Subject:
Year Month Date ( )

« شبیه‌سازی کامپیوتر »

فصل اول: تعریف شبیه‌سازی

شنبه ۱۵ / ۱۲ / ۱۷

ابزار برنامه‌نویسی * ابزار نظارت با کد C یا C++ * سمینار II * صفحه برنامه‌سازی * 20 تمرین 3 نمره * پایانی

شبیه‌سازی یعنی تقلید کردن از یک سیستم مرجع *

تعریف 1:
ساختن شبیه یک سیستم به هر روش یا صورت ممکن، که از بعضی جهات با سیستم مرجع می‌تواند متفاوت باشد.

مثلاً از نظر ابعاد یا حدود. ولی با توجه به اینکه شبیه‌سازی رفتار یک سیستم را مدل می‌کند و مورد مطالعه قرار می‌دهد از نظر رفتار نباید با سیستم موجود تفاوت داشته باشد. پس می‌توان گفت: شبیه‌سازی، ساختن یک سیستم با تمام رفتارش است *

تعریف 2: شبیه‌سازی عبارت است از راه اندازی یک مدل به نحوی که بتوان رفتار آن سیستم را به صورت پویا مشاهده کرد.

* شبیه‌سازی توسط کامپیوتر الزامی نیست ولی چون نرم افزار انعطاف‌پذیر است حتماً از نرم افزار کمک می‌گیریم *

پس هدف شبیه‌سازی مطالعه و بررسی سیستم مرجع می‌باشد.

~~انواع~~ شیوه‌های مطالعه سیستم مرجع:

از حیث وجود یا عدم وجود ~~سیستم~~ مرجع مورد نظر مطالعه و بررسی به ۲ دسته تقسیم می‌شود:

۱. مطالعه مستقیم ۲. مطالعه غیر مستقیم

Subject: ....
Year .... Month .... Date .... ( )

مطالعه مستقیم: یعنی بررسی و مطالعه سیستم مستقیم و از نزدیک صورت می گیرد.

معایب مطالعه مستقیم سیستم: ۱) ممکن است سیستم مرجع در لحظه مطالعه حیات نداشته باشد. مثل انقراض هوا پیما

۲) چنانچه پارامتر زمانی پدیده ها بسیار طولانی باشد و نتوان در زمانهای کوتاه به آن دسترسی داشت. مثل زلزله

۳) اگر پارامتر زمانی پدیده ها بسیار کوتاه باشد حتی نتوان از لحاظ مطالعه آن را مشاهده نمود. مانند آزمایش اتمی

۴) ممکن است مطالعه مستقیم یک سیستم از نظر اقتصادی و زمانی مقرون به صرفه نباشد. مثل شلیک موشک هواپیما

۵) پیچیدگی سیستم مرجع و محدودیتهای آن، مطالعه و بررسی بخشی از سیستم را به روش مستقیم غیر ممکن می سازد. زیرا مطالعه آن جز خاص در کل مجموعه به علت دریافت پارامترهای ورودی از اجزای دیگر نتایج مطلوب را به دست نمی دهد.

مطالعه غیر مستقیم: زمانی به بنا بر دلایل مطروحه (معایب) در این مطالعه مستقیم نتوان سیستم را مطالعه را مورد بررسی غیر مستقیم بسیاری از معایب روش مستقیم قابل رفع می باشد. و حتی می توان به رفتار یک سیستم را قبل از خلق یا ایجاد (ضمن رفع معایب) نتایج حاصل را بررسی و آن را تولید نمود. مانند طراحی یک پل

مزایای مطالعه غیر مستقیم که همان مزایای شبیه سازی می باشد:

۱) امکان مطالعه یک سیستم مرجع قبل از ایجاد یا خلق یا پس از انهدام آن را فراهم می کند.

۲) پارامترهای زمانی سیستم مورد مطالعه قابل تغییر است. وقتی که انجام آزمایش روی سیستم واقعی موجب طولانی شدن زمان شود، شبیه سازی مطلوب است.

CAPITAL

۳- از نظر اقتصادی بسیار مقرون به صرفه است.

۴- وقتی که انجام آزمایش بروی سیستم واقعی موجب خطرات جانی و مالی شود.

۵- مطالعه جزء به جزء سیستم و کنار هم قرار دادن اجزا امکان پذیر می شود.

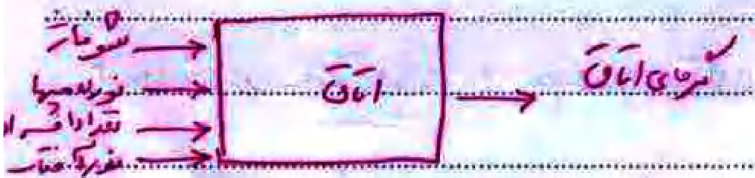
۶- وقتی که به جز شبیه سازی کار دیگری نتوان کرد. پس حداکثرها را با این روش قابل دستیابی است مثل حرکت یک سیاره دور یک ستاره *

۷- وقتی که انجام یک آزمایش بروی سیستم واقعی، سیستم اصلی را مختل می کند.

۸- محدودیت ها و خطرات ناشی از مطالعه سیستم قبل رفع می شود.

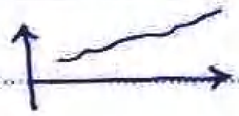
تعریف سیگنال: سیگنال تابعی است که رفتار یک پارامتر فیزیکی را بر حسب محدوده زمان نشان می دهد. مثل دمای اتاق نسبت به زمان در حقیقت تغییرات پارامتر مربوطه نسبت به زمان را سیگنال گویند *

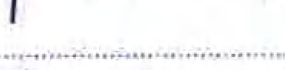
تعریف سیستم: مجموعه ای از اجزا است که یک هدف واحد را دنبال می کند. یک یا چند سیگنال در ورودی دارد و در خروجی آن عملیاتی را انجام می دهد و یک یا چند سیگنال خروجی را ایجاد می کند.



سیگنال ها براساس دیدگاه های زمانی به ۳ دسته تقسیم می شوند:

Subject:
Year Month Date ( )

۱. پیوسته در زمان countinuews intime  (گرمای اتاق)

۲. گسسته در زمان Descret intime  (رفتن به کلاس‌ها)

۳. واقعه گسسته Descret event مثل ورود مشتری به بانک (تصادفی)

* نکته: احتمال اتفاق افتادن ۲ event (واقعه) به طور همزمان صفر است. ~~در رویداد گسسته~~

در واقعه گسسته براساس event ها کار می‌کنیم. وقتی اتفاق رخ داد، خروجی پیش می‌آید.

مثال: ورود هواپیماها و عملیات آنها و خروج آنها در سیستم عامل.

مجموعه‌ای از اشیاء که دارای اثر متقابل با یکدیگر و در حال محاوره می‌باشند و هدف خاصی را دنبال می‌کنند

از دیدگاه شئ گرایی تعریف سیستم به حساب آمده که به صورت زیر می‌توان آن را در نظر گرفت.

۱. اشیاء objects (دانشجو، استاد) ۲. پیشامدها event (ورود - خروج ...) ۳. وضعیت‌ها states (بیکار، مشغول)

رفتار سیستم:

۲ حالت دارد - ۱. قطعیت: چنانچه بتوان رفتار یک سیستم را به طور قطع تعیین یا پیش‌بینی کرد آن رفتار را رفتار قطعی گویند * مثل دریافت روزنامه از دستگاه مربوطه در قبال ~~دریافت~~ پرداخت سکه

۲، عدم قطعیت: چنانچه نتوان رفتار یک سیستم را به طور دقیق پیش‌بینی کرد آن رفتار را تصادفی یا غیرقطعی می‌گویند.

انواع سیستم‌ها:

براساس سیگنال ورودی و خروجی به همان ۳ دسته فوق تقسیم می‌شوند:

۱. پیوسته در زمان ۲. گسسته در زمان ۳. واقعه گسسته

تعریف مدل سازی: مدل یک سیستم واقعی خود یک سیستم است که اگر سیگنال‌ها را ورودی‌ها را به سیستم واقعی را به سیستم مدل نیز اعمال کنیم خروجی‌های آن دقیقاً یکسان بشود. یعنی در مقابل ورودی‌های یکسان رفتار یکسانی از خود نشان می‌دهد.

انواع مدل‌ها: ۱. مدل اجرایی: مدل با قدرت دریافت داده‌ها اجرا و ارائه نتایج که نیاز به برنامه کامپیوتری ندارد.

۲. مدل غیراجرایی: مدل بدون قدرت دریافت داده بوده با قابلیت چرخش عملیات (مثل فلوچارت) و ارائه نتایج که برای اجرا به برنامه کامپیوتری تبدیل می‌شود.

انواع مدل‌ها براساس چگونگی بیان سیستم مرجع: ۱. الگوی ذهنی: هر نوع برداشت از یک سیستم مرجع در ذهن انسان را مدل ذهنی گویند.

۲. الگوی صوری: ارائه یا بیان الگوی ذهنی به یک صورتی را مدل صوری می‌گویند که ۳ حالت دارد:

الف) مدل‌های شماتیکی (مثل منحنیات): روابط و اجزاء مدل به صورت نمودار ارائه می‌شود و بلاک‌های آن

Subject:
Year Month Date ( )

دارای روابط خاصی هستند.

ب) مدلهای فیزیکی: مدل ارائه شده دارای خواص فیزیکی از قبیل وزن و اشکال فضاست مثل ماکت هواپیما

ج) مدلهای نشانه‌ای: مدل با نشانه‌های خاصی بیان می‌شود به صورت:

الگوی لفظی: ارائه در قالب الفاظ یا متون است.

الگوی گرافی: مدل به صورت تصویر یا خطوط گرافیکی خاصی ارائه می‌گردد. و گراف‌های ۳ بعدی و مانند آن مدل را به واقعیت نزدیک‌تر می‌کند. مانند گراف ۳ بعدی

الگوی ریاضی: مدل به صورت فرمول‌ها و روابط ریاضی ارائه می‌شود. مدل ریاضی صریح و واضح است

و ساختاری درونی دارد. مانند معادلات دیفرانسیل.

اجرای مدل:

بعضی از مدلها دارای قدرت و قابلیت اجرا نمی‌باشند. (فلوچارت) یعنی نمی‌توان به آنها داده تزریق نمود و

از آنها خروجی گرفت. مثل فلوچارت‌های مدل برنامه. مثال دیگر شبکه پتری: مدلی است اجرایی با اعمال

داده و چرخش آن که می‌توان نتایج میانی و نهایی را جهت آنالیز رفتاری سیستم مدل شده به دست آورد.

حتی می‌توان با این مدل فلوچارت‌ها را نیز مدلسازی و اجرا کرد.

مراحل اساسی یک مطالعه شبیه سازی:

۱) فرموله کردن مسائل ۲) تعیین اهداف و طرح کلی اجرایی ۳) طراحی مدل
۴) جمع آوری اطلاعات ۵) برنامه نویسی ۶) صحت مدل ۷) اعتبار مدل ۸) طراحی آزمایش
۹) اجرای مقدماتی و تجزیه و تحلیل نتایج ۱۰) تعیین تعداد اجرای مدل ۱۱) مستندسازی و گزارش نتایج ۱۲) پیاده سازی

مروری بر آمار و توزیع های آماری :

۱) متغیرهای تصادفی گسسته :

X را متغیر تصادفی گسسته گویند اگر تعداد مقادیر ممکن X متناهی یا نامتناهی شمارا باشد.

مقادیر ممکن X را می توان به صورت $x_1, x_2, \dots$ فهرست کرد. در مورد متناهی بودن تعداد مقادیر X فهرست پایان می گیرد. در مورد نامتناهی شمارا بودن، فهرست به گونه ای نامتناهی ادامه می یابد.

مثال : تعداد سفارش هایی که هر هفته به کارگاه وارد می شود، مورد مشاهده قرار می گیرد. که

X = تعداد سفارش های پذیرفته شده هر هفته. $R_X = \{0, 1, 2, \dots\}$

مقادیر ممکن X را فضای دامنه X، که R_X معرف آن است، مشخص می کند. فرض کنید X متغیر تصادفی گسسته ای باشد، با هر نتیجه ممکن x_i در R_X، عدد $p(x_i) = P(X = x_i)$ این احتمال را که متغیر تصادفی مساوی با مقدار x_i می شود، تعیین می کند. اعداد $p(x_i)$ وقتی $i = 1, 2, \dots$ باید دو شرط زیر را داشته باشد :

۱) $p(x_i) \geq 0$ به ازای هر i ۲) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

زوج مرتب $(x_i, p(x_i))$ را توزیع احتمال X و $(i = 1, 2, \dots)$ و $p(x_i)$ را تابع جرم احتمال (p.m.f) متغیر تصادفی X گویند.

Subject:
Year Month Date ( )

مثال: تجربه انداختن یک تاس را در نظر بگیرید. پس از آنکه تاس انداخته شده X را برابر با تعداد خال های وجه فوقانی آن تعریف کنید.

$R_x = \{1, 2, \dots, 6\}$

فرض کنید تاس سالم نیست به طوری که احتمال بالا نشستن هر وجه با تعداد خال های آن شمارش شده، متناسب است.

توزیع احتمال نسبت در مورد این تجربه تصادفی به شرح زیر است.

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P(x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

که بزرگتر از صفر هستند و مجموعشان هم $\frac{21}{21}$ است.

۲) متغیر تصادفی پیوسته :

اگر فضای دامنهٔ متغیر تصادفی x فاصله یا بازه مجموعه‌ای از فواصل باشد x را متغیر تصادفی پیوسته می‌نامند.

در مورد متغیر تصادفی پیوسته x احتمال قرار گرفتن x در فاصلهٔ $[a,b]$ به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$ معادله ستاره *

تابع $f(x)$ تابع چگالی احتمال یا pdf متغیر تصادفی x می‌نامند.

در مورد pdf شرایط زیر صدق می‌کند :

الف) $\forall x \in R_x : f(x) \geq 0$

ب) $\int_{R_x} f(x)\, dx = 1$

ج) اگر x در R_x نباشد $f(x) = 0$

به عنوان نتیجه‌ای برای معادلهٔ * به ازای هر مقدار مشخص شدهٔ x_0 داریم $P(X = x_0) = 0$

زیرا : $\int_{x_0}^{x_0} f(x)\, dx = 0$

چون $P(X = x_0) = 0$ معادله‌های زیر برقرار است :

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

۳. تابع توزیع تجمعی :

تابع توزیع تجمعی یا (CDF) که با نماد $F(x)$ نشان داده می‌شود، این احتمال را اندازه گیری می‌کند که متغیر تصادفی x مقداری کمتر یا مساوی با x بگیرد. یعنی $F(x) = P(X \leq x)$ ① اگر X گسسته باشد :

متغیر تصادفی

Subject:
Year Month Date ( )

۱. $F(x) = \sum_{\forall x_i \leq x} P(x_i)$

۲. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

برخی از ویژگیهای cdF را در اینجا می‌شماریم:

الف) F تابعی غیر نزولی است اگر $a<b$ باشد داریم $F(a) \leq F(b)$

ب) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

ج) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

درضمن داریم: $\forall a<b : P(a<X\leq b) = F(b) - F(a)$

۴) امید ریاضی:

اگر X متغیری تصادفی باشد، امید ریاضی X را که با $E(X)$ معرفی می‌شود برای متغیرهای گسسته و پیوسته به شرح زیر تعریف می‌کنیم:

گسسته $E(X) = \sum_{\forall x \in R_X} x_i P(x_i)$ پیوسته $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$

به امید ریاضی، میانگین، گشتاور اول هم می‌گویند.

۵) واریانس:

واریانس متغیر تصادفی که با $V(x)$ یا $var(X)$ یا σ^2 معرفی می‌شود.
سیگما

CAPITAL

به شرح زیر تعریف می شود:

$Var(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$ یا $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

مثال: میانگین و واریانس تجربه پرتاب تاس تشریح شده در مثال قبل را بیابید:

$E(X) = (1 \times \frac{1}{21}) + (2 \cdot \frac{1}{21}) + (3 \cdot \frac{1}{21}) + (4 \cdot \frac{1}{21}) + (5 \cdot \frac{1}{21}) + (6 \cdot \frac{1}{21}) = \frac{91}{21}$

$E(X^2) = (1 \cdot \frac{1}{21}) + (4 \cdot \frac{2}{21}) + (9 \cdot \frac{3}{21}) + (16 \cdot \frac{4}{21}) + (25 \cdot \frac{5}{21}) + (36 \cdot \frac{6}{21}) = 21$

$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 21 - (\frac{91}{21})^2$

توزیع های گسسته:

۱) توزیع برنولی:

تجربه ای متشکل از n آزمایش را در نظر بگیرید، که حاصل هر یک موفقیت یا شکست است. اگر j امین آزمایش به موفقیت بیانجامد، فرض کنید $x_j = 1$ و اگر j امین آزمایش به شکست بیانجامد، $x_j = 0$ باشد n آزمایش برنولی را فرآیند برنولی می نامند اگر آزمایش ها مستقل از یکدیگر باشند. هر آزمایش تنها ۲ نتیجه ممکن (موفقیت یا شکست) داشته باشد احتمال موفقیت، از یک آزمایش به آزمایش دیگر ثابت باشد. بنابراین: $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1) \cdot P(x_2) \cdots P(x_n)$ و

$\underset{\text{چون مستقل}}{\downarrow}$

$$P_j(x_j) = P(x_j) = \begin{cases} p & x_j = 1,\ j = 1, 2, \dots n \\ 1 - p = q & x_j = 0,\ j = 1, 2, \dots n \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

میانگین و واریانس X_j را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$E(X_j) = 0\times q + 1\times p = p$$

$$V(X_j) = [0^2\times(q) + 1^2(p)] - p^2 = p(1-p)$$

۲) توزیع دوجمله‌ای:

متغیر تصادفی X که معرف تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش برنولی است، توزیع دوجمله‌ای دارد که به شرح زیر $p(x)$ معرفی می‌شود:

$$p(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}\, p^x\, q^{n-x} & x=0,1,2,\dots,n\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

$$\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$$E(X) = \overbrace{p+p+\dots+p}^{n} = np \qquad Var(X)=pq+pq+\dots+pq=npq$$

مثال: یک فرآیند تولید، چیپ‌های نیمه‌رسانای مورد استفاده در ریزپردازنده‌ها را به طور متوسط با نسبت ناقص ۲ درصد می‌سازد. هر روز یک نمونه تصادفی ۵۰ تایی از فرآیند گرفته می‌شود، اگر نمونه بیش از ۲ واحد ناقص داشته باشد، فرآیند متوقف می‌شود، احتمال متوقف کردن فرآیند با این شیوهٔ نمونه‌گیری را تعیین کنید؟

با در نظر گرفتن نمونه‌گیری به صورت $n=50$ آزمایش برنولی هر یک با $p=0/2$ تعداد کل واحدهای ناقص
X است

درصد معیوب، توزیع دوجمله‌ای به صورت زیر خواهد شد:

$$\binom{50}{x}(0.02)^x(0.98)^{50-x} \quad x=0,\dots,50$$

همینطور برای تعیین احتمال اینکه بیش از ۲ واحد ناقص در نمونه پیدا شود بسیار ساده تر است که متمم را محاسبه کنیم

$$P(X>2)=1-P(x\le 2) \Rightarrow P(x\le 2)=\sum_{x=0}^{2}\binom{50}{x}(0.02)^x(0.98)^{50-x}$$

$$=(0.98)^{50}+50(0.02)(0.98)^{49}+1225(0.02)^2(0.98)^{48}=0.92$$

$$E(x)=np=50(0.02)=1 \qquad var(x)=npq=50(0.02)(0.98)$$

۳) توزیع هندسی:

توزیع هندسی بر دنباله‌ای از آزمایش‌های برنولی مرتبط است، متغیر تصادفی مورد نظر X تعداد آزمایش‌ها برای حصول اولین موفقیت تعریف می‌شود.

$$P(x)=\begin{cases} q^{x-1}p^1 & x=1,2,\dots \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$E(x)=\frac{1}{p} \qquad var(x)=\frac{q}{p^2}$$

مثال: ۴۰ درصد ریز پردازنده‌های متوسط شده در ایستگاه بازرسی مردود شناخته می‌شوند. این احتمال را پیدا کنید که اولین ریز پردازنده پذیرفته شده، سومین ریز پردازنده بازرسی شده باشد. با در نظر گرفتن هر بازرسی به عنوان یک آزمایش برنولی با $q=0.4$ و $p=0.6$ داریم:

$$p(3)=(0.4)^{3-1}(0.6)=0.096$$

Subject:
Year Month Date ( )

۴) توزیع پواسن: گسسته یا پیوسته؟ گسسته پیوسته است. مقادیر قیمت گیری چه هایی

متغیر تصادفی پواسن، بیانگر دفعات رخدادن پیش آمدی است که تنها تعداد دفعات رخدادن آن را می توان شمرد. در بسیاری از آزمایش ها هم تعداد دفعات رخدادن پیش آمدی معین را می توان شمرد و هم تعداد دفعات عدم وقوع آن را. مثلاً در پرتاب یک تاس هم تعداد دفعاتی که تاس ۶ می آید را می توان شمرد و هم تعداد دفعاتی که تاس ۶ نمی آید. اما در بسیاری از مواقع تعداد دفعات رخ ندادن یک پیش آمد را نمی توان شمرد مثلاً: تعداد دفعاتی که در طول شبانه روز تلفن منزل شما زنگ نمی زند را نمی توان شمرد. پس تعداد دفعات زنگ زدن آن را می توان شمرد.

تعداد دفعات وقوع چنین پیش آمدی، دارای توزیع پواسن است، که تابع چگالی آن به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0, 1, \ldots$$

$E(x) = \lambda \qquad var(x) = \lambda$

مثال: هرگاه که برای سرویس یک پایانه کامپیوتری با تعمیرکار تماس تلفنی می گیرند دستگاه گیرنده او را با صدای BiB خبر می کند. معلوم شده است که تعداد BiB ها در ساعت طبق توزیع پواسن با میانگین $\lambda = 2$ در هر ساعت رخ می دهد. احتمال ۳ BiB در ساعت به شرح زیر است:

$$f(x) = \frac{e^{-2}\,2^{3}}{3!} = \frac{4}{3}e^{-2} = 0/18$$

توزیع‌های پیوسته:

۱) توزیع یکنواخت: متغیر تصادفی X روی فاصله $[a,b]$ به طور یکنواخت توزیع می‌شود.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

~~cdf با رابطه زیر مشخص می‌شود.~~

اگر pdf آن طبق رابطه زیر تعیین شود ←

cdf با رابطه زیر مشخص می‌شود:

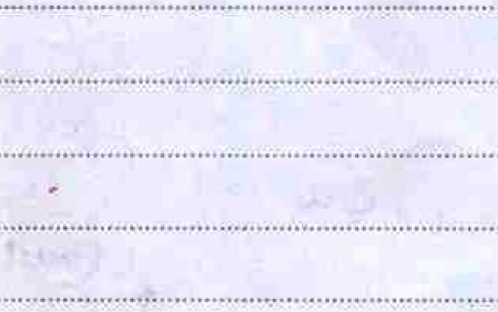
$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & b<x\end{cases}$$

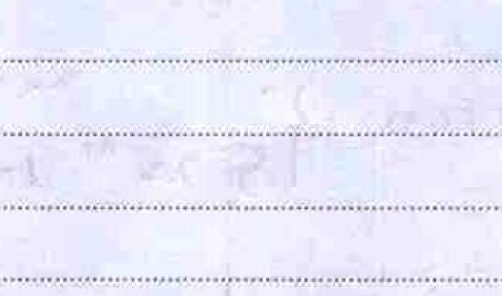
توجه کنید به

$$P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\frac{x_2-x_1}{b-a}$$

$$\left(\frac{x_2-a}{b-a}-\frac{x_1-a}{b-a}\right)$$

$$\boxed{E(x)=\frac{a+b}{2}\qquad Var(x)=\frac{(b-a)^2}{12}}$$





ادامه دارد

مثال: از ساعت ۶ صبح هر ۲۰ دقیقه اتوبوس به توقفگاه مشخصی وارد می‌شود به این ترتیب تا ۸:۴۰ دقیقه صبح

مسافری که از برنامه مطلع است هر روز صبح به طور تصادفی و با توزیع یکنواخت بین ۷ و ۷:۳۰ دقیقه صبح

از راه می‌رسد. احتمال بیش از ۵ دقیقه معطل شدن این مسافر برای اتوبوس چقدر است؟

مسافر تنها در صورتی مجبور به بیش از ۵ دقیقه معطل شدن است که بین ۷ و یا ۷:۱۵ صبح یا بین ۷:۲۰ و ۷:۳۰

صبح وارد شود. اگر X متغیر تصادفی باشد که تعداد دقیقه‌های گذشته از ۷ صبح را هنگام رسیدن مسافر نشان می‌دهد

احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(0 < X < 15) + P(20 < X < 30)$$

$$(0, 30)$$

$$F(15) + F(30) - F(20) = \frac{15}{30} + 1 - \frac{20}{30} = \frac{5}{6}$$

چرا $F(0)$ را ننوشتیم؟

توزیع نمایی: گفته می‌شود متغیر تصادفی X توزیع نمایی با پارامتر $\lambda > 0$ دارد اگر pdf آن به صورت
(قبل)

معادله زیر ارائه شود:

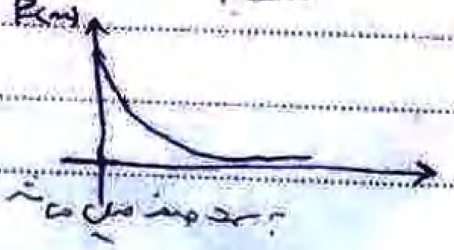
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & 0 \leq x \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

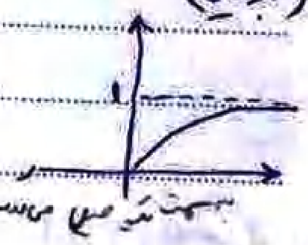
یا cdf

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \underbrace{1 - e^{-\lambda x}}_{\text{حفظ شود}} & 0 \leq x \end{cases}$$

(اثبات)

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\lambda} \\ Var(X) &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}}$$





CAPITAL

ورود پشت سر هم پواسون و زمان‌های بین آنها نمایی و هر کس منتظر سرویس گیرنده خالی است

توضیح: توزیع نمایی به منظور مدل‌سازی مدت‌های بین دو ورود درحالتی که ورودها کاملاً تصادفی باشند و برای مدل‌سازی، مدت‌های خدمت دهی، درحالتیکه این مدت‌ها بسیار متغیر باشند مورد استفاده قرار گرفته است.

(یک توزیع بی حافظه است)

مثال: فرض کنید که عمر نوعی لامپ صنعتی برحسب هزار ساعت توزیع نمایی با آهنگ بازمانی $\lambda = \frac{1}{3}$ (به طور متوسط یک بازمانی در هر ۳ هزار ساعت) دارد. احتمال اینکه لامپ بیش از میانگین ۳ هزار ساعت عمر خود، عمر کند با رابطه زیر مشخص می‌شود:

$P(X>3) = 1-P(X\leq 3) = 1-F(3)$

$P(X>3) = 1-(1-e^{-\frac{3}{3}}) = e^{-1} = 0/368$

یعنی به ازای هر مقدار λ، احتمال اینکه متغیر تصادفی از میانگین خود بزرگتر باشد ۰/۳۶۸ است

احتمال اینکه لامپ صنعتی بین ۲۰۰۰ و ۳۰۰۰ ساعت عمر کند طبق رابطه زیر تعیین می‌شود.

$P(2\leq X\leq 3) = F(3)-F(2)$

cdf با استفاده از $\Rightarrow F(3)-F(2) = (1-e^{-\frac{3}{3}}) - (1-e^{-\frac{2}{3}}) = 0/513 - 0/368 =$
$0/145$

F توزیع تجمعی cdf

از مهم‌ترین ویژگی‌های توزیع نمایی بی‌حافظه بودن آن است که به ازای همه مقادیر $t \geq 0$ و $s \geq 0$ داریم:

$P(X > s+t \mid X > s) = P(X>t)$

بشرط آنکه $P(X>10)$ بی‌حافظه

Subject:
Year Month Date ( )

فرض کنید X مؤلف قطعه‌ای (یک باتری یا چراغ روشنایی یا لامپ) و فرض کنید X توزیع نمایی دارد.

معادل فوق چنین می‌گوید که احتمال دستگاه $s+T$ ساعت کار کردن قطعه به شرطی که s ساعت کار کرده باشد

با احتمال اولیهٔ دستگاه T ساعت کار کردن آن یکسان است. اگر قطعه در زمان s زنده باشد یعنی اگر $P(X>s)$

توزیع زنده ماندن آن در باقیماندهٔ زمان یعنی $X-s$ با توزیع اصلی قطعهٔ نو یکسان است. یعنی قطعه به یاد نمی‌آورد

که قبلاً به مدت s مورد استفاده قرار گرفته است. هر قطعه مستعمل به خوبی یک قطعه نو است.

در احتمالات شرطی داریم:

$$P(X>s+T \mid X>s)=\frac{P(X>s+T)}{P(X>s)}=\frac{e^{-\lambda(s+T)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda T}=P(X>T)$$

مثال. این احتمال را بیابید که لامپ صفحهٔ مثال قبل به مدت هزار ساعت دیگر دوام آورد، مشروط بر اینکه

بیش از ۲۵۰۰ ساعت هنوز در حال کار است.

$$P(X>۳٫۵ \mid X>۲٫۵)=P(X>۱)=e^{-\frac{1}{۳}}=۰٫۷۱۷$$

توزیع نرمال: (توزیع زنگوله) : هر متغیر تصادفی X با میانگین ~~μ~~ و واریانس مثبت

توزیع نرمال دارد اگر pdf آن به شرح زیر باشد

$$(-\infty<\mu<+\infty)$$
$$\sigma^2>0$$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

سیگما

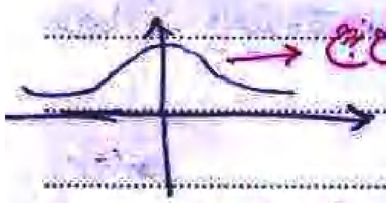
Subject:
Year Month Date ( )

$-\infty < x < \infty$

توزیع نرمال: این توزیع زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرد به ویژه در بیان زمان‌ها. از نوشتار $N(\mu, \delta^2)$ در $X \sim$ به منظور بیان اینکه

متغیر تصادفی X توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس δ^2 دارد استفاده کرده‌ایم.

pdf نرمال به شکل زیر است:



از پیوسته مطابق شکل

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^2} dt \leftarrow cdf$$

استفاده از روش جایگذاری و $z = \frac{x-\mu}{\delta}$

$$= F(x) = P(X \le x) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\delta}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\delta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\delta}} \phi(z)\, dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)$$

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

pdf هر توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک است. از این رو $N(0,1)$ را Z گفته می‌شود که Z توزیع نرمال

استاندارد دارد.
$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$ توزیع نرمال است

فصل سوم:

(تعاریف اولیه):

نهاد (entity): نهاد یعنی مورد توجه در سیستم است. در حقیقت نهاد، یک موجودیت یا یک شیء که برای کار از آن

در شبیه‌سازی سیستم دنبال می‌کنیم می‌باشد، مانند اتومبیل‌ها در شبیه‌سازی ترافیک شهری، فرآیندها در سیستم عامل،

مشتری‌ها در یک بانک. نهادها به یکدیگر وابسته نمی‌باشند.

CAPITAL

خصیصه یا attribute یا مشخصه کار: ویژگی کارها را مشخصه گویند، مانند سایز یک پکیج در شبیه
کامپیوتری و زمان ایجاد یک فرآیند در سیستم عامل، و یا لحظه ورود یک مشتری به بانک.

هر کار یک یا چند مشخصه دارد و آن مشخصه‌هایی برای ما مهم است که در شبیه سازی تأثیر گذار باشد و در نتیجه گیری

مهم *

فعالیت یا Activity: کاری است که در طی یک پریود زمانی مشخص یا تصادفی بر روی کارها انجام می‌شود
مثل بسته بندی یک کالا در کارخانه. کالا (کار) یا برداشت پول از حساب مشتری. پول (موجودیت)

متغیر (variable): یک متغیر نشان دهنده مقدار یکی از پارامترهای مورد علاقه ما در شبیه سازی یک سیستم است.
متغیرها یا جزء نتایج شبیه سازی هستند یا برای محاسبه شبیه سازی به آن مقادیر نیاز داریم.

وضعیت (حالت state): مقادیر کلیه متغیرهای سیستم را در لحظه T حالت یا state سیستم در لحظه T می‌نامند
به بیان دیگر وضعیت سیستم در لحظه T مساوی است با مقادیر یک متغیرهای سیستم در آن لحظه با توجه به
اهداف بررسی.

در شبیه سازی باید لحظه به لحظه state سیستم را update کنیم. وضعیت به روز در آوردن کلیه متغیرهای سیستم
را پردازش سیستم می‌نامند *

واقعه (پیشامد event): رویدادی که معمولاً به صورت تصادفی و در موارد استثنایی غیر تصادفی
در یک لحظه رخ می‌دهد و state سیستم را عوض می‌کند.

یعنی حداقل مقدار یکی از متغیرهای مورد علاقه مان را تغییر می دهد: مثلا ورود مشتریان به پمپ بنزین ها یا لحظه ی بلاک شدن یک فرآیند در سیستم عامل.

اگر m نبود G عمومی → دارای پواسون در ورودی نمایی

اختیاری (اگر نبود از default پر می شود) — الزامی هستند

memory (حافظه) → m

نمادسازی صف: 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6

1. Arrival Rate Nature (طبیعت نرخ ورود) (گسسته) پواسون — نمایی
2. Service Time Nature (طبیعت زمان سرویس دهی)
3. Number of Paraller service (تعداد سرورهای موازی)
4. Quering method (متد صف بندی) — FIFO — پا روش نوبت دهی
5. capacity (ظرفیت سیستم) — ∞ default
6. Population (جمعیت) — ∞ default — تعداد افرادی که دارد سیستم می شوند

m m 1 — طبیعی هم پشتیبان یا میزان پا یک — سرورهای پشتیبانی — تک سرور سرویس در تیم

آنچه داریم: 1

max queue lenth Number of Servic system capacity

اگر 9 بود صف +1 = ظرفیت 10

1. Arrive Rate Nature: تصادفی — stochastic ⇐ پواسون، برنولی، هندسی؛ معین — Deterministic

منظور از m یعنی اینکه نرخ ورودی تصادفی بوده و دارای توزیع گسسته این انواع بدون حافظه است معمولا برای نرخ ورود از توزیع پواسون استفاده می شود.

2. Service Time Nature: تصادفی — نمایی، نمایی، گاما، ارلانگ؛ معین

مدت زمان سرویس هر خدمت تصادفی بوده و دارای تابع توزیع پیوسته این انواع معمولا مارکوفی markovian (بدون حافظه)

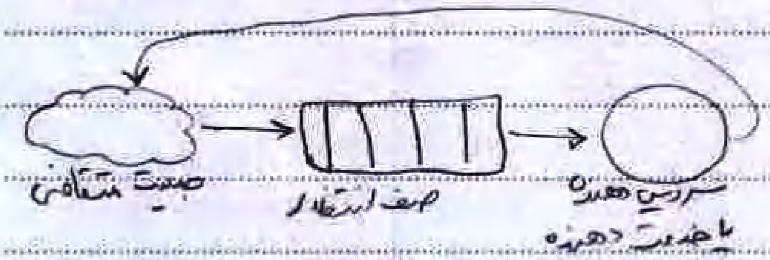
3. Number of Paraller service: تعداد سرویس دهنده های موازی را مشخص می کند. در سیستم صف سرورهای سری نداریم.

ظرفیت = تعداد سرورهای موازی + بیشترین طول صف

Subject:
Year Month Date ( )

۶) تعداد جمعیت‌های خارج از سیستم که به صورت بالقوه امکان دارد وارد آن شوند. در حقیقت همان جمعیت شبیه‌سازی را مشخص می‌کند. مثلاً یعنی چند نفر می‌توانند وارد شوند.

شبیه‌سازی سیستم‌های صف: سیستم صف با جمعیت متقاضی و چگونگی ورود و خدمات‌دهی و ظرفیت سیستم و نظام صف به این صورت مشخص می‌شود.



در این سیستم جمعیت متقاضی نامحدود است یعنی اگر یک نفر جمعیت متقاضی را ترک کند و به صف انتظار ملحق شود یا برای دریافت خدمت برود، هیچ‌گونه تغییری در آهنگ ورود سایر متقاضیان نیازمند خدمت روی نخواهد داد.

نکته: بین خدمت‌دهنده‌ها ارتباطی وجود ندارد.

نکته: برای هر ورودی خدمت‌دهنده‌ای ← در نظر گرفته می‌شود که به آن معیار اسنر می‌گویند. در سیستم فوق به sever به صورت تصادفی می‌باشد.

نکته: در صورتی که جمعیت متقاضی بتواند به صف انتظار ملحق شود، سرانجام خدمت دریافت خواهد کرد.

نکته: مدت‌های خدمت‌دهی تصادفی است، و در غالب توزیع‌های احتمال تعریف می‌شود و با گذشت زمان بدون تغییر می‌مانند.

نکته: هرگاه ظرفیت سیستم نامحدود باشد، ظرفیت صف = صف انتظار است.

نکته: اگر نرخ متوسط ورود بیشتر از ظرفیت سیستم (نرخ خدمت‌دهی) باشد، طول صف انتظار به طور نامحدود افزایش پیدا می‌کند. هرگاه صف‌ها به طور نامحدود رشد کنند، آن‌ها را انفجاری یا ناپایدار می‌نامند.

برای شبیه‌سازی سیستم‌های صف، درک مفاهیم حالت سیستم (system state) و پیشامدها event لازم است. منظور از پیشامدها مجموعه شرایطی است که موجب تغییر لحظه‌ای در حالت سیستم می‌شود. مثل ورود و خروج بنده‌ها به سیستم. تقسیم در مسئله یک مجرای مسئله صف تنها ۲ پیشامد ممکن است حالت سیستم را تغییر دهد (ورود و خروج بنده‌ها به سیستم). باید خاطرنشان کرد که این وقایع نباید یکی شوند، یعنی باید از نظر زمانی متمایز باشند.

مثال: $m/m/1/5$ (طول صف ۴)

مجموعه‌های پیشامدهای پیشنهادی:

۱) ورود بنده‌ها به سیستم
۲) خروج بنده‌ها از سیستم
۳) خروج بنده‌ها از صف / ورود بنده‌ها به صف

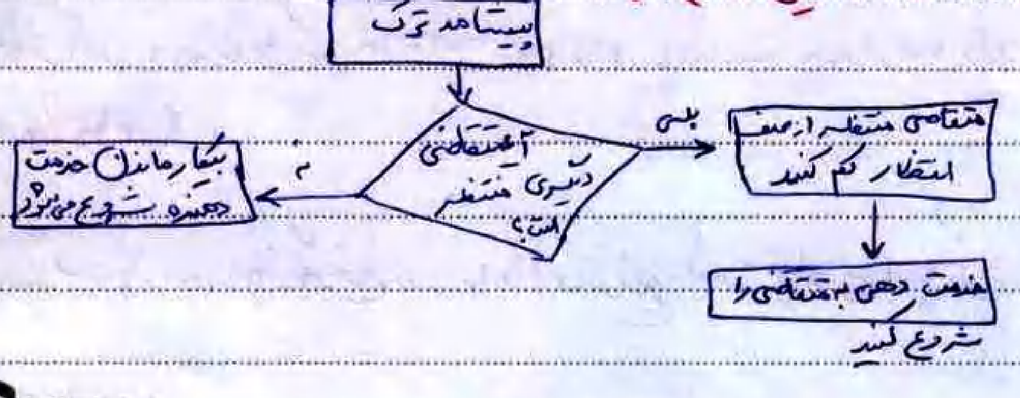
این حالت ورود و خروج (گزینه ۱ و ۲) پس اضافی است

۴) نشستن در صف (جزء پراسس است نه جزء پیشامد)
۵) پر شدن صف
۶) خالی شدن سرور

event های ظاهری از ۳ تا ۶

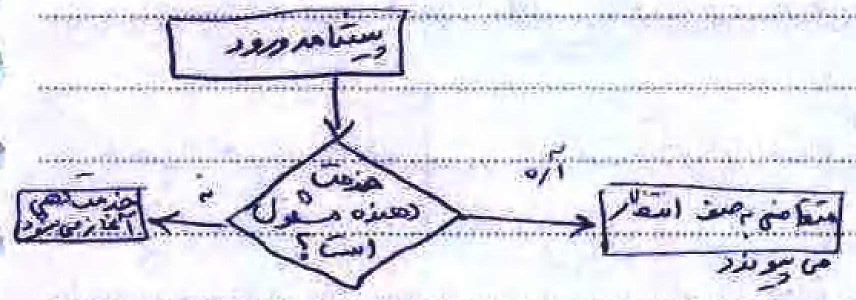
زمان خروج بنده‌ها از سیستم زمانی است که سرویس‌دهی تکمیل شود.

(نمودار جریان مربوط به خدمت‌دهی تازه تکمیل شده):



Subject:
Year Month Date ( )

دیاگرام جریان ورود به سیستم :



اقدام متقاضی : "عملیات منظور به هنگام ورود یک متقاضی"

		وضعیت صف: خالی	وضعیت صف: غیرخالی
وضعیت خدمت‌دهنده	مشغول	ورود به صف	ورود به صف
	بیکار	شروع خدمت‌دهی	غیرممکن

وضعیت سرور بعد از پایان خدمت دهی :

		وضعیت صف: خالی	وضعیت صف: غیرخالی
وضعیت خدمت‌دهنده	مشغول	ناممکن	
	بیکار		ناممکن

برای تأخیر در مواردی که population یا جمعیت مقدار صفر دارد امکان پذیر است (صف خالی و سرور مشغول)

یک قضیه بسیار مهم : اگر نرخ ورود ها دارای توزیع گسسته پواسن با میانگین λ باشد، آنگاه فاصله زمانی

بینِ آمدن بهاها دارای توزیع پیوسته نمایی با میانگینِ $\frac{1}{\lambda_1} = \mu$ خواهد بود و برعکس. پس:

Arrival Rate (Descret) ⟷ Inter Arrival Time (continuos)

poisson ⟷ Exponential

$E(x) = \lambda$ ⟷ $E(x) = \mu = \frac{1}{\lambda}$

توزیع پواسن و نمایی هر دو دو روی یک سکه هستند، هر دو memoryless یا بدون حافظه هستند، یعنی احتمال اینکه یک اتفاق در آینده رخ دهد هیچ ربطی به رخدادهای گذشته ندارد. تحلیلِ صف‌هایی که بصورت memoryless باشند توسط مارکوف صورت گرفته است.

در آغاز شبیه‌سازی چه باید کرد؟

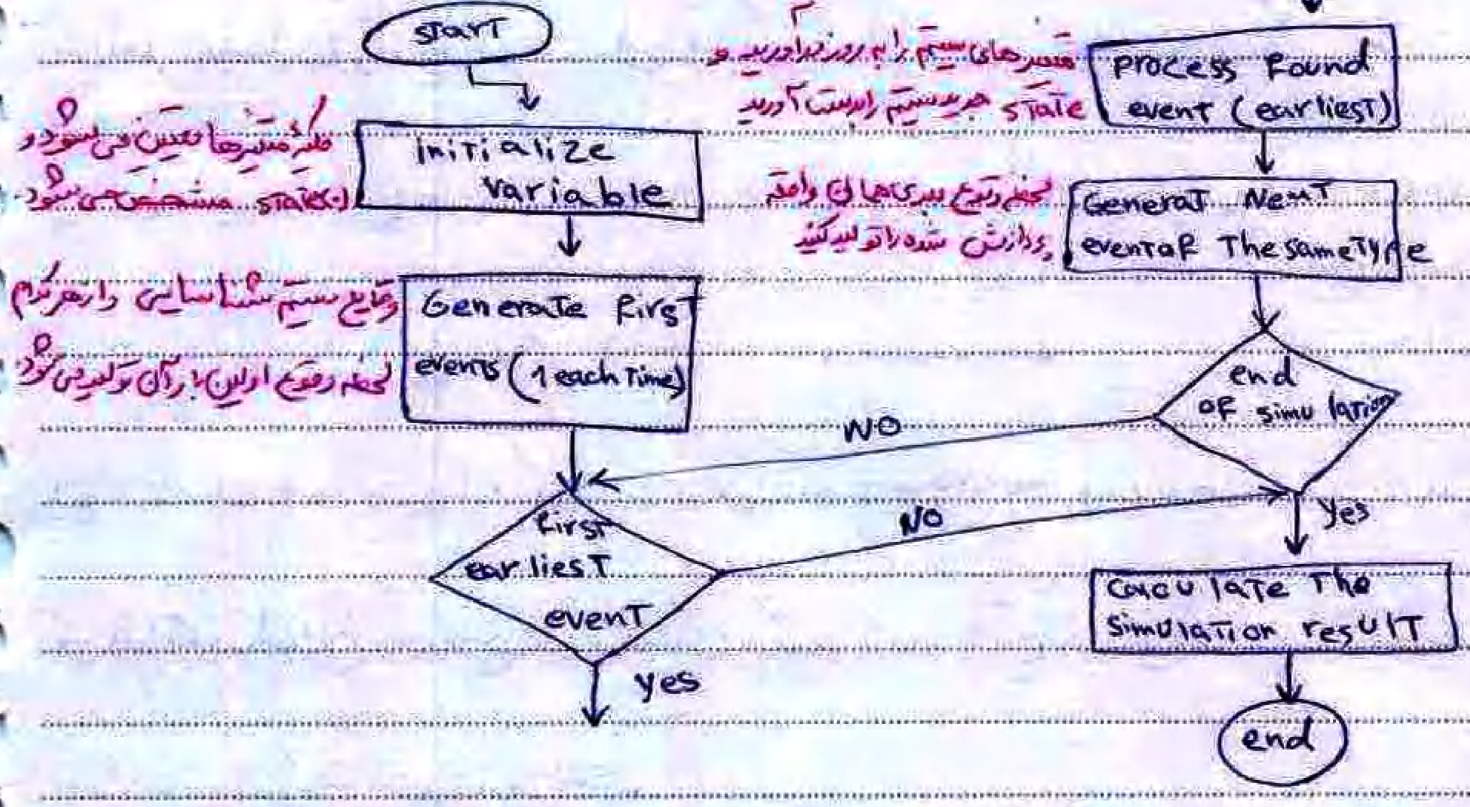
۱. تشخیص متغیرها و تعریفِ آنها و مقداردهی اولیهٔ آنها (initialiaze)

۲. تشخیصِ وضعیت سیستم ۳. تشخیص event، باید بدانیم در این سیستم چه نوع واقعه رخ می‌دهد وابسته

۳-۱ تولید اولین واقعه از هر نوع

(فلوچارت در صفحهٔ بعد)

Subject:
Year Month Date ( )



شبیه‌سازی یک صف M/M/1/10 (۹ طول صف)

هدف: درصد تعداد بسته‌های گم شده یا block شده = $\dfrac{\text{تعداد بارهای گم شده}}{\text{تعداد کل}}$ (تعداد کل ← 10^6)

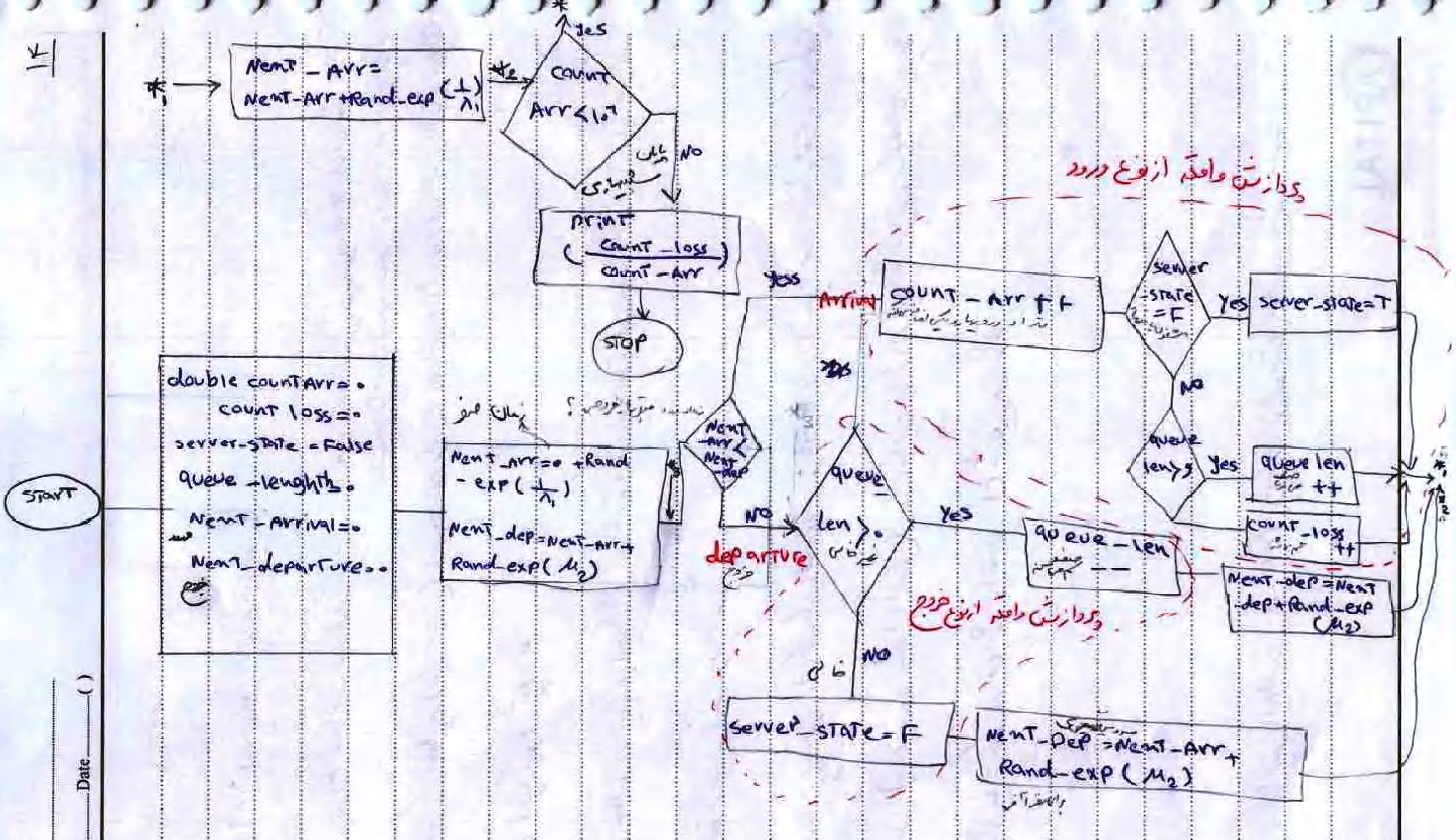
Variable		توضیح	مقدار اولیه
count_arrival	double	تعداد بارهای تولید شده ورودی	=0
count_loss	double	" " loss یا گم شده یا بلوکه شده	=0
server_state	booleam	وضعیت سرویس‌دهنده (بیکار F ، مشغول T)	=F
queue_length	double	طول صف	=0

فلوچارت این مثال در صفحه بعد ⟵

تولید عدد تصادفی — توزیع نمایی — میانگین

Rand_exp (m) ⟹ زمان‌های بین ورود $(\frac{1}{\lambda_1}) = \mu_1$

خدمت‌دهی $(\frac{1}{\lambda}) = \mu_2$



مدت زمان بین ورود $= Rand\_exp(\frac{1}{\lambda_1})$

Subject:
Year Month Date ( )

رفتار گذرا و پایای سیستم‌های صف :

یک سیستم $M/M/1/1/\infty$ را در نظر بگیرید :

پواسن — نمایی — تعداد سرور — ظرفیت سیستم — جامعه نامحدود

$1 + 0 = 1$

در لحظهٔ صفر خالی و بعد از فعالیت در نظر می‌گیریم ... هیچ وقت صف تشکیل نمی‌شود، کارها وارد می‌شوند و در صورت مشغول بودن سرور، دوباره به جمعیت می‌پیوندند و اگر نه سرویس می‌گیرند.

به عبارت دیگر یک صف تک‌جایی (یک سرور) با ورودهای پواسن با میانگین λ ورود در واحد زمان و زمان‌های خدمت‌دهی نمایی با میانگین μ^{-1} *

$L(t)$ تعداد مشتری حاضر در سیستم در لحظهٔ t می‌باشد، که در این سیستم دو وضعیت دارد یا $L(t)$ صفر است یا یک. چون وضعیت تعداد سرور با یک برابر است.

مثال. یک سکوی بارگیری که فضایی برای یک کامیون دارد، و فاقد جا برای تشکیل صف انتظار است، را در نظر بگیرید. اگر کامیونی در سکوی بارگیری باشد (یعنی سرور مشغول است) تمام کامیون‌هایی که وارد می‌شوند باید به سکوهای دیگر بروند. هر گاه کامیونی وارد شود یا از سکو دور می‌شود و یا تخلیهٔ آن شروع می‌شود.

کامیون‌ها پواسن وارد می‌شوند: در ساعت $\lambda = 2$

زمان تخلیهٔ آنها (دقیقه) $\mu^{-1} = 120$ نمایی در نظر می‌گیریم: $\mu^{-1} = 120$

فرض کنید سکو در لحظهٔ صفر خالی است. وقت‌های بین ورود تولید شده برحسب دقیقه عبارت است از:

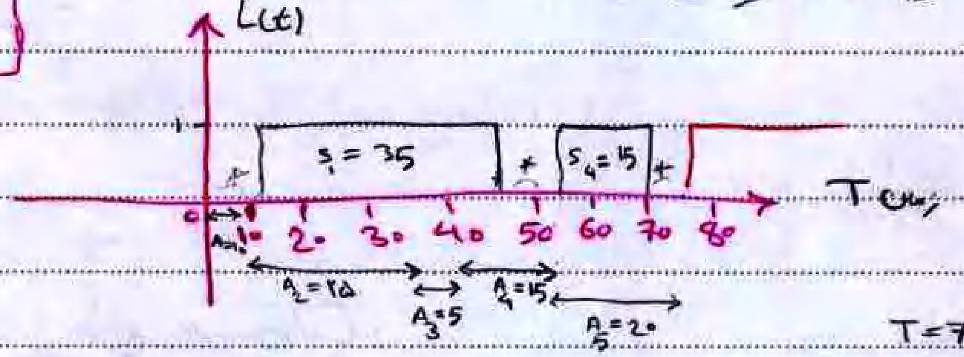
CAPITAL

مدت‌های بین ورود — مدت‌های سرویس‌دهی

$A_1 = ۱۰$ — $S_1 = ۳۵$
$A_2 = ۲۵$ — $S_2 = ۲۰$
$A_3 = ۵$ — $S_3 = ۶۰$
$A_4 = ۱۵$ — $S_4 = ۱۵۰$
$A_5 = ۲۰$ — $S_5 = ۱۳۴$

(وضعیت گذشته سیستم سکوی بارگیری ولف)

رفتارنما



T=75

[0, 75]

[0, T]

مدت شبیه‌سازی 75

نمایشی از تغییرات L(t) یعنی تعداد مشتریان در لحظه t در شکل الف در شکل زیر آمده:

ضریب بهره‌برداری مشاهده شده یا درصد مدتی که از لحظه صفر تا دقیقه T=75 خدمت‌دهنده مشغول

است با $\hat{\rho}$ (روخته) عادگذاری و بر اساس اطلاعات شبیه‌سازی به طریق زیر برآورد می‌شود:

$$\hat{\rho} = \frac{۳۵+۱۵}{۱۰+۲۵+۵+۱۵+۲۰}$$

آماره $\hat{\rho}$ را می‌توان به صورت:

فرمول

$$\hat{\rho} = 0\left(\frac{T_0}{T}\right) + 1\left(\frac{T_1}{T}\right) = 0\left(\frac{۲۵}{۷۵}\right) + 1\left(\frac{\underset{۳۵+۱۵}{۵۰}}{۷۵}\right) = \%۶۷$$

ظرفیت سیستم (۹+۱)

$$\sum_{i=0}^{(9+1)} i \, \frac{T_i}{T}$$

CAPITAL

Subject:
Year Month Date ( )

به دراین $\frac{T_c}{T}$ معرف درصد مدتی است که متقاضی درحال دریافت خدمت هستند و $\hat{\rho}$ را پیمایش میزان

زمانی یا میانگین زمانی که از طریق اشتراک گیری نسبت به زمان بدست می آید می نامند *

در بسیاری از سیستم ها چنین که جنبه حیات سیستم در طولانی مدت یا وضعیت پایا علاقه مند است. درصد مدت بهره برداری

خدمت دهنده در هر سیستم صف $\frac{\lambda}{\mu}$ min می نامند را می توان از طریق ریاضی به دست آورد که بصورت زیر است:

درحالت پایا $\hat{\rho}$ استفاده بود دریابال در سیستم ρ یعنی ۸ برابر خواهد شد.

$$\rho = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{2}{2+0.5} = 0.8$$

علاوه بر این ρ از شرایط شروع مستقل است.

باید توجه داشت که ضریب بهره برداری در بلندمدت ثابتی بین صفر و یک است

حال آن ضریب بهره برداری مشاهده شده $\hat{\rho}$ متغیر تصادفی است زیرا به ورودهای تصادفی و پیمایش های تصادفی خدمت دهی

بستگی دارد. پس ضریب بهره برداری یک عدد نیست ولی در نهایت برابر کوتاه مدت است.

به علاوه $\hat{\rho}$ به T یعنی طول مدت مشاهده سیستم و به I یعنی شرایط شروع (وضعیت سیستم در لحظه صفر)

بستگی دارد، به هر حال با بزرگ شدن مقدار T تأثیر شرایط شروع تخفیف یافته و قابل گذشت است و

$\hat{\rho}$ به ρ میل می کند. $(\hat{\rho} \to \rho)$ *

$$\hat{\rho} \to \rho$$

پس صرف نظر از شرایط شروع I : $T \to \infty$ *

CAPITAL

با استفاده از نظریه ریاضی صف می توان نشان داد که توزیع احتمال تعداد متقاضی در سیستم در لحظه t یعنی $L(t)$ به شرح زیر است:

احتمال اینکه $L(t)$ صفر باشد

چون خروجی است — اینجوری

$$P(L(t)=0)=P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+a_0e^{-(\lambda+\mu)t}$$

در زمان شروع صفر می شود

چون ورودی ... وارد شود

$$P(L(t)=1)=P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+a_1e^{-(\lambda+\mu)t}$$

وقتی که منتظر هست

که a_0 و a_1 ثابتهای مستقل از t، ولی وابسته به شرایط شروع I هستند.

$P_0(0)=a_0+a_0'$

زمان شروع

$$a_0=P_0(0)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$ *

در لحظه شروع به جای I اگر صفر بدهیم برابر است با این ... شرط ... این فرمول ←

$$a_1=P_1(0)-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

چون $\lambda>0$ و $\mu>0$ است صرف نظر از شرایط شروع I، با میل t به سمت بی نهایت داریم:

$$e^{-(\lambda+\mu)t}\longrightarrow 0 \qquad e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=0$$

$$P_0(t)\longrightarrow P_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$P_1(t)\longrightarrow P_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

a_0 و a_1 هم صفر می شوند ... بی نهایت می شود

احتمالات $\{P_i(t)\}$ احتمالات گذرا می باشند. زیرا احتمالات وضعیت سیستم در لحظه t هستند.

$\forall t\geq 0$

$P_0(t)+P_1(t)=1$ گرفتار در یک لحظه

و به همین ترتیب داریم:

$P_0+P_1=1$ در بلندمدت

Subject:
Year Month Date ( )

به این شرط که سیستم در لحظهٔ صفر در وضعیت i باشد. در این حالت $P_0(0)$ و $P_1(0)$ تعریف شوند

به احتمالات P_0 و P_1 احتمالات حالت پایا می گویند ★

پس از یک دورهٔ زمانی به اندازه کافی طولانی گفته می شود که سیستم در حالت پایا یا به طور دقیق تر در حالت

تعادل آماری است. یعنی سکو به احتمال در لحظهٔ اختیاری از زمان مشاهده می کند به احتمال

$P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ آن را خالی و به احتمال $P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ آن را اشغال می یابد ★

مثال: سکوی تخلیه و بارگیری مثال قبل را در نظر بگیرید، فرض کنید که سیستم در لحظهٔ صفر خالی است، بنابراین

داریم: $P_0(0) = 1$ $P_1(0) = 0$
زمان شروع که سکو خالی

داریم: ★

$$P_0(t) = \frac{/5}{2+/5} + \left(1 - \frac{/5}{2+/5}\right)e^{-2/5t} = /2 + /8e^{-2/5t}$$

$$P_1(t) = \frac{2}{2+/5} + \left(0 - \frac{2}{2+/5}\right)e^{-2/5t} = /8 - /8e^{-2/5t}$$

$$t \longrightarrow \infty \Rightarrow P_0 = /2 \ , \ P_1 = /8$$

فرض کنید نرخ ورود به سکو معادل ۲ کامیون در ساعت است، به سبب محدودیت مربوط به ظرفیت سیستم

این امکان از عهده به عمل درمی آید.

آهنگ مؤثر ورود که به صورت متوسط تعداد متقاضیان وارد شده به سیستم در ساعت تعریف می شود

CAPITAL

Subject: احتمال اینکه پر باشد

$P_0 + P_1 = 1$

$P_0 = 1 - P_1$

عبارت است از: $\lambda_e = \lambda(\underbrace{1 - P_1}_{P_0}) = 0/4$

احتمال اینکه صف خالی باشد $\leftarrow P_0$

P_1 احتمال اینکه صف پر باشد *

همچنین آهنگ مؤثر خدمت دهی را به صورت متقاضیان (تعداد) خدمت گرفته در واحد زمان تعبیر می‌شود، عبارت است از: $\mu_e = \mu\,(\underbrace{1-P_0}_{P_1}) = (0/5)\times(0/8) = 0/4$

به طور کلی در مورد سیستم هایی که ورودیه محدود است این است اگر N ظرفیت سیستم باشد، آهنگ مؤثر ورود عبارت است

$$\lambda_e = \lambda(1 - P_N)$$

زیرا متقاضی می‌تواند با احتمال $1 - P_N$ به سیستم راه یابد. به علاوه آهنگ مؤثر خدمت دهی برای صف هایی با یک خدمت دهنده، عبارت است از:

$$\mu_e = \mu(\underbrace{1 - P_0}_{P_1})$$

در صورتی که سیستم در حال تعادل آماری است پس آهنگ مؤثر خدمت دهی و آهنگ مؤثر ورود با هم مساوی می‌شوند.

معیارهای عملکرد سیستم‌های صف در بلندمدت:

۱- میانگین تعداد متقاضیان حاضر در سیستم در بلندمدت (L)

۲- میانگین تعداد متقاضیان حاضر در صف انتظار در بلندمدت L_Q

۳- میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در سیستم در بلندمدت (W)

Subject:
Year Month Date ( )

۴- میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در صف انتظار در بلندمدت W_Q

۵- ضریب بهره برداری خدمت دهنده یا درصد مدت بهره برداری خدمت دهنده f

ظرفیت ایستگاه

در این بخش به تشریح معیارهای اصلی عملکرد، برای سیستم کلی صف G/G/C/N/K

تعداد سرور

در مجموع ۲ مدل وجود دارد: ۱- میانگین معمولی سنجی ۲- میانگین موزون زمانی سنجی

میانگین زمانی تعداد در سیستم (L): (L) حرف تعداد متقاضیان حاضر در سیستم

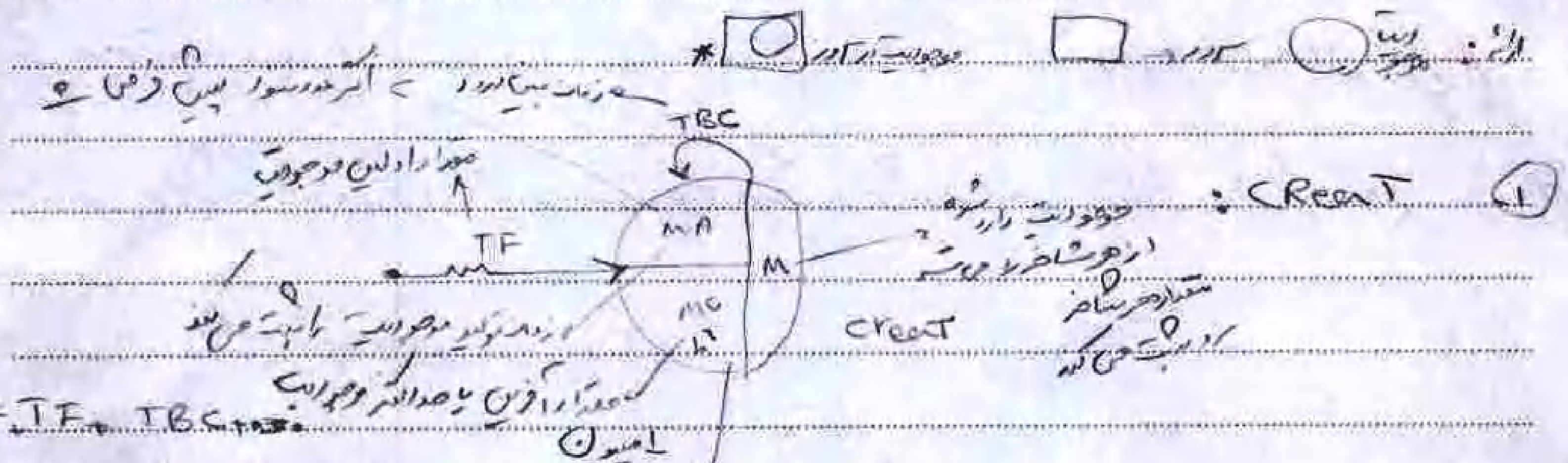
T_i مجموع مدتی که در دوره ی زمانی (T و 0) دقیقاً i متقاضی در سیستم وجود دارند

در شکل ب) دیده می شود که $T_3=3$ و $T=12$ ، $T_2=4$ ، $T_1=1$ به طوری که $\sum_{i=0}^{\infty} T_i = T$ میانگین موزون

زمانی تعداد در سیستم به شرح زیر تعریف می شود:

$$\hat{L} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i T_i}{T} = \sum_{i=0}^{\infty} i \left(\frac{T_i}{T}\right)$$

الف: موجودیت ○ منبع □ * موجودیت در منبع



ص ۴۲۳ مثال ۵-۱۰

نرم افزار AWESIM

(۱۰) enpone — TBC

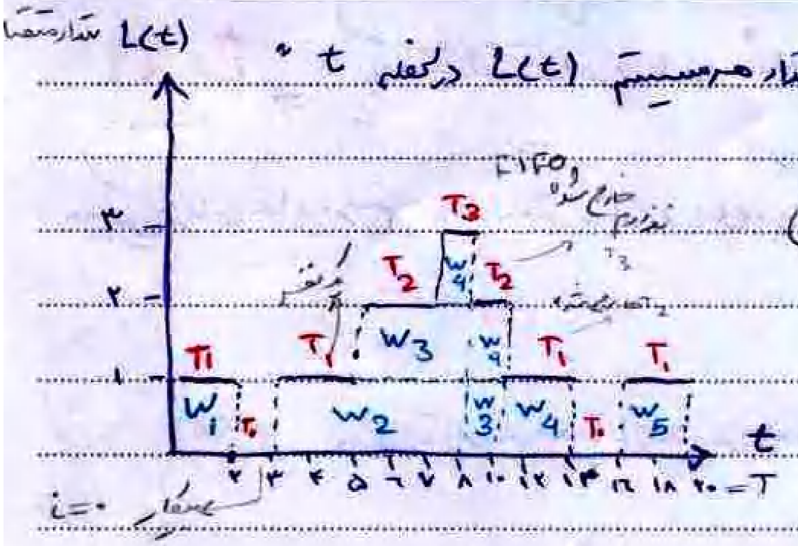
userF با توجه به خواسته های کاربر تابع user تعریف میشود

⑤ Terminate

CAPITAL

تعداد هر سیستم $L(t)$ در لحظه t

شکل ب (شکل در دفتر هست)



$i = 2$ یعنی ۲ نفر در سیستم داریم

$\hat{L} \to L$

$T \to \infty$

همچنین با الا در شکل معرف یک ورود به سیستم است.

$$\sum_{i=0}^{\infty} T_i = T$$

$$\hat{L} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} iT_i}{T} = \sum_{i=0}^{\infty} i\left(\frac{T_i}{T}\right) \quad *$$

$$\hat{L} = [0(3) + 1(12) + 2(4) + 3(1)]/20 = \frac{23}{20} = 1.15$$

$\frac{T_i}{T}$ معرف درصد مدتی است که سیستم دقیقاً i متقاضی را در بر دارد. $[0,20]$ $[0,T]$

با بررسی شکل ب دیده می‌شود که مجموع مساحت زیر تابع $L(t)$ را می‌توان به مستطیل‌هایی با ارتفاع i و عرض T_i تجزیه کرد:

$$\hat{L} = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{\infty} iT_i = \frac{1}{T}\int_0^T L(t)\,dt \quad **$$

صرف‌نظر از تعداد خدمت‌دهنده‌ها و در شرایط ای ان تاون صف و در حرکت شرایط دیگر، دو معادله * و ** با هم مساوی‌اند. معادله ** استفاده از عنوان «میانگین انتگرال‌گیری شده نسبت به زمان» را توجیه می‌کند.

با بزرگ شدن T میانگین زمانی مشاهده شده تعداد حاضر در سیستم $\hat{L}$ به مقدار حدی مانند L $\hat{L} \xrightarrow[T\to\infty]{} L$

میانگین زمانی تعداد در سیستم در بلند مدت نام دارد میل می کند یعنی:

اگر $L_Q(t)$ معرف تعداد متقاضیان حاضر در صف انتظار و T_i^Q معرف مجموع مدت حضور

دقیقاً i متقاضی در فاصله زمانی $[0,T]$ در صف انتظار باشد داریم:

$$\hat{L}_Q = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{\infty} i\,T_i^Q = \frac{1}{T}\int_0^T L_Q(t)\,dt \xrightarrow[T\to\infty]{} L_Q$$

میانگین زمانی مشاهده شده تعداد متقاضیان حاضر در صف انتظار از لحظه صفر تا t

میانگین زمانی تعداد در صف انتظار در بلند مدت

مثال: فرض کنید شکل ب مربوط به صف تک مجرایی یعنی سیستم صف $G/G/1/N/K$ با $K \geq 3$ و $N \geq 3$

جمعیت بالقوه

به این ترتیب تعداد متقاضیانی که صرفاً در صف انتظار هستند به صورت زیر تعریف می شوند و در حالت شکل ج نشان داده می شود

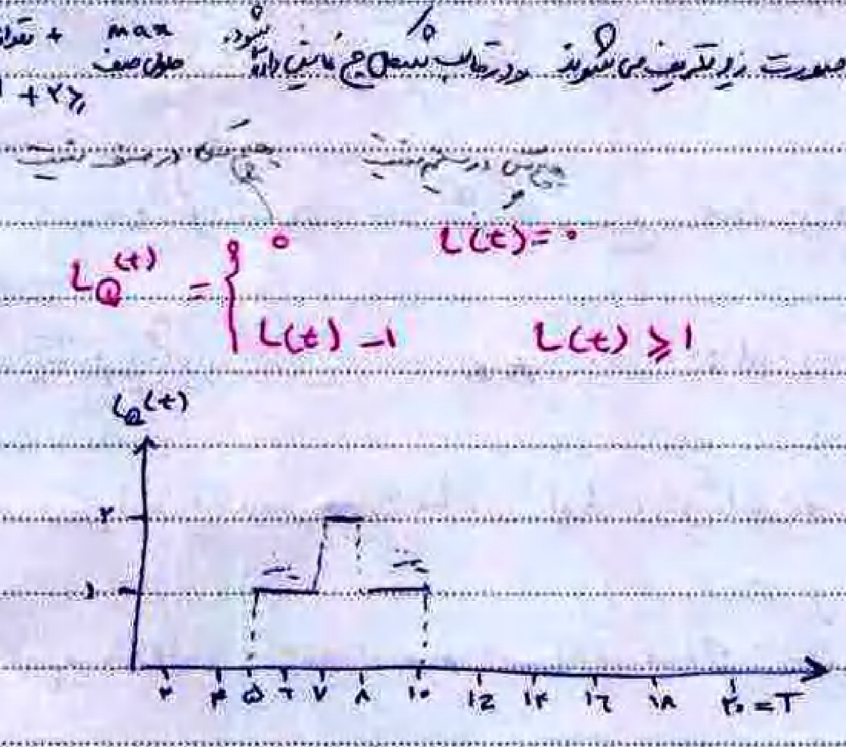
max طول صف + تعداد موجود در خدمت $1+2 \geq$

هیچ کس در سیستم نیست   هیچ کس در صف نیست

$$L_Q(t) = \begin{cases} 0 & L(t) = 0 \\ L(t) - 1 & L(t) \geq 1 \end{cases}$$

شکل ج)

تعداد در صف انتظار $L_Q(t)$ در لحظه T



بنابراین داریم:

$$T_0^Q = 5 + 10 = 15$$
$$T_1^Q = 2 + 2 = 4 \longrightarrow \hat{L}_Q = \frac{0(15) + 1(4) + 2(1)}{20} = 0/3$$
$$T_2^Q = 1$$

میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در سیستم: با w . مدتی که هر متقاضی در $[0,T]$ در سیستم به سر می‌برد را

برابر w_1 و w_2 ... w_N در نظر بگیرید. (N تعداد موارد ورود بین $[0,T]$ است) در این صورت میانگین مدت

به سر بردن هر متقاضی در سیستم که میانگین مدت سیستم نامیده می‌شود: (از طریق میانگین معمولی نمونه به دست می‌آید):

$$\hat{w} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} w_i$$

درمورد سیستم‌های پایدار با میل N به سمت ∞ داریم: $\hat{w} \longrightarrow w$

اگر سیستم در دست بررسی صرفاً یک صف انتظار برای تعمیر داریم:

$$\hat{w}_Q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} w_i^Q \xrightarrow[N \to \infty]{} w_Q$$

که w_i^Q مجموع مدت به سر بردن متقاضی i در صف انتظار و $\hat{w}_Q$ میانگین مشاهده شده مدت به سر بردن در صف و w_Q میانگین تأخیر در بلند مدت برای هر متقاضی است. باشد و $\hat{L}$ و $\hat{w}$ برآورد کننده‌های شاخص تحت شبیه‌سازی با شروع I و طول مدت اجرا T قرار دارد.

مثال: درمورد پیشینه سیستم که در شکل ب نشان داده شده داریم:

$N = 5 \longrightarrow$ ورودها جهت پیش‌بینی

$w_1 = 2$ تک سرور و روش نوبت دهی FIFO

$w_5 = 4$ $20 - 16 = 4$

ولی w_2 و w_3 و w_4 را نمی‌توان به سبب در نظر گرفتن اطلاعات بیشتری از سیستم حدس زد باشد. پس ورودها در لحظه صفر، ۳، ۵، ۷ و ۱۶ است و ترک از سیستم در لحظه‌های ۲، ۸، ۱۰، ۱۴ و ۲۰ است.

دومین نفر از ابتدا وارد شده و ... خارج شده

مدت سوال　　　مدت سوال

$W_2 = ۸ - ۳ = ۵$

$W_3 = ۱۰ - ۵ = ۵$　　　$\hat{W} = \frac{۲ + ۵ + ۵ + ۷ + ۴}{۵} = \frac{۲۳}{۵} = ۴/۶$

$W_4 = ۱۴ - ۷ = ۷$

مدت بسر بردن در صف انتظار:

$W_1^Q = ۰$ مدت در صف نبوده نفر اول

$W_2^Q = ۰$ در صف نبوده نفر دوم

$W_3^Q = ۸ - ۵ = ۳$　ورود در صف تا خروج نفر قبلی　　$\hat{W} = \frac{۰ + ۰ + ۳ + ۳ + ۰}{۵} = ۱/۲$

$W_4^Q = ۱۰ - ۷ = ۳$

$W_5^Q = ۰$

معادله بنیادی: $L = \lambda W$　mr. (little)　سال ۱۹۶۱

در سیستم نشان داده شده در شکل ب داریم: $N = ۵$ ، $\hat{\lambda} = \frac{N}{T} = \frac{1}{4}$ ← آهنگ مشاهده شده ورود

$\hat{W} = ۴/۶$ ، $\hat{L} = ۱/۱۵$

$\hat{L} = \hat{\lambda} \times \hat{W} \Longrightarrow L = \lambda W$　نسبت ورود در دراز مدت

$۱/۱۵ = \frac{1}{4} \times ۴/۶$　$N \to \infty$، $T \to \infty$

با بررسی شکل ب می‌توان مدت‌های به سر بردن مشتریان داخل سیستم را که با W_i نشان می‌داریم، به سهولت محاسبه کنیم و به شکل (د) برسیم. در صفحه اول اگر ترتیب W_iها را مشخص می‌شود: (مدت‌های به سر بردن هر سیستم W_iها در سیستم صف تک مجرایی با خدمت‌دهی FIFO)

مجموع مدت سیستم برای تمام مشتریان برابر مساحت زیر تابع $L(t)$ است. یعنی:

$$\sum_{i=1}^{N} W_i = \int_0^T L(t)\,dt$$

بنابراین با تلفیق معادلات:

$$\hat{L} = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{\infty} i T_i = \frac{1}{T} \int_0^T L(t)\,dt$$

و $\hat{W} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} W_i$ و $\hat{\lambda} = \frac{N}{T}$ داریم:

$$\hat{L} = \frac{1}{T} \int_0^T L(t)\,dt = \frac{N}{T} \times \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} W_i = \hat{\lambda}\hat{W}$$

ضریب بهره برداری خدمت دهنده :

ضریب بهره برداری را نسبت به مدت زمان خدمت دهنده مشغول است تعریف می کنند. ضریب بهره برداری مشاهده شده ($\hat{\rho}$) نشان داده می شود. برای یک فاصله زمانی مشخص مانند $[0, T]$ تعریف می شود. ضریب بهره برداری خدمت دهنده در طول مدت با ρ نشان داده می شود. $\hat{\rho} \xrightarrow{T \to \infty} \rho$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{T} \left(\text{مجموع مدت بهره برداری} \right) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{T - T_0}{T} = \frac{17}{20}$$

جمع مدت زمانهایی که سرور مشغول کار بوده است

ضریب بهره برداری در صفهای $G/G/1/\infty/\infty$ صف memory less هم می تواند باشد

میانگین نرخ ورود

معادلات : ورودی λ خدمت دهی $E(S) = \frac{1}{\mu}$ چنین می رساند که به طور متوسط سرعت خدمت دهی به عنوان یک سیستم فرعی است که می توان آن را سیستم به شمار آورد، و از این رو $L = \lambda w$ را می توان در مورد خدمت دهنده به کار برد. در مورد سیستم های پایدار میانگین آهنگ ورود به خدمت دهنده (مثلاً λ_s) باید با میانگین ورود به سیستم (λ) یکسان باشد:

$if\ \lambda_s < \lambda$ (سیستم ناپایدار) $\Rightarrow \lambda - \lambda_s$ طول صف انتظار با آهنگ متوسط در واحد زمان رشد می کند

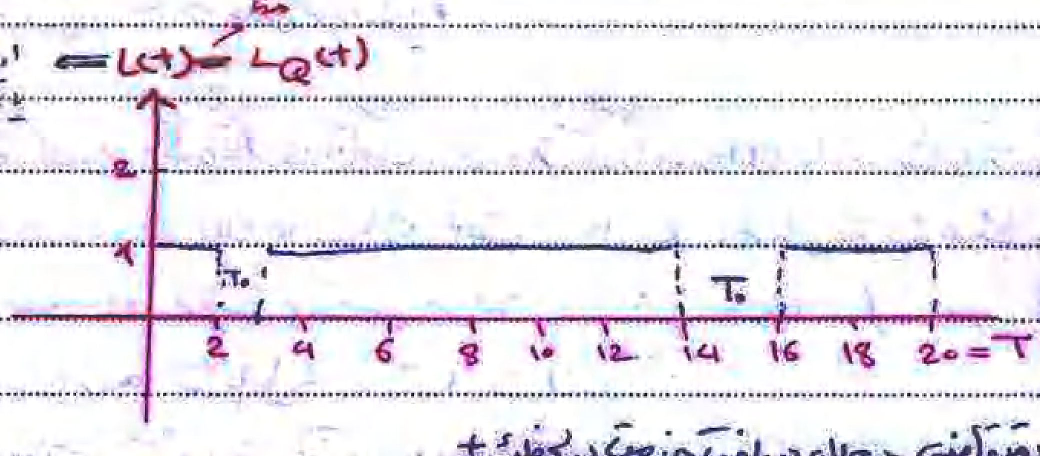
$if\ \lambda_s > \lambda$ (سیستم پایدار)

$\lambda - \lambda_s = 50 - 20 = 30$
اگر ۹۰ نفر λ_s باشد
اگر ۵۰ نفر در ۵ ۲۰ نفر سرویس گرفته اند

$W = E(S) = \mu^{-1}$ میانگین مدت سیستم در مورد سیستم فرعی خدمت دهنده

waiting = زمان در سیستم

او شامل کارهایی در سرور هست که یکی است یا صفر $= L(t) - L_Q(t)$



هـ) تعداد مشتریانی در حال دریافت خدمت در لحظه t

شکل هـ، تعداد واقعی مشتریانی حاضر در سیستم فرعی مشتری در مورد سیستم تصویر شده در شکل ب را نشان می دهد که همواره برابر صفر و یک است.

$$\hat{L}_s = \frac{1}{T} \int_0^T \left(L(t) - L_Q(t) \right) dt = \frac{T - T_0}{T}$$

$$\hat{L}_s = \hat{\rho} = \frac{17}{20}$$

$T \to \infty \Rightarrow L_s = \rho$

Subject: ____________________

Year ________ Month ________ Date ________ ( )

خود درس سیستم صف‌ها از ۲ تا ۸

برای سیستم فرایند خدمت‌دهنده، با استفاده از $L = \lambda W$ داریم $\rho = \lambda E(S) = \frac{\lambda}{\mu}$

اسم $\frac{\lambda}{\mu} < 1 \Leftarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ * اگر $\lambda > \mu$ ⟵ صف انتظار با آهنگ $\lambda - \mu$

متناهی در واحد زمان رشد می‌کند، در این سیستم‌های ناپایدار ضریب بهره برداری خدمت دهنده در بلندمدت

یک و میانگین طول صف در بلندمدت نامتناهی است یعنی

$$\frac{1}{T}\int_0^T L_Q(t)\,dt \xrightarrow[T\to\infty]{} L_Q = \infty \qquad \text{همچنین } L = W = W_Q = \infty$$

به مقدار $\frac{\lambda}{\mu}$ شدت آمد و شد می‌گویند، زیرا معیاری است که حجم کار عرضه شده به سیستم را می‌سنجد.

c خدمت‌دهنده یکسان و موازی،

ضریب بهره برداری در صف‌های ∞/∞ یا $G/G/1$

فرض: ورودی λ، سرویس μ، با استفاده از قانون little میانگین تعداد خدمت دهنده‌های مشغول (L_s) برای سیستم که در حالت تعادل آماری است از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$L_s = \lambda E(S) = \lambda \times \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$(0 \le L_s \le c),\ \rho = \frac{L_s}{c} = \frac{\lambda}{c\mu} \qquad \text{هستیم } (0 \le \rho \le 1)$$

تعداد مشغول در پایدار

بالاترین آهنگ خدمت دهی برای چنین سیستم‌هایی $c\mu$ است (چون تمام سرورها مشغول اند)

$\lambda < c\mu \Rightarrow$ سیستم پایدار $\Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} < c$ (شدت آمد و شد < تعداد سرورها)

$\lambda > c\mu \Leftarrow$ سیستم ناپایدار — طول صف انتظار با آهنگ $\lambda - c\mu$ متناهی در واحد زمان رشد می‌کند و L،

W و W_Q هم بی معنی می‌شود.

مثال: متقاضیان به طور تصادفی و با آهنگ $\lambda = 50$ متقاضی در واحد زمان به اداره شماره گذاری خودرو وارد می‌شوند.

تعداد خدمت دهنده‌ها در حال حاضر ۲۰ نفر، $c = 20$ که به طور متوسط هر یک به $\mu = 5$ متقاضی در ساعت

خدمت می‌دهد. به این ترتیب به موجب معادله ضریب بهره برداری هر خدمت دهنده $\rho = \frac{L_s}{c} = \frac{\lambda}{c\mu}$

در بلندمدت یا در حالت پایا عبارت است از: $\frac{50}{20 \times 5} = 0/5$

و میانگین تعداد خدمت دهنده‌های مشغول عبارت است از: $L_s = c\rho = 20\,(0/5) = 10$

به این ترتیب در بلندمدت تنها در ۵۰ درصد از زمان یک خدمت دهنده در حال خدمت دادن به متقاضیان است.

رئیس اداره با این پرسش روبرو است که آیا می‌توان تعداد خدمت دهندگان را کاهش داد؟

برای پایدار ماندن سیستم لازم است که $\frac{\lambda}{\mu} < c$ تعداد خدمت دهنده

در را تعبیه صدق کند $\frac{50}{5} = 10 < c$

بین اعداد نهایی که در برابر [illegible] ارتباط برقرار می‌کند عبارت است از $c=11$ یا $c=12$ یا $c=13$ و ... باید توجه داشت که شرط $c\mu>\lambda$ تنها بیان این تعبیر متضمن پایداری در بلند مدت است که به طور متوسط تمام خدمت دهنده‌ها در صورت بهره برداری می‌توانند حجم کار وارد شده را پاسخ بدهند یعنی $c\mu>\lambda$ ... اداره ممکن است به سبب عوامل دیگری از قبیل مدت‌های انتظار متقاضی و طول صف انتظار مایل به در اختیار داشتن تعداد خدمت دهنده‌ای بیش از حداقل مورد نیاز یا $c=11$ باشد.

عامل هزینه در مسائل صف:

هزینه به جنبه‌های مختلف صف انتظار و به خدمت دهنده تعلق می‌گیرد. فرض کنید که سیستم برای هر متقاضی حاضر در صف هزینه‌ای مثلاً به مقدار ۱۰ واحد پول در ساعت به بار می‌آورد. اگر متقاضی jام معادل W_j^Q ساعت در صف بماند هزینه کل مربوط به N متقاضی که در خلال شبیه سازی به سیستم وارد می‌شوند عبارت است از: $\sum_{j=1}^{N} 10W_j^Q$ هزینه متوسط هر متقاضی معادل $\frac{\sum_{j=1}^{N} 10W_j^Q}{N}=10\hat{W}_Q$ اگر به طور متوسط $\hat{\lambda}$ متقاضی در ساعت وارد شوند با استفاده از قانون ۳۳۴ (۱) متوسط هزینه در ساعت:

$$\left(\hat{\lambda}\ \text{متقاضی/ساعت}\right)\left(\frac{10\hat{W}_Q}{\text{متقاضی}}\right)=10\underbrace{\hat{\lambda}\hat{W}_Q}_{\hat{L}_Q}=10\hat{L}_Q \quad \text{هر ساعت}$$

اگر مجموع مدتی که در فاصله $[0,T]$ دقیقاً i متقاضی در سیستم حاضرند T_i^Q باشد هزینه به بار آمده توسط سیستم در مدتی که دقیقاً i متقاضی در سیستم حاضر بوده‌اند معادل $10iT_i^Q$ است. به این ترتیب، هزینه کل معادل $\sum_{i=1}^{\infty}(10iT_i^Q)$ است و متوسط هزینه در ساعت معادل $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{10iT_i^Q}{T}=10\hat{L}_Q$ (در ساعت). خدمت دهنده‌ها نیز ممکن است هزینه‌هایی به سیستم تحمیل کنند. [اگر هر خدمت دهنده به هنگام بهره برداری معادل ۵ واحد پول در هر ساعت به سیستم تحمیل کند]، هزینه کل خدمت دهنده‌ها در ساعت معادل است با $5(c\rho)$ زیرا $c\rho$ معرف میانگین تعداد خدمت دهنده‌ها مشغول است. اگر هزینه صرفاً هنگامی تحمیل شود که خدمت دهنده‌ها بیکارند، هزینه خدمت دهنده‌ها در ساعت معادل است با $5[c(1-\rho)]$ زیرا $c(1-\rho)=c-c\rho$ معرف میانگین تعداد خدمت دهنده‌های بیکار است.

رفتار حالت پایا در مدل‌های مارکوفی با جمعیت نامتناهی:

بررسی ما تاکنون در مورد سیستم به شکل گذرا بوده حال می‌خواهیم به شکل دیگری شرح دهیم: گفته می‌شود، سیستم صف در حالت تعادل آماری یا در حالت پایاست اگر احتمال بودن سیستم در یک وضعیت

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مشخص به زمان بستگی نداشته باشد یعنی اگر $P(L(t)=n)=P_n(t)=P_n$ از t مستقل باشد. پارامترهای حالت پایای L یعنی میانگین زمانی تعداد متقاضی حاضر در سیستم به صورت:

$L=\sum_{n=0}^{\infty} nP_n$ قابل محاسبه است. که $\{P_n\}$ احتمالات حالت پایا است. با استفاده از LITTLE داریم:

$W=L/\lambda$ آهنگ ورود $\quad W_Q=W-\mu^{-1} \quad L_Q=\lambda W_Q$

μ آهنگ خدمت دهی هر خدمت دهنده.

باید حفظ شود: پارامترهای حالت پایا برای صف M/M/1

$$L=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{\rho}{1-\rho}$$

$$W=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

$$\boxed{\rho=\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$W_Q=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$L_Q=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$P_n=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n=\rho^n(1-\rho)$$

مثال: معلوم شده که مدت های بین ورود مشتریان خدمت دهی در آرایشگاهی با یک خدمت دهنده توزیع نمایی دارد. در واقع میانگین مدت های بین ورود بالغ بر $\frac{1}{2}$ ساعت، و میانگین مدت خدمت دهی بالغ بر ۲۰ دقیقه است و این مدت ها هر ۲ توزیع نمایی دارند. ضریب بهره برداری خدمت دهنده و احتمالات وجود صفر، یک، دو، سه، چهار متقاضی یا بیشتر در مغازه به شرح زیر محاسبه می شود:

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{20}}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$$

$$P_0=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$P_1=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

$$P_2=1-\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$$

$$P_3=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$$

$$P_{4\geq}=1-\sum_{n=0}^{3}P_n=1-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}-\frac{4}{27}-\frac{8}{81}=\frac{16}{81}$$

Subject:

Year ____ Month ____ Date ____ ( )

از محاسبات باید دیده می‌شود که احتمال مشغول بودن آن را شبیه معادل $\rho = 1 - P_0 = \%67$ و در نتیجه احتمال

بیکار بودن او برابر ۰/۳۳ است. $\frac{1}{3}$ یا

متقاضی $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3-2} = 2$ میانگین زمانی تعداد مشتریان حاضر در سیستم

متقاضی $L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{4}{3(1)} = \frac{4}{3}$

ساعت $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{2} = 1$ little ★ ساعت $W_Q = W - \mu^{-1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2}{3(3-2)} = \frac{2}{3}$

CAPITAL