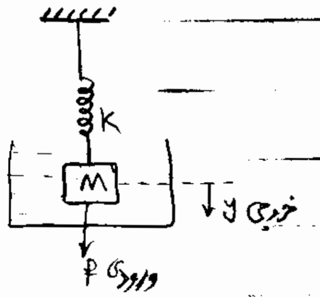
معادلات حالت ونحوهٔ نمایش مدارهای الکتریکی :

حالت : مجموعه‌ای از چند متغیر است $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$ (که هر کدام را یک متغیر حالت نامند) که با داشتن مقادیر آنها در لحظهٔ t_0 و ورودی به ازاء $t>t_0$ ، بتوان خروجی را به ازاء $t>t_0$ تعیین نمود.

مثال ۱ :

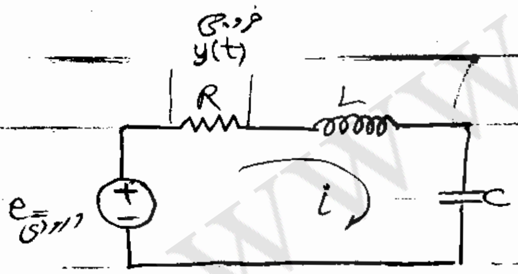


$$f = M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Ky$$

$$y(t_0)\ ,\ \frac{dy}{dt}\Big|_{t=t_0}$$

پس حالت سیستم $\{y(t), \dot{y}(t)\}$

مثال ۲ :



حالت سیستم $\{i_L(t), v_C(t)\}$

بردار حالت : برداری است که هر عنصر آن یک متغیر حالت است.

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

نکته : حالت (بردار حالت) یک سیستم منحصر به فرد نیست.

مثلاً در مثال سیستم مکانیکی

$$\begin{cases} z_1(t) = 5y(t) + 4\dot{y}(t) \\ z_2(t) = 6y(t) - 3\dot{y}(t) \end{cases}$$

$\{z_1 , z_2\}$ نیز یک حالت دیگر از همان سیستم مکانیکی است.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}}_{T} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \qquad (\det T \neq 0)$$

ماتریس T دلخواه است. پس ما بینهایت حالت (بردار حالت) برای یک سیستم می‌توانیم تعریف کنیم.

معادلات حالت: دو معادله (ماتریسی، برداری) به فرم زیر است که رابطهٔ بین ورودی و خروجی را در یک سیستم تعیین می‌کند.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underline{d} \cdot u$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + B u \\ y = C \underline{x} + d \cdot u \end{cases}$$

n : تعداد متغیرهای حالت

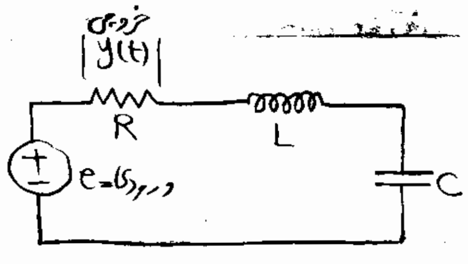
A : $(n \times n)$

B : $(n \times 1)$

C : $(1 \times n)$

d : (1×1)

نمایش مدارهای الکتریکی به فرم معادلات حالت:



قدم ۱: جریان سلف و ولتاژ خازن‌ها را به‌عنوان متغیرهای حالت تعریف می‌کنیم.

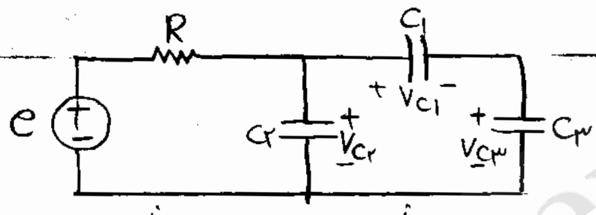
$n =$ تعداد سلفها + تعداد خازنها.

تبصره (حالت خاص):

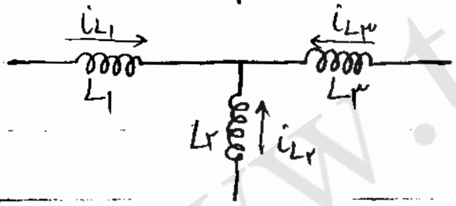
الف: در یک حلقه تماماً خازن قرار داشته باشد.

ب: در تمام شاخه‌های منتهی به یک گره سلف وجود داشته باشد.

مثال ۱:



مثال ۲:



قدم ۲: سعی می‌کنیم مشتق متغیرهای حالت را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بنویسیم.

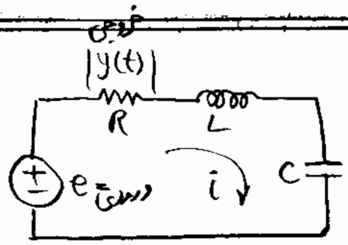
$$\dot{x}_1 = f_1(\underline{x}, u)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(\underline{x}, u)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = f_3(\underline{x}, u)$$

قدم ۳: خروجی را برحسب متغیرهای حالت و ورودی بنویسیم.

$$y = g(\underline{x}, u)$$

قدم ۴: آنها را به فرم معادلات حالت مرتب کنیم.

در مدار RLC مقابل :



$$\begin{cases} x_1 = i_L \\ x_2 = V_c \end{cases}$$

$$u = R\overset{x_1}{i} + L\overset{\dot{x}_1}{\frac{di}{dt}} + \overset{x_2}{V_C}$$

$$\longrightarrow \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u$$

$$\overset{x_1}{i} = C\overset{\dot{x}_2}{\frac{dV_C}{dt}} \qquad \longrightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1$$

$$y = R\cdot i = R\cdot x_1$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

روشهای مختلف بدست آوردن معادلات حالت برای یک مدار :

۱- استفاده از تئوری گراف

۲- استفاده از تابع تبدیل سیستم

۳- استفاده از معادله دیفرانسیل بین ورودی و خروجی .

الف- استفاده از تئوری گراف :

۱- درختی را تعیین می کنیم که در آن تمام خازنها وجود داشته باشند و هیچ سلفی وجود

نداشته باشد.

نکته: اگر در حالت خاص نباشیم این کار حتماً امکان پذیر است.

۲- ولتاژ خازنها و جریان سلفها را به عنوان متغیر حالت تعریف می کنیم.

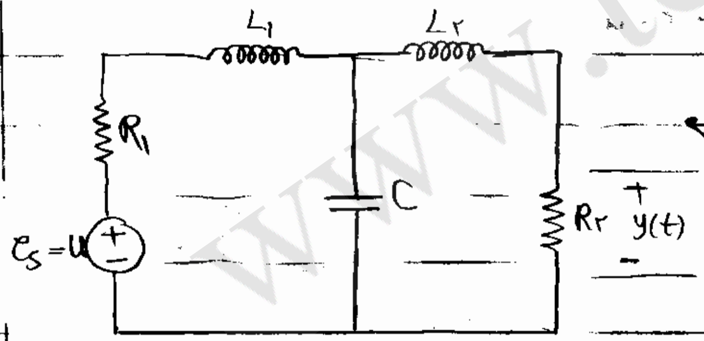
۳- برای هر شاخهٔ درخت که از خازن تشکیل شده است یک معادله کات ست اساسی می نویسیم

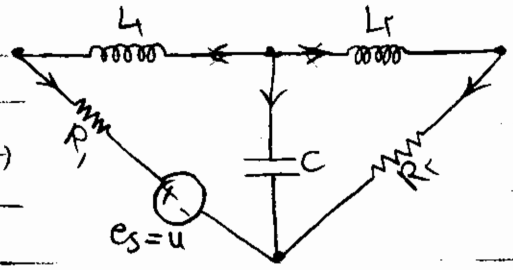
و برای هر لینک که از سلف تشکیل شده است یک معادلهٔ حلقهٔ اساسی می نویسیم.

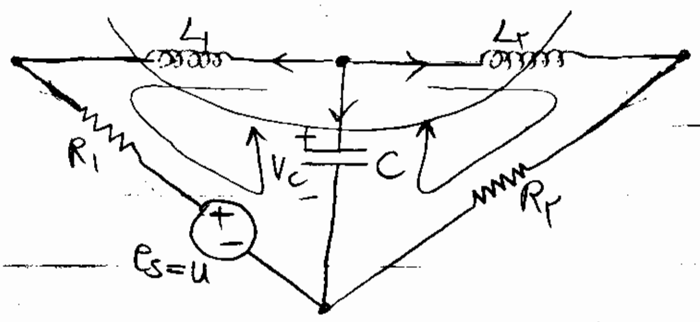
۴- خروجی را بر حسب متغیرهای حالت و ورودی می نویسیم.

۵- معادلات بند ۳ و ۴ را به شکل معادلات حالت مرتب می نویسیم.

مثال:







$$\underline{x} = \begin{bmatrix} V_C \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}$$

$$C\overset{\dot x_1}{\frac{dv_c}{dt}} + \overset{x_2}{i_{L_1}} + \overset{x_3}{i_{L_2}} = 0 \longrightarrow \dot x_1 = -\frac{1}{C}x_2 - \frac{1}{C}x_3$$

$$L_1\overset{\dot x_2}{\frac{di_1}{dt}} + R_1\overset{x_2}{i_{L_1}} + u - \overset{x_1}{V_C} = 0 \longrightarrow \dot x_2 = \frac{-R_1}{L_1}x_2 + \frac{1}{L_1}x_1 - \frac{1}{L_1}u$$

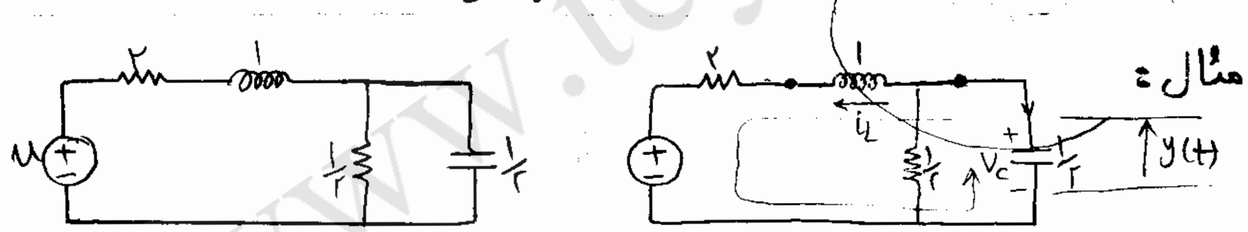
$$L_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - V_c = 0 \longrightarrow \dot x_3 = -\frac{R_2}{L_2}x_3 + \frac{1}{L_2}x_1$$

$$y = R_2 i_{L_2} = R_2 x_3$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \frac{-1}{C} & \frac{-1}{C}\\ \frac{1}{L_1} & \frac{-R_1}{L_1} & 0\\ \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{-1}{L_1}\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 0 & R_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

مثال:



$$\begin{aligned} i_L &= x_1\\ V_c &= x_2\end{aligned} \longrightarrow \frac{1}{2}C\frac{dV_C}{dt} + \overset{\text{جریان عبوری از مقاومت } \frac{1}{2}}{2V_C} + i_L = 0$$

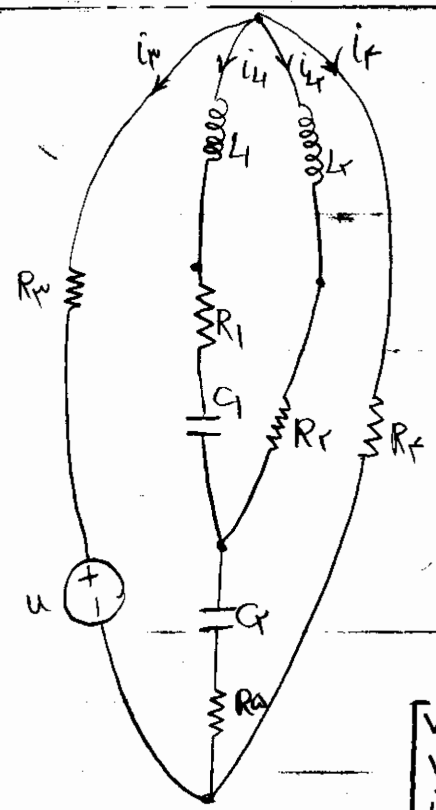
$$\longrightarrow \dot x_2 = -4x_2 - 2x_1$$

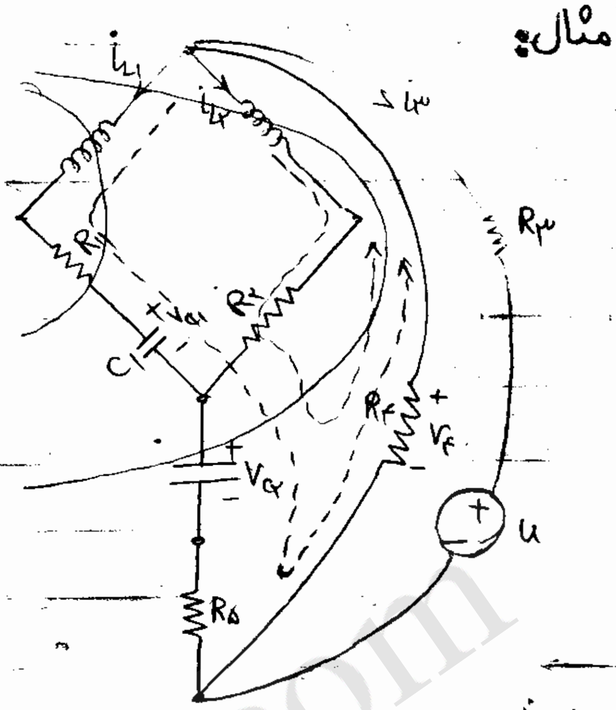
$$\frac{di_L}{dt} + 2i_L + u - V_c = 0 \longrightarrow \dot x_1 = -2x_1 + x_2 - u$$

$$y = x_2 \qquad \begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$\longrightarrow \quad y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

مثال:





$$\begin{bmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$-V_4 = R_4\left[i_{L_1} + i_{L_2} + \overbrace{\frac{V_4 - u}{R_3}}^{i_3}\right]$$

$$C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} - i_{L_1} = 0 \longrightarrow \dot{x}_1 = \frac{1}{C_1} x_3$$

$$C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} = i_{L_1} + i_{L_2} \longrightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{C_2} x_3 + \frac{1}{C_2} x_4$$

$$L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + R_1 i_{L_1} + V_{C_1} + V_{C_2} + R_5 (i_{L_1} + i_{L_2}) - V_4 = 0$$

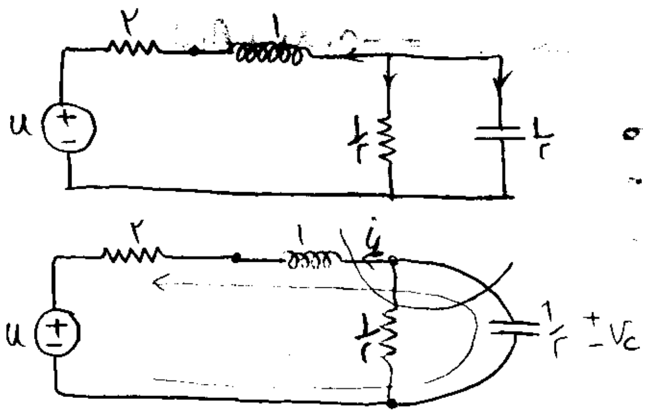
$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_{L_2} + V_{C_2} + R_5 (i_{L_1} + i_{L_2}) - V_4 = 0 \quad , \quad y = V_4$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1+R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & -\frac{R}{L_2} & -\frac{R_2+R}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{R_3 R_4}{R_3+R_4} & -\frac{R_3 R_4}{R_3+R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \frac{R_4}{R_3+R_4} u$$

$$R = R_5 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

یادآوری مثال جلسهٔ قبل:



$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{dV_c}{dt} + 2V_c + i_L = 0 \\ 1\,\frac{di_L}{dt} + 2i_L + u - V_c = 0 \end{cases}, \quad x_1 = V_c \quad , \quad x_2 = i_L$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\dot{x}_1 + 2x_1 + x_2 = 0 \\ 1\,\dot{x}_2 + 2x_2 + u - x_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \mp u \end{cases}$$

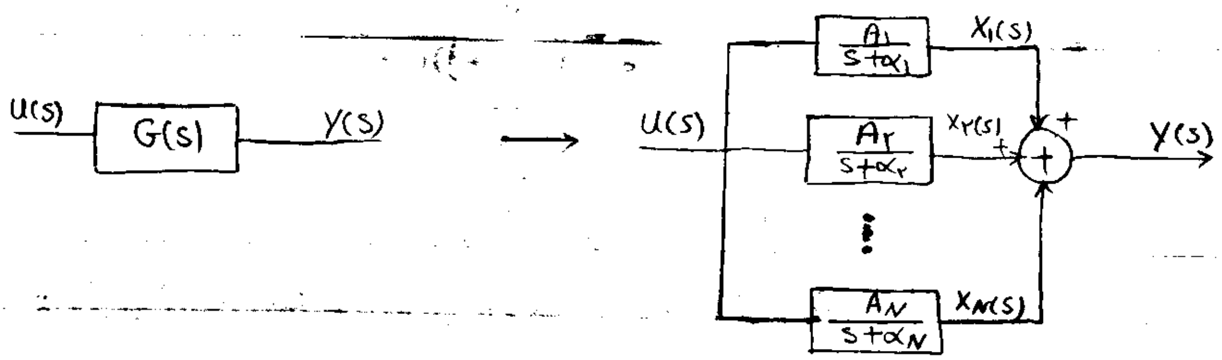
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

روش استفاده از تبدیل لاپلاس:

می‌دانیم که:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_N s^N}$$

$$= \frac{A_1}{s+\alpha_1} + \frac{A_2}{s+\alpha_2} + \cdots + \frac{A_N}{s+\alpha_N}$$



$$X_1(s) = \frac{A_1}{s+\alpha_1} U(s) \longrightarrow sX_1(s) + \alpha_1 X_1(s) = A_1 U(s)$$

$$\longrightarrow \dot{x}_1 + \alpha_1 x_1 = A_1 u \longrightarrow \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + A_1 u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & -\alpha_3 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -\alpha_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} u$$

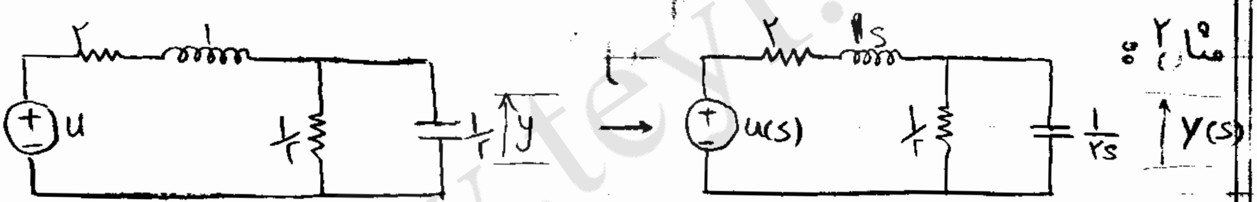
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

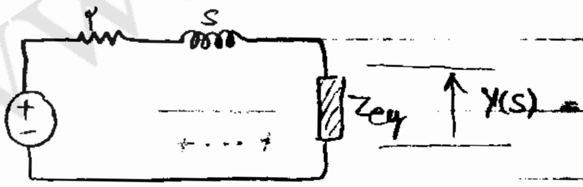
مثال:

$$G(s) = \frac{2}{s^2+3s+2} = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

مثال ۲:





$$Z_{eq} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{s}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{s}} = \frac{2}{s+4}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{2}{s+4}}{s+2+\frac{1}{s+4}} = \frac{2}{s^2+6s+10} = \frac{2}{(s+3+j)(s+3-j)} = \frac{j}{s+3+j} - \frac{j}{s+3-j}$$

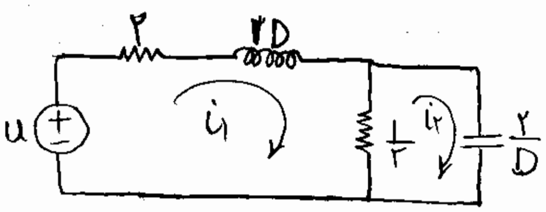
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(3+j) & 0 \\ 0 & -(3-j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j \\ -j \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

نکته: اگر ریشه های مخرج تابع تبدیل مجزا باشد ماتریس A حتماً قطری است.

تمرین: اگر ریشه‌های تکراری داشته باشیم چه تفاوتی در نوشتن معادلات حالت خواهیم داشت.

روش استفاده از معادلهٔ دیفرانسیل بین ورودی و خروجی:

در مثال قبل:



$$\begin{cases} u = 2i_1 + Di_1 + \frac{1}{2}(i_1 - i_2) \\ 0 = \frac{1}{2}(i_2 - i_1) + \frac{2}{D}i_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{2}+D & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{2}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{2}{D} i_2 = \frac{2}{D} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \frac{5}{2}+D & u \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{5}{2}+D & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{2}{D} \end{vmatrix}} = \longrightarrow (D^2+6D+10)y = 4u$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 10y = 2u \longrightarrow$$

به طور کلی اگر رابطهٔ ورودی و خروجی را به فرم معادلهٔ دیفرانسیل زیر داشته باشیم:

$$a_0 y + a_1\frac{dy}{dt} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots + a_N \cdot \frac{d^N y}{dt^N} = b_0 u + b_1\frac{du}{dt} + \cdots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

(با فرض $a_N \equiv 1$)، تعریف متغیرهای حالت:

$$x_1 \triangleq y \quad , \quad x_2 \triangleq \frac{dy}{dt}$$

$$\vdots$$

$$x_N \triangleq \frac{d^{(N-1)}y}{dt^{(N-1)}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

نکته: معادلات بالا برای $M < N$ نوشته شده است.

تمرین: اگر $N = M$ باشد چه تفاوتی در معادلات پیش می آید.

مثال: رابطهٔ ورودی و خروجی در یک مدار الکتریکی به فرم معادلهٔ دیفرانسیل زیر بدست آمده است

آن را به شکل معادلات نمایش دهید. $\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{d^2y}{dt^2}+y=3u+4\frac{d^2u}{dt^2}$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}3&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

مثال: در مدار الکتریکی مثال قبل

$$\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+10y=2u$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-10&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

نکته ۱: دیدیم که برای یک مدار خاص از هر روش یک معادلهٔ حالت متفاوت بدست آوردیم. ولی می توان اثبات کرد که این تفاوت ظاهری است. به عبارت دیگر رابطهٔ ورودی و خروجی در تمام آنها یکی است.

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}sX(s)=AX(s)+BU(s)\\ Y(s)=CX(s)+DU(s)\end{cases}$$

$$\longrightarrow (sI-A)X(s)=BU(s)$$

$$\longrightarrow Y(s)=\underbrace{\left[C(sI-A)^{-1}B+D\right]}_{G(s)}U(s)$$

نکته ۱: هرچند ماتریسهای A، B، C، D از نظر ظاهر متفاوت هستند ولی وقتی در رابطهٔ G(s) گذاشته شوند همگی نتیجهٔ یکسانی را می‌دهند.

نکته ۲: اگر هر ماتریس دلخواه T ($\det T \neq 0$) تعریف شود می‌توان یک معادلهٔ حالت دیگر نیز برای همان مدار تعریف کرد.

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu \\ y = C\underline{x} + Du \end{cases} \quad , \quad \underline{q} = T \cdot \underline{x}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A'\underline{q} + B'u \\ \underline{y} = C'\underline{q} + D'u \end{cases} \longrightarrow \dot{\underline{q}} = T\dot{\underline{x}} = T(A\underline{x} + Bu) = (TAT^{-1})\underline{q} + (TB)u$$

$$\longrightarrow A' = TAT^{-1} \quad , \quad B' = TB$$

و به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که: $C' = CT^{-1}$ $\quad D' = D$

حل معادلات حالت:

$$\begin{cases} \dot{x} = A\underline{x} + Bu \\ y = C\underline{x} + Du \end{cases}$$

نکته ۱: محاسبهٔ خروجی (y) با داشتن و بعدی از روی تابع تبدیل و معادلهٔ دیفرانسیل به صورت دستی ساده‌تر است.

نکته ۲: حل یک یک مدار الکتریکی به صورت معادلات حالت عمومی کامپیوتر بسیار مناسب تر است.

$$y = \underset{(1\times n)}{C}\,\underset{n\times n}{e^{At}}\,\underset{n\times 1}{x_0} + \int_0^t \underset{1\times n}{C}\,\underset{n\times n}{e^{A(t-\tau)}} \cdot \underset{n\times 1}{B} \cdot u(\tau)\,d\tau + D\,u(t)$$

y با معلوم بودن A، B، C، D، x_0، u(t) (برای t>0) قابل محاسبه است.

اثبات (برای A اسکالر):

$$\begin{cases}\dot{x} = ax+bu \\ y = cx+du\end{cases} \longrightarrow \begin{cases} sX(s)-x_0 = aX(s)+bU(s) \\ \end{cases}$$

$$\longrightarrow (s-a)X(s) = x_0 + bU(s)$$

$$\longrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}x_0 + \frac{1}{s-a}bU(s)$$

$$\longrightarrow x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} \cdot bu(\tau)d\tau$$

$$\longrightarrow y(t) = ce^{at}x_0 + \int_0^t ce^{a(t-\tau)} bu(\tau)d\tau + d\,u(t)$$

$$e^{At} \longleftrightarrow (SI-A)^{-1}$$

قسمت اصلی محاسبهٔ y، محاسبهٔ e^{At} است:

چند روش:

۱ـ استفاده از تبدیل لاپلاس $(SI-A)^{-1}$ ۳ـ قطری کردن ماتریس A

۲ـ استفاده از مقادیر و بردارهای ویژه ۴ـ روش کیلی ـ هامیلتون.

محاسبهٔ e^{At} با استفاده از تبدیل لاپلاس (در قالب مثال):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow SI-A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow (SI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} \\ \frac{2}{s+2}-\frac{2}{s+1} & \frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow e^{At}=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ 2e^{-2t}-2e^{-t} & 2e^{-2t}-e^{-t} \end{bmatrix}$$

نکته: اگر ماتریس A قطری باشد کار بسیار ساده تر است.

$$A=\begin{bmatrix} -\alpha_1 & & & \\ & -\alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\alpha_N \end{bmatrix} \longrightarrow e^{At}=\begin{bmatrix} e^{-\alpha_1 t} & & & \\ & e^{-\alpha_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-\alpha_N t} \end{bmatrix}$$

یادآوری: برای هر ماتریس $n\times n$ (A) با مرتبهٔ n، n مقدار ویژه و n بردار ویژه قابل تعریف است که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند.

$$A.V_i=\underbrace{\lambda_i}_{\text{مقدار ویژه}}\underbrace{V_i}_{\text{بردار ویژه}}$$

مثال: $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\underline{z}\triangleq\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$A\underline{z}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

حال اگر: $\underline{q}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$A\underline{q}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

نحوهٔ محاسبهٔ مقدار و بردار ویژه:

مقادیر ویژه ریشه‌های معادلهٔ مشخصه $|\lambda I - A| = 0$ می‌باشند.

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda-3\end{bmatrix} \quad , \quad |\lambda I - A| = 0$$

$$\longrightarrow \lambda(\lambda-3)+2=0 \longrightarrow \begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=2\end{cases}$$

محاسبهٔ بردارهای ویژه:

$$A\cdot \underline{V}_1 = \lambda_1 V_1$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{11}\\ V_{12}\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}V_{11}\\ V_{12}\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases}V_{12}=V_{11}\\ -2V_{11}+3V_{12}=V_{12}\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}V_{11}=1\\ V_{12}=1\end{cases}$$

$$\longrightarrow \underline{V}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{V}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

قضیه:

$$e^{At} = PQP^{-1} \quad , \quad P=[\underline{V}_1, \underline{V}_2, \dots, \underline{V}_n]$$

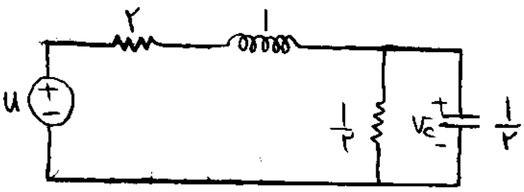
$$P = \begin{array}{c}\begin{bmatrix}V_{11} & V_{21} & \cdots & V_{n1}\\ V_{12} & V_{22} & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \\ V_{1n} & V_{2n} & & V_{nn}\end{bmatrix}\\ \quad \underline{V}_1 \quad\ \underline{V}_2 \qquad\quad \underline{V}_n\end{array} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

در مثال قبل:

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \quad , \quad Q=\begin{bmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2e^t & -e^t\\ -e^{2t} & e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t}\\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t}\end{bmatrix}$$



مثال : ابتدا مدار زیر را به فرم معادلات حالت بنویسید

به ازاء ورودی پله و $\underline{x}_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ خروجی را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$(SI-A)^{-1}\longleftrightarrow e^{At}$$

$$SI-A=\begin{bmatrix}S & 0\\ 0 & S\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S+4 & 2\\ -1 & S+2\end{bmatrix}$$

$$(SI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\overset{S+3-1}{S+2}}{S^2+6S+10} & \dfrac{-2}{S^2+6S+10}\\[2ex] \dfrac{1}{S^2+6S+10} & \dfrac{\overset{S+3+1}{S+4}}{S^2+6S+10}\end{bmatrix}$$

$$S^2+6S+10=0\ (S+3)^2+1^2$$

$$\frac{S+3}{(S+3)^2+1}\longleftrightarrow e^{-3t}\cos t$$

$$\frac{1}{(S+3)^2+1}\longleftrightarrow e^{-3t}\sin t$$

$$e^{At}=e^{-3t}\begin{bmatrix}\cos t-\sin t & -2\sin t\\ \sin t & \cos t+\sin t\end{bmatrix}$$

$$y(t)=\underbrace{Ce^{At}\underline{x}_0}_{\text{اسکالر } y_1}+\underbrace{\int_0^t \underbrace{Ce^{A(t-\tau)}}_{\text{اسکالر } M}B\,u(\tau)\,d\tau}_{y_2}$$

$$y_1 = e^{-3t}[\cos t - 3\sin t]$$

$$y_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}(t)+a_{12}(t)\\ a_{21}(t)+a_{22}(t)\end{bmatrix} = a_{11}(t)+a_{12}(t)$$

$$M = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}(t-\tau) & a_{12}(t-\tau)\\ a_{21}(t-\tau) & a_{22}(t-\tau)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = -a_{12}(t-\tau) = 2e^{-3(t-\tau)}\sin(t-\tau)$$

$$y_2 = 2\int_0^t e^{-3(t-\tau)}\sin(t-\tau)\,d\tau \quad , \quad t-\tau=\theta$$

$$y_2(t) = 2\int_0^t e^{-3\theta}\sin\theta\, d\theta = \frac{2e^{-3\theta}(-3\sin\theta - \cos\theta)}{10}\Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{5}(-e^{-3t}\cos t - 3e^{-3t}\sin t + 1)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$