرکانس هایی که در فاصله بین فرکانس تشدید و دو برابر آن قراردارند مورد نظرباشند ، درباره شکل های نسبی منحنی های $|Z_1(j\omega)|$ و $|Z_2(j\omega)|$ و منحنی های $\measuredangle Z_1(j\omega)$ و $\measuredangle Z_2(j\omega)$ چه میتوان گفت؟

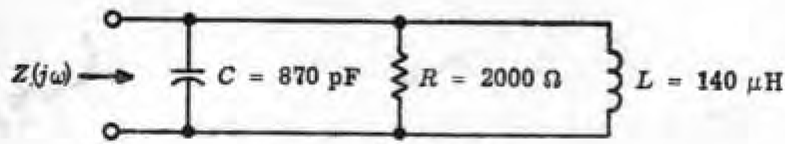
۲۸ - مدار تشدید ، Q و پاسخ فرکانس شبکه یک قطبی نشان داده شده درشکل (مسأله ۲۸ — ۷) از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است.

(الف) ـ فرکانس تشدید ω_0 و مقدار Q را محاسبه کنید.

(ب) ـ امپدانس نقطه تحریک $z(j\omega)$ را حساب کنید.

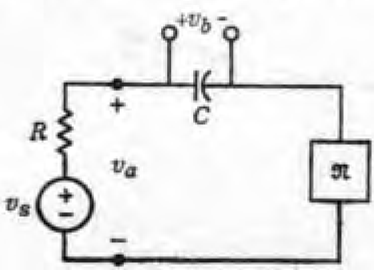
(پ) اندازه و زاویه فاز امپدانس را بطور ترسیمی برای این مقادیر $\frac{\omega}{\omega_0}$ محاسبه کنید : 0 ، $1-\frac{3}{2Q}$ ، $1-\frac{1}{2Q}$ ، 1 ، $1+\frac{1}{2Q}$ ، $1+\frac{3}{2Q}$ ، 1 و 2

(ت) ـ از نتایج قسمت (پ) $|Z(j\omega)|$ و $\measuredangle Z(j\omega)$ را برحسب $\frac{\omega}{\omega_0}$ رسم کنید .



شکل (مسأله ۲۸ - ۷)

۲۹ - دیاگرام فازوری و توان مدارنشان داده شده درشکل (مسأله ۲۹ — ۷) درحالت دائمی سینوسی کار میکند . مقادیر $v_a = 10\cos(1000t+60°)$ و $v_b = 5\cos(1000t-30°)$ تعیین شده اند. اندازه امپدانس خازن دراین فرکانس ۱۰ است

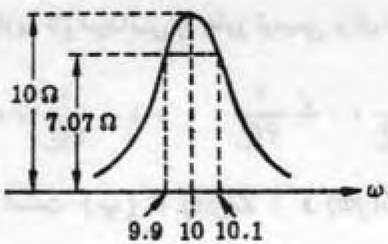


شکل (مسأله ۲۹ - ۷)

امپدانس $Z(j1000)$ شبکه‌یک‌قطبی N وتوان‌متوسط تحویل دادشده‌به N را تعیین کنید.

۳۰ - پهنای باند مدار تشدید ، طرح (الف) در شکل (مسأله ۳۰ — ۷) منحنی تشدید [$|Z(j\omega)|$ برحسب اهم نسبت به ω برحسب رادیان برثانیه] یک مدار RLC موازی نشان داده شده است. R و L و C را پیدا کنید.

(ب) - همین رفتار تشدید در نزدیکی‌های فرکانس مرکزی ۲۰ kHz مورد نظر است وحداکثر $|Z(j\omega)|$ باید ۱۰ $M\Omega$ باشد. مقادیر جدید R و L و C را بدست آورید.



شکل (مسأله ۳۰-۷)

۷*

مدارهای سه فاز

هدف از این فصل نشان دادن آن است که چرا مولدها و خطوط انتقال سه فاز در مدارهای سیستم‌های قدرت به کار برده می‌شوند. دلایل متعددی موجب برتری سیستم‌های سه فاز بر سیستم‌های تک فاز می‌شود. یک دلیل مهم این است که در یک سیستم تک فاز توان لحظه‌ای تحویل داده شده به یک بار ثابت نبوده و نوسان می‌کند؛ در حالی که در یک سیستم سه فاز این نوسانات توان، به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. دلیل مهم دیگر آن است که تولید انرژی الکتریکی به صورت سه فاز به مراتب راحت‌تر از تولید آن به صورت تک فاز است. به این دلایل و به دلایل متعدد دیگر، مدارهای سه فاز متعادل را در این فصل مختصراً مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱- ملاحظات کلی

منظور از این بخش توضیح آن است که چرا اکثر خطوط انتقال انرژی که در جاده‌های بین شهری دیده می‌شود دارای مشخصه‌های زیر است:

الف - ولتاژ بالا

ب - سه فاز (دارای سه سیم)

پ - تغذیه شده به وسیلهٔ مولدهای ac (در مقابل مولدهای dc)

کار با مولدهای جریان متناوب نسبت به مولدهای جریان دایم به مراتب راحت‌تر است، زیرا می‌توان به کمک ترانسفورماتورها، ولتاژهای ac را افزایش یا کاهش داد. به علاوه ترانسفورماتورها در فرکانس ۵۰ هرتز بسیار کارآمد بوده، عملاً نگهداری چندانی لازم ندارند. ولتاژ تولید شده در مراکز تولید نیرو در حدود ۱۰ تا ۳۰ کیلوولت است. برای مسافتهای طولانی، این مقدار توسط ترانسفورماتورها به چندین صد کیلوولت افزایش داده می‌شود و در مراکز مصرف مانند کارخانجات، ادارات و منازل مجدداً پایین آورده می‌شود.

در انتقال نیرو از ولتاژ بالا استفاده می‌شود، زیرا اتلاف توان متوسط در یک خط با امپدانس $R + jX$ برابر $P_L = \frac{1}{2} R I_m^2$ است. توان متوسط انتقال داده شده برابر $P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\angle V - \angle I)$ است. بنابراین برای یک توان انتقال داده شدهٔ P، می‌توان توان تلف شده به صورت حرارت در خطوط انتقال را به سادگی با حذف I_m میان دو رابطهٔ بالا به صورت زیر به دست آورد:

$$P_L = \frac{2RP^2}{V_m^2 \cos^2(\measuredangle V - \measuredangle I)} \qquad (1-1)$$

بنابراین برای یک خط انتقال مشخص (با R معین) و برای انتقال توان داده شده (با P معین) می‌توان با انتخاب مقدار بزرگی برای V_m (معمولاً تا حد ۷۶۵ کیلوولت) و نزدیک نگهداشتن ضریب توان $\cos(\measuredangle V - \measuredangle I)$ به عدد ۱، اتلاف توان را کاهش داد و بدیهی است هر چه مقدار V_m بالاتر باشد، اتلاف توان کمتر خواهد بود.

به دو دلیل اصلی، ساختن مولدهای ac در عمل راحت‌تر از ساختن مولدهای dc است:

الف ـ سیم‌پیچی‌های ولتاژ بالا و جریان بالا روی استاتور که ثابت است، قرار می‌گیرند.

ب ـ ولتاژ القا شده در استاتور طبعاً نوسانی است و با تغییر شکل دادن قطبها و/ یا طراحی سیم‌پیچی‌ها می‌توان ولتاژ القا شده را تقریباً به صورت سینوسی درآورد.

سرانجام، مدارهای سه فاز به دلایل اقتصادی و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از جملهٔ این دلایل عبارتند از:

الف ـ تحت بار متعادل، گشتاور روی مولد ثابت است و بنابراین ارتعاشی وجود ندارد.

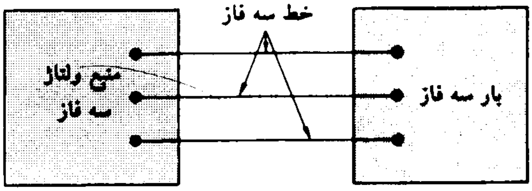
ب ـ ایجاد میدان مغناطیسی دوار با سه فاز راحت‌تر است و بنابراین امکان ساختن موتورهای القایی ارزان‌تر فراهم می‌شود.

پ ـ با سیستم سه فاز ac می‌توان در مقدار آلومینیوم خطوط انتقال صرفه‌جویی کرد. تحت بارهای متعادل مشاهده خواهیم کرد که به‌جای شش سیم فقط سه سیم مورد نیاز است.

این سه مشاهدهٔ اخیر در بخشهای بعدی مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۲- مدارهای سه فاز متعادل

تولید، انتقال، توزیع و مصرف حجم زیادی از انرژی الکتریکی، توسط مدارهای سه فاز صورت می‌گیرد. تحلیل جامع سیستم‌های سه فاز خود درس جداگانه‌ای است و نمی‌توان امیدوار شد که در یک فصل به طور کامل بیان شود. خوشبختانه، تنها درک رفتار حالت دایمی سینوسی مدارهای سه فاز متعادل برای مهندسینی که نمی‌خواهند متخصص قدرت شوند، کاملاً کفایت می‌کند. در قسمتهای بعدی بحث، منظور خود را از مدارهای متعادل بیان خواهیم کرد. عجالتاً متذکر می‌شویم که به دلایلی بحث خود را به مدارهای متعادل محدود کرده‌ایم. نخست اینکه به دلایل اقتصادی، سیستم‌های سه فاز چنان طراحی می‌شوند که در حالت متعادل کار کنند. بدین معنی که تحت شرایط کار طبیعی، این مدارهای سه فاز به مدارهای متعادل بسیار نزدیک هستند و به دست آوردن جوابی که متعادل بودن کامل را فرض می‌کند قابل توجیه است. دلیل دوم اینکه، می‌توان مسائلی را که متضمن نوعی شرایط عملکردی نامتعادل است با روشی که به اصطلاح روش مولفه‌های متقارن گفته می‌شود حل کرد، که این امر بستگی کاملی به درک عمیق عملکرد سیستم‌های متعادل دارد. گرچه ما در مورد روش مولفه‌های متقارن بحث نخواهیم



شکل ۲-۱ مدار سه فاز اساسی.

کرد، درک عملکرد متعادل، به عنوان نقطهٔ آغازین برای روشهای پیشرفته، در تحلیل نوع خاصی از شرایط نامتعادل به کار می‌رود.

ساختار اساسی یک سیستم سه فاز، مرکب از منابع ولتاژی است که از طریق ترانسفورماتور و خطوط انتقال به بارها وصل می‌شوند. می‌توان مسأله را به تحلیل مداری که شامل یک منبع ولتاژ وصل شده به یک بار از طریق یک خط انتقال است، تقلیل داد. حذف ترانسفورماتور به عنوان یک عنصر در سیستم، بدون آنکه درک اساسی محاسبات موجود را به مخاطره بیندازد، بحث را ساده‌تر می‌نماید. مدار اساسی در شکل (۲-۱) نشان داده شده است. برای آنکه تحلیل مداری از این نوع را آغاز کنیم باید مشخصات یک دسته از ولتاژهای سینوسی سه فاز متعادل را درک کنیم.

۲-۱ ولتاژهای سه فاز متعادل

دسته‌ای از ولتاژهای سه فاز متعادل مشتمل بر سه ولتاژ سینوسی است که دارای فرکانس و اندازهٔ یکسانی بوده، امّا دقیقاً اختلاف فازی به مقدار °۱۲۰ با یکدیگر دارند. در مطالعهٔ مدارهای سه فاز روال عادی این است که به سه فاز، با a، b و c اشاره کنیم. همچنین فاز a اغلب به عنوان فاز مبنا به کار گرفته می‌شود. به سه ولتاژی که دستهٔ سه فاز را تشکیل می‌دهند ولتاژ فاز a ، ولتاژ فاز b و ولتاژ فاز c گفته می‌شود.

از آنجایی که ولتاژهای فاز با یکدیگر °۱۲۰ اختلاف فاز دارند، دو رابطهٔ فازی می‌تواند میان ولتاژ فاز a و ولتاژهای فازهای b و c وجود داشته باشد. یک امکان آن است که ولتاژ فاز b به مقدار °۱۲۰ از ولتاژ فاز a عقب بیفتد که در این صورت ولتاژ فاز c باید به مقدار °۱۲۰ از ولتاژ فاز a جلو بیفتد. این رابطهٔ فازی را دنبالهٔ فازی abc یا دنبالهٔ فازی مثبت گویند. تنها امکان نوع دیگر آن است که ولتاژ فاز b از ولتاژ فاز a به اندازهٔ °۱۲۰ جلو بیفتد که در این صورت ولتاژ فاز c باید به مقدار °۱۲۰ از ولتاژ فاز a عقب بیفتد. این رابطهٔ فازی را دنبالهٔ فازی acb یا دنبالهٔ فازی منفی گویند. در نمایش فازوری، دو دستهٔ ممکن از ولتاژهای سه فاز متعادل عبارتند از:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_a &= V_m \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_b &= V_m \angle -120^\circ \\ \mathbf{V}_c &= V_m \angle +120^\circ \end{aligned} \qquad (۲-۱)$$

و:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_a &= V_m\angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_b &= V_m\angle +120^\circ \\ \mathbf{V}_c &= V_m\angle -120^\circ \end{aligned} \qquad (۲-۲)$$

دنبالهٔ فازی ولتاژهای داده شده در معادلات (۲-۱) دنبالهٔ فازی abc یا مثبت می‌باشد. دنبالهٔ فازی ولتاژهای داده شده در معادلات (۲-۲) دنبالهٔ فازی acb یا منفی است. نمایش دیاگرام فازوری دسته ولتاژهای داده شده در معادلات (۲-۱) و (۲-۲) در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. با حرکت روی شکل در جهت عقربه‌های ساعت، می‌توان دنباله فازی را با توجه به ترتیب زیرنویسها تعیین کرد. این حقیقت که یک مدار سه فاز می‌تواند یکی از دو حالت دنبالهٔ فازی را داشته باشد، مشخصهٔ مهمی است که وقتی دو مدار جداگانه، به طور موازی به هم وصل می‌شوند باید در نظر گرفته شود.

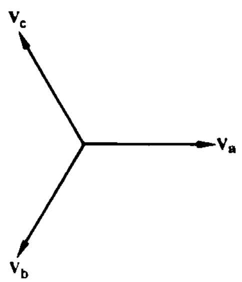
مشخصهٔ مهم دیگر یک دسته ولتاژ سه فاز متعادل این است که مجموع ولتاژها برابر صفر است. بنابراین با به کار بردن معادلات (۲-۱) یا (۲-۲) داریم:

$$\mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b + \mathbf{V}_c = 0 \qquad (۳-۲)$$

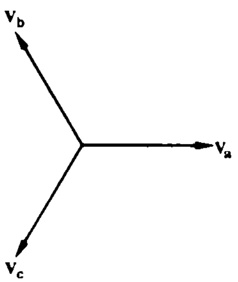
به دلیل این که مجموع فازورهای ولتاژها برابر صفر است، مجموع ولتاژهای لحظه‌ای نیز برابر صفر است. یعنی:

$$v_a + v_b + v_c = 0 \qquad (۴-۲)$$

مشاهدهٔ قابل توجه دیگر این است که اگر ما دنبالهٔ فازی و یکی از ولتاژهای دسته را بدانیم، تمام ولتاژهای دسته را می‌دانیم. بنابراین در یک سیستم سه فاز متعادل، می‌توان برروی محاسبهٔ ولتاژ (یا جریان) یک فاز تمرکز نمود. زیرا هنگامی که کمیت یک فاز را بدانیم، به طور خودکار کمیت متناظر را در دو فاز دیگر می‌دانیم.



(الف)



(ب)

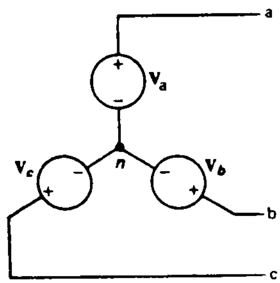
شکل ۲-۲ . دیاگرام فازوری یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل: (الف) دنبالهٔ abc یا دنبالهٔ مثبت؛ (ب) دنبالهٔ acb یا دنبالهٔ منفی.

۲-۲ منابع ولتاژ سه فاز

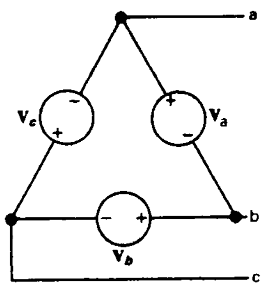
منابع ولتاژ سه فاز مرکب از مولدهایی است که سیم‌پیچی جداگانهٔ توزیع شده بر روی اطراف استاتور دارند. هر سیم‌پیچ یک فاز مولد را تشکیل می‌دهد. روتورِ مولد، یک آهن‌ربای الکتریکی است که با سرعت همزمان توسط یک گردانندهٔ اصلی مانند توربین بخار یا گازی چرخانده می‌شود. وقتی که آهن‌ربای الکتریکی ضمن دوران از مقابل سر سیم‌پیچ می‌گذرد، یک ولتاژ سینوسی در هر سیم‌پیچ القا می‌شود. سیم پیچ‌های فاز چنان طراحی شده‌اند که ولتاژ سینوسی القا شده در آنها از لحاظ اندازه یکسان بوده و دقیقاً اختلاف فازی به‌مقدار ۱۲۰° دارند. چون سیم‌پیچ‌های فاز در مقابل آهن‌ربای الکتریکی دوار ساکن هستند، فرکانس ولتاژ القا شده در هر سیم‌پیچ یکسان است.

معمولاً امپدانس هر سیم‌پیچ فاز در یک مولد سه فاز، در مقایسه با سایر امپدانس‌های موجود در مدار بسیار کوچک است. از این‌رو هر سیم‌پیچ فاز را می‌توان در یک مدار الکتریکی به طور تقریبی به صورت یک منبع ولتاژ سینوسی ایده‌آل، مدل‌سازی نمود. برای تشکیل منبع سه فاز دو راه برای به هم پیوستن سیم‌پیچ‌های فاز جداگانه وجود دارد. سیم‌پیچها را می‌توان یا به صورت اتصال ستاره یا وای (Y) یا به‌صورت اتصال مثلث یا دلتا (Δ) به هم وصل کرد. اتصالات Y و Δ در شکل (۲-۳) نشان داده شده است، که درآن برای مدل‌سازی سیم‌پیچ‌های فاز یک مولد سه فاز، از منابع ولتاژ ایده‌آل استفاده شده است. گره مشترک در اتصال منابع به صورت Y در شکل (۲-۳ الف) با n علامت‌گذاری شده است و به عنوان سر خنثی منبع گفته می‌شود. برای اتصالات خارجی ممکن است سر خنثی در دسترس باشد یا نباشد.

اگر امپدانس هر سیم پیچ فاز قابل صرفنظر نباشد، منبع سه فاز با اضافه کردن امپدانس سیم‌پیچ به طور سری با منابع ولتاژ سینوسی ایده‌آل، مدل‌سازی می‌شود. از آنجایی که تمام سیم‌پیچ‌های ماشین ساختمان یکسانی دارند، فرض می‌کنیم که امپدانس سیم‌پیچ‌ها یکسان باشد. امپدانس سیم‌پیچ مولدهای سه فاز القایی است. مدل یک منبع سه فاز شامل امپدانس‌های سیم‌پیچ در شکل (۲-۴) نشان داده شده است که در آن R_w مقاومت سیم‌پیچ و X_w راکتانس القایی سیم‌پیچ است.

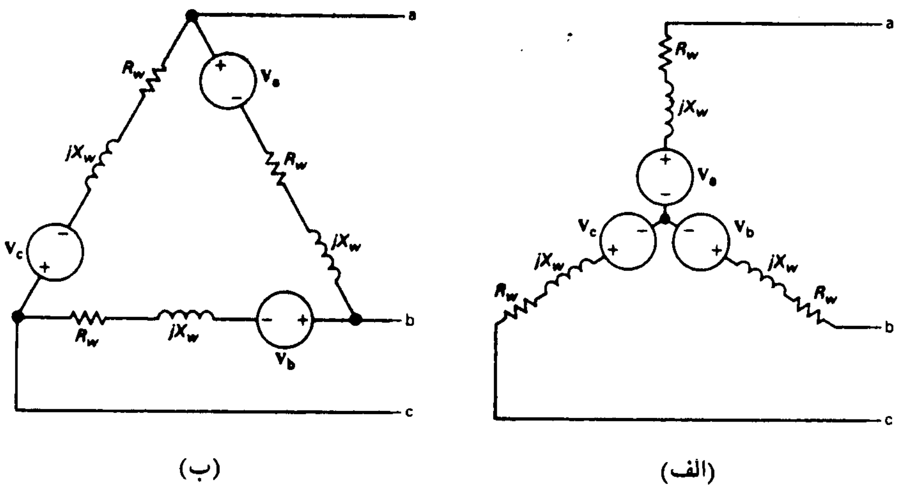


(الف)



(ب)

شکل ۲-۳ دو اتصال اصلی منابع ولتاژ سه فاز ایده‌آل: (الف) منبع وصل شده به صورت Y؛ (ب) منبع وصل شده به صورت Δ.



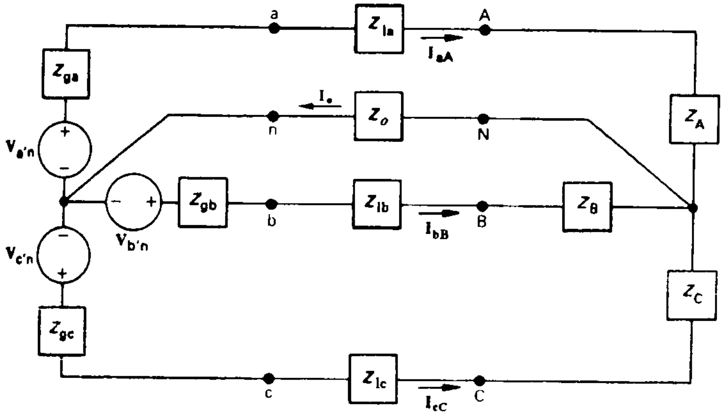
شکل ۲-٤ مدلی از یک منبع سه فاز با امپدانس‌های سیم‌پیچی: (الف) منبع وصل شده به صورت Y ؛ (ب) منبع وصل شده به صورت Δ.

به علت اینکه یک منبع ولتاژ سه فاز می‌تواند به صورت Y یا به صورت Δ وصل شده باشد و بار سه فاز نیز می‌تواند به صورت Y یا Δ وصل شده باشد، مدار اساسی شکل (۲-۱) می‌تواند چهار صورت متفاوت به خود بگیرد. چهار ترتیب ممکن عبارتند از: (۱) منبع وصل شده به صورت Y و بار وصل شده به صورت Y ؛ (۲) منبع وصل شده به صورت Y و بار وصل شده به صورت Δ ؛ (۳) منبع وصل شده به صورت Δ و بار وصل شده به صورت Y ؛ (۴) منبع وصل شده به صورت Δ و بار وصل شده به صورت Δ.

ما تحلیل مدارهای سه فاز را به صورت اول آغاز می‌کنیم. پس از تحلیل مدار Y - Y ، نشان خواهیم داد که چگونه در مدارهای متعادل، صورتهای دیگر را می‌توان به مدار معادل به صورت Y - Y تبدیل کرد. به عبارت دیگر، تحلیل مدار Y - Y کلید حل تمام صورتهای سه فاز متعادل دیگر است.

۲-۳ تحلیل مدار Y - Y

تحلیل خود را از مدار Y - Y با فرض نامتعادل بودن آن آغاز می‌کنیم! این کار را عمداً انجام می‌دهیم تا نشان دهیم که منظور ما از متعادل بودن مدار سه فاز چیست و نتایج متعادل بودن در تحلیل مدار چگونه است. مدار کلی Y - Y در شکل (۲-۵) نشان داده شده است که در آنجا سیم چهارمی هم گره خنثی منبع را به گره خنثی بار وصل می‌کند. سیم چهارم تنها در ترکیب Y - Y امکان‌پذیر است. همچنین برای سهولت رسم دیاگرام‌ها، اتصالات Y را به صورت T های خوابیده نشان داده‌ایم. در شکل (۲-۵)، Z_{ga} ، Z_{gb} و Z_{gc} نشان دهندهٔ امپدانس‌های درونی متناظر با هر فاز سیم پیچی منابع ولتاژ هستند. Z_{la} ، Z_{lb}



شکل ۲-۵ یک سیستم سه فاز Y - Y.

و Z_{lc} نشان دهندهٔ امپدانس هر سیم خط فازی است که منبع را به بار وصل می‌کند. Z_o امپدانس سیم خنثی است که گره خنثی منبع را به گره خنثی بار وصل می‌کند. Z_A ، Z_B و Z_C نشان دهندهٔ امپدانس هر فاز بار هستند.

مدار شکل (۲-۵) را می‌توان با یک معادلهٔ ولتاژگره تنها توصیف کرد. با به کار بردن گره خنثی منبع به عنوان گره مبنا و با فرض V_N به عنوان ولتاژگره میان گره‌های N و n معادلهٔ ولتاژگره را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{V_N}{Z_o} + \frac{V_N - V_{a'n}}{Z_A + Z_{la} + Z_{ga}} + \frac{V_N - V_{b'n}}{Z_B + Z_{lb} + Z_{gb}} + \frac{V_N - V_{c'n}}{Z_C + Z_{lc} + Z_{gc}} = 0 \qquad (۲-۵)$$

قبل از تحلیل بیشتر معادلهٔ (۲-۵)، اندکی مکث کرده و ملاحظه کنید که روشهای تحلیل مدار بحث شده در فصلهای قبل مستقیماً به مدارهای سه فاز قابل اعمال هستند. از این‌رو معرفی روشهای تحلیلی جدید برای تحلیل مدارهای سه فاز لازم نیست. لیکن به طوری که در بقیهٔ این فصل خواهیم دید، اگر یک مدار سه فاز، متعادل باشد، می‌توان بعضی روشهای تحلیلی میان‌بر مهم برای بررسی رفتار سیستم ارائه داد.

مدار شکل (۲-۵) یک مدار سه فاز متعادل است، اگر تمام شرایط زیر برقرار باشد:

۱- $V_{a'n}$ ، $V_{b'n}$ و $V_{c'n}$ یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل تشکیل دهند.

۲- $Z_{ga} = Z_{gb} = Z_{gc}$

۳- $Z_{la} = Z_{lb} = Z_{lc}$

۴- $Z_A = Z_B = Z_C$

هیچ محدودیتی برروی امپدانس سیم خنثی (Z_o) وجود ندارد. مقدار آن هیچ تاثیری برروی متعادل بودن یا نامتعادل بودن سیستم ندارد.

اگر سیستم متعادل باشد معادلهٔ (۲-۵) بیان می‌کند که $\mathbf{V_N}$ باید برابر صفر باشد. برای نشان دادن این مطلب فرض کنید:

$$Z_\phi = Z_A + Z_{1a} + Z_{ga} \tag{۶-۲}$$

در این صورت معادلهٔ (۲-۵) را دوباره به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{V_N}\left(\frac{۱}{Z_۰} + \frac{۳}{Z_\phi}\right) = \frac{\mathbf{V}_{a'n} + \mathbf{V}_{b'n} + \mathbf{V}_{c'n}}{Z_\phi} \tag{۷-۲}$$

سمت راست معادلهٔ (۲-۷) برابر صفر است زیرا بنابه فرض، صورت آن یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل بوده و Z_ϕ برابر صفر نمی‌باشد. تنها مقدار $\mathbf{V_N}$ که در معادلهٔ (۲-۷) صدق می‌کند، صفر است. از این‌رو برای یک مدار سه فاز متعادل داریم:

$$\mathbf{V_N} = ۰ \tag{۸-۲}$$

معادلهٔ (۲-۸) یک نتیجهٔ فوق‌العاده مهم است. اگر $\mathbf{V_N}$ صفر باشد، هیچ اختلاف پتانسیلی میان گره خنثی منبع (n) و گره خنثی بار (N) وجود ندارد. از این‌رو جریان گذرنده از سیم خنثی برابر صفر است. بنابراین می‌توان سیم خنثی را از یک مدار Y - Y متعادل حذف نمود ($I_۰ = ۰$) یا اینکه آن را با یک سیم اتصال کوتاه کامل میان گره‌های n و N جایگزین کرد ($\mathbf{V_N} = ۰$). در مدل‌سازی مدارهای سه فاز متعادل هر دو روش را به راحتی به‌کار می‌بریم.

اکنون توجه خود را به این مطلب معطوف می‌کنیم که شرط متعادل بودن مدار چه تأثیری برروی سه جریان خط می‌گذارد. مستقیماً از شکل (۲-۵) نتیجه می‌شود که اگر سیستم متعادل باشد، سه جریان خط چنین خواهند بود:

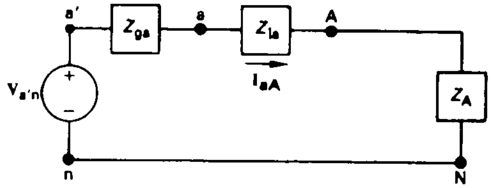
$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{a'n} - \mathbf{V}_N}{Z_A + Z_{1a} + Z_{ga}} = \frac{\mathbf{V}_{a'n}}{Z_\phi} \tag{۹-۲}$$

$$\mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_{b'n} - \mathbf{V}_N}{Z_B + Z_{1b} + Z_{gb}} = \frac{\mathbf{V}_{b'n}}{Z_\phi} \tag{۱۰-۲}$$

$$\mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_{c'n} - \mathbf{V}_N}{Z_C + Z_{1c} + Z_{gc}} = \frac{\mathbf{V}_{c'n}}{Z_\phi} \tag{۱۱-۲}$$

از این معادلات نتیجه می‌گیریم که در یک سیستم سه فاز متعادل، سه جریان خط، یک دسته جریانهای سه فاز متعادل تشکیل می‌دهند. یعنی جریان در هر خط از لحاظ دامنه و فرکانس یکسان بوده و دقیقاً به‌اندازه °۱۲۰ با دو جریان دو خط دیگر اختلاف فاز خواهد داشت. بنابراین اگر جریان $\mathbf{I}_{aA}$ را محاسبه کنیم، می‌توانیم جریانهای خط $\mathbf{I}_{bB}$ و $\mathbf{I}_{cC}$ را بدون محاسبات اضافی بنویسیم. با این بیان اظهار می‌داریم که دنبالهٔ فاز نیز معلوم است.

با به‌کار بردن معادلهٔ (۲-۹) می‌توان مدار معادل تک فاز مدار سه فاز متعادل Y - Y را رسم کرد. از معادلهٔ (۲-۹) نتیجه می‌شود که جریان در فاز a به‌سادگی برابر ولتاژ ایجاد شده در فاز a سیم پیچ



شکل ۲-۶ مدار معادل تک فاز.

مولد تقسیم بر امپدانس کل فاز a مدار است. از این رو معادلهٔ (۲-۹)، مدار سادهٔ شکل (۲-۶) را توصیف می‌کند که در آن سیم خنثی توسط یک مدار اتصال کوتاه کامل جایگزین شده است. تذکر یک نکتهٔ احتیاطی در اینجا لازم است. جریان در سیم خنثی در شکل (۲-۶) برابر جریان در سیم خنثی در مدار سه فاز متعادل نیست. جریان در سیم خنثی چنین است:

$$\mathbf{I}_{\circ} = \mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{cC} \qquad (۱۲-۲)$$

در حالی که جریان در سیم خنثی در شکل (۲-۶) برابر $\mathbf{I}_{aA}$ است. از این‌رو مدار شکل (۲-۶) مقدار درست جریان خط را به دست می‌دهد، لیکن تنها مولفهٔ فاز a جریان سیم خنثی را مشخص می‌کند. هر موقع که مدار معادل تک‌فاز شکل (۲-۶) قابل اعمال باشد، جریانهای خط، یک دستهٔ سه فاز متعادل تشکیل داده، سمت راست معادلهٔ (۲-۱۲) مجموعی برابر صفر دارد.

وقتی که ما جریان‌های خط در شکل (۲-۵) را بدانیم، محاسبهٔ هر ولتاژ مورد نظر در آن شکل کار نسبتاً ساده‌ای است. کمیتهای مورد نظر ولتاژ خط نسبت به خط دیگر و ولتاژ خط نسبت به خنثی می‌باشند. ما این روابط را در سرهای بار به دست خواهیم آورد؛ اما نتایج به دست آمده، در سرهای منبع نیز قابل اعمال خواهند بود. ولتاژ خط به خط در سرهای بار برحسب ولتاژ خط به خنثی در سرهای بار چنین است:

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} \qquad (۱۳-۲)$$

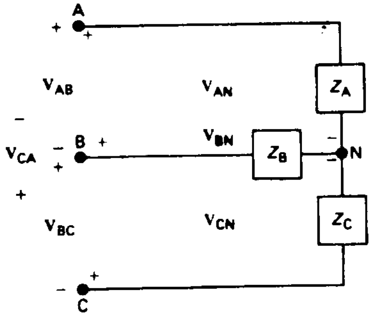
$$\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{BN} - \mathbf{V}_{CN} \qquad (۱۴-۲)$$

و:

$$\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{CN} - \mathbf{V}_{AN} \qquad (۱۵-۲)$$

طرز نمایش دو زیرنویس در معادلات ولتاژ نشان دهندهٔ افت ولتاژ از زیرنویس اول تا زیرنویس دوم می‌باشد. روابط داده شده در معادلات (۲-۱۳) تا (۲-۱۵) در شکل (۲-۷) نشان داده شده است. از آنجایی که ما علاقه‌مند به حالت متعادل هستیم، سیم خنثی را از شکل حذف کرده‌ایم.

برای نشان دادن ارتباط میان ولتاژهای خط به خط و خط به خنثی، یک دنبالهٔ فازی مثبت یا دنبالهٔ abc را فرض می‌کنیم. به طور دلخواه، ولتاژ خط به خنثی فاز a را به عنوان مرجع انتخاب می‌کنیم. از این‌رو:



شکل ۲-۷ ولتاژهای خط به خط و خط به خنثی.

$$\mathbf{V}_{AN} = V_\phi \angle 0^\circ \qquad (۲-۱۶)$$

$$\mathbf{V}_{BN} = V_\phi \angle -120^\circ \qquad (۲-۱۷)$$

و:

$$\mathbf{V}_{CN} = V_\phi \angle +120^\circ \qquad (۲-۱۸)$$

که در آن V_ϕ نشان دهندهٔ اندازهٔ ولتاژ خط به خنثی است. با جایگزینی معادلات (۲-۱۶) تا (۲-۱۸) به ترتیب در معادلات (۲-۱۳) تا (۲-۱۵) به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{V}_{AB} = V_\phi \angle 0^\circ - V_\phi \angle -120^\circ = \sqrt{3} V_\phi \angle 30^\circ \qquad (۲-۱۹)$$

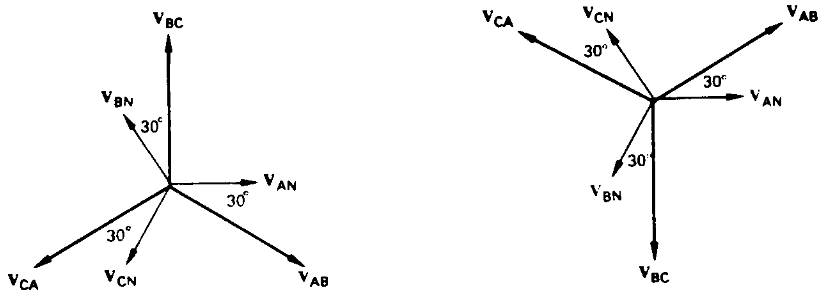
$$\mathbf{V}_{BC} = V_\phi \angle -120^\circ - V_\phi \angle 120^\circ = \sqrt{3} V_\phi \angle -90^\circ \qquad (۲-۲۰)$$

و:

$$\mathbf{V}_{CA} = V_\phi \angle 120^\circ - V_\phi \angle 0^\circ = \sqrt{3} V_\phi \angle 150^\circ \qquad (۲-۲۱)$$

معادلات (۲-۱۹) تا (۲-۲۱) نشان می‌دهند که: (۱) اندازهٔ ولتاژ خط به خط $\sqrt{3}$ برابر اندازهٔ ولتاژ خط به خنثی است. (۲) ولتاژهای خط به خط یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل تشکیل می‌دهند. (۳) دسته ولتاژهای خط به خط از دسته ولتاژهای خط به خنثی 30° جلو می‌افتند. این موضوع را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم که نشان دهد برای یک دنبالهٔ فازی منفی یا دنبالهٔ acb تنها تغییر این است که دسته ولتاژهای خط به خط از دسته ولتاژهای خط به خنثی به مقدار 30° عقب می‌افتند. در دیاگرام‌های فازوری شکل (۲-۸) این روابط خلاصه شده‌اند. بنابراین در یک سیستم متعادل اگر ولتاژ خط به خنثی در نقطه‌ای از مدار معلوم باشد، ولتاژ خط به خط نیز در همان نقطهٔ مدار معلوم است و برعکس.

قبل از تشریح محاسبات سه فاز متعادل با یک مثال عددی، بعضی توضیحات اضافی دربارهٔ اصطلاحات را بیان می‌کنیم. در یک سیستم Y - Y ولتاژ خط به خنثی ولتاژ فاز نیز خوانده می‌شود و برای اختصار ولتاژ خط به خط ولتاژ خط نیز خوانده خواهد شد. جریان فاز به صورت جریان در هر فاز بار، یا در سرهای منبع مدار، جریان در هر فاز مولد تعریف می‌شود. جریان خط به صورت جریان در هر



(الف) (ب)

شکل ۲-۸ دیاگرام فازوری نشان دهنده ارتباط میان ولتاژهای خط به خط و خط به خنثی در یک سیستم متعادل: (الف) دنباله abc، (ب) دنباله acb.

فاز خط تعریف می‌شود. برای ساختار Y - Y جریان فاز و جریان خط یکسان است. از آنجایی که سیستم‌های سه فاز برای کار کردن با توانهای الکتریکی با حجم بالا طراحی می‌شوند، تمام مشخصات ولتاژها و جریانها و محاسبات آنها برحسب مقادیر rms بیان می‌شود. بنابراین هنگامی که یک خط انتقال سه فاز به صورت ۳۴۵ kV بیان می‌شود، مقدار نامی rms ولتاژ خط به خط برابر ۳۴۵۰۰۰ ولت است. دراین فصل تمام ولتاژها و جریانها برحسب rms بیان می‌شوند. بالاخره حرف یونانی ϕ برای مشخص کردن کمیت هر فاز به مقدار زیادی در نوشته‌ها به کار می‌رود. بنابراین $\mathbf{V}_\phi$ ، $\mathbf{I}_\phi$ ، Z_ϕ ، P_ϕ و Q_ϕ به ترتیب به صورت ولتاژ فاز، جریان فاز، امپدانس فاز، توان فاز و توان راکتیو فاز تعبیر می‌شوند.

مثال ۱ نشان می‌دهد که برای حل مدار سه فاز Y - Y متعادل، چگونه باید مطالب بیان شده تاکنون را به کار برد.

مثال ۱ یک مولد سه فاز با دنبالهٔ مثبت وصل شده به صورت Y دارای امپدانس $۰٫۲ + j۰٫۵$ اهم بر فاز است. ولتاژ درونی هر فاز مولد برابر ۱۲۰ ولت است. این مولد یک بار سه فاز متعادل وصل شده به صورت Y را تغذیه می‌کند که دارای امپدانس $۳۹ + j۲۸$ اهم بر فاز است. امپدانس خطی که مولد را به بار وصل می‌کند برابر $۰٫۸ + j۱٫۵$ اهم برفاز است. ولتاژ درونی فاز a مولد به عنوان فاز مبنا مشخص می‌شود.

الف ـ مدار معادل تک فاز این سیستم سه فاز را رسم کنید.

ب ـ سه جریان خط $\mathbf{I}_{aA}$ ، $\mathbf{I}_{bB}$ و $\mathbf{I}_{cC}$ را محاسبه کنید.

پ ـ سه ولتاژ خط به خنثی را در سرهای بار حساب کنید: یعنی $\mathbf{V}_{AN}$ ، $\mathbf{V}_{BN}$ و $\mathbf{V}_{CN}$.

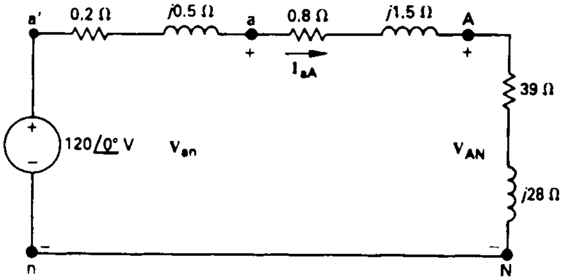
ت ـ سه ولتاژ خط $\mathbf{V}_{AB}$ ، $\mathbf{V}_{BC}$ و $\mathbf{V}_{CA}$ را در سرهای بار حساب کنید.

ث ـ ولتاژهای خط به خنثی را در سرهای مولد حساب کنید: یعنی $\mathbf{V}_{an}$ ، $\mathbf{V}_{bn}$ و $\mathbf{V}_{cn}$.

ج ـ ولتاژهای خط V_{ab} ، V_{bc} و V_{ca} را در سرهای مولد حساب کنید.

چ ـ قسمتهای (الف) تا (ج) را با فرض دنبالهٔ فاز منفی تکرار کنید.

حل الف ـ مدار معادل تک فاز در شکل (۲-۹) نشان داده شده است.



شکل ۲-۹ مدار معادل تک فاز برای مثال ۱.

ب ـ جریان خط فاز a چنین است:

$$I_{aA} = \frac{۱۲۰\angle ۰°}{(۰/۲ + ۰/۸ + ۳۹) + j(۰/۵ + ۱/۵ + ۲۸)}$$

$$= \frac{۱۲۰\angle ۰°}{۴۰ + j۳۰} = ۲/۴\angle -۳۶/۸۷° \text{ A}$$

برای یک دنبالهٔ فازی مثبت داریم:

$$I_{bB} = ۲/۴\angle -۱۵۶/۸۷° \text{ A}$$

$$I_{cC} = ۲/۴\angle ۸۳/۱۳° \text{ A}$$

پ ـ ولتاژ خط به خنثی در سر A بار چنین است:

$$V_{AN} = (۳۹ + j۲۸)(۲/۴\angle -۳۶/۸۷°)$$

$$= ۱۱۵/۲۲\angle -۱/۱۹° \text{ V}$$

برای یک دنبالهٔ فازی مثبت داریم:

$$V_{BN} = ۱۱۵/۲۲\angle -۱۲۱/۱۹° \text{ V}$$

$$V_{CN} = ۱۱۵/۲۲\angle +۱۱۸/۸۱° \text{ V}$$

ت ـ برای یک دنبالهٔ فازی مثبت، ولتاژهای خط به خط از ولتاژهای خط به خنثی °۳۰ جلو می‌افتد.

بنابراین:

$$V_{AB} = (\sqrt{۳}\angle ۳۰^\circ)V_{AN}$$
$$= ۱۹۹/۵۸\angle ۲۸/۸۱^\circ \text{ V}$$
$$V_{BC} = ۱۹۹/۵۸\angle -۹۱/۱۹^\circ \text{ V}$$
$$V_{CA} = ۱۹۹/۵۸\angle ۱۴۸/۸۱^\circ \text{ V}$$

ث - ولتاژ خط به خنثی در سر a منبع چنین است:

$$V_{an} = ۱۲۰ - (۰/۲ + j۰/۵)(۲/۴\angle -۳۶/۸۷^\circ)$$
$$= ۱۲۰ - ۱/۲۹\angle ۳۱/۳۳^\circ$$
$$= ۱۱۸/۹۰ - j۰/۶۷$$
$$= ۱۱۸/۹۰\angle -۰/۳۲^\circ \text{ V}$$

برای دنبالهٔ فازی مثبت داریم:

$$V_{bn} = ۱۱۸/۹۰\angle -۱۲۰/۳۲^\circ$$
$$V_{cn} = ۱۱۸/۹۰\angle ۱۱۹/۶۸^\circ \text{ V}$$

ج - ولتاژ خط به خط در سرهای منبع چنین است:

$$V_{ab} = (\sqrt{۳}\angle ۳۰^\circ)V_{an}$$
$$= ۲۰۵/۹۴\angle ۲۹/۶۸^\circ \text{ V}$$
$$V_{bc} = ۲۰۵/۹۴\angle -۹۰/۳۲^\circ \text{ V}$$
$$V_{ca} = ۲۰۵/۹۴\angle ۱۴۹/۶۸^\circ \text{ V}$$

چ - تغییر دنبالهٔ فازی تاثیری برروی مدار معادل تک فاز ندارد. سه جریان خط چنین هستند:

$$I_{aA} = ۲/۴\angle -۳۶/۸۷^\circ \text{ A}$$
$$I_{bB} = ۲/۴\angle ۸۳/۱۳^\circ \text{ A}$$
$$I_{cC} = ۲/۴\angle -۱۵۶/۸۷^\circ \text{ A}$$

ولتاژهای خط به خنثی در سرهای بار عبارتند از:

$$V_{AN} = ۱۱۵/۲۲\angle -۱/۱۹^\circ \text{ V}$$
$$V_{BN} = ۱۱۵/۲۲\angle ۱۱۸/۸۱^\circ \text{ V}$$
$$V_{CN} = ۱۱۵/۲۲\angle -۱۲۱/۱۹^\circ \text{ V}$$

برای دنبالهٔ فازی منفی، ولتاژهای خط به خط °۳۰ از ولتاژهای خط به خنثی عقب می‌افتد:

$$V_{AB} = (\sqrt{۳}\angle -۳۰^\circ)\, V_{AN}$$
$$= ۱۹۹{,}۵۸ \angle -۳۱{,}۱۹^\circ\ V$$
$$V_{BC} = ۱۹۹{,}۵۸ \angle ۸۸{,}۸۱^\circ\ V$$
$$V_{CA} = ۱۹۹{,}۵۸ \angle -۱۵۱{,}۱۹^\circ\ V$$

ولتاژهای خط به خنثی در سرهای مولد عبارتند از:

$$V_{an} = ۱۱۸{,}۹۰ \angle -۰{,}۳۲^\circ\ V$$
$$V_{bn} = ۱۱۸{,}۹۰ \angle ۱۱۹{,}۶۸^\circ\ V$$
$$V_{cn} = ۱۱۸{,}۹۰ \angle -۱۲۰{,}۳۲^\circ\ V$$

ولتاژهای خط به خط در سرهای مولد عبارتند از:

$$V_{ab} = (\sqrt{۳}\angle -۳۰^\circ)\, V_{an}$$
$$= ۲۰۵{,}۹۴ \angle -۳۰{,}۳۲^\circ\ V$$
$$V_{bc} = ۲۰۵{,}۹۴ \angle ۸۹{,}۶۸^\circ\ V$$
$$V_{ca} = ۲۰۵{,}۹۴ \angle -۱۵۰{,}۳۲^\circ\ V$$

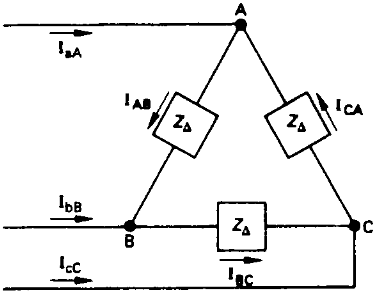
در مثال ۱ توجه کنید که وقتی کمیت فاز a محاسبه شد، مقادیر متناظر فازهای b و c را می‌توان به سادگی با انتقال فاز a به مقدار °۱۲۰ به دست آورد. برای دنبالهٔ فازی مثبت، فاز b ، °۱۲۰ از فاز a عقب می‌افتد در حالی که فاز c ، °۱۲۰ از فاز a جلو می‌افتد. برای یک دنبالهٔ فازی منفی، فاز b از فاز a به مقدار °۱۲۰ جلو می‌افتد و فاز c از فاز a به مقدار °۱۲۰ عقب می‌افتد. بنابراین محاسبهٔ ولتاژ خط به خط، با داشتن ولتاژ خط به خنثی بسیار ساده است.

۲-٤ تحلیل مدار Y-Δ

اگر در یک مدار سه فاز بار به صورت دلتا وصل شده باشد، می‌توان با به کار بردن تبدیل دلتا به وای (مثلث به ستاره) آن را به وای تبدیل کرد. وقتی که بار متعادل باشد، امپدانس هر بازوی اتصال وای برابر یک‌سوم امپدانس هر بازوی اتصال دلتا است. بنابراین:

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{۳} \qquad (۲۲-۲)$$

وقتی که بار Δ توسط بار معادل Y جایگزین شود، مدار سه فاز را می‌توان با یک مدار معادل تک فاز شکل (۲-۶) مدل‌سازی کرد.



شکل ۲-۱۰ مدار به کار رفته برای برقراری روابط میان جریانهای خط و جریانهای فاز در یک بار متعادل Δ.

پس از آنکه مدار متعادل تک فاز را برای محاسبهٔ جریانهای خط به کار بردیم، می‌توان جریان هر بازوی بار Δ اصلی را به سادگی از تقسیم جریان خط بر $\sqrt{۳}$ و انتقال آن به جلو به میزان $۳۰°$ به دست آورد. این روابط میان جریانهای خط و جریانهای فاز در اتصال Δ را می‌توان با به‌کار بردن شکل (۲-۱۰) به‌دست آورد.

وقتی که باری یا منبعی به صورت دلتا وصل شود، جریان در هر بازوی دلتا برابر جریان فاز و ولتاژ میان دوسر هر بازو، ولتاژ فاز است. از شکل (۲-۱۰) می‌بینیم که در یک اتصال Δ ولتاژ فاز دقیقاً مساوی ولتاژ خط است.

برای نشان دادن ارتباط میان جریان فاز و جریان خط، یک دنبالهٔ مثبت فرض کرده و فرض می‌کنیم I_ϕ نشان دهندهٔ اندازهٔ جریان فاز باشد. در این صورت:

$$\mathbf{I}_{AB} = I_\phi \angle ۰° \qquad (۲-۲۳)$$

$$\mathbf{I}_{BC} = I_\phi \angle -۱۲۰° \qquad (۲-۲۴)$$

$$\mathbf{I}_{CA} = I_\phi \angle +۱۲۰° \qquad (۲-۲۵)$$

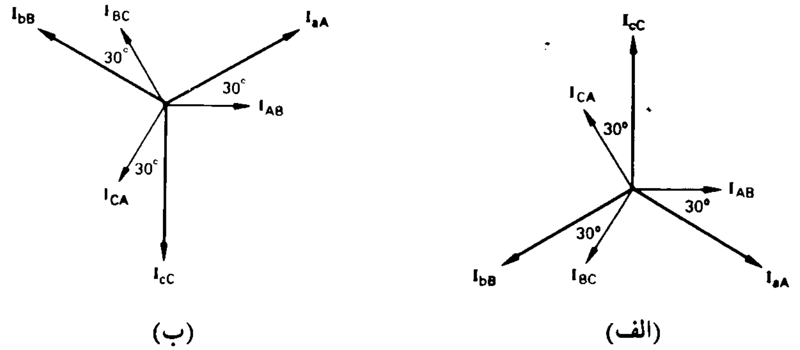
در نوشتن این معادلات ما به دلخواه $\mathbf{I}_{AB}$ را به صورت فاز مبنا انتخاب کردیم.

می‌توان با اعمال مستقیم قانون کیرشف جریان خط را برحسب جریان فاز نوشت. دراین صورت داریم:

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} = I_\phi \angle ۰° - I_\phi \angle ۱۲۰°$$
$$= \sqrt{۳} I_\phi \angle -۳۰° \qquad (۲-۲۶)$$

$$\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{BC} - \mathbf{I}_{AB} = I_\phi \angle -۱۲۰° - I_\phi \angle ۰°$$
$$= \sqrt{۳} I_\phi \angle -۱۵۰° \qquad (۲-۲۷)$$

$$\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{CA} - \mathbf{I}_{BC} = I_\phi \angle ۱۲۰° - I_\phi \angle -۱۲۰°$$
$$= \sqrt{۳} I_\phi \angle ۹۰° \qquad (۲-۲۸)$$



شکل ۲-۱۱ دیاگرام فازوری نشان دهندهٔ ارتباط میان جریانهای خط و جریانهای فاز در یک بار وصل شده به صورت Δ : (الف) دنبالهٔ فازی مثبت؛ (ب) دنبالهٔ فازی منفی.

مقایسهٔ معادلات (۲-۲۶) تا (۲-۲۸) با معادلات (۲-۲۳) تا (۲-۲۵) نشان می‌دهد که اندازهٔ جریان خط $\sqrt{۳}$ برابر اندازهٔ جریان فاز بوده و دسته جریانهای خط °۳۰ از دسته جریانهای فاز عقب می‌افتند.

تایید این مطلب را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم که برای یک دنبالهٔ فازی منفی، جریان خط $\sqrt{۳}$ برابر جریان فاز بوده و °۳۰ از آن جلو می‌افتد.

ارتباط میان جریانهای خط و جریانهای فاز یک بار وصل شدهٔ Δ در شکل (۲-۱۱) خلاصه شده است.

مثال ۲ محاسبات مربوط به تحلیل یک مدار سه فاز متعادل شامل منبع وصل شده به صورت Y و بار وصل شده به صورت Δ را نشان می‌دهد.

مثال ۲ منبع وصل شده به صورت Y در مثال ۱، یک بار وصل شده به صورت Δ را از طریق یک خط توزیع با امپدانس $۰/۳ + j۰/۹$ اهم بر فاز تغذیه می‌کند. امپدانس بار برابر $۱۱۸/۵ + j۸۵/۸$ اهم بر فاز است. ولتاژ درونی فاز a مولد را به عنوان فاز مبنا به کار ببرید.

الف ـ مدار معادل تک فاز سیستم سه فاز را رسم کنید.

ب ـ جریانهای خط I_{aA} ، I_{bB} و I_{cC} را محاسبه کنید.

پ ـ ولتاژهای فاز را در سرهای بار محاسبه کنید.

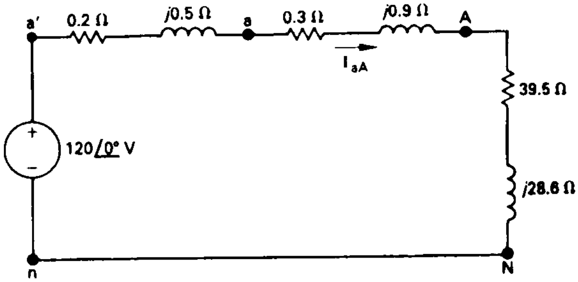
ت ـ جریانهای فاز بار را محاسبه کنید.

ث ـ ولتاژهای خط را در سرهای منبع محاسبه کنید.

حل الف ـ مدار معادل تک فاز در شکل (۲-۱۲) نشان داده شده است. امپدانس بار اتصال معادل Y چنین است:

$$\left(\frac{۱}{۳}\right)(۱۱۸/۵ + j۸۵/۸) = ۳۹/۵ + j۲۸/۶ \ \ \Omega/\phi$$

ب ـ جریان خط فاز a چنین است:



شکل ۲-۱۲ مدار معادل تک فاز مثال ۲.

$$\mathrm{I_{aA}} = \frac{۱۲۰\angle ۰°}{(۰/۲ + ۰/۳ + ۳۹/۵) + j(۰/۵ + ۰/۹ + ۲۸/۶)} = \frac{۱۲۰\angle ۰°}{۴۰ + j۳۰} = ۲/۴\angle -۳۶/۸۷° \mathrm{A}$$

بنابراین مستقیماً نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{I_{bB}} = ۲/۴\angle -۱۵۶/۸۷° \mathrm{A}$$

$$\mathrm{I_{cC}} = ۲/۴\angle ۸۳/۱۳° \mathrm{A}$$

پ - چون بار به صورت Δ وصل شده است، ولتاژهای فاز همان ولتاژهای خط است. برای محاسبهٔ ولتاژ خط ابتدا $\mathrm{V_{AN}}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathrm{V_{AN}} = (۳۹/۵ + j۲۸/۶)(۲/۴\angle -۳۶/۸۷°) = ۱۱۷/۰۴\angle -۰/۹۶° \mathrm{V}$$

چون دنبالهٔ فازی مثبت است، ولتاژ خط $\mathrm{V_{AB}}$ چنین است:

$$\mathrm{V_{AB}} = \sqrt{۳}\angle ۳۰°\, \mathrm{V_{AN}} = ۲۰۲/۷۲\angle ۲۹/۰۴° \mathrm{V}$$

بنابراین:

$$\mathrm{V_{BC}} = ۲۰۲/۷۲\angle -۹۰/۹۶° \mathrm{V}$$

$$\mathrm{V_{CA}} = ۲۰۲/۷۲\angle ۱۴۹/۰۴° \mathrm{V}$$

ت - جریانهای فاز بار را می‌توان مستقیماً از جریانهای خط محاسبه کرد:

$$\mathrm{I_{AB}} = \left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\angle ۳۰°\right) \mathrm{I_{aA}} = ۱/۳۹\angle -۶/۸۷° \mathrm{A}$$

وقتی که $\mathrm{I_{AB}}$ را بدانیم، جریانهای فاز بار دیگر را می‌دانیم:

$$\mathrm{I_{BC}} = ۱/۳۹\angle -۱۲۶/۸۷° \mathrm{A}$$

$$\mathrm{I_{CA}} = ۱/۳۹\angle ۱۱۳/۱۳° \mathrm{A}$$

توجه کنید که می‌توان محاسبهٔ $\mathrm{I_{AB}}$ را با به‌کار بردن مقادیر محاسبه شدهٔ قبلی $\mathrm{V_{AB}}$ و امپدانس بار وصل شدهٔ Δ بررسی کرد. یعنی:

$$\mathrm{I_{AB}} = \frac{\mathrm{V_{AB}}}{\mathrm{Z_\phi}} = \frac{۲۰۲/۷۲\angle ۲۹/۰۴°}{۱۱۸/۵ + j۸۵/۸} = ۱/۳۹\angle -۶/۸۷° \mathrm{A}$$

(روشهای محاسبهٔ نوع دیگر از لحاظ حذف اشتباه بسیار سودمند هستند و ما استفاده از آنها را در تمام کارها شامل طراحی و تحلیل شدیداً توصیه می‌کنیم.)

ث ـ برای محاسبهٔ ولتاژ خط در سرهای منبع، ابتدا $\mathbf{V}_{an}$ را محاسبه می‌کنیم. از شکل (۲-۱۲) ملاحظه می‌کنیم که $\mathbf{V}_{an}$ برابر افت ولتاژ در دوسر امپدانس خط و دوسر امپدانس بار است. از این رو:

$$\mathbf{V}_{an} = (۳۹/۸ + j۲۹/۵)۲/۴ \angle -۳۶/۸۷° = ۱۱۸/۹۰ \angle -۰/۳۲° \text{ V}$$

بنابراین ولتاژ خط $\mathbf{V}_{ab}$ چنین است:

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{۳} \angle ۳۰° \mathbf{V}_{an} \quad \text{یا} \quad \mathbf{V}_{ab} = ۲۰۵/۹۴ \angle ۲۹/۶۸° \text{ V}$$

بنابراین:

$$\mathbf{V}_{bc} = ۲۰۵/۹۴ \angle -۹۰/۳۲° \text{ V}$$

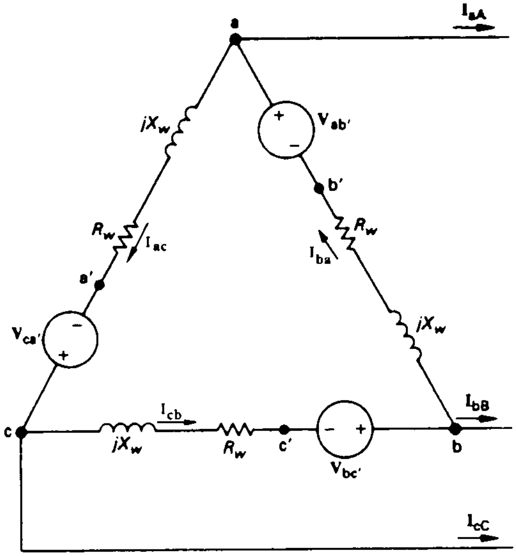
$$\mathbf{V}_{ca} = ۲۰۵/۹۴ \angle ۱۴۹/۶۸° \text{ V}$$

۵-۲ تحلیل مدار Δ-Y

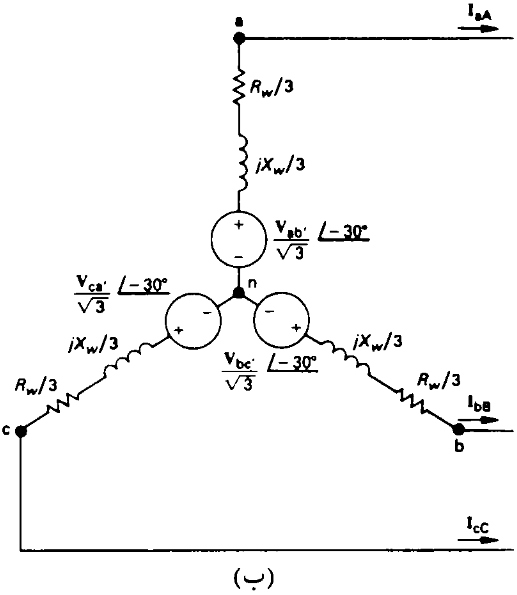
در مدار سه فاز Δ-Y ، منبع به صورت دلتا و بار به صورت وای وصل شده است. می‌توان مدار معادل تک فاز را با جایگزین کردن منبع وصل شده به صورت Δ با یک منبع معادل Y به دست آورد. می‌توان منبع معادل Y را از تقسیم ولتاژ فاز درونی منبع Δ بر $\sqrt{۳}$ و انتقال این دسته ولتاژهای سه فاز به میزان °۳۰ - در صورت مثبت بودن دنبالهٔ فازی و °۳۰ + در صورت منفی بودن دنبالهٔ فازی، به دست آورد. امپدانس درونی معادل Y برابر یک سوم امپدانس درونی منبع Δ است. مدار معادل Y یک منبع وصل شده به صورت Δ با دنبالهٔ فازی مثبت در شکل (۲-۱۳) نشان داده شده است.

برای دنبالهٔ فازی مثبت، دسته جریانهای فازی منبع Δ ($\mathbf{I}_{ba}$ ، $\mathbf{I}_{cb}$ و $\mathbf{I}_{ac}$ در شکل (۲-۱۳)) از دسته جریانهای خط $\mathbf{I}_{aA}$ ، $\mathbf{I}_{bB}$ و $\mathbf{I}_{cC}$ به میزان °۳۰ جلو می‌افتد. اندازهٔ جریان فاز $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ برابر اندازهٔ جریان خط است. برای دنبالهٔ فازی منفی، جریانهای فازی در منبع از جریانهای خط عقب می‌افتند.

برای نشان دادن اینکه منبع Y شکل (۲-۱۳ ب) معادل منبع Δ شکل (۲-۱۳ الف) است، لازم است تنها نشان داده شود که دو مدار شرایط سرهای یکسانی برای هر اتصال خارجی متعادل وصل شده به سرهای a ، b و c فراهم می‌آورند. دو شرط آزمایشی که اثبات آنها راحت‌ترین است مدارهای باز و مدارهای اتصال کوتاه است. برای شرایط مدار باز سه جریان خط برابر صفر بوده دو مدار معادل هستند اگر ولتاژهای یکسانی میان سرهای a ، b و c تحویل دهند. برای یک اتصال کوتاه خارجی که سرهای a ، b و c را وصل می‌کند، ولتاژهای خط صفر بوده و دو مدار معادل هستند، اگر جریان خط یکسانی تحویل دهند. اثبات اینکه این دو مدار معادل هستند به خواننده واگذار می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۲-۱۳ معادل Y یک منبع سه فاز متعادل، وصل شده به صورت Δ (دنبالهٔ فازی مثبت): (الف) منبع Δ ؛ (ب) Y معادل.

مثال ۳ یک منبع متعادل وصل شده به صورت Δ با دنبالهٔ فازی منفی، دارای امپدانس درونی ۰٫۰۱۸ + j۰٫۱۶۲ اهم بر فاز است. در حالت بدون بار، اندازهٔ ولتاژ سر منبع ۶۰۰ ولت است. این منبع به یک بار وصل شده به صورت Y ، وصل می‌شود که امپدانس آن ۷٫۹۲ - j۶٫۳۵ اهم بر فاز است. امپدانس خط توزیع برابر ۰٫۰۷۴ + j۰٫۲۹۶ اهم بر فاز است.

الف ـ مدار معادل تک فاز سیستم را رسم کنید و $V_{ab'}$ را به عنوان فاز مبنا به کار ببرید.

ب ـ اندازهٔ ولتاژ خط را در سرهای بار حساب کنید.

پ ـ سه جریان خط I_{aA} ، I_{bB} و I_{cC} را محاسبه کنید.

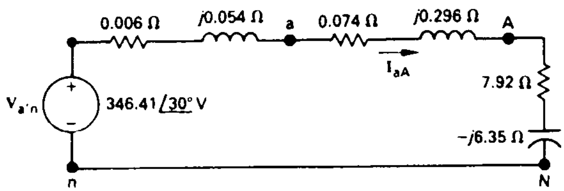
ت ـ جریانهای فاز I_{ba} ، I_{cb} و I_{ac} منبع را محاسبه کنید.

ث ـ اندازهٔ ولتاژ خط را در سرهای منبع محاسبه کنید.

حل الف ـ در حالت بی‌بار، ولتاژ سر معادل ولتاژ درونی منبع است. بنابراین اندازهٔ ولتاژ درونی منبع Δ، ۶۰۰ ولت است. با به کار بردن $V_{ab'}$ به عنوان فاز مبنا، ولتاژ درونی فاز a منبع معادل Y را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$V_{a'n} = \frac{V_{ab'}}{\sqrt{۳}} \angle ۳۰^\circ = \frac{۶۰۰}{\sqrt{۳}} \angle ۳۰^\circ \cong ۳۴۶/۴۱ \angle ۳۰^\circ \text{ V}$$

امپدانس درونی مولد معادل Y برابر $(۰/۰۱۸ + j۰/۱۶۲)\left(\frac{۱}{۳}\right)$ یا $۰/۰۰۶ + j۰/۰۵۴$ اهم بر فاز است. بنابراین مدار معادل تک فاز مطابق شکل (۲-۱۴) است.



شکل ۲-۱٤ مدار معادل تک فاز مثال ۳.

ب ـ از مدار شکل (۲-۱۴) مستقیماً نتیجه می‌شود که:

$$I_{aA} = \frac{۳۴۶/۴۱ \angle ۳۰^\circ}{۸/۰۰ - j۶/۰۰} = ۳۴/۶۴ \angle ۶۶/۸۷^\circ \text{ A}$$

و:

$$V_{AN} = (۷/۹۲ - j۶/۳۵)(۳۴/۶۴ \angle ۶۶/۸۷^\circ) = ۳۵۱/۶۵ \angle ۲۸/۱۵^\circ \text{ V}$$

اندازهٔ ولتاژ خط در سرهای بار چنین است:

$$|V_{AB}| = \sqrt{۳}\, |V_{AN}| = ۶۰۹/۰۸ \text{ V}$$

پ ـ با به کار بردن نتایج قسمت (ب) جریانهای خط را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$I_{aA} = ۳۴/۶۴ \angle ۶۶/۸۷^\circ \text{ A}$$

$$I_{bB} = ۳۴/۶۴ \angle ۱۸۶/۸۷^\circ \text{ A}$$

$$I_{cC} = ۳۴/۶۴ \angle -۵۳/۱۳^\circ \text{ A}$$

ت ـ جریانهای فاز مولد را می‌توان مستقیماً از جریانهای خط محاسبه کرد. چون دنبالهٔ فازی منفی

است، داریم:

$$I_{ba} = \left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\angle -۳۰^\circ\right) I_{aA} = ۲۰\angle ۳۶٫۸۷^\circ\ \mathrm{A}$$

$$I_{cb} = ۲۰\angle ۱۵۶٫۸۷^\circ\ \mathrm{A}$$

$$I_{ac} = ۲۰\angle -۸۳٫۱۳^\circ\ \mathrm{A}$$

ث ـ از مدار شکل (۲-۱۴) داریم:

$$\begin{aligned} V_{an} &= (۷٫۹۹۴ - j۶٫۰۵۴) I_{aA} \\ &= (۷٫۹۹۴ - j۶٫۰۵۴) ۳۴٫۶۴\angle ۶۶٫۸۷^\circ \\ &= ۳۴۷٫۳۷\angle ۲۹٫۷۳^\circ\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

اندازهٔ ولتاژ خط در سرهای منبع چنین خواهد بود:

$$|V_{ab}| = \sqrt{۳}\ |V_{an}| = ۶۰۱٫۶۶\ \mathrm{V}$$

۲-۶ تحلیل مدارهای Δ ـ Δ

در مدار Δ ـ Δ هم منبع و هم بار به صورت Δ وصل شده‌اند. مدار تک فاز معادل یک سیستم Δ - Δ متعادل با جایگزین کردن منبع و بار با اتصال‌های معادل Y آنها به دست می‌آید. مانند قبل، مدار معادل Y برای حل جریانهای خط و ولتاژ خط به خنثی به کار می‌رود. وقتی که جریانهای خط را بدانیم، می‌توانیم جریانهای فاز را در بار و منبع با به‌کار بردن روش بیان شده در بخش‌های ۲-۴ و ۲-۵ به دست آوریم. ولتاژهای خط به خنثی را می‌توان مانند بخش ۲-۳ به ولتاژهای خط به خط تبدیل کرد. تمام این روشها را در مثالهای ۱، ۲ و ۳ تشریح کردیم.

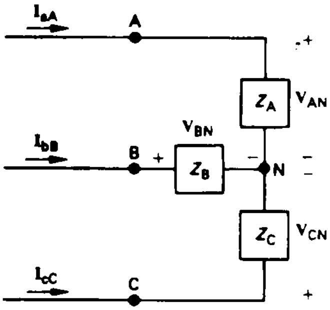
۳ - محاسبهٔ توان در مدارهای سه فاز متعادل

تاکنون تحلیل مدارهای سه فاز متعادل را به تعیین ولتاژها و جریانها در یک مدار داده شده محدود کردیم. اکنون محاسبات توان سه فاز را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مطلب را با بحث توان متوسط تحویل داده شده به یک بار متعادل وصل شده به صورت Y آغاز می‌کنیم.

۳-۱ توان متوسط در یک بار Y متعادل

یک بار وصل شده به صورت Y همراه با جریانها و ولتاژهای مربوط در شکل (۳-۱) نشان داده شده است. توان متوسط مربوط به هر فاز را می‌توان با به‌کار بردن روشهای معرفی شده در فصل ۷ محاسبه کرد. توان متوسط متناظر با فاز a بار به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P_{A} = |V_{AN}|\,|I_{aA}| \cos(\theta_{vA} - \theta_{iA}) \qquad (۳-۱)$$



شکل ۳-۱ یک‌بار Y متعادل به‌کار رفته برای معرفی محاسبهٔ توان متوسط در یک مدار سه فاز.

که در آن θ_{vA} و θ_{iA} به ترتیب زاویه‌های فازی $\mathbf{V}_{AN}$ و $\mathbf{I}_{aA}$ هستند. با به‌کار بردن طرز نمایش معرفی شده در معادلهٔ (۳-۱)، توان متناظر با فازهای b و c عبارتند از:

$$P_B = |\mathbf{V}_{BN}|\,|\mathbf{I}_{bB}|\cos(\theta_{vB} - \theta_{iB}) \quad (۳-۲)$$

$$P_C = |\mathbf{V}_{CN}|\,|\mathbf{I}_{cC}|\cos(\theta_{vC} - \theta_{iC}) \quad (۳-۳)$$

در معادلات (۳-۱) تا (۳-۳) تمام فازورهای جریان و ولتاژ برحسب مقادیر rms توابع سینوسی متناظر آنها نوشته شده‌اند.

در یک سیستم سه فاز متعادل، اندازهٔ همه ولتاژهای خط به خنثی یکسان بوده، همچنین اندازهٔ جریانهای فاز نیز یکسان است. آرگومان تابع کسینوسی نیز برای هر سه فاز یکسان است. برای تاکید این ملاحظات، طرز نمایش زیر را که سادگی‌های بیشتری در بحث محاسبات توان در مدارهای سه فاز متعادل فراهم می‌آورد، معرفی می‌کنیم:

$$V_\phi = |\mathbf{V}_{AN}| = |\mathbf{V}_{BN}| = |\mathbf{V}_{CN}| \quad (۳-۴)$$

$$I_\phi = |\mathbf{I}_{aA}| = |\mathbf{I}_{bB}| = |\mathbf{I}_{cC}| \quad (۳-۵)$$

و:

$$\theta_\phi = \theta_{vA} - \theta_{iA} = \theta_{vB} - \theta_{iB} = \theta_{vC} - \theta_{iC} \quad (۳-۶)$$

به علاوه، توان تحویل شده به هر فاز بار در یک سیستم متعادل یکسان است و از این‌رو:

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi \quad (۳-۷)$$

که در آن P_ϕ توان متوسط هر فاز را نشان می‌دهد.

توان متوسط کل تحویل شده به یک بار متعادل وصل شده به صورت Y ، به سادگی سه برابر توان هر فاز است، یعنی:

$$P_T = ۳P_\phi = ۳V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi \quad (۳-۸)$$

همچنین سودمند است که توان کل را برحسب مقادیر *rms* اندازهٔ ولتاژ خط و مقادیر *rms* اندازهٔ جریان خط بیان کنیم. اگر V_L نشان دهندهٔ مقدار rms اندازهٔ ولتاژ خط و I_L نشان دهندهٔ مقدار rms اندازهٔ جریان خط باشد، دراین صورت می‌توان معادلهٔ (۳-۸) را به صورت زیر اصلاح کرد:

$$P_T = ۳\left(\frac{V_L}{\sqrt{۳}}\right) I_L \cos\theta_\phi$$
$$= \sqrt{۳}\, V_L I_L \cos\theta_\phi \qquad (۹-۳)$$

در به دست آوردن معادلهٔ (۳-۹) از این حقیقت استفاده کردیم که برای یک بار متعادل وصل شده به صورت Y ، اندازهٔ ولتاژ فاز برابر اندازهٔ ولتاژ خط تقسیم بر $\sqrt{۳}$ است و اندازهٔ جریان خط مساوی اندازهٔ جریان فاز است. در به کار بردن معادلهٔ (۳-۹) برای محاسبهٔ توان کل تحویل شده به بار، مهم است که به یاد داشته باشیم که θ_ϕ زاویهٔ فاز میان ولتاژ فاز و جریان فاز است.

۴-۳ توان مختلط در یک بار Y متعادل

با به کار بردن روشهای معرفی شده در فصل ۷ ، می‌توان توان مختلط و توان راکتیو متناظر با هر فاز یک بار متعادل وصل شده به صورت Y را محاسبه کرد. برای یک بار متعادل، عبارتهای توان راکتیو چنین است:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin\theta_\phi \qquad (۱۰-۳)$$

$$Q_T = ۳Q_\phi = \sqrt{۳}\, V_L I_L \sin\theta_\phi \qquad (۱۱-۳)$$

معادلهٔ $S = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}^*_{eff} = P + jQ$ مبنای بیان توان مختلط متناظر با هر فاز است. برای یک بار متعادل داریم:

$$S = \mathbf{V}_{AN}\mathbf{I}^*_{aA} = \mathbf{V}_{BN}\mathbf{I}^*_{bB} = \mathbf{V}_{CN}\mathbf{I}^*_{cC} = \mathbf{V}_\phi \mathbf{I}_\phi^* \qquad (۱۲-۳)$$

که در آن $\mathbf{V}_\phi$ و $\mathbf{I}_\phi$ نشان دهندهٔ ولتاژ فاز و جریان فاز همان فاز است. بنابراین در حالت کلی داریم:

$$S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = \mathbf{V}_\phi \mathbf{I}_\phi^* \qquad (۱۳-۳)$$

$$S_T = ۳S_\phi = \sqrt{۳}\, V_L I_L \angle\theta_\phi \qquad (۱۴-۳)$$

۳-۳ محاسبات توان در یک بار Δ متعادل

در صورتی که بار به صورت Δ وصل شده باشد، محاسبهٔ توان ــ توان راکتیو یا توان مختلط ــ اساساً مشابه حالت بار وصل شده به صورت Y است. یک بار وصل شده به صورت دلتا به همراه جریانها و ولتاژهای مربوط در شکل (۳-۲) نشان داده شده است که از آن توانهای متناظر با هر فاز به صورت زیر به‌دست می‌آید:

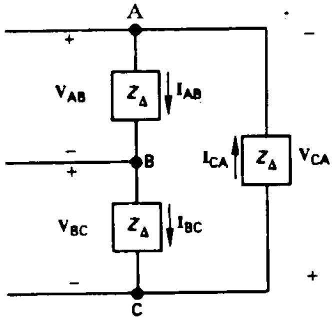
$$P_A = |\mathbf{V}_{AB}|\,|\mathbf{I}_{AB}| \cos(\theta_{vAB} - \theta_{iAB}) \qquad (۱۵-۳)$$

$$P_B = |\mathbf{V}_{BC}|\,|\mathbf{I}_{BC}| \cos(\theta_{vBC} - \theta_{iBC}) \qquad (۱۶-۳)$$

$$P_C = |\mathbf{V}_{CA}|\,|\mathbf{I}_{CA}| \cos(\theta_{vCA} - \theta_{iCA}) \qquad (۱۷-۳)$$

برای یک بار متعادل داریم:

$$|\mathbf{V}_{AB}| = |\mathbf{V}_{BC}| = |\mathbf{V}_{CA}| = V_\phi \qquad (۱۸-۳)$$



شکل ۳-۲ بار وصل شده به صورت Δ به کار رفته در بحث محاسبات توان.

$$|\mathbf{I}_{AB}| = |\mathbf{I}_{BC}| = |\mathbf{I}_{CA}| = I_\phi \tag{۱۹-۳}$$

$$\theta_{v\mathrm{AB}} - \theta_{i\mathrm{AB}} = \theta_{v\mathrm{BC}} - \theta_{i\mathrm{BC}} = \theta_{v\mathrm{CA}} - \theta_{i\mathrm{CA}} = \theta_\phi \tag{۲۰-۳}$$

و:

$$P_\mathrm{A} = P_\mathrm{B} = P_\mathrm{C} = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi \tag{۲۱-۳}$$

قابل ذکر است که معادلهٔ (۳-۲۱) همان معادلهٔ (۳-۷) است. این مطلب معادل با این بیان است "که در یک بار متعادل، توان متوسط هر فاز برابر حاصلضرب مقادیر rms ولتاژ فاز و rms جریان فاز و کسینوس زاویهٔ میان ولتاژ فاز و جریان فاز است."

توان کل تحویل شده به یک بار متعادل وصل شده به صورت Δ چنین است:

$$P_T = ۳P_\phi = ۳V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi$$

$$= ۳V_\mathrm{L}\left(\frac{I_\mathrm{L}}{\sqrt{۳}}\right)\cos\theta_\phi$$

$$= \sqrt{۳}\, V_\mathrm{L} I_\mathrm{L} \cos\theta_\phi \tag{۲۲-۳}$$

توجه کنید که معادلهٔ (۳-۲۲) همان معادلهٔ (۳-۹) است.

عبارتهای مربوط به توان راکتیو و توان مختلط نیز دارای همان صورت به دست آمده برای بار وصل شده به صورت Y است:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin\theta_\phi \tag{۲۳-۳}$$

$$Q_T = ۳Q_\phi = ۳V_\phi I_\phi \sin\theta_\phi \tag{۲۴-۳}$$

$$S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = \mathbf{V}_\phi \mathbf{I}_\phi^* \tag{۲۵-۳}$$

$$S_T = ۳S_\phi = \sqrt{۳}\, V_\mathrm{L} I_\mathrm{L} \underline{/\theta_\phi} \tag{۲۶-۳}$$

مثالهای ۴ تا ۶ محاسبهٔ توان را در یک مدار سه فاز متعادل تشریح می‌کنند.

مثال ٤ الف - توان متوسط هر فاز را که به بار وصل شده به صورت Y مثال ۱ تحویل داده می‌شود، حساب کنید.

ب - کل توان متوسط تحویل داده شده به بار را حساب کنید.

پ ـ کل توان متوسط تلف شده در خط را حساب کنید.

ت ـ کل توان متوسط تلف شده در مولد را حساب کنید.

ث ـ کل تعداد ولت آمپرهای راکتیو مغناطیس کنندهٔ جذب شده توسط بار را حساب کنید.

ج ـ کل توان مختلط تحویل داده شده توسط منبع را حساب کنید.

حل الف ـ از مثال ۱ داریم: $V_\phi = ۱۱۵/۲۲\text{V}$ ، $I_\phi = ۲/۴\text{A}$ و $\theta_\phi = -۱/۱۹-(-۳۶/۸۷) = ۳۵/۶۸°$. بنابراین:

$$P_\phi = (۱۱۵/۲۲)(۲/۴)\cos ۳۵/۶۸° = ۲۲۴/۶۴ \text{ وات}$$

توان هر فاز را می‌توان از رابطهٔ $R_\phi I_\phi^۲$ نیز حساب کرد:

$$P_\phi = (۳۹)(۲/۴)^۲ = ۲۲۴/۶۴ \text{ وات}$$

ب ـ کل توان متوسط تحویل داده شده به بار برابر $P_T = ۳P_\phi = ۶۷۳/۹۲ \text{ W}$ است. چون ولتاژ خط را در مثال ۱ حساب کردیم، بنابراین می‌توان معادلهٔ (۳-۹) را نیز به کار برد:

$$P_T = (\sqrt{۳})(۱۹۹/۵۸)(۲/۴)\cos ۳۵/۶۸° = ۶۷۳/۹۲ \text{ W}$$

پ ـ کل توان تلف شده در خط چنین است:

$$P_{\text{خط}} = (۳)(۲/۴)^۲(۰/۸) = ۱۳/۸۲۴ \text{ W}$$

ت ـ کل توان متوسط تلف شده در مولد چنین است:

$$P_{\text{مولد}} = (۳)(۲/۴)^۲(۰/۲) = ۳/۴۵۶ \text{ W}$$

ث ـ کل ولت آمپرراکتیو مغناطیس کننده که توسط بار جذب می‌شود، چنین است:

$$Q_T = (\sqrt{۳})(۱۹۹/۵۸)(۲/۴)\sin ۳۵/۶۸° = ۴۸۳/۸۴ \text{ VAR}$$

ج ـ کل توان مختلط مربوط به منبع چنین است:

$$S_T = ۳S_\phi = -۳(۱۲۰)(۲/۴)\underline{/۳۶/۸۷°}$$
$$= -۶۹۱/۲۰ - j۵۱۸/۴۰ \text{ VA}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که توان درونی و توان راکتیو مغناطیس کننده، به مدار تحویل می‌شود. می‌توان نتیجه را با محاسبهٔ کل توان و توان راکتیو جذب شده توسط مدار مطابقت داد. بنابراین:

$$P = ۶۷۳/۹۲ + ۱۳/۸۲۴ + ۳/۴۵۶$$
$$= ۶۹۱/۲۰ \text{ W} \quad \text{(مطابقت دارد)}$$
$$Q = ۴۸۳/۸۴ + ۳(۲/۴)^۲(۱/۵) + ۳(۲/۴)^۲(۰/۵)$$
$$= ۴۸۳/۸۴ + ۲۵/۹۲ + ۸/۶۴$$
$$= ۵۱۸/۴۰ \text{ VAR} \quad \text{(مطابقت دارد)}$$

مثال ۵ الف ـ کل توان مختلط تحویل داده شده به بار وصل شده به صورت Δ مثال ۲ را حساب کنید.

ب ـ چند درصد از توان متوسط ارسالی مولد به بار تحویل داده می‌شود؟

حل الف ـ با به کار بردن مقادیر فاز a از حل مثال ۲ داریم:

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{V}_{AB} = ۲۰۲/۷۲\angle ۲۹/۰۴^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{I}_\phi = \mathbf{I}_{AB} = ۱/۳۹\angle -۶/۸۷^\circ \text{ A}$$

با به کار بردن معادلات (۳-۲۵) و (۳-۲۶) داریم:

$$S_T = ۳(۲۰۲/۷۲\angle ۲۹/۰۴^\circ)(۱/۳۹\angle ۶/۸۷^\circ)$$
$$= ۶۸۲/۵۶ + j۴۹۴/۲۰۸ \text{ VA}$$

ب ـ کل توان ارسالی مولد برابر مجموع توان کل تحویل داده شده به بار به اضافهٔ توان کل تلف شده در خط است. بنابراین:

$$P_{\text{ورودی}} = ۶۸۲/۵۶ + ۳(۲/۴)^۲(۰/۳) = ۶۸۷/۷۴۴ \text{ W}$$

درصدی از توان متوسط در ورودی خط توزیع که به بار تحویل داده می‌شود برابر $\frac{۶۸۲/۵۶}{۶۸۷/۷۴۴}$ یا ٪۹۹/۲۵ است.

مثال ۶ یک بار متعادل سه فاز، ۴۸۰ کیلووات با ضریب توان پس‌فاز ۰/۸ نیاز دارد. بار از خطی با امپدانس $۰/۰۰۵ + j۰/۰۲۵$ اهم بر فاز تغذیه می‌شود. ولتاژ خط در سرهای بار برابر ۶۰۰ ولت است.

الف ـ مدار معادل تک فاز سیستم را رسم کنید.

ب ـ اندازهٔ جریان خط را محاسبه کنید.

پ ـ اندازهٔ ولتاژ خط را در سر ارسالی آن محاسبه کنید.

ت ـ ضریب توان را در سر ارسالی خط محاسبه کنید.

حل الف ـ مدار شکل (۳-۳) مدار معادل تک فاز را نشان می‌دهد. ما به دلخواه ولتاژ خط به خنثی را در سر بار به عنوان مبنا انتخاب می‌کنیم.

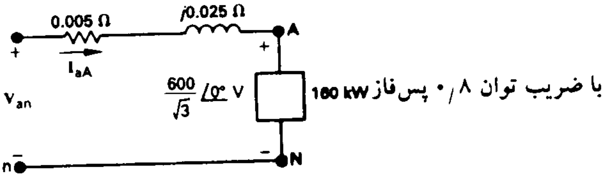
ب ـ جریان خط $\mathbf{I}_{aA}$ عبارت است از:

$$\left(\frac{۶۰۰}{\sqrt{۳}}\right)\mathbf{I}^*_{aA} = (۱۶۰ + j۱۲۰)۱۰^۳$$

یا:

$$\mathbf{I}^*_{aA} = ۵۷۷/۳۵\angle ۳۶/۸۷^\circ \text{ A}$$

بنابراین $\mathbf{I}_{aA} = ۵۷۷/۳۵\angle -۳۶/۸۷^\circ \text{ A}$. اندازهٔ جریان خط برابر اندازهٔ $\mathbf{I}_{aA}$ است:



شکل ۳-۳ مدار معادل تک فاز مثال ۶.

$$I_L = ۵۷۷٫۳۵\ \text{A}$$

برای I_L راه حل دیگری با استفاده از عبارت زیر به دست می‌آوریم:

$$P_T = \sqrt{۳}\, V_L I_L \cos\theta_p$$
$$= \sqrt{۳}\,(۶۰۰) I_L (۰٫۸) = ۴۸۰{,}۰۰۰\ \text{W}$$
$$I_L = \frac{۴۸۰{,}۰۰۰}{\sqrt{۳}\,(۶۰۰)(۰٫۸)} = \frac{۱۰۰۰}{\sqrt{۳}} = ۵۷۷٫۳۵\ \text{A}$$

پ - برای محاسبهٔ اندازهٔ ولتاژ خط در سرهای ارسالی آن، نخست $\mathbf{V}_{an}$ را حساب می‌کنیم. از شکل (۳-۳) داریم:

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{Z}_L \mathbf{I}_{aA}$$
$$= \frac{۶۰۰}{\sqrt{۳}} + (۰٫۰۰۵ + j۰٫۰۲۵)(۵۷۷٫۳۵\angle -۳۶٫۸۷°)$$
$$= ۳۵۷٫۵۱\angle ۱٫۵۷°\ \text{V}$$

بنابراین:

$$V_L = \sqrt{۳}\,|\mathbf{V}_{an}| = ۶۱۹٫۲۳\ \text{V}$$

ت - ضریب توان در سر ارسالی خط برابر کسینوس زاویهٔ فاز میان $\mathbf{V}_{an}$ و $\mathbf{I}_{aA}$ است:

$$\text{pf} = \cos[۱٫۵۷° - (-۳۶٫۸۷°)]$$
$$= \cos ۳۸٫۴۴° = ۰٫۷۸۳ \text{ پس‌فاز}$$

راه دیگر محاسبه ضریب توان آن است که ابتدا توان مختلط را در سر ارسالی خط محاسبه کنیم:

$$S_\phi = (۱۶۰ + j۱۲۰)۱۰^{۳} + (۵۷۷٫۳۵)^{۲}(۰٫۰۰۵ + j۰٫۰۲۵)$$
$$= ۱۶۱٫۶۷ + j۱۲۸٫۳۳\ \text{kVA}$$
$$= ۲۰۶٫۴۱\angle ۳۸٫۴۴°\ \text{kVA}$$

ضریب توان چنین است:

$$\text{pf} = \cos ۳۸٫۴۴° = ۰/۷۸۳ \text{ پس فاز}$$

بالاخره، اگر کل توان مختلط را در سر ارسالی خط حساب کنیم، پس از آنکه ابتدا اندازهٔ جریان خط را حساب کردیم، می‌توانیم این مقدار را برای محاسبهٔ به کار ببریم. یعنی:

$$\sqrt{۳}\, V_L I_L = ۳(۲۰۶/۴۱) \times ۱۰^۳$$

$$V_L = \frac{۳(۲۰۶/۴۱) \times ۱۰^۳}{\sqrt{۳}\,(۵۷۷/۳۵)} = ۶۱۹/۲۳ \text{ V}$$

۴-۳ توان لحظه‌ای در مدارهای سه فاز

اگرچه ما اساساً به محاسبات توان متوسط، راکتیو و مختلط علاقه‌مند هستیم، محاسبهٔ کل توان لحظه‌ای نیز اهمیت دارد. کل توان لحظه‌ای در یک مدار سه فاز متعادل یک خاصیت قابل توجه دارد: این توان با زمان تغییر نمی‌کند!

برای نشان دادن این خاصیت، فرض کنید ولتاژ لحظه‌ای خط به خنثی v_{AN} به عنوان مبنا انتخاب شود و مانند قبل θ_ϕ زاویهٔ فاز $\theta_{vA} - \theta_{iA}$ باشد. در این صورت، برای دنبالهٔ فازی مثبت توان لحظه‌ای در هر فاز چنین است:

$$p_A = v_{AN} i_{aA} = V_\phi I_\phi \cos \omega t \cos(\omega t - \theta_\phi)$$

$$p_B = v_{BN} i_{bB} = V_\phi I_\phi \cos(\omega t - ۱۲۰°) \cos(\omega t - \theta_\phi - ۱۲۰°)$$

و:

$$p_C = v_{CN} i_{cC} = V_\phi I_\phi \cos(\omega t + ۱۲۰°) \cos(\omega t - \theta_\phi + ۱۲۰°)$$

که در آن V_ϕ و I_ϕ به ترتیب نشان دهندهٔ مقادیر rms ولتاژ خط به خنثی و جریان خط هستند. کل توان لحظه‌ای برابر مجموع توانهای لحظه‌ای فاز است که به صورت $۱/۵\, V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi$ ساده می‌شود. یعنی:

$$p_T = p_A + p_B + p_C = ۱/۵\, V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi$$

به دست آوردن این رابطهٔ ساده شده به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

یک خاصیت مهم مدارهای سه فاز آن است که کل توان لحظه‌ای ثابت است. بنابراین گشتاور ایجاد شده بر روی محور یک موتور سه فاز ثابت است و این بدین معناست که ارتعاشات در ماشین‌آلاتی که به وسیلهٔ موتورهای سه فاز تغذیه می‌شوند، کمتر است.

۴- کاربرد اسپایس در حل مدارهای سه فاز

برنامهٔ تحلیل مدار اسپایس را می‌توان برای تحلیل مدارهای فازوری سه فاز نیز به کار برد. برای به دست آوردن فازور جریانهای خط و فاز منبع و بار، منابع ولتاژ صفر ولتی را می‌توان به عنوان آمپرمتر در مدار قرار داد. اما باید مقادیر عناصر مداری که هر فاز بار را تشکیل می‌دهند معلوم باشند؛ یعنی بجای اینکه امپدانس خالص هر فاز را بدانیم باید عناصر RLC مداری و ترکیب آنها را بدانیم. البته این مطلب معمولاً مشکلی ایجاد نمی‌کند، زیرا اگر مقادیر امپدانس خالص هر فاز هم داده شده باشند، می‌توان

مدارهای سادهٔ RL یا RC سری را چنان ترکیب کرد که این امپدانس‌ها را به دست دهند. در حقیقت می‌توان امپدانس‌های منبع را هم در هر فاز مولد قرار داد بدون آنکه مشکلی از لحاظ حل به وجود بیاید.

مثال ۷ با استفاده از برنامهٔ اسپایس، توان متوسط کل تحویل داده شده به بار سه فاز نامتعادل نشان داده شده در شکل (۴-۱ الف) را به دست آورید. مولد سه فاز با امپدانس درونی هر فاز شامل مقاومت $0{,}15\ \Omega$ سری با خود القایی ۸ میلی هانری مدل‌سازی شده است.

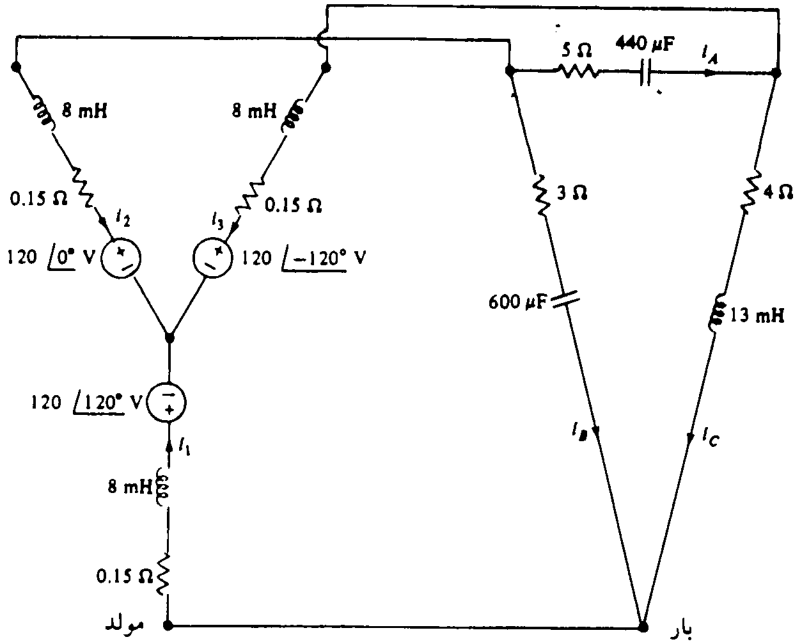
حل برای آنکه توان متوسط کل تحویل داده شده به بار را تعیین کنیم، از برنامهٔ اسپایس برای تعیین فازورهای جریان هر فاز بار یعنی $\hat{I}_A$ ، $\hat{I}_B$ و $\hat{I}_C$ استفاده می‌کنیم. سپس توان متوسط تلف شده در مقاومتهای فاز را با هم جمع می‌کنیم:

$$P_{ave\ \text{بار}} = |\hat{I}_A|^2 \times 5 + |\hat{I}_B|^2 \times 3 + |\hat{I}_C|^2 \times 4$$

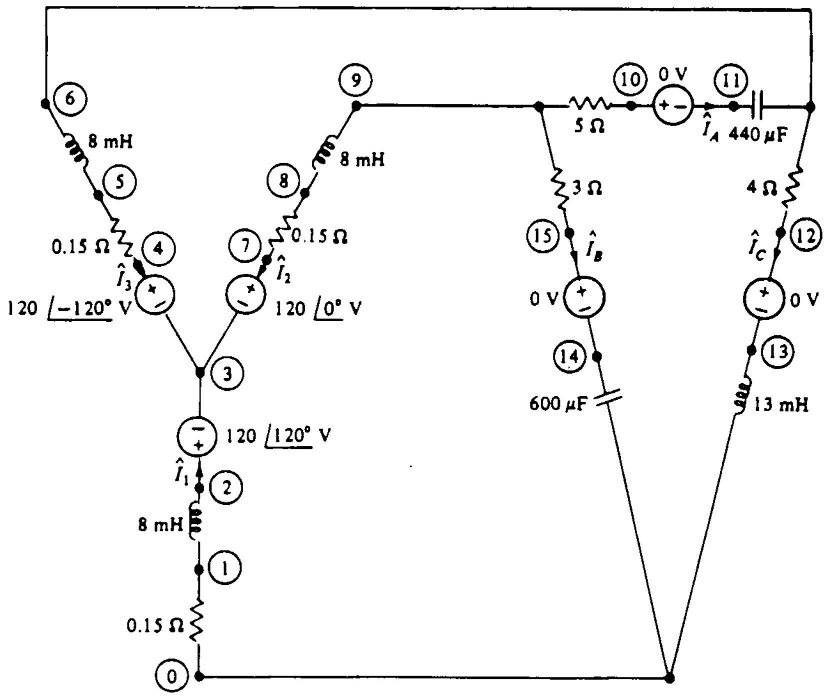
مدار آماد شدهٔ اسپایس در شکل (۴-۲ ب) نشان داده شده است، که از آن برنامهٔ اسپایس را به دست می‌آوریم:

```
Example Three-phase Circuit
R1     0   1     0.15
L1     1   2     8M
V1     2   3     AC    120  120
R2     7   8     0.15
L2     8   9     8M
V2     7   3     AC    120
R3     4   5     0.15
L3     5   6     8M
V3     4   3     AC    120  -120
RB     9   15    3
VB     15  14
CB     14  0     600U
RA     9   10    5
VA     10  11
CA     11  6     440U
RC     6   12    4
VC     12  13
LC     13  0     13M
.AC     DEC    1    60    60
.PRINT   AC   IM(VA)   IP(VA)   IM(VB)   IP(VB)   IM(VC)   IP(VC)
.END
```

نتایج اسپایس عبارتند از:



(الف)



(ب)

شکل ٤-١ حل مسألهٔ سه فاز نامتعادل با استفاده از اسپایس. (الف) مدار اصلی؛ (ب) مدار اسپایس.

$$\hat{\mathbf{I}}_A = ۱۵/۲۹ \angle -۳۴/۰۱^\circ$$
$$\hat{\mathbf{I}}_B = ۴۵/۹۵ \angle -۵۱/۴۹^\circ$$
$$\hat{\mathbf{I}}_C = ۲۲/۶۲ \angle -۱۷۷/۲^\circ$$

بنابراین توان متوسط کل تلف شده در بار چنین است:

$$P_{\text{ave بار}} = (۱۵/۲۹)^۲ \times ۵ + (۴۵/۹۵)^۲ \times ۳ + (۲۲/۶۲)^۲ \times ۴$$
$$= ۹۵۴۹/۷۹ \text{ وات}$$

جریانهای وارد شونده به سرهای مثبت منابع ولتاژ مولد را نیز می‌توان با قرار دادن دستور زیر در برنامهٔ بالا به دست آورد:

```
.PRINT   AC   IM(V1)   IP(V1)   IM(V2)   IP(V2)   IM(V3)   IP(V3)
```

نتایج عبارتند از:

$$\hat{\mathbf{I}}_۱ = ۳۷/۵۵ \angle -۸۰/۷۸^\circ$$
$$\hat{\mathbf{I}}_۲ = ۶۰/۷۱ \angle ۱۳۲/۹^\circ$$
$$\hat{\mathbf{I}}_۳ = ۳۶/۰۵ \angle -۱۱/۹۲^\circ$$

بنابراین توان متوسط کل تحویل داده شده به وسیلهٔ منابع مولد چنین است:

$$P_{\text{ave مولد}} = -\text{Re}(\hat{\mathbf{V}}_۱\hat{\mathbf{I}}_۱^*) - \text{Re}(\hat{\mathbf{V}}_۲\hat{\mathbf{I}}_۲^*) - \text{Re}(\hat{\mathbf{V}}_۳\hat{\mathbf{I}}_۳^*)$$
$$= -\text{Re}(۱۲۰ \angle ۱۲۰^\circ \times ۳۷/۵۵ \angle ۸۰/۷۸^\circ) - \text{Re}(۱۲۰ \angle ۰^\circ \times ۶۰/۷۱ \angle -۱۳۲/۹^\circ)$$
$$-\text{Re}(۱۲۰ \angle -۱۲۰^\circ \times ۳۶/۰۵ \angle ۱۱/۹۲^\circ)$$
$$= ۱۰۵۱۴/۶۲ \text{ وات}$$

اختلاف $P_{\text{ave مولد}} - P_{\text{ave بار}} = ۹۶۴/۸۴ \text{ W}$ توان مصرف شده در مقاومتهای $۰/۱۵\ \Omega$ مولد است:

$$P_{\text{ave}} = |\hat{\mathbf{I}}_۱|^۲ \times ۰/۱۵ + |\hat{\mathbf{I}}_۲|^۲ \times ۰/۱۵ + |\hat{\mathbf{I}}_۳|^۲ \times ۰/۱۵$$
$$= ۹۵۹/۳ \text{ W}$$

مثال ۷ مطلبی را که تا به حال باید بدیهی بوده باشد، نشان داده است: برنامه‌های تحلیل مدار مانند اسپایس را می‌توان برای تحلیل مداری بسیار پیچیده به کار برد، اما هنوز باید مفاهیم اصلی و اصول تحلیل مدار را درک کنیم تا بتوانیم این برنامه‌ها را صحیح‌تر و موثرتر به کار گیریم.

خلاصه

- میان‌برهای تحلیلی: کلید تمام میان‌برهای تحلیلی تبدیل مدار سه فاز متعادل بـه ساختار Y-Y و سپس جایگزینی ساختار Y-Y با یک مدار معادل تک فاز است.

- مدار معادل تک فاز: مدار معادل تک فاز برای محاسبهٔ جریان خط و ولتاژ خط به خنثی در ساختار Y-Y تک فاز به کار می‌رود. فاز a معمولاً به عنوان فاز مبنا انتخاب می‌شود.
- انتقال دادن محاسبات تک فاز: جریان خط و هر ولتاژ خط به خنثی راکه از فاز a مدار معادل تک فاز محاسبه می‌شود، می‌توان برای یافتن هر جریان یا ولتاژ در مدار سه فاز متعادل بر مبنای حقایق زیر به کار گرفت:

۱- در یک سیستم متعادل جریانها و ولتاژهای فاز b و c با جریان و ولتاژ متناظر فاز a یکسان هستند به جز آنکه ۱۲۰ درجه انتقال فاز دارند. در مدارهای با دنبالهٔ فازی مثبت، کمیت فاز b از کمیت فاز a به اندازه °۱۲۰ عقب می‌افتد و کمیت فاز c از کمیت فاز a به اندازه °۱۲۰ جلو می‌افتد. برای مدارهای با دنبالهٔ فازی منفی فازهای b و c نسبت به فاز a جابه‌جا می‌شوند.

۲- دسته ولتاژهای خط نسبت به دسته ولتاژهای خط به خنثی °۳۰ ∓ اختلاف فاز دارند. علامت + یا − به ترتیب متناظر با دنبالهٔ فازی مثبت و منفی است.

۳- اندازهٔ ولتاژ خط $\sqrt{۳}$ برابر اندازهٔ ولتاژ خط به خنثی است.

۴- دسته جریانهای خط نسبت به دسته جریانهای فاز در منابع و بارهای وصل شده به صورت Δ به مقدار °۳۰ ∓ اختلاف فاز دارند. علامت − یا + به ترتیب متناظر با دنبالهٔ فازی مثبت و منفی است.

۵- اندازهٔ جریان خط $\sqrt{۳}$ برابر اندازهٔ جریان فاز در منبع یا بار وصل شده به صورت Δ است.

محاسبات توان در مدارهای سه فاز مشتمل بر روشهای زیر است:

- توان هر فاز: روشهای محاسبهٔ توان متوسط، توان راکتیو و توان مختلط هر فاز با روشهای فصل ۷ یکسان هستند.
- توان کل: توان کل حقیقی، راکتیو و مختلط را می‌توان یا با ضرب کردن توان متناظر هر فاز در ۳ و یا با استفاده از عبارتهای مربوط به جریان خط و ولتاژ خط داده شده در معادلات (۳-۹)، (۳-۱۱) و (۳-۱۴) تعیین کرد.
- توان لحظه‌ای: توان لحظه‌ای کل در یک مدار سه فاز متعادل ثابت بوده و مساوی ۱٫۵ برابر توان متوسط هر فاز است.

مسائل

۱- عبارتهای حوزهٔ زمانی ولتاژهای خط به خنثی در سرهای بار وصل شده به صورت Y چنین هستند:

$$v_{AN} = ۳۱۰ \cos(\omega t + ۶۰^\circ)$$

$$v_{BN} = ۳۱۰ \cos(\omega t + ۱۸۰^\circ)$$

فصل هشتم

عناصر تزویج کننده و مدارهای تزویج شده

در فصل دوم سه نوع اصلی عناصر مدار ، که مقاومت ، خازن و سلف میباشد را معرفی کردیم . تمام این عناصر دارای دوسر میباشند (یا یک قطبی هستند) و بنابراین بوسیله روابطی که ولتاژ شاخه‌آنها را به جریان شاخه مربوط میکند مشخص می‌شوند . در فصلهای سوم تا هفتم مدارهای خاصی که شامل چنین عناصر دو سری بودند را تجزیه و تحلیل نمودیم . حال ، قبل‌از ارائه روشهای کلی تجزیه و تحلیل مدار ، می‌خواهیم بعضی دیگر از عناصر مفید مدار ، مانند سلفهای تزویج شده[1] ترانسفورماتور ایده‌آل ، و منابع کنترل شده (یا منابع وابسته) را معرفی کنیم . تفاوت این عناصر با مقاومت ، سلف و خازن در آنست که این عناصر بیش‌از یک شاخه دارند و جریان و ولتاژ یک شاخه به ولتاژها و جریانهای شاخه‌های دیگر مربوط است . بهمین جهت آنها **عناصر تزویج کننده**[2] نامیده میشوند . دراین فصل ، مشخصه‌ها و خواص این عناصر را خواهیم دید . علاوه برآن ، بمنظور نشان دادن بعضی روشهای تجزیه و تحلیل برای مدارهایی‌که شامل عناصرتزویج کننده میباشند ، مثالهایی بیان خواهیم کرد .

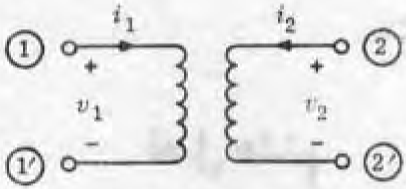
۱- سلفهای تزویج شده

دو سیم پیچی که در مجاورت یکدیگر قرار دارند ، مطابق شکل (۱-۱) ، را درنظر بگیرید . برای منظورهای کنونی، این موضوع که سیم پیچی‌ها بدور یک هسته از ماده مغناطیسی‌پیچیده‌شده باشندیانه، هیچگونه‌اهمیتی‌ندارد . معهذا، فرض میکنیم که سیم‌پیچی‌ها نسبت بیکدیگر ، و یا نسبت به‌هسته‌ای که ممکن است بدورآن پیچیده شده باشند ، حرکت نمیکنند .

برای ولتاژوجریان «جهت‌های قرار دادی» را مطابق شکل (۱-۱) انتخاب میکنیم .

۱- Coupled

۲- Coupling Elements



شکل ۱-۱ سیم‌پیچی‌های تزویج شده و جهت‌های قرار دادی آنها

توجه کنید که این جهت‌های قرار دادی ، «جهت‌های قرار دادی متناظر» برای هرسیم‌پیچی میباشند. این جهت‌ها دربارهٔ جهت‌های واقعی ولتاژ و جریان ، و یا ولتاژ نسبی سرها هیچگونه اطلاعاتی بما نمیدهند . جهت‌های قرار دادی تنها برای معین کردن علامت کمیاتی که پدیدهٔ واقعی را نمایش میدهند لازم میباشند.

بمنظور استفاده‌های بعدی باید توجه کرد که اگر در مدار مغناطیسی دو سیم‌پیچی ، ماده فرو مغناطیسی داشته باشیم ، وقتیکه مقادیر جریانها باندازه کافی بزرگ باشند ، روابط میان شارهای Φ_1 و Φ_2 و جریانهای i_1 و i_2 دیگر خطی نمیباشند. در این مورد، معادلات بصورت زیر میباشند :

$$\Phi_1 = f_1(i_1 \; , \; i_2)$$

$$\Phi_2 = f_2(i_1 \; , \; i_2)$$

که در آن f_1 و f_2 توابعی غیر خطی از جریانهای i_1 و i_2 میباشند. بموجب قانون فاراده:

$$v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial i_1} \; \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial i_2} \; \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial i_1} \; \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial i_2} \; \frac{di_2}{dt}$$

دراینجا باید تأکید نمود که چهار مشتق جزئی بالا توابعی از i_1 و i_2 میباشند. واضح است که وقتی چنین معادلات «غیرخطی» بین شار وجریان داریم مسأله بسیار پیچیده است، و ما تا فصل هفدهم،بیش از این سیم پیچی‌های تزویج شده غیر خطی را درنظر نخواهیم گرفت.

۱-۱- توصیف سلفهای تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان

فرض کنید یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان داشته باشیم*. چون سلف‌ها خطی میباشند، هرشار بایستی تابع خطی جریانها باشد، و چون سلف‌ها تغییر ناپذیر با زمان میباشند، ضرایب این توابع خطی بایستی مقادیر ثابت باشند (یعنی صریحاً بزمان بستگی نداشته باشند). بنابراین میتوان نوشت :

$$\Phi_1(t)=L_{11}i_1(t)+M_{12}i_2(t)$$
$$\Phi_2(t)=M_{21}i_1(t)+L_{22}i_2(t)$$

که در آن ثابت‌های L_{11}، L_{22}، M_{12} و M_{21} به زمان و به جریانهای i_1 و i_2 بستگی ندارند. L_{11} **ضریب خود القای**[1] سلف ①①' و L_{22} **ضریب خود القای** سلف ②②' است. M_{12} و M_{21} **ضرایب القاء متقابل**[2] برای سلفهای تزویج شدهٔ ①①' و ②②' نامیده می‌شوند. اگر جریانها برحسب آمپر و شارها برحسب وبر بیان‌شوند، L_{11}، L_{22}، M_{12} و M_{21} برحسب هانری اندازه‌گیری میشوند. درفیزیک، از بررسی انرژی آموختیم که دوضریب القاء متقابل همیشه برابرند، یعنی $M_{12}=M_{21}$. اگر مقدار مشترك آنها را M بنامیم میتوان نوشت :

$$\Phi_1=L_{11}i_1+Mi_2 \qquad (۱-۱)$$

$$\Phi_2=Mi_1+L_{22}i_2 \qquad (۱-۲)$$

از معادلات قانون فاراده بلافاصله نتیجه میشود :

$$v_1=L_{11}\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt} \qquad (۱-۳)$$

* ما لغت «سلف» رابجای «سیم‌پیچی» بکار می‌بریم تانشان دهیم که با مدلهای مدار سروکار داریم. سیم‌پیچی‌ها عناصر فیزیکی را مشخص میکنندکه معمولاً دارای مقداری اتلاف انرژی و ظرفیت پراکنده میباشند. میتوان سیم‌پیچی‌ها را از ترکیب سلف‌ها، مقاومتها و خازنها مدل سازی نمود.

۱- Self Inductance ۲- Mutual Inductances

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt} \qquad (۱-۴)$$

در حالت دائمی سینوسی ، اگر ولتاژها و جریانهای سینوسی v_1 ، v_2 ، i_1 و i_2 را بترتیب با فازورهای متناظرشان ، V_1 ، V_2 ، I_1 و I_2 نشان دهیم ، این معادلات بصورت زیر در می‌آیند :

$$V_1 = j\omega L_{11} I_1 + j\omega M I_2 \qquad (۱-۵)$$

$$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_{22} I_2 \qquad (۱-۶)$$

که در آن ω فرکانس زاویه‌ای است.

تبصره - هرچند ضرایب خود القاء L_{11} و L_{22} همواره اعداد مثبتی هستند ، ضریب القای متقابل M ، بسته به اینکه سیم‌پیچی‌ها چگونه پیچیده شده باشند ، میتواند مثبت و یا منفی باشد.

«علامت ضریب القاء متقابل» علامت ضریب القاء متقابل M را تنها میتوان با درنظر گرفتن دقیق وضع فیزیکی و جهات قرار دادی تعیین نمود. فرض کنید سلف دوم ۲'۲ را مدار باز کنیم ، یعنی جریان i_2 متحد با صفر است. معادلات (۱-۲) و (۱-۴) بصورت زیر در می‌آیند :

$$\Phi_2 = M i_1$$

و :

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt}$$

اگر یک جریان «افزایشی» از سر ۱ وارد سلف ۱ شود ، دراینصورت $\frac{di_1}{dt} > 0$ میباشد وچون $v_2 = M\left(\frac{di_1}{dt}\right)$ ، واضح است که علامت v_2 با علامت M یکسان میباشد. مثلاً ، ممکن است پتانسیل سر ۲ سلف ۲ از پتانسیل سر '۲ بیشتر باشد. دراین‌حالت ، جهت قرار دادی ما لازم میدارد که $v_2 > 0$ ، و بنابراین $M > 0$ باشد. بنابراین ، علامت M هم به وضع فیزیکی «و هم» به جهات قرار دادی انتخاب شده بستگی دارد.

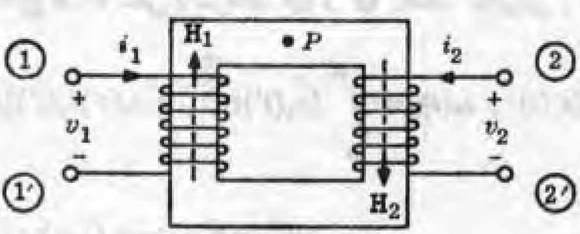
اکنون مسأله تعیین علامت M را با توجه به انرژی بررسی می‌کنیم . یک جفت سلف تزویج شده مشخص با جهات قرار دادی برای ولتاژ و جریان داده شده است. (شکل (۲-۱) را ببینید). فرض می‌کنیم که نفوذ پذیری مغناطیسی[۱] هسته خیلی بیشتر از نفوذ پذیری مغناطیسی فضای آزاد باشد. تحت این شرایط،تقریباً تمام انرژی مغناطیسی در هسته ذخیره میشود. حال ، می‌خواهیم براساس این داده‌ها ، تعیین کنیم که علامت M در معادلات (۱-۳) و (۱-۴) بایستی مثبت باشد یا منفی.

بادرنظر گرفتن انرژی مغناطیسی ذخیره شده‌درمواقعی که $i_1 > o$ و $i_2 > o$ است،به‌یک قاعده برای انتخاب علامت خواهیم رسید. در فیزیک آموختیم که هرگاه $\vec{H}$ بردار میدان مغناطیسی در یک نقطه P از هسته مغناطیسی باشد ، دراینصورت انرژی ذخیرهشده در جزء حجم dv که شامل نقطه P است برابر $\frac{\mu}{2} | \vec{H} |^2 dv$ خواهد بود ، که در آن μ نفوذ پذیری مغناطیسی هسته میباشد . فرض کنید با استفاده از مولدهای مناسبی ، جریانهای ثابت‌ومثبت i_1 و i_2 را داشته باشیم وگیریم $\vec{H}_1$ میدان مغناطیسی ناشی از i_1 تنها ، و $\vec{H}_2$ میدان مغناطیسی ناشی از i_2 تنها باشد . آنگاه انرژی مغناطیسی ذخیره شده در dv چنین است :

$$\frac{\mu}{2} | \vec{H}_1 + \vec{H}_2 |^2 dv =$$

$$\left(\frac{\mu}{2} | \vec{H}_1 |^2 + \mu \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 + \frac{\mu}{2} | \vec{H}_2 |^2 \right) dv$$

که در آن $\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2$ نمایشگر حاصلضرب عددی دو بردار $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ میباشد.



شکل ۲-۱- تشریح تعیین علامت M

۱- Permeability

دراین معادله $\frac{\mu}{2} |\vec{H}_1|^2 dv$ انرژی مغناطیسی ذخیره شده ناشی از جریان i_1 تنها است و $\frac{\mu}{2} |\vec{H}_2|^2 dv$ انرژی مغناطیسی ذخیره شده ناشی از جریان i_2 تنها است. پس، جملهٔ $\mu \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 dv$ انرژی مغناطیسی ذخیره شده ناشی از وجود توأم i_1 و i_2 است. بنابراین اگر $\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2$ مثبت باشد (یعنی، قدر مطلق زاویه بین میدانهای مغناطیسی $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ از $90°$ کمتر باشد تا کسینوس آن مثبت گردد)، انرژی ذخیره شده در dv وقتیکه i_1 و i_2 «همزمان» جاری شوند از مجموع انرژیهای ذخیره شده در dv وقتیکه هریک از i_1 و i_2 بتنهایی جریان داشته باشند بزرگتر است. بعنوان مثال، در شکل (۲-۱)، قانون دست راست نشان میدهد که $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ جهت‌های یکسان دارند، بنابراین انرژی ذخیره شده در dv وقتیکه هردوی i_1 و i_2 جریان‌داشته باشند، از مجموع انرژی‌های ذخیره شده وقتیکه i_1 و i_2 بتنهایی جریان داشته باشند «بزرگتر» است.

اکنون انرژی ذخیره شده را بدون درنظرگرفتن میدان و با درنظرگرفتن مدار محاسبه میکنیم. برای سادگی فرض کنید $i_1(o)=o$ و $i_2(o)=o$. بنابراین، بموجب معادلات (۱-۱) و (۲-۱)، در $t=o$ شارها برابر صفر است و در لحظهٔ $t=o$ هیچ انرژی ذخیره نشده است. انرژی ذخیره شده تابعی از مقادیر لحظه‌ای i_1 و i_2 است وما انرژی ذخیره شده در لحظه t را بصورت $\mathcal{E}[i_1(t)\ ,\ i_2(t)]$ مینویسیم. جهات قرار دادی متناظر لازم میدارند که $v_1(t)i_1(t)$، توان لحظه‌ای داده شده «بوسیله» محیط خارج «به» سلفی با سرهای ❶ و ❶' بوده، و $v_2(t)i_2(t)$، توان لحظه‌ای داده شده «بوسیله» محیط خارج «به» سلفی با سرهای ❷ و ❷' باشد. بنابراین:

$$\mathcal{E}[i_1(t)\ ,\ i_2(t)] = \int_o^t [v_1(t')i_1(t') + v_2(t')i_2(t')]dt'$$

از معادلات (۳-۱) و (۴-۱) بدست می‌آوریم که:

$$\mathcal{E}[i_1(t)\ ,\ i_2(t)]=$$
$$\int_o^t \left[L_{11}i_1\frac{di_1}{dt'}+M\left(i_1\frac{di_2}{dt'}+i_2\frac{di_1}{dt'}\right)+L_{22}i_2\frac{di_2}{dt'}\right]dt'$$

چون $i_1(o)$ و $i_2(o)$ مساوی صفر فرض شده‌اند بدست می‌آوریم که :

$$\mathcal{E}[i_1(t)\ ,\ i_2(t)]=\frac{1}{2}L_{11}\,i^2_1(t)+M\,i_1(t)i_2(t)+\frac{1}{2}L_{22}i^2_2(t) \qquad (1-7)$$

این رابطه را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\mathcal{E}(i_1\ ,\ i_2)=\mathcal{E}(i_1\ ,\ o)+Mi_1i_2+\mathcal{E}(o\ ,\ i_2) \qquad (1-8)$$

که در آن $\mathcal{E}(i_1\ ,\ o)$ انرژی ذخیره شده در حالتی است که $i_2=o$ باشد و جریان i_1 درسلف ۱ جاری شود ، و $\mathcal{E}(o\ ,\ i_2)$ انرژی ذخیره شده در حالتی است که $i_1=o$ باشد وجریان i_2 درسلف ۲ جاری شود . ازمعادلهٔ (۱-۸) نتیجه می گیریم که اگر i_1 و i_2 مثبت بوده و $M>o$ باشد،انرژی کل ذخیره شده از مجموع انرژیهای ذخیره شده درحالتهایی که بترتیب جریان i_1 بتنهایی وجریان i_2 بتنهایی جاری شود ، بزرگتر است . بدین ترتیب ، صحت قاعده‌زیر را ، برای تعیین علامت M ، بررسی کردیم :

«یک جفت سلف تزویج شده را درنظر گرفته جهات قرار دادی برای ولتاژها و جریانها را چنان انتخاب می‌کنیم که توان داده شده به سلفها از محیط خارج مساوی $v_1(t)i_1(t)+v_2(t)i_2(t)$ باشد . (انتخاب جهات قرار دادی متناظر این مطلب را تضمین میکند) . اگر یک جریان یک آمپری درهرسلف در جهت قرار دادی عبور کند و اگر انرژی ذخیره شده دراین شرایط از مجموع انرژیهای ذخیره شده درحالتهایی که هریک‌ازجریانهای یک‌آمپری بتنهایی عبورمیکنند بزرگتر باشد ، ضریب القاء متقابل M مثبت است .»

در دیاگرامهای مدار ، اغلب از نقطه‌ها[1] بعنوان یک قرار داد برای نشان‌دادن

1- Dots

علامت M استفاده میشود. این قرار داد چنین است :

«ابتدا ، برای هرسلف از جهات قرار دادی متناظر استفاده کنید. سپس ، به یک سر از هرسلف یک نقطه تخصیص دهید بقسمی که وقتی جهات قرار دادی i_1 و i_2 هردو از سرنقطه‌دار وارد سیم‌پیچی بشوند (یا از آن خارج گردند) ، M مثبت باشد».

در وضع نشان داده شده درشکل (۲-۱) ، برای جهات قرار دادی داده شده به i_1 و i_2 ، ضریب القاء متقابل M مثبت است و بایستی دو نقطه در دو سر ❶ و ❷ ، یا دو سر ❶' و ❷' گذاشته شود.

۲-۱- ضریب تزویج

برای توصیف روابط میان جریانها و شارها درسلفهای تزویج شده خطی و تغییر ناپذیر با زمان با دو سیم‌پیچی(۱) ، به سه پارامتر L_{11} ، L_{22} و M نیاز داریم. میدانیم که ضرایب خود القاء L_{11} و L_{22} همیشه مثبت هستند درحالیکه ضریب القاء متقابل M میتواند مثبت یا منفی باشد. نسبت قدر مطلق ضریب القاء متقابل بواسطه هندسی دو ضریب خود القاء ، سنجشی برای درجهٔ تزویج میباشد . بنابراین ، **ضریب تزویج**(۲) سلفهای تزویج شده با دو سیم‌پیچی را با رابطه زیر تعریف میکنیم :

$$k \triangleq \frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$$

ضریب k یک عدد «نامنفی» است که به جهات قرار دادی انتخاب شده برای جریانهای سلفها بستگی ندارد. اگر دو سلف در فاصلهٔ زیادی از یکدیگر در فضا قرار داشته باشند، ضریب القاء متقابل بسیار کوچک است و k نزدیک صفر میباشد . اگر دو سلف شدیداً تزویج شده باشند ، مانند حالتیکه دوسیم‌پیچی برروی یک هسته پیچیده شده است ، قسمت اعظم شار مغناطیسی برای دو سلف مشترک میباشد ، و k نزدیک واحد است. با بررسی انرژی ذخیره شده درسلفها نشان خواهیم داد که ضریب تزویج k که در بالا تعریف شد،

۱- Two - Winding ۲- Coefficient of Coupling

همواره کوچکتر یا برابر واحد است. اگر این ضریب برابر واحد باشد، گویند که سلفها **کاملاً تزویج شده‌اند**[۱].

اکنون عبارت انرژی ذخیره شده را که در معادلهٔ (۷-۱) داده شده است بررسی میکنیم. از روش جبری کامل کردن مربعات استفاده خواهیم کرد، دراینصورت:

$$\mathcal{E}(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2$$

$$= \frac{1}{2} L_{11} \left(i_1 + \frac{M}{L_{11}} i_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}} \right) i_2^2$$

توجه کنید که برای هرمقدار i_1 و i_2، جملهٔ $\left(i_1 + \frac{M}{L_{11}} i_2 \right)^2$ همواره نامنفی است. بخاطر بیاورید که انرژی $\mathcal{E}(i_1, i_2)$ ذخیره شده درسلفهای تزویج شده بایستی برای «هر» انتخاب i_1 و i_2 نامنفی باشد. بنابراین، نتیجه می‌شود که $L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}}$ بایستی نامنفی باشد. اثبات این مطلب بطریقه برهان خلف[۲] میباشد. فرض کنید $L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}}$ منفی باشد وگیریم که $i_2 = 1$ و $i_1 = -\frac{M}{L_{11}}$ انتخاب شود. دراین صورت $\left(i_1 + \frac{M}{L_{11}} i_2 \right)^2$ صفر میشود و $\left(L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}} \right) i_2^2$ منفی است، و ما به نتیجه غیرممکن $\mathcal{E}\left(-\frac{M}{L_{11}}, 1 \right) < 0$ میرسیم. و بالنتیجه این شرط را خواهیم داشت:

$$L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}} \geqslant 0$$

و این رابطه با $L_{11} L_{22} \geqslant M^2$ معادل است، و یا:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} \leqslant 1 \qquad (۹-۱)$$

بطور خلاصه، بررسی انرژی لازم میدارد که ضرایب خود القاء یک جفت سلف خطی تزویج

۱- Closely coupled ۲- Contradiction

شده مثبت بوده و ضریب تزویج آنها کوچکتر یا برابر واحد باشد.

۳-۱- سلفهای با چند سیم‌پیچی و ماتریس ضرایب القاء آنها

اگر بیش از دو سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان بایکدیگر تزویج شوند، مانند آنچه در شکل (۳-۱) نشان داده شده است، رابطه میان جریانها و شارها بوسیله یک دسته از معادلات خطی، بصورت زیر داده میشود:

$$\Phi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 + L_{13}i_3$$

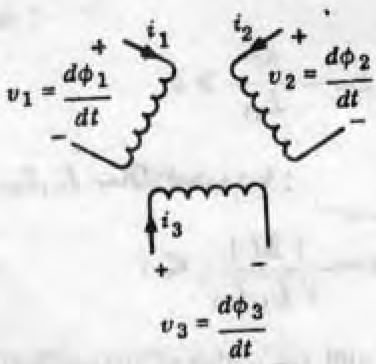
$$\Phi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 + L_{23}i_3 \qquad \text{(۱۰—۱ الف)}$$

$$\Phi_3 = L_{31}i_1 + L_{32}i_2 + L_{33}i_3$$

درمعادلات (۱۰-۱ الف)، L_{11} ، L_{22} و L_{33} بترتیب ضرایب خود القاء سلفهای ۱، ۲ و ۳ میباشند. $L_{12}=L_{21}$ و $L_{23}=L_{32}$ و $L_{13}=L_{31}$ ضرایب القاء متقابل هستند. بعبارت دقیق‌تر، L_{12} ضریب القاء متقابل بین سلف ۱ و سلف ۲ را نشان میدهد.
گاهی راحت‌تر است که معادله (۱۰-۱ الف) را بصورت ماتریسی زیر بنویسیم:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{Li} \qquad \text{(۱۰—۱ ب)}$$

که در آن $\mathbf{\Phi}$ بردار شار و $\mathbf{i}$ بردار جریان نامیده میشود، و $\mathbf{L}$ یک ماتریس مربعی



شکل ۳-۱- سلفهای با سه سیم‌پیچی

است که **ماتریس ضرایب القاء**[1] نامیده میشود. بنابراین :

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{i}=\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Phi}=\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \qquad (\text{۱۰ - ۱ ب})$$

مرتبه ماتریس ضرایب القاء $\mathbf{L}$ با تعداد سلفها برابراست. ازآنجائیکه سلفها تغییرناپذیر با زمان میباشند ، عناصر $\mathbf{L}$ (یعنی L_{ij} ها) ثابت هستند. برحسب ولتاژها، یک بردار ولتاژ $\mathbf{v}$ وجود دارد که بوسیله رابطه زیر به جریان $\mathbf{i}$ مربوط میشود :

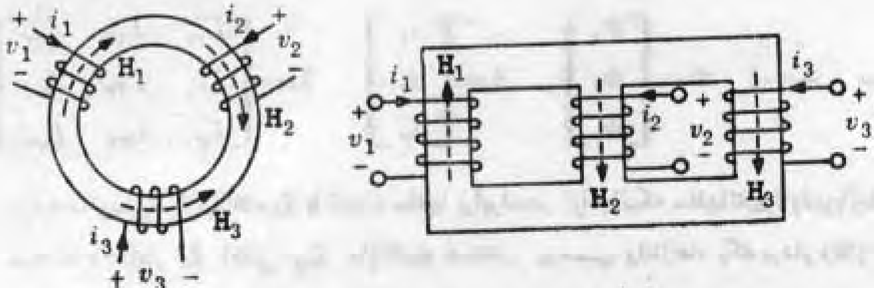
$$\mathbf{v}=\mathbf{L}\frac{d\mathbf{i}}{dt} \qquad (\text{۱ - ۱۱})$$

از آنجائیکه ماتریس ضرایب القاء $\mathbf{L}$ همواره متقارن است($L_{12}=L_{21}$ و غیره) ،دسته‌ای از سلفهای تزویج شده باسه سیم‌پیچی،بجای نه پارامتر ، بوسیلهٔ شش پارامتر مشخص میشوند. علامتهای ضرایب القاء متقابل L_{12} ، L_{13} و L_{23} را میتوان با بررسی جهت میدان مغناطیسی القاء شده تعیین کرد.

مثال ۱- شکل (۴-۱ الف) سه سلف را که روی یک هسته آهنی پیچیده شده‌اند نشان میدهد. جهات قرار دادی ولتاژ و جریان برای این سه سلف را مطابق شکل انتخاب میکنیم. جهت میدانهای مغناطیسی ایجاد شده در اثر جریانهای مثبتی که از سلفها میگذرند را میتوان بوسیلهٔ قانون دست راست تعیین نمود. بعنوان مثال ، پیکان مشخص شده با علامت $\vec{\mathbf{H}}_1$ جهت میدان مغناطیسی ایجاد شده در اثر جریان مثبت i_1 راوقتیکه $i_2=i_3=0$ است نشان میدهد. چنانکه در شکل نشان داده شده است $\vec{\mathbf{H}}_1$ و $\vec{\mathbf{H}}_2$ دارای جهات یکسان هستند ولی $\vec{\mathbf{H}}_3$ جهت مخالف دارد. بنابراین L_{12} مثبت میباشد درحالیکه L_{13} و L_{23} منفی هستند.

تمرین - درسلفهای تزویج شده با سه سیم‌پیچی شکل (۴-۱ ب) ، علامتهای ضرایب القاء متقابل L_{12} ، L_{13} و L_{23} را تعیین کنید.

1- Inductance matrix



(الف) (ب)

شکل ٤-۱- مثالهائی از سلفهای تزویج شده با سه سیم‌پیچی

دراینجا مفید است که یک **ماتریس ضرایب‌القاء معکوس**[۱] را بصورت زیر تعریف کنیم :

$$\Gamma \triangleq \mathbf{L}^{-1}$$

با این تعریف، معادلهٔ (۱-۱۰ ب) بدین صورت درمی‌آید :

$$\mathbf{i} = \Gamma \Phi \qquad (۱-۱۲)$$

بعنوان مثال ، معادلات اسکالر برای سلفهای تزویج شده با دو سیم‌پیچی برحسب عناصر ماتریس ضرایب القاء معکوس چنین میباشند :

$$\begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}\Phi_1 + \Gamma_{12}\Phi_2 \\ i_2 = \Gamma_{21}\Phi_1 + \Gamma_{22}\Phi_2 \end{cases} \qquad (۱-۱۲)$$

که در آن ، از تعریف یک ماتریس معکوس و یا از قاعده کرامر ، داریم :

$$\Gamma_{11} = \frac{L_{22}}{\det \mathbf{L}} \quad , \quad \Gamma_{22} = \frac{L_{11}}{\det \mathbf{L}} \qquad (۱-۱٤ \text{ الف})$$

و :

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \frac{-L_{12}}{\det \mathbf{L}} \qquad (۱-۱٤ \text{ ب})$$

۱- Reciprocal inductance matrix

که در آن $\det \mathbf{L}$ نشان دهندهٔ دترمینان ماتریس ضرایب القاء $\mathbf{L}$ میباشد. Γ_{ij} ها **ضرایب القاء معکوس** نامیده میشوند. معادلهٔ (۱-۱۳) برحسب ولتاژها چنین میشود:

$$i_1(t)=\Gamma_{11}\int_0^t v_1(t')dt'+\Gamma_{12}\int_0^t v_2(t')dt'+i_1(0)$$

(۱—۱۵ الف)

$$i_2(t)=\Gamma_{21}\int_0^t v_1(t')dt'+\Gamma_{22}\int_0^t v_2(t')dt'+i_2(0)$$

این معادلات، درهرلحظهٔ t، جریانهای سلفها را برحسب ولتاژها و جریانهای اولیه بیان میکنند. باین دلیل، در تجزیه و تحلیل گره، ماتریس ضرایب‌القاء معکوس از ماتریس ضرایب القاء مفیدتر است.

در حالت دائمی سینوسی، میتوان‌فازورهای جریان I_1 و I_2 را برحسب فازورهای ولتاژ V_1 و V_2 بدین صورت نوشت:

$$I_1=\frac{\Gamma_{11}}{j\omega}V_1+\frac{\Gamma_{12}}{j\omega}V_2$$

(۱—۱۵ ب)

$$I_2=\frac{\Gamma_{21}}{j\omega}V_1+\frac{\Gamma_{22}}{j\omega}V_2$$

که در آن ω فرکانس زاویه‌ای است.

تبصره - بعنوان‌آخرین مطلب، بایستی‌تأکید نمود که ماتریس‌ضرایب القاء بخودی خود رفتار ولتاژوجریان شاخه‌ها را بطور کامل مشخص نمیکند، وبرای‌آنکه بتوان معادلات شبکه‌رابطورصحیح نوشت‌باید،ماتریس‌ضرایب‌القاء وجهات‌قراردادی‌جریانهای‌سلفها، «هردو»، را بدانیم. جهات قراردادی ولتاژها از قرارداد قبلی ما دربارهٔ اینکه هروقت جهات قراردادی متناظر را بکار بریم،توان داده شده «بوسیلهٔ» محیط خارج «به» سلفها، مساوی $v_1(t)i_1(t)+v_2(t)i_2(t)$ میباشد، نتیجه میشود

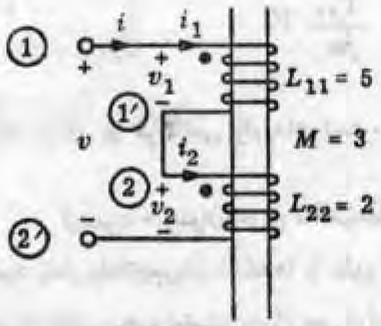
۴-۱- اتصال سری و موازی سلفهای تزویج شده

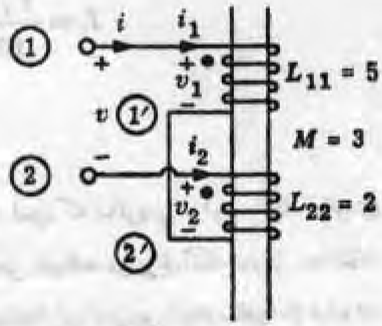
اکنون توجه خود را به مسأله محاسبه ضریب القاء[1] معادل دو سلف خطی تزویج شده که بطور سری یا موازی بهم وصل شده‌اند معطوف میداریم.

مثال ۲- شکل (۵-۱ الف) دو سلف تزویج شده که بطور سری بهم متصل شده‌اند را نشان میدهد. برای تعیین ضریب القاء بین سرهای ❶ و ❷′ ، ابتدا علامت ضریب القاء متقابل را تعیین میکنیم. از جهت‌های قراردادی انتخاب شده برای دو جریان i_1 و i_2 مشاهده میشود که میدانهای مغناطیسی $\vec{\mathbf{H}}_1$ و $\vec{\mathbf{H}}_2$ ، بترتیب ناشی از جریانهای i_1 و i_2 ، هم‌جهت هستند و این موجب مثبت بودن M میگردد. (قرارداد نقطه را هم میتوان بکار برد، چون هردو جریان i_1 و i_2 از سر نقطه‌دار وارد سلف نظیر خود میشوند، M مثبت است). از معادلات جریان و شار، داریم:

$$\Phi_1 = L_{11}i_1 + Mi_2 = 5i_1 + 3i_2$$
$$(1-16)$$
$$\Phi_2 = Mi_1 + L_{22}i_2 = 3i_1 + 2i_2$$

که در آن ضرایب القاء برحسب هانری بیان شده‌اند. چون دو سلف بطور سری بهم متصل شده‌اند، KCL لازم میدارد که:





شکل ۵-۱- اتصال سری سلفهای تزویج شده

1- Inductance

$$i=i_1=i_2$$

KVL لازم میدارد که $v=v_1+v_2$ ، و قانون فاراده بیان میدارد که $v_1=\frac{d\Phi_1}{dt}$ و $v_2=\frac{d\Phi_2}{dt}$. بنابراین ، اگر Φ شاری باشد که $v=\frac{d\Phi}{dt}$ برقرار گردد ، بدست می‌آید :

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{d\Phi_1}{dt}+\frac{d\Phi_2}{dt}$$

و اگر شارهای اولیه برابر صفر باشند ، باانتگرال گیری بدست می‌آید :

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2$$

و از معادلهٔ (۱۶-۱) داریم :

$$\Phi=8i_1+5i_2=13i$$

بنابراین ، ضریب القاء اتصال سری چنین است :

$$L=\frac{\Phi}{i}=13 \quad \text{هانری}$$

اکنون فرض کنید که دو سلف را مطابق شکل (۱-۵ ب) بهم وصل کنیم. سر ′❶ سلف اول به سر ′❷ سلف دوم وصل شده است. برای تعیین ضریب القاء اتصال سری بین سرهای ❶ و ❷ ، از KCL مشاهده میکنیم که :

$$i=i_1=-i_2$$

KVL لازم میدارد که $v=v_1-v_2$. ازآنجائیکه $v_1=\frac{d\Phi_1}{dt}$ و $v_2=\frac{d\Phi_2}{dt}$ است ، با قرار دادن $v=\frac{d\Phi}{dt}$ بدست خواهیم آورد :

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{d\Phi_1}{dt}-\frac{d\Phi_2}{dt}$$

مجدداً فرض میکنیم که شارهای اولیه برابر صفر باشند. با انتگرال گیری بدست می‌آید :

$$\Phi=\Phi_1-\Phi_2=2i_1+i_2=i$$

بنابراین ضریب القاء اتصال سری در شکل (۵-۱ ب) چنین است :

$$L=\frac{\Phi}{i}=1 \quad \text{هانری}$$

«در نتیجه» ، ضریب القاء اتصال سری دو سلف تزویج شده بسادگی با قاعدهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\boxed{L=L_{11}+L_{22}\pm 2\,|\,M\,|}$$

که در آن ، علامت مثبت وقتی برقرار است که شارهای ایجاد شده در اثر جریان مشترک درهرسلف جهات یکسان داشته باشند ، و علامت منفی وقتی برقرار است که این شارها جهات مخالف داشته باشند.

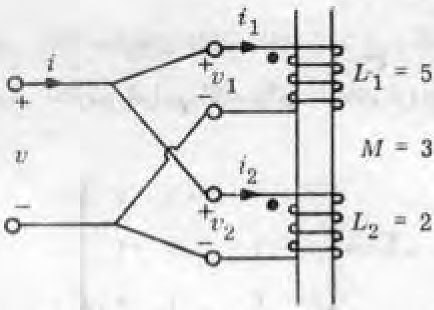
مثال ۳- درشکل (۶-۱) ، دو سلف را بطورموازی وصل میکنیم. برای تعیین ضریب القاء اتصال موازی ساده‌تر است که ضریب القاء معکوس سلفهای تزویج شده را بدست آوریم تا ضریب القاء معکوس اتصال موازی را از روی آنها محاسبه کنیم. ضرایب القاء معکوس ، از معادلهٔ (۱۴-۱) ، چنین هستند :

$$\Gamma_{11}=\frac{2}{\det\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}}=2 \qquad \Gamma_{22}=\frac{0}{\det\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}}=0$$

ضریب القاء متقابل معکوس با Γ_{12} نشان داده میشود و مقدار آن چنین است :

$$\Gamma_{12}=\frac{-3}{\det\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}}=-3$$

معادلات جریان و شار چنین هستند :



شکل ۶-۱- مثال ۳ : اتصال موازی سلفهای تزویج شده

$$i_1=\Gamma_{11}\Phi_1+\Gamma_{12}\Phi_2=2\Phi_1-3\Phi_2$$

$$i_2=\Gamma_{12}\Phi_1+\Gamma_{22}\Phi_2=-3\Phi_1+5\Phi_2$$

با مراجعه به شکل (۶-۱) مشاهده میکنیم که KVL لازم میدارد :

$$v_1(t)=v_2(t) \qquad \text{برای همه } t$$

اگرفرض کنیم : $i_1(0)=\Phi_1(0)=0$ و $i_2(0)=\Phi_2(0)=0$ باشد ، باانتگرال گیری ولتاژها بدست می‌آید :

$$\Phi_1(t)=\Phi_2(t) \qquad \text{برای همه } t$$

اگر مقدار مشترک Φ_1 و Φ_2 را Φ بنامیم ، از روابط میان شار و جریان داریم :

$$i=i_1+i_2=-\Phi_1+2\Phi_2=\Phi$$

بنابراین،ضریب القاء اتصال موازی شکل (۶-۱) چنین است:

$$L=\frac{\Phi}{i}=1 \qquad \text{هانری}$$

«درنتیجه» ، ضریب القاء معکوس اتصال موازی‌دو سلف تزویج شده‌باقاعده زیر داده میشود :

$$\boxed{\Gamma=\Gamma_{11}+\Gamma_{22}\pm 2\mid\Gamma_{12}\mid}$$

که در آن علامت مثبت وقتی برقرار است که شارهای بوجود آمده از جریان هرسلف (ناشی از ولتاژ مشترک v) جهت‌های مخالف داشته باشند ، و علامت منفی وقتی برقرار است که این شارها جهت‌های یکسان داشته باشند.

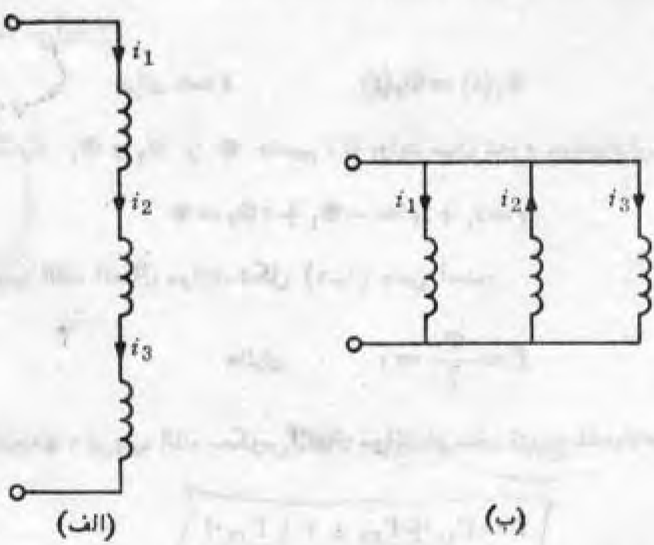
تمرین - ضرایب القاء مدارهای نشان داده شده در شکلهای (۷-۱ الف) و (۷-۱ ب) را محاسبه کنید. ماتریس ضرایب القاء برای سلفهای تزویج شده با سه سیم‌پیچی چنین است :

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

۵-۱- مدار تطبیق شده مضاعف

یک‌مدار بسیار مفید که‌در سیستمهای ارتباطی بکار میرود مدارتطبیق شدهٔ مضاعف[1] شکل (۸-۱) میباشد. ما تجزیه و تحلیل ساده شده‌ای از این مدار را بیان خواهیم کرد تا طرز بکار بردن تجزیه و تحلیل گره در یک مدار با سلفهای تزویج شده را نشان دهیم و همچنین مفهومهای حالت دائمی فصل هفتم را مرور کنیم.

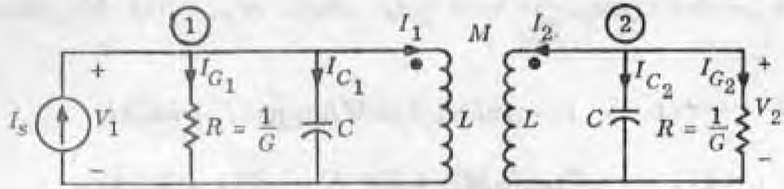
دو مدار تشدید موازی بطور مغناطیسی تزویج شده‌اند. برای سادگی فرض میکنیم



(الف) (ب)

شکل ۷-۱- اتصالهای سری و موازی سلفهای تزویج شده با سه سیم‌پیچی

1- Double - tuned Circuit



شکل ۸-۱- مدار تطبیق شده مضاعف

که دومدارتشدید همانند باشند. ماتریس ضرایب‌القاء سلفهای تزویج‌شده بصورت زیر داده شده است :

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} L & M \\ M & L \end{bmatrix} = L\begin{bmatrix} ۱ & k \\ k & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۱-۱۷)$$

که در آن k ضریب تزویج ، و M مثبت است (داده‌های شکل (۸-۱) را ببینید).
درتجزیه و تحلیل گره ساده‌تر است که از ماتریس ضرایب‌القاء معکوس استفاده شود :

$$\Gamma = \mathbf{L}^{-۱} = \frac{۱}{(۱-k^۲)L}\begin{bmatrix} ۱ & -k \\ -k & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۱-۱۸)$$

اگر فرض کنیم ورودی یک سینوسی باشد :

$$i_s(t) = \mathrm{Re}(I_s e^{j\omega t})$$

دراین صورت ، خروجی حالت دائمی سینوسی ، یک ولتاژ $v_۲(t)$ بصورت زیر خواهد بود :

$$v_۲(t) = \mathrm{Re}(V_۲ e^{j\omega t})$$

میخواهیم برای تمام ω ، پاسخ حالت دائمی سینوسی را تعیین کنیم ، یعنی میخواهیم تابع شبکه را تعیین نمائیم :

$$H(j\omega) = \frac{V_۲}{I_s} \qquad (۱-۱۹)$$

در تجزیه وتحلیل‌حالت‌دائمی ، ما از نمایش فازوری برای تمام جریانها و ولتاژهای شاخه‌ها استفاده می کنیم. از معادلات (۵-۱) ، (۶-۱) و (۹-۱) ، رابطه میان فازورهای

جریان و فازورهای ولتاژ ، برای سلفهای تزویج شده با دو سیم‌پیچی ، بسادگی چنین است :

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j\omega L I_1 + j\omega L k I_2 \qquad \text{(۱−۲۰ الف)}$$

$$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = j\omega L k I_1 + j\omega L I_2 \qquad \text{(۱−۲۰ ب)}$$

که در آن V_1 و V_2 فازورهای ولتاژ در دو سر دو مدار تشدید میباشند ، و I_1 و I_2 فازورهای جریان داخل سلفها هستند. با استفاده از معادلات (۱-۱۵ ب) و (۱-۱۸) ، برحسب ضرایب القاء معکوس بدست می‌آوریم :

(۱−۲۱ الف)

$$I_1 = \frac{1}{j\omega}\,\Gamma_{11} V_1 + \frac{1}{j\omega}\,\Gamma_{12} V_2 = \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\,(V_1 - kV_2)$$

(۱−۲۱ ب)

$$I_2 = \frac{1}{j\omega}\,\Gamma_{12} V_1 + \frac{1}{j\omega}\,\Gamma_{22} V_2 = \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\,(-kV_1 + V_2)$$

در تجزیه و تحلیل گره در حالت دائمی ، دو فازور ولتاژ گره V_1 و V_2 را بعنوان متغیرهای شبکه انتخاب میکنیم و معادلات KCL را برحسب فازورهای جریان در دو گره ❶ و ❷ مینویسیم. در گره ❶ داریم :

$$I_{G_1} + I_{C_1} + I_1 = I_s$$

که در آن :

$$I_{G_1} = GV_1 \qquad I_{C_1} = j\omega C V_1$$

و I_1 توسط معادلهٔ (۱-۲۱ الف) داده شده است. برحسب فازورهای ولتاژ داریم :

$$\left[G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right] V_1 - \frac{k}{j\omega L(1-k^2)}\,V_2 = I_s \qquad \text{(۱−۲۲)}$$

و در گره ❷ داریم :

$$I_2 + I_{C_2} + I_{G_2} = $$

که در آن :

$$I_{G_۲} = j\omega C V_۲ \qquad I_{G_۲} = G V_۲$$

و $I_۲$ توسط معادلهٔ (۱-۲۱ ب) داده شده است. برحسب فازورهای ولتاژ داریم :

$$-\frac{k}{j\omega L(۱-k^۲)} V_۱ + \left[G + j\omega C + \frac{۱}{j\omega L(۱-k^۲)} \right] V_۲ = o \qquad (۱-۲۳)$$

بنابراین دو معادلهٔ خطی جبری با ضرایب مختلط (۱-۲۲) و (۱-۲۳) را برحسب دو مجهول $V_۱$ و $V_۲$ داریم. فازور ولتاژخروجی $V_۲$ را میتوان ، بلافاصله ، طبق قاعده کرامر ، برحسب فازور جریان ورودی I_s حل نمود. باوجود این ، بعلت متقارن بودن مدار و معادلات ، روش ساده‌تری برای حل این معادلات وجود دارد . دو متغیر جدید را چنین تعریف می‌کنیم :

$$۲V_+ = V_۱ + V_۲ \qquad ۲V_- = V_۱ - V_۲ \qquad (۱-۲٤)$$

یا :

$$V_۱ = V_+ + V_- \qquad V_۲ = V_+ - V_- \qquad (۱-۲۵)$$

با جمع کردن معادلات (۱-۲۲) و (۱-۲۳) بدست می‌آید :

$$\left[G + j\omega C + \frac{۱}{j\omega L(۱+k)} \right] V_+ = \frac{I_s}{۲} \qquad (۱-۲٦)$$

باتفریق کردن (۱-۲۳) از (۱-۲۲) بدست می‌آید :

$$\left[G + j\omega C + \frac{۱}{j\omega L(۱-k)} \right] V_- = \frac{I_s}{۲} \qquad (۱-۲۷)$$

معادلات (۱-۲٦) و (۱-۲۷) درست بهمان صورت معادلات دو مدار تشدید RLC موازی تنها ، بترتیب با ضرایب القاء $L(۱+k)$ و $L(۱-k)$ ، میباشند. از آنجا که فازور ولتاژ خروجی $V_۲ = V_+ - V_-$ است ، میتوان‌آنرا بعنوان اختلاف دو فازور خروجی دو مدار تشدید مختلف که تزویج نشده‌اند درنظر گرفت.

اکنون ، برای ساده کردن نتایج ، فرکانس‌های تشدید و ضرایب کیفیت دو مدار تشدید تنها را معرفی می‌کنیم. گیریم :

$$\omega_+^{2}=\frac{1}{LC(1+k)} \qquad \omega_-^{2}=\frac{1}{LC(1-k)} \tag{۱-۲۸}$$

که در آن $\omega_+ > \omega_-$ است. گیریم :

$$Q_+=\omega_+CR \qquad Q_-=\omega_-CR \tag{۱-۲۹}$$

دراین صورت ، از (۱-۲۶) و (۱-۲۷) نتیجه میشود که :

$$V_+=\frac{1}{2} I_s R \frac{1}{1+jQ_+\left(\frac{\omega}{\omega_+}-\frac{\omega_+}{\omega}\right)} \tag{۱-۳۰}$$

و :

$$V_-=\frac{1}{2} I_s R \frac{1}{1+jQ_-\left(\frac{\omega}{\omega_-}-\frac{\omega_-}{\omega}\right)} \tag{۱-۳۱}$$

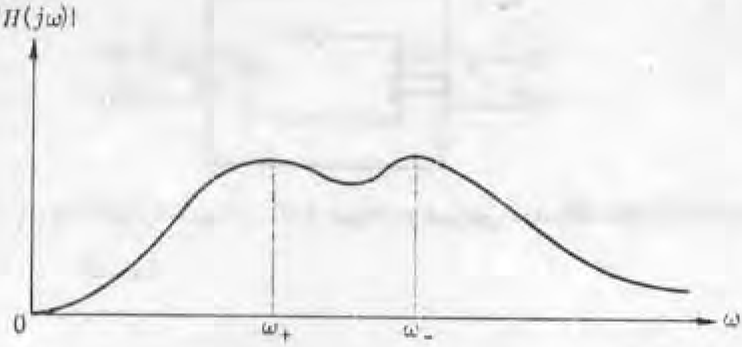
بنابراین ، فازور ولتاژ خروجی چنین است :

$$V_2=\frac{1}{2} I_s R\left[\frac{1}{1+jQ_+\left(\frac{\omega}{\omega_+}-\frac{\omega_+}{\omega}\right)}-\frac{1}{1+jQ_-\left(\frac{\omega}{\omega_-}-\frac{\omega_-}{\omega}\right)}\right] \tag{۱-۳۲}$$

و تابع شبکه چنین‌است :

$$H(j\omega)=\frac{V_2}{I_s}=\frac{1}{2} R\left[\frac{1}{1+jQ_+\left(\frac{\omega}{\omega_+}-\frac{\omega_+}{\omega}\right)}-\frac{1}{1+jQ_-\left(\frac{\omega}{\omega_-}-\frac{\omega_-}{\omega}\right)}\right] \tag{۱-۳۳}$$

اگر ضرایب کیفیت Q_+ و Q_- خیلی بزرگتر از واحد بوده و ضریب تزویج کوچک باشد ، تابع شبکه داده شده در معادلهٔ(۱-۳۳) را میتوان بازهم ساده‌تر نمود. معهذا، برای بدست آوردن فرمولهای ساده شده اقدامی نخواهیم کرد. تنها میخواهیم خاطرنشان کنیم که مدار تطبیق شده مضاعف میتواند پهنای باند عریض‌تری از مدار تشدیدی که در



شکل ۹-۱- منحنی اندازه نوعی یک مدار تطبیق شده مضاعف

فصل قبل بررسی کردیم ایجاد نماید. منحنی اندازه نوعی $|H(j\omega)|$ درشکل (۹-۱) نشان‌داده شده است. نوکهای منحنی تقریباً متناظر با ω_+ و ω_- ، دو مدار RLC تشدید تنها ، که در معادلهٔ (۲۸-۱) تعریف شدند ، میباشند.

۲- ترانسفورماتورهای ایده‌آل

ترانسفورماتور ایده‌آل نمایش ایده‌آلی ترانسفورماتورهای فیزیکی است که دربازار موجود است. با توجه به چنین ترانسفورماتورهای فیزیکی ، ترانسفورماتورایده‌آل با سه فرض ایده‌آل سازی زیر مشخص میشود :

(۱) ترانسفورماتور ایده‌آل انرژی تلف نمیکند.

(۲) دارای هیچگونه شارنشتی[1] نیست ، یعنی ضریب تزویج برابر واحد است.

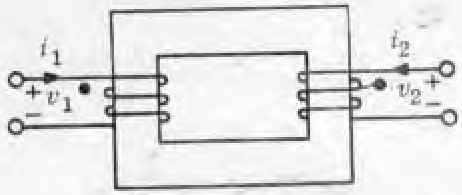
(۳) ضریب خود القاء هرسیم‌پیچی بینهایت است.

ترانسفورماتور ایده‌آل مدل بسیارمفیدی ازنظرمحاسبات مدارمیباشد چون با وصل کردن چند عنصر اضافی (R , L , C) به سرهای آن میتوان با دقت مناسبی رفتار سرهای ترانسفورماتورفیزیکی را نمایش داد.

۲-۱- ترانسفورماتور ایده‌آل با دو سیم‌پیچی

اکنون بطورحسی‌نشان میدهیم که چگونه از پیچیدن دو سیم‌پیچی برروی یک‌هسته مغناطیسی ، مطابق شکل (۲-۱) ، و با بینهایت قراردادن ضریب نفوذ مغناطیسی ، یک ترانسفورماتور ایده‌آل بدست می‌آید. فرض میکنیم که سیم‌پیچی‌هادارای اتلاف و ظرفیت

1- Leakage



شکل ۱-۲- یک ترانسفورماتور که از پیچیدن دو سیم‌پیچی روی یک هسته مشترک بدست آمده است .

پراکنده[1] نباشند. برای ساده کردن بررسی‌های بعدی ، جهات قرار دادی برای جریانها را طوری اختیار میکنیم که ضریب القاء متقابل مثبت باشد. اگر ضریب نفوذ مغناطیسی هسته بینهایت باشد ، دراین صورت تمام میدان مغناطیسی در هسته محبوس خواهد بود وهرخط القاء مغناطیسی که‌ازیک‌حلقهٔ سیم‌پیچی ۱ بگذرد ، از یکایک حلقه‌های سیم‌پیچی ۲ خواهد گذشت. بنابراین ، اگر Φ شارگذرنده از یک سیم‌پیچی با یک حلقه که در محلی دلخواه روی هسته قرار دارد باشد ، و n_1 و n_2 بترتیب تعداد دورهای سیم‌پیچی‌های ۱ و ۲ باشند ، دراین صورت شار کـل Φ_1 و Φ_2 که بترتیب ، از سیم‌پیچی‌های ۱ و ۲ میگذرد چنین است:

$$\Phi_1 = n_1\Phi \quad \text{و} \quad \Phi_2 = n_2\Phi$$

چون $v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}$ و $v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}$ است ، برای تمام زمانهای t وتمام‌ولتاژهای v_1 و v_2 داریم :

$$\boxed{\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{n_1}{n_2}} \qquad (۲-۱)$$

اکنون به‌محاسبهٔ Φ برحسب «نیروی محرکه مغناطیسی[2] (mmf) و رلوکتانس مغناطیسی»[3] $\mathcal{R}$ توجه کنید. مشابه‌قانون اهم برای یک مقاومت‌خطی ، رلوکتانس $\mathcal{R}$ ،

۱- Stray Capacitance ۲- Magnetomotive force

۳- Magnetic reluctance

نیروی محرکه مغناطیسی و شار Φ را با رابطه زیر بهم ارتباط میدهد :

$$\mathrm{mmf} = \mathcal{R}\Phi$$

با توجه به فرض ما در مورد انتخاب جهات قراردادی برای جریانهای i_1 و i_2 ، mmf با $n_1 i_1 + n_2 i_2$ برابر است ، و بنابراین :

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = \mathcal{R}\Phi$$

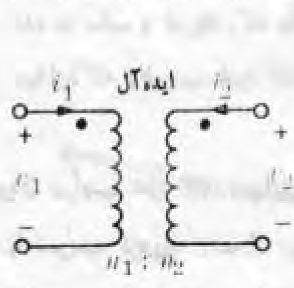
اکنون اگر نفوذ پذیری مغناطیسی بینهایت شود ، $\mathcal{R}$ صفر میگردد ، چون رلوکتانس با μ تناسب معکوس دارد. واضح است که :

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$$

یا ، برای تمام t و تمام جریانهای i_1 و i_2 :

$$\boxed{\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{n_2}{n_1}} \qquad (۲-۲)$$

معادلات (۲-۱) و (۲-۲) بعنوان معادلات «تعریف کنندهٔ» دوسر ترانسفورماتور ایده‌آل انتخاب می‌شوند. بنابراین ، هرموقع که اصطلاح **ترانسفورماتور ایده‌آل با دو سیم‌پیچی** را بکار میبریم ، منظور ما یک دستگاه دو قطبی خواهد بود که معادلات ولتاژ و جریان آن (۲-۱) و (۲-۲) میباشند. بخصوص ، به علامت منفی در (۲-۲) توجه کنید. در دیاگرام های مداری ، ترانسفورماتورهای ایده‌آل بامدار نشان داده شده در شکل (۲-۲) نمایش داده میشود.



شکل ۲-۲- ترانسفورماتور ایده‌آل ، مطابق تعریف ،

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{و} \quad \frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}$$

تبصره ۱- چون معادلات (۱-۲) و (۲-۲) را میتوان بصورت «توابع خطی» که v_1 را برحسب v_2 و i_1 را برحسب i_2 بیان میکنند تعبیر نمود و چون ضرایب n_1 و n_2 به زمان بستگی ندارند ، از این جهت ترانسفورماتور ایده‌آل یک عنصر مدار «خطی تغییر ناپذیر بازمان» میباشد.

تبصره ۲- از (۱-۲) و (۲-۲) ، برای تمام جریانها و ولتاژها و برای تمام t داریم :

$$v_1(t)i_1(t)+v_2(t)i_2(t)=0 \qquad (۲-۳)$$

بنابراین ، در تمام لحظات ، مجموع توانهای ورودی از هرقطب برابر صفر است، هیچ انرژی ذخیره نمیشود ، و هیچ انرژی تلف نمیگردد. همانقدر توان که از یک جفت سر وارد ترانسفورماتور میشود ، از جفت سر دیگر خارج میگردد . این حقایق ، اغلب با گفتن اینکه ترانسفورماتور ایده‌آل یک عنصر « بی اتلاف و بدون ذخیره انرژی » است ، و بنابراین بدون حافظه میباشد ، مشخص میشوند. توجه کنید که خازن‌ها و سلفها و جفت‌هایی از سلفها با تزویج متقابل ، (حتی وقتیکه $k=1$ است) نیز عناصر بی‌اتلاف میباشند ، ولی ، انرژی ذخیره «میکنند».

تبصره ۳- از (۱-۲) ، ولتاژ v_1 دوسر سیم‌پیچی ۱ به i_1 یا به i_2 بستگی ندارد وتنها به v_2 بستگی دارد. بطریق مشابه ، از (۲-۲) ، جریان i_1 تنها به i_2 بستگی دارد، و از v_1 و v_2 مستقل است. بخصوص ، اگر میخواستیم ضریب خود القاء سلف ۱ را اندازه‌گیری کنیم(پس سلف ۲ مدار باز بوده،بنابراین $i_2=0$ است) ، آنگاه معادلهٔ(۲-۲) لازم میدارد که‌ولتاژ v_1 اعمال شده به سلف ۱ هرچقدر که باشد ، بطور متحد $i_1(t)=0$ برقرار باشد. این حقیقت لازم میدارد که «ضریب خود القاء هرسلف یک ترانسفورماتور ایده‌آل بینهایت باشد».

تبصره ۴- علاوه‌برداراا بودن ضرایب خود القاء بینهایت،یک ترانسفورماتورایده‌آل با دو سیم‌پیچی ، یک جفت سلف با ضریب تزویج $k=1$ میباشد . انرژی ذخیره شده برای سلفهای تزویج شده را میتوان بصورت زیر نوشت : (معادلهٔ (۱-۷) را ببینید) :

$$\mathcal{E}(i_1\ ,\ i_2)=\frac{1}{2}\left(L_{11}i_1^2+2\sqrt{L_{11}L_{22}}\,i_1i_2+L_{22}i_2^2\right)$$

$$+\left(\frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}-1\right)\sqrt{L_{11}L_{22}}\,i_1i_2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{L_{11}}\ i_1+\sqrt{L_{22}}\ i_2\right)^2+(k-1)\sqrt{L_{11}L_{22}}\,i_1i_2$$

در نتیجهٔ معادله (۲-۲) ، برای یک ترانسفورماتور ایده‌آل ، $\mathcal{E}$ متحد با صفر است. بنابراین:

$$k=1 \qquad (۲-۴)$$

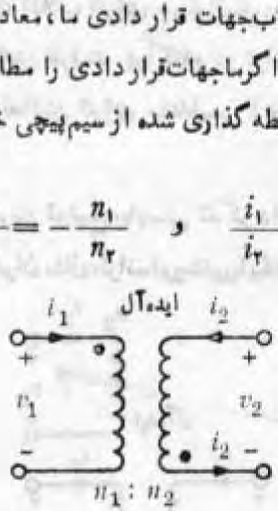
و :

$$\frac{i_1}{i_2}=-\frac{\sqrt{L_{22}}}{\sqrt{L_{11}}}$$

توجه کنید که معادلهٔ آخر با (۲-۲) سازگار است چون L_{11} و L_{22} بترتیب با n_1^2 و n_2^2 متناسب هستند.

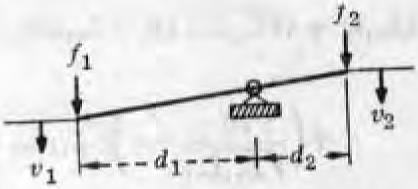
تبصره ۵- در نتیجهٔ انتخاب‌جهات قرار دادی ما، معادلات (۲-۱) و (۲-۲) دارای علامتهای‌نشان‌داده شده هستند. اگرما جهات‌قرار دادی را مطابق شکل (۲-۳) انتخاب کنیم (توجه کنید که i_2 از طرف سرنقطه گذاری شده از سیم‌پیچی خارج میشود) ، معادلات‌چنین میشوند :

$$\frac{v_1}{v_2}=-\frac{n_1}{n_2} \quad \text{و} \quad \frac{i_1}{i_2}=\frac{n_2}{n_1}$$



شکل ۳-۲- ترانسفورماتورایده‌آل ، با توجه به‌محل نقاط،

$$\frac{v_1}{v_2}=-\frac{n_1}{n_2} \quad \text{و} \quad \frac{i_1}{i_2}=\frac{n_2}{n_1}$$



شکل ۴-۲- تشابه مکانیکی یک ترانسفورماتور ایده‌آل با

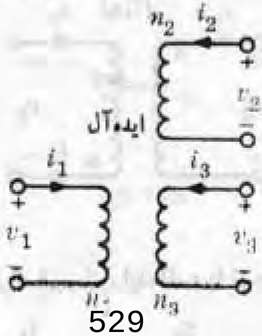
$$\frac{v_1}{v_2}=-\frac{d_1}{d_2} \quad \text{و} \quad \frac{f_1}{f_2}=\frac{d_2}{d_1}$$

تبصره ۶- ترانسفورماتور ایده‌آل مشابه الکتریکی یک اهرم مکانیکی است که از یک لولای بدون مالش و یک میله بی‌جرم و فوق‌العاده سخت تشکیل شده باشد. (شکل (۴-۲) را ببینید). واضح است که با چنین فرضهایی، روابط میان نیروهای f و سرعتهای v چنین است:

$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)}=\frac{d_2}{d_1} \qquad \frac{v_1(t)}{v_2(t)}=-\frac{d_1}{d_2}$$

نداشتن مالش متناظر با نبودن اتلاف انرژی در ترانسفورماتور ایده‌آل میباشد. فوق‌العاده سخت بودن میله با فرض نداشتن ظرفیت پراکنده در ترانسفورماتور ایده‌آل متناظر است، و بی‌جرم بودن میله متناظر با نداشتن انرژی مغناطیسی ذخیره شده در ترانسفورماتور ایده‌آل میباشد.

تبصره ۷- بعنوان آخرین توضیح، بایستی تذکر داد که میتوان ترانسفورماتورهایی با چندسیم پیچی درنظر گرفت. بعنوان مثال، ترانسفورماتوربا یک هسته وسه سیم پیچی شکل (۵-۲)



شکل ۵-۲- یک ترانسفورماتور ایده‌آل با سه سیم‌پیچی

را درنظر بگیرید. معادلات آن چنین هستند :

$$\frac{v_1}{n_1}=\frac{v_2}{n_2}=\frac{v_3}{n_3} \qquad n_1 i_1+n_2 i_2+n_3 i_3=0$$

این ترانسفورماتور ایده‌آل با یک هسته و سه سیم‌پیچی ، بازهم یک عنصر «خطی تغییر ناپذیر با زمان ، و بی‌اتلاف و بدون ذخیره انرژی است».

۲-۲- خواص تغییر دهندگی امپدانس

۱- یک‌بار مقاومتی[1] بامقاومت R_L که به‌سیم‌پیچی ثانویه [2] یک ترانسفورماتور ایده‌آل ، مطابق شکل (۶-۲) ، متصل است را درنظر بگیرید . مقاومت ورودی چنین است :

$$R_{in}=\frac{v_1}{i_1}=\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)v_2}{-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)i_2}=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\left(\frac{v_2}{-i_2}\right)$$

اما :

$$v_2=-R_L i_2$$

بنابراین :

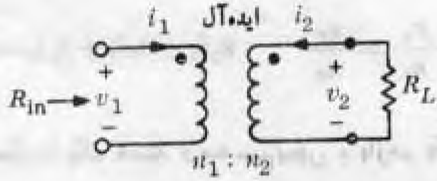
$$R_{in}=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_L \qquad (۲-۵)$$

۲- اکنون رفتارحالت دائمی سینوسی مدارخطی تغییرناپذیر با زمان‌نشان داده شده در شکل (۷-۲) را درنظر می گیریم . بار ، یک امپدانس یک قطبی $Z_L(j\omega)$ است،

$$Z_{in}(j\omega)=\frac{V_1}{I_1}=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\left(\frac{V_2}{-I_2}\right)=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Z_L(j\omega) \qquad (۲-۶)$$

معادلات (۵-۲) و (۶-۲) تعبیرجالبی دارند. بدین معنی، که ترانسفورماتورهای

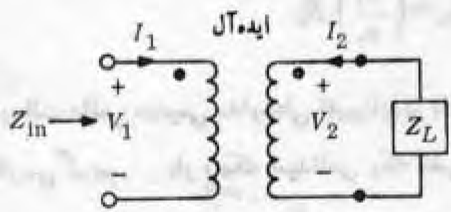
۱- Resistive Load ۲- Secondary



شکل ۶-۲- مقاومت ورودی یک ترانسفورماتور ایده‌آل ختم شده با :

$$R_{in}=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_L$$

ایده‌آل امپدانس ظاهری[1] یک بار را تغییر میدهند و میتوان آنها رابرای تطبیق امپدانس مدارهای با امپدانس متفاوت بکار برد. بعنوان مثال، امپدانس ورودی یک بلندگو معمولاً در حدود ۸ اهم است که برای اتصال مستقیم به بسیاری از تقویت کننده‌هایی که با لامپ‌خلاء ویاترانزیستور کار میکنند، و امپدانس‌خروجی مثلاً ۸۰۰ اهم دارند، مقدار بسیارکوچکی است. اگر یک ترانسفورماتور بین خروجی تقویت کنندهٔ قدرت و ورودی بلندگو قرار داده شود، و نسبت دورها چنان انتخاب گردد که تفاوت امپدانس بین‌خروجی تقویت کننده و ورودی بلندگو را ترمیم کند، تقویت کننده امپدانس مناسبی برای بکار



شکل ۷-۲- امپدانس ورودی یک ترانسفورماتور ایده‌آل ختم شده با

$$Z_{in}=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Z_L$$

۱- Apparent impedance

انداختن بلندگو خواهد داشت. نسبت دورهای لازم برابر $\frac{n_1}{n_2}=\sqrt{\frac{800}{8}}=10$
میباشد.

تمرین ۱- نشان دهید که اگر در شکل (۲-۷) بجای سربالایی ثانویه، سرپائینی آن «نقطه گذاری» شده باشد، روابط (۲-۵) و (۲-۶) بازهم معتبر خواهند بود.

تمرین ۲- مدار شکل (۲-۸) را درنظر بگیرید، که در آن یک ترانسفورماتور ایده‌آل به‌دو سلف خطی تغییرناپذیر بازمان باضرایب خود القاء L_a و L_b، مطابق‌شکل نشان داده شده، متصل میباشد. ثابت کنید که این مدار دو قطبی معادل یک جفت سلف تزویج شده با ماتریس ضرایب القاء زیر میباشد:

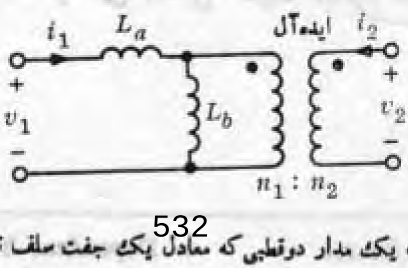
$$\begin{bmatrix} L_a+L_b & \frac{n_2}{n_1}L_b \\ \frac{n_2}{n_1}L_b & \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 L_b \end{bmatrix}$$

تمرین فوق این حقیقت مهم را نشان میدهد که سلفهای تزویج شده را میتوان با سلفهای تزویج نشده و یک ترانسفورماتور ایده‌آل جایگزین کرد.

۳- منابع کنترل شده

۳-۱- توصیف چهار نوع از منابع کنترل شده

تا اینجا ما تنها با منابع ولتاژ ثابسته ومنابع‌جریان ثابسته مواجه بوده‌ایم. منابع



شکل ۲-۸- یک مدار دوقطبی که معادل یک جفت سلف تزویج شده است

نابسته،ورودی های مدار را تشکیل میدهند. در این بخش ،نوع دیگری از منابع را که «منبع کنترل شده»[۱] و یا «منبع وابسته»[۲] نامیده میشوند معرفی خواهیم کرد. یک منبع کنترل شده برای ساختن مدل عناصر الکترونیکی، مانند ترانزیستور، ضروری است. بموجب تعریف، یک **منبع کنترل شده** عنصری است که دو شاخه دارد، که در آن شاخهٔ ۲ یک منبع ولتاژ و یا یک منبع جریان است، و شاخه ۱ یک مدار باز و یا یک مدار اتصال کوتاه میباشد. شکل موج منبع در شاخهٔ ۲ تابعی از ولتاژ دو سر مدار باز (در شاخهٔ ۱) و یا تابعی از جریان گذرنده از مدار اتصال کوتاه (در شاخه ۱) میباشد. بعبارت دیگر، منبع قرار گرفته در شاخهٔ ۲ بوسیلهٔ ولتاژ و یا جریان شاخه دیگر، یعنی شاخه ۱، «کنترل میشود». البته چهار امکان وجود دارد که در شکل (۱-۳) نشان داده شده‌اند، که در آن، علامتهای لوزی شکل منابع «کنترل شده» را نمایش میدهند. در شکلهای (۱-۳ الف) و (۱-۳ ب) منابع شاخهٔ ۲ منابع جریان میباشند که جریان آنها بترتیب به جریان شاخهٔ ۱، که مدار اتصال کوتاه است، و ولتاژ شاخهٔ ۱، که مدار باز است بستگی دارد. این منابع کنترل شده، بترتیب «منبع جریان کنترل شده با جریان» و «منبع جریان کنترل شده با ولتاژ» نامیده میشوند. در شکلهای (۱-۳ پ) و (۱-۳ ت) منابع شاخهٔ ۲ منابع ولتاژ میباشند. ولتاژ آنها بترتیب به ولتاژ شاخهٔ ۱، که مدار باز است، و به جریان شاخه ۱، که مدار اتصال کوتاه است، بستگی دارد. این منابع کنترل شده بترتیب «منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ»، و «منبع ولتاژ کنترل شده با جریان» نامیده میشوند.

این چهار نوع منبع کنترل شده بوسیلهٔ معادلاتی که در شکل نشان داده شده‌اند مشخص میشوند. چهار ضریب تناسب α، g_m، μ و r_m در شکل (۱-۳) بترتیب نشان دهندهٔ نسبت جریان، رسانایی انتقالی، نسبت ولتاژ و مقاومت انتقالی میباشند. بنابراین داریم:

۱- Controlled Source ۲- Dependent Source

منبع جریان کنترل شده با جریان : $\alpha = \dfrac{i_2}{i_1}$

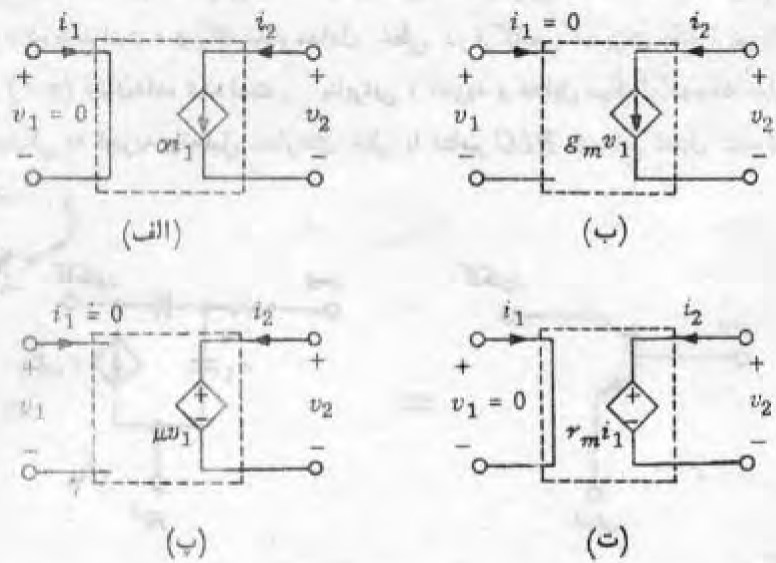
منبع جریان کنترل شده با ولتاژ : $g_m = \dfrac{i_2}{v_1}$

(۱ − ۳)

منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ : $\mu = \dfrac{v_2}{v_1}$

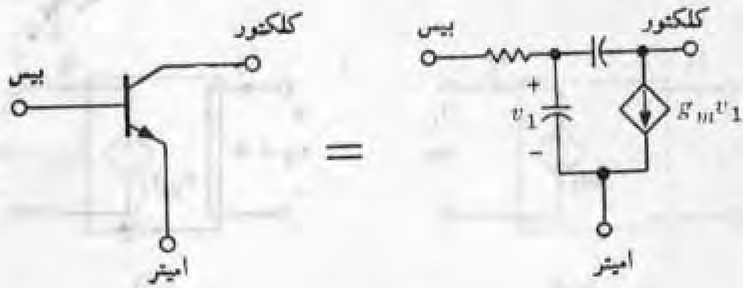
منبع ولتاژ کنترل شده با جریان : $r_m = \dfrac{v_2}{i_1}$

این منابع کنترل شده ، که با معادلات (۱-۳) مشخص شده‌اند و در آنها α ،



شکل ۱-۳- چهار نوع منبع کنترل شده . چون ضرایب α ، g_m ، μ و r_m ثابت هستند این منابع کنترل شده عناصر خطی‌تغییر ناپذیر با زمان میباشند. (الف) $v_1=0$ و $i_2=\alpha i_1$ ، منبع جریان کنترل شده با جریان (ب) $i_1=0$ و $i_2=g_m v_1$ ، منبع جریان کنترل شده باولتاژ ، (پ) $i_1=0$ و $v_2=\mu v_1$ ، منبع ولتاژ کنترل شده باولتاژ ، (ت) $v_1=0$ ، $v_2=r_m i_1$ ، منبع ولتاژ کنترل شده با جریان.

g_m ، μ و r_m مقادیر ثابت میباشند ، عناصر خطی تغییر ناپذیر با زمان هستند . یک منبع کنترل شده غیر خطی مشخصه‌ای مانند $i_2=f(i_1)$ دارد که در آن $f(\cdot)$ یک‌تابع غیر خطی‌است. یک منبع کنترل‌شده خطی‌تغییر پذیر بازمان مشخصه‌ای مانند $i_2=\alpha(t)i_1$ دارد که در آن $\alpha(\cdot)$ یک تابع داده شده از زمان است. منابع کنترل شده خطی تغییر پذیر با زمان برای نمایش دادن بعضی مدولاتورها[1] مفید میباشند . باوجود این ، برای سادگی ، تنها منابع کنترل شده خطی‌تغییر ناپذیر بازمان دراینجا بررسی خواهندشد. وسائل الکترونیکی مانند ترانزیستورها و لامپهای خلاء را میتوان ، وقتیکه بصورت خطی سیگنال کوچک کار کنند ، بابکار بردن مقاومتهای‌خطی ، خازنهای خطی و یک منبع کنترل شده خطی ، مانند آنچه در شکل (۳-۱) نشان داده شده است ، مدل سازی نمود. مدار معادل سیگنال کوچک نوعی یک ترانزیستور با امیتر زمین[2] شده در شکل (۳-۲) نشان داده شده است ، و یک مدار معادل خطی درفرکانس کم برای یک تریود[3] در شکل (۳-۳) نشان‌داده شده است. بنابراین ، تجزیه و تحلیل سیگنال کوچک مدارهای الکترونیکی به تجزیه وتحلیل مدارهای خطی با عناصر RLC و منابع کنترل شده تبدیل میشود.



شکل۲-۳- مدار معادل خطی سیگنال کوچک یک ترانزیستور با امیتر زمین شده که‌درآن از یک منبع جریان‌کنترل شده با ولتاژ استفاده شده است .

۱- Modulators ۲- Grounded Emitter

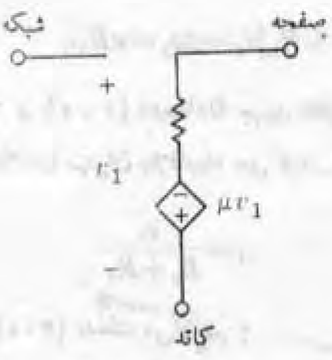
۳- Triode

تبصره - دلائل بکاربردن علائم مختلف برای منابع‌نابسته و وابسته چنین است:

۱- منابع نابسته نقش کاملا" متفاوتی از منابع وابسته ایفاء میکنند. منابع نابسته ورودیهای مدار هستند، و نمایش دهندهٔ مولدهای سیگنال میباشند. یعنی آنها تأثیر محیط خارج برروی مدار را نمایش میدهند. چون مشخصه‌های منابع نابسته خطوط موازی محور v یامحور i درصفحهٔ vi میباشند ازاینجهت آنها عناصر غیر خطی میباشند (معمولا" تغییر پذیر با زمان هستند). منابع وابسته برای مدل سازی پدیده‌هایی که در دستگاههای‌الکترونیکی‌رخ‌میدهد بکارمیروند. منابع وابسته تزویج میان یک متغیر مدار در شاخهٔ ۱ و یک متغیرمدار درشاخه ۲ را نمایش میدهند. منابع وابستهٔ نوعی درشکل (۱-۲) داده شده‌اند. منابعی که درشکل(۱-۲) نشان داده شده‌اند عناصر چهار سر«خطی» تغییر ناپذیر با زمان میباشند.

۲- مدارهای خطی ممکن است شامل منابع نابسته و منابع وابسته، هردو، باشند. معهذا منابع وابسته بایستی خطی باشند، درحالیکه منابع نابسته خطی نیستند.

۳- درقضایای‌شبکه‌های معادل‌تونن ونرتن(فصل شانزدهم)، منابع «وابسته» نقش کاملا" متفاوتی از منابع «نابسته» ایفا میکنند.



شکل ۳-۳- مدار معادل لامپ تریودکه درآن از یک منبع ولتاژکنترل شده با ولتاژ استفاده شده است.

۲-۳- مثالهایی از تجزیه و تحلیل مدار

در تجزیه و تحلیل مدار، هنگام نوشتن معادلات مدار، منابع کنترل شده را مانند منابع نابسته در نظرمیگیریم. این امر بوسیله دومثال زیرنشان داده خواهد شد.

مثال۱- مدار سادهٔ نشان‌داده شده درشکل (٤ - ۲) را درنظربگیرید. منبع کنترل شدهٔ این مدار یک منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ میباشد، که در آن ❶ ❶′ و ❷ ❷′ دوشاخهٔ آنرا نمایش میدهند، وچنین مشخص میشود:

$$v_2 = \mu v_1 \qquad (۳ - ۲)$$

گیریم که ورودی منبع نابستهٔ v_s وخروجی ولتاژ v_L دوسر مقاومت R_L باشد. چون دو مش وجود دارد، میتوان دو معادلهٔ مش را با جریانهای مش i_1 و i_2 بعنوان متغیرهای آنها نوشت. این دومعادله چنین هستند:

$$(R_s + R_1)i_1 = v_s \qquad (۳ - ۳)$$

$$(R_2 + R_L)i_2 = v_2 \qquad (۳ - ٤)$$

از آنجائیکه منبع کنترل شده با معادلهٔ (۲ - ۳) مشخص شده است، میتوان معادلهٔ(٤-۳) را بصورت زیر نوشت:

$$(R_2 + R_L)i_2 = \mu v_1 = \mu R_1 i_1 \qquad (۳ - ٥)$$

بنابراین، معادلات (۳ - ۳) و (٥ - ۳) دومعادلهٔ جبری خطی برحسب دوجریان مجهول i_1 و i_2 میباشند. این‌معادلات‌را میتوان بلافاصله حل کرد. از (۳ - ۳) داریم:

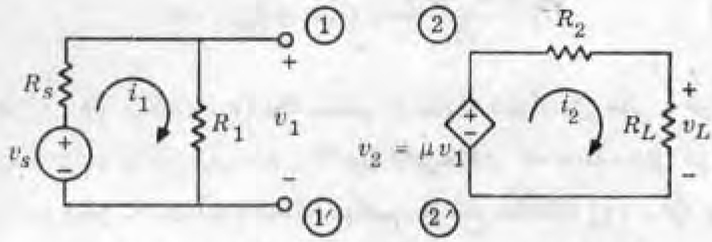
$$i_1 = \frac{v_s}{R_s + R_1} \qquad (۳ - ٦)$$

باجایگذاری (٦ - ۳) در (٥ - ۳) بدست می‌آوریم:

$$i_2 = \frac{\mu v_s R_1}{(R_s + R_1)(R_2 + R_L)}$$

بنابراین ولتاژ خروجی چنین است:

$$v_L = R_L i_2 = \frac{\mu v_s R_1 R_L}{(R_s + R_1)(R_2 + R_L)} \qquad (۳ - ۷)$$



شکل۴-۳ - مثال ۱ : یک مدار ساده با یک منبع کنترل شده

تبصره ۱- اگر ثابت μ بزرگ باشد و مقاومتها بطرز مناسبی انتخاب شده باشند، ولتاژ خروجی v_L میتواند از ولتاژ ورودی v_s بسیار بزرگترباشد. دراین حالت مدار یک تقویت کنندهٔ ولتاژ ساده را نمایش میدهد.

تبصره۲- مدارشکل(۴ - ۳) شامل دو مش میباشد که بیکدیگر متصل نیستند. منبع کنترل شده بعنوان عنصر تزویج کننده میان مشهای ۱ و ۲، ویا میان ورودی وخروجی، عمل میکند.

مثال۲- مدارشکل (۵ - ۳) را درنظربگیرید. منبع کنترل شده در مدار یک منبع جریان کنترل‌شده با ولتاژ میباشد، که در آن ❶ ❶′ و ❷ ❷′ دوشاخهٔ آنرا نمایش میدهند، و بوسیله رابطه زیر مشخص میشود :

$$i_2 = g_m v_1 \qquad (۳ - ۸)$$

میخواهیم معادلهٔ دیفرانسیلی که منبع جریان ورودی i_s وولتاژ v_1 را بهم مربوط میکند بدست‌آوریم . دراینجا از تجزیه و تحلیل گره استفاده میکنیم . گیریم v_1 و v_2 دو ولتاژ گره باشند. دومعادلهٔ گره چنین هستند :

$$G_1 v_1 + C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{d(v_1 - v_2)}{dt} = i_s \qquad (۳ - ۹)$$

$$C_2 \frac{d(v_2 - v_1)}{dt} + G_2 v_2 = -i_2 \qquad (۳ - ۱۰)$$

درمعادلهٔ (۱۰ - ۳) بجای جریان i_2 میتوان مطابق رابطهٔ (۸ - ۳)، $g_m v_1$ را قرارداد و بنابراین معادلهٔ (۱۰ - ۳) بدین‌صورت درمی‌آید :

$$C_۲\frac{d(v_۲-v_۱)}{dt}+G_۲v_۲+g_mv_۱=o \qquad (۳-۱۱)$$

معادلات (۹ - ۳) و (۱۱ - ۳) یک سیستم دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت برحسب $v_۱$ و $v_۲$ راتشکیل‌میدهند. اکنون ازاین‌حقیقت که جملهٔ مشتق در دو معادله یکسان است (بجز علامت آنها) استفاده میکنیم. از جمع معادلات (۱۱ - ۳) و (۹ - ۳) بدست می‌آوریم:

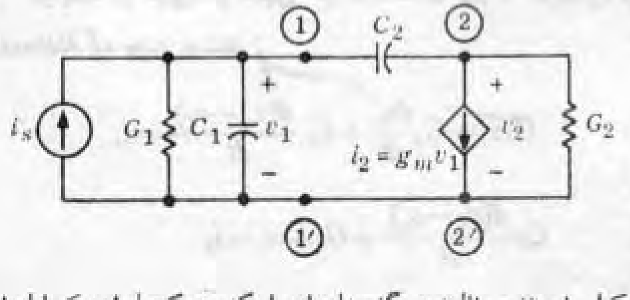
$$(G_۱+g_m)v_۱+C_۱\frac{dv_۱}{dt}-i_s=-G_۲v_۲ \qquad (۳-۱۲)$$

با مشتق گیری از (۱۲ - ۳) و جایگذاری $\frac{dv_۲}{dt}$ در (۹ - ۳)، معادله‌دیفرانسیل لازم‌را برحسب $v_۱$ بدست می‌آوریم. بنابراین:

$$\frac{d^۲v_۱}{dt^۲}+\left(\frac{G_۱+g_m+G_۲}{C_۱}+\frac{G_۱}{C_۱}+\frac{G_۲}{C_۲}\right)\frac{dv_۱}{dt}+\frac{G_۱G_۲}{C_۱G_۲}v_۱ \qquad (۳-۱۳)$$

$$=\frac{۱}{C_۱}\frac{di_s}{dt}+\frac{G_۲}{C_۱C_۲}i_s$$

شرط اولیه لازم‌را میتوان بآسانی از اطلاعات داده شده یعنی $v_۱(o)=V_۱$ و $v_۲(o)=V_۲$ بدست آورد. برای تعیین $\frac{dv_۱}{dt}(o)$ درمعادلهٔ (۱۲ - ۳)، $t=o$ قرار میدهیم و بدست می‌آوریم:



شکل ۵-۳- مثال۲ : یک مدارساده‌با یک منبع کنترل شده که‌با استفاده از روش تجزیه و تحلیل گره بررسی شده است.

$$\frac{dv_1}{dt}(o) = \frac{1}{C_1}\left[i_s(o) - G_2V_2 - (g_m+G_1)V_1\right]$$

با این دو شرط اولیه، و برای هر i_s داده شده ، محاسبهٔ جواب معادلهٔ (۳ - ۱۳) وهمچنین جایگزین نمودن نتیجه آن درمعادلهٔ (۳ - ۱۲) برای بدست آوردن v_2 کارساده‌ای است.

۳-۳- خواص دیگر منابع کنترل شده

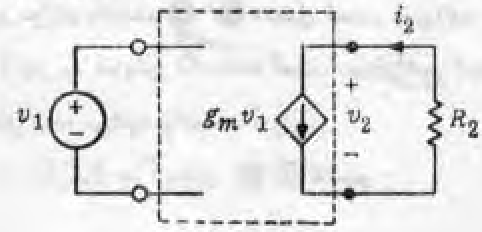
چنانکه در بخش (۳ - ۱) گفته شد ، منابع کنترل شدهٔ نشان داده‌شده در شکل (۳ - ۱) ، عناصر خطی تغییر ناپذیر با زمان میباشند. آنها عناصر تزویج کننده، هستندچون ولتاژ ها و جریانهای دوشاخهٔ مختلف را بهم ربط میدهند. چون معادلاتی که منابع کنترل شده را مشخص مینمایند (شکل (۳ - ۱) راببینید) معادلات جبری خطی برحسب متغیرهای ولتاژها و جریانها میباشند ، منابع کنترل شده را میتوان بعنوان عناصر دوقطبی مقاومتی در درنظر گرفت. با درنظرداشتن اینکه ما ازجهات قراردادی متناظر استفاده میکنیم، توان لحظه‌ای که وارد مدار دوقطبی میشود چنین است :

$$p(t)=v_1(t)i_1(t)+v_2(t)i_2(t) \qquad (۳-۱۴)$$

چون شاخه ۱ یعنی شاخه‌ورودی مدار اتصال کوتاه ($v_1=o$) و یا مدار باز ($i_1=o$) است توان لحظه‌ای برای هرچهار نوع منبع کنترل شده چنین است :

$$p(t)=v_2(t)i_2(t)$$

گیریم شاخهٔ ۱ یک منبع جریان کنترل شده با ولتاژ را به یک منبع ولتاژ نابسته وشاخه ۲ یعنی شاخه خروجی را به یک مقاومت خطی با مقاومت R_2 وصل کنیم. این امر درشکل



شکل ۳-۶- مداری که نشان میدهد منابع کنترل شده ممکن است به‌محیط خارج انرژی تحویل بدهند ، درنتیجه منابع کنترل شده عناصر اکتیوهستند.

(۶ - ۳) نشان داده شده است. باتوجه به جهات قراردادی برای v_2 و i_2 ، از قانون اهم نتیجه میشود :

$$v_2 = -i_2 R_2 \qquad (۳—۱۵)$$

باجایگزینی معالهٔ (۱۵ - ۳) در (۱۴ - ۳) بدست می‌آوریم :

$$p(t) = -i_2^2(t) R_2$$

بنابراین ، توان‌لحظه‌ای وارد شونده به مدار دوقطبی همواره منفی است. بعبارت دیگر ،منبع کنترل شده باشدت $R_2 i_2^2(t)$ به مقاومت R_2 توان تحویل میدهد. بنابراین با کنترل ولتاژ ورودی v_1 مدار ، درشکل (۶ - ۳)میتوان بوسیله منبع ولتاژ نابستهٔ v_1 هرمقدارانرژی به مقاومت بار R_2 تحویل‌داد. بخاطربیاورید که‌درفصل‌دوم‌عنصر «پسیو» رابعنوان‌عنصری که نتواند به محیط خارج‌انرژی تحویل دهد تعریف نمودیم. ازآنجائیکه یک منبع کنترل شده را میتوان بعنوان یک عنصر مقاومتی دو قطبی درنظرگرفت و با توجه باینکه این‌عنصر میتواند به محیط‌خارج انرژی تحویل دهد،ازاینرو منبع کنترل شده یک عنصر « اکتیو» است.

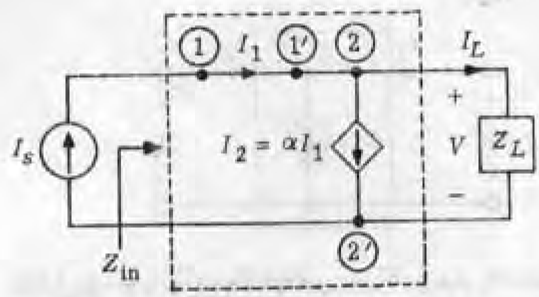
دربخش قبل دیدیم مداری که شامل یک منبع کنترل شده و مقاومتهای پسیو باشد میتواند ولتاژها را تقویت کند. اکنون مثال دیگری ، برای نشان‌دادن‌اینکه از بکار بردن منابع کنترل شده امکانات جالب دیگری نیز بدست می‌آید، بیان میکنیم.

مثال ۳ - تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مدار ساده شکل (۷ - ۳) را درنظر بگیرید. منبع کنترل شده بوسیلهٔ دوشاخهٔ ❶ ❶' و ❷ ❷' نمایش داده شده است. امپدانس Z_L بطور موازی باشاخه ❷ ❷' متصل است. ورودی، منبع جریان نابسته‌است که جریان آن با فازور I_s نمایش داده شده است. میخواهیم امپدانس ورودی Z_{in} که بوسیله منبع ورودی دیده می‌شود را بدست آوریم.

با استفاده از KCL درگره‌های ❶ ❷ داریم :

$$I_s = I_1 \quad و \quad I_1 = \alpha I_1 + I_L \qquad (۳—۱۶)$$

بنابراین امپدانس ورودی چنین است



شکل ۷-۳- مثال : یک مدار دوقطبی که بوسیله یک منبع کنترل شده حاصل شده است

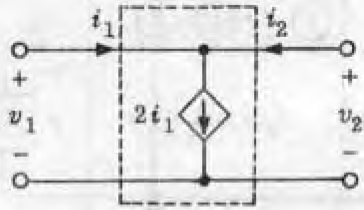
$$Z_{in} = \frac{V}{I_s} = \frac{Z_L I_L}{I_s} \qquad (۳-۱۷)$$

با ترکیب معادلات (۱۶ - ۳) و (۱۷ - ۳) داریم :

$$Z_{in} = (1-\alpha) Z_L \qquad (۳-۱۸)$$

میتوان مشاهده کرد که اگر پارامتر α برابر ۲ باشد ، معادلهٔ (۱۸ - ۳) نشان میدهد که Z_{in} با منفی Z_L برابر است. بنابراین ، اگر Z_L امپدانس یک مدار یک قطبی پسیو را نشان دهد ، $Z_{in} = -Z_L$ امپدانس یک مدار یک قطبی اکتیو را نمایش میدهد . در فصل هفتم نشان دادیم که یک شرط لازم برای اینکه امپدانس نقطه تحریک Z_L پسیو باشد این است که ، برای تمام مقادیر ω ، $\mathrm{Re}\,[Z_L(j\omega)] \geqslant 0$ باشد . از آنجائیکه $Z_{in} = -Z_L$ است، $\mathrm{Re}[Z_{in}(j\omega)] \leqslant 0$ ، وبنابراین ، وقتی که $\alpha = 2$ باشد ، Z_{in} امپدانس یک مدار یک قطبی اکتیو است. مداردوقطبی داخل مربع خط چین شده در شکل (۷ - ۳) « مبدل امپداس منفی »[1] نامیده میشود . **یك مبدل امپدانس منفی ،** یک دستگاه دوقطبی بااین خاصیت است که امپدانس ورودی‌اش برابر منفی هر امپدانسی است که در قطب خروجی به آن متصل باشد. درحقیقت ، مبدل امپدانس منفی خود یک عنصر دو قطبی تزویج کننده‌است. اگر قسمت داخل مربع خط چین شده مدار شکل (۷ - ۳) را ، مطابق آنچه در شکل (۸ - ۳) نشان داده شده است با $\alpha = 2$ مجدداً رسم کنیم و جریانها و ولتاژها را مطابق شکل ، مجدداً تعریف کنیم ، توصیف یک مبدل امپدانس منفی بصورت زیر میباشد:

۱ - Negative impedance convertor



شکل ۸-۳- یک مبدل امپدانس منفی که بوسیله یک منبع کنترل شده حاصل شده است.

$$v_1 = v_2 \qquad i_1 = i_2 \tag{۳ − ۱۹}$$

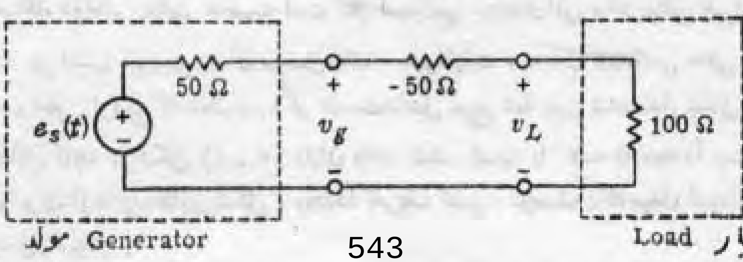
چنانکه در فصلهای دوم و پنجم دیدیم، یک مقاومت منفی یک عنصر اکتیو است. این نکته در تمرین زیر مجدداً تأکید میشود. این مطلب درطرح تقویت کننده‌ها و بعضی سیستمهای ارتباطی کابلی مورد استفاده قرار گرفته است.

تمرین- مدار نشان داده شده در شکل (۹ - ۳) را درنظر بگیرید.

الف - برای حالتی که e_s مقدار ثابتی برابر ۱۰ ولت میباشد، توانی که مولد تحویل میدهد، توانی که مقاومت منفی دریافت میکند، و توانی که مقاومت بار دریافت میکند را محاسبه کنید.

ب - مسأله رابرای حالتی که $e_s(t) = ۱۰ \cos \omega t$ میباشد تکرار کنید (توان لحظه‌ای و توان متوسط، هردو، را محاسبه کنید).

پ - دربارهٔ چگونگی تقسیم انرژی در مدار چه میتوانید بگوئید؟



شکل ۹-۳- تمرینی که نشان میدهد مقاومت منفی به بار توان تحویل میدهد

خلاصه

● عناصر تزویج کننده نوعی عبارت از سلفهای تزویج شده ، ترانسفورماتورهای ایده‌آل ، و منابع کنترل‌شده میباشند . عناصرتزویج کننده بیش از یک شاخه و بیش از دوسر دارند ، که تعداد آنها معمولا چهار میباشد . آنهابوسیله‌معادلاتی که ولتاژ شاخه و جریان شاخه آنها را بهم مربوط میسازندتعریف میگردند.

● معادلاتی که یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان را تعریف میکنند عبارتند از :

$$v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}$$

برای تکمیل مشخصات ، جریانهای اولیه $i_1(0)$ و $i_2(0)$ لازم است.

● انرژی ذخیره شده دریک جفت سلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان چنین است :

$$\mathcal{E}(i_1, i_2) = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2$$

اگر این‌سلفها پسیو باشند، ضرایب خود القاء L_{11} و L_{22}مثبت میباشند ، درحالیکه ممکن است M مثبت و یا منفی‌باشد . مقدار M به‌ضریب تزویج k ، که بوسیله رابطه زیر تعریف میشود ، مربوط است :

$$k \triangleq \frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$$

پسیو بودن لازم میدارد که $0 \leqslant k \leqslant 1$ باشد.

● سلفهای خطی تغییر ناپذیر با زمان را میتوان برحسب ماتریس ضرایب القاء $\mathbf{L}$ توصیف‌نمود. بنابراین :

$$\mathbf{v} = \mathbf{L}\frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

همچنین، میتوان آنها را برحسب ماتریس‌ضرایب‌القاء معکوس Γ تعریف نمود. بنابراین :

$$\mathbf{i}(t)=\mathbf{i}(o)+\Gamma\int_{o}^{t}\mathbf{v}(t')dt'$$

رابطه زیر همواره برقرار است :

$$\Gamma=\mathbf{L}^{-1}$$

● معادلات تعریف‌کننده یک ترانسفورماتور ایده‌آل بادوسیم پیچی چنین است :

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{-i_2(t)}{i_1(t)}$$

که درآن n_1 و n_2 بترتیب تعداد دوردر سیم‌پیچی اول‌وسیم پیچی دوم میباشد. این معادلات وقتی‌برقرار است که جهات قراردادی i_1 و i_2 هردو به سرنقطه گذاری شده داخل (ویا ازآن‌خارج) شوند. اگراین وضع برقرار نباشد، بجای n_1 ، $-n_1$ قرار دهید.

● یک ترانسفورماتور ایده‌آل یک عنصر خطی تغییر ناپذیر با زمان است، وانرژی تلف ویا ذخیره نمی‌کند.

● یک ترانسفورماتور ایده‌آل را میتوان بعنوان یک جفت سلف تزویج شدهٔ خطی تغییر ناپذیر با زمان، با ضرایب خود القاء بینهایت، و ضریب تزویجی برابر بایک‌درنظر گرفت.

● چهار نوع اصلی منبع کنترل شده خطی تغییر ناپذیر بازمان چنین است :

منبع جریان کنترل شده با جریان : $v_1=o$ $\quad$ $i_2=\alpha i_1$

منبع جریان کنترل شده با ولتاژ : $i_1=o$ $\quad$ $i_2=g_m v_1$

منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ : $i_1=o$ $\quad$ $v_2=\mu v_1$

منبع ولتاژ کنترل شده با جریان : $v_1=o$ $\quad$ $v_2=r_m i_1$

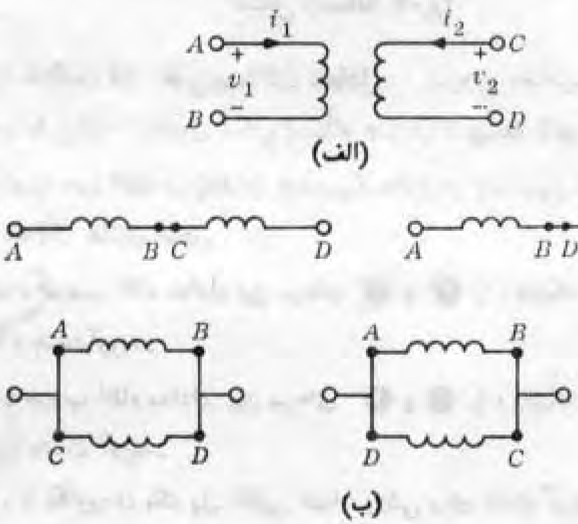
که درآن، α ، g_m ، μ و r_m مقادیر ثابت میباشند.

مسائل

۱- اتصال سری و موازی سلفهای تزویج شده یک جفت سلف تزویج شده (با جهات قراردادی نشان داده شده درشکل (مسأله ۱ - ۸ الف)) دارای ماتریس ضرایب القاء زیرمیباشد :

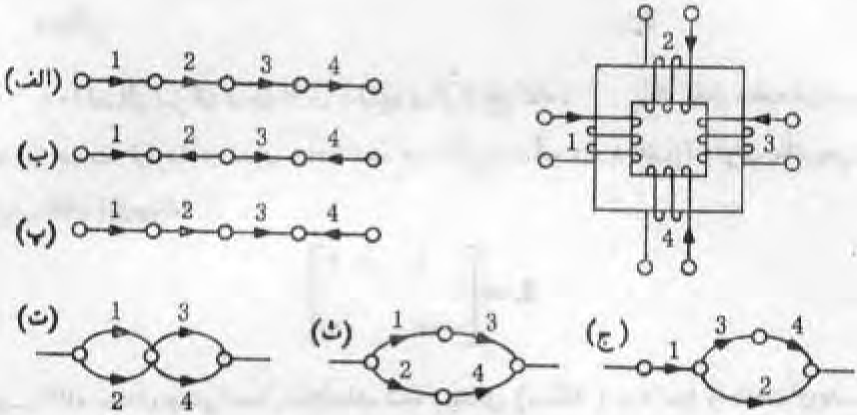
$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٢ & ٦ \end{bmatrix}$$

ضریب القاء معادل چهار اتصال‌نشان‌داده شده درشکل (مسأله ۱ - ۸ ب) را بدست‌آورید.



شکل (مسأله ۱-۸)

۲- علامت M ، اتصالهای سری‌وموازی درشکل(مسأله۲ - ۸) ترتیب قرارگرفتن فیزیکی سیم‌پیچی سلفها روی یک هسته مشترک رسم شده است. مقدار هرضریب خود القاءبرابر ۲ هانری ، و قدر مطلق ضریب‌القاءمتقابل مساوی ۱ هانری‌است. ضریب‌القاء خالص‌مدارهای (الف) تا (ج) را بدست آورید. درشکلهای (الف) ، (ب) و غیره پیکان‌ها، جهت قراردادی هرسیم پیچی را نشان میدهد.



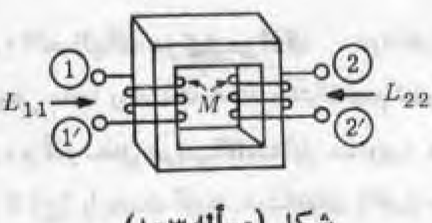
شکل (مسأله ۲-۸)

۳ - علامت M ، ضریب القاء معادل تزویج مغناطیسی میان دوسلف‌خطی تغییر ناپذیر با زمان ، مطابق شکل (مسأله ۳ - ۸) ، بوسیلهٔ یک هسته تأمین میشود. مقادیر ضرایب خود القاء عبارتند از $L_{11}=۲$ هانری و $L_{22}=۳$ هانری ، وضریب القاء متقابل $M=۱$ هانری است.

الف - ضریب القاء معادل بین سرهای ❶′ و ❷′ را ، وقتیکه ❶ و ❷ بهم وصل شده باشند ، بدست‌آورید.

ب - ضریب القاء معادل بین سرهای ❶′ و ❷ را ، وقتیکه ❶ و ❷′ بهم وصل شده باشند ، بدست آورید.

پ - با بکاربردن یک پل القایی تنها ، روشی برای اندازه‌گیری ضریب القاء متقابل بین سیم‌پیچی‌ها پیشنهاد کنید.

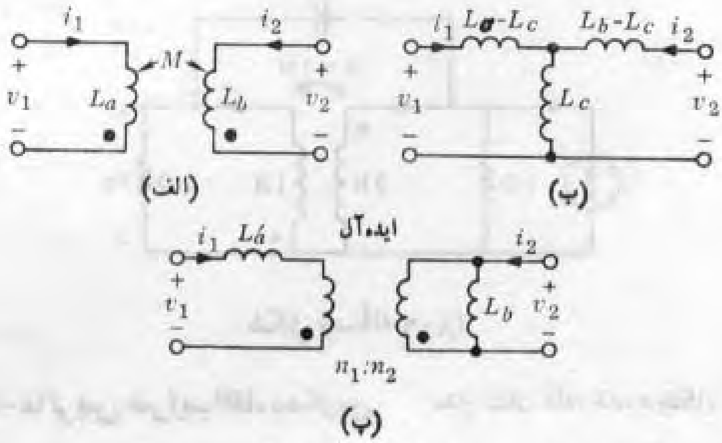


شکل (مسأله ۳-۸)

۴ - ماتریس ضرایب‌القاء دوقطبی‌های معادل سلفهای مدارهای نشان داده شده‌درشکل (مسأله ۴ - ۸) خطی وتغییر ناپذیر با زمان هستند.

الف ـ ماتریس ضرایب‌القاء را برای هرمدار بدست آورید.

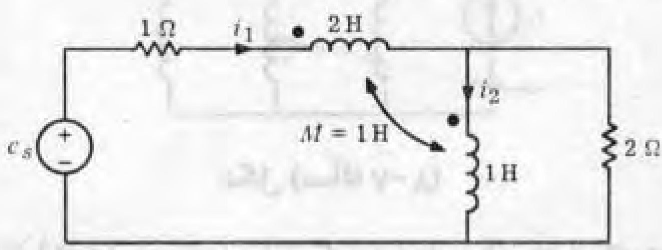
ب ـ نشان‌دهید که اگر $L_c=M$ باشد، مدارهای (الف) و (ب) ماتریس‌ضرایب القاء یکسان دارند.



شکل (مسأله ۴ ـ ۸)

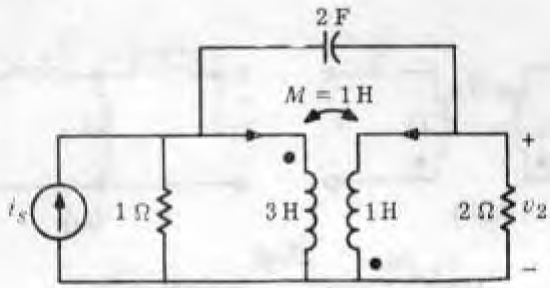
پ ـ چه‌رابطه‌ای باید L'_a و $\frac{n_1}{n_2}$ با L_a و M داشته باشند تا مدارهای (الف) و (پ) دارای ماتریس ضرایب القاء یکسان باشند؟

۵ ـ تجزیه و تحلیل مش مدار نشان داده‌شده‌درشکل (مسأله ۵ ـ ۸) درحالت دائمی‌سینوسی است، که درآن، ورودی یک منبع ولتاژ $e_s(t)=\cos(2t+30^\circ)$ میباشد جریانهای حالت دائمی i_1 و i_2 را بدست آورید.



شکل (مسأله ۵ ـ ۸)

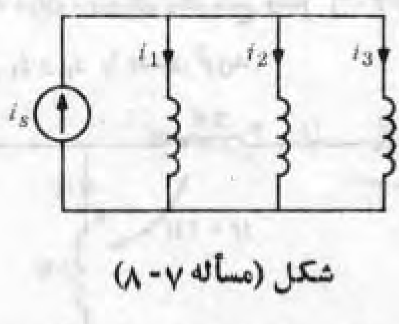
۶- تجزیه و تحلیل گره برای مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۶-۸) معادلات گره را بنویسید. اگر $i_s(t) = \cos t$ باشد، ولتاژ حالت دائمی سینوسی $v_2(t)$ را تعیین کنید.



شکل (مسأله ۶-۸)

۷- ماتریس ضرایب القاء معکوس مدار نشان داده شده درشکل (مسأله ۷ - ۸) داده‌شده است. جریانهای حالت دائمی $i_1(t)$، $i_2(t)$ و $i_3(t)$ را برای منبع جریان ورودی $i_s(t) = \sin t$ تعیین کنید. ماتریس ضرایب القاء سه سلف تزویج شده چنین است:

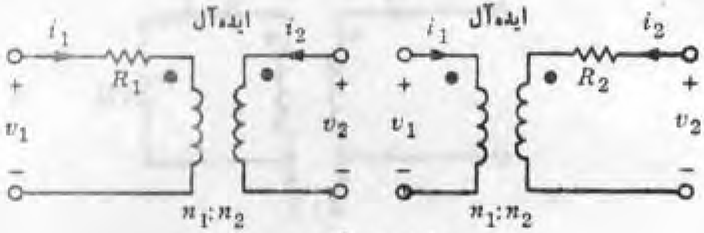
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۴ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$



شکل (مسأله ۷-۸)

۸- انرژی ذخیره شده فرض کنید در مدار مسأله ۷، i_s یک منبع جریان ثابت بوده و $i_1 = ۲$، $i_2 = ۱$ و $i_3 = -۳$ آمپر باشند. انرژی ذخیره‌شده در سلفها چقدر است؟

۹- ترانسفورماتور ایده‌آل و دو قطبی‌های معادل عبارتی برای R_2 بیابیدبطوریکه دوقطبی‌های نشان داده شده در شکل (مسأله ۹ ـ ۸) معادل باشند.



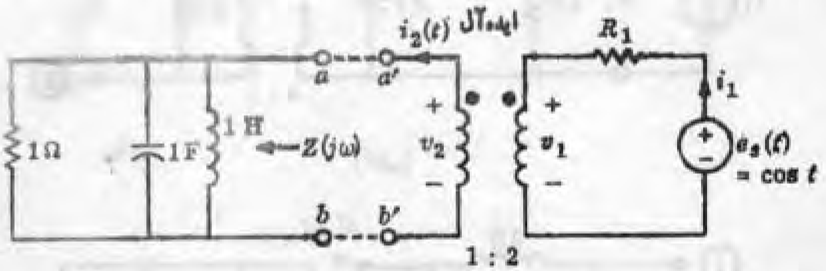
شکل (مسأله ۹- ۸)

۱۰- خاصیت تغییر امپدانس ترانسفورماتور ایده‌آل، محاسبه توان متوسط مدار نشان‌داده شده در شکل (مسأله ۱۰ ـ ۸) خطی و تغییر ناپذیربا زمان میباشد.

الف ـ $Z(j\omega)$ را، وقتیکه aa' و bb' وصل نشده‌اند، بدست‌آورید.

ب ـ درحالتیکه aa' و bb' وصل شده باشند، بافرض‌اینکه تمام ولتاژها وجریانهای شاخه‌ها سینوسی وبافرکانسی‌برابر فرکانس e_s باشند،برای $R_1 = 2$ اهم، i_1 رابدست آورید.

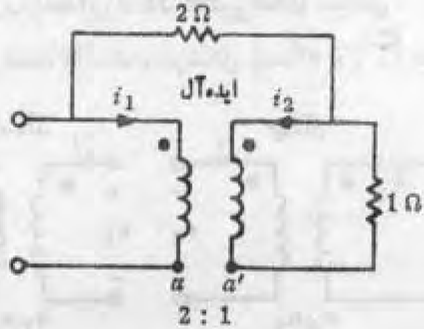
پ ـ آن مقدار R_1 که موجب حداکثر اتلاف توان متوسط درمقاومت R میشود را بدست آورید.



شکل (مسأله ۱۰- ۸)

۱۱ - معادلات تعریف‌کننده ترانسفورماتور ایده‌آل الف ـ مقاومت معادل مدار یک قطبی نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۱ ـ ۸) را تعیین کنید.

ب ـ مسأله را برای حالتی که نقاط a و a' بایک اتصال کوتاه بهم وصل شده باشند تکرار کنید.



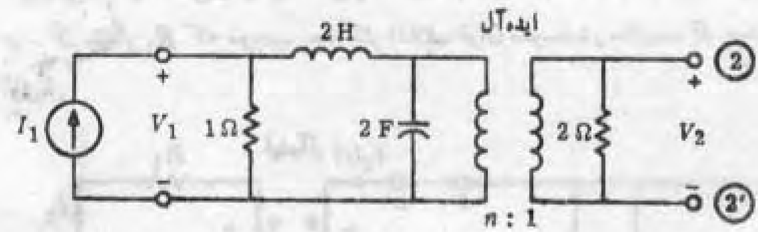
شکل (مسأله ۱۱-۸)

۱۲- خواص نقطه تحریک و انتقالی ترانسفورماتور ایده‌آل

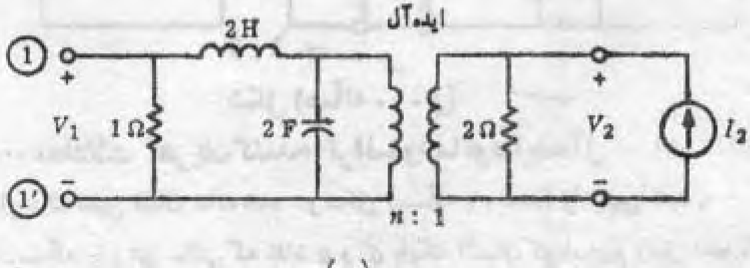
برای مدارهای نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۲ - ۸) امپدانس های زیر را [با بکار بردن شکل (الف)]

$$Z_{11}(j\omega)=\frac{V_1}{I_1} \text{ و } Z_{21}(j\omega)=\frac{V_2}{I_1}$$

و امپدانسهای زیر را [با بکار بردن شکل (ب)] محاسبه کنید :



(الف)



(ب)

شکل (مسأله ۱۲-۸)

$$Z_{۲۲}(j\omega)=\frac{V_۲}{I_۲} \text{ و } Z_{۱۲}(j\omega)=\frac{V_۱}{I_۲}$$

که درآن $V_۱$ و $V_۲$ فازورهایی‌هستند که‌بترتیب ولتاژهای خروجی سینوسی $v_۱(t)$ و $v_۲(t)$ را نمایش میدهند ، و $I_۱$ و $I_۲$ فازورهایی هستند که بترتیب جریانهای ورودی $i_۱(t)$ و $i_۲(t)$ را نمایش میدهند. توجه کنید که درشکل (الف) ، سرهای ۲ و ′۲ مدار باز میباشند ، و در شکل (ب) سرهای ۱ و ′۱ مدار باز میباشند.

۱۳ - خواص نقطه تحریك و انتقالی سلفهای تزویج شده یک جفت سلف خطی‌تغییر ناپذیر بازمان که باماتریس ضرایب القاء مشخص شده‌اند را در نظر بگیرید. (شکل (مسأله ۱۳ - ۸) را ببینید).

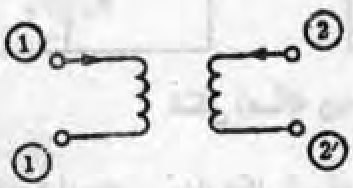
الف - نشان دهید که امپدانس نقطه تحریک $Z_{۱o}(j\omega)$ (که در دوسر ۱ و ′۱ موقعی که ۲ و ′۲ باز است دیده میشود) و امپدانس نقطه تحریک $Z_{۲o}(j\omega)$ (که‌در دوسر ۲ و ′۲ موقعی که ۱ و ′۱ باز است دیده می‌شود) در رابطه زیرصدق میکنند :

$$\frac{Z_{۱o}(j\omega)}{L_{۱۱}}=\frac{Z_{۲o}(j\omega)}{L_{۲۲}}$$

ب - نشان دهید که :

$$\frac{Z_{۱s}(j\omega)}{L_{۱۱}}=\frac{Z_{۲s}(j\omega)}{L_{۲۲}}$$

که درآن $Z_{۱s}(j\omega)$ امپدانس ورودی‌دیده شده بین دوسر ۱ و ′۱ موقعی که ۲ و ′۲ اتصال کوتاه شده باشند ، و $Z_{۲s}(j\omega)$ امپدانس ورودی دیده شده بین دوسر ۲ و ′۲ موقعی که ۱ و ′۱ اتصال کوتاه شده باشند هستند.



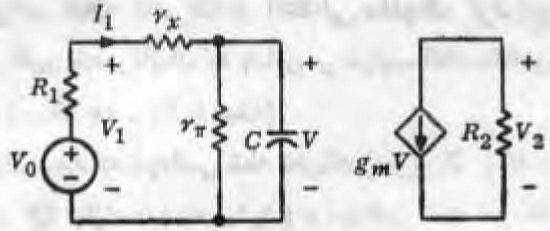
$$\begin{bmatrix} L_{۱۱} & M \\ M & L_{۲۲} \end{bmatrix}$$

شکل (مسأله ۱۳-۸)

۱۴- تقویت کننده ترانزیستوری شکل (مسأله ۱۴ - ۸) مدارمعادل سیگنال کوچک یک تقویت کننده ترانزیستوری ساده را نشان میدهد. V_1 ، I_1 ، V_2 و V_0 نشان دهنده فازورهای سینوسی با فرکانس ω میباشند.

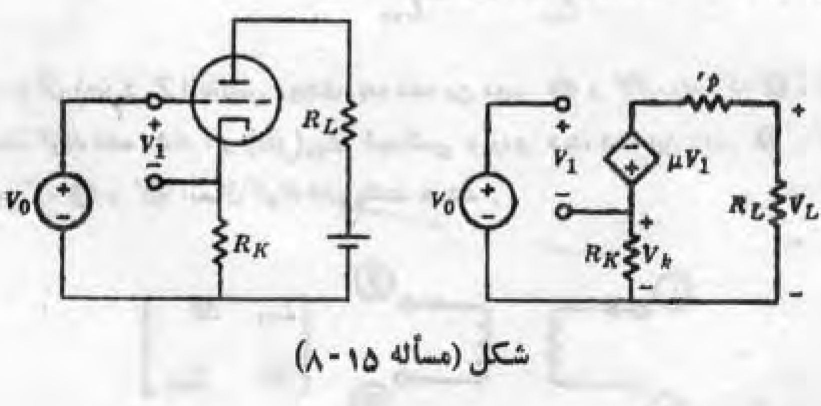
الف - امپدانس نقطه تحریک $Z_{in}(j\omega)=\frac{V_1}{I_1}$ راحساب کنید.

ب - نسبت انتقالی ولتاژها $H(j\omega)=\frac{V_2}{V_0}$ را حساب کنید.



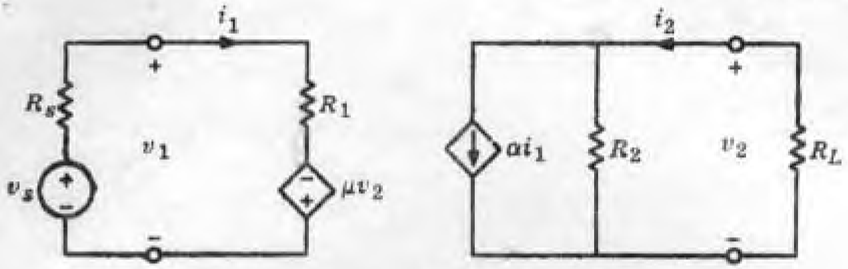
شکل (مسأله ۱۴-۸)

۱۵- تقویت کننده لامپی شکل (مسأله ۱۰ - ۸) یک مدار تقویت کننده لامپی و مدار معادل سیگنال کوچک آنرا نشان میدهد. نسبت‌های ولتاژهای $\frac{V_k}{V_0}$ و $\frac{V_L}{V_0}$ را برحسب مقاومتهای داده شده و ثابت μ حساب کنید.



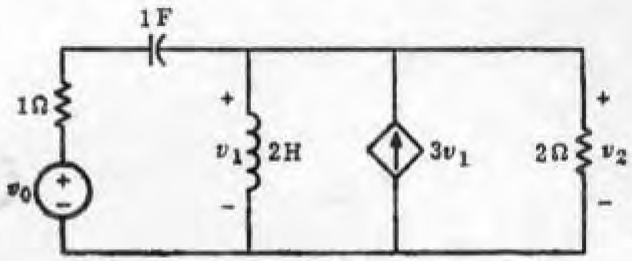
شکل (مسأله ۱۵-۸)

۱۶- منابع وابسته مدار شکل (مسأله ۱۶ - ۸) مدل دیگری از یک تقویت کننده ترانزیستوری در فرکانسهای پائین رانمایش میدهد. ولتاژهای v_1 و v_2 راتعیین کنید.



شکل (مسأله ۱۶-۸)

۱۷- منبع وابسته و تابع شبکه برای مدار نشان داده شده درشکل (مسأله ۱۷ - ۸) تابع شبکهٔ $H(j\omega)\triangleq\frac{V_۲}{V_0}$ را تعیین کنید، که درآن $V_۲$ و V_0 فازورهائی هستند که بترتیب ولتاژهای سینوسی $v_۲(t)$ و $v_0(t)$ را نمایش میدهند.



شکل (مسأله ۱۷-۸)

۱۸- ترانسفورماتور ایده‌آل و منابع وابسته یک ترانسفورماتور ایده‌آل با دوسیم‌پیچی ونسبت دورهای $n:۱$ را میتوان بوسیله مدلی که از دومنبع وابسته تشکیل میشود نمایش داد. براساس معادلات تعریف کنندهٔ ترانسفورماتور ایده‌آل و منابع وابسته، مدل مناسبی برای ترانسفورماتور ایده‌آل چنان تعیین کنید که از دومنبع وابسته که بطور مناسبی انتخاب شده باشند استفاده کند.