بسمه تعالی

جزوه

فیزیک ۲

دانشگاه

علم و صنعت

استاد

دکتر فرمان

فیزیک ۲ استاد فرمان — نویسنده: حامد جهانی

جلسه اول

الکترواستاتیک: ۱/ قانون کولن (کولمب) ۲/ میدان الکتریکی (عجم).

$\hat{u}$ = unit vector

۱/ قانون کولن: نیروهای بین مجذور فاصله‌ای با تندیری کولنی با بسیار هستند. هر دو بار به هم اثری (نیرویی) وارد می‌کنند که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$F \propto \frac{qq'}{r^2}$ اندازه $F = \frac{kqq'}{r^2} \Rightarrow \vec{F} = \frac{kqq'}{r^2}\hat{r}$

که $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ دو حالت: الف) اگر $qq' > 0 \Leftarrow \vec{F} \parallel \vec{r}$ ب) $qq' < 0 \Leftarrow \vec{F} \parallel -\vec{r}$

* اندازهٔ k را از طریق آزمایش محاسبه کرده‌اند. دو بار مشخص را به فاصلهٔ r از هم قرار می‌دهند و با استفاده از ترازوی پیچشی نیرو را به دست آورده طبق رابطهٔ زیر مقدار k را به دست می‌آورند: $k = \frac{Fr^2}{qq'}$

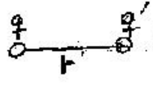
$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ قابلیت نفوذ الکتریکی در خلاء $= \varepsilon_0$

* فرمول نیوتن $F = G\frac{mm'}{r^2}$ مشابه قانون کولن با کاربرد مکانیکی است. اما برای نوشتن حالت برداری باید منفی اضافه کرد، $\vec{F} = -G\frac{mm'}{r^2}\hat{r}$ زیرا اینکه m و m' معمولاً مثبتند نیرو باید دافعه باشد اما نیرو همیشه جاذبه است.

* نیروی کولنی به مراتب (در حدود 10^{30} برابر) از نیروهای گرانشی قوی‌تر است. $F_e \gg F_g$

نیروهای موجود در طبیعت به ترتیب افزایش نیرو:
۱/ گرانشی
۲/ هسته‌ای ضعیف
۳/ الکتریکی
۴/ هسته‌ای قوی

۲/ میدان الکتریکی



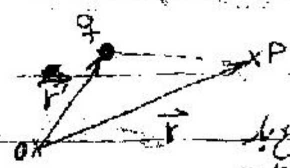
$\vec{F} = \frac{kqq'}{r^2}\hat{r}$

$q' = 1 \Rightarrow \vec{F} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$

هر بار در نقطهٔ P به فاصلهٔ R از خودش یک اغتشاش ایجاد می‌کند و این همان میدان است. اما چطور بفهمیم در جایی میدان وجود دارد؟ یک بار آزمون قرار می‌دهیم اگر نیرو وارد شد میدان وجود دارد.

$\left[\vec{F} = \frac{kqq'}{r^2}\hat{r}\right] \times \frac{1}{q'} \Rightarrow \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{kq}{r^2}\hat{r} = \vec{E}$ واحد: $N.C^{-1}$

* در فیزیک میدان نیرو را با فاصله صفر تعریف می‌شود.

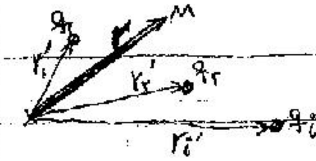


الف) میدان بار نقطه‌ای:

$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$ r: بردار موضع نقطه P نسبت به مرجع r': بردار موضع بار نسبت به نقطه مرجع

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}=\frac{kq(\vec{r}-\vec{r}')}{|r-r'|^3}} \qquad \vec{E}=\lim_{q'\to 0}\frac{\vec{F}}{q'}$$

ب) میدان در نقطه‌ای از فضا با وجود چند بار نقطه‌ای:



$$\vec{E}=k\sum \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

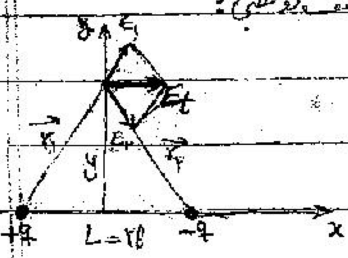
$$\vec{E}=k\sum \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}=\vec{E}(\vec{r})$$

جلسه دوم

دوقطبی: دو بار مساوی و مخالف تشکیل دوقطبی می‌دهند

گشتاور (ممان) دوقطبی: $\vec{P}=Lq\hat{i}$ جهت آن از بار منفی به سمت بار مثبت است.

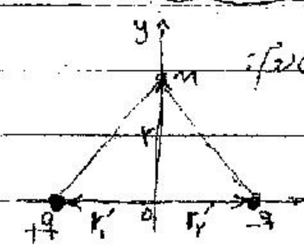
مثال: مطلوب است محاسبه میدان حاصل از یک دوقطبی در یک نقطه دلخواه به فرض روی عمود منصف دوقطبی:



$$\vec{E}_1=\frac{kq}{r_1^2}\hat{r}_1=\frac{kq}{y^2+l^2}\hat{r}_1 \quad , \quad \vec{E}_2=\frac{kq}{y^2+l^2}\hat{r}_2$$

$$E_t=2|E_1|\sin\theta=\frac{2kq}{y^2+l^2}\cdot\frac{l}{(y^2+l^2)^{1/2}} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_t=\frac{2kql}{(y^2+l^2)^{3/2}}\hat{i}}$$

روش دوم:



$\vec{r}=y\hat{j}$, $\vec{r}_1'=-l\hat{i}$, $\vec{r}_2'=l\hat{i}$

$$\vec{E}_t=k\left[\frac{q(y\hat{j}+l\hat{i})}{(y^2+l^2)^{3/2}}+\frac{-q(y\hat{j}-l\hat{i})}{(y^2+l^2)^{3/2}}\right]=$$

$$=\frac{kq}{(y^2+l^2)^{3/2}}\left(\cancel{y\hat{j}}+l\hat{i}-\cancel{y\hat{j}}+l\hat{i}\right)=\frac{2kql}{(y^2+l^2)^{3/2}}\hat{i}=\frac{kP}{(y^2+l^2)^{3/2}}\hat{i}$$

اگر در مسائل $x\ll 1$ باشد بسط تیلور

یا اگر $\frac{l^2}{y^2}=x \Rightarrow E_t=\frac{kP}{y^3(1+x)^{3/2}}=\frac{kP}{y^3}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$

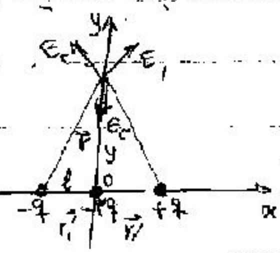
$$\Rightarrow E_t=\frac{kP}{y^3}\left(1-\frac{3}{2}x\right)\Rightarrow \boxed{E_t=\frac{kP}{y^3}\left(1-\frac{3l^2}{2y^2}\right) \quad : y\gg l \text{ اگر}}$$

این روش جهت $\vec{E}_t$ را هم مشخص می‌کند مرتب‌تر است.

نکته تستی: میدان بار نقطه‌ای و چهار بار دیگر

بار نقطه‌ای: $E\propto\frac{1}{r^2}$ دوقطبی $E\propto\frac{1}{r^3}$ چهارقطبی $E=\frac{1}{r^5}$

مثال: دو قطبی الکتریکی فرض کنید. ۱/ هر دو بار مثبت باشند و نتایج را بدست آورید. ۲/ با نتایج حاصل از قسمت اخیر یک بار $2q$- در وسط بارها قرار دهید و میدان کل را پیدا کنید. بر حسب نسبت $\frac{l}{y}$ در اندازه جواب نهایی بحث کنید.



$$\vec{E}_{t_1} = k\left[\frac{q}{(y^2+l^2)^{3/2}}(y\hat{j}+l\hat{i}) + \frac{q}{(y^2+l^2)^{3/2}}(y\hat{j}-l\hat{i})\right] =$$

$$= \frac{2kqy}{(y^2+l^2)^{3/2}}\hat{j} = \boxed{\frac{2kqy}{(y^2+l^2)^{3/2}}\hat{j}}$$

اگر خیلی دور باشد: $\vec{E}_{t_1} = \frac{2kqy}{y^3(1+\frac{l^2}{y^2})^{3/2}}\hat{j} = \frac{2kq}{y^2}\frac{1}{(1+\frac{l^2}{y^2})^{3/2}}\hat{j}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{t_1} = \frac{2kq}{y^2}\left(1-\frac{3l^2}{2y^2}\right)\hat{j}} \quad \Rightarrow x\approx 0 : |\vec{E}_t| = \frac{2kq}{y^2}\hat{j}$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t_1} + \vec{E}_{2q}$$

$$\vec{E}_t = -\frac{2kq}{y^2}\hat{j} + \frac{2kqy}{(y^2+l^2)^{3/2}}\hat{j} = \frac{2kq}{y^2}\left(-1+\frac{1}{(1+\frac{l^2}{y^2})^{3/2}}\right)\hat{j} = \frac{2kq}{y^2}\left(\frac{1-(1+\frac{l^2}{y^2})^{3/2}}{(1+\frac{l^2}{y^2})^{3/2}}\right)\hat{j}$$

$$= \frac{2kq}{y^2}\left(\frac{1-(1+\frac{3}{2}\frac{l^2}{y^2})}{1+\frac{3}{2}\frac{l^2}{y^2}}\right)\hat{j} = \frac{2kq}{y^2}\left(\frac{-\frac{3}{2}\frac{l^2}{y^2}}{\frac{2y^2+3l^2}{2y^2}}\right) = \boxed{\frac{3kql^2}{y^2(2y^2+3l^2)}(-\hat{j})}$$

بررسی وضعیت یک دوقطبی در یک میدان یکنواخت

میدان یکنواخت: میدانی که در هر نقطه اندازه و جهت آن ثابت است.

برای دو نیروی غیر هم جهت مساوی، گشتاور برابر $F\Delta$ است $|\vec{\tau}| = F\Delta$ است.

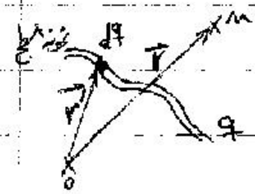
$$|\vec{\tau}| = F\times\Delta = qE(2l\sin\theta) = 2qlE\sin\theta = PE\sin\theta \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{P}\times\vec{E}}$$

کار گردشی ها

کار کل: $\boxed{dw = \tau . d\theta} \Rightarrow dw = PE\sin\theta\, d\theta \Rightarrow W = PE\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\, d\theta \Rightarrow$

$$\boxed{W = -PE(\cos\theta - \cos\theta_0)} \quad W = -\Delta U \Rightarrow \boxed{U = PE\cos\theta}$$

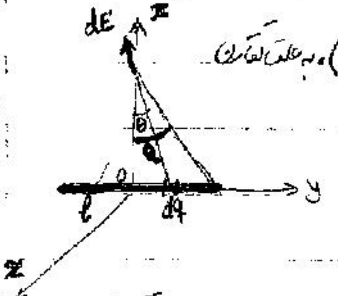
ج) میدان در یک نقطه بر اثر یک سطح با بار q:



$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\hat{r} \quad \text{یا} \quad d\vec{E} = k\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

چگالی خطی $\lambda = \frac{dq}{dx}$ چگالی سطحی بار $\sigma = \frac{dq}{da}$ چگالی حجمی بار $\rho = \frac{dq}{dv}$

مثال: محاسبه میدان حاصل از یک توزیع بار یکنواخت خطی در نقطه‌ای به فاصله $\vec{r}$ از مرکز آن.



علی‌القاعده باید المان میدان را به مؤلفه‌های آن تجزیه کنیم (در اینجا dE_y و dE_z)، به علت تقارن مشخص است که $E_y = 0$ ضمناً: $E_x = \int dE_x = 0$ و $E_z = \int dE_z$

پس فقط E_z را باید محاسبه کرد:

$$E_t = 2\int dE_z = 2\int dE\cos\theta = 2k\lambda z \int_0^{\ell} \frac{dy}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$y = z\,tg\,\theta$ با تغییر متغیر $\Rightarrow E_t = \frac{2k\lambda z}{z^2}\int_0^{\theta}\cos\theta\, d\theta = \frac{2k\lambda}{z}\cdot\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+z^2}} =$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E_t} = \frac{2k\lambda}{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{z^2}{\ell^2}}}\,\hat{k}}$$

برای فاصله دور $\vec{E_t} = \frac{2k\lambda}{z}\hat{k}$

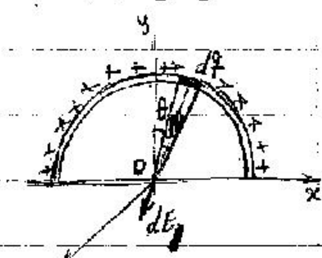
روش دوم: $\vec{r} = z\hat{k}$, $\vec{r'} = y\hat{j}$ $\Rightarrow \vec{E} = k\lambda\left[z\int_{-\ell}^{\ell}\frac{dy}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} - \int\frac{y\,dy}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{j}\right]$

که صفر می‌شود، هم با محاسبه و هم اینکه $\vec{E}$ مؤلفه $\hat{j}$ ندارد

انتگرال خود هم با تبدیل با گرفتن $y = z\,tg\,\theta$ حل خواهد شد.

تمرین: یک توزیع بار بر مسیر نیم‌دایره‌ای به طول ℓ و به شعاع R داریم. میدان را در مرکز نیم‌دایره به دست آورید. سپس نصف نیم‌دایره را با بار مثبت و نصف دیگر را با بار منفی فرض کنید و حاصل را بدست آورید.

$$dq = \lambda dy = \lambda R d\theta$$



$E_z = E_x = 0$ به علت تقارن / به علت طرح بارهای قرینه

$$E = E_y = \int dE_y = \int \frac{k\,dq\,(-R\hat{j})}{R^3}\cos\theta \quad \left(= \int dE\cdot\cos\theta\right)$$

$$= \frac{-k\lambda}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\,\hat{j} = \boxed{\frac{-2k\lambda}{R}\hat{j}}$$

اگر یک طرف مثبت و طرف دیگر منفی:

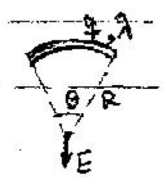
$$E = \int dE = \int\frac{k(-dq)}{R^3}(-x\hat{i}+y\hat{j}) + \int\frac{k\,dq}{R^3}(x\hat{i}+y\hat{j})$$

$$= \frac{-k\lambda}{R}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j})\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j})\,d\theta\right]$$

$$= \frac{-k\lambda}{R}(\hat{i}-\hat{j}+\hat{i}+\hat{j}) = \frac{-2k\lambda}{R}\hat{i}$$

روش دوم: $\frac{1}{2}$ مثبت میدانی (طبق بالا) برابر $\frac{2k\lambda}{R}(\hat{j}-\hat{i})$ دارد و $\frac{1}{2}$ منفی میدان $\frac{2k\lambda}{R}(-\hat{i}+\hat{j})$ که اگر اینها جمع شوند $\frac{-2k\lambda}{R}\hat{i}$ حاصل می‌شود.

اگر زاویه θ باشد:

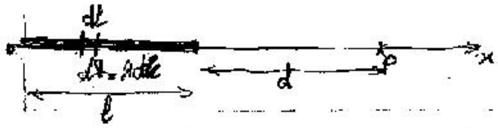


$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{R}\sin\frac{\theta}{2}\,(-\hat{j})$$

جلسه سوم

مثال: میدان حاصل از میله باردار به طول l و بار $+q$ با چگالی ثابت (متشابه التوزیع) مطابق شکل در نقطه P به فاصله d از انتهای میله حساب کنید:

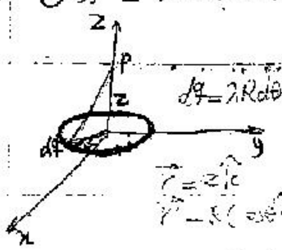
$$\vec{r}=x\hat{i} \qquad \vec{r}'=(d+l)\hat{i}$$



$$d\vec{E}=\frac{k\,dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')=\frac{k\lambda\,dx}{(x-d-l)^3}(x-d-l)\hat{i}=\frac{k\lambda\,dx}{(x-d-l)^2}\hat{i}$$

$$\Rightarrow E=\int_0^l\frac{k\lambda\,dx}{(x-d-l)^2}\hat{i}=\left(\frac{-k\lambda\hat{i}}{x-d-l}\right)_0^l=\frac{k\lambda}{d}-\frac{k\lambda}{d+l}\hat{i}=\frac{k\lambda l}{d^2+ld}\hat{i}$$

مثال: مطلوبست محاسبه میدان حاصل از یک حلقه باردار به شعاع R و با چگالی ثابت λ روی محور حلقه به فاصله z از آن.



$dq=\lambda R d\theta$

$$d\vec{E}=\frac{k\,dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')=\frac{k\lambda R\,d\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}}(z\hat{k}-R\cos\theta\,\hat{i}-R\sin\theta\,\hat{j})$$

$\vec{r}=z\hat{k}$

$\vec{r}'=R(\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j})$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{k\lambda R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}(z\hat{k}-R\cos\theta\,\hat{i}-R\sin\theta\,\hat{j})\,d\theta$$

میدان ناشی از یک حلقه $\Rightarrow$ $\boxed{E=\frac{kqz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}}$

* در مثال بالا فرض کنید چگالی بار ثابت نیست بلکه بصورت $\lambda=\lambda_0\sin\theta$ باشد.

$$E=\frac{k\lambda_0R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left[z\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\hat{k}\,d\theta-R\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,\hat{i}\,d\theta-R\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\hat{j}\,d\theta\right]=\frac{k\lambda_0R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left(-R\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{k\lambda_0R^2\pi}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

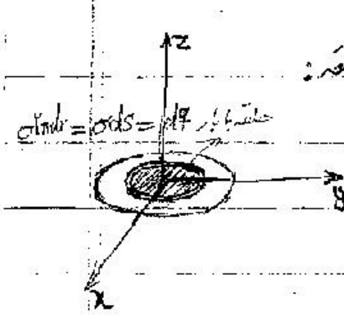
نکته: $q_{کل}=\int\lambda\,ds=\int_0^{2\pi}\lambda_0\sin\theta\,R\,d\theta=0$ چون بار خطی ثابت نیست با وجود صفر بودن بار کل باز هم در نقطه میدان داریم.

* در مثال اول، ماکزیمم میدان در چه ارتفاعی است و مقدار آن را بیابید.

$$E=\frac{kqz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}\Rightarrow\frac{dE}{dz}=kq\,\frac{(R^2+z^2)^{3/2}-\frac{3}{2}(2z)(z^2+R^2)^{1/2}(z)}{(R^2+z^2)^3}=0$$

$$\Rightarrow(R^2+z^2)^{3/2}-3z^2(R^2+z^2)^{1/2}=0\Rightarrow(R^2+z^2)-3z^2=0\Rightarrow R^2=2z^2\Rightarrow\boxed{z=\frac{\sqrt{2}}{2}R}$$

مثال: مطلوبست محاسبه میدان حاصل از یک سطح باردار به شعاع R در ارتفاع z عمود بر محور حلقه:



$\sigma 2\pi r\,dr=\sigma ds=dq$ حلقه باریک

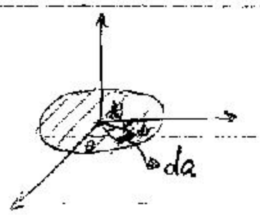
$$d\vec{E}=\frac{kz\,dq}{(r^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}=\frac{2\pi kz\sigma r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$$

$$\Rightarrow\vec{E}=2\pi k\sigma z\int_0^R\frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}=-2\pi k\sigma z(r^2+z^2)^{-1/2}\Big|_0^R\hat{k}$$

$$\Rightarrow\vec{E}=2k\pi\sigma z\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)=2k\pi\sigma\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}}\right)$$

میدان ناشی از یک صفحه دیسک شکل $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}=2k\pi\sigma\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}}\right)\hat{k}=\frac{2kQ}{R^2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat{k}}$

حالت خاص وقتی $\frac{R}{z} \to \infty$ آنگاه میدان $\vec{E} = 2k\pi\sigma\hat{k}$ خواهد بود یعنی برای صفحهٔ خیلی بزرگ میدان در هر نقطهٔ خارج صفحه ثابت و برابر $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$ است.



روش دوم: $da = r\,d\theta\,dr$, $dq = \sigma r\,d\theta\,dr$

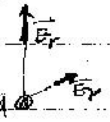
$$d\vec{E} = \frac{k\sigma r\,dr\,d\theta}{(z^2+r^2)^{3/2}}\left(z\hat{k} - r\cos\theta\,\hat{i} - r\sin\theta\,\hat{j}\right)$$

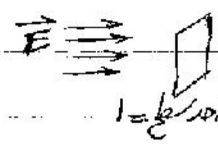
$$\Rightarrow \vec{E} = k\sigma\left[z\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r\,dr\,d\theta}{(z^2+r^2)^{3/2}}\hat{k} - \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r^2dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}\cos\theta\,\hat{i}\,d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r^2dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}\sin\theta\,\hat{j}\,d\theta\right]$$

$$\Rightarrow \vec{E} = k\sigma z\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta = 2k\pi z\sigma\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

شار الکتریکی و قانون گوس

برای نشان دادن میدان (بزرگی و جهت) از خطوط میدان یا خطوط نیرو استفاده می‌کنیم: خطوط میدان خطوطی فرضی هستند که ۱- مماس بر آن در هر نقطه جهت میدان را نشان دهد ۲- بزرگی میدان توسط فراوانی آنها در واحد سطح نشان داده شود.



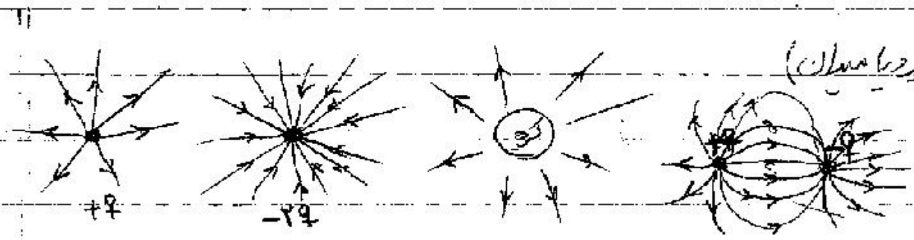


در میدان یکنواخت: $|\vec{E}| = n$: تعداد خطوط نیرو در واحد سطح عمود بر خطوط نیرو

تعداد خطوط گذرنده از سطحی به مساحت A با زاویهٔ φ (بین عمود بر صفحه و خطوط) = شار الکتریکی

$$\varphi = nA\cos\varphi = A|\vec{E}|\cos\varphi \rightsquigarrow d\varphi = E\,da\cos\varphi \Rightarrow \boxed{\varphi = \int \vec{E}\cdot d\vec{a}} : \text{flu}$$

رسم خطوط قوا (نیرو یا میدان)

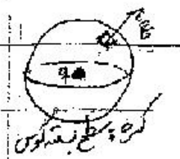


قانون گوس (Gauss): شار گذرنده از یک سطح بسته = $\frac{1}{\varepsilon_0}$ بار کل موجود در آن سطح بسته

$$\boxed{\varphi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q}$$

شکل و ابعاد سطح و نحوهٔ پراکندگی بار در میزان شار الکتریکی عبوری تأثیری ندارد.

اثبات قانون گاوس برای کره:



$d\varphi = \vec{E}\cdot\vec{da}$

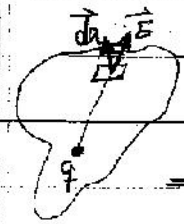
$\vec{E} = \frac{kq}{R^2}\hat{r}$, $\vec{da} = da\,\hat{r}$ $\Rightarrow d\varphi = \frac{kq}{R^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,da = \frac{kq}{R^2}da$

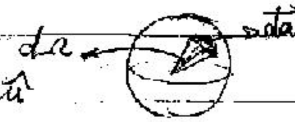
$\Rightarrow \varphi = \frac{kq\,4\pi R^2}{R^2} = \frac{q}{\frac{1}{4k\pi}} = \frac{q}{\varepsilon}$

اثبات عمومیت کلی:

$ds = R\,d\theta \rightarrow d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow \int d\theta = \int \frac{ds}{R} = 2\pi$

$da = R^2 d\Omega \rightarrow d\Omega = \frac{da}{R^2} \Rightarrow \int d\Omega = \int \frac{da}{R^2} = 4\pi$



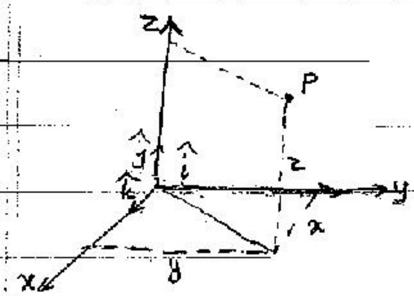


$d\varphi = \vec{E}\cdot\vec{da} \Rightarrow \vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$, $\vec{da} = da\,\hat{u}$

$\Rightarrow d\varphi = \frac{kq}{r^2}da\cos\theta \Rightarrow \varphi = \int d\varphi = kq\oint \frac{da\cos\theta}{r^2} = kq(4\pi) = \frac{q}{\varepsilon}$

مروری بر محورهای مختصات

۱/ مختصات دکارتی:



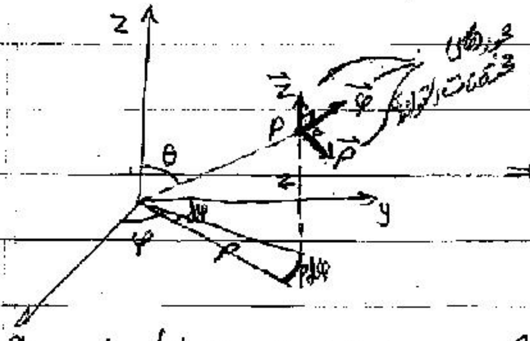
$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\vec{dl_r} = \vec{dl} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

$|\vec{dl_r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

$$da:\ \text{المان} = \begin{cases} dx\,dy \rightarrow \hat{k} \\ dy\,dz \rightarrow \hat{i} \\ dx\,dz \rightarrow \hat{j} \end{cases} \qquad dv = dx\,dy\,dz$$

۲/ مختصات استوانه‌ای:



$\vec{dl} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\,d\varphi\,\hat{\varphi} + dz\,\hat{k}$

$\Rightarrow |\vec{dl}| = \sqrt{(d\rho)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2}$

$\hat{z} = \hat{\rho}\times\hat{\varphi}$

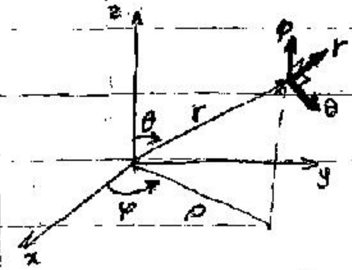
$dv = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$

$$da:\ \text{المان} = \begin{cases} \rho\,d\varphi\,dz \rightarrow \hat{\rho} \\ \rho\,d\rho\,d\varphi \rightarrow \hat{k} \\ d\rho\,dz \rightarrow \hat{\varphi} \end{cases}$$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$tg\varphi = \frac{y}{x}$

۳/ مختصات کروی :



$$\begin{cases} dl_r = dr \\ dl_\theta = r\,d\theta \\ dl_\varphi = \rho\, d\varphi = r\sin\theta\, d\varphi \end{cases}$$

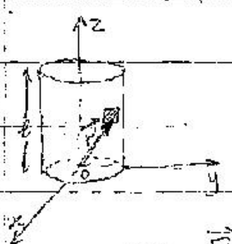
$$\Rightarrow \; d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\, d\varphi\,\hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \; |d\vec{l}| = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\,(d\varphi)^2}$$

طول $da = \begin{cases} r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \longrightarrow \hat{r} \\ r\sin\theta\, d\varphi\, dr \longrightarrow \hat{\theta} \\ r\,d\theta\, dr \longrightarrow \hat{\varphi} \end{cases}$ $\qquad dv = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$ روابط کروی با دکارتی

مثال: میدان حاصل از یک استوانه باردار با بار سطحی ثابت به ارتفاع l با چگالی σ را که مبدأ مختصات در مرکز قاعده داده شده محاسبه کنید.



$$d\vec{E} = k\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

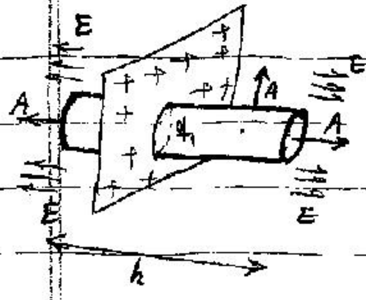
$$dq = \sigma\, da = \sigma R\, d\varphi\, dz \quad , \quad \vec{r} = 0 \quad , \quad \vec{r}' = (z\hat{k} + R\cos\varphi\,\hat{i} + R\sin\varphi\,\hat{j})$$

$$\Rightarrow d\vec{E} = -k\frac{\sigma R\, d\varphi\, dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}(z\hat{k} + R\cos\varphi\,\hat{i} + R\sin\varphi\,\hat{j}) =$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -k\sigma R\left[\int_0^{l}\frac{z\hat{k}}{(R^2+z^2)^{3/2}}dz\int_0^{2\pi}d\varphi + R\int_0^{2\pi}(\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j})\,d\varphi\int_0^{l}\frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = 2k\pi\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+l^2}} - 1\right)\hat{k}}$$

* ۵) محاسبه میدان حاصل از یک صفحه نارسانا با استفاده از قانون گوس:



$$\varphi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int \vec{E}\cdot d\vec{a} + \int_{\text{چپ}} \vec{E}\cdot d\vec{a} + \int_{\text{راست}} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

سطح جانبی $= 0$

چون E و A عمود

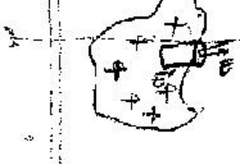
$$\Rightarrow E.A + (-E)(-A) = 2EA = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \quad , \quad q_1 = \sigma A$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \quad , \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{N}$$

جهت $\vec{E}$ با توجه به شکل در جهت بردار نرمال صفحه است

میدان حاصل از یک صفحه در راستای ⊥ بر صفحه عایق است

* میدان حاصل از یک جسم با چگالی σ است :



$E' = 0$ داخل

چون در داخل میدان صفر

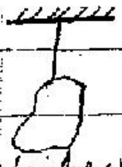
$$, \quad EA = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma A \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

کاربرد قانون گاوس

$\oint \vec{E}\cdot\vec{da} = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho\, dv = \frac{1}{\epsilon_0}\sum q$ شکل انتگرالی

شکل دیفرانسیلی $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ = دایورژانس میدان

در یک جسم رسانای باردار توزیع بار روی سطح خارجی آن صورت می‌گیرد.



در داخل جسم: $q=0 \rightarrow E=0$ میدان نداریم

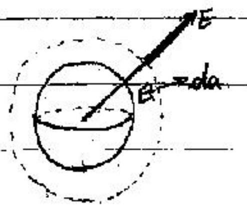
$q\neq 0 \rightarrow E\neq 0$ چنین چیزی امکان ندارد.

زیرا میدان باعث ایجاد جریان می‌شود و چون جسم می‌خواهد تعادل الکترواستاتیکی داشته باشد لذا جریان بار به سمت بیرون می‌رانند بار در سطح جسم جمع می‌شود و سطح خارجی هم پتانسیل می‌گردد و در نتیجه در داخل رسانا نه بار داریم و نه میدان

* مثال: کره‌ی باردار به شعاع R و بار Q و چگالی ثابت داریم میدان را به فاصله‌ی k از مبدأ به دست آورید.

۱- به علت تقارن، نیرو و در نتیجه میدان شعاعی است

۲- میدان در کره‌ای به شعاع R یکسان است زیرا میدان به فاصله بستگی دارد.

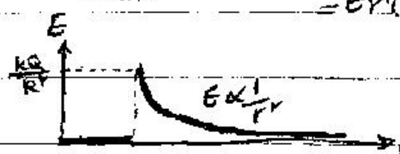


* کره رسانا: $\vec{E} = E\hat{r}$, در کره: $\boxed{\vec{da} = da\,\hat{r} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{da} = \int E r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = E r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= E r^2 (2)(2\pi) = 4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} Q \Rightarrow \vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} \ : r \geq R$$

$\vec{E} = 0$ به علت نبود بار $: r < R$



نمودار

* کره نارسانا

میدان کره‌ی توپر به چگالی ρ و بار Q به فاصله‌ی r از مبدأ:

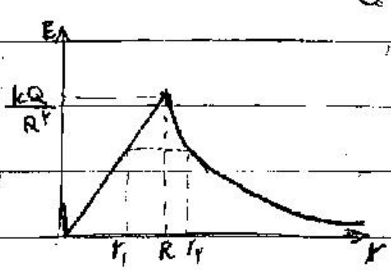
$$r \geq R : E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

$$r < R : \oint E\, da = E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho\, dv$$

در کره: $\boxed{dv = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr}$

$$\int dv = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow E(4\pi r^2) = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \Rightarrow \vec{E} = \frac{kQr}{R^3}\hat{r} = \frac{kQ}{R^3}\vec{r}$$



$$\frac{kQ}{r_2^2} = \frac{kQ r_1}{R^3} \Rightarrow r_1 r_2^2 = R^3$$

* در توزیع حجمی بار اگر $\rho=\alpha(r)$ تابعی از شعاع باشد با استفاده از قانون گوس می‌توان به جواب رسید.

مثال: $\text{if } r'<a$ (داخل کره) $\rightarrow \rho=\alpha r'$

$\text{if } r'>a \rightarrow \rho=0$

* مطلوب است محاسبهٔ میدان در یک نقطهٔ داخل و خارج کره

برای داخل

$$E(4\pi r^2)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dv \Rightarrow 4\pi r^2 E=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\iiint r' r'^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr' \Rightarrow$$

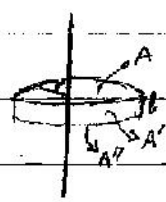
$$\Rightarrow 4\pi r^2 E=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\int_0^r r'^3 dr' \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{4\pi\alpha}{\varepsilon_0}\frac{r^4}{4}$$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{\alpha}{4\varepsilon_0} r^2 \hat{r}$$

برای خارج: $4\pi r^2 E=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\int_0^R r'^3 dr' \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\hat{r}$

میدان بلند با λ ثابت به فاصلهٔ r از سیم:

یک استوانه به محور l به طول در نظر می‌گیریم:



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a}=\frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma Q \Rightarrow \int_A \vec{E}\cdot d\vec{a}+\int_{A'} \vec{E}\cdot d\vec{a}+\int_{A''} \vec{E}\cdot d\vec{a}=\oint E\cdot da$$

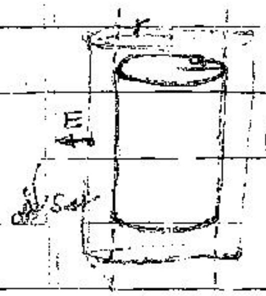
$$\xrightarrow{\theta=0} \int \vec{E}\cdot d\vec{a}=Er\int_0^l dz\int_0^{2\pi} d\varphi=2\pi r l E=\frac{1}{\varepsilon_0}(\lambda l) \Rightarrow \boxed{E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{r}=\frac{2k\lambda}{r}\hat{r}}$$

$da=r\,d\varphi\,dz\,\hat{r}$

به حالت سیم در میان استوانه قرار دارد.

تمرین: محاسبهٔ میدان حاصل از یک استوانهٔ طویل به شعاع a را در نقطهٔ خارج و داخل استوانه در دو حالت زیر:

۱) بار سطحی با چگالی ثابت σ ۲) بار حجمی با چگالی ثابت ρ



در حالت اول: $E_{in}=0$ زیرا $\oint E\cdot da=\frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma q=0 \Rightarrow E_{in}=0$

اگر سطح گوسی استوانه‌ای داخل استوانه در نظر بگیریم

در بالا حساب می‌شد

$$E_{out}:\ \oint \vec{E}\cdot d\vec{a}=\int_S \vec{E}\cdot d\vec{a}=2\pi r l E=\frac{1}{\varepsilon_0}2\pi a l\sigma \Rightarrow \vec{E}=\frac{a\sigma}{r\varepsilon_0}\hat{r}$$

در حالت دوم:

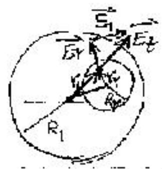
$$\oint \vec{E}_{in}\cdot d\vec{a}=\int_S E_{in} S=2\pi r l E=\frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma q=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi r^2 l \Rightarrow \vec{E}_{in}=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r}$$

$$\oint \vec{E}_{out}\cdot d\vec{a}=\int_S E_{out} S'=2\pi r l E=\frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma q=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi a^2 l \Rightarrow \vec{E}_{out}=\frac{\rho a^2}{2r\varepsilon_0}\hat{r}$$

مثال، در داخل یک کره به شعاع R_1، یک حفره کروی به شعاع R_2 قرار دارد. کره دارای بار حجمی با چگالی ثابت ρ است. میدان الکتریکی را در یک نقطه دلخواه داخل حفره کروی حساب کنید. (با کمک قانون گوس)

از قبل می‌دانیم که برای کره باردار در $r \le R$ میدان داخل به شکل مقابل است:

$$\boxed{E = \frac{\rho \vec r}{3\varepsilon_0}}$$

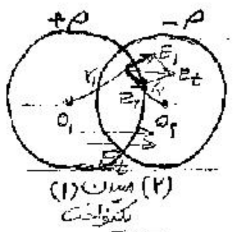


میدان به جای حفره خالی نباشد و میدان موقعی نقطه الکتریکی است.

$$\underbrace{\vec E_1}_{\text{کره حفره‌دار}} + \underbrace{\vec E_2}_{\text{کره کوچک که حفره از آن جدا شده}} = \vec E_t = \frac{\rho \vec r}{3\varepsilon_0}$$

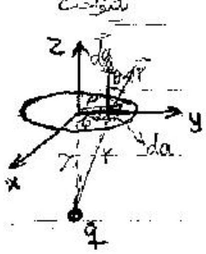
$$\Rightarrow \vec E_1 = \vec E_t - \vec E_2 = \frac{\rho \vec r_1}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho \vec r_2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec r_1 - \vec r_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{OO'}$$

مسأله بعدی: دو کره باردار هر یک به شعاع R با چگالیهای بار حجمی $+\rho$ و $-\rho$ مطابق شکل در قسمتی متداخلند (overlap). میدان در یکی از نقاط مشترک بین دو کره را بدست آورید.



$$\vec E_t = \vec E_1 + \vec E_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec r_1 - \vec r_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{O_1O_2}$$ ثابت و در همه جا میدان موازی محور مرکز

مسأله: بار نقطه‌ای q روی محور قرصی به شعاع R واقع است. شار گذرنده از قرص را پیدا کنید.



$$\Phi = \int \vec E \cdot d\vec a = \iint \frac{kq}{r^2}\hat r \cdot \rho\, d\varphi\, d\rho\, \hat k = \int_0^{R}\int_0^{2\pi} \frac{kq\rho}{(z^2+\rho^2)}\frac{z}{r}\, d\varphi\, d\rho$$

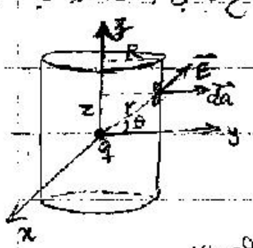
چون $d\vec a = \rho\, d\varphi\, d\rho\, \hat k$, $\hat r \cdot \hat k = \cos\theta$

$$\Rightarrow \Phi = kqz\int_0^{R}\frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi = 2k\pi qz\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right] =$$

$$\Rightarrow \Phi = 2k\pi q\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}}\right]$$

Φ مثبت است یعنی شار خارج شونده است اگر q بار مثبت باشد شار هم مثبت است.

مسأله: بار نقطه‌ای q را در مرکز استوانه‌ای به شعاع R و طول L در نظر بگیرید. شار گذرنده از سطح جانبی استوانه را حساب کنید. (جواب خود را با استفاده از قانون گوس امتحان کنید).



$$d\vec a = R\, d\varphi\, dz\, \hat\rho$$

$$\Phi = \int \vec E \cdot d\vec a = \iint \frac{kq}{r^2}\hat r \cdot R\, d\varphi\, dz\, \hat\rho = kqR\int_{-l/2}^{l/2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi\, dz}{(R^2+z^2)^{3/2}} =$$

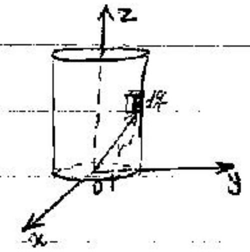
$$= 2k\pi qR^2\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}} = 2k\pi qR^2\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\cos\theta}{R^2}\, d\theta = 2k\pi q\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2k\pi q\int_{-\arctan\frac{l}{2R}}^{\arctan\frac{l}{2R}}\cos\theta\, d\theta = 2k\pi q\left(\frac{\frac{l}{2R}}{\sqrt{1+\frac{l^2}{4R^2}}} + \frac{\frac{l}{2R}}{\sqrt{1+\frac{l^2}{4R^2}}}\right) = \frac{4k\pi q l}{\sqrt{4R^2+l^2}} = \frac{ql}{\varepsilon_0\sqrt{4R^2+l^2}}$$

$z = R\tan\theta$

اگر $l \to \infty$ آنگاه $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$

مسأله: استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع h دارای بار حجمی با چگالی $\rho=\alpha(r'^2+z'^2)^{3/4}$ مفروض است. میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات محاسبه کنید.

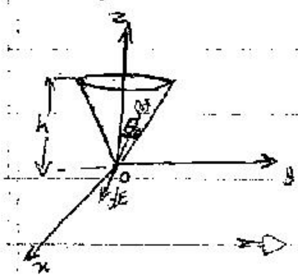


$\vec r=0 \quad \vec r'=z\hat k+r'\cos\theta\,\hat i+r'\sin\theta\,\hat j$

$dq=\rho\,dv\ ,\ dv=r\,d\varphi\,dz\,dr \Rightarrow dq=\alpha(r'^2+z'^2)^{3/4}r'\,dr\,d\varphi\,dz$

$\vec E=\int d\vec E=\int\frac{k\,dq}{|\vec r-\vec r'|^3}(\vec r-\vec r')=\dots k$

مسأله: میدان حاصل از یک توزیع بار به صورت مخروط به ارتفاع h و زاویه نیم رأس θ_0 را در مبدأ O حساب کنید.



$d\vec E=\frac{k\,dq}{|\vec r-\vec r'|^3}(\vec r-\vec r')$ [illegible]

$dq=\rho_0\,dv=\rho_0\,r'^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'\,dr'$

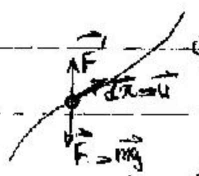
$\vec r'=r'\cos\theta'\hat k+r'\sin\theta'\sin\varphi'\hat j+r'\sin\theta'\cos\varphi'\hat i \quad , \quad \vec r=\vec 0$

$\Rightarrow \vec E=-k\rho_0\int_{\theta'=0}^{\theta_0}\sin\theta'\cos\theta'\,d\theta'\int_{r'=0}^{h/\cos\theta'}dr'\int_{\varphi'=0}^{2\pi}d\varphi'$

$\Rightarrow \vec E=-k\rho_0(2\pi h)\int_0^{\theta_0}\sin\theta'\,d\theta'=\boxed{2k\pi\rho_0 h(\cos\theta_0-1)(\hat k)}$

پتانسیل

انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای پایستار (conservative) است مانند نیروی جاذبه زمین.



میدان جاذبه: $\vec F'=-\vec F=-m\vec g$

$W_{A\to B}=\int\vec F'\cdot d\vec x=-m\int_A^B\vec g\cdot d\vec x=\ ??\ =U_B-U_A=\Delta U$

میدان الکتریکی: $\vec F'=-\vec F=-q\vec E$

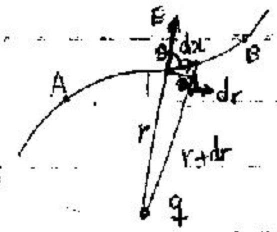
$W_{A\to B}=\int_A^B\vec F'\cdot d\vec x=-q\int_A^B\vec E\cdot d\vec x=\ ??\ =U_B-U_A=\Delta U$

اگر هر دو طرف را در $\frac{1}{q}$ ضرب کنیم $\Rightarrow \frac{W_{A\to B}}{q}=-\int_A^B\vec E\cdot d\vec x=\frac{U_B}{q}-\frac{U_A}{q}=\frac{\Delta U}{q}$

$\varphi_B-\varphi_A=V$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_B-\varphi_A=V=-\int_A^B\vec E\cdot d\vec x}$ اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B

محاسبهٔ پتانسیل $\left\{\begin{array}{l} \text{۱/ ناشی از وجود یک بار الکتریکی } q \\ \text{۲/ ناشی از وجود چندین بار نقطه‌ای } q \\ \text{۳/ ناشی از وجود یک توزیع پیوسته بار} \end{array}\right.$



حالت اول:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\,\hat{r} \quad , \quad \varphi_B - \varphi_A = V = -\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dx}$$

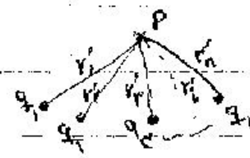
$$\Rightarrow V = -kq\int_A^B \frac{1}{r^2}\,dx\cos\theta = -kq\int \frac{dr}{r^2} = \left(\frac{kq}{r_B} - \frac{kq}{r_A}\right)$$

قرارداد:

معمولاً پتانسیل نقاط دور (در ∞) را صفر فرض می‌کنیم. پس:

مثلاً بار نقطه‌ای: $\left\{\begin{array}{l} V = \dfrac{kQ}{r} \text{ هر نقطه} \\ V(\vec{r}) = \dfrac{kQ(r')}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \end{array}\right.$

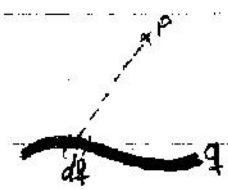
حالت دوم:



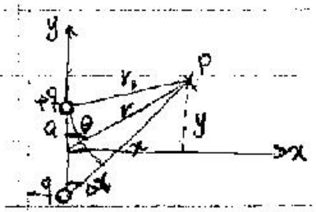
پتانسیل هر نقطه را به شکل زیر داریم: $V = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot\vec{dx}$ پس برای کل بارها:

$$\vec{V}(\vec{r}) = k\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(r_i')}{|\vec{r}-\vec{r_i'}|}$$

حالت سوم:



$$V(\vec{r}) = k\int \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = k\int \frac{dq}{r}$$



مثال: مطلوبست محاسبهٔ پتانسیل حاصل از یک دوقطبی منفرد در یک نقطهٔ $\vec{r}$ از مرکز آن:

$$V(\vec{r}) = k\left[\frac{q}{r_1} + \frac{-q}{r_2}\right] = kq\left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right] = \frac{kq\,\Delta r}{r_1 r_2}$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} \qquad r_2 = \sqrt{x^2 + (y+a)^2}$$

حالت خاصی که وجود دارد $r \gg 2a$ است که در نتیجه:

$$r_1 r_2 = r^2 \Rightarrow \Delta r = 2a\cos\theta \Rightarrow V(r,\theta) = \frac{kq(2a\cos\theta)}{r^2} = \frac{kP\cos\theta}{r^2}$$

نکته تستی:

	بار نقطه‌ای	دوقطبی	چهارقطبی
میدان	$\propto \frac{1}{r^2}$	$\propto \frac{1}{r^3}$	$\propto \frac{1}{r^4}$
پتانسیل	$\propto \frac{1}{r}$	$\propto \frac{1}{r^2}$	$\propto \frac{1}{r^3}$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k} \\ \vec{dl} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \end{array}\right.$$

$$\varphi_B-\varphi_A=V=-\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\left[\int_A^B E_x dx+\int_A^B E_y dy+\int_A^B E_z dz\right]$$

$$E=-\frac{dv}{dl} \rightsquigarrow E_x=-\frac{\partial v}{\partial x}\ ,\ E_y=-\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ E_z=-\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \vec{E}=E_x\hat{i}+E_y\hat{j}+E_z\hat{k}=-\left[\frac{\partial v}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\hat{k}\right]=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)v$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}=-\vec{\nabla}v}$$

نقاط هم‌پتانسیل

نقطهٔ P متغیر فرض نیست. نقاطی از فضا که به فاصلهٔ r و زاویهٔ θ قرار دارند بطور تقریبی
همه نقاط هم‌پتانسیل خواهند بود.

$$V_{(r,\theta)}=\frac{kP\cos\theta}{r^2} \Rightarrow V_{(x,y)}=\frac{kPy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_x=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{3kPxy(x^2+y^2)^{1/2}}{(x^2+y^2)^3}=\frac{3kPxy}{(x^2+y^2)^{5/2}}\hat{i}$$

$$\vec{E}_y=-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-kP\left((x^2+y^2)^{3/2}-3y^2(x^2+y^2)^{1/2}\right)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{kP(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}\hat{j}$$

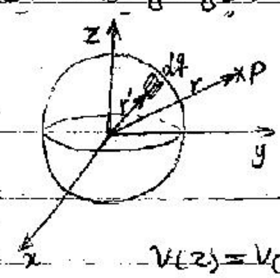
$$E_r=-\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{2kP\cos\theta}{r^3}\hat{r}\quad ,\quad E_\theta=-\frac{\partial v}{r\,d\theta}=\frac{kP\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}$$

r متغیر و θ ثابت — r ثابت و θ متغیر

$$\vec{E}=\frac{kP}{r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{r}+\sin\theta\,\hat{\theta}\right]$$

$$\boxed{v(\vec{r})=k\int_\infty^r \frac{dQ}{|\vec{r}-\vec{r}'|=r}\quad \text{یا}\quad V(\vec{r})=-\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{x}}$$ دو فرمول اصلی پتانسیل

یک کره با بار مفروض است: مطلوب است محاسبهٔ پتانسیل حاصل از آن که به شعاع R و بار q و چگالی سطحی یکنواخت در یک نقطهٔ $\vec{r}$:



برای راحتی نقطه را روی محور z انتخاب می‌کنیم.

$$dq=\sigma_0 R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$V(z)=V_{(0,0,z)}=k\int \frac{\sigma_0 R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi}{r}\qquad r=(R^2+z^2-2zR\cos\theta)^{1/2}$$

$$\Rightarrow V(0,0,z)=k\sigma_0 R^2\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)^{1/2}}\int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\Rightarrow V(0,0,z)=\frac{2\pi k\sigma_0 R^2}{zR}\left[(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)^{1/2}\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z \geq R: & V(0,0,z) = \dfrac{2k\pi\delta_0 R^2}{zR}\left[(z+R)-(z-R)\right] = \dfrac{kq}{z} \\ z \leq R: & V(0,0,z) = \dfrac{2k\pi\delta_0 R^2}{zR}\left[(z+R)-(R-z)\right] = \dfrac{kq}{R} \end{cases}$$

پس میدان داخل کره ثابت است و برابر $\frac{kq}{R}$ (میدان روی سطح) است.

راه دوم: استفاده مستقیم از تعریف: $V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot\vec{dx}$

انتگرال فوق بستگی به شکل مسیر ندارد. پس بهترین مسیر ممکن از ∞ تا r در راستای r بصورت خط راست است

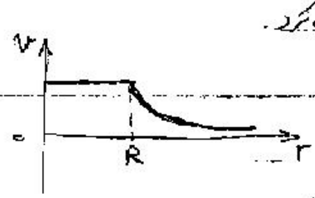
در نتیجه $\vec{dx} = \vec{dr}$

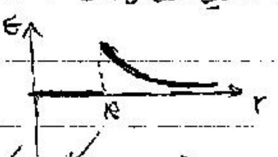
$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{kQ}{r^2}\hat{r} & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{E} = \dfrac{kQ}{r^2}\hat{r} \\ \vec{dx} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot\vec{dx} = -\int_{\infty}^{r>R} \frac{kQ}{r^2}(\hat{r}\cdot\hat{r})\,dr = \frac{kQ}{r}$$

$$\Rightarrow V(r<R) = -\left[\int_{\infty}^{R} \vec{E}\cdot\vec{dx} + \cancel{\int_{R}^{r} \vec{E}\cdot\vec{dx}}\right] = \frac{kQ}{R}$$

مسائلی که به کمک سطح گوسی حل می‌شوند از طریق فوق می‌توان V را به راحتی حساب کرد.





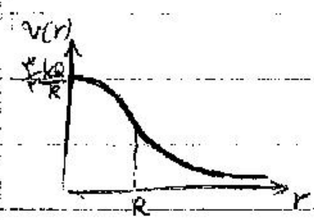
* اگر پتانسیل صفر باشد نمی‌توان طبق رابطهٔ $E = -\vec{\nabla}V$ گفت: که حتماً $E=0$ است

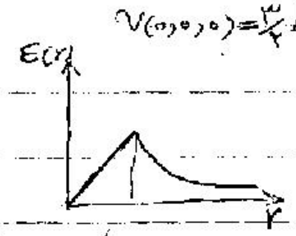
مثال: اگر در مسألهٔ قبل کره عایق با چگالی ρ ثابت در نظر بگیریم داریم:

$$E = \begin{cases} \dfrac{kQ}{r^2}\hat{r} & r \geq R \quad \rightarrow V = \int_{\infty}^{r} \dfrac{kQ}{r^2}\hat{r}\cdot\vec{dr} = \dfrac{kQ}{r} \\ \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} & r < R \quad \rightarrow V = \int_{\infty}^{R} \dfrac{kQ}{r^2}\hat{r}\cdot\vec{dr} + \int_{R}^{r} \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r}\cdot\vec{dr} = \dfrac{kQ}{R} + \dfrac{\rho}{6\epsilon_0}(R^2 - r^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

بیشترین پتانسیل در مرکز است $V(0,0,0) = \frac{3}{2}\frac{kQ}{R}$





مثال: کره‌ای با بار حجمی αr^2 ... موجود است. میدان را با قانون گوس بدست آورید. و پتانسیل را از $V = -\int \vec{E}\cdot\vec{dx}$ بدست می‌آوریم.

$$\oint \vec{E}_{out}\cdot\vec{da} = \frac{\int \rho\,dv}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{\alpha}{\epsilon_0}\iiint r'^4 \sin\theta'\,d\theta'\,dr'\,d\phi' = \frac{4\pi\alpha R^5}{5\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{out} = \frac{\alpha R^5}{5\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\hat{r} \Rightarrow V_{out} = -\int \vec{E}_{out}\cdot\vec{dr} = \frac{\alpha R^5}{5\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

پتانسیل یک صفحه بزرگ باردار را در یک نقطه به فاصله z محاسبه کنید.

با قانون گوس: $\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} \Rightarrow V(r)=-\int E\cdot dr=-\int_{\infty}^{z_0}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}\cdot\hat{k}\,dz=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(z_0-\infty)\Rightarrow$

$V(r)=\frac{\sigma}{\sigma}\left(\frac{S|z_0|}{2\varepsilon_0}\right)+c$

به طور کلی در جاهایی که میدان ضعیف است سطوح هم پتانسیل طبق رابطه $E=-\frac{\Delta V}{\Delta r}$ از هم دورتر هستند و بالعکس.

نکته: دو کره فلزی به شعاع R_1 و بار q_1 و دیگری به شعاع R_2 و بار q_2 که خیلی دور از هم هستند در اختیار داریم، این دو کره را با یک سیم به هم متصل می‌کنیم خواهیم داشت:

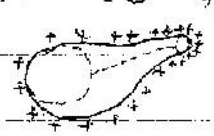
چنانچه $\frac{kQ_1}{R_1}=\frac{kQ_2}{R_2}$ باشد اتفاقی نمی‌افتد ولی چنانچه مثلاً $\frac{kQ_1}{R_1}>\frac{kQ_2}{R_2}$ باشد بار از جایی که پتانسیل بیشتر است به جایی که پتانسیل کمتر است جابجا می‌شود و داریم:

$$\begin{cases} Q_1'=Q-q \\ Q_2'=Q+q \end{cases} \Rightarrow \frac{k(Q-q)}{R_1}=\frac{k(Q_2+q)}{R_2} \;:\; \frac{Q_2'}{Q_1'}=\frac{R_2}{R_1}$$

یعنی کره‌ای که شعاع بزرگتری دارد، بار بیشتری پیدا می‌کند.

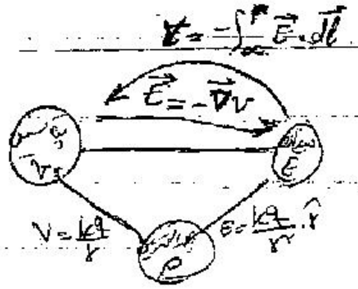
نسبت چگالی بارها چون $Q=\sigma(4\pi R^2)$ است به نسبت عکس شعاعها است: $\frac{\sigma_2'}{\sigma_1'}=\frac{R_1}{R_2}$

* طبق روابط بالا می‌توان توجیه کرد که چرا بار در نقاط نوک تیز یک سطح رسانا بیشتر جمع می‌گردد. چون سطح یک رسانا باید یک سطح هم پتانسیل شود لذا بار به گونه‌ای توزیع می‌گردد که در نقاط نوک تیز، بار بیشتری باشد.



نکته: چون $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ پس: $\frac{\partial E_x}{\partial y}=\frac{\partial E_y}{\partial x}$, $\frac{\partial E_z}{\partial y}=\frac{\partial E_y}{\partial z}$, ...

مثلاً میدان نمی‌تواند به صورت $\vec{E}=2y\hat{i}-4x\hat{j}$ باشد.



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a}=\frac{1}{\varepsilon_0}Q=\frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dv$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ یعنی $$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

محاسبه انرژی پتانسیل

$$W_{A\to B}=-q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{x}=U_B-U_A=q(\varphi_B-\varphi_A)=qV$$

یک مجموعه از بار q_i را حساب کنید

بار اولی را بدون انجام کار از بینهایت می‌آوریم چون میدانی وجود ندارد ولی برای آوردن بار دوم تا فاصله r از اولی باید کار انجام دهیم زیرا میدان وجود دارد و بقیه به همین صورت:

$$U=W=0+q_2\left(\frac{kq}{r_{12}}-0\right)+q_3\left(\frac{kq_1}{r_{13}}+\frac{kq_2}{r_{23}}-0\right)+q_4\left(\frac{kq_1}{r_{14}}+\frac{kq_2}{r_{24}}+\frac{kq_3}{r_{34}}-0\right)+\dots$$

کار لازم برای تجمع

$$\boxed{\Rightarrow U=W=k\sum_i q_i\sum_{j<i}\frac{q_j}{r_{ij}}}$$

انرژی برای آوردن مجموعه

از نظر کاربردی رابطه بالا را به صورت زیر ساده‌تر می‌نویسیم:

$U=\frac{1}{2}\sum q_iV_i$

V_i پتانسیل در محل بار i ام ناشی از همه بارها (البته به جز خود بار i)

$\frac{1}{2}$ برای آن است که انرژی هر زوج بار دو بار هم حساب می‌شود

* برای یک توزیع پیوسته بار خواهیم داشت:

$$U=\frac{1}{2}\int V_{(\vec{r})}\,dq_{(\vec{r})}$$

مثال: انرژی پتانسیل یک کره با شعاع R و بار q با چگالی حجمی ثابت را حساب کنید.

$$U=\frac{1}{2}\int V_{(\vec{r})}\,dq_{(\vec{r})}\qquad dQ=\rho\, dv=\rho r'^2\sin\theta' d\theta' d\varphi' dr'$$

پتانسیل کره
$$V_{(r)}=\begin{cases}\frac{kQ}{r} & r\geq R\\[4pt] \frac{kQ}{2R}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right) & r\leq R\end{cases}$$

$$\Rightarrow U=\frac{kQ\rho}{4R}\int_{r'=0}^{R}\left(3-\frac{r'^2}{R^2}\right)r'^2dr'\int_{\theta'=0}^{\pi}\sin\theta' d\theta'\int_{\varphi'=0}^{2\pi}d\varphi'$$

$$\Rightarrow U=\frac{k\pi Q\rho}{R}\left(R^3-\frac{R^3}{5}\right)=\frac{4k\pi QR^2}{5}\times\frac{3Q}{4\pi R^3}\Rightarrow \boxed{U=\frac{3}{5}\frac{kQ^2}{R}}$$

مثال کاربردی:

در هسته‌ی اتم اورانیم ، ۹۲ عدد پروتون موجود است . انرژی پتانسیل الکتریکی هسته‌ی اتم اورانیم را حساب کنید.

$$U=\frac{3}{5}\frac{k(Ze)^2}{r}=\frac{3\times 9\times10^{9}\times 92^2\times 1/6^2\times10^{-38}}{5\times10^{-14}}\simeq 8\times10^{7}\,eV$$

می‌توان از روش قبل هم بدست آورد یعنی یک بار کوچک گذاشته و پیوسته پوسته بر آن بار حاصل از بینهایت افزوده انرژی را حساب کرد:

$$U=\int V_{(\vec r)}\,dq_{(\vec r)} \qquad dq=\rho\,dv=\rho(4\pi r^2dr)$$

مثال: دو یک پوسته‌ی کروی به شعاع داخلی و خارجی a و b توزیع بار با رابطه‌ی $\rho=\alpha r$ داده شده است میدان الکتریکی را در سه ناحیه حساب کنید و سپس پتانسیل الکتریکی داخل $r<a$ را حساب کنید

$$1)\oint \vec E\cdot d\vec a=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\,dv=0 \Rightarrow \vec E_1=0 \qquad 2)\int_a^r\int_0^{\pi}E_2 r^2\sin\theta\,d\theta\,dr=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \alpha r'^3\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'\,dr'$$

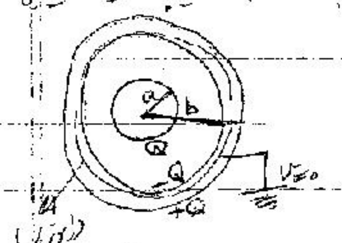
$$\Rightarrow 4\pi r^2E_2=\frac{1}{\varepsilon_0}\pi\alpha(r^4-a^4) \Rightarrow \vec E_2=\frac{\alpha}{4\varepsilon_0}\left(r^2-\frac{a^4}{r^2}\right)\hat r$$

$$3)\ 4\pi r^2E_3=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\alpha r'^3\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'\,dr'=\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\pi(b^4-a^4) \Rightarrow \vec E_3=\frac{\alpha}{4\varepsilon_0 r^2}(b^4-a^4)\hat r$$

$$V_3=-\int_{\infty}^{r}\vec E_3\cdot d\vec r=\frac{\alpha}{4\varepsilon_0 r}(b^4-a^4) \qquad V_2=-\int_{\infty}^{b}\vec E_3\cdot d\vec r+\int_b^r\vec E_2\cdot d\vec r=-\frac{\alpha r^3}{12\varepsilon_0}+\frac{\alpha a^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r}+\frac{\alpha b^3}{\varepsilon_0}\ \frac{\alpha a^4}{4\varepsilon_0 b}+\frac{\alpha}{4\varepsilon_0 b}(b^4-a^4)$$

مثال: کره‌ی فلزی به شعاع a به پتانسیل الکتریکی V_0 در داخل یک پوسته‌ی کروی فلزی به شعاع داخلی b که به زمین وصل است

اگر تابع پتانسیل الکتریکی میان دو کره به صورت $V(r)=A+\frac{B}{r}$ باشد الف) ضرایب A و B را تعیین کنید. ب) با نوشتن میدان الکتریکی میان کره‌ها ج) بار الکتریکی کره‌ی داخلی



$E_{داخل}=0$ با سطح گاوسی $\qquad E(\vec r)=\frac{kQ}{r^2} \qquad a\le r\le b$

در داخل هادی خارجی باید $E=0$ و می‌توان این طور توجیه کرد که باید اندازه‌ی

همان Q ولی مثبت و منفی در داخل و خارج پوسته قرار گیرند

در اینجا فرض شد که پوسته بی‌بار است اگر هم بار داشته باشد باز $E=0$ ولی این بار بار $Q+q$ روی سطح خارجی می‌رود

ازاد کلی $Q-Q=0$ با پوسته

لذا کلاً بعد هم $E=\frac{k(Q+q)}{r^2}$ است.

جای پتانسیل: $\quad V_b-V_a=-\int_a^b E(r)\,dr \qquad V_a=V_0 \Rightarrow V_b=0$

$$\Rightarrow V_0=kQ\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) \Rightarrow Q=\frac{-V_0}{k\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}$$ بار کره‌ی داخلی

$$E(r)=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{B}{r^2} \qquad E_{میان\ کره‌ها}=\frac{kQ}{r^2}$$ از طریق قانون گاوس

$$\Rightarrow \frac{k\frac{V_0}{k\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}}{r^2}=\frac{B}{r^2} \Rightarrow \boxed{B=\frac{V_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}}$$

$$V_b=0 \Rightarrow A+\frac{B}{b}=0 \Rightarrow A=-\frac{B}{b}=\boxed{\frac{V_0a}{a-b}}$$

خازن

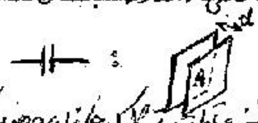
ظرفیت (Capacity)

سطح هر کادی (؟) بار روی سطح آن متناسب با پتانسیل آن است که نسبت این دو را ظرفیت خازن می‌نامند.

مثلاً برای کره:
$$V=\frac{kQ}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{Q}{V}=\text{constant}=C$$

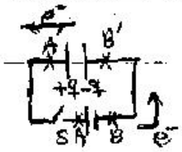
ظرفیت خازن به Q و V بستگی ندارد و تنها به شکل هندسی سطح بستگی دارد.

شکل خازن تخت (مسطح):



دو کره هم مرکز (متقارن) نیز می‌توانند تشکیل خازن دهند که به آن خازن کروی می‌گوییم همچنین دو استوانه هم محور: خازن استوانه‌ای

در خازن‌ها عملاً ابعاد صفحات نسبت به فاصله‌شان بسیار بزرگ است.



$$\begin{cases} V_A > V_{A'} \\ V_B < V_{B'} \end{cases}$$

تعداد الکترون از صفحه متصل به پتانسیل مثبت خارج می‌شود تا دو صفحه هم‌پتانسیل شوند و بار q پیدا کنند (شارژ شوند)

$$\phi_A-\phi_B=V_0=\phi_{A'}-\phi_{B'}$$

محاسبه ظرفیت خازن

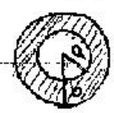
1) خازن تخت:

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{Q}{\phi_A-\phi_B} \qquad \oint\vec{E}\cdot\vec{da}=\frac{1}{\varepsilon_0}q \rightarrow EA=\frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{r}$$

$$\phi_A-\phi_B=-\int_{x_A}^{x_B}\vec{E}\cdot\vec{dx}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x_B-x_A)=\frac{S}{\varepsilon_0}d$$

$$\Rightarrow C=\frac{\varepsilon_0 Q}{Sd}=\varepsilon_0\frac{A}{D} \qquad \boxed{C_{\text{خازن}}=\varepsilon_0\frac{A}{D}}$$

2) خازن کروی:

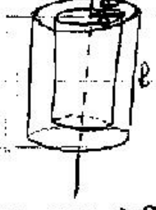


$$\phi_a-\phi_b=-\int_b^a\vec{E}\cdot\vec{dx}=-\int_b^a\frac{kQ}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{dr}=kQ\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}}$$

میدان فقط در داخل بین کره‌ها وجود دارد.

3) خازن استوانه‌ای:



$$\oint\vec{E}\cdot\vec{da}=\frac{1}{\varepsilon_0}Q \Rightarrow E(2\pi rl)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\,dv=\frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{l}\cdot\frac{1}{r}\hat{r} \Rightarrow V_a-V_b=-\int_b^a\vec{E(r)}\cdot\vec{dr}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{C=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{b}{a}}}$$

نکته: واحد ε_0 معادل $\frac{F}{m}$ است.

نکته: اگر دو کره با سیم به هم متصل شوند تمام بار کره داخلی روی کره خارجی جمع می‌شود (اساس کار واندوگراف).

محاسبه انرژی پتانسیل و چگالی انرژی

بار بعد از شارژ کامل: q

$$U_C=W=\int V\,dq=\frac{1}{C}\int q\,dq=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{U_C=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}QV_0=\frac{1}{2}CV_0^2}$$

محل ذخیره شدن انرژی درون دی الکتریک است. همچنین چگالی این انرژی ثابت است چون میدان داخل دی الکتریک یکنواخت است

چگالی انرژی $u' = \frac{\text{انرژی کل}}{\text{حجم}} = \frac{CV_0^2}{2Ad} = \frac{\varepsilon_0 A E^2 d^2}{2d\,Ad} \rightsquigarrow \boxed{u' = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$

حال خازن کروی میدان از لحاظ ریاضی با توجه به رابطه $E = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$ یکنواخت نیست. اما انرژی را می‌توان از طریق چگالی انرژی (که حال هم مستقل $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ است) محاسبه کرد:

$$U = \int u'\,d\tau = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,d\tau = \quad \begin{cases} dv = r'^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'\, dr' \\ 4\pi r^2 dr = \end{cases}$$

$$E = \frac{kQ}{r^2}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_a^b \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{k^2 Q^2}{r^4}\left(r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr\right) = \frac{4\pi}{2}\varepsilon_0 k^2 Q^2 \int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow U = \frac{kQ^2}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

روش دیگر: $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2\,\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}} = \frac{kQ^2}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

* در همهٔ میدانها انرژی با مجذور آن میدان نسبت مستقیم دارد.

* توجه: انرژی پتانسیل در نقطهٔ $\vec{x}$ ناشی از تمامی توزیع بارها: $W_C = \frac{1}{2}\int V(\vec{x})\,dq(\vec{x})$

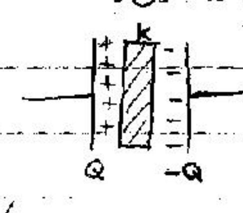
برای میدانهای خارجی: $W_C = \int V(\vec{x})\,dq$

$$\Rightarrow W_C = \frac{1}{2}\int_{\text{کل فضا}} dq(\vec{x})\,V(\vec{x}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2(\vec{x})\,d^3x > 0$$

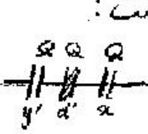
چون انتگرال فوق همواره مثبت است. یعنی برای بوجود آوردن هر توزیع بار پیوسته‌ای باید کار مکانیکی مثبتی انجام داد.

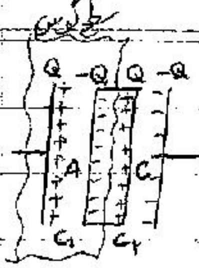
نقش دی الکتریک در خازن‌ها

ثابت دی الکتریک $K = \frac{C}{C_0} = \frac{E_0}{E} = \frac{V_0}{V}$



اگر دی الکتریک بین دو خازن به همراه خلاء قرار گیرد خواهیم داشت:

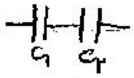
$\equiv$ سه خازن سری: 



اگر به جای عایق رسانا قرار داده شود:

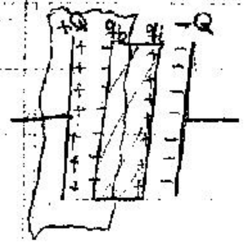
$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot\vec{da} = Q \Rightarrow E_A = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_C$$

در رسانا ی داخل خازن بار طوری القا می شود که میدان داخل آن صفر شود

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \xrightarrow{\text{دو خازن سری}}$$  $$C_1 = \varepsilon_0 \frac{A}{x} \quad و \quad C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{y}$$

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \dots = \boxed{\frac{\varepsilon_0 A}{d-d'}}$$

دوباره اگر عایق را بررسی کنیم:



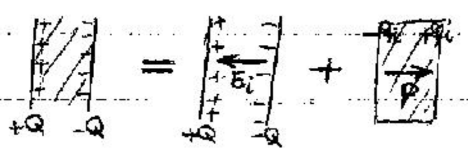
بار القایی $q_i = q_b < Q$

میدان در نقطه ای داخل عایق، اگر سطح گوس را مطابق شکل فرض کنیم چون بار روی جوشن از سطح دی الکتریک بیشتر است پس میدان داخل دی الکتریک صفر نیست.

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot\vec{da} = \frac{\overbrace{\Sigma q}^{\text{جمع بار زیر سطح گوس}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot\vec{da} = Q - q_i$$

$$\Rightarrow E < E_0$$ میدان داخل خازن بدون دی الکتریک

پلاریزاسیون یا قطبش (Polarization) داخل دی الکتریک



مجموع ممان کل دوقطبی های موجود در واحد حجم دی الکتریک را $\vec{P}$ (پلاریزاسیون) گویند.

$$\vec{P} = n\vec{p} \rightarrow$$ دو قطبی (مولکول)

$$|\vec{P}| = \frac{q_i d}{A d} = \sigma_i$$ از جنس دانسیته القایی است.

$$\boxed{\oint \vec{P}\cdot\vec{da} = q_i}$$: برای محاسبه مقدار بار القایی

چون $\vec{P}$ بر سطح عمود است $\Leftarrow PA = Q_i$

$$\Rightarrow \oint \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{da} = Q - \oint \vec{P}\cdot\vec{da} \Rightarrow$$

E و P موازی و بر سطح عمود هستند

$$\Rightarrow \oint \underbrace{(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}\cdot\vec{da} = Q$$

(بردار جابجایی) $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E_0}$ $\Rightarrow$ صورت کلی قانون گاوس $\boxed{\oint \vec{D}\cdot\vec{da} = Q_f}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E_0} = k\varepsilon_0 \vec{E}$$ نتیجه: $\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}(k-1)}$

تعریف دوم: برای هر ماده دی الکتریک در حجم ضریبی می‌توان تعریف کرد:

k: ثابت دی الکتریک
η: ضریب حساسیت

$$\eta = \frac{|\vec P|}{|\epsilon_0 \vec E|} = k-1$$

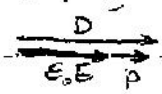
$$\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec\nabla\cdot\vec D = \rho$$

دیورژانس

حالت خاص: (۱) وقتی دی الکتریک نداریم: $\vec P = 0$ ~ $\vec D = \epsilon_0 \vec E$

(۲) وقتی $\vec E = 0$ ~ $\vec D = \vec P$ یعنی تمام مولکولها پلاریزه هستند.

* سه بردار $\vec D$ و $\vec P$ و $\epsilon_0\vec E$ سه بردار الکتریکی هستند.



$$\boxed{\vec D = \epsilon_0 \vec E + \vec P}$$

مثال: یک خازن مسطح با سطح مقطع ۲ dm^2 و فاصله صفحات ۰/۲ mm را به اختلاف پتانسیل ۴۰۰ ولت وصل می‌کنیم.

اولاً: ظرفیت، بار، چگالی سطحی بار، میدان الکتریکی، انرژی و چگالی انرژی را محاسبه کنید.

ثانیاً: اگر خازن شارژ شده را از منبع جدا کرده و آن را با دی الکتریک با ضریب حساسیت $\eta = 3$ پر کنیم، مقادیر خواسته شده قسمت بالا و چگالی بار القایی، بردار جابجایی و پلاریزاسیون را مشخص و سه بردار را بر اساس شکل مناسب رسم کنید.

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{2\times10^{-2}}{2\times10^{-4}}\epsilon_0 = 100\epsilon_0 \ (F) \qquad q = CV = 100\epsilon_0 \times 4\times10^{2} = 4\times10^{4}\epsilon_0 \ (C)$$

$$E = \frac{V_0}{d} = \frac{400}{2\times10^{-4}} = 2\times10^{6} \ (V/m) \qquad U_0 = \frac{1}{2}C_0V_0^2 = \frac{1}{2}\times10^{2}\epsilon_0\times16\times10^{4} = 8\times10^{6}\epsilon_0 \ (J)$$

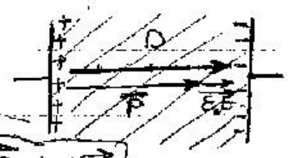
$$u_0' = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\times4\times10^{12} = 2\times10^{12}\epsilon_0 \ (J/m^3)$$

$$\eta = k-1 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow \begin{cases} C = 4C_0 \\ V = \frac{1}{4}V_0 \\ E = \frac{1}{4}E_0 \end{cases} , \ U = \frac{1}{4}U_0 , \ u' = \frac{1}{4}u_0' \ , \ Q = \text{ثابت}$$

$$\oint \vec D\cdot d\vec a = Q_f \Rightarrow |\vec D|\times A = Q_f \Rightarrow |\vec D| = \frac{Q}{A} = \frac{4\times10^{4}\epsilon_0}{2\times10^{-2}} = 2\times10^{6}\epsilon_0$$

$$|\vec P| = \frac{k-1}{k}|\vec D| = \frac{3}{4}|\vec D| = \frac{3}{2}\times10^{6}\epsilon_0$$

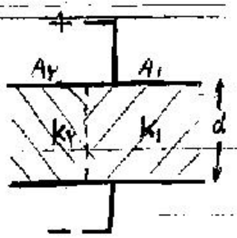
$$u_0' = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}k\epsilon_0\left(\frac{E_0}{k}\right)^2 = \frac{1}{k}u_0' \quad \text{اثبات}$$



لذا: $\boxed{\vec P = \frac{k-1}{k}\vec D \quad \epsilon_0\vec E = \frac{1}{k}\vec D}$

بحث مسایل مربوط به خازن

وقتی خازن ثابت نباشد و از چندین دی الکتریک در آن استفاده شده باشد دو حالت قابل ذکر است:



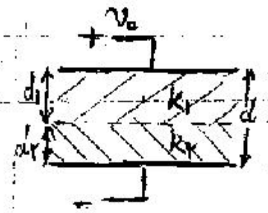
① این دو خازن هایستد دو خازن موازی عمل می‌کنند زیرا جوشنهای همنام آنها به هم متصل است. $C_1 = k_1 \varepsilon_0 \frac{A_1}{d}$, $C_2 = k_2 \varepsilon_0 \frac{A_2}{d}$

$$\Rightarrow C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0}{d}(k_1A_1 + k_2A_2)$$

در این حالت $\vec{D}_1$ با $\vec{D}_2$ مساوی نیست چون بار دو سطح (با دو خازن) برابر نیست ولی $E_1 = E_2$ زیرا دو سطح هم‌پتانسیلند.

در حالت کلی به این صورت : $C = \frac{\varepsilon_0}{d}(\sum k_iA_i)$

②



$$V_0 = V_1 + V_2 \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 + V_2} = \frac{Q}{\frac{D}{k_1\varepsilon_0}d_1 + \frac{D}{k_2\varepsilon_0}d_2} = \frac{Q}{E_1d_1 + E_2d_2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\frac{D}{\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}\right)} = \frac{\varepsilon_0 A}{\left(\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}\right)}$$ زیرا : $D.A = Q$

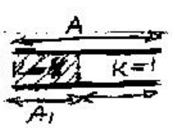
مانند دو خازن سری عمل می‌کنند همچنین $D_1 = D_2$ است زیرا سطح و بار هر دو خازن یکی است همچنین $\vec{E}_1 \neq \vec{E}_2$ زیرا : $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{k\varepsilon_0}$

در حالت کلی به این صورت : $C = \frac{\varepsilon_0 A}{\sum \frac{d_i}{k_i}}$

* می‌دانیم در نقاط نوک تیز یک شکل به علت هم پتانسیل بودن بار بیشتری قرار می‌گیرد در قسمت بالا هم به همین صورت می‌توان گفت که بار روی سطح دو جوشن به طور یکسان پخش شده است.

مثال : خازنی با ظرفیت C_0 داریم. می‌خواهیم با دی الکتریکی به ضریب $k=6$ آن را طوری پر کنیم که ظرفیت آن $5C_0$ شود این امر چگونه ممکن می‌شود؟

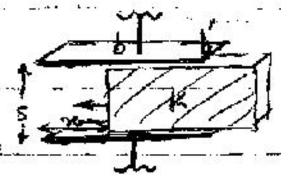
ج) می‌دانیم سری کردن دو خازن ، ظرفیت مجموعه را کم می‌کند و حالت موازی بالعکس پس باید دی الکتریک را طوری داخل خازن بریزیم که دو خازن موازی حاصل شود پس :



$$5\frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon_0}{d}(6A_1 + A - A_1) = \frac{\varepsilon_0}{d}(A + 5A_1)$$

$$\Rightarrow 5A = A + 5A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{4}{5}A$$ یعنی ۸۰٪ خازن باید با ثابت $k=6$ پر شود.

مثال : یک خازن تخت با مقطع مستطیلی یک عایق با ثابت دی الکتریکی k قرار دارد. الف) ظرفیت خازن را براساس پارامترهای داده شده حساب کنید. ب) در حالی که جوشنهای خازن دارای بار $+q$ و $-q$ هستند و خازن از منبع جدا است. اگر دی الکتریک را در خازن قرار دهیم تا تمام فضای بین صفحات را پر کند ، تغییرات نسبی انرژی خازن چقدر است؟



$$C=\frac{k\varepsilon_0\overbrace{(b-x)b'}^{A_1}}{s}+\frac{\varepsilon_0 x b'}{s}=\frac{\varepsilon_0 b'}{s}(kb-kx+x)$$

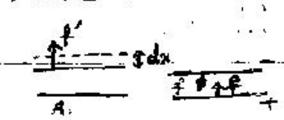
$$\Rightarrow C=\frac{\varepsilon_0 b'}{s}\left(kb+(1-k)x\right)$$ تغییرات ظرفیت خازن با تغییر x :

$$\frac{\Delta u}{u}=\frac{u_2-u_1}{u_1}=\frac{\frac{Q^2}{2C_2}-\frac{Q^2}{2C_1}}{\frac{Q^2}{2C_1}}=\frac{\frac{1}{C_2}-\frac{1}{C_1}}{\frac{1}{C_1}}=\frac{C_1}{C_2}-1$$

سؤال: دو جوشن یک خازن تحت بر همدیگر چه نیرویی وارد می کنند؟

یکی از صفحات را ثابت نگه می داریم و صفحه دیگر را به اندازه dx دور می کنیم با استفاده از اصل کارهای مجازی کار انجام شده برابر است با $dw=f'dx=du$ که این کار تبدیل به انرژی داخل خازن می شود پس:

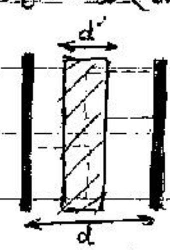
$$u=\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2x}{2\varepsilon_0 A}=\underbrace{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}}_{\text{ثابت}}x \Rightarrow du=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}dx$$



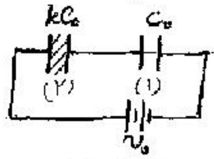
$$dw=f'dx=du=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}dx \Rightarrow f'=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\overset{\text{طبق اصل کار مجازی}}{\Rightarrow} f=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

به طور کلی: $\boxed{F=-\frac{du}{dx}}$ ⟸ باید تابع u را بر حسب x پیدا کنیم.

مثال: خازنی با فاصله صفحات d و سطح A مطابق شکل دارای ظرفیت C_0 است. به اندازه $d'<d$ ماده ای معادل و هم طول کل صفحات و مطابق شکل درخازن قرار می دهیم. در دو حالت زیر میدان و بردار جابجایی و پلاریزاسیون را در نواحی مختلف پیدا کنید ۱) ماده فلز بوده رسانا است ۲) ماده عایق با ثابت دی الکتریک K است.



مثال: دو خازن مشابه مسطح که ظرفیت هر یک C_0 است در اختیار داریم. یکی از خازنها را مطابق شکل (الف) از دی‌الکتریک با ثابت k پر می‌کنیم و مجموعهٔ متوالی دو خازن را به اختلاف پتانسیل V_0 می‌بندیم. در این حالت بار هر خازن و انرژی مجموعه را برحسب C_0 و k و V_0 محاسبه کنید. در تجربه‌ای دیگر، نصف دی‌الکتریک را در یک خازن و نصف دیگر را در خازن دوم قرار می‌دهیم (شکل ب). در این حالت انرژی مجموعهٔ خازنها و تغییرات نسبی بار هر خازن را با مقایسهٔ قسمت الف حساب کنید:



(الف) $C_t = \frac{k}{k+1} C_0$

بار هر خازن: $Q = C_t V_0 = \frac{kC_0^2}{(k+1)C_0} \times V_0 = \frac{k}{k+1} C_0 V_0$

$U_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_t} = \left(\frac{kV_0}{k+1}\right)^2 \frac{C_0}{2}$

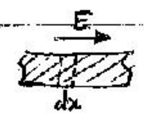
(ب) $V_1 = V_2 = \frac{V_0}{2}$ ← $C' = \frac{\varepsilon_0}{d}(k+1)\frac{A}{2} = \frac{C_0(k+1)}{2}$ ظرفیت هر خازن

$C'_t = \frac{C_0(k+1)}{4}$ → $U'_1 = \frac{1}{2} C'_t V_0^2 = \frac{1}{2}\frac{C_0(k+1)}{2} \times \frac{V_0^2}{4} = \left(\frac{(k+1)V_0^2}{8}\right)\frac{C_0}{2}$

$\Rightarrow \frac{U'_1}{U_1} = \frac{(k+1)^3}{8k^2}$

مدار و جریان (circuit and Curent)

کمیتهای اساسی یک مدار ساده:



۱) شدت جریان: $\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$

بعد از آنکه الکترونها یک سرعت تقریباً ثابت در سیم پیدا کردند، این سرعت را سرعت سوق می‌نامند و برابر است با:

$\vec{V} = V_d = \frac{dx}{dt}$ → $dq = n.A.dx.e$

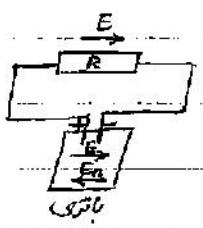
n: تعداد الکترونهایی که در واحد حجم در جهت جریان حرکت می‌کنند

$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = n.A.\frac{dx}{dt}.e = nAV_d e$

$\Rightarrow \boxed{I = nAV_d e}$

هرچه جسم رساناتر باشد، n بزرگتر است.

* تجزیه یک مدار:

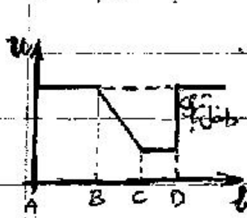


$\mathcal{E} = \int \vec{E_n}\cdot\vec{dx}$ نیروی محرکهٔ باتری ، $V = \phi_B - \phi_A = -\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dx}$

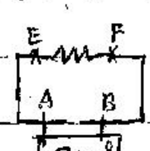
وقتی مدار باز است: $\mathcal{E} = V$

نیروی محرکهٔ مولد (ε) مقدار انرژی است که یک کولن بار مثبت می‌گیرد تا در مدار داخل و خارج بچرخد.

بار وقتی از یک قطب باطری به قطب دیگر مدار می‌رود انرژی از دست می‌دهد. ولی وقتی بار از قطب منفی باطری (در داخل باطری) به قطب مثبت می‌رود نیروی محرکه به او انرژی می‌دهد و آن را به تراز قبلی برمی‌گرداند.



به طور کلی: $\mathcal{E} = V + \underbrace{i}_{\text{جریان مدار باتری}}\underbrace{r}_{\text{مقاومت داخلی باتری}}$



۲/ اختلاف پتانسیل : مقدار کار انجام شده برای واحد بار $\frac{dw}{dq}=V$

۳/ مقاومت

چگالی جریان : برداری است که شار گذرنده آن از سطح A برابر I شود : $J=\frac{I}{A}$

یا بصورت غیر برداری : جریان گذشته از واحد سطح را گویند. $\Rightarrow \int_A \vec{J}\cdot d\vec{a}=I$

$$\Rightarrow J=nV_d e=\frac{I}{A} \Rightarrow \boxed{V_d=\frac{J}{ne}=\frac{I}{Ane}}$$

قانون اهم (مقاومت) = اختلاف پتانسیل در سر یک رسانا به جریانی که از آن عبور می کند ثابت است $R=\frac{V}{I}$

* عکس مقاومت را رسانایی گرمایی گویند : $\frac{1}{R}=G=\frac{I}{V}$

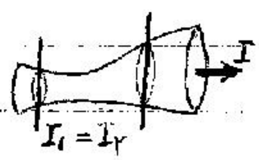
مقاومت ویژه :

ρ مقداری است که در رابطه $\vec{E}=\rho\vec{J}$ صدق کند یا $\rho=\frac{|\vec{E}|}{|\vec{J}|}$ (مقاومت ویژه)

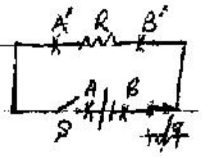
* در یک سیم مستقیم با سطح مقطع یکسان و یکنواخت مقاومت با مقاومت ویژه رابطه زیر را دارند : $R=\rho\frac{l}{A}$

* عکس مقاومت ویژه به ضریب رسانش نام دارد : $\frac{1}{\rho}=g=\frac{|\vec{J}|}{|\vec{E}|}$

نکته : جریان در هر سطح یک شکل غیر منتظم یکسان است و چگالی آن یکسان نیست.



حل مدار

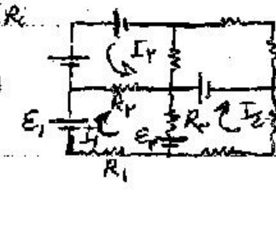


$$dqV_A-\overset{IR}{dqV_{A'}}+dq\mathcal{E}-\overset{rI}{dqV_{B'}}=dqV_A$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}=I(R+r \xrightarrow[\text{برای مدار تک حلقه}]{} \boxed{\sum\mathcal{E}=I(\sum \text{مقاومت})}$$

* برای حلقه ها فرض می کنیم هر یک حلقه است که در این شکل جهت حلقه ها جهت عقربه های ساعت می شود جهت جریانها انتخابی است و اگر منفی شد آنگاه معلوم می شود فقط جهت باید عوض شود. در حلقه های کوچک جدا شده از فرمول $\sum\mathcal{E}_i=I\sum R_i$ استفاده می کنیم

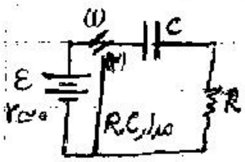
$$\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2=(R_1+r_1)I_1+R_2(I_1+I_2)+(R_3+r_3)(I_1-I_3)$$



* برای باتری هایی که از قطب منفی به مثبت می رویم $+\mathcal{E}$ (در این طرف شکل)

مدار R.C

در این مدار که در آن خازن وجود دارد، جریان لحظه‌ای است و ثابت هم نمی‌باشد. در ضمن در پایان جریان صفر می‌شود



شارژ: در هنگام شارژ (وقتی کلید (۱) بسته می‌شود)

$$\varepsilon dq - V_R dq - V_C dq = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon = IR + \frac{q}{C}$$

لحظه بستن کلید $t=0 \begin{cases} q=0 \\ I = I_m = I_R = \frac{\varepsilon}{R} \end{cases}$

لحظه شارژ خازن $t=T \begin{cases} q = q_m = q_0 = \varepsilon C \\ I=0 \end{cases}$

در دیگر لحظات: $I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{R} = \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC}$

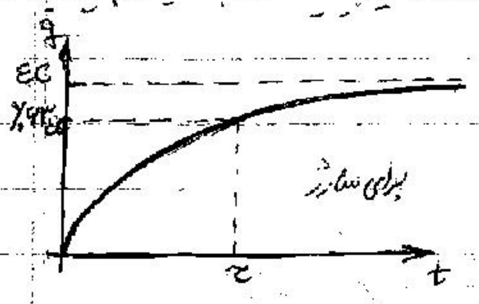
$$\Rightarrow \int_0^q \frac{dq}{\frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC}} = \int_0^t dt \Rightarrow \left[-RC\ln\left(\frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC}\right)\right]_0^q = t$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC}\right)\Big|_0^q = \frac{-t}{RC} \rightarrow 1 - \frac{q}{\varepsilon C} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \boxed{q = \varepsilon C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$ بار خازن برای شارژ

و یا $q = q_{max}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

همانطور که دیده می‌شود $\tau = RC$ از جنس زمان است که به τ، ثابت زمانی مدار RC گویند و τ مقدار زمانی است که پس از آن کمیت به ۶۳٪ مقدار max می‌رسد (هنگام شارژ شدن) $\tau \Rightarrow ۶۳\%$

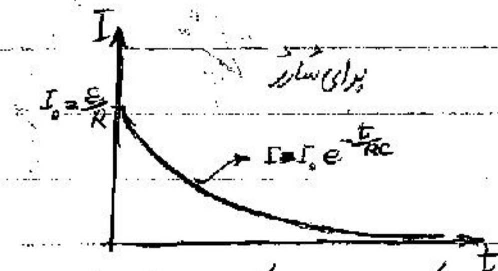
همانطور که در مدل دیده می‌شود مدتی که طول می‌کشد تا خازن شارژ کامل شود ∞ است اما این بینهایت در عمل (به طور مقایسه‌ای) یک ثانیه هم شاید نشود.



زمان واهلش τ: Relaxation time

جریان مدار: $\boxed{I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_{max} e^{-\frac{t}{RC}}}$

جریان مدار در لحظه شارژ شدن



دشارژ: برای خالی کردن خازن Decharge کلید (۱) را باز و کلید (۲) را می‌بندیم. در این صورت خازن

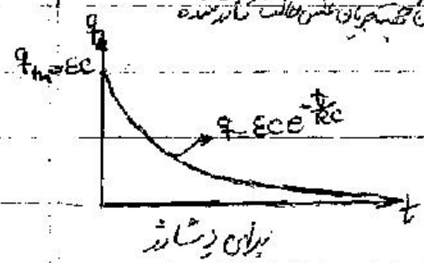
مانند یک باتری مولد جریان عمل می‌کند. پس:

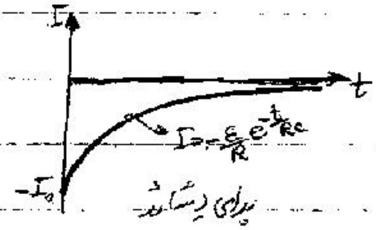
$$0 = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \Rightarrow -\frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} \Rightarrow \int_0^t dt = -RC\int_{q_m=\mathcal{E}C}^{q} \frac{dq}{q}$$

$$\Rightarrow t = -RC(\ln q - \ln \mathcal{E}C) \Rightarrow \boxed{q = \mathcal{E}C e^{-\frac{t}{RC}} = q_{max} e^{-\frac{t}{RC}}}$$ بار هر لحظهٔ خازن در دشارژ

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{dq}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = -I_{max} e^{-\frac{t}{RC}}}$$ جریان مدار در هر لحظهٔ دشارژ

چون جهت جریان عکس حالت شارژ شده





سؤال: در یک مدار RC هنگام شارژ چه مقدار انرژی در مقاومت تلف و چه مقدار در خازن ذخیره می‌شود؟

$$du = dW = \mathcal{E}\,dq \longrightarrow \boxed{\underset{\text{انرژی مولد}}{W} = \mathcal{E}\int_{q=0}^{q=\mathcal{E}C} dq = \mathcal{E}^2 C} = \mathcal{E} q_{max}$$

$$W_C = \int_0^{\mathcal{E}C} V\,dq = \int_0^{\mathcal{E}C} \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2C}(\mathcal{E}^2C^2) = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}\mathcal{E} q_{max}$$

$$W_R = \int_0^{\infty} RI^2\,dt = \int_0^{\infty} R\frac{\mathcal{E}^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{RC}}\,dt = \frac{R\mathcal{E}^2}{R^2} \times -\frac{RC}{2}\left[e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^{\infty} = \underbrace{\frac{\mathcal{E}^2 C}{2} = \frac{1}{2}\mathcal{E} q_{max}}$$

همانطور که دیده می‌شود نصف انرژی مولد به خازن و نصف به مقاومت داده می‌شود و این بستگی به مقدارهای R و C ندارد.

دقیقاً نصف می‌شود (بطور مساوی)؟

شرایط مرزی بین دو دی‌الکتریک:

برای بردار جابجایی ($\vec{D}$):

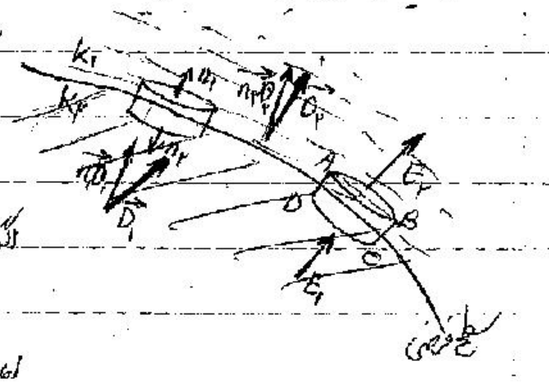
$$\oint \vec{D}\cdot\vec{da} = Q \Rightarrow \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2\,da + \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1\,da = \sigma\,da$$

$$\Rightarrow (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\vec{n}_2 = \sigma$$

$\Rightarrow$ اگر $\sigma = 0$ یعنی باری روی سطح وجود نداشته باشد.

$$\Rightarrow \vec{D}_1 = \vec{D}_2$$

یا $\boxed{\text{در حالت کلی } \vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n} \text{ یعنی مؤلفه‌های عمود بر سطح } \vec{D} \text{ برابرند}}$



برای میدان $(\vec{E})$:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \rightsquigarrow \int_A^B \vec{E}_2\, d\vec{l}_2 + \int_C^D \vec{E}_1\cdot d\vec{l}_1 + 0 + 0 = 0 \xRightarrow{d\vec{l}_2 = -d\vec{l}_1} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\, d\vec{l}_2 = 0$$

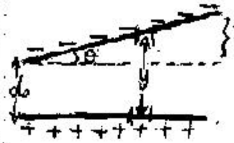
$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \quad \text{: یعنی مؤلفهٔ مماسی (افقی) میدان تغییر نمی‌کند}}$$

* پس در حرکت از یک دی‌الکتریک به دیگری که میدان، مؤلفهٔ افقی‌اش ثابت می‌ماند ولی بردار جابجایی مؤلفهٔ قائمش.

چند مسئلهٔ مفهومی

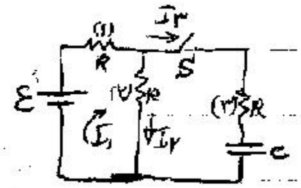
۱/ ظرفیت یک خازن مسطح مستطیلی که یکی از جوشنهای آن را θ درجه $(\theta < 4^\circ)$ کج کنیم به دست آورید: (جوشنها مربع $b \times b$ اند)

نکته: به طور تجربی می‌توان حدس زد که ظرفیت خازن باید زیاد شود چون d به طور متوسط زیاد شده است.



خازن را با المان‌های کوچک که با هم موازی‌اند تقسیم: $\quad dc = \dfrac{\varepsilon_0 b\, dx}{y} = \dfrac{\varepsilon_0 b\, dx}{D_0 + x\theta}$

$$\Rightarrow C = \int_0^b dc = \int_0^b \frac{\varepsilon_0 b\, dx}{D_0 + x\theta} = 2l\left(1 - \frac{\theta l}{2D_0}\right)$$



۲/ در مدار شکل مقابل با بستن کلید S حساب کنید: ۱) جریان گذرنده از هر مقاومت ۲) ولتاژ دو سر R_2 و خازن در لحظهٔ $t=0$ و $t=\infty$ ۳) در یک لحظهٔ $0<t<\infty$ معادلهٔ بار خازن و جریان را پیدا کنید و رسم کنید.

$$\text{در هر لحظه} \begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ \mathcal{E} - RI_1 - RI_2 = 0 \\ -RI_3 - \dfrac{q}{C} - RI_2 = 0 \end{cases} \qquad t=0 \begin{cases} q = 0 \\ i_2 = i_3 = \frac{1}{2} i_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R} \\ V_{R_2} = \dfrac{\mathcal{E}}{3} \\ V_C = 0 \end{cases}$$

$$t=\infty \begin{cases} q = q_{max} \\ I_3 = 0 \\ I_1 = I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R} \\ V_C = \dfrac{q_{max}}{C} = V_{max} \end{cases}$$

$$\mathcal{E} - R(I_2 + I_3) - RI_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{\mathcal{E}}{2R} - \frac{I_3}{2}$$

$$\Rightarrow -RI_3 - \frac{q}{C} - R\left(\frac{\mathcal{E}}{2R} - \frac{I_3}{2}\right) = 0$$

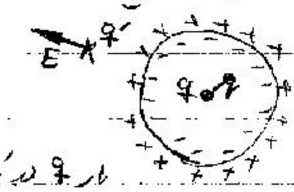
$$\Rightarrow I_3 = \frac{-2q}{RC} - \frac{\mathcal{E}}{R} \xRightarrow{\text{جهت } I_3 \text{ را عوض}} I_3 = \frac{2q}{RC} + \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \int_0^q \frac{dq}{\frac{2q}{RC} + \frac{\mathcal{E}}{R}} = \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \frac{RC}{2}\ln\left(\frac{2q}{RC} + \frac{\mathcal{E}}{R}\right) - \frac{RC}{2}\ln\frac{\mathcal{E}}{R} = t \Rightarrow q = \frac{-C\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} e^{\frac{2t}{RC}}$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{dq}{dt} = \frac{-C\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{RC} e^{\frac{2t}{RC}} \quad \Rightarrow \text{با توجه بالا } I_1 \text{ و } I_2$$

۳/ بار نقطه‌ای q در مرکز یک کرهٔ هادی قرار دارد. ۱) کره نازک فرض شود و میدان نقاط داخل و خارج آن را با بیند. بار q در خارج کره در نظر بگیرید به آن چه نیرویی وارد می‌شود ۲) کرهٔ هادی را ضخیم (شعاع خارجی b و داخلی a) در نظر بگیرید.

جواب‌ها را دوباره تکرار کنید ۱۳ که بار عایق بگیرید.



در داخل کره: $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = q \Rightarrow \vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r} \quad r<R$

$\varepsilon_0 \oint E\, da = q+(q-q) \Rightarrow E = \frac{kq}{r^2}\hat{r} \quad r>R$

بار q در q′ میدان دارد اما q′ در q میدان ندارد و این به آن علت است که ... می‌توان توجیه کرد که

میدان از سطح داخل نمی‌شود و به کره وارد می‌شود و به تعداد q و −q روی سطح کره.

* اگر ضخامت داشته باشد: در داخل $E_1 = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$ و $a \le r < b: E = 0$ و $r \ge b: \vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$

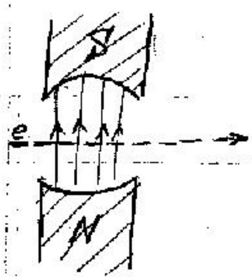
* اگر کره عایق باشد: $r<a: E = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$ و $a \le r < b: \varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \sum q$

$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\hat{r}$ و $r \ge b: E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}(b^3 - a^3)\hat{r}$

/۱۴

مغناطیس

القاء یا اندکسیون مغناطیسی: نیروی مغناطیسی همان نیروی الکتریکی است با در نظر گرفتن نسبیت.



$$F_m \propto qvB\sin\theta \rightsquigarrow F_m = kqvB\sin\theta \qquad k=1$$

$$\Rightarrow B = \frac{f}{qv\sin\theta}$$

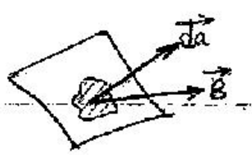
یعنی اگر بار q با سرعت v با زاویهٔ θ نسبت به میدان مغناطیسی یکنواخت B، وارد آن شود نیروی f_m بر آن وارد می‌شود و یا اگر نیروی f_m بر آن وارد شود مقدار B از فرمول بعد محاسبه می‌شود.

* اگر واحد بار کولنی با سرعت $1\frac{m}{s}$ عمود بر میدان که بر آن N ۱ نیرو وارد کند، حرکت کند به آن میدان مغناطیسی واحد (یک تسلا) گویند $T \equiv NA^{-1}m^{-1}$

$$\boxed{\text{فرمول لاپلاس: } q(\vec{v}\times\vec{B}) = \vec{F}}$$

اگر ذره در آن واحد هم در میدان مغناطیسی و هم الکتریکی بود $\vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B}+\vec{E})$ نیروی لورنتس

شار مغناطیسی: $d\phi_B = \vec{B}\cdot\vec{da}$



واحد شار wb (وبر) است. $wb \equiv Tm^2$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_B = \int \vec{B}\cdot\vec{da}} \quad , \quad B = \frac{d\phi}{da_\perp}$$

سطحی که از آن میدان می‌گذرد

* واحد قدیمی میدان در دستگاه cgs، گاوس (Gauss) می‌باشد و $1G = 10^{-4}T$

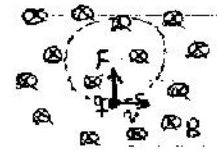
قانون گوس برای مغناطیس: چون در جهان تک قطبی مغناطیسی وجود ندارد پس خطوط میدان همواره بسته هستند یعنی اگر بخواهیم آنها را در حجم محصور کنیم به همان تعداد خطوط داخل شده، خطوط میدان مغناطیسی، خارج می‌شوند پس:

همواره: $\oint \vec{B}\cdot\vec{da} = 0$

سطح یک حجم گاوسی

* به فرض میدان مغناطیسی $\vec{B}$ بطور یکنواخت وجود دارد و ذره‌ای بصورت عمودی با سرعت v وارد میدان می‌شود خواهیم داشت

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = qvB\,(\hat{j}\times\hat{i}) = qvB\hat{k}$$



مقدار سرعت ثابت خواهد ماند زیرا :

$$dk = dw = \vec{F}\cdot\vec{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = cte \Rightarrow |\vec{v}| = cte$$

پس بار یک مسیر دایره‌ای را طی می‌کند

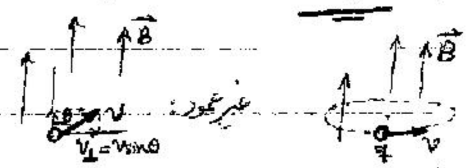
از طرفی برای دوران یک نیروی جانب مرکز (مرکزگرا) لازم است که برابر است با : $F_c = \frac{mv^2}{R} = mR\omega^2$

در اینجا $F_c = qvB$ پس : $\boxed{\omega = \frac{qB}{m}}$ و $\boxed{R = \frac{mv}{qB}}$ شعاع چرخش

نتیجهٔ این روابط : شعاع چرخش متناسب با اندازه حرکت و با بار و میدان نسبت عکس دارد. همچنین تعداد دور در واحد زمان را

از طریق فرکانس حساب می‌کنند : $f = \frac{1}{2\pi}\frac{qB}{m}$

* اگر بار بصورت غیرعمود وارد شود از آنجا که $F = qv_{\perp}B$ خواهیم داشت :



– چون در راستای عمودی سرعت $v_{\parallel} = v\cos\theta$

دارد بسمت بالا با معادله $z = v\cos\theta\, t$

حرکت هم می‌کند

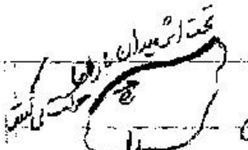
اما سرعت چرخش تغییر نمی‌کند و زمان چرخش ثابت است $T = \frac{1}{f} = 2\pi\frac{m}{qB}$ و ... ثابت خواهیم داشت :

و حرکت بصورت فنری خواهد بود. $\boxed{z_p = v\cos\theta\,\frac{2\pi m}{qB}}$

* سیکلوترون یک شتاب دهنده ذره است که ضمن حرکت سرعت هم اضافه می‌شود که بعداً مطرح خواهد شد.

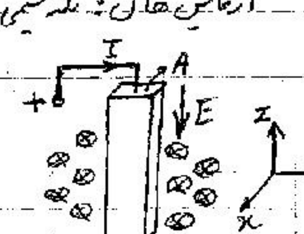
اثر هال (Hall effect)

آزمایش هال : تکه سیمی یا نوار مسی که از آن جریانی می‌گذرانیم را در نظر می‌گیریم



۱* اگر بارهای متحرک مثبت باشند در حال یک میدان مغناطیسی

خارج عمود بر صفحه ایجاد کرده و تأثیر میدان برآن بارها می‌شود :



$$\vec{F}_m = q\vec{v}\vec{B} = qvB\hat{j}$$

نتیجه آنکه اول از جهت توزیع بار به هم می خورد و مثبت ها به سمت مثبت می روند و یک اختلاف پتانسیل با میدان (عرضی (عمود بر میدان)) دو طرف صفحه حاصل می شود که پتانسیل هال گویند. پس

۲ * اگر بارهای متحرک الکترون ها باشند بار هم الکترون ها به سمت راست می روند و اختلاف پتانسیل دیگری حاصل می شود و طبق این آزمایش ها دیده شد که بارهای متحرک ما الکترون ها می باشند.

نکته: در مایعات و گازها که یون وجود دارد هر دو حرکت می کنند.

در آزمایش هال بعد از زمان معینی به یک حالت اشباع می رسیم که در آن نیروی بوجود آمده با نیروی میدان مغناطیسی برابر می شود

$$|\vec{F}| = F_m \Rightarrow \cancel{e}E_H = \cancel{e}V_dB \Rightarrow \frac{V_H}{d} = V_dB$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{V_H}{d}}_{\text{پتانسیل هال}} = \frac{IB}{neA} \Rightarrow$$ از روی این فرمول تعداد الکترونهای متحرک بدست می آید

سیکلوترون:

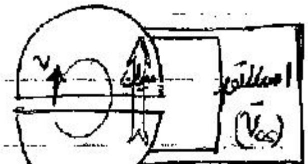
اگر بر ذره ی باردار اختلاف پتانسیل اعمال شود، به آن نیرو وارد می شود.

اساس کار سیکلوترون بر چند چیز استوار است: ۱/ سیستم مولد یون (p, e, ...)

۲/ میدان مغناطیسی یکنواخت

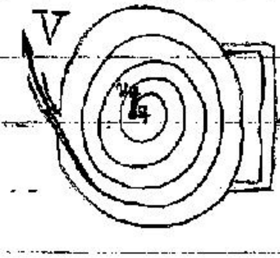
۳/ ایجاد شرایط خلاء

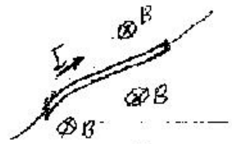
۴/ ایجاد یک میدان قوی و متناوب (اسیلاتور)



اسیلاتور دارای اختلاف پتانسیل است که f (فرکانس) آن برابر f حرکت ذرات فرض می شود.

وقتی بار q که مثبت فرض می شود به بالای حرکت دایره ای خود می رسد به اندازه qV_{os} انرژی کسب می کند یا از دست می دهد در این حرکت فرکانس تغییر نمی کند ($f=\frac{1}{2\pi}\frac{qB}{m}$) اما سرعت او در چرخش در چرخش قبل عوض می شود و به همین صورت در چرخش های بعدی $\Delta K=qV_{os}$ انرژی وارد یا از سیستم خارج می شود و سرعت ذره بیشتر می شود و در پایان از مسیری با سرعت بالا ذره خارج می شود.



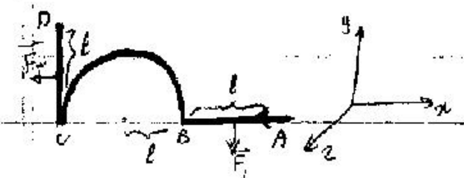


* اگر سیمی با جریان I داخل یک میدان مغناطیسی مفروض باشد، چون بارهای متحرک در آن در حال جریان هستند به این سیم در میدان مغناطیسی نیرو وارد می‌شود.

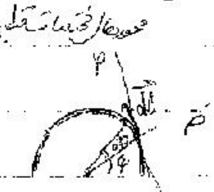
$$\vec F_m = q\vec V\times\vec B \rightarrow d\vec F = dq\,\vec v\times\vec B = I\vec v\,dt\times\vec B = I\,d\vec l\times\vec B$$

$$\Rightarrow \boxed{d\vec F = I\,d\vec l\times\vec B} \Rightarrow \boxed{\vec F = I\int_{l_1}^{l_2} d\vec l\times\vec B}$$

توجه شود که بردار یکه $\hat u$ در امتداد $d\vec l$ جهت ثابتی ندارد و از انتگرال بیرون نمی‌آید ولی اگر سیم مستقیم باشد $\hat u$ جهت ثابتی خواهد داشت و $\vec F = I\vec L\times\vec B$ می‌شود.



مثال: سیمی به شکل زیر موجود می‌باشد. اگر جریان I از آن بگذرد و میدان یکنواخت B بر صفحه عمود باشد، به این سیم چه نیرویی وارد می‌شود؟



$$\vec F_{AB} = \vec F_1 = I\vec l_1\times\vec B = IlB(-\hat i\times-\hat k) = IlB(-\hat j)$$

$$\vec F_{CD} = \vec F_2 = I\vec l_2\times\vec B = IlB(\hat j\times-\hat k) = IlB(-\hat i)$$

$\hat\rho$ = بردار شعاعی

$$d\vec F_3 = I\,d\vec l_3\times\vec B = IRd\varphi B(\hat\varphi\times-\hat k) = IRd\varphi B(-\hat\rho) =$$

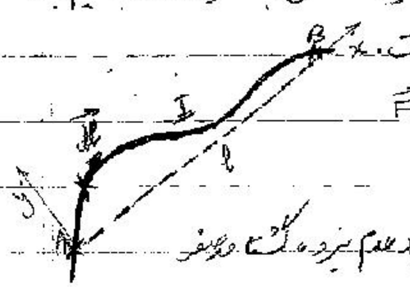
$$= -IRd\varphi B(\cos\varphi\,\hat i + \sin\varphi\,\hat j)$$

$$\begin{cases}\hat\rho = \cos\varphi\,\hat i + \sin\varphi\,\hat j\\ \hat\varphi = -\sin\varphi\,\hat i + \cos\varphi\,\hat j\end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec F_3 = -IRB\int_0^\pi(\cos\varphi\,\hat i + \sin\varphi\,\hat j)\,d\varphi = -2IRB\,\hat j$$

$$\Rightarrow \vec F_t = \vec F_1 + \vec F_2 + \vec F_3 = -IlB(\hat j + \hat i)$$

* ثابت کنید هرگاه از سیمی به شکل دلخواه جریانی بگذرد و سیم در یک میدان مغناطیسی یکنواخت واقع باشد، نیروی وارد بر سیم با نیروی وارد بر سیم مستقیم فرضی که دو سر سیم را به هم وصل کند در همان میدان برابر است.



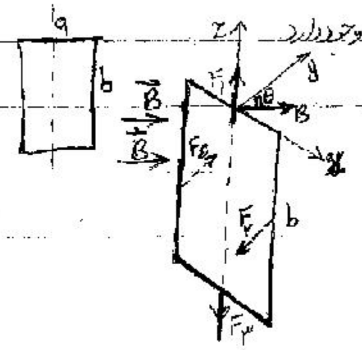
$$\vec F = \int I\,d\vec l\times\vec B = I\int(dl_x\hat i + dl_y\hat j)\times\vec B = I\left[\int_0^l dl_x B\,\hat i\times\hat k + \int dl_y B\,\hat j\times\hat k\right]$$

$$= I\int_0^l dl_x B\,\hat j = IlB\,\hat j$$

اگر مدار بسته باشد $\vec F = 0$ یعنی نیروی وارد بر عناصر مدار صفر است. اما با وجود عدم نیرو، گشتاور صفر نیست و این گشتاور باعث چرخش حلقه می‌شود.

محاسبه گشتاور موثر بر یک قاب حامل جریان:

یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec B$ یک قاب چهارگوش با طول a و عرض b وجود دارد.



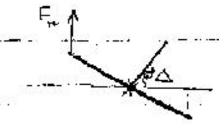
$$\vec B = B_0(\sin\theta\,\hat i + \cos\theta\,\hat j)$$

$$\vec l_1 = a\hat i \Rightarrow \vec F_1 = IaB_0\cos\theta(\hat i\times\hat j) = IaB_0\cos\theta\,\hat k$$

$$\vec F_3 = I\vec l_3\times\vec B = -\vec F_1 = IaB_0\cos\theta(-\hat k)$$

$$\vec{F}_2 = I\,\vec{b}\times\vec{B} = IbB(\hat{u}) = Ib(-\hat{k})\times B_0(\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}) = IbB_0(-\sin\theta\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{i})$$

$$\vec{F}_4 = -\vec{F}_2 \quad , \quad \sum \vec{F} = 0$$



$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}\times\vec{F}| = \Delta|\vec{F}_2| = a\sin\theta\, IbB_0$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}_2 = a\hat{i}\times IbB_0(\sin\theta\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{i}) = IabB\sin\theta(\hat{k})$$

با آنکه جمع نیروها صفر است،

دو تا از نیروها تولید گشتاور می‌کنند، بزرگی این گشتاور $|\vec{\tau}| = IabB\sin\theta$ است.

$$\Rightarrow \vec{\tau} = I\vec{A}\times\vec{B}$$

مانند یک دوقطبی الکتریکی که $\vec{P} = q\vec{L}$ ممان دوقطبی الکتریکی بود، با استفاده از ... ممان دوقطبی مغناطیسی تعریف می‌کنیم:

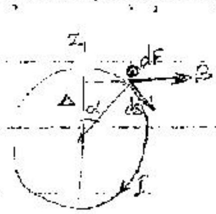
اگر جریانی از یک مدار بسته (معمولاً حلقه) بگذرد، حاصلضرب جریان در بردار سطح آن مدار را ممان دوقطبی مغناطیسی گویند و با $\vec{M}$ نشان می‌دهند.

$$\vec{M} = I\vec{A} \quad , \quad |d\vec{M}| = I\,r\,dx$$

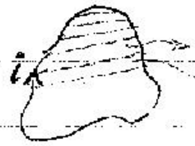
جهت $\vec{M}$ را می‌توان جهت بردار سطح گرفت. اگر انگشتان دست راست را در جهت جریان بگیریم جهت شست جهت $\vec{M}$ است.

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{M}\times\vec{B}$$

تمرین: برای محاسبه گشتاور وارد بر یک حلقه جریان (ثابت) مدار دایره‌ای به شعاع a بگیرید که جریان I از آن می‌گذرد. میدان مطابق شکل با مقدار ثابت در تمام فضای حلقه وجود داشته باشد. با محاسبه گشتاور نیروها نسبت به محور z ها رابطه $\vec{\tau} = \vec{M}\times\vec{B}$ را به دست آورید: (راهنمایی: $d\vec{F} = I\,d\vec{s}\times\vec{B}$)



روش کلی: در تمامی اشکال رابطه $\vec{\tau} = \vec{M}\times\vec{B}$ برقرار است.



$$\vec{\tau}_i = \vec{M}_i\times\vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{M}\times\vec{B}$$

$$\vec{\tau}_t = \vec{M}_t\times\vec{B}$$

$dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = \mu B \sin\theta \, d\theta \rightarrow W_{1\to 2} = \mu B \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \, d\theta = \Delta U \rightarrow \Delta U = -\mu B \cos\theta$

برای یک حلقه جریان در میدان خواهیم داشت: $\boxed{\Delta U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}}$ و یا $\boxed{\Delta U = -\vec{P} \cdot \vec{E}}$ باشد

سؤال: در یک دستگاه مختصات دکارتی بردار سرعت الکترونی برابر $\vec{V} = 25 \times 10^{7} \hat{k} \, \frac{m}{s}$ (در راستای $\hat{k}$) و نیروی وارد بر آن در این میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{F} = (4i + 3j) \times 10^{-13} \, N$ است. اگر سرعت تغییر کند و به صورت $\vec{V} = (15\hat{i} - 2\hat{j}) \times 10^{7} \, \frac{m}{s}$ گردد، نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون صفر می‌شود. مؤلفه‌های بردار القای مغناطیسی $\vec{B}$ را بیابید. $\vec{B} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

① $4 \times 10^{-13} \vec{i} + 3 \times 10^{-13} \vec{j} = -1.6 \times 10^{-19} \times 25 \times 10^{7} \vec{k} \times (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$ چرا برای تعیین مؤلفه‌های میدان هر دو سرعت لازم است؟

$\Rightarrow 4 \times 10^{-13} \vec{i} + 3 \times 10^{-13} \vec{j} = -4 \times 10^{-11} a \vec{j} + 4 \times 10^{-11} b \vec{i} \Rightarrow -4 \times 10^{-11} a = 3 \times 10^{-13} \Rightarrow a = -\frac{3}{4} \times 10^{-2}$

$4 \times 10^{-11} b = 4 \times 10^{-13} \Rightarrow b = 10^{-2}$

② $0 = -1.6 \times 10^{-19} (15\vec{i} - 2\vec{j}) \times 10^{7} \times (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \Rightarrow$ به دست می‌آید

سؤال: یک گوی فلزی به جرم $100 gr$ با سرعت $40\pi \, \frac{m}{s}$ در یک سطح افقی به حالت دوران می‌کند که توسط ریسمان محکمی نگه داشته شده و در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد. چه مقدار بار مثبت q باید روی گوی قرار داد تا کشش نخ دو برابر شود ثانیاً جهت $\vec{B}$ نسبت به $\vec{W}$ (وزن) کدام است.

$m = 0.1 \, kg \quad v = 40\pi \, \frac{m}{s}$

$T = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow T = \frac{160\pi^2}{R}$

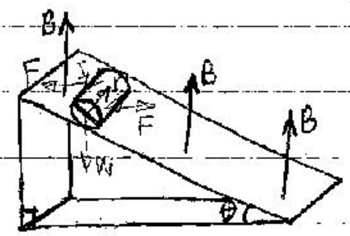
$2T = \frac{mv'^2}{R} \Rightarrow v' = 40\sqrt{2}\pi \, \frac{m}{s}$

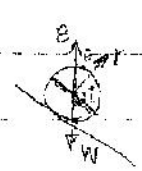
در حالت دوم: $\vec{f} + \vec{T} = 2\vec{T} \Rightarrow \vec{f} = \vec{T} = \frac{160\pi^2}{R}$

از طرفی: $\vec{f} = qv'B \Rightarrow 4\sqrt{2} \times 10^{-3} \pi q = \frac{160\pi^2}{R}$ … $\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}$ … باید … شود B

$\Rightarrow q = \frac{2\sqrt{2} \times 10^{4} \pi}{R}$

سؤال: استوانه‌ای به جرم m و شعاع r و طول l مطابق شکل روی سطح شیبداری به زاویه θ قرار دارد که سطح در میدان یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارد. بالا آنکه مانع غلتش استوانه شویم n دور سیم دور استوانه پیچیم (از وسط استوانه بگذرد) جهت و مقدار جریان را طوری تعیین کنید که استوانه در تعادل بماند.





$\otimes \vec{\tau}$. گشتاور چرخش ناشی از وزن است پس گشتاور ناشی از … جریان ⊙ باید باشد

$\vec{\tau}_i = I\vec{A} \times \vec{B} \quad \vec{B} = B\vec{j} \quad \Rightarrow \vec{A} = \vec{i} \cdot l \cdot \vec{j}$

$\Rightarrow \vec{\tau}_i = I \times 2l r \cdot B \times (\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}) \times \hat{j} = 2Ilr B \sin\theta \hat{k}$ … پس جهت جریان … جهت عقربه‌های ساعت …

$\vec{\tau}_w = \vec{r} \times \vec{W} = mgr(\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) \times -\hat{j} = -mgr\sin\theta \hat{k} \Rightarrow I = \frac{mg}{2NlB}$

محاسبهٔ $\vec{B}$ ناشی از جریان $\vec{I}$

۱/ روش بیوساوار :

$$\boxed{\vec{dB} = k' \frac{I\,\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2} = k' \frac{I\,\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}}$$

$k' = \frac{\mu_0}{4\pi}$ ثابت تراوایی مغناطیسی

$k' = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ که ثابت تراوایی یا گذردهی مغناطیسی است و رابطهٔ خوبی با k دارد :

$$\frac{k}{k'} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = 9\times10^{16}\,(m.s^{-1})^2 = c^2 \quad \text{(سرعت نور)} \longrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

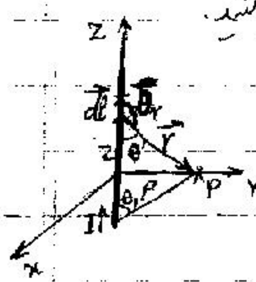
۲/ روش آمپر

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 (\Sigma I)}$$

جهت $\vec{B}$ در یک مسیر بسته

(این روش مانند روش گوس محدودیت دارد)

یک سیم حامل جریان I موجود است میدان مغناطیسی را در نقطه‌ای به فاصلهٔ ρ از آن حساب کنید.



$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{dl} = dz\,\hat{k}$$

$$\vec{dB} = k' \frac{I\,dl\,r\sin\theta}{r^3}\,\hat{u} = k' \frac{I\,dz\,\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,(-\hat{i})$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \int \vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\rho \int \frac{dz}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,(-\hat{i}) =$$

$$z = \rho\cot\theta' = -\rho\cot\theta_2$$

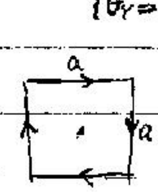
$$\Rightarrow dz = \frac{\rho}{\sin^2\theta} \qquad (z^2+\rho^2)^{3/2} = \frac{\rho^3}{\sin^3\theta} \quad \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{\rho}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta\,d\theta\,(\hat{\varphi})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{\rho}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\,\hat{\varphi}}$$

حالت خاص : برای یک سیم طویل (بینهایت طویل)

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \pi \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}\,\hat{\varphi}$$

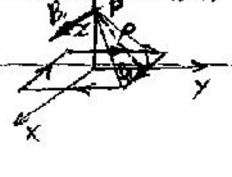
* اگر مجموع چند سیم داشته باشیم مثلاً :



$$\vec{B} = \Sigma\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{\frac{a}{2}}\sqrt{2}\right)$$

هر ۴ سیم میدان را در بر می‌گذارند.

میدان یک حلقهٔ مربع شکل را روی محور آن به فاصلهٔ z از آن حساب کنید.

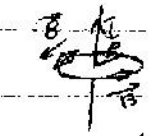


$$\vec{B} = \Sigma\vec{B}_1 =$$

* روش آمپر مانند قضیه کار است $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=V$

* اگر دور یک سطح بسته فرضی جریانهایی داشته باشیم اگر $\vec{B}$ را در مرز سطح حساب کنیم (مجموع میدانهای $\vec{B}$) و در $d\vec{l}$ و $\cos$ زاویه بینشان ضرب و جمع جبری کنیم، برابر $\mu(\sum I)$ خواهد شد.

روش آمپر با آزمایش هم ثابت شده با یک سیم بینهایت طویل و صفحه‌ای که روی آن عقربه‌های مغناطیسی قرار داشت



در این آزمایش $\vec{B}$ و $d\vec{l}$ منطبق بودند $\cos\theta=1$ اما حالت کلی را آن انتگرال کشف کردند.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I \Rightarrow B(2\pi\rho)=\mu_0 I \Rightarrow \vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$$

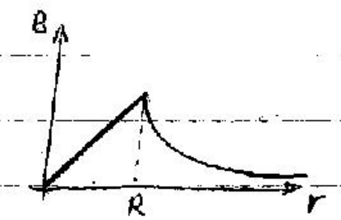
اما در این فرمول طول سیم را بینهایت فرض کردیم اگر سیم محدود باشد $\vec{B}$ ها فرق می‌کند. پس محدودیت فرمول اینجا وجود دارد و شرط آن طویل بودن سیم است و این شرط در همه مسائلی که از قانون آمپر استفاده می‌شود باید رعایت شود. دیگر شرط آن یکسان بودن میدان مغناطیسی در یک منطقه وسیع (مثلاً اینجا دایره) است

* اگر سیم ضخیم باشد مانند سطح گوسی، خط بسته آمپر را داخل سیم به شعاع ρ می‌گیریم تا میدان مغناطیسی داخلی را بدست آوریم:

$$I=\frac{\rho L}{A}=\frac{\rho L}{\pi r^2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1}=\frac{r_1^2}{r_2^2}$$

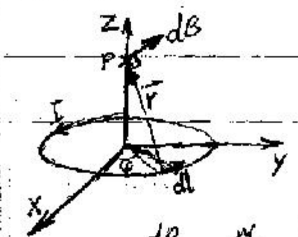
$$B(2\pi\rho)=\mu_0\frac{\rho^2}{R^2}I$$

$$\Rightarrow \vec{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R^2}\rho\hat{\varphi}$$



معادله کلی روش آمپر: $\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\int \vec{J}\cdot d\vec{a}}$

محاسبه $\vec{B}$ برای یک حلقه حاوی جریان روی محور آن



$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\,d\varphi\cdot r\sin\varphi}{r^3}\hat{n}$$

از این نمی‌توان انتگرال گرفت پس باید تجزیه کرد.

اندازه $dB\sin\theta=dB_z$ ، $dB_{xy}=dB\cos\theta$

اما می‌توان از طریق عبارات زیر حل کرد

$$dB_z=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\,d\varphi\cdot R}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\begin{cases}\vec{r}=z\hat{k}-R\hat{r} \\ \vec{r'}=R(\cos\varphi\,\hat{i}+\sin\varphi\,\hat{j})=R\hat{r} \\ \hat{\varphi}=-\sin\varphi\,\hat{i}+\cos\varphi\,\hat{j}\end{cases} \Rightarrow d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\,d\varphi(\hat{\varphi})\times\overbrace{[z\hat{k}-R\hat{r}]}^{\text{صفر}}}{r^3} \Rightarrow \vec{B}=\int d\vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2}{r^3}\left[\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi\,\overbrace{(\hat{\varphi}\times-\hat{r})}^{k}\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2(2\pi)}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

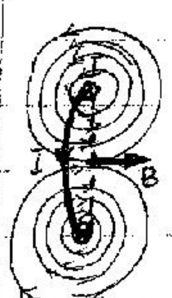
این روش بهتر و کلی تر است

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}\begin{cases}\rightarrow \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} \\ \rightarrow \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{M}}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\end{cases}}$$

زیرا $\vec{M}=I\vec{A}$ همین جهت $\vec{M}$ جهت $\vec{B}$ است :

حالت خاص : مرکز $B_0=\frac{\mu_0}{2}\frac{I}{R}$

اگر یک صفحه بر حلقه عمود کنیم، اگر شکل میدان مغناطیسی را بخواهیم رسم کنیم خواهد بود :

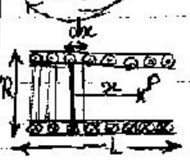


سولونوئید

اگر بجای این حلقه، چندین حلقه در کنار هم موجود باشد (سیملوله یا سولنوئید) میدان بصورت زیر حاصل می‌شود :

n: تعداد حلقه در واحد طول

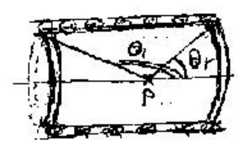
$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}(n\,dx)\,\hat{i}$$



$$\Rightarrow \vec{B}=\int d\vec{B}=\frac{\mu_0}{2}nIR^2\int\frac{dx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x=R\,\cot g\,\theta$$

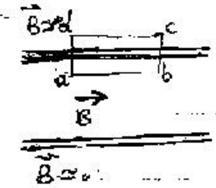
بعبارتی : $\boxed{B=\frac{\mu_0}{2}nI\,(\cos\theta_2-\cos\theta_1)}$



اگر $\frac{L}{R}\to\infty$ یعنی سیملوله بلند (ایده آل) باشد در نتیجه : $\boxed{B=\mu_0 nI}$

در این میدان یکنواخت است. اما از طریق قانون آمپر هم می‌توان این مقدار را بدست آورد.

$$\oint\vec{B}\cdot\vec{dl}=\mu_0(\Sigma I)$$

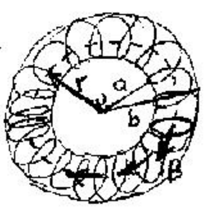


$$\Rightarrow \int_a^b\vec{B}\cdot\vec{dl}+\cancel{\int_b^c\vec{B}\cdot\vec{dl}}^{\,0}+\cancel{\int_c^d\vec{B}\cdot\vec{dl}}^{\,0}+\cancel{\int_d^a\vec{B}\cdot\vec{dl}}^{\,0}=\mu_0(\Sigma I)$$

$$Bl=\mu_0(nl)I \Rightarrow B=\mu_0 nI$$

تروئید (toroid)

اگر یک سیملوله را حلقه کنیم تروئید حاصل می‌شود



$b>r>a \qquad \oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0(\Sigma I)$

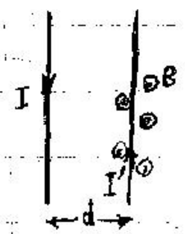
$\Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 N I \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{NI}{r}}$

N تعداد کل حلقه‌ها

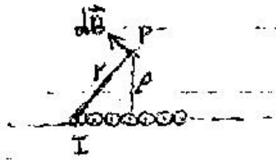
* راستای $\vec{B}$ ، $\hat{\varphi}$ است.

مثال: دو سیم طویل که در فاصله L از هم واقعند به هم چه نیرویی وارد می‌کنند. (نیرو را بر واحد طول آنها حساب کنید)

$\vec{B}$ را از طریق قانون آمپر بدست می‌آوریم



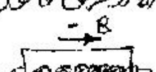
سؤال هالیدی: اگر بینهایت سیم کنار هم با جریان I در فاصله عمودی P از یک نقطه باشند، میدان را در آن نقطه محاسبه کنید.



طبق تقارن در بالای سیم فقط مؤلفه‌های راستای افقی باقی می‌ماند.

و سپس انتگرال می‌گیریم

یا از طریق قانون آمپر ساده‌تر است

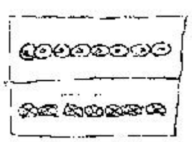


که از انتگرال‌ها دوتا صفر بوده تا جمع می‌شوند

$BL + BL = \mu_0 N I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 n I}{2}$

* در مثال بالا فرض کنید یک دسته سیم با جریان مخالف در فاصله 2R از آن دسته قرار دارد میدان را بین دو صفحه پیدا کنید

دیده خواهد شد که این جواب با مقدار سولونوئید برابر است



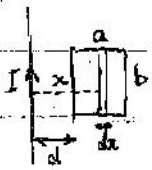
اگر هر دو مجموعه را با هم در یک مستطیل قرار دهیم چون $\Sigma I = 0$ پس خارج دو رشته سیم $B = 0$ است

اما در داخل با توجه بالا $\vec{B}$ را بدست می‌آوریم چون هم جهت هستند جمع می‌شوند.

$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} + \frac{\mu_0 n I}{2} = \mu_0 n I$ میدان داخل یک سیملوله

شار مغناطیسی: $\boxed{\varphi = \int \vec{B}\cdot\vec{da}}$

جریان $\vec{I}$ از سیم مستقیمی می‌گذرد، یک قاب به فاصله d و همسطح با آن در نظر بگیرید شار مغناطیسی را از آن حساب کنید



$B_{(x)} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x} \qquad da = b\,dx$

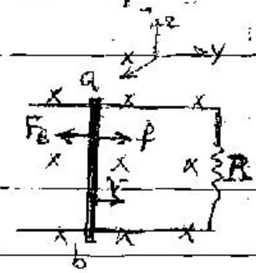
$\Rightarrow \varphi = \int_d^{d+b}$

قانون فارادی

اگر یک سیم رسانا را در میدان یکنواخت $\vec{B}$ حرکت دهیم به بارهای موجود در آن نیرو وارد می‌شود.

$\vec{F}_+ = +qVB(\vec{j}\times-\vec{i}) = qVB(\vec{k})$

$\vec{F}_- = -qVB(\vec{j}\times-\vec{i}) = qVB(-\vec{k})$



بنابراین بین دو سر سیم اختلاف پتانسیل بوجود می‌آید. اگر مداری ایجاد کنیم جریانی در آن برقرار می‌شود.

چون سیم حامل جریان در میدان یکنواخت واقع است به آن نیرو وارد می‌شود:

$\vec{F}_B = I\vec{l}\times\vec{B} = IlB(\vec{k}\times-\vec{i}) = IlB(-\vec{j})$

این نیرو مانع ادامه حرکت می‌شود و برای ادامه جریان باید نیرویی مساوی و مخالف به کار ببریم.

$\vec{f} = -\vec{F}_B$ ⟵ کار نیرو $dw = \vec{f}\cdot d\vec{x} = IlB\,dx$

نیروی محرکه $\mathcal{E} = \frac{W}{dq} = \frac{IlB\,dx}{I\,dt} = lVB$ ⟵ به صورت برداری $\boxed{\mathcal{E} = (\vec{B}\times\vec{l})\cdot\vec{v}}$

در حالت کلی: $d\mathcal{E} = (\vec{B}\times d\vec{l})\cdot\vec{v}$

چون سطح بسته‌ای در میدان قرار گرفته، شاری از آن عبور می‌کند که با تغییر dx مقدار شار تغییر می‌کند.

$d\varphi = \vec{B}\cdot d\vec{a}$ ⟵ $d\varphi = Bl\,dx$

$\mathcal{E} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{Bl\,dx}{dt} = BlV$

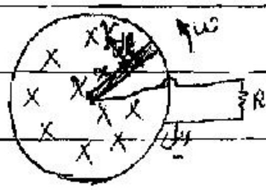
هرگاه به نحوی مقدار شار مغناطیسی مداری را تغییر دهیم فوراً نیروی محرکه‌ای حاصل می‌شود.

این نیروی محرکه برابر است با: $\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\varphi}{dt}}$ قانون فارادی

قانون لنز: جهت نیروی محرکه را مشخص می‌کند و طوری است که با عامل بوجود آورنده مخالفت می‌کند و منفی نیز به همین خاطر در فرمول آورده شده است.

مثال: نیروی محرکه حرکتی بود و جریان آن محدود است زیرا محدوده $\vec{B}$ کم است. اما مثلاً اگر یک میله گردان را در میدان حرکت دهیم جریان دائمی حاصل می‌شود.

اگر dl را از این میله انتخاب کنیم خواهیم داشت:



$d\mathcal{E} = v\,dx\,B = x\omega\,dx\,B$

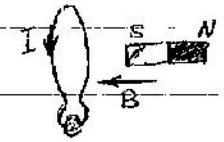
$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = B\omega\int_0^l x\,dx = \frac{1}{2}B\omega l^2$ دستگاه دینام فارادی

* اگر دایره کامل طی نشود می‌توان $\omega=\frac{d\theta}{dt}$ قرار داد و انتگرال گرفت، و روش دیگر:

$$\mathcal{E}=-\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\vec{B}\cdot d\vec{a}}{dt}=\frac{Bl\,d\theta\,dl}{dt}=Bl\omega\,dl \Rightarrow \mathcal{E}=\frac{1}{2}B\omega l^2$$

چون $\mathcal{E}=\frac{d}{dt}(\varphi)$ و $\varphi=|\vec{B}||\vec{A}|\cos\theta$ پس برای تغییر شار می‌تواند $\vec{B}$ یا $|\vec{A}|$ یا θ تغییر کند

* مثال تغییر $\vec{B}$:



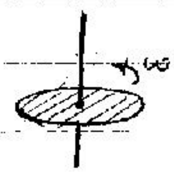
اگر آهنربا را به حلقه نزدیک کنیم $\vec{B}$ زیاد می‌شود:

جریان I در جهتی که $\vec{B}$ را تضعیف کند به وجود می‌آید.

$$\frac{d\varphi}{dt}=\mathcal{E}=-A\frac{dB}{dt}$$

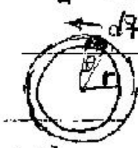
* نیرو محرکه بهترین حالت ایجاد $\mathcal{E}$ تغییر θ است.

مثال: قرص باردار عایقی را با چگالی بار سطحی ثابت σ حول محور قائمش با سرعت ω می‌چرخانیم. میدان مغناطیسی حاصل در مرکز قرص را حساب کنید. ممان دوقطبی مغناطیسی حاصل را حساب کنید.



ج) دلیل وارد شدن میدان این است که حرکت بارها مانند حلقه‌ای با جریان I است.

$\frac{dq}{dt}=I$ حلقه: $B_0=\frac{\mu_0}{2}\frac{I}{R}$

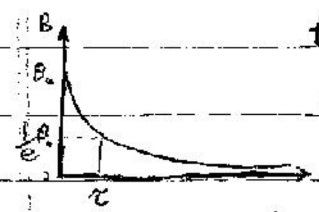


$\vec{\mu}=I\vec{A}$ $\vec{A}=\pi R^2\hat{r}$

$$d\vec{\mu}=I\,d\vec{A}=\frac{dq}{dt}\pi r^2\hat{k}=\frac{\sigma\,da}{dt}\pi r^2\hat{k}=\frac{\sigma r\,d\theta\,dr}{dt}\pi r^2=\sigma\pi\omega r^3dr \Rightarrow \vec{\mu}=\int d\vec{\mu}=\frac{\sigma\pi\omega R^4}{4}$$

نکته: برای کره می‌توانیم تعدادی از این قرص‌ها در نظر بگیریم و مسئله را حل کنیم.

حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع $r=20\,cm$ به دور قطر قائم خود با سرعت $\omega=1000\,\frac{rad}{s}$ می‌چرخد. در لحظه $t=0$ صفحه حلقه عمود بر میدان است که صفحه تصویر به راست و رو به داخل و به صورت $B=B_0e^{-t/\tau}$ است. اگر $B_0=0.1\,T$ و $\tau=...s$ باشد، مقاومت حلقه ρ



اولاً شار عبوری (φ) حلقه، ثانیاً نیروی محرکه $\mathcal{E}$ را به صورت تابعی از t، ثالثاً شدت جریان در $t=0$، رابعاً اولین لحظه‌ای که نیروی محرکه صفر یا max می‌شود کدام است.

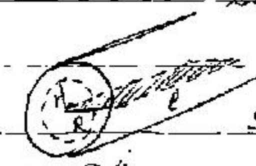
$$\varphi=\oint\vec{B}\cdot d\vec{a}=B_0e^{-t/\tau}\pi R^2\cos\omega t=\pi R^2B_0e^{-t/\tau}\cos\omega t$$

$$\mathcal{E}=-\frac{d\varphi}{dt}=\pi R^2B_0e^{-t/\tau}\left(\frac{1}{\tau}\cos\omega t+\omega\sin\omega t\right)$$

$\underset{\text{مقاومت}}{\mathcal{E}=I\rho} \Rightarrow I_{(t)}=\frac{\mathcal{E}}{\rho}\Rightarrow I_{(0)}=\frac{\pi R^2B_0}{\tau\rho}$

$$\begin{cases}\mathcal{E}=0 \Rightarrow t=\frac{\cot^{-1}(-\omega\tau)}{\omega}\\ \mathcal{E}=max \Rightarrow t=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tau\omega}+1\right)\end{cases}$$

استوانه‌ای طویل و حامل جریان به موازات محور آن و با چگالی $J = J_0\left(1+\frac{r}{2R}\right)$ $(r \le R)$ موجود است.
مطلوب است تعیین $\vec{B}(r)$ در یک نقطه داخل و خارج استوانه. ثانیاً شار مغناطیسی عبوری از صفحهٔ $R-l$
(که در شکل مشخص است). با استفاده از قانون آمپر: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int J\cdot da$

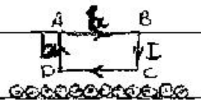


داخل $\Rightarrow$ $B\times 2\pi r = \mu_0\int_0^r J_0\left(1+\frac{r}{2R}\right)2\pi r\,dr \Rightarrow \vec{B}(r) = \mu_0 J_0\left(\frac{r}{2}+\frac{r^2}{6R}\right)\hat{\varphi}$

خارج $\Rightarrow$ $B\times 2\pi r = \mu_0\int_0^R \left(1+\frac{r}{2R}\right)2\pi r\,dr \Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{2}{6}\mu_0 J_0 R^2 \frac{1}{r}\hat{\varphi}$

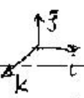
$\varphi = \int \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_0^R \mu_0 J_0\left(\frac{r}{2}+\frac{r^2}{6R}\right)\cdot l\,dr = \frac{11}{36}\mu_0 J_0 l R^2$

تعداد بی‌نهایت سیم حامل جریان کنار هم داریم. اگر قاب مستطیل شکلی با اضلاع a و b که از آن جریان به شدت I در جهت عقربه‌های ساعت می‌گذرد قرار دهیم، اندازه و جهت نیروی مغناطیسی مؤثر بر هر یک از اضلاع قاب، همچنین گشتاور وارد بر قاب.



$\vec{F}_{AB} = \vec{F}_{AC} = I(\vec{L}\times\vec{B}) = 0$

$\vec{F}_{BC} = I(\vec{BC}\times\vec{B}) = Ib\frac{\mu_0 n I_0}{2}(-\hat{j}\times -\hat{i}) = \frac{\mu_0 bnII_0}{2}(-\hat{k})$



$\vec{F}_{DA} = I(\vec{DA}\times\vec{B}) = I(-\vec{BC}\times\vec{B}) = \frac{\mu_0 bnII_0}{2}\hat{k}$

$\vec{\tau} = I\vec{A}\times\vec{B} = Iab\frac{\mu_0 n I_0}{2}(-\hat{k}\times\hat{i}) = \frac{ab\mu_0 nII_0}{2}(-\hat{j})$

محاسبهٔ میدان الکتریکی القایی در یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان

می‌دانیم در حالتی خاص که شار بر اثر تغییرات یکنواخت حاصل می‌شود، داریم:

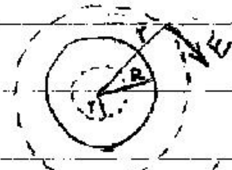
$\varepsilon = -\frac{dB}{dt}\cdot A = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

در این صورت در فضای میدان مغناطیسی میدان خارجی که میدان الکتریکی است به وجود می‌آید. اگر یک سیم را حلقوی داخل یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان قرار دهیم، جریان در سیم برقرار می‌شود، پس یک جور میدان الکتریکی داریم زیرا در سیم جریان داریم و حرکت بار برقرار است.

میدان الکتریکی القایی

نیروی محرکه $\varepsilon = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{dB}{dt}\cdot A$

انتگرال E نسبت به dl روی مسیر صفر است زیرا میدان الکتریکی کنسرواتیو است، اما در حالت بالا $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}$ صفر نیست چون $\vec{E}$ پایستار نیست.

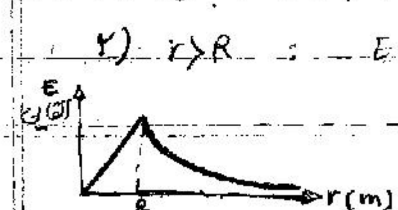


1) $r \le R$: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = E(2\pi r) = \frac{dB}{dt}(\pi r^2)$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{2}\frac{dB}{dt}r(\pm\hat{\varphi})}$

اگر $\vec{B}$ نسبت به t زیاد شود، چون سیم پیچ با افزایش شار مخالفت می‌کند، پس $\vec{E}$ در جهت φ است و بالعکس.

2) $r > R$: $E(2\pi r) = \frac{dB}{dt}(\pi R^2) \rightarrow E = \boxed{\frac{1}{2}\frac{dB}{dt}\frac{R^2}{r}(\pm\hat{\varphi})}$

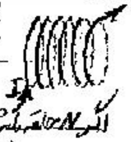


* به جای میدانهای القایی پتانسیل تعریف نمی‌شود ولی این میدانها پایستار نیستند و برای آنها لفظ نیروی محرکه بکار می‌رود.

خود القایی:

چون $\varepsilon = -\frac{d\varphi_B}{dt}$ اگر میدان مغناطیسی تغییر کند (مثلاً با جریان) یک نیروی محرکه در مدار بوجود می‌آید.

$\varphi \propto B \propto I$



ضریب خودالقایی

$$\Rightarrow N\varphi \propto I \Rightarrow N\varphi = LI \Rightarrow L = N\frac{\varphi}{I}$$

عامل تغییر شار خود سیم است که جریان آن تغییر می‌کند.

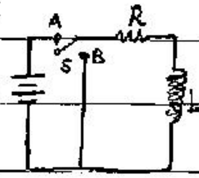
$$\varepsilon = -\frac{d(N\varphi)}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}}$$ نیروی محرکه خودالقایی

* مشابه این حالت خازن است که $C = \frac{q}{V}$ و در اینجا $L = \frac{\varepsilon}{\frac{dI}{dt}}$ (هانری، ولت، آمپر، s)

محاسبه L: $L = \frac{N\varphi}{I} = \frac{nl(A\mu_0 nI)}{I} = \mu_0 n^2 A l$ که در آن $n = \frac{N}{l}$ تعداد سیم در واحد طول

اگر B متغیر باشد باید انتگرال‌گیری کرد.

مدار R-L:



در حالتی که S به A وصل: $v_R = Ri$ ، $v_L = L\frac{di}{dt}$

$$\Rightarrow \varepsilon - RI - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{R} - I = \frac{L}{R}\frac{di}{dt} \Rightarrow \int \frac{di}{\frac{\varepsilon}{R} - i} = \frac{R}{L}dt$$

$t=0 \begin{cases} i = 0 \\ \frac{di}{dt} = max = \frac{\varepsilon}{L} \end{cases}$

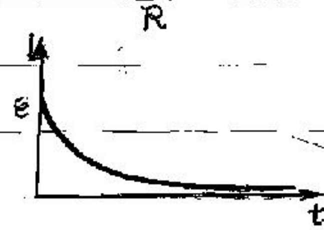
$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \quad ; \quad \tau = \frac{L}{R}$$

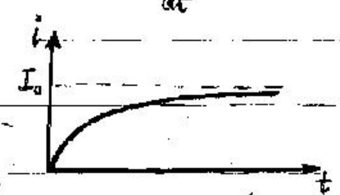
$t=\infty \begin{cases} i = max = \frac{\varepsilon}{R} \\ \frac{di}{dt} = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_L = L\frac{di}{dt} = \varepsilon e^{-t/\tau}}$$

$$V_L + V_R = \varepsilon$$





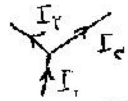
در حالتی که S به B وصل است نیز مراحل همین صورت قابل بررسی است.

درس

انرژی

اگر مقاومت موجود در سیم پیچ (L) را با R نشان دهیم خواهیم داشت:

* حال به بررسی یک خاصیت خازن‌ها می‌پردازیم.

می‌دانیم قانون کیرشهوف در مورد جریان‌های یک نقطه همواره صادق است:  $I_1+I_2+I_3=0$

اما در خازن‌ها انگار این قانون نقض می‌شود زیرا به یک طرف خازن بار اضافه می‌شود و جریان از آن طرف خارج می‌شود و به همین صورت برای سطح دیگر، بار خارج می‌شود ولی باری وارد آن نمی‌شود. برای رفع این نقیصه فرض می‌کنند جریان فرضی I_d (جریان جابجایی) از خود خازن می‌گذرد:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}=\frac{q}{A\varepsilon_0}\hat{n} \Rightarrow \frac{dE}{dt}=k=\frac{dq}{A\varepsilon_0\,dt}=\frac{I}{A\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi_E}{dt}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{dq}{dt}=\frac{i}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{i_d=\varepsilon_0\frac{d\varphi_E}{dt}}$$

* حال اگر میدان مغناطیسی و الکتریکی هر دو را داشته باشیم (مانند یک سولنوئید و یک خازن با صفحات دایره‌ای) آنگاه:

$$\oint \vec{B}\cdot dl=\mu_0\varepsilon_0\frac{d\varphi_E}{dt}$$

اگر در دایره‌ی شار الکتریکی دایره‌ای به شعاع r فرض کنیم به علت تقارن میدان B تولید شده در محیط آن یکسان است و مثل اینکه جریانی از مرکز این دایره می‌گذرد و E نیز ناشی از این جریان است.

پس اگر ما کاری کنیم که میدان داخل خازن تغییر کند، انگار سیمی بین صفحات آن وجود دارد و جریان $I_d=\frac{dq}{dt}$ از آن می‌گذرد. پس معادله‌ی ۴ ماکسول به صورت کلی زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot\vec{dl}=\mu_0(I_c+I_d)=\mu_0\left(I_c+\varepsilon_0\frac{d\varphi_E}{dt}\right)}$$

جریان‌های واقعی موجود در سطح فرضی

(جریان جابجایی) مانند خازن که شار الکتریکی آن تغییر کند.

مانند: 

* در خازن‌ها $I_c=I_d$ است یعنی به جای I_c در فرمول دیگر جریانی قرار نمی‌دهیم مگر آنکه غیر از خازن، در سطح فرضی ما سیم حامل جریان دیگری (به طور واقعی) وجود داشته باشد. در غیر این صورت I_c را نمی‌نویسیم و تنها $\varepsilon_0\frac{d\varphi_E}{dt}$ را می‌نویسیم.

محاسبه‌ی میدان مغناطیسی القایی $(\vec{B})$

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl}=\mu_0\varepsilon_0\frac{d\varphi_E}{dt} \Rightarrow B(2\pi r)=\mu_0\varepsilon_0 \overset{\pi r^2}{A}\frac{dE}{dt} \quad : r<R$$

مانند یک خازن با صفحات دایره‌ای

$$\Rightarrow r<R : \boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}\frac{dE}{dt}\,r\,\hat{\varphi}}$$

$$r>R : B(2\pi r)=\mu_0\varepsilon_0 R^2\frac{dE}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0\varepsilon_0 R^2}{2}\frac{dE}{dt}\cdot\frac{1}{r}\hat{\varphi}}$$

توجه: این میدان‌ها بسیار کوچک هستند.

مبحث امواج حذف است و تدریس نمی‌شود

پایان

$$du = du_R + du_B \Rightarrow \mathcal{E}\,dq = Ri\,dq + L\frac{di}{dt}dq$$

$$\Rightarrow u_B = \int du_B = L\int_0^I i\,di = \boxed{\frac{1}{2}LI^2}$$

این انرژی در میدان مغناطیسی ذخیره می‌شود و داخل سلونوئید قرار دارد.

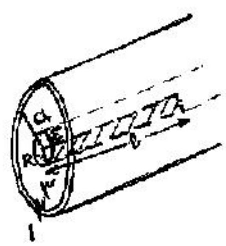
چگالی $u'_B = \frac{du}{dv}$ در یک سلونوئید طویل: $B=\mu_0 nI \Rightarrow u'_B = \frac{u}{v} = \frac{\frac{1}{2}LI^2}{AL}$

$$\Rightarrow = \frac{\mu_0 n^2 LAI^2}{2AL} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

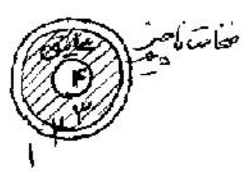
: انرژی واحد حجم مغناطیسی $= \frac{1}{2\mu_0}B^2$

" " " الکتریکی $= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$

ثابت می‌شود که نیازی نیست که سلونوئید ایده‌آل باشد و در هر محیط با $\vec{B}$ فرضی، انرژی واحد حجم مغناطیسی $\frac{1}{2\mu_0}B^2$ است.



مثال: سیم Co-Axial (هم محور): در یک سیم ~~Co-Axial~~، هادی داخلی به شعاع R حامل جریان I و هادی بیرونی به شعاع a حامل جریان I- است. ۱) اندکسیون مغناطیسی $\vec{B}(r)$ را در نقاط ۱ تا ٤ حساب کنید (از رابطه قانون آمپر) ۲) شار گذرنده از یک مستطیل به طول l و عرض R و انرژی ذخیره شده در دی‌الکتریک را محاسبه کنید.



$b<r<a$: $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow u=\int u'dv = \int \frac{B^2}{2\mu_0}dv = \cdots$

معادلات ماکسول

۱) $\epsilon_0\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = q$: قانون گوس برای الکتریسیته

۲) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$: " " " مغناطیس

۳) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\varphi_B}{dt}$: قانون فارادی (نکته: $\vec{E}$ در این فرمول القایی است و پتانسیل ندارد)

٤) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i$: قانون آمپر (نکته: i مجموع جبری جریان‌های عبوری از سطح)

حالت کلی قانون آمپر:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(\Sigma i)$$

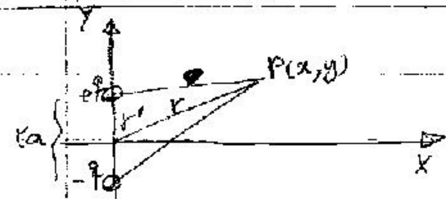
$\varphi_E = \vec{E}\cdot d\vec{A} \Rightarrow \frac{d\varphi_E}{dt} = \frac{d(\vec{E}\cdot\vec{A})}{dt}$ حالتی را در نظر می‌گیریم که $\vec{E}, A$ عمود بر … : $\boxed{\frac{d\varphi_E}{dt} = A\frac{dE}{dt}}$

این فرمول نشان می‌دهد که تغییر شار الکتریکی هم میدان مغناطیسی و هم الکتریکی تولید می‌کند.

در خازن‌ها: $\frac{dE}{dt} = k$

$\frac{1}{\text{ن}}$

تمرین سری ۲



* محاسبه میدان حاصل از یک دوقطبی در حالت کلی

$E_z = 0$

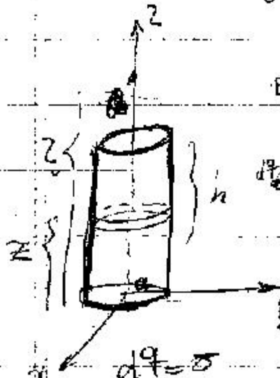
$\vec{E}_p = E_x \hat{i} + E_y \hat{j}$

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x\hat{i}+(y-a)\hat{j}}{[x^2+(y-a)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{x\hat{i}+(y+a)\hat{j}}{[x^2+(y-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}$

$\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}$

$r_1' = a\hat{j} \; , \; r_2' = -a\hat{j}$

$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} \quad E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Pxy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$, $x^2+y^2 \gg a^2$ در فواصل دور



* در استوانه توپر با چگالی حجمی ρ میدان در فاصله z_0 از مرکز در امتداد محور آن

برای حلقه: $dE_p = \frac{k\,dq}{r^2+z^2}\cos\theta \Rightarrow \boxed{E_p = \frac{kqz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}}$ برای حلقه E

برای دیسک: $dE_p = \frac{k\,dq\,z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow E = kz\int \frac{dq}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{dq}{dv} = \sigma \qquad dq = \sigma 2\pi r\,dr \Rightarrow E = kz\int_0^a \frac{\sigma 2\pi r\,dr}{r^2+z} = \frac{2kqz}{a^2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$

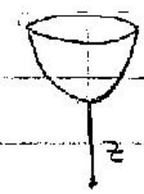
$\boxed{E = \frac{2kqz}{a^2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)}$ برای دیسک E

برای استوانه: $dE_p = \frac{2k\,dq\,(z_0-z)}{a^2}\left[\frac{1}{(z_0-z)} - \frac{1}{\sqrt{a^2+(z_0-z)^2}}\right]$

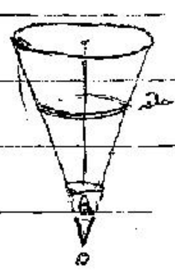
$dq = \rho\,dz\,\pi a^2 \quad \Rightarrow E_p = \int_0^h 2k\rho\pi\,dz - \int_0^h \frac{z_0-z}{\sqrt{a^2+(z_0-z)^2}}\,dz$

$\Rightarrow \boxed{E_p = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{h - [a^2+(z_0-h)^2]^{\frac{1}{2}} + (a^2+z_0^2)^{\frac{1}{2}}\right\}}$

* میدان در یک نیمکره توخالی در فاصله z از آن



$\vec{E} = E_z\hat{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(2^{\frac{1}{2}}-1) = 0.2071\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$



مخروط ناقص روبرو با توزیع سطحی σ موجود است میدان الکتریکی را در نقطه O حساب کنید

برای حلقه $E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow dE_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\,dq}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

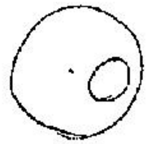
$r = z\,tg\,\theta_0$

$dq = 2\pi r\sigma_0\,dz$

$= 2\pi z\sigma_0\,tg\,\theta_0\,dz$

$$\Rightarrow E_0=\int_{h_1}^{h_2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z\,2\pi\sigma_0\,z\,tg\theta_0\,dz}{z^3\left[1+tg^2\theta_0\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\sin\theta_0\cos^2\theta_0\int_{h_1}^{h_2}\frac{dz}{z}$$

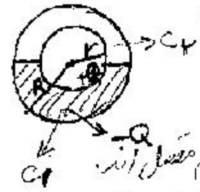
$$=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\sin\theta_0\cos^2\theta_0\,\ln\frac{h_2}{h_1}$$



* کره‌ای رسانا با چگالی بار ρ دارای حفره‌ای است (سؤال ۵ تایپی)

در جزوه حل شده

* خازن کروی مطابق شکل که قسمت پایین آن با دی‌الکتریک به ضریب k تا نصف پر شده است موجود است. بار روی سطح کره‌ی کوچک $+Q$ و کره‌ی بزرگ $-Q$ است.

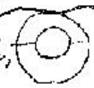


میدان باید داخل دی‌الکتریک و خلاء برابر باشد. از اعوجاج خطوط میدان الکتریکی در سطح کره‌ها صرف‌نظر کنید.

بلا دو خازن موازی می‌گیریم زیرا دو لبه‌ی دو خازن  و  به هم متصل اند.

$$\boxed{\text{ظرفیت خازن کروی}\ C=4\pi k\varepsilon_0\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}}$$

طرز بدست آوردن: $C=\frac{Q}{V}=\frac{Q}{-\int E\,dr}=\frac{Q}{-\int_b^a\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr}=4\pi k\varepsilon_0\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ (که k ضریب دی‌الکتریک)



خازن کروی

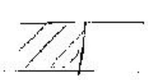
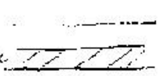
بقیه شکل‌ها طرف نیم‌کره خازن نیم‌کره که نصف خازن کروی است داریم:

ظرفیت خازن نیم‌کروی $C_1=2\pi k\varepsilon_0\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\Rightarrow C_2=2\pi\varepsilon_0\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

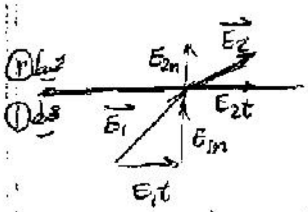
$$C_{\text{کل}}=C_1+C_2=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}(k+1)$$

* میدان در داخل و خارج دی‌الکتریک می‌دانیم که یکی است زیرا چون نیروی الکتریکی پایستار است اگر ما از کره اولیه (a) به کره دوم چه از خلاء و چه از دی‌الکتریک بیائیم $\Delta\varphi=V$ یکی خواهد بود

$$\Delta\varphi_1=\Delta\varphi_2\Rightarrow\int_a^b E_1\,dr=\int_a^b E_2\,dr\Rightarrow\int_a^b(E_1-E_2)\,dr=0\Rightarrow\vec{E_1}=\vec{E_2}$$

در خازن  هم میدان‌ها مساوی اند اما در  در دی‌الکتریک میدان تضعیف می‌شود.

نکات مهم

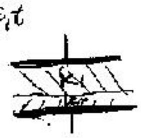


سطح با چگالی سطحی σ

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E_{1t}}=\vec{E_{2t}}\\ E_{2n}-E_{1n}=\sigma\end{array}\right\}\ \text{همیشه}$$

اگر هر دو محیط دی‌الکتریک باشند یعنی

$$D_{1n}=D_{2n}\Rightarrow k_1E_{1n}=k_2E_{2n}$$



عایق خازن

اگر E ها عمود باشد: $k_1E_1=k_2E_2$

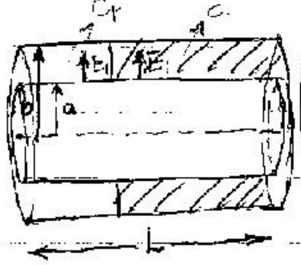
با توجه به اینکه روی نیمکره‌ها میدان ... فضای خالی و دی‌الکتریک ... [illegible]

$$\oint_{\text{کره}} \vec{D}\cdot\vec{da} = Q \Longrightarrow \int_{\text{نیمکره پایینی}} D_1\, da + \int_{\text{نیمکره بالایی}} D_2\, da = Q$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\underbrace{k\varepsilon_0 E}_{D_1} 2\pi r^2}_{Q_1} + \underbrace{\underbrace{\varepsilon_0 E}_{D_2}\, \underbrace{2\pi r^2}_{\int da}}_{Q_2} = Q \Longrightarrow E = \frac{Q}{(k+1)\varepsilon_0 2\pi r^2}$$

مثال: خازن استوانه‌ای در اختیار داریم به طول l و فاصله دو جوشن (b-a). دی‌الکتریک k به صورت زیر تا فاصله z درون آن قرار داده شده بود (شعاع داخلی a و شعاع خارجی b بود). بار Q روی سطوح قرار دارد.

۱) ظرفیت خازن ۲) اختلاف پتانسیل بین دو جوشن ۳) انرژی ذخیره شده در خازن را حساب کنید.



ظرفیت خازن استوانه‌ای $\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 k l}{\ln\frac{b}{a}}}$

روش اول: $C = \frac{Q}{\Delta\phi}$ $\quad \Delta\phi = \int E\, d\rho = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\rho h k\varepsilon_0} d\rho =$

$$= \frac{Q}{2\pi k\varepsilon_0 h} \ln\frac{b}{a} \Longrightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0 k h}{\ln\frac{b}{a}}$$

$$\Longrightarrow C_T = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 k z}{\ln\frac{b}{a}} + \frac{2\pi\varepsilon_0 (l-z)}{\ln\frac{b}{a}}$$

روش دوم: E ... [illegible] ... $\vec{E_1} = \vec{E_2} = \vec{E}$

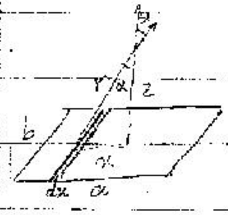
$$\Longrightarrow \oint D\cdot da = Q \Longrightarrow \underbrace{D_1 \int da}_{Q_1} + \underbrace{D_2 \int da}_{Q_2} = Q \Longrightarrow k\varepsilon_0 E(2\pi\rho z) + \varepsilon_0 E(2\pi\rho)(l-z) = Q$$

$$\Longrightarrow E = \dots$$

$$\Longrightarrow \Delta\phi = -\int_a^b E_{(\rho)}\, d\rho = \dots \qquad \text{روش دوم} : \Delta\phi = \frac{Q}{C}$$

انرژی ذخیره شده در خازن: $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

صفحه‌ای به طول a و عرض b وجود دارد. میدان را در فاصله z از مرکز ثقل آن بیابید.



$$dE(z) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 z}\; \frac{\hat{k}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \cos\alpha$$

$$dq = \sigma\, ds = \sigma b\, dx$$

$$\text{روش دوم}: \Phi(z) = k\int \frac{dq}{r} = k\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \frac{\sigma\, dx\, dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \dots$$

$$E(z) = \frac{d\Phi(z)}{dz} = \dots$$

* سیستمی با انرژی داخلی U را در نظر می‌گیریم. اگر از خارج انرژی ΔE_{ext} به سیستم تزریق کنیم، بنا به اصل بقای انرژی داریم: $\Delta U = \Delta E_{ext}$ (تغییر انرژی داخلی سیستم = انرژی تزریق شده از خارج)

در مبحث الکتروستاتیک ΔE_{ext} می‌تواند ناشی از دو عامل باشد، یکی کار نیروی مکانیکی $\Delta W_{ext.m}$ و دیگری انرژی تأمین شده توسط منبع خارجی مثل باتری ΔE_b. در این صورت رابطهٔ بالا به صورت زیر خواهد آمد:

$$\Delta U = \Delta W_{ext.m} + \Delta W_b$$

اگر $F_{ext.m}$ را نیرویی تعریف کنیم که در جابجایی $\vec{\Delta r}$ کار $\Delta W_{ext.m}$ را انجام دهد، داریم:

$$\Delta W_{ext.m} = \vec{F}_{ext.m} \cdot \vec{\Delta r}$$

اگر نیروی $F_{ext.m}$ به گونه‌ای باشد که همواره با نیروی الکتریکی داخل سیستم در حال تعادل باشد یعنی $F_{ext.m}$ درست برابر نیروی الکتریکی $\vec{F}_{el}$ ولی در خلاف جهت آن باشد، در این صورت رابطه به صورت زیر در می‌آید:

$$\Delta U = -F_{el} \cdot \Delta r + \Delta W_b$$

در ادامه هدف، یافتن $\vec{F}_{el}$ می‌باشد، با توجه به مسائل مطرح در این درس دو حالت زیر را برای این هدف، در اینجا در نظر می‌گیریم

۱) سیستم منزوی است: منزوی بودن به معنی آن است که سیستم انرژی را از خارج دریافت نمی‌کند.

$$\Rightarrow \Delta U = -F_{el} \cdot \Delta r$$

در مبحث آنالیز برداری می‌توان نشان داد که اگر $\vec{\Delta r} \Rightarrow$ در این صورت:

$$\Rightarrow \vec{F}_{el} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

مثلاً یک مثال ساده

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}x \rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}$$

۲) سیستم منزوی نیست: در این حالت مسائلی که حل می‌کنیم، نقش انرژی منبع خارجی، فقط ثابت نگه‌داشتن پتانسیل تک تک عناصر سیستم است. و در این حالت فقط بار روی عناصر تغییر می‌کند.

تعداد عناصر سیستم

$$\Delta W_b = \sum_{m=1}^{N} \phi_m \Delta Q_m$$

قبلاً اثبات کردیم که انرژی پتانسیل الکتریکی سیستمی که دارای بار عنصر Q_m و پتانسیل عنصر ϕ_m است از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

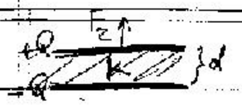
$$U = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} \phi_m Q_m \underset{\phi_m = cte}{\Longrightarrow} \Delta U = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} \phi_m \Delta Q_m$$

و چون که سیستم منزوی در کار نیست.

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} \phi_m \Delta Q_m = \vec{F}_{el} \cdot \vec{\Delta r}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{el} = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

۵/۱۵



مثال: در خازن روبه‌رو جهت حرکت چه نیرویی بر آن وارد می‌شود؟

۱) اگر سیستم منزوی باشد

$U=W(z) \qquad U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2 z}{k\varepsilon_0 A} \Rightarrow F_z=-\frac{dU}{dz}=-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{k\varepsilon_0 A}$

۲) ... ... باشد

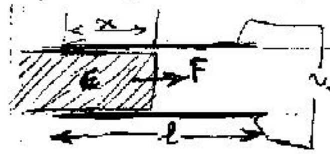
$U=\frac{1}{2}CV_0^2=\frac{1}{2}\frac{k\varepsilon_0 A}{z}V_0^2 \Rightarrow F_z=+\frac{dU}{dz}=-\frac{1}{2}\frac{k\varepsilon_0 A}{z^2}V_0^2$

$\Rightarrow F_z=-\frac{1}{2}k\varepsilon_0 A\frac{Q^2}{C^2}=-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{k\varepsilon_0 A}$

(لحظه‌ای که در یک ... [illegible])

لذا در حالت بالا بدست می‌آید ... [illegible]

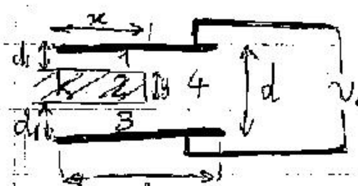
مثال: خازنی با صفحات موازی موجود است. فاصله میان آنها برابر d و دی‌الکتریکی مطابق شکل میان آن وارد شده. نیروی وارد بر دی‌الکتریک چقدر است؟ ابعاد هر صفحه خازن طول l و عرض w و صفحات به اختلاف پتانسیل ثابتی متصل هستند.



$$C=\frac{\varepsilon x w}{d}+\frac{\varepsilon_0(l-x)w}{d}=\frac{xw}{d}(\varepsilon-\varepsilon_0)+\frac{lw\varepsilon_0}{d}$$

$$\Rightarrow U_{sys}=\frac{1}{2}CV_0^2 \Rightarrow \qquad F=\frac{dU}{dx}=\frac{w}{2d}(\varepsilon-\varepsilon_0)V_0^2$$

* خازنی با ظرفیت C که به ولتاژ ثابت V_0 وصل شده مفروض است. طول آن l و عرض w و فاصله دو صفحه‌اش d فرض شود. اگر دی‌الکتریک k مطابق شکل درون آن قرار گیرد الف) تغییر نسبی بار خازن ب) جهت و مقدار نیروی وارد بر دی‌الکتریک ج) در موارد ۱، ۲، ۳ و ۴ بردارهای $\vec{d}$، $\vec{P}$ و $\vec{E}$ را بدست آورید.



$$\frac{\Delta Q}{Q_1}=\frac{Q_2-Q_1}{Q_1}=\frac{C_2-C_1}{C_1}$$

$$C_1=\varepsilon_0\frac{lw}{d}, \quad C_2=\frac{\varepsilon_0(l-x)w}{d}+\left(\frac{d_1}{\varepsilon_0 xw}+\frac{y}{k\varepsilon_0 xw}+\frac{d_2}{\varepsilon_0 xw}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow C_2-C_1=\frac{k\varepsilon_0 xw}{kd_1+kd_2+y}-\frac{\varepsilon_0 w}{d}$$

قسمت اول حل شد

$$W=\frac{1}{2}C_2V_0^2=\frac{1}{2}\left[\frac{k\varepsilon_0 xw}{k(d-y)+y}+\frac{\varepsilon_0(l-x)w}{d}\right]V_0^2$$

چون دی‌الکتریک می‌تواند به سمت بالا و پایین و به سمت جلو یا عقب حرکت کند

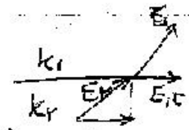
نیروی عمودی رو به بالا $=\frac{\partial W}{\partial d_1}=0$

〃 〃 پایین $=\frac{\partial W}{\partial d_2}=0$

نیروی افقی $=\frac{1}{2}\left[\frac{k\varepsilon_0 w}{\sim}-\frac{\varepsilon_0 w}{d}\right]V_0^2$

ج) برای یافتن $\vec{D}$ و $\vec{P}$ از $\vec{E}$ استفاده می‌کنیم

ن
به علت پیوستگی مؤلفه مماسی میدان ؛ ... یعنی:



$$\overrightarrow{E_{1t}} = \overrightarrow{E_{2t}}$$

در حالت هم از قسمت ۲ که انتقال ۲ و ۳ را می‌رویم تا E_{2t} چون $\vec{E}$ دقیقاً مماس بر این سطح است پس:

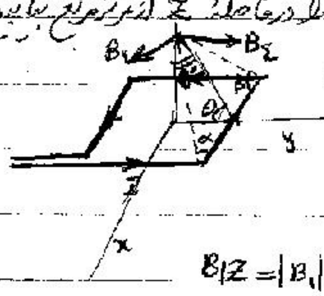
* پتانسیل الکتریکی را در نقطه P بدست آورید.

برای یک حلقه ϕ را حساب می‌کنیم

$$d\phi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

و سپس سطح را تقسیم به این حلقه‌ها و انتگرال‌گیری حل می‌کنیم

قاب مربع شکلی به ضلع a دارای جریان I می‌باشد میدان مغناطیسی ناشی از جریان را در فاصله z از مرکز مربع بیابید.



می‌دانیم $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}(\cos\alpha + \cos\beta)$, $R = \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}$

$$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{a}{2\sqrt{R^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a}{2\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}}$$

مؤلفه‌های افقی همدیگر را خنثی می‌کنند.

$$B_{1z} = |B_1|\cos\theta = |B_1|\sin\theta' = |B_1|\frac{a}{2\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}}$$

$$|B_1| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}}\left(\frac{a}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}}\right) = \ldots$$

$$B_{1z} = B_{4z} = B_{3z} = B_{2z} \Rightarrow B_t = 4B_{1z} = \ldots$$

۷/۵

کلاس حل تمرین فیزیک II — یکشنبه — روز شنبه آینده ۳ تا ۵

* در فضا باری با چگالی $\rho=(\frac{8}{r^2})e^{-4r}\sin\theta\cos^2\varphi$ وجود دارد مقدار بار را حساب کنید

$$Q=\int\rho\,dv=\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{8}{\cancel{r^2}}\right)e^{-4r}\sin\theta\cos^2\varphi\cdot\cancel{r^2}\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=\dots$$

* باری داخل کره‌ای به شعاع a با چگالی $\rho=\rho_0\frac{r^2}{a^2}$ $(r\leq a)$ وجود دارد میدان داخل و خارج کره چقدر است؟

گوس $\Phi=\int E_1\cdot ds=\frac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_1\cdot 4\pi r^2=\rho_0\frac{r^5}{5a^2}(4\pi)\times\frac{1}{\varepsilon_0}$

$$Q=\int_0^r\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\rho_0\frac{r^2}{a^2}\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=\rho_0\frac{r^5}{5a^2}(4\pi)$$

$$\Rightarrow E_1=\frac{\rho_0 r^3}{5a^2\varepsilon_0}\hat{a}_r$$

خارج: $E_2\cdot 4\pi r^2=\rho_0\frac{a^3}{5\varepsilon_0}(4\pi)\Rightarrow E_2=\rho_0\frac{a}{5\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r$

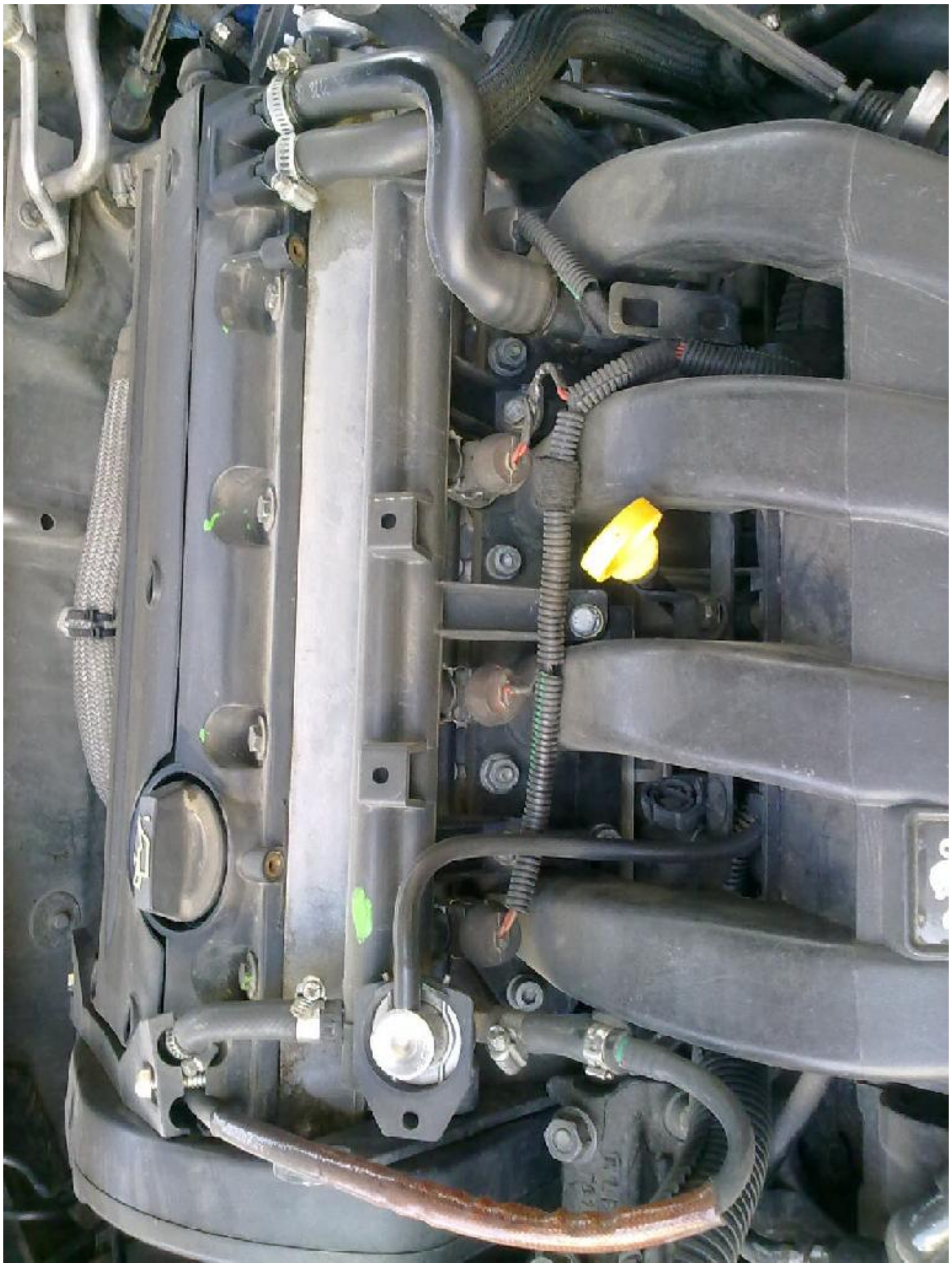
* در فضا بار الکتریکی در کره‌ای به شعاع a با چگالی $\rho=\rho_0(\frac{r}{a})$ که $(r\leq a)$ است قرار دارد. پتانسیل را در مبدأ حساب کنید.

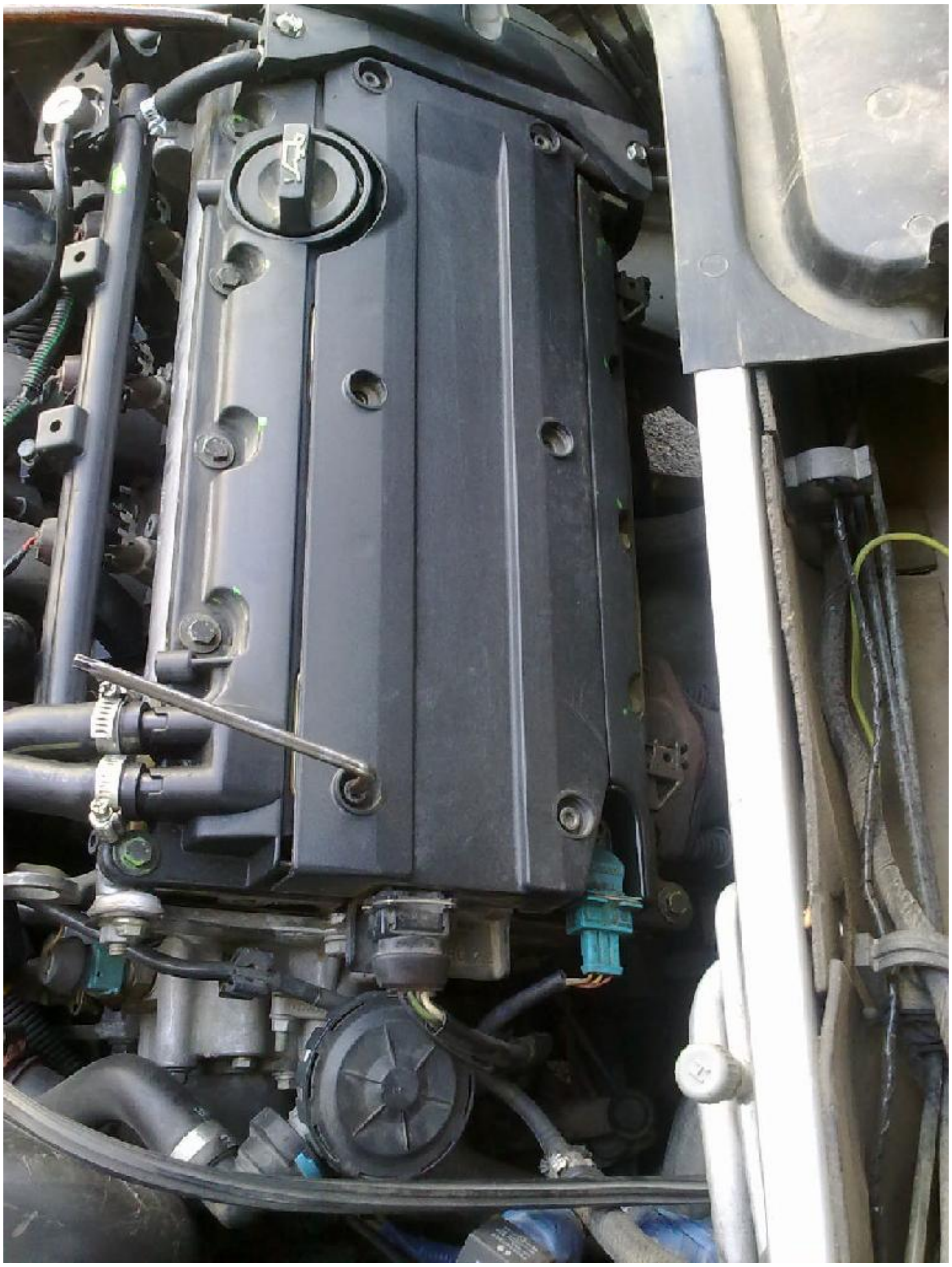
$$V=\int\frac{\rho\,dv'}{4\pi|R-R'|}\qquad R=0\ ,\ R'=r'\hat{a}_r$$

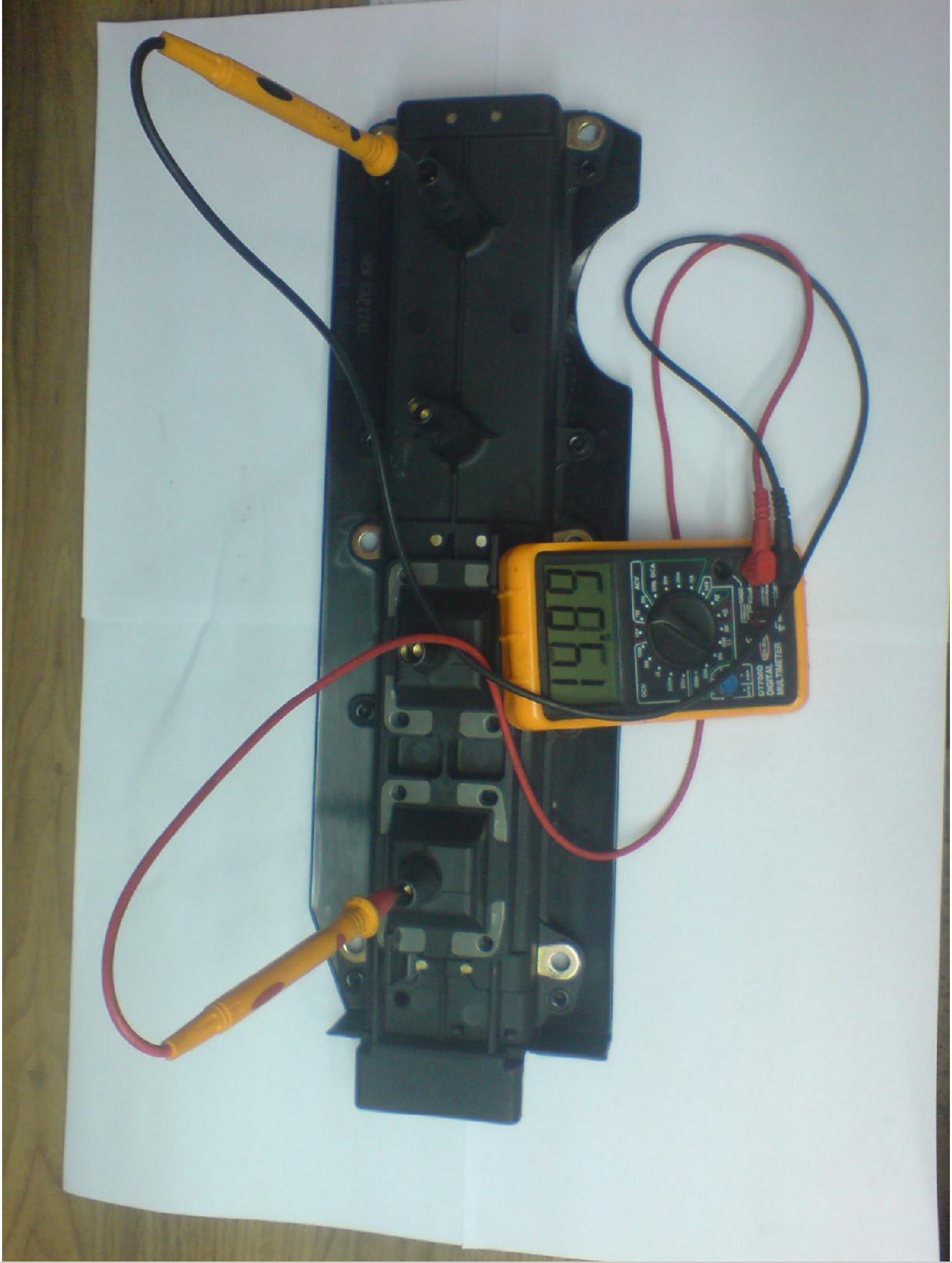
$$dv'=r'^2\sin\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\varphi'\qquad\Rightarrow\frac{\rho_0a^2}{3\varepsilon_0}=V$$

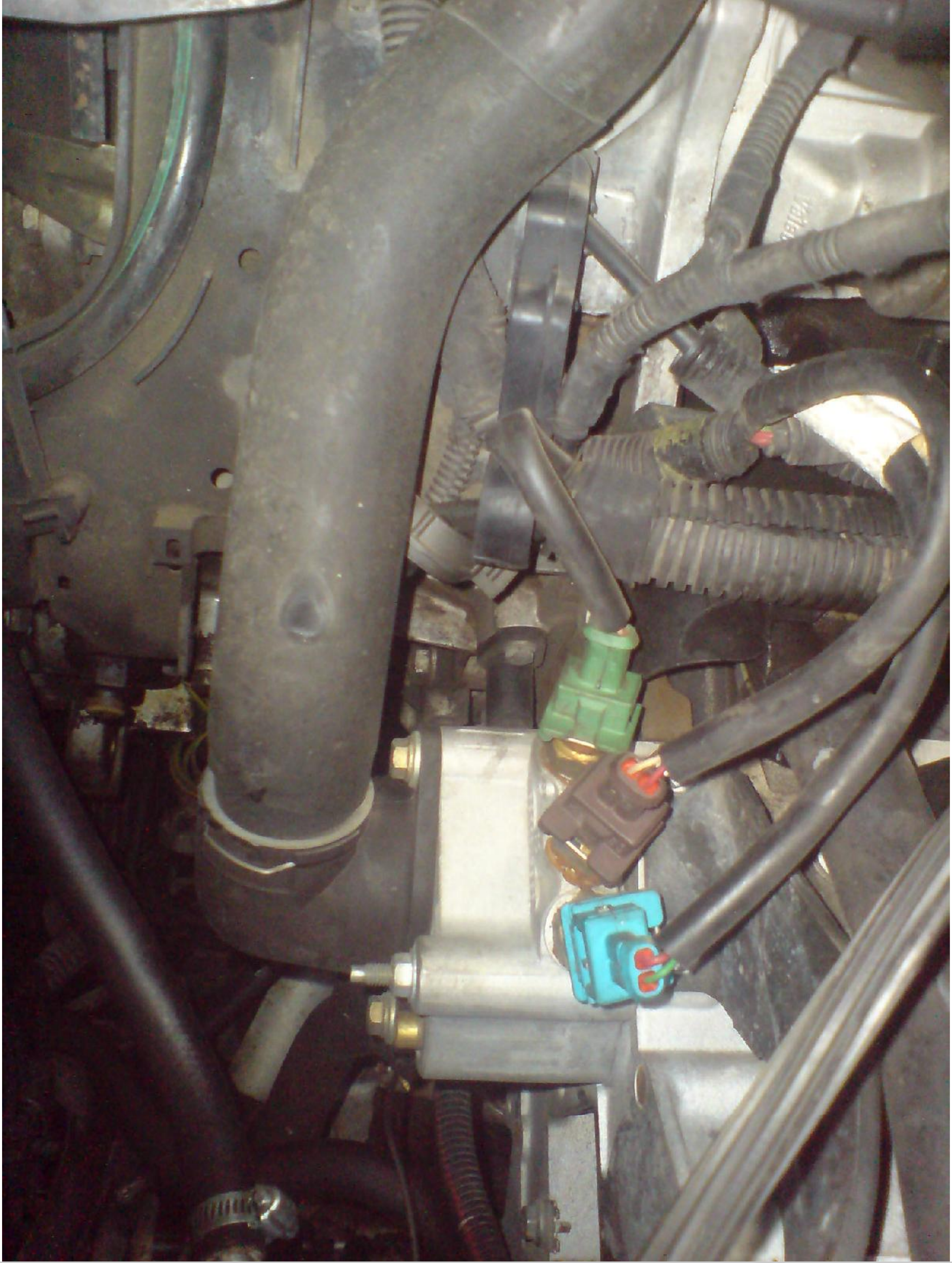
*

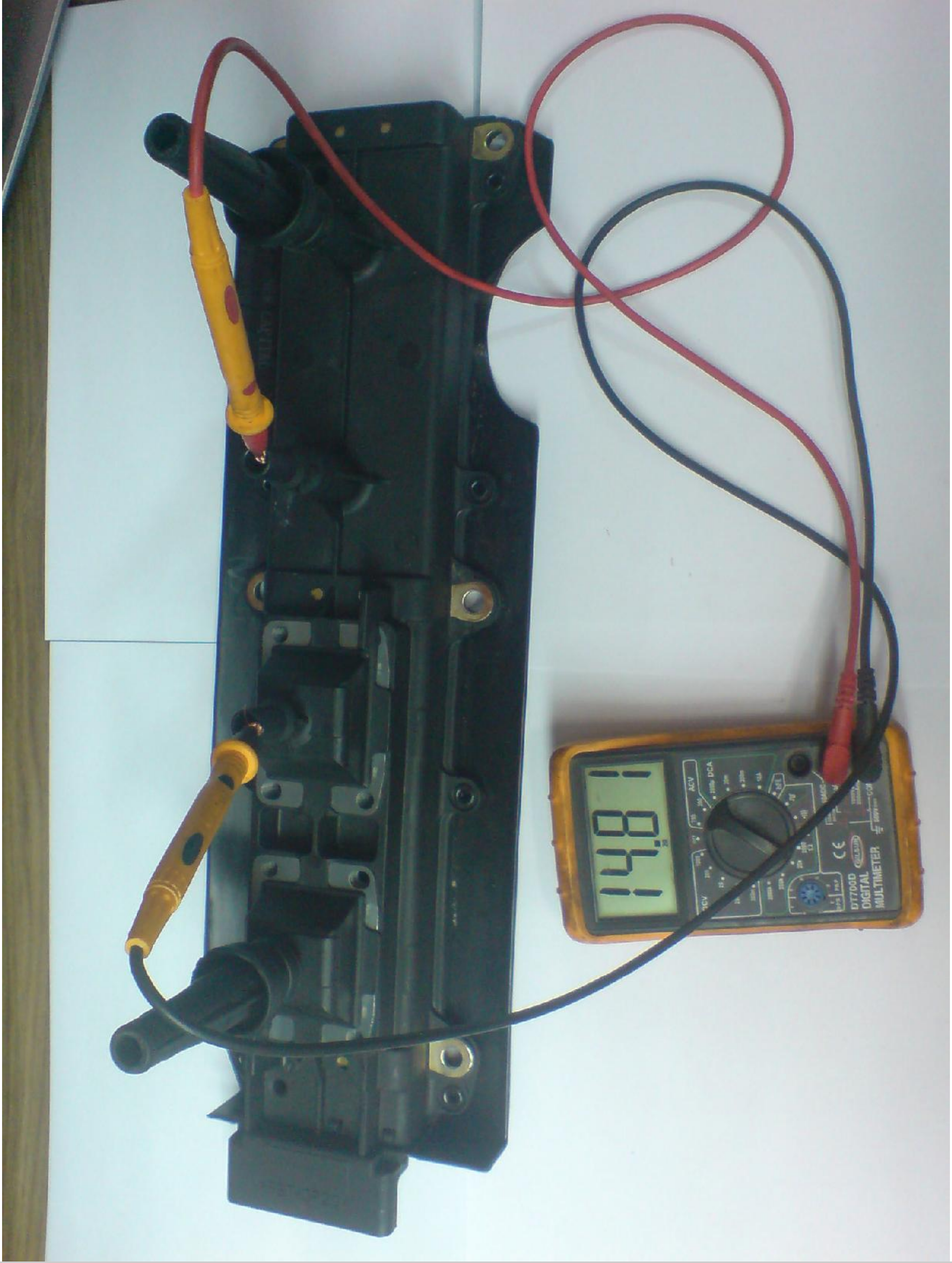
[illegible]










DT700D
DIGITAL
MULTIMETER


DT700D
DIGITAL
MULTIMETER


DT700D
DIGITAL
MULTIMETER
GILSUN
DCV
ACV
DCA
OFF
hFE
10ADC
VΩmA
COM
1000VDC
200mAmax
500Vmax
10Amax
unfused
NPN
PNP