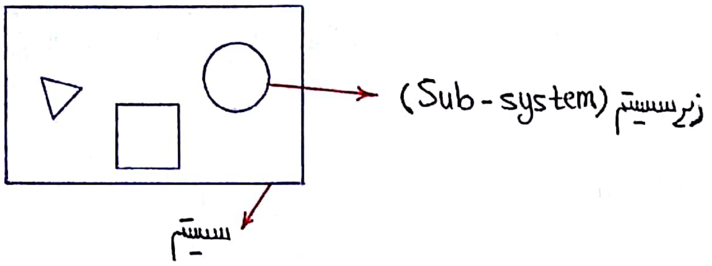
Automatic Control of Linear Systems

سیستم (System): مجموعه ای از اجزاء و المان های مرتبط به هم است که حرکت و وظایف تعریف شده ای دارند و هدف مشخصی را دنبال می کنند.



سیگنال (Signal): جریانی از داده که به هر طریقی (مکانیکی، الکتریکی و...) از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر منتقل شود را سیگنال می نامیم.

مشخصه های یک سیستم:

1. ورودی

$$\text{input} \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow \text{output}$$

2. خروجی

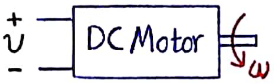
3. مدل سیستم: عبارت است از یک رابطه‌ی ریاضی یا منطقی بین ورودی و خروجی یک سیستم که رفتار آن سیستم را توصیف می کند.

مثال: فنر خطی.

$$x = \frac{F}{k}$$

$$F \longrightarrow \boxed{1/k} \longrightarrow x$$

مثال: موتور DC.



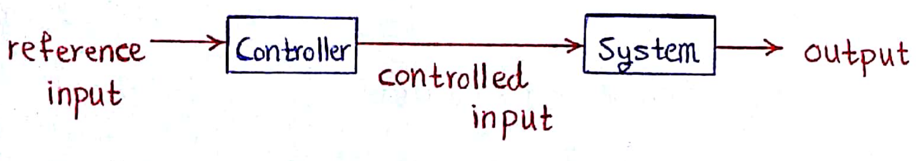
$$\omega = f(v)$$

$$v \longrightarrow \boxed{f(v)} \longrightarrow \omega$$

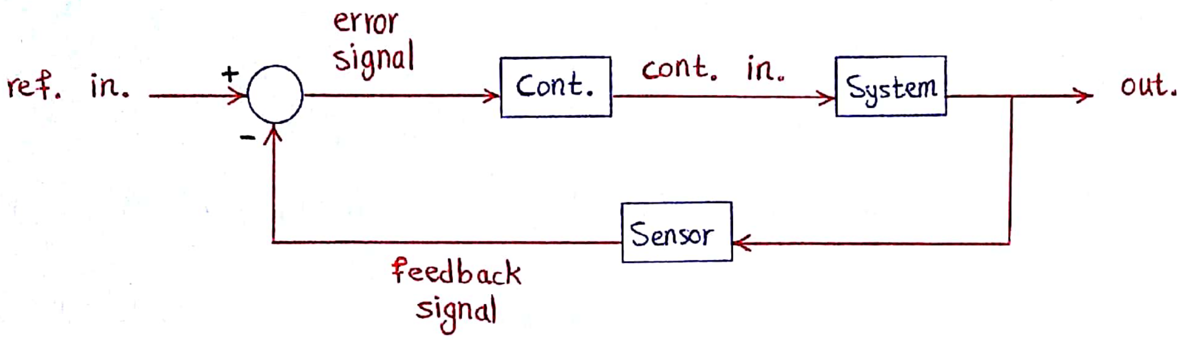
سیستم های کنترل (Control Systems): سیستم هایی هستند که با به فرمان گرفتن سیستم اصلی و هدایت آن، خروجی سیستم را به مقدار مطلوب می رسانند و یا به مقدار مطلوب نزدیک می کنند. اگر در یک سیستم کنترل، نقش کنترل کننده را سیستمی غیر از انسان ایفا کند، عملیات کنترل را به اصطلاح کنترل اتوماتیک (Automatic Control) می نامند.

انواع روش های کنترل سیستم ها:

1. کنترل حلقه باز (Open-Loop): در این روش کنترل کننده هیچ درکی از خروجی سیستم ندارد و نمی داند که خروجی سیستم واقعاً به خروجی مطلوب (ورودی مرجع) نزدیک شده یا خیر.



2. کنترل حلقه بسته (Closed - Loop) : در این روش کنترل کننده همواره سیستم اصلی را زیر نظر دارد و خروجی آن را رصد می‌کند. اگر به هر دلیلی خروجی و ورودی مرجع متفاوت از یکدیگر باشند، کنترل کننده توسط حسگر متوجه این خطا شده و با ایجاد تغییراتی در مقدار ورودی کنترل شده، خطای موجود را اصلاح می‌کند. سیگنال خروجی از حسگر را سیگنال بازخورد (Feedback) می‌نامیم.



دسته‌بندی سیستم های کنترل براساس نوع ورودی مرجع :

- تنظیم کننده ها (Regulators) : در این نوع سیستم های کنترل، ورودی مرجع مقداری ثابت است و خروجی سیستم اصلی بایستی در این مقدار ثابت قرار گیرد.

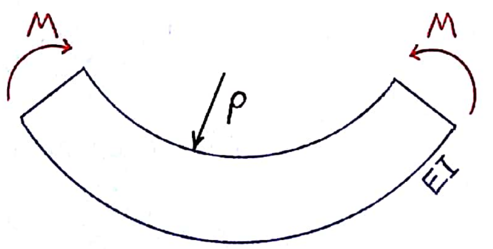
مثال: سیستم‌های کنترل دمای محیط.

- سیستم های کنترل پیرو (Tracking Control Systems) : در این نوع سیستم های کنترل، ورودی مرجع در هر لحظه با زمان تغییر می‌کند و خروجی سیستم بایستی در هر لحظه ورودی مرجع را تعقیب کرده و با آن برابر شود. مثال: سیستم های کنترل ماشین های CNC.

دسته‌بندی سیستم ها :

1. سیستم‌های بی حافظه (استاتیکی) (Memoryless) : در این سیستم ها خروجی در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه وابسته است و ورودی های قبلی هیچ تاثیری روی پاسخ سیستم در هر لحظه ندارد. روابط ریاضی توصیف کننده‌ی رفتار چنین سیستم هایی به صورت معادلات جبری می‌باشد.

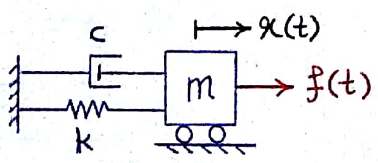
مثال: تیر تحت خمش در محدوده‌ی الاستیک:



شعاع انحنای تیر: $$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI} \Rightarrow \rho(M)=\frac{EI}{M}$$

2. سیستم‌های حافظه دار (دینامیکی) : در این سیستم ها خروجی سیستم در هر لحظه علاوه بر ورودی در همان لحظه به تمامی ورودی های قبلی نیز وابسته است. روابط ریاضی توصیف کننده‌ی رفتار چنین سیستم هایی به صورت معادلات دیفرانسیل می‌باشد.

مثال: سیستم جرم - فنر - دمپر:



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t)$$

نکته: به طورکلی دو روش برای تحریک یک سیستم دینامیکی می‌توان درنظر گرفت: شرط اولیه و ورودی. زمانی که شرط اولیه داشته باشیم، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر رفتار سیستم برخلاف حالتی که ورودی داریم، همگن است.

$$f(t)=0 \Rightarrow m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

---

۱. سیستم های علّی (Causal): در این سیستم ها خروجی در لحظه‌ی t_0 تنها به مقادیر ورودی در لحظه های $t \leqslant t_0$ وابسته است.

2. سیستم های غیرعلّی (Non-causal): این سیستم ها قانون علت و معلول را نقض می‌کنند و اصطلاحاً سیستم های پیشگو نامیده می‌شوند. چنین سیستم هایی به لحاظ فیزیکی در طبیعت وجود ندارند.

---

۱. سیستم‌های متغیر با زمان (Time-variant): در این سیستم ها پارامترها و خصوصیات سیستم تابع زمان بوده و با گذشت زمان تغییر می‌کنند. در این سیستم ها علاوه بر مقدار ورودی، زمان اعمال ورودی نیز در شکل پاسخ سیستم موثر است. معادلات حاکم بر این سیستم ها از نوع معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر می‌باشند. برای مثال:

$$m(t)\ddot{x}+c(t)\dot{x}+k(t)x=f(t)$$

2. سیستم‌های تغییرناپذیر با زمان (Time-invariant): در سیستم ها پارامترها و خصوصیات سیستم مستقل از زمان می‌باشد و پاسخ سیستم فقط به شرط اولیه و مقدار ورودی وابسته است و به زمان اعمال ورودی وابسته نیست. معادلات حاکم بر این سیستم ها از نوع معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت می‌باشند.

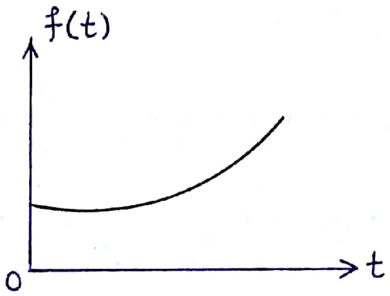
---

۱. سیستم ها با پارامترهای فشرده (متمرکز) (Discrete): در این سیستم ها هر المان از سیستم را می‌توان به صورت یک نقطه با ابعاد ناچیز درنظر گرفت و از اثر ابعاد آن بر روی رفتار سیستم صرف نظر کرد. رفتار این سیستم‌ها فقط تابعی از متغیر مستقل زمان می‌باشد و توسط معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) توصیف می‌شود. برای مثال سیستم جرم - فنر - دمپر.

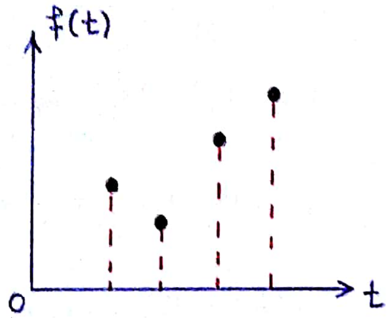
2. سیستم ها با پارامترهای غیرفشرده (پیوسته) (Continuous): در این سیستم ها علاوه بر زمان مختصه های مکانی نیز به عنوان متغیرهای مستقل بر روی رفتار سیستم تاثیر می‌گذارند. رفتار این سیستم ها توسط معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) توصیف می‌شود. برای مثال سیستم تار مرتعش.

---

۱. سیستم های پیوسته زمان: در این سیستم ها سیگنال های ورودی و خروجی پیوسته زمان می‌باشند. سیگنال پیوسته زمان سیگنالی است که بر روی مقادیر پیوسته‌ی زمان تعریف شده باشد. برای مثال:



2. سیستم های گسسته زمان: در این سیستم ها سیگنال های ورودی و خروجی گسسته زمان می‌باشند. سیگنال گسسته زمان سیگنالی است که بر روی مقادیر گسسته‌ی زمان تعریف شده باشد. برای مثال:



---

۱. سیستم های آنالوگ (Analog): دراین سیستم ها سیگنال های ورودی وخروجی آنالوگ می باشند. سیگنال آنالوگ سیگنالی است که دامنه ی آن می‌تواند هر مقداری از یک محدوده ی پیوسته را اختیار کند.

2. سیستم های دیجیتال (Digital): دراین سیستم ها سیگنال های ورودی وخروجی دیجیتال می باشند. سیگنال دیجیتال سیگنالی است که دامنه ی آن فقط مقادیر گسسته ومحدودی را اختیار کند.

---

۱. سیستم های خطی (Linear): دراین سیستم ها اصل همگنی واصل جمع آثار (Superposition) برقرار است.

$$u \to \boxed{f(u)} \to y \quad \Rightarrow \quad ku \to \boxed{f(u)} \to ky$$ اصل همگنی

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \to \boxed{f(u)} \to y_1 \\ u_2 \to \boxed{f(u)} \to y_2 \end{array}\right| \Rightarrow \quad u_1+u_2 \to \boxed{f(u)} \to y_1+y_2$$ اصل جمع آثار

2. سیستم های غیرخطی (Nonlinear): دراین سیستم ها اصل همگنی واصل جمع آثار برقرار نیست.

سیستم های خطی تغییر ناپذیر با زمان (LTI):

موضوع اصلی درس کنترل اتوماتیک بررسی وکنترل سیستم های LTI است. این سیستم ها توسط معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت توصیف می‌شوند.

مثال: سیستمی با معادله ی دیفرانسیل زیر را درنظر بگیرید. ثابت کنید این سیستم یک سیستم LTI است.

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t)$$

$$\alpha(m\ddot{x}+c\dot{x}+kx)=\alpha f(t) \Rightarrow m\left(\alpha\frac{d^2x}{dt^2}\right)+c\left(\alpha\frac{dx}{dt}\right)+k(\alpha x)=\alpha f(t) \Rightarrow$$

$$m\left[\frac{d^2}{dt^2}(\alpha x)\right]+c\left[\frac{d}{dt}(\alpha x)\right]+k(\alpha x)=\alpha f(t)$$ اصل همگنی برقرار است.

$$\left.\begin{array}{l} m\ddot{x}_1+c\dot{x}_1+kx_1=f_1(t) \\ m\ddot{x}_2+c\dot{x}_2+kx_2=f_2(t) \end{array}\right| \Rightarrow m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)+c(\dot{x}_1+\dot{x}_2)+k(x_1+x_2)=f_1(t)+f_2(t) \Rightarrow$$

اصل جمع آثار برقرار است.

$$m\left[\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2)\right]+c\left[\frac{d}{dt}(x_1+x_2)\right]+k(x_1+x_2)=f_1(t)+f_2(t)$$

مطالعه‌ی سیستم ها:

۱. مدلسازی: یافتن یک رابطه‌ی ریاضی یا منطقی برای توصیف رفتار سیستم.

2. تحلیل: محاسبه‌ی پاسخ و ارزیابی رفتار سیستم به ازای ورودی های مختلف.

معیارهای تحلیل سیستم ها:

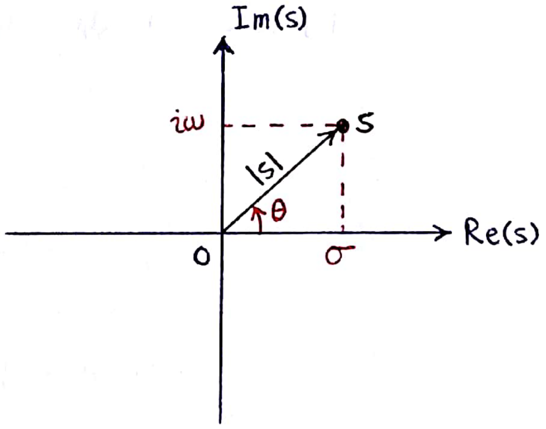
- حوزه‌ی زمان: حداکثر فراجهش، زمان خیز، زمان نشست، خطای حالت ماندگار، پایداری و ...

- حوزه‌ی فرکانس: دامنه‌ی تشدید، فرکانس تشدید، پهنای باند، پایداری و ...

3. طراحی: تعیین دینامیک سیستم و فیزیک آن به منظور دستیابی به مدل ریاضی موردنظر.

مروری بر آنالیز مختلط و تبدیل لاپلاس:

صفحه‌ی مختلط (s):



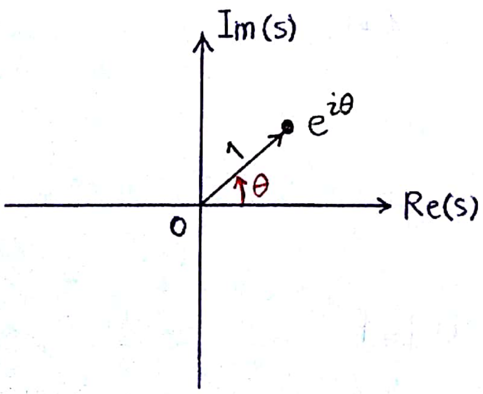
فرم دکارتی عدد مختلط s: $\ast\ s=\sigma+i\omega$

اندازه‌ی عدد مختلط s: $\ast\ |s|=\sqrt{\sigma^2+\omega^2}$

مزدوج عدد مختلط s: $\ast\ \bar{s}=\sigma-i\omega$

طبق قضیه‌ی اویلر، تابع نمایی مختلط $e^{i\theta}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\ast\ e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$



$e^{i\theta}$ برداری ای است که مقطع جهت را نشان می‌دهد و اندازه‌اش برابر واحد می‌باشد:

$$|e^{i\theta}|=1$$

براین اساس عدد مختلط s را می‌توان به فرم قطبی نیز نمایش داد:

فرم فازوری عدد مختلط s: * $s=|s|\angle\theta$ $\Longrightarrow$ فرم قطبی عدد مختلط s: * $s=|s|e^{i\theta}$

* $\sigma=|s|\cos\theta$, $\omega=|s|\sin\theta$ زاویه‌ی فاز عدد مختلط s: * $\theta=\tan^{-1}\dfrac{\omega}{\sigma}$

مزدوج عدد مختلط s: * $\bar{s}=|s|e^{-i\theta}=|s|\angle-\theta$

تبدیل لاپلاس: یک تبدیل انتگرالی است که تابع $f(t)$ را از حوزه‌ی زمان (t) به حوزه‌ی مختلط لاپلاس (s) نگاشت می‌کند:

$$* \; F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt \quad ; \quad s=\sigma+i\omega$$

تبدیل لاپلاس فقط برای توابعی قابل تعریف است (به بیان دیگر همگرا است) که در شرط زیر صدق کنند:

$$|f(t)|<Me^{at}$$

یعنی رشد تابع $f(t)$ نباید سریع‌تر از رشد تابع نمایی Me^{at} باشد. برای مثال تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=e^{t^2}$ موجود نیست (واگرا است).

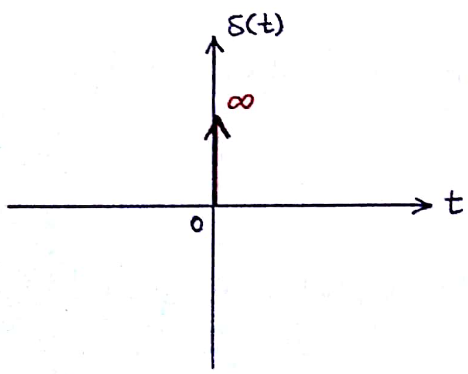
تبدیل لاپلاس دارای خاصیت خطی بودن است:

$$* \; \mathcal{L}\left[cf(t)\right]=c\,\mathcal{L}\left[f(t)\right] \quad ; \quad c=const.$$

$$* \; \mathcal{L}\left[f(t)+g(t)\right]=\mathcal{L}\left[f(t)\right]+\mathcal{L}\left[g(t)\right]$$

تبدیل لاپلاس توابع معروف:

- تابع ضربه‌ی واحد (تابع دلتای دیراک):

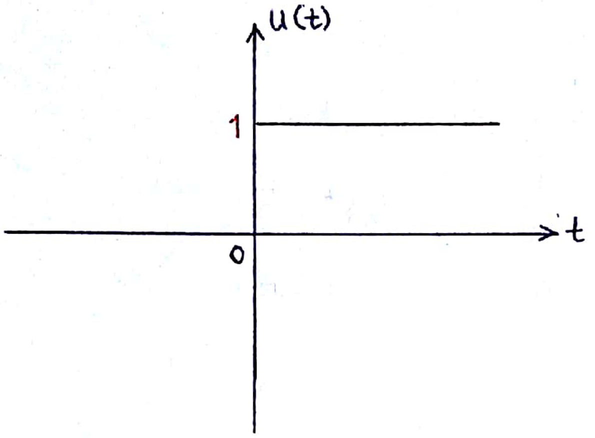


$$* \; \delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

$$* \; \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1$$

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,e^{-st}\,dt=e^{0}=1 \quad \Longrightarrow \quad * \; \mathcal{L}\left[\delta(t)\right]=1$$

– تابع پله‌ی واحد:



$$* \; u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

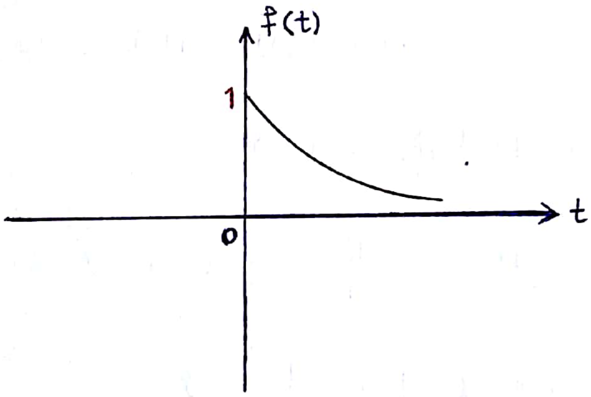
$$* \; \frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{-1}{s} e^{-\sigma t} \underbrace{e^{-j\omega t}}_{1} \Big|_0^{\infty} = \frac{-1}{s}(0-1) = \frac{1}{s} \; ; \sigma > 0$$

$$\Rightarrow \quad * \; \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \; ; \quad \sigma > 0$$

شرط وجود (همگرایی) تبدیل لاپلاس برای تابع پله‌ی واحد $\sigma > 0$ است.

– تابع نمایی:



$$* \; f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad ; \; a > 0$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a} \; ; \; \sigma > -a$$

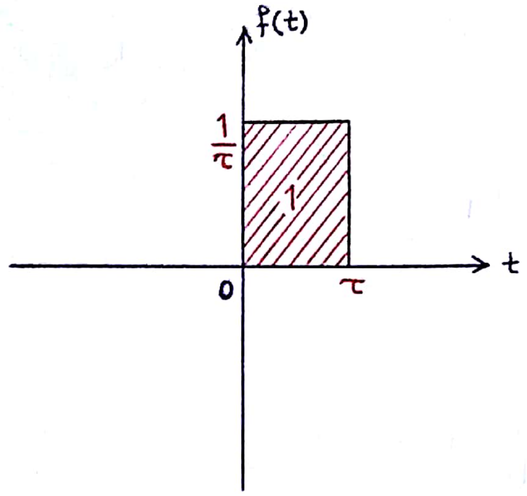
$$\Rightarrow \quad * \; \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+a} \; ; \quad \sigma > -a$$

– توابع مثلثاتی:

$$* \; f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad\qquad * \; f(t) = \begin{cases} \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; * \; \mathcal{L}[f(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \; ; \; \sigma > 0 \qquad\qquad \Rightarrow \; * \; \mathcal{L}[f(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \; ; \; \sigma > 0$$

ـ تابع پالس مستطیلی واحد:



$$* \; f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \dfrac{1}{\tau} & 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ 0 & t>\tau \end{cases}$$

تابع پالس مستطیلی واحد را می‌توان برحسب تابع پله‌ی واحد به صورت زیر نمایش داد:

$$f(t) = \frac{1}{\tau} u(t) - \frac{1}{\tau} u(t-\tau)$$

با توجه به خاصیت خطی بودن تبدیل لاپلاس، خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{\tau} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s} \Longrightarrow * \; \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1-e^{-\tau s}}{s}$$

ویژگی های مهم تبدیل لاپلاس به ازای $t \geq 0$:

1. $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s} F(s)$

2. $\mathcal{L}[f(\frac{t}{a})] = a F(as)$

3. $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$

4. $\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$; $\sigma > 0$, $n > 0$

5. $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s)$

6. $\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau) d\tau] = \dfrac{1}{s} F(s)$

7. $\mathcal{L}[\dfrac{d^n}{dt^n} f(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

8. $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) G(s)$; انتگرال کانولوشن: $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) f(t-\tau) d\tau$

معکوس تبدیل لاپلاس:

$$* \; f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \; ; \; s = \sigma + i\omega$$

مثال: معکوس تبدیل لاپلاس را برای هر یک از توابع زیر بدست آورید.

1. $F(s) = \dfrac{3}{s^2+3s+2} \Longrightarrow F(s) = \dfrac{3}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{a}{s+1} + \dfrac{b}{s+2}$

$$a = \lim_{s\to -1} (s+1)F(s) = \lim_{s\to -1} \frac{3}{s+2} = 3 \qquad b = \lim_{s\to -2} (s+2)F(s) = \lim_{s\to -2} \frac{3}{s+1} = -3$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s+2} \Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \begin{cases} 3(e^{-t} - e^{-2t}) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(t) = 3(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

2. $$F(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s+i)(s-i)} = \frac{a}{s+i} + \frac{b}{s-i}$$

$$a = (s+i)F(s)\Big|_{s=-i} = \frac{-1}{2i} \qquad b = (s-i)F(s)\Big|_{s=i} = \frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (ae^{-it} + be^{it})u(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}u(t) = \sin t\, u(t)$$

3. $$F(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2} \Rightarrow F(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+1} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} \Rightarrow$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t)u(t)$$

4. $$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s^2+4s+5)} \Rightarrow F(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+2} + \frac{cs+d}{s^2+4s+5}$$

$$a = sF(s)\Big|_{s=0} = 0.1 \qquad b = (s+2)F(s)\Big|_{s=-2} = 0.25$$

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = 0 \Rightarrow a+b+c = 0 \Rightarrow c = -(a+b) = -0.35$$

$$F(s)\Big|_{s=-1} = -a + b + \frac{-c+d}{6} = 0 \Rightarrow d = -1.25$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = [a + be^{-2t} + ce^{-2t}\cos t + (d-2c)e^{-2t}\cos t]u(t)$$

$$= (0.1 + 0.25e^{-2t} - 0.35e^{-2t}\cos t - 0.55e^{-2t}\sin t)u(t)$$

مدل‌سازی ریاضی سیستم‌ها:

یک سیستم LTI مرتبه‌ی n ام با معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی n ام توصیف می‌شود. اگر $u(t)$ ورودی سیستم و $y(t)$ خروجی سیستم باشد، داریم:

$$* \; a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y(t) = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u(t) \quad ; \quad n \geq m$$

اصل علیت در مورد یک سیستم دینامیکی واقعی (علّی) ایجاب می‌کند که $n \geq m$ باشد؛ زیرا در غیر این صورت یافتن خروجی (پاسخ) سیستم مستلزم داشتن اطلاعاتی از آینده‌ی سیستم خواهد بود که اصل علیت را نقض می‌کند. $(n-m)$ را مرتبه‌ی نسبی سیستم می‌نامیم.

اگر از طرفین معادله‌ی دیفرانسیل با شرایط اولیه‌ی صفر تبدیل لاپلاس بگیریم، خواهیم داشت:

$$y^{(n-1)}(0) = y^{(n-2)}(0) = \dots = \dot{y}(0) = y(0) \;,\; u^{(m-1)}(0) = u^{(m-2)}(0) = \dots = \dot{u}(0) = u(0) \implies$$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)\, Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)\, U(s) \implies$$

$$* \; G(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad ; \quad n \geq m$$

$G(s)$ را تابع تبدیل (Transfer Function) سیستم می‌نامیم. تابع تبدیل نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به تبدیل لاپلاس ورودی در غیاب شرایط اولیه در سیستم بوده و توصیفی ریاضی از فرآیندی است که توسط سیستم روی ورودی انجام می‌شود تا خروجی حاصل شود.

تابع تبدیل از خصوصیات ذاتی سیستم بوده و مستقل از اندازه و ماهیت ورودی است.

تابع تبدیل دارای بعد (دیمانسیون) است.

صفر (Zero) تابع تبدیل: مقادیری از s که به ازای آن تابع تبدیل برابر صفر شود، صفر تابع تبدیل نامیده می‌شود.

صفرهای تابع تبدیل دو نوع می‌باشند:

- صفرهای محدود: صفرهای محدود تابع تبدیل از حل معادله‌ی $Y(s)=0$ بدست می‌آیند. تابع تبدیل $G(s)$ دارای m صفر محدود است.
- صفرهای نامحدود: اگر $m<n$ باشد، $s \to \infty$ نیز صفر تابع تبدیل خواهد بود. $s \to \infty$ را صفر نامحدود تابع تبدیل می‌نامیم. تابع تبدیل $G(s)$ دارای $(n-m)$ صفر نامحدود است.

قطب (Pole) تابع تبدیل: مقادیری از s که به ازای آن تابع تبدیل به بی‌نهایت میل کند، قطب تابع تبدیل نامیده می‌شود. قطب‌های تابع تبدیل از حل معادله‌ی $U(s)=0$

بدست می‌آید، تابع تبدیل $G(s)$ دارای n قطب است.

مثال: صفرها و قطب های تابع تبدیل زیر را تعیین کنید.

$$G(s)=\frac{K(s+2)(s+10)}{s(s+1)(s+5)(s+15)^2} \Longrightarrow m=2\,,\ n=5$$

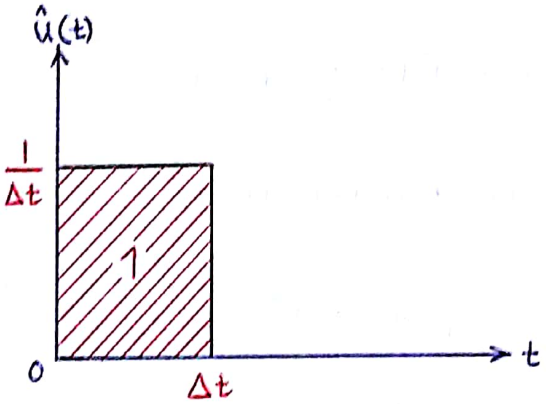
قطب ها: $U(s)=0 \Longrightarrow s(s+1)(s+5)(s+15)^2=0 \Longrightarrow s_1=0, s_2=-1, s_3=-5, s_4=-15, s_5=-15$

صفرهای محدود: $Y(s)=0 \Longrightarrow K(s+2)(s+10)=0 \Longrightarrow s_1=-2, s_2=-10$

صفرهای نامحدود: $\lim\limits_{s\to\infty} G(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\frac{Ks^2}{s^5}=\lim\limits_{s\to\infty}\frac{K}{s^3}=0 \Longrightarrow s_3\to\infty\,,\ s_4\to\infty\,,\ s_5\to\infty$

تعیین پاسخ سیستم به ورودی دلخواه با شرایط اولیه ی صفر و انتگرال کانولوشن (Convolution):

فرض کنید پاسخ سیستم به ورودی پالس مستطیلی واحد $\hat{u}(t)$ به صورت $\hat{g}(t)$ باشد:



$$* \quad \hat{u}(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{\Delta t} & 0\leqslant t\leqslant \Delta t \\ 0 & t>0 \end{cases}$$

$$\hat{u}(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow \hat{g}(t)$$

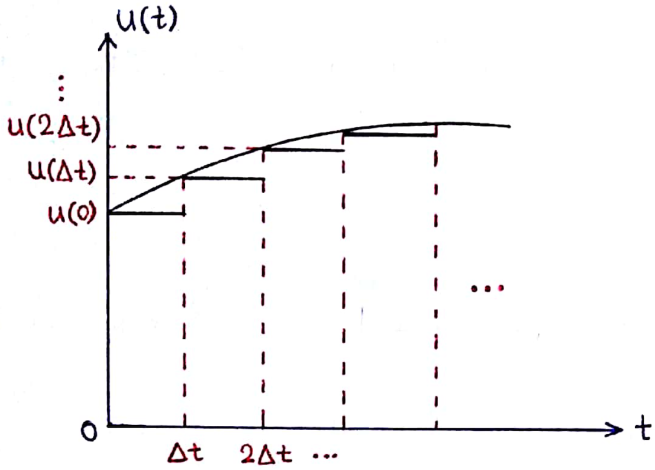
اگر Δt به اندازه‌ی کافی کوتاه باشد، پاسخ سیستم مستقل از شکل ورودی بوده و فقط به مساحت زیر آن بستگی خواهد داشت. اگر Δt به سمت صفر میل کند، ورودی پالس مستطیلی واحد به ورودی ضربه‌ی واحد و پاسخ سیستم به ورودی پالس مستطیلی واحد به پاسخ سیستم به ورودی ضربه‌ی واحد تبدیل خواهد شد:

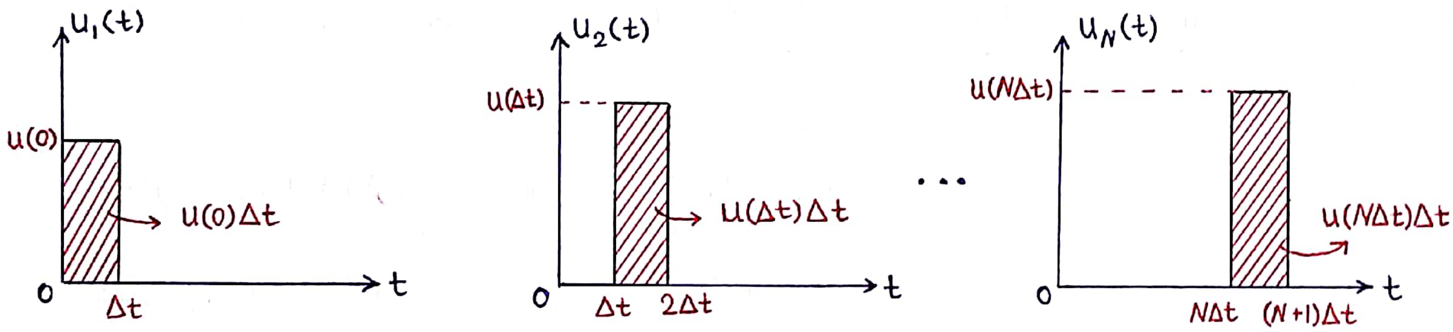
$$\delta(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\hat{u}(t)\ ; \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1$$

$$g(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\hat{g}(t)$$

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow g(t)$$

هر ورودی دلخواه $u(t)$ را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از ورودی های پالس مستطیلی واحد تقریب زد:





$$u(t) \simeq u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_N(t) = u(0)\Delta t \cdot \hat{u}(t) + u(\Delta t)\Delta t \cdot \hat{u}(t-\Delta t) + \dots +$$

$$u(N\Delta t)\Delta t \cdot \hat{u}(t-N\Delta t) \implies u(t) \simeq \sum_{n=0}^{N} u(n\Delta t)\, \Delta t \cdot \hat{u}(t-n\Delta t)$$

با توجه به خواص سیستم های LTI ، پاسخ سیستم به ورودی دلخواه $u(t)$ را به صورت زیر می توان تقریب زد:

$$y(t) \simeq u(0)\Delta t \cdot \hat{g}(t) + u(\Delta t)\Delta t \cdot \hat{g}(t-\Delta t) + \dots + u(N\Delta t)\Delta t \cdot \hat{g}(t-N\Delta t) \implies$$

$$y(t) \simeq \sum_{n=0}^{N} u(n\Delta t)\Delta t \cdot \hat{g}(t-n\Delta t)$$

اگر Δt به سمت صفر میل کند، خواهیم داشت:

$$y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=0}^{N} u(n\Delta t)\Delta t \cdot \hat{g}(t-n\Delta t) \xrightarrow{n\Delta t = \tau}$$

انتگرال کانولوشن:

$$* \; y(t) = \int_0^{\infty} u(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

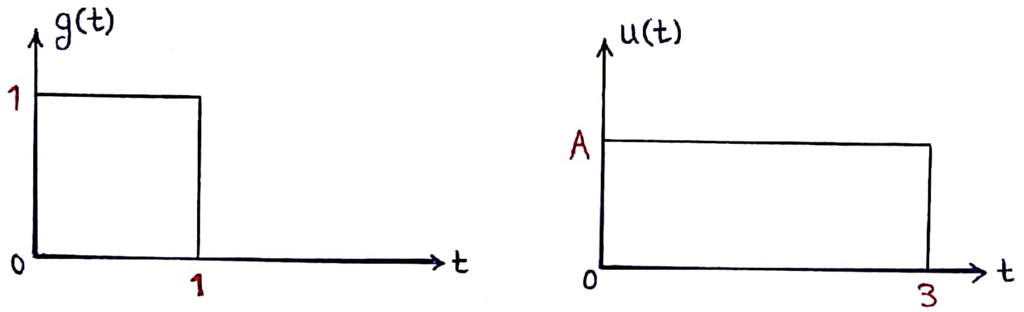
طبق خواص تبدیل لاپلاس، کانولوشن بین توابع $u(t)$ و $g(t)$ در حوزه‌ی زمان به حاصلضرب آن ها در حوزه‌ی لاپلاس تبدیل می شود:

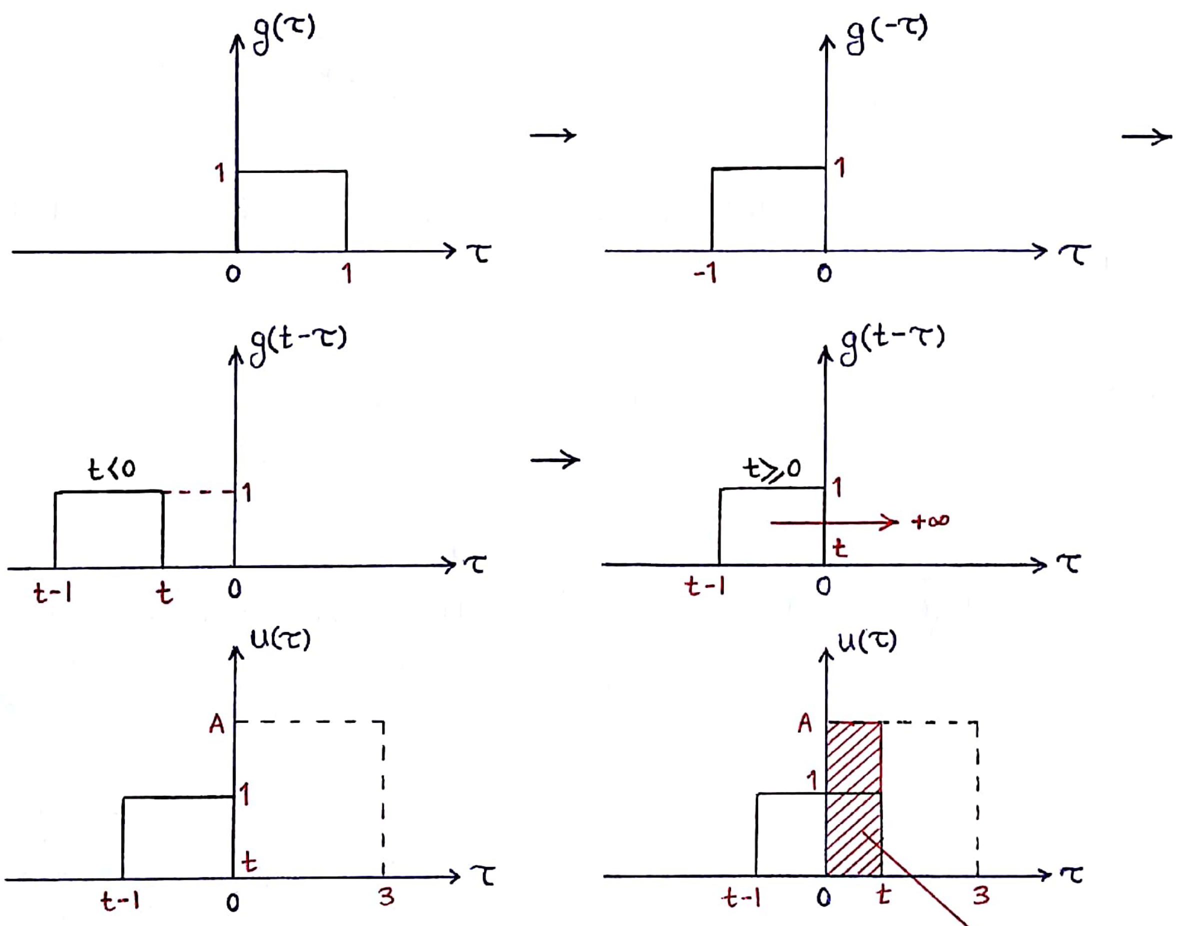
$$Y(s) = U(s)\, G(s) \implies \quad * \; G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \; ; \quad G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$$

بنابراین تابع تبدیل یک سیستم LTI، تبدیل لاپلاس پاسخ آن سیستم به ورودی ضربه‌ی واحد است. همانند تابع تبدیل، پاسخ سیستم به ورودی ضربه‌ی واحد نیز از خصوصیات ذاتی سیستم بوده و یک مدل ریاضی برای آن است.

$g(t)$ رفتار سیستم را در حوزه‌ی زمان و $G(s)$ رفتار سیستم را در حوزه‌ی لاپلاس توصیف می‌کند.

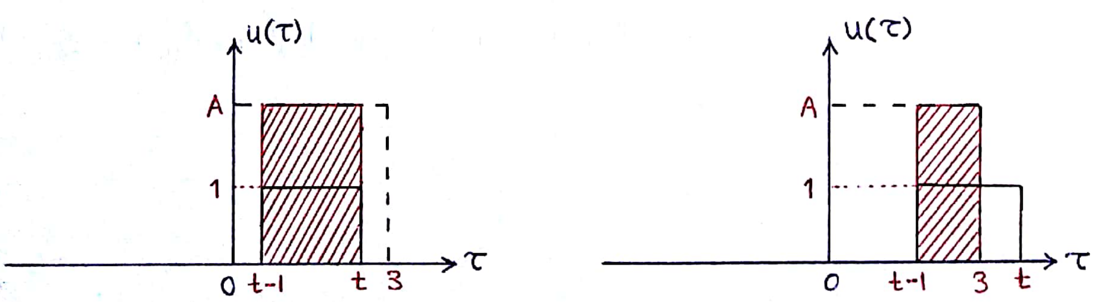
مثال: پاسخ یک سیستم LTI به ورودی ضربه‌ی واحد به صورت $g(t)$ است. پاسخ سیستم را برای ورودی $u(t)$ با استفاده از انتگرال کانولوشن تعیین کنید.



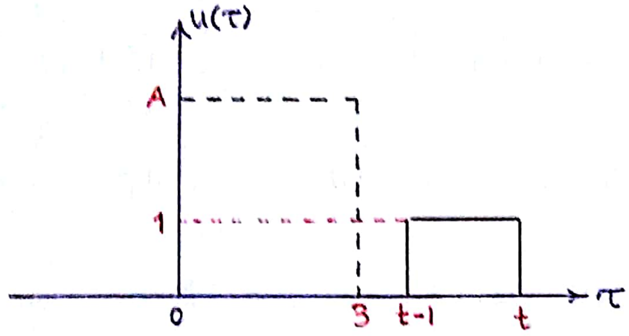


$t<0 \Rightarrow y(t)=0$

$0\leq t\leq 1 \Rightarrow y(t)=u(\tau)t = At$



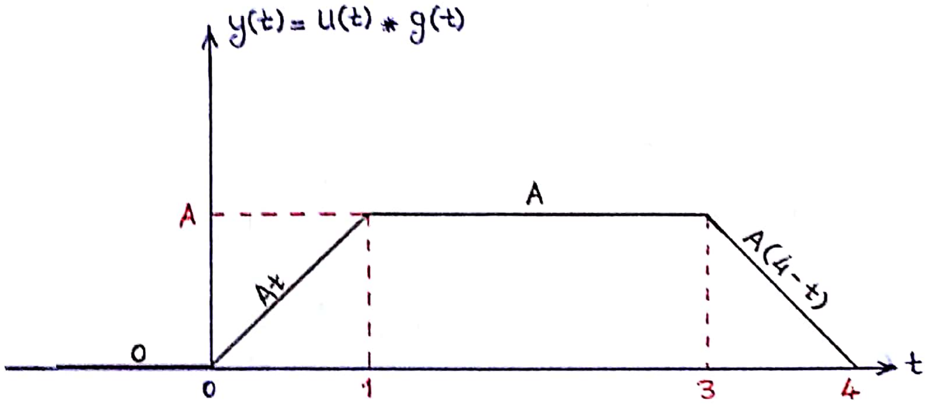
$1 < t \leq 3 \implies y(t) = u(\tau) \cdot 1 = A \cdot 1$



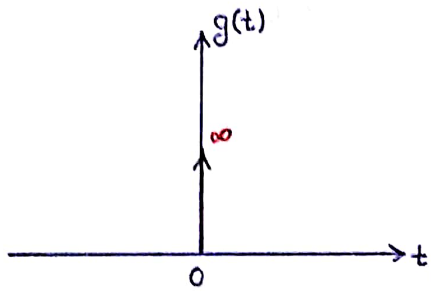
$3 < t \leq 4 \implies y(t) = u(\tau)[3-(t-1)]$

$= A(4-t)$

$t > 4 \implies y(t) = 0$

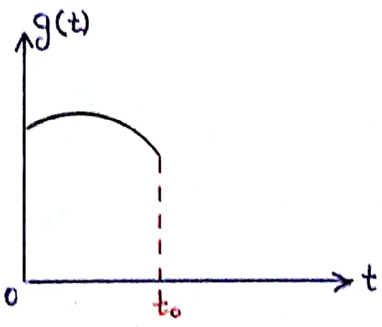


نکته: اگر پاسخ سیستم به ورودی ضربه‌ی واحد به صورت ضربه باشد، سیستم بی حافظه (استاتیکی) است:

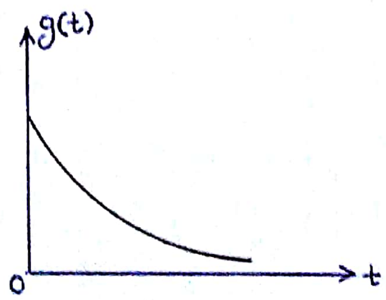


$g(t) = \delta(t) \implies$ سیستم استاتیکی

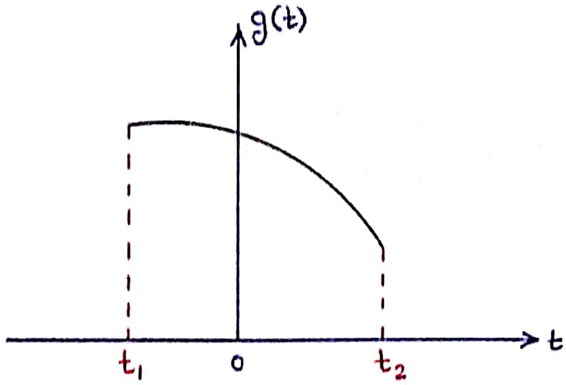
$g(t)$ مقدار حافظه‌ی سیستم دینامیکی را بیان می‌کند. اگر $g(t)$ برای یک سیستم به صورت زیر باشد، سیستم دارای حافظه‌ی محدود به مقدار t_0 است:



و اگر $g(t)$ برای یک سیستم به صورت زیر باشد، سیستم دارای حافظه‌ی نامحدود است:



اگر پاسخ سیستم به ورودی ضربه‌ی واحد به ازای زمان‌های $t<0$ نیز مقدار داشته باشد، سیستم غیرعلّی است و از آینده تأثیر می‌پذیرد:



در سیستم‌های غیرعلّی:

$$* \; y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر یک سیستم جرم - فنر - دمپر به صورت زیر می‌باشد. تابع تبدیل این سیستم را مشخص کنید.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$m[s^2 X(s) - s\,\cancel{X(0)}^{0} - \cancel{\dot{X}(0)}^{0}] + c[sX(s) - \cancel{X(0)}^{0}] + k\,X(s) = F(s) \Longrightarrow (ms^2 + cs + k)\,X(s) = F(s) \Longrightarrow$$

شرایط اولیه‌ی صفر

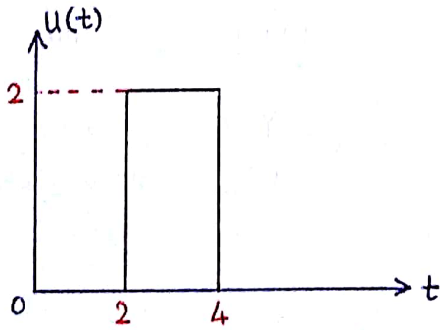
$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

مثال: تابع تبدیل یک سیستم LTI به صورت زیر است. معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر آن را به دست آورید.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \Longrightarrow (s^2 + 4s + 3)Y(s) = (s+2)U(s) \Longrightarrow$$

$$s^2 Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = sU(s) + 2U(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = \dot{u} + 2u$$

مثال: پاسخ یک سیستم به ورودی ضربه‌ی واحد به صورت $g(t) = 2e^{-t} + 3e^{-3t}$ می‌باشد. پاسخ سیستم را به ورودی $u(t)$ تعیین کنید.



$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+3} = \frac{5s+9}{(s+1)(s+3)}$$

پاسخ سیستم به ورودی پله‌ی واحد $u_s(t)$:

$$U_s(s) = \mathcal{L}[u_s(t)] = \frac{1}{s}$$

$$Y_s(s) = G(s)U_s(s) = \frac{5s+9}{s(s+1)(s+3)} \Longrightarrow$$

$$Y_s(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+3} = \frac{3}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+3} \Longrightarrow y_s(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_s(s)] = 3 - 2e^{-t} - e^{-3t}$$

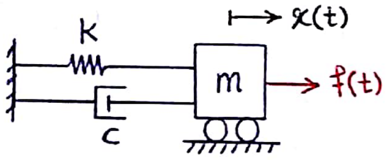
ورودی $u(t)$ را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از ورودی های پله ی واحد نوشت:

$$u(t) = 2u_s(t-2) - 2u_s(t-4)$$

با توجه به خصوصیات سیستم های LTI، پاسخ سیستم به ورودی $u(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$y(t) = 2y_s(t-2)u_s(t-2) - 2y_s(t-4)u_s(t-4) \quad ; \quad y_s(t) = 3 - 2e^{-t} - e^{-3t}$$

مثال: پاسخ سیستم ارتعاشی زیر به ورودی ضربه‌ی واحد به صورت $g(t)=te^{-3t}$ می باشد، پارامترهای سیستم (m، c و k) را تعیین کنید.

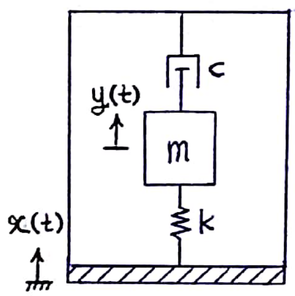


$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \implies G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+cs+k}$$

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[te^{-3t}] = \frac{1}{(s+3)^2} = \frac{1}{s^2+6s+9}$$

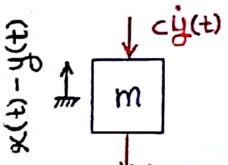
$$ms^2 + cs + k = s^2 + 6s + 9 \implies m=1,\ c=6,\ k=9$$

مثال: شکل زیر مدل ساده ای از یک شتاب‌سنج را نشان می‌دهد. تابع تبدیل سیستم را بدست آورید.



ورودی سیستم شتاب پایه‌ی سیستم نسبت به چارچوب مرجع لخت است: $u(t) = \ddot{x}(t)$

خروجی سیستم جابجایی جرم m نسبت به چارچوب سیستم است: $y(t)$



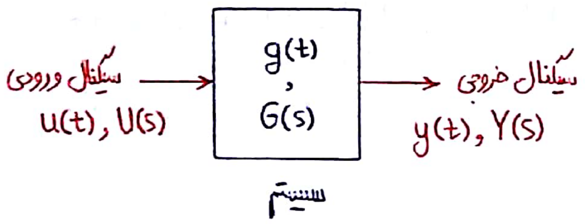
قانون دوم نیوتن: $m(\ddot{x}-\ddot{y}) = -c\dot{y} - ky \implies m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{x} = -mu$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} (ms^2+cs+k)Y(s) = -mU(s) \implies G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-m}{ms^2+cs+k}$$

دیاگرام بلوکی (Block Diagram):

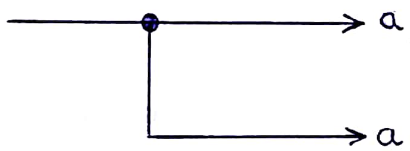
دیاگرام بلوکی یک نمایش ترسیمی از زیرسیستم ها ونحوه‌ی ارتباط آن ها با یکدیگر در یک سیستم دینامیکی می‌باشد.

در دیاگرام بلوکی هر سیستم به صورت یک بلوک و هر سیگنال به صورت یک خط جهت‌دار نمایش داده می‌شود. در داخل هر بلوک مدل ریاضی سیستم مربوطه (معادله‌ی دیفرانسیل، تابع تبدیل، پاسخ به ورودی ضربه‌ی واحد و ...) نوشته می‌شود.

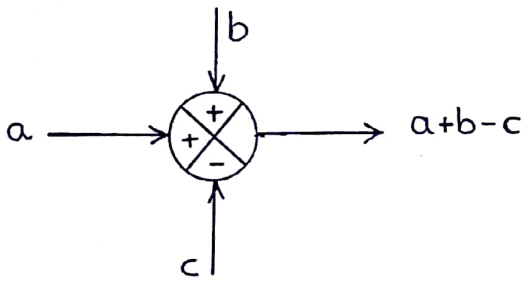


$$* \; y(t)=u(t) * g(t) \; , \; Y(s)=U(s)G(s)$$

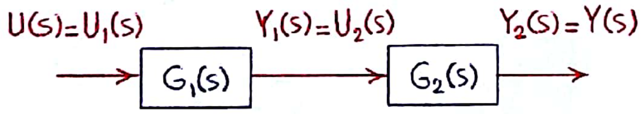
به منظور گرفتن انشعاب از سیگنال ها از گره استفاده می‌شود:



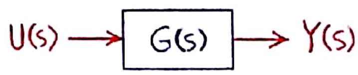
به منظور انجام عملیات جمع و تفریق روی سیگنال ها از جمع کننده استفاده می‌شود:



اتصال سری سیستم ها:



سیستم معادل:



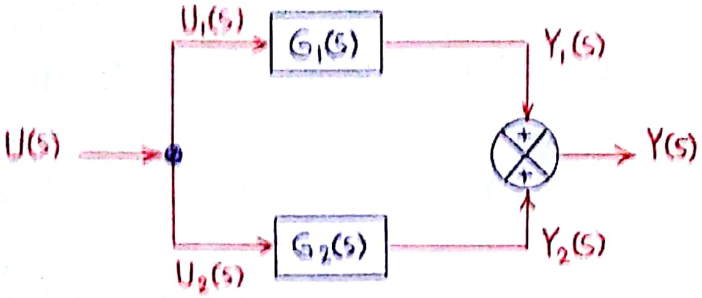
$$Y(s)=Y_2(s)=G_2(s)U_2(s)=G_2(s)Y_1(s)=G_2(s)\left[G_1(s)U_1(s)\right]=\left[G_1(s)G_2(s)\right]U(s) \Longrightarrow \frac{Y(s)}{U(s)}=G_1(s)G_2(s)$$

$$\Longrightarrow * \; G(s)=G_1(s)G_2(s)$$

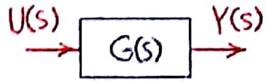
درحالت عمومی برای N سیستم سری داریم:

$$* \; G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\prod_{i=1}^{N} G_i(s)$$

اتصال موازی سیستم ها:



سیستم معادل:



$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)\,U_1(s) + G_2(s)\,U_2(s) = [G_1(s) + G_2(s)]\,U(s) \Longrightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) \Longrightarrow$$

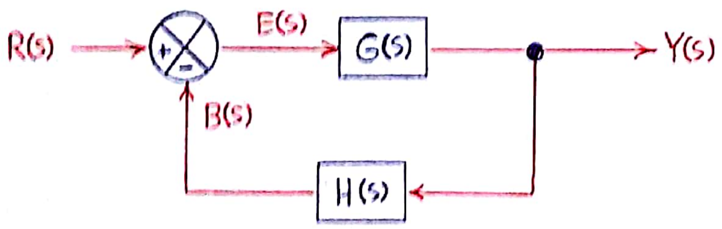
$$* \; G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

درحالت عمومی برای N سیستم موازی داریم:

$$* \; G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{i=1}^{N} G_i(s)$$

دیاگرام بلوکی سیستم های کنترل با بازخورد (فیدبک):

در یک سیستم کنترل با بازخورد (فیدبک)، سیگنال ورودی به سیگنال خروجی وابسته است. در دیاگرام بلوکی چنین سیستم هایی مسیری بسته به نام حلقه (Loop) ایجاد می‌شود



تابع تبدیل پیش سو (Feed Forward TF): حاصلضرب تمامی توابع تبدیل در مسیر پیش‌سو (از ورودی مرجع تا خروجی بدون درنظر گرفتن مسیر فیدبک) است:

$$FFTF = G(s)$$

تابع تبدیل بازخورد (Feedback TF): حاصلضرب تمامی توابع تبدیل در مسیر فیدبک است:

$$FBTF = H(s) \cdot (-1)$$

تابع تبدیل حلقه‌باز (Open Loop TF): حاصلضرب تمامی توابع تبدیل در حلقه است:

$$OLTF = -G(s)H(s)$$

تابع تبدیل حلقه‌بسته (Closed Loop TF): نسبت خروجی سیستم به ورودی مرجع با درنظر گرفتن مسیر فیدبک است:

$$CLTF = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

$$Y(s) = E(s)G(s) = [R(s) - B(s)]G(s) = [R(s) - Y(s)H(s)]G(s) \Longrightarrow [1 + G(s)H(s)]Y(s) = G(s)R(s)$$

$$\Rightarrow \ast \ CLTF = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

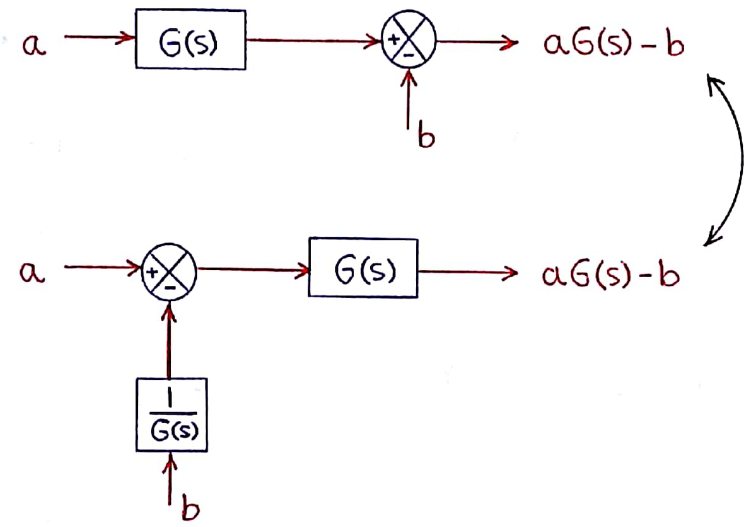
در حالت عمومی داریم:

$$\ast \ CLTF = \frac{FFTF}{1-OLTF}$$

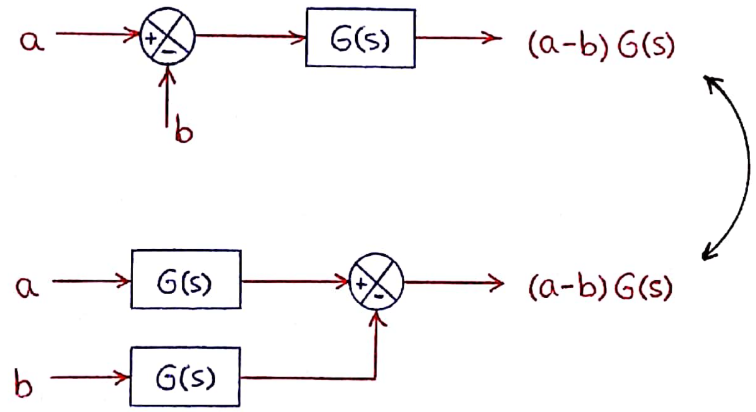
قواعد ساده‌سازی دیاگرام های بلوکی :

1. انتقال یک بلوک به نقطه‌ی قبل یا بعد جمع کننده

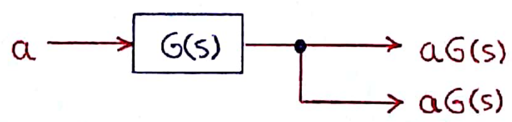
حالت اول:



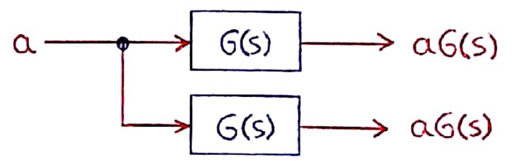
حالت دوم:

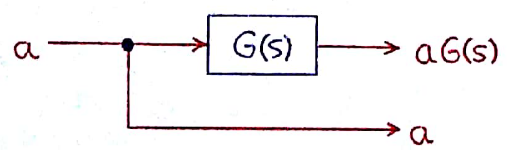


2. انتقال یک بلوک به نقطه‌ی قبل یا بعد گره

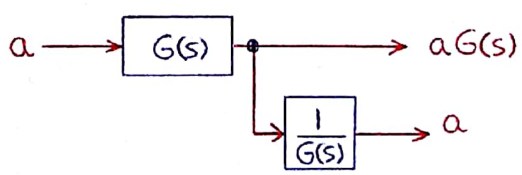


$\longleftrightarrow$ حالت اول

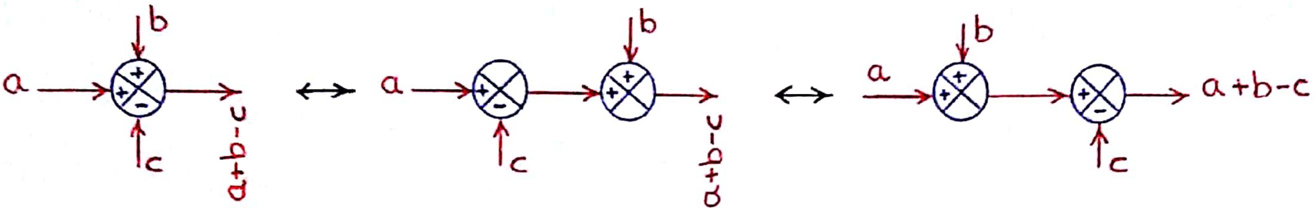




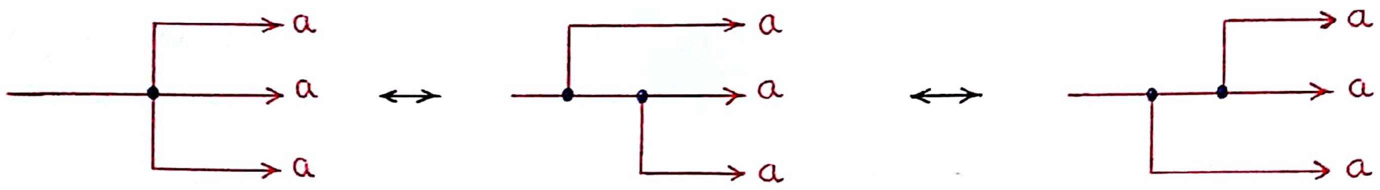
$\longleftrightarrow$ حالت دوم



3. تجزیه‌ی جمع کننده ها

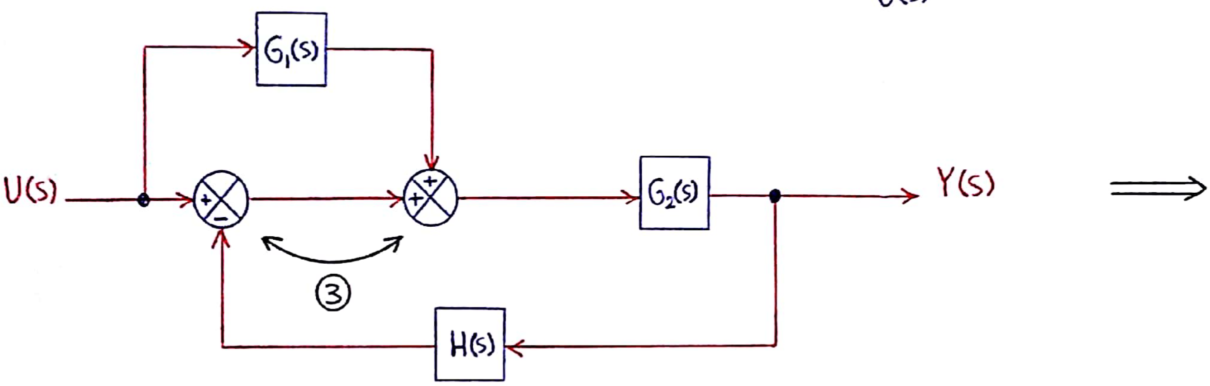


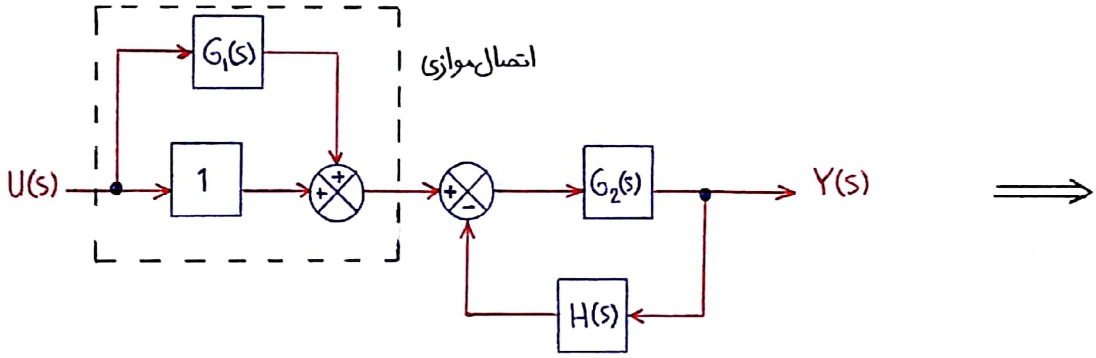
4. تجزیه‌ی گره ها

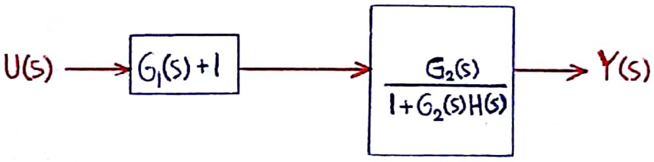


مثال: تابع تبدیل سیستم زیر را تعیین کنید.

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=?$$





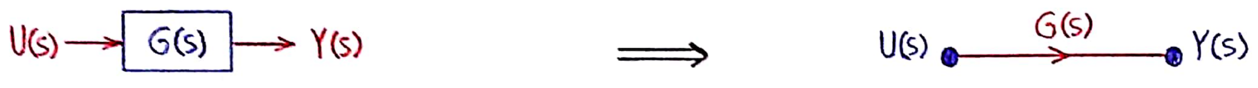


$$\Longrightarrow\quad G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{[G_1(s)+1]\,G_2(s)}{1+G_2(s)H(s)}$$

گراف گذر سیگنال (Signal Flow Graph):

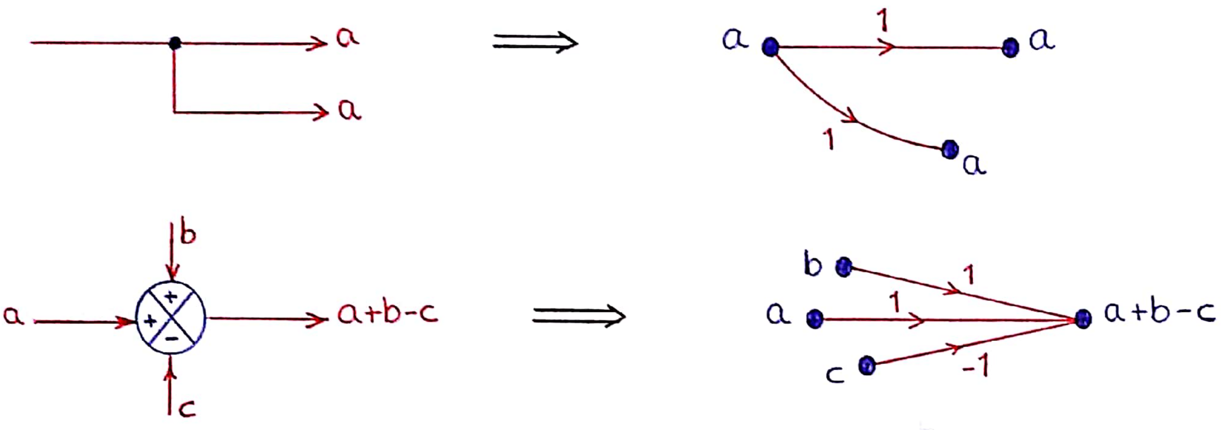
گراف گذر سیگنال مشابه دیاگرام بلوکی یک نمایش ترسیمی از زیرسیستم ها و نحوه‌ی ارتباط آن ها با یکدیگر در یک سیستم دینامیکی است.

در گراف گذر سیگنال هر سیگنال به صورت یک گره و هر سیستم به صورت یک خط جهت دار نمایش داده می شود.



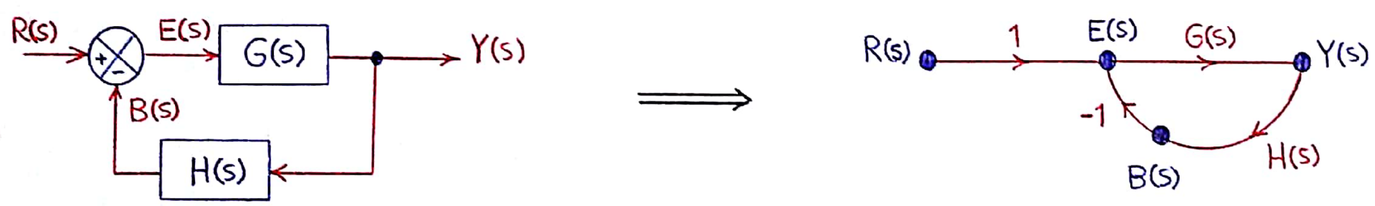
دیاگرام بلوکی — گراف گذر سیگنال

گره های انشعاب و جمع کننده ها در گراف گذر سیگنال به صورت زیر نمایش داده می شوند:

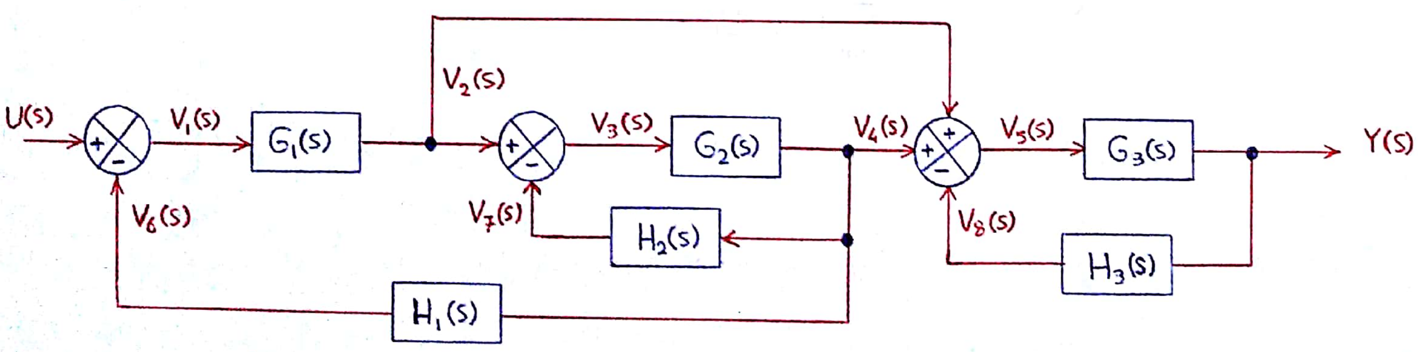


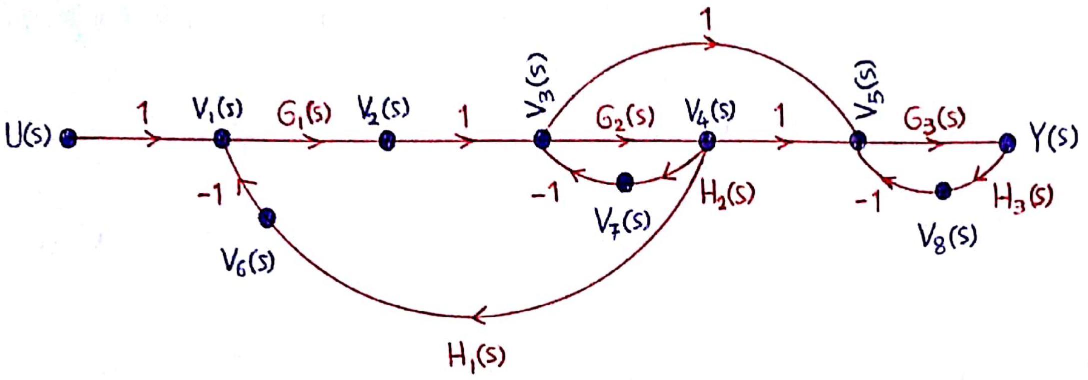
دیاگرام بلوکی — گراف گذر سیگنال

براساس ویژگی های گراف گذر سیگنال، حلقه‌ی فیدبک در سیستم کنترل را به صورت زیر در گراف گذر سیگنال نمایش می دهیم:

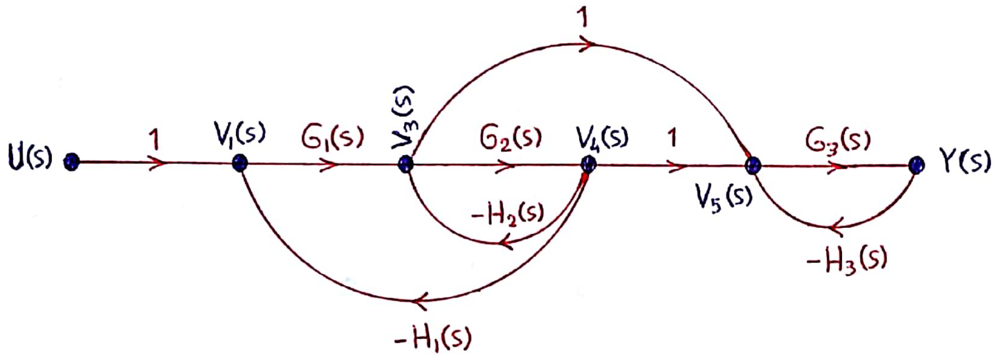


مثال: گراف گذر سیگنال را برای سیستم زیر رسم کنید.





گراف گذر سیگنال فوق را به صورت زیر می‌توان ساده‌سازی کرد:



قانون میسون (Mason's Rule):

تابع تبدیل سیستم بین ورودی $U(s)$ و خروجی $Y(s)$ به صورت زیر است:

$$* \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k \Delta_k}{\Delta}$$

N تعداد مسیرهای پیشرو (Forward Path) است. هر مسیر پیشرو مسیری متمایز است که از طریق آن بتوان از ورودی $U(s)$ بدون عبور از هیچ گرهی بیش از یک بار به خروجی $Y(s)$ رسید.

P_k بهره (Gain) مسیر k ام است. بهره‌ی یک مسیر حاصل‌ضرب تمامی توابع تبدیل موجود در آن مسیر است.

Δ دترمینان گراف است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$* \quad \Delta = 1 - \sum_{i} L_i + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{i,j,k} L_i L_j L_k + \dots$$

L_i بهره‌ی حلقه‌ی i ام گراف است. هر حلقه مسیری بسته است که از یک گره آغاز و به همان گره ختم می‌شود.

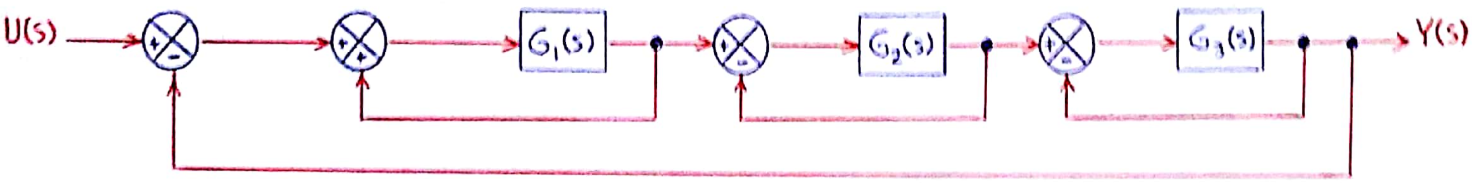
$L_i L_j$ حاصل‌ضرب بهره‌ی حلقه‌های دو به دو غیرمماس موجود در گراف است. دو حلقه زمانی غیرمماس اند که هیچ گره مشترکی نداشته باشند.

k ـتایی‌ها: حاصل‌ضرب بهره‌ی حلقه‌های سه به سه غیرمماس موجود در گراف است.

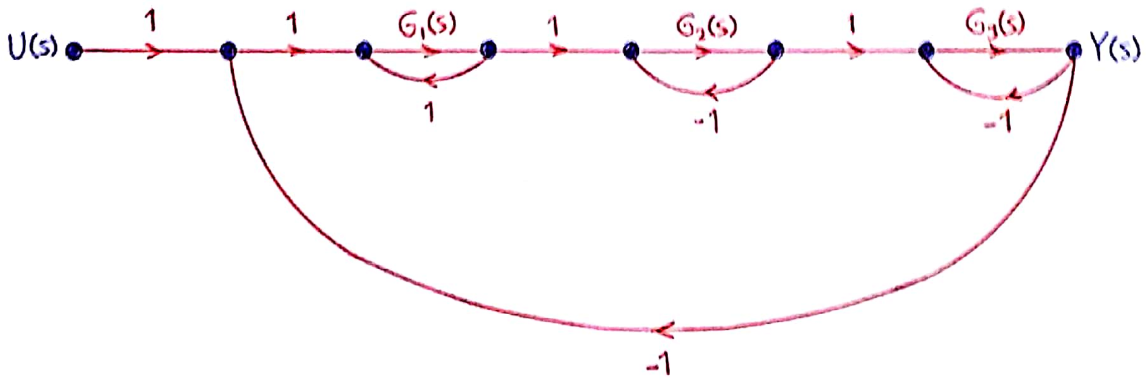
Δ_k : دترمینان بخشی از گراف است که بدون درنظرگرفتن حلقه‌های مماس با مسیر پیشروی k ام حاصل می‌شود:

$* \; \Delta_k = \Delta - \sum$ حاصل‌ضرب بهره‌ی حلقه‌های مماس با مسیر پیشروی k ام $*$

مثال: تابع تبدیل سیستم زیر را به روش میسون محاسبه کنید. $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = ?$



گراف گذر سیگنال برای سیستم فوق به صورت زیر خواهد بود:

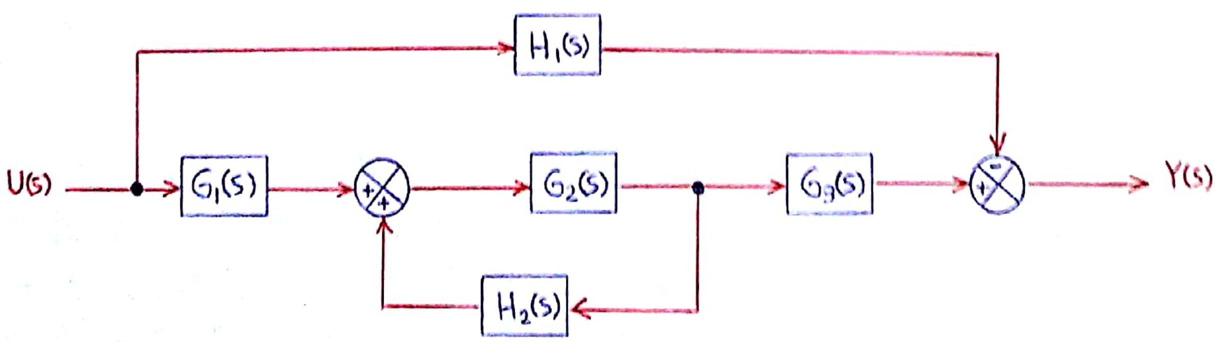


$N = 1 \;,\; P_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s) \;,\; L_1 = G_1(s) \;,\; L_2 = -G_2(s) \;,\; L_3 = -G_3(s) \;,\; L_4 = -G_1(s)G_2(s)G_3(s)$

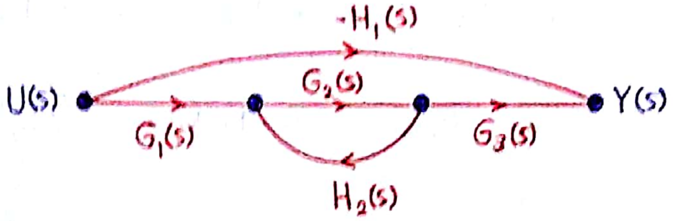
$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_2 + L_2L_3 + L_1L_3) - (L_1L_2L_3) \quad , \quad \Delta_1 = 1$

$$\Longrightarrow \; G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 - G_1(s) + G_2(s) + G_3(s) - G_1(s)G_2(s) - G_1(s)G_3(s) + G_2(s)G_3(s)}$$

مثال: تابع تبدیل سیستم زیر را به روش میسون محاسبه کنید. $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = ?$



گراف گذر سیگنال برای سیستم فوق به صورت زیر خواهد بود:



$N=2\ ,\quad P_1=-H_1(s)\quad ,\quad P_2=G_1(s)G_2(s)G_3(s)\quad ,\quad L_1=G_2(s)H_2(s)\quad ,\quad \Delta_1=1-L_1\ ,\quad \Delta_2=1$

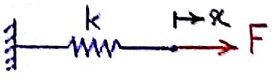
$$\Delta=1-L_1 \qquad \Longrightarrow \quad G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}=\frac{G_2(s)H_1(s)H_2(s)-H_1(s)+G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1-G_2(s)H_2(s)}$$

مدلسازی ریاضی سیستم های مکانیکی و الکتریکی:

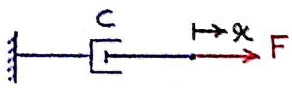
سیستم های مکانیکی انتقالی:

المان های اصلی یک سیستم مکانیکی انتقالی و روابط ریاضی حاکم بر آن ها عبارت اند از:

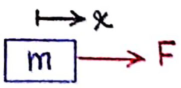
فنر: * $F = kx$



میراگر (دمپر): * $F = cv = c\,\dfrac{dx}{dt}$



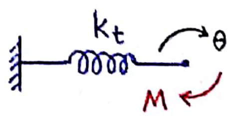
جرم: * $F = ma = m\,\dfrac{d^2x}{dt^2}$



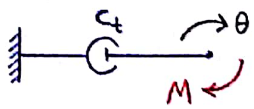
سیستم های مکانیکی دورانی:

المان های اصلی یک سیستم مکانیکی دورانی و روابط ریاضی حاکم بر آن ها عبارت اند از:

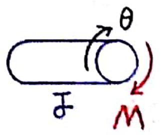
فنر پیچشی: * $M = k_t\theta$



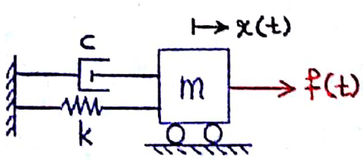
میراگر (دمپر) پیچشی: * $M = c_t\omega = c_t\,\dfrac{d\theta}{dt}$

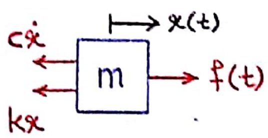


ممان اینرسی: * $M = J\alpha = J\,\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$



— سیستم جرم - فنر - دمپر:



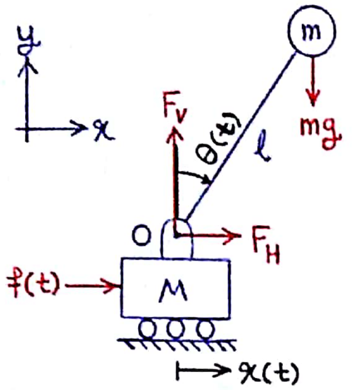


قانون دوم نیوتن: $-c\dot{x} - kx + f(t) = m\ddot{x}$

$\Rightarrow$ * $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ معادله دیفرانسیل سیستم: $\xRightarrow{\mathcal{L}}$

$(ms^2 + cs + k)\,X(s) = F(s) \Rightarrow$ * $\dfrac{X(s)}{F(s)} = \dfrac{1}{ms^2 + cs + k}$ تابع تبدیل:

— سیستم پاندول معکوس:



$$\sum M_o = J_o\ddot{\theta} \Rightarrow F_V\ell\sin\theta - F_H\ell\cos\theta = m\ell^2\ddot{\theta}$$

$$\sum F_x = m\frac{d^2}{dt^2}(x+\ell\sin\theta) \Rightarrow F_H = m\left[\ddot{x} + \frac{d^2}{dt^2}(\ell\sin\theta)\right]$$

$$\sum F_y = m\frac{d^2}{dt^2}(\ell\cos\theta) \Rightarrow F_V - mg = \frac{d^2}{dt^2}(\ell\cos\theta)$$

خطی سازی: $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \sim \theta \;,\; \cos\theta \sim 1 \;,\; \theta\dot{\theta} = 0$

$$\left.\begin{aligned} & f(t) - F_H = M\frac{d^2x}{dt^2} \\ & F_V\ell\theta - F_H\ell = m\ell^2\theta \\ & m(\ddot{x} + \ell\ddot{\theta}) = F_H \\ & mg = F_V \end{aligned}\right| \Rightarrow \left.\begin{aligned} & (M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} = f(t) \\ & 2\ell\ddot{\theta} - g\theta + \ddot{x} = 0 \end{aligned}\right| \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

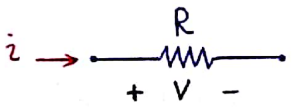
تابع تبدیل سیستم:

$$\left.\begin{aligned} & (M+m)s^2X(s) + m\ell s^2\Theta(s) = F(s) \\ & 2\ell s^2\Theta(s) - g\Theta(s) + s^2X(s) = 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow * \;\frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{-1}{[(2M+m)\ell]s^2 - (M+m)g}$$

مدل‌سازی سیستم های الکتریکی:

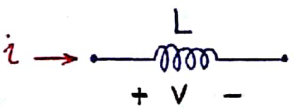
المان های اصلی یک سیستم الکتریکی و روابط ریاضی حاکم بر آن ها عبارت اند از:

مقاومت:



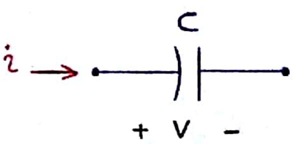
$* \; V = Ri$

سلف:



$* \; V = L\dfrac{di}{dt}$

خازن:



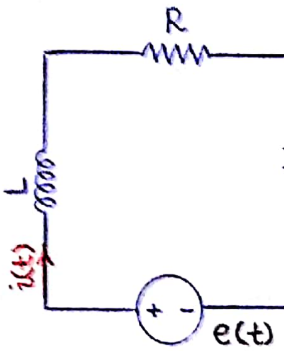
$* \; V = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\,dt$

قوانین حاکم بر مدارهای الکتریکی (قوانین کیرشهف):

۱. قانون ولتاژ کیرشهف: جمع جبری ولتاژ المان های الکتریکی یک حلقه از مدار برابر صفر است.

2. قانون جریان کیرشهف: جمع جبری جریان های ورودی وخروجی در یک گره از مدار برابر صفر است.

– مدار RLC سری:



قانون ولتاژ کیرشهف: $V_L + V_R + V_C = e(t) \Rightarrow$

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) = E(s) \Rightarrow$$

تابع تبدیل سیستم:

$$\frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{Ls + R + 1/Cs} \Rightarrow * \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

تناظر بین سیستم های مکانیکی و الکتریکی:

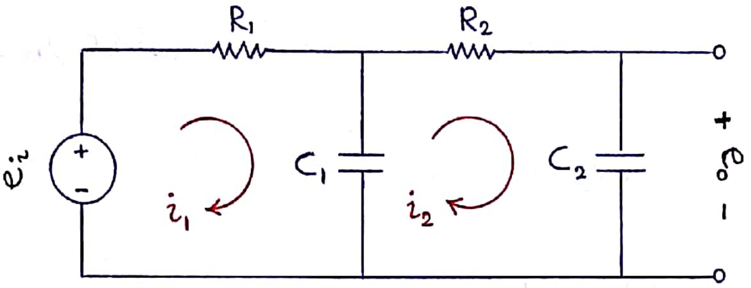
سیستم جرم - فنر - دمپر با مدار RLC سری به صورت زیر متناظر است:

سیستم جرم - فنر - دمپر		مدار RLC سری	
مکان	x	بار الکتریکی	q
سرعت	$V = \frac{dx}{dt}$	جریان	$i = \frac{dq}{dt}$
جرم (اینرسی)	m	اندوکتانس	L
میرایی	c	مقاومت	R
سختی	k	الاستانس	$S = \frac{1}{C}$
نیرو	$f(t)$	ولتاژ	$e(t)$

معادله ی دیفرانسیل سیستم:

$* \; m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ $* \; L\ddot{q} + R\dot{q} + Sq = e(t)$

مثال: تابع تبدیل $\frac{E_o(s)}{E_i(s)}$ را در مدار الکتریکی زیر تعیین کنید.



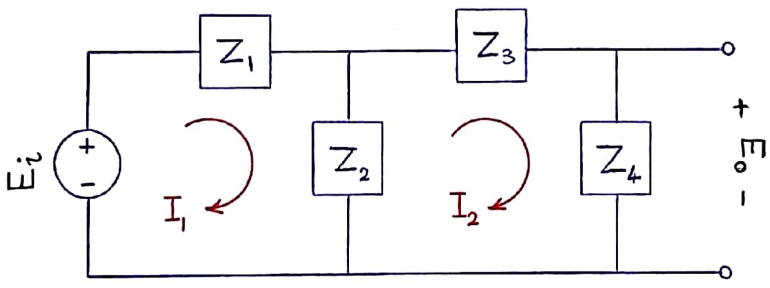
مدار الکتریکی را از حوزه ی زمان به حوزه ی لاپلاس برده و تحلیل می کنیم:

مقاومت: $V=Ri \xrightarrow{\mathcal{L}} V=RI \;\; ; \;\; Z=R$

سلف: $V=L\frac{di}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} V=(Ls)I \;\; ; \;\; Z=Ls$

خازن: $V=\frac{1}{C}\int i\,dt \xrightarrow{\mathcal{L}} V=\frac{1}{Cs}I \;\; ; \;\; Z=\frac{1}{Cs}$

Z امپدانس المان الکتریکی می باشد.



$Z_1=R_1\,,\; Z_2=1/C_1s$

$Z_3=R_2,\; Z_4=1/C_2s$

$$Z_2I_1=(Z_3+Z_4)I_2\;,\; I=I_1+I_2 \Rightarrow I_1=\frac{Z_3+Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4}I\,,\; I_2=\frac{Z_2}{Z_2+Z_3+Z_4}I$$

$$E_i=Z_1I+Z_2I_1=\left[Z_1+\frac{Z_2(Z_3+Z_4)}{Z_2+Z_3+Z_4}\right]I$$

$$E_o=Z_4I_2=\frac{Z_2Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4}I$$

$$\Rightarrow \frac{E_o}{E_i}=\frac{Z_2Z_4}{Z_1(Z_2+Z_3+Z_4)+Z_2(Z_3+Z_4)} \Rightarrow * \frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s}$$

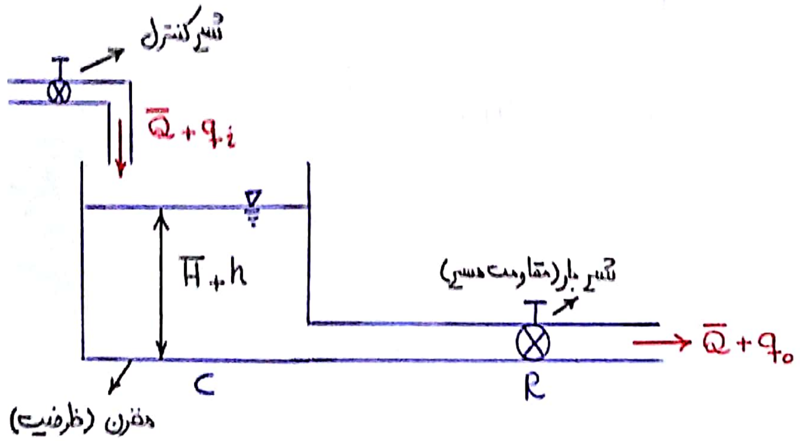
$$\frac{\cdots}{+1}$$

ملاحظه می شود که علارغم وجود المان سلف در مدار، سیستم الکتریکی فوق دارای اینرسی (اندوکتانس) است.

مدلسازی ریاضی سیستم های سیالاتی و گرمایی:

سیستم های کنترل سطح مایع:

شکل زیر ساده ترین سیستم کنترل سطح مایع را نشان می دهد. زمانی که سیستم در حالت پایا قرار دارد، ارتفاع سطح مایع داخل مخزن برابر $\bar{H}$ و دبی حجمی (نرخ جریان) عبوری از سیستم برابر $\bar{Q}$ است:



$$[\bar{H}] = m \quad , \quad [\bar{Q}] = \frac{m^3}{s}$$

$$[C] = m^2 \quad , \quad [R] = \frac{s}{m^2}$$

روابط خطی سازی شده ی حاکم بر هر یک از المان های سیستم فوق حول حالت پایا به صورت زیر می باشد:

$* \; R = \dfrac{h}{q_o}$ شیر (مقاومت هیدرولیکی):

$* \; q_i - q_o = C\dfrac{dh}{dt}$ مخزن (ظرفیت هیدرولیکی):

h پتانسیل (هد) هیدرولیکی و C ظرفیت هیدرولیکی می باشد. C لزوماً برابر حجم مخزن نیست؛ برای مثال در سیستم فوق C سطح مقطع مخزن را نشان می دهد.

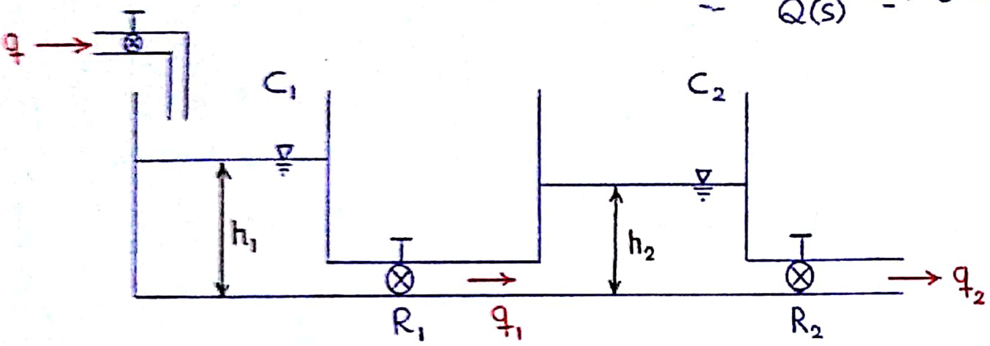
توابع تبدیل سیستم به صورت می باشند:

$$R = \frac{h}{q_o} \xrightarrow{\mathcal{L}} R = \frac{H(s)}{Q_o(s)} \quad , \quad q_i - q_o = C\frac{dh}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} Q_i(s) - Q_o(s) = (Cs)H(s)$$

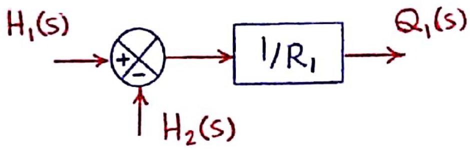
$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{Q_o(s)}{Q_o(s) + (Cs)RQ_o(s)} \Longrightarrow * \; \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{H(s)}{Q_o(s) + (Cs)H(s)} \Longrightarrow * \; \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs+1}$$

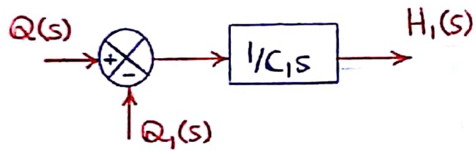
مثال: دیاگرام بلوکی سیستم کنترل سطح مایع زیر را رسم کنید و تابع تبدیل $\frac{Q_2(s)}{Q(s)}$ را مشخص نمایید.



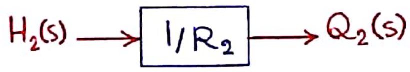
شیر 1: $R_1 = \frac{h_1 - h_2}{q_1} \Rightarrow q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R}$



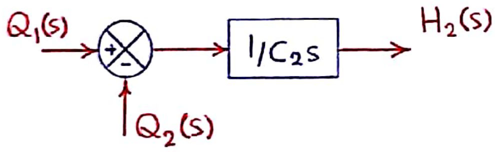
مخزن 1: $q - q_1 = C_1 \frac{dh_1}{dt}$



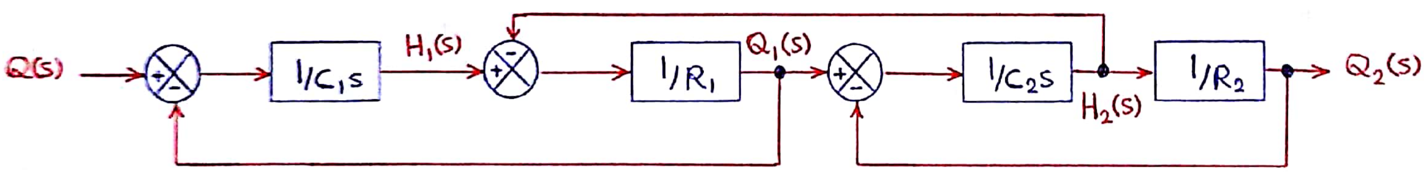
شیر 2: $R_2 = \frac{h_2 - 0}{q_2} \Rightarrow q_2 = \frac{h_2}{R_2}$



مخزن 2: $q_1 - q_2 = C_2 \frac{dh_2}{dt}$



دیاگرام بلوکی سیستم از ترکیب دیاگرام های بلوکی هر یک از المان های سیستم بدست می آید:

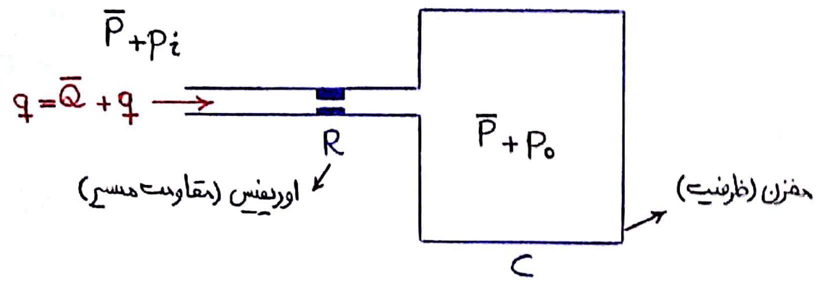


با استفاده از قانون میسون، تابع تبدیل سیستم به صورت زیر حاصل می شود:

$$* \quad \frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)s + 1}$$

سیستم های نیوماتیک (Pnuematic):

سیستم های نیوماتیک سیستم هایی هستند که سیال کاری در آن ها گاز تحت فشار می باشد. شکل زیر ساده ترین سیستم نیوماتیک را نشان می دهد. زمانی که سیستم در حالت پایا قرار دارد، فشار گاز داخل مخزن برابر $\bar{P}$ دبی جرمی (نرخ جریان) گاز عبوری از مجرا برابر $\bar{Q}=0$ است:



$[P]=Pa$, $[\bar{Q}]=\frac{kg}{s}$

$[C]=ms^2$, $[R]=\frac{1}{m\cdot s}$

با فرض ثابت بودن حجم مخزن روابط خطی سازی شده ی حاکم بر هر یک از المان های سیستم فوق حالت پایا به صورت زیر می باشد:

$$*\; R=\frac{\Delta p}{q}=\frac{P_i-P_o}{q} \;;\; q=\frac{dm}{dt}$$ اوریفیس (مقاومت نیوماتیکی):

$$*\; C=\frac{dm}{dp_o}=V\frac{d\rho}{dp_o} \;;\; V=const.$$ مخزن (ظرفیت نیوماتیکی):

p فشار (پتانسیل نیوماتیکی) و ρ چگالی گاز درون مخزن می باشد. C لزوما برابر حجم مخزن نیست بلکه ضریبی برای نمایش ظرفیت مخزن می باشد.

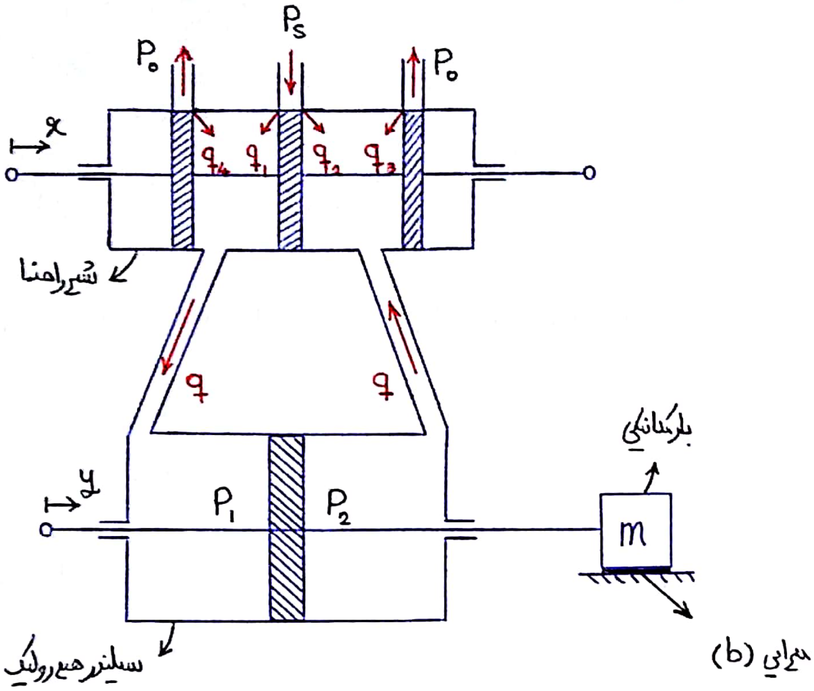
تابع تبدیل سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$C=\frac{dm}{dp_o} \Rightarrow C\,dp_o=dm=q\,dt \Rightarrow C\frac{dp_o}{dt}=\frac{P_i-P_o}{q} \Rightarrow P_i-P_o=RC\frac{dp_o}{dt} \xRightarrow{\mathcal{L}}$$

$$*\; \frac{P_o(s)}{P_i(s)}=\frac{1}{RCs+1}$$

سیستم های هیدرولیک (Hydraulic):

سیستم های هیدرولیک سیستم هایی هستند که سیال کاری در آن ها روغن تراکم ناپذیر و تحت فشار است. شکل زیر مدل ساده شده ای از یک سیستم هیدرولیک را نشان می دهد:



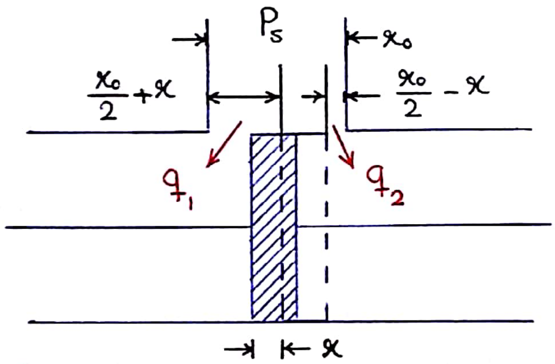
P_s: فشار روغن منبع تغذیه (Supply)

P_o: فشار روغن خروجی $(P_o \ll P_s)$

q: دبی حجمی روغن

γ: وزن ویژه‌ی روغن $(\gamma = \rho g)$

معادلات حاکم بر جریان روغن در شیر راهنما به صورت زیر می‌باشد:



$$q_1 = c_1 A_1 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(P_s - P_1)} = C_1 \sqrt{P_s - P_1}\left(\frac{x_o}{2}+x\right)$$

$$q_2 = c_2 A_2 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(P_s - P_2)} = C_2 \sqrt{P_s - P_2}\left(\frac{x_o}{2}-x\right)$$

$$q_3 = c_1 A_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(P_2 - P_o)} = C_1 \sqrt{P_2 - P_o}\left(\frac{x_o}{2}+x\right) = C_1 \sqrt{P_2}\left(\frac{x_o}{2}+x\right)$$

$$q_4 = c_2 A_4 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}(P_1 - P_o)} = C_2 \sqrt{P_1 - P_o}\left(\frac{x_o}{2}-x\right) = C_2 \sqrt{P_1}\left(\frac{x_o}{2}-x\right)$$

از تقارن هندسی شیر راهنما داریم:

$$A_1 = A_3 = k\left(\frac{x_o}{2}+x\right)$$

$$A_2 = A_4 = k\left(\frac{x_o}{2}-x\right)$$

$k = \text{const.}$

$$C_1 = c_1 k \sqrt{\frac{2g}{\gamma}}$$

$$C_2 = c_2 k \sqrt{\frac{2g}{\gamma}}$$

دبی روغن ورودی به سیلندر هیدرولیک:

$$q=q_1-q_4=C_1\sqrt{P_s-P_1}\left(\frac{x_0}{2}+x\right)-C_2\sqrt{P_1}\left(\frac{x_0}{2}-x\right)$$

دبی روغن در مسیر برگشت:

$$q=q_3-q_2=C_1\sqrt{P_2}\left(\frac{x_0}{2}+x\right)-C_2\sqrt{P_s-P_2}\left(\frac{x_0}{2}-x\right)$$

از تراکم ناپذیری روغن می توان نتیجه گرفت:

$$q_1=q_3\ ,\ q_2=q_4 \Longrightarrow P_s=P_1+P_2$$

$$\Delta P=P_1-P_2 \Longrightarrow P_1=\frac{P_s+\Delta P}{2}\ ,\ P_2=\frac{P_s-\Delta P}{2}$$

$$q=C_1\sqrt{\frac{P_s-\Delta P}{2}}\left(\frac{x_0}{2}+x\right)-C_2\sqrt{\frac{P_s+\Delta P}{2}}\left(\frac{x_0}{2}-x\right)=f(x,\Delta P)$$

از خطی سازی رابطه ی فوق حول نقطه ی تعادل سیستم داریم:

$$q=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0,\Delta P=0}x+\left(\frac{\partial f}{\partial \Delta P}\right)_{x=0,\Delta P=0}\Delta P \Longrightarrow *\ q=K_1x-K_2\Delta P\ ;$$

$$K_1=(C_1+C_2)\sqrt{\frac{P_s}{2}}>0\ ,$$

$$K_2=(C_1+C_2)\frac{x_0}{4\sqrt{2P_s}}>0$$

رابطه ی فوق نشان می دهد که اعمال ورودی (x) به سیستم موجب حرکت سیستم در راستای y (به واسطه ی دبی q و تراکم ناپذیر بودن روغن) و همچنین اعمال نیرو به بار مکانیکی (به واسطه ی اختلاف فشار ΔP در سیلندر هیدرولیک) می شود. اگر نیروی مقاومی در برابر حرکت پیستون وجود نداشته باشد، رابطه ی فوق به صورت زیر ساده تر خواهد شد:

$$\Delta P=0 \Longrightarrow *\ q=K_1x$$

از نوشتن معادلات تعادل نیرو در راستای y داریم:

$$q\,dt=A\,dy \Rightarrow q=A\dot{y} \Longrightarrow \Delta P=\frac{1}{K_2}(K_1x-A\dot{y})$$

$$F=m\ddot{y}+b\dot{y} \Rightarrow A\Delta P=m\ddot{y}+b\dot{y} \Rightarrow \frac{A}{K_2}(K_1x-A\dot{y})=m\ddot{y}+b\dot{y} \Longrightarrow$$

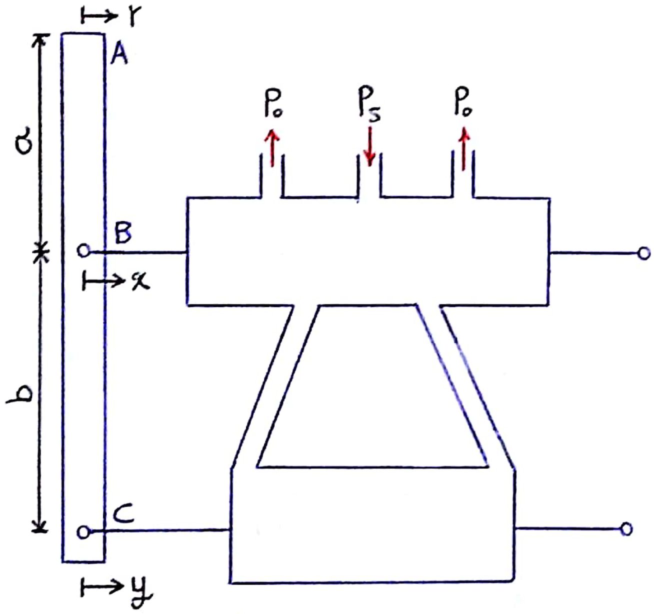
$$m\ddot{y}+\left(b+\frac{A^2}{K_2}\right)\dot{y}=\frac{AK_1}{K_2}x \xrightarrow{\mathcal{L}} * \frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s\left[\left(\frac{mK_2}{AK_1}\right)s+\frac{A^2+bK_2}{AK_1}\right]}$$ تابع تبدیل سیستم:

$$\Rightarrow * \frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K}{s(Ts+1)} \quad ; \quad K=\frac{A^2+bK_2}{AK_1} \quad , \quad T=\frac{mK_2}{A^2+bK_2}$$

K بهره‌ی سیستم و T ثابت زمانی سیستم است. اگر بار مکانیکی در سیستم نداشته باشیم $T<<1$ بوده و سیستم هیدرولیک به یک سیستم انتگرال‌گیر تبدیل خواهد شد:

$$* \frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K}{s}$$

با افزودن یک میله‌ی مرکب (میله‌ی ABC) به سیستم هیدرولیک، سیستم هیدرولیک به یک سیستم تناسبی تبدیل خواهد شد:



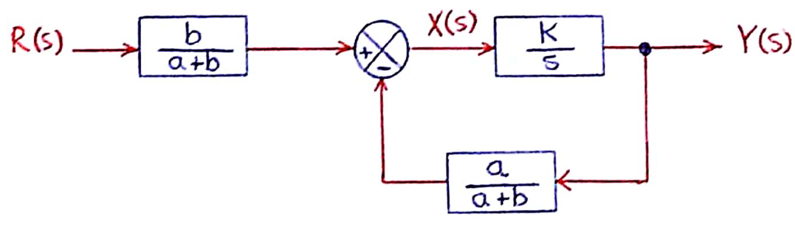
r ورودی و y خروجی سیستم است.

x هم از ورودی و هم از خروجی متاثر می‌شود.

با فرض عدم وجود بار مکانیکی در خروجی سیستم داریم:

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K}{s}$$

$$x=\frac{b}{a+b}r-\frac{a}{a+b}y \Rightarrow$$



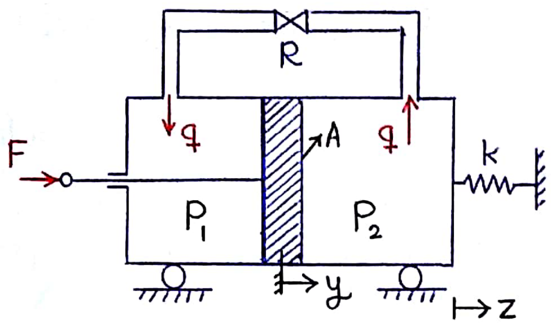
$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{b}{a+b}\cdot\frac{K}{s}}{1+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{K}{s}}$$

در سیستم‌های هیدرولیک بهره‌ی سیستم (K) عددی بسیار بزرگ است در نتیجه می‌توان نوشت:

$$K>>1 \Rightarrow * \frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b}{a}=K_p$$

سیستم فوق یک سیستم تناسبی با ضریب K_p است. K_p را می توان با تغییر پارامترهای هندسی سیستم (a و b) به راحتی تغییر داد.

نوع دیگری از سیستم های هیدرولیک ضربه گیرها و دمپرها (Dashpots) می باشند. شکل زیر یک ضربه گیر هیدرولیک را نشان می دهد:



R : مقاومت هیدرولیکی مسیر جریان روغن $\left(R = \dfrac{\Delta P}{q}\right)$

$$F = kz \Rightarrow A\Delta P = kz \Rightarrow A(P_1 - P_2) = kz$$

$$q\,dt = A(dy - dz) \Rightarrow q = A(\dot{y} - \dot{z})$$

$$q = \frac{P_1 - P_2}{R}$$

$$\Rightarrow \dot{y} - \dot{z} = \frac{q}{A} = \frac{P_1 - P_2}{RA} = \frac{kz}{RA^2} \Rightarrow \dot{y} = \dot{z} + \frac{kz}{RA^2} \xRightarrow{\mathcal{L}} * \ \frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{s}{s + \frac{k}{RA^2}}$$

تابع تبدیل سیستم:

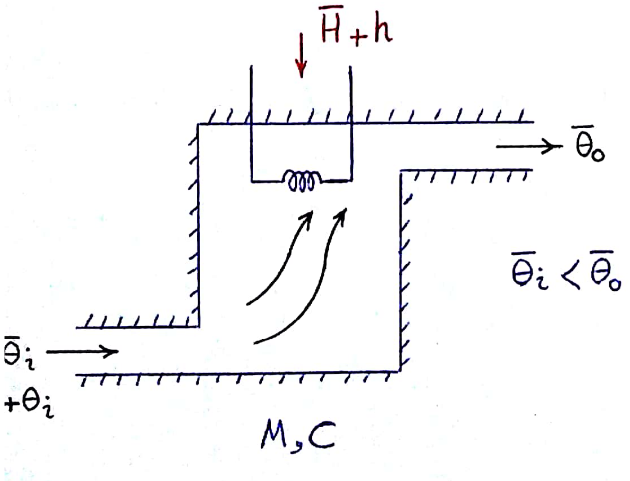
$$\Rightarrow * \ \frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{Ts}{Ts+1} \ ; \ T = \frac{RA^2}{k}$$

درنتیجه سیستم فوق یک سیستم مشتق گیر است.

سیستم های گرمایی:

شکل زیر یک سیستم گرمایی را نشان می دهد. جدارهای سیستم عایق گرمایی بوده و گرما فقط از طریق هیتر به طور یکنواخت به سیال عبوری از حجم کنترل سیستم منتقل می شود.

زمانی که سیستم در حالت پایا قرار دارد، دبی جرمی (نرخ جریان) سیال عبوری از سیستم برابر $\bar{G}$، آهنگ گرمای ورودی به سیستم از طریق هیتر برابر $\bar{H}$ و دمای سیال ورودی به سیستم و خروجی از آن به ترتیب برابر $\bar{\Theta}_i$ و $\bar{\Theta}_o$ می باشند:



$$[M] = kg \ , \ [C] = \frac{kJ}{°C}$$

$$[\bar{H}] = kJ \ , \ [\Theta] = °C$$

انتقال گرما با مکانیزم همرفت: $K = HA$;

سطح در معرض همرفت (m^2)

ضریب انتقال گرما $\left(\frac{kJ}{m^2 s\,^\circ C}\right)$

مقاومت گرمایی: $* \; R = \frac{\Delta\theta}{h} = \frac{1}{K}$

ظرفیت گرمایی: $* \; C = Mc$

θ دما (پتانسیل گرمایی)، M جرم سیال داخل سیستم، c ظرفیت گرمایی ویژه‌ی سیال عبوری از سیستم و در نتیجه C ظرفیت گرمایی سیال داخل سیستم است.

تابع تبدیل سیستم را به صورت زیر می‌توان تعیین نمود:

حالت اول: دمای سیال ورودی به سیستم ثابت مانده و گرمای (آنتالپی) ورودی به سیستم از طریق هیتر به میزان h تغییر کند:

$\bar{\theta}_i = const. \; , \quad \bar{H} \rightarrow \bar{H} + h \qquad ; \quad R = \frac{\theta}{h_0}$

h_0 آنتالپی سیال خروجی از سیستم است.

بالانس انرژی در سیستم:

$$C\frac{d\theta}{dt} = h - h_0 \Rightarrow RC\frac{d\theta}{dt} + \underbrace{\cancel{Rh_0}}_{\theta} = Rh \Rightarrow RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = Rh \xRightarrow{\mathcal{L}}$$

$$* \; \frac{\Theta(s)}{H(s)} = \frac{R}{RCs+1}$$

حالت دوم: گرمای (آنتالپی) ورودی به سیستم از طریق هیتر ثابت مانده و دمای سیال ورودی به سیستم به میزان θ_i تغییر کند:

$\bar{H} = const. \; , \quad \bar{\theta}_i \rightarrow \bar{\theta}_i + \theta_i \qquad ; \quad R = \frac{1}{\bar{G}c}$

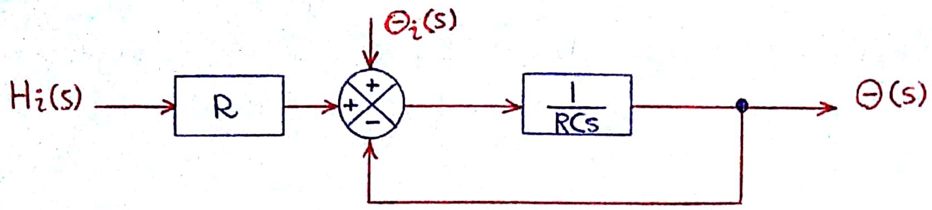
بالانس انرژی در سیستم:

$$C\frac{d\theta}{dt} = h_i - h_0 = \bar{G}c\theta_i - h_0 \Rightarrow RC\frac{d\theta}{dt} + \underbrace{\cancel{Rh_0}}_{\theta} = \underbrace{R\bar{G}c}_{1}\,\theta_i \Rightarrow$$

$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i \xRightarrow{\mathcal{L}} \; * \; \frac{\Theta(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

از برهم‌نهی دو حالت فوق می‌توان نتیجه گرفت که دیاگرام بلوکی این سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$* \; \Theta(s) = \frac{R}{RCs+1}H_i(s) + \frac{1}{RCs+1}\Theta_i(s)$$



پایداری سیستم ها:

معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر یک سیستم مرتبه‌ی n ام LTI در حالت عمومی به فرم زیر می‌باشد:

$$*\; a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y(t) = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u(t) \quad ; \quad n \geq m$$

معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$*\; a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

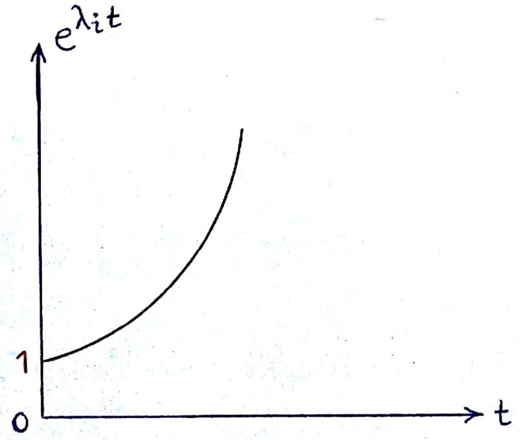
معادله‌ی مشخصه یک سیستم مرتبه‌ی n ام دارای n ریشه خواهد بود. پاسخ حالت گذرای سیستم (جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل) با استفاده از اصل جمع آثار در سیستم‌های LTI، به صورت زیر بدست می‌آید:

$$*\; y_{tr}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}$$

$e^{\lambda_i t}$ مود i ام پاسخ حالت گذرای سیستم است. c_i ضریبی است که از شرایط اولیه‌ی سیستم تعیین می‌شود و میزان تاثیر مود i ام در پاسخ حالت گذرای سیستم را نشان می‌دهد. هر چه c_i بزرگتر باشد تاثیر مود i ام در پاسخ حالت گذرای سیستم بیشتر است.

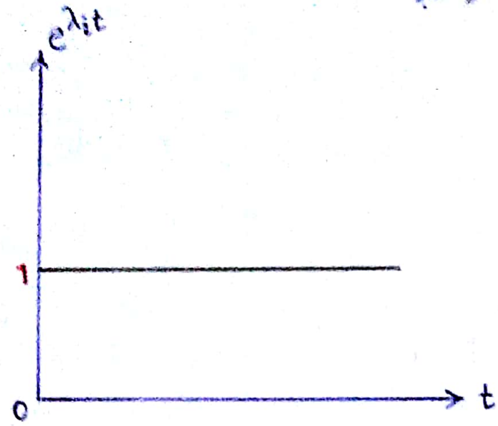
ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم ممکن است حقیقی یا مختلط باشند:

- اگر ریشه‌ی i ام معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم حقیقی بوده و $\lambda_i > 0$ باشد، مود i ام پاسخ سیستم ناپایدار خواهد بود:



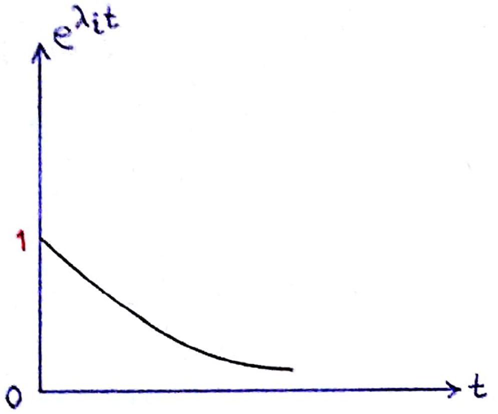
$$\lambda_i > 0 : \quad \lim_{t \to \infty} e^{\lambda_i t} = \infty$$

– اگر ریشه‌ی i ام معادله‌ی مشخصه سیستم برابر صفر باشد، مود i ام پاسخ سیستم پایدار حاشیه‌ای خواهد بود:



$$\lambda_i = 0: \quad \lim_{t\to\infty} e^{\lambda_i t} = 1$$

– اگر ریشه‌ی i ام معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم حقیقی بوده و $\lambda_i < 0$ باشد، مود i ام پاسخ سیستم پایدار خواهد بود:



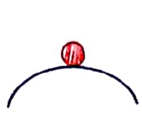
$$\lambda_i < 0: \quad \lim_{t\to\infty} e^{\lambda_i t} = 0$$

هر چه λ_i کوچکتر (منفی‌تر) باشد، مود پاسخ مربوط سریع‌تر به صفر میل می‌کند.

– اگر ریشه‌ی i ام معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم مختلط باشد، در مورد پایداری مود i ام پاسخ سیستم خواهیم داشت:

$$\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i \implies e^{\lambda_i t} = e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = e^{\sigma_i t} e^{i\omega_i t} = \underbrace{e^{\sigma_i t}}_{\text{تابع نمایی}} \underbrace{(\cos\omega_i t + i\sin\omega_i t)}_{\text{تابع هارمونیک (کراندار)}}$$

$\sigma_i > 0: \quad \lim_{t\to\infty} e^{\sigma_i t} = \infty$ ناپایدار



$\sigma_i = 0: \quad e^{\lambda_i t} = \cos\omega_i t + i\sin\omega_i t$ پایدار حاشیه‌ای

$\sigma_i < 0: \quad \lim_{t\to\infty} e^{\sigma_i t} = 0$ پایدار

بخش حقیقی ریشه (σ_i) سرعت مود و بخش موهومی ریشه (ω_i) فرکانس مود مربوط را نشان می‌دهد.

* شرط پایدار بودن رفتار یک سیستم پایداری تمامی مودهای پاسخ آن می‌باشد؛ ناپایداری حداقل یک مود پاسخ، رفتار کل سیستم را ناپایدار می‌کند.

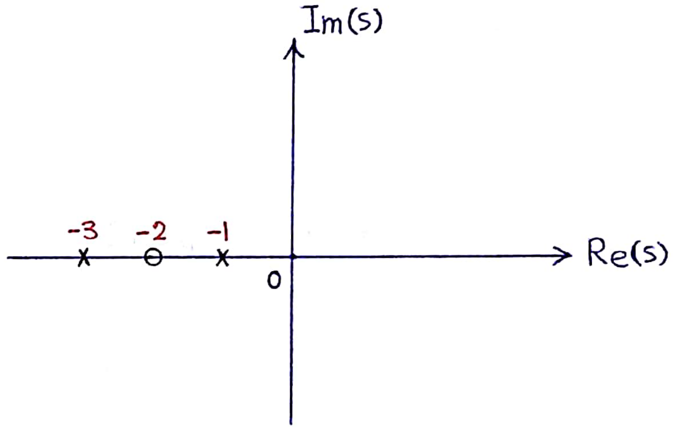
با استفاده از تبدیل لاپلاس تابع تبدیل سیستم فوق را می‌توان بدست آورد:

$$* \; G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad ; \quad n \geq m$$

همان طور که ملاحظه می‌شود، چندجمله‌ای مخرج تابع تبدیل سیستم همان معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم می‌باشد و قطب های تابع تبدیل همان ریشه های معادله‌ی مشخصه اند. $(s_i = \lambda_i)$

صفرها و قطب‌های تابع تبدیل سیستم به ترتیب با علامت‌های O و X روی صفحه‌ی مختلط (s) نمایش داده می‌شوند. برای مثال:

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$



تعاریف پایداری:

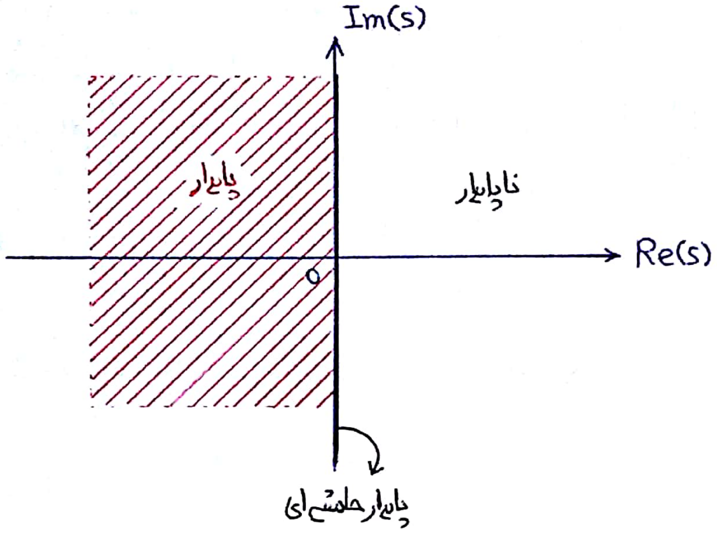
پایداری ورودی صفر: یک سیستم دینامیکی زمانی پایداری ورودی صفر دارد که درصورت اعمال هرگونه شرط اولیه به سیستم (انحراف از نقطه‌ی تعادل)، با گذشت زمان به نقطه‌ی تعادل خود بازگردد.

پایداری BIBO (Bounded Input - Bounded Output): یک سیستم دینامیکی زمانی پایداری ورودی محدود - خروجی محدود (BIBO) دارد که به ازای ورودی کراندار، خروجی سیستم نیز کراندار باشد؛ به عبارت دیگر سطح زیر منحنی پاسخ سیستم به ورودی ضربه‌ی واحد محدود و کراندار باشد:

$$* \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \, dt \leq M$$

در سیستم‌های LTI پایداری از خواص ذاتی سیستم بوده و مستقل از نوع ورودی است. در این سیستم‌ها هر دو تعریف فوق معادل یکدیگرند.

تعریف پایداری سیستم های LTI: یک سیستم LTI پایدار است اگر و تنها اگر تمامی ریشه های معادله‌ی مشخصه‌ی آن دارای بخش حقیقی منفی بوده و در سمت چپ محور موهومی صفحه‌ی مختلط (s) واقع گردند.



معیار پایداری راث (Routh):

معیار پایداری راث روشی برای بررسی پایداری یک سیستم LTI بدون نیاز به حل معادله‌ی مشخصه‌ی آن می‌باشد.

معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم: $$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

- اگر حداقل یکی از ضرایب معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم (a_i) منفی باشد، ریشه واقع در سمت راست محور موهومی خواهیم داشت و سیستم ناپایدار خواهد بود.

- اگر تمامی ضرایب معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم مثبت و مخالف صفر ($a_i>0$) باشند، برای تشخیص پایداری یا ناپایداری سیستم جدولی شامل آرایه‌های راث را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

s^n	a_n	a_{n-2}	$a_{n-4} \dots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	$a_{n-5} \dots$
s^{n-2}	b_1	b_2	$b_3 \dots$
s^{n-3}	c_1	c_2	$c_3 \dots$
$\vdots$	$\vdots$		
s^1			
s^0			

$$* \; b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$* \; b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$* \; c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$* \; c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

* طبق معیار پایداری راث، شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم و عدم وجود قطب در سمت راست محور موهومی صفحه‌ی مختلط (s) در شرایط فوق، هم علامت بودن (مثبت بودن) تمامی آرایه‌های ستون اول جدول راث است.

مثال: شرط پایداری سیستم مرتبه‌ی دوم با معادله‌ی مشخصه‌ی زیر را تعیین کنید.

$$a_2s^2+a_1s+a_0=0 \quad ; \quad a_i>0$$

s^2	a_2	a_0
s^1	a_1	0
s^0	a_0	

$\Longrightarrow$ شرط پایداری: $a_0, a_1, a_2>0$

مثال: شرط پایداری سیستم مرتبه‌ی سوم با معادله‌ی مشخصه‌ی زیر را تعیین کنید.

$$a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0 \quad ; \quad a_i>0$$

s^3	a_3	a_1
s^2	a_2	a_0
s^1	$\dfrac{a_2a_1-a_3a_0}{a_1}$	0
s^0	a_0	

$\Longrightarrow$ شرط پایداری: $a_1a_2>a_0a_3 \; ; \; a_0,a_1,a_2,a_3>0$

* به ازای هر تغییر علامت در ستون اول جدول راث، یک قطب ناپایدار واقع در سمت راست محور موهومی صفحه‌ی مختلط (s) داریم.

مثال: پایداری یک سیستم با معادله‌ی مشخصه‌ی زیر را بررسی کنید.

$$s^4+2s^3+3s^2+4s+5=0$$

s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
s^2	1	5	0
s^1	-6	0	
s^0	5		

سیستم دارای دو قطب ناپایدار در سمت راست محور $Im(s)$ است؛ زیرا دو تغییر علامت در ستون اول جدول راث (از 1 به 6- و از 6- به 5) داریم.

* ایجاد صفر در ستون اول جدول راث باعث به وجود آمدن خطای تقسیم عدد بر صفر در مرحله‌ی بعدی الگوریتم راث خواهد شد. بنابراین در چنین شرایطی برای ادامه دادن الگوریتم، صفر را با مقدار کوچک ε که هم علامت با آرایه ستون اول در مرحله‌ی قبل در نظر گرفته می‌شود، جایگزین می‌کنیم.

* وجود هر صفر در ستون اول جدول راث بدون ایجاد تغییر علامت در قبل و بعد آن، نشان دهنده‌ی وجود یک قطب روی محور $Im(s)$ است.

مثال: پایداری سیستمی با معادله‌ی مشخصه‌ی $s^3+2s^2+s+2=0$ را بررسی کنید.

s^3	1	1
s^2	2	2
s^1	$0 \simeq \varepsilon$	
s^0	2	

سیستم پایدار حاشیه‌ای با یک قطب روی محور $Im(s)$ است.

مثال: پایداری یک سیستم با معادله‌ی مشخصه‌ی $s^3-3s+2=0$ را بررسی کنید.

s^3	1	-3
s^2	$0=\varepsilon$	2
s^1	$\frac{-3\varepsilon-2}{\varepsilon}$	
s^0	2	

سیستم دارای دو قطب ناپایدار (دو تغییر علامت) است. از طرفی به دلیل وجود تغییر علامت در قبل و بعد صفر واقع در ستون اول، قطبی روی محور $Im(s)$ وجود ندارد.

مثال: به‌ازای چه‌مقادیری از k سیستم با معادله‌ی مشخصه‌ی $s^3+5s^2+6s+k=0$ پایدار است؟

s^3	1	6
s^2	5	k
s^1	$\frac{30-k}{5}$	
s^0	k	

$\Rightarrow$ شرط پایداری: $\frac{30-k}{5}>0 \Rightarrow k<30$ $\Rightarrow$

$k>0$

$0<k<30$

* اگر همه‌ی آرایه‌های یک سطر از جدول راث صفر شوند، با استفاده از آرایه‌های سطر بالاتر یک چندجمله‌ای کمکی نوشته و با مشتق‌گیری از آن، آرایه‌های سطر صفرشده را تعیین می‌کنیم.

مثال: پایداری یک سیستم با معادله‌ی مشخصه‌ی $s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0$ را بررسی کنید.

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	$\cancel{0}\nearrow 8$	$\cancel{0}\nearrow 96$	
s^2	24	-50	
s^1	112.7		
s^0	-50		

چندجمله‌ای کمکی را برای سطر سوم (سطر شامل آرایه‌های صفر) می‌نویسیم:

$$P(s)=2s^4+48s^2-50$$

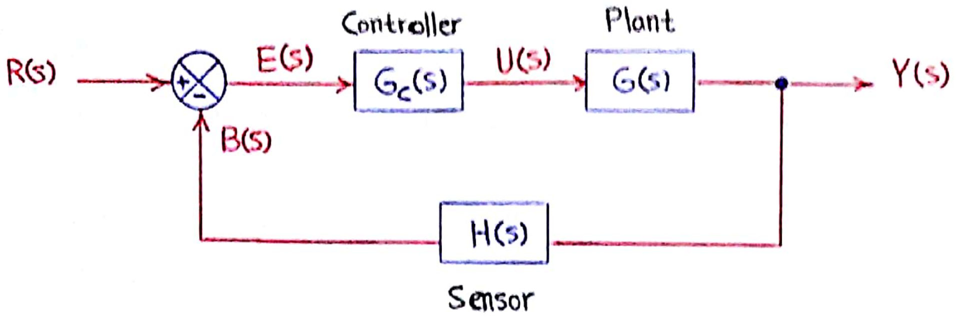
آرایه‌های سطر سوم از مشتق چندجمله‌ای کمکی بدست می‌آیند:

$$\frac{dP(s)}{ds}=8s^3+96s \Rightarrow 8,96$$

به دلیل وجود یک تغییر علامت در ستون اول جدول، یک قطب ناپایدار واقع در سمت راست محور $Im(s)$ داریم.

* چندجمله‌ای کمکی همواره یک چندجمله‌ای زوج خواهد بود. ریشه‌های چندجمله‌ای کمکی دو به دو نسبت به مبدأ صفحه‌ی مختلط (s) قرینه بوده و همان ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم می‌باشند.

انواع کنترل کننده ها:



- کنترل کننده‌ی تناسبی (نوع P) (Proportional):

$$* \; u(t) = K_p e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} * \; G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

- کنترل کننده‌ی تناسبی - مشتقی (نوع PD) (Proportional-Derivative):

$$* \; u(t) = K_p e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} * \; G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_D s$$

- کنترل کننده‌ی تناسبی - انتگرالی (نوع PI) (Proportional-Integral):

$$* \; u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} * \; G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_I}{s}$$

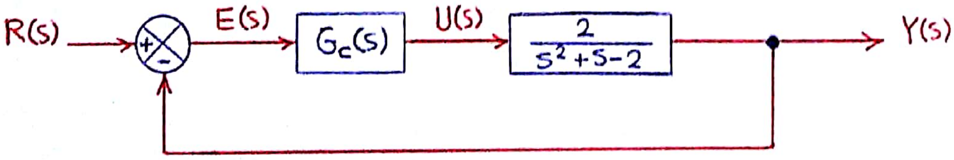
- کنترل کننده‌ی تناسبی - انتگرالی - مشتقی (نوع PID):

$$* \; u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} * \; G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

* وجود عملگر انتگرالی در کنترل کننده باعث افزایش دقت سیستم و در مقابل کاهش پایداری و سرعت سیستم می‌شود.

* وجود عملگر مشتق در کنترل کننده باعث افزایش دقت، پایداری و سرعت سیستم می‌شود اما در مقابل نویزهای موجود در سیستم را تقویت می‌کند.

مثال: سیستم کنترل زیر را در نظر بگیرید. اگر کنترل کننده از نوع P، PI، PD و PID باشد، در هر مورد محدوده‌ی ضرایب K_p، K_I و K_D را برای پایداربودن سیستم تعیین کنید.



$$* \; G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

$$G(s)=\frac{G_c(s)\frac{2}{s^2+s-2}}{1+G_c(s)\frac{2}{s^2+s-2}}$$

کنترل کننده ی P: $G_c(s)=K_p \Rightarrow G(s)=\dfrac{2K_p}{s^2+s+(2K_p-2)} \Rightarrow s^2+s+(2K_p-2)=0$:معادله ی مشخصه

از شرط پایداری سیستم مرتبه ی دوم داریم:

$$2K_p-2>0 \Rightarrow \underline{K_p>1}$$

کنترل کننده ی PI: $G_c(s)=K_p+\dfrac{K_I}{s} \Rightarrow G(s)=\dfrac{2(K_p s+K_I)}{s^3+s^2+(2K_p-2)s+2K_I} \Rightarrow$

$s^3+s^2+(2K_p-2)s+2K_I=0$:معادله ی مشخصه

از شرط پایداری سیستم مرتبه ی سوم داریم:

$$2K_p-2>0 \Rightarrow \underline{K_p>1}$$

$$(2K_p-2)(1)>(2K_I)(1) \Rightarrow K_p-1>K_I \Rightarrow K_p>K_I+1 \Rightarrow K_I+1\geqslant 1 \Rightarrow \underline{K_I\geqslant 0}$$

کنترل کننده ی PD: $G_c(s)=K_p+K_D s \Rightarrow G(s)=\dfrac{2(K_p+K_D s)}{s^2+(2K_D+1)s+(2K_p-2)} \Rightarrow$

$s^2+(2K_D+1)s+(2K_p-2)=0$:معادله ی مشخصه

شرط پایداری: $2K_p-2>0 \Rightarrow \underline{K_p>1}$ $\qquad 2K_D+1>0 \Rightarrow \underline{K_D>\frac{-1}{2}}$

کنترل کننده ی PID: $G_c(s)=K_p+\dfrac{K_I}{s}+K_D s \Rightarrow G(s)=\dfrac{2(K_D s^2+K_p s+K_I)}{s^3+(2K_D+1)s^2+(2K_p-2)s+2K_I} \Rightarrow$

$s^3+(2K_D+1)s^2+(2K_p-2)s+2K_I=0$:معادله ی مشخصه

شرط پایداری:

$$2K_p-2>0 \Rightarrow \underline{K_p>1}$$

$$2K_D+1>0 \Rightarrow \underline{K_D>\frac{-1}{2}}$$

$$2K_I\geqslant 0 \Rightarrow \underline{K_I\geqslant 0}$$

تحلیل پاسخ حالت گذرا و حالت پایای سیستم‌ها:

پاسخ کلی یک سیستم برابر مجموع پاسخ حالت گذرا [$y_{tr}(t)$] و پاسخ حالت پایا [$y_{ss}(t)$] سیستم است:

$$* \quad y(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t) \quad *$$

پاسخ حالت گذرا متأثر از ویژگی‌های ذاتی سیستم و پاسخ حالت پایا متأثر از ورودی سیستم است.

پاسخ حالت گذرا در سیستم‌های پایدار با گذشت زمان حذف می‌شود و در سیستم‌های ناپایدار با گذشت زمان به صورت بی‌کران افزایش می‌یابد:

سیستم‌های ناپایدار: $y_{tr}(\infty) = \lim_{t\to\infty} y_{tr}(t) = \infty$

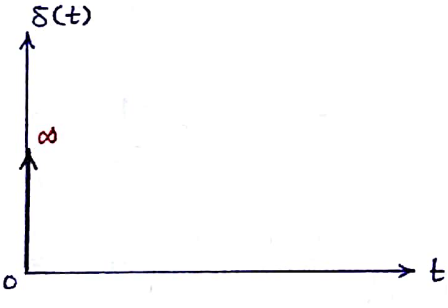
سیستم‌های پایدار: $y_{tr}(\infty) = \lim_{t\to\infty} y_{tr}(t) = 0$

پاسخ حالت پایا در سیستم‌های پایدار بخشی از پاسخ سیستم است که پس از حذف پاسخ حالت گذرا باقی می‌ماند و در سیستم‌های ناپایدار با توجه به این که سیستم هرگز حالت پایا قرار نمی‌گیرد، قابل تعریف نیست:

سیستم‌های پایدار: $y(\infty) = \lim_{t\to\infty} \left[y_{tr}(t) + y_{ss}(t) \right] = y_{ss}(t)$

در عمل ورودی سیستم‌ها ممکن است ماهیت پیچیده‌ای داشته باشد، بنابراین در تحلیل سیستم‌ها از ورودی‌های شناخته‌شده‌ای استفاده می‌شود که ورودی‌های آزمون نامیده می‌شوند. این ورودی‌ها عبارت‌اند از:

1. ورودی ضربه‌ی واحد:

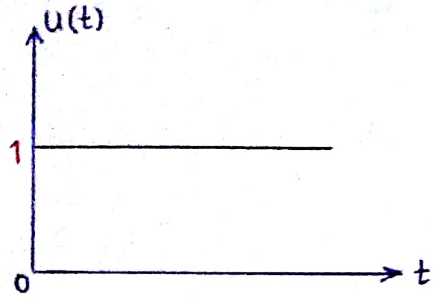


$$* \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

$$* \quad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

پاسخ سیستم به ورودی ضربه‌ی واحد را می‌توان به عنوان یک مدل از سیستم در نظر گرفت.

2. ورودی پله‌ی واحد:

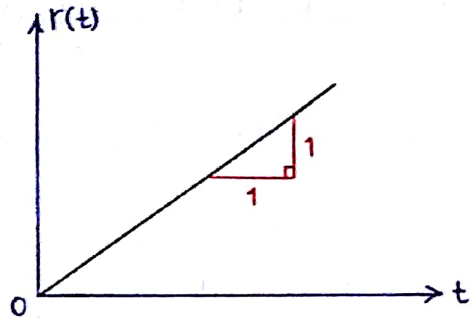


$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

ورودی پله‌ی واحد برای بررسی و مطالعه‌ی رفتار سیستم‌ها در برابر تغییر ناگهانی در ورودی آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

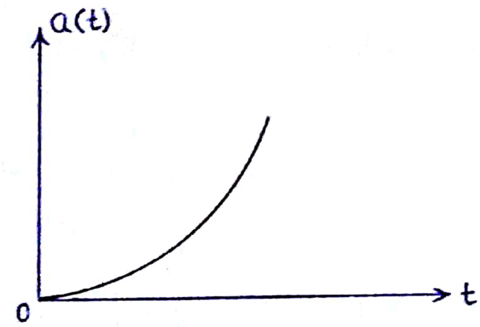
3. ورودی شیب واحد:



$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[r(t)] = \frac{1}{s^2}$$

4. ورودی شتاب واحد (پارابولیک):



$$a(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[a(t)] = \frac{1}{s^3}$$

ورودی‌های شیب واحد و شتاب واحد برای بررسی عملکرد سیستم‌های کنترل پیرو مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تقسیم‌بندی سیستم‌های LTI:

- سیستم‌های مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی دوم: این سیستم‌ها را می‌توان با روش‌های تحلیلی ارزیابی و طراحی کرد.

- سیستم‌های مراتب بالاتر از 2: این سیستم‌ها را نمی‌توان با روش‌های تحلیلی ارزیابی و طراحی کرد و در مطالعه‌ی این سیستم‌ها از روش‌های عددی استفاده می‌شود.

سیستم‌های مراتب بالاتر از 2 در برخی شرایط خاص با روش های تحلیلی قابل بررسی می‌باشند، همچنین برخی از این سیستم‌ها را می‌توان با سیستم‌های مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی دوم به طور تقریبی مدلسازی کرده و ارزیابی و طراحی نمود.

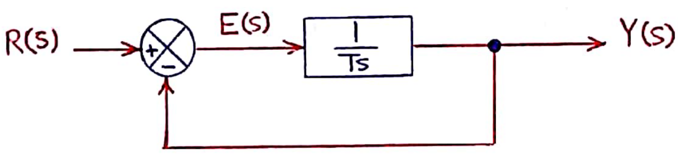
سیستم‌های مرتبه‌ی اول:

$$a_1\frac{dy}{dt}+a_0y(t)=b_0u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0}{a_1s+a_0}=\frac{b_0/a_0}{\frac{a_1}{a_0}s+1} \Longrightarrow$$

$$* \quad G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K}{Ts+1}$$

K را بهره‌ی سیستم و T را ثابت زمانی سیستم می‌نامیم.

سیستم‌های مرتبه‌ی اول در فرم استاندارد و حلقه‌بسته‌ی خود به صورت زیر می‌باشند:



$$* \quad G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

سیستم‌های مرتبه‌ی اول دارای یک قطب (ریشه‌ی مشخصه) به صورت $s=\frac{-1}{T}$ و یک مود پاسخ به صورت $e^{\frac{-t}{T}}$ می‌باشند.

تنها شاخصی که رفتار یک سیستم مرتبه‌ی اول را توصیف می‌کند، ثابت زمانی سیستم (T) است. هرچه T بزرگتر باشد، فاصله‌ی قطب سیستم از مبدأ صفحه‌ی مختلط (s) بیشتر بوده و سیستم رفتار سریع‌تری خواهد داشت.

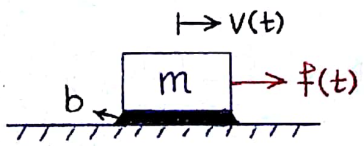
شرط پایداری سیستم‌های مرتبه‌ی اول به صورت زیر است:

$T>0 \Longrightarrow Re(s)<0$ سیستم پایدار

$T=0 \Longrightarrow Re(s)=0$ سیستم پایدار حاشیه‌ای

$T<0 \Longrightarrow Re(s)>0$ سیستم ناپایدار

مثال: بهره و ثابت زمانی سیستم مرتبه‌ی اول زیر را تعیین کنید.

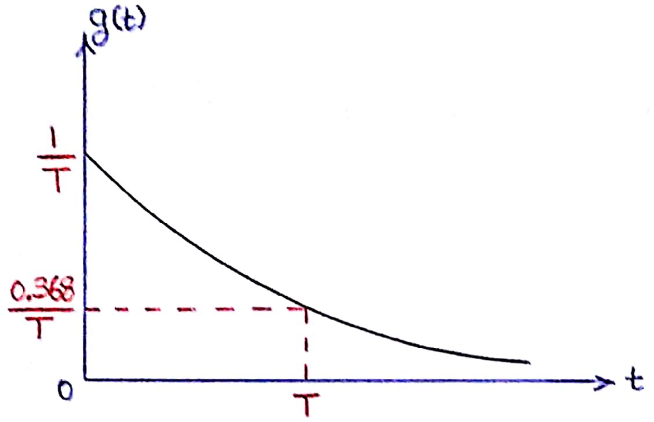


$$m\dot{v}+bv=f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s)=\frac{V(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms+b} \Longrightarrow$$

$$G(s)=\frac{1/b}{\frac{m}{b}s+1} \Rightarrow K=\frac{1}{b}\ ,\ T=\frac{m}{b}$$

پاسخ سیستم های مرتبه ی اول به ورودی ضربه ی واحد:

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{Ts+1}\right]=\frac{1}{T}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right] \Rightarrow * g(t)=\frac{1}{T}e^{\frac{-t}{T}}\ ;\ t\geq 0$$

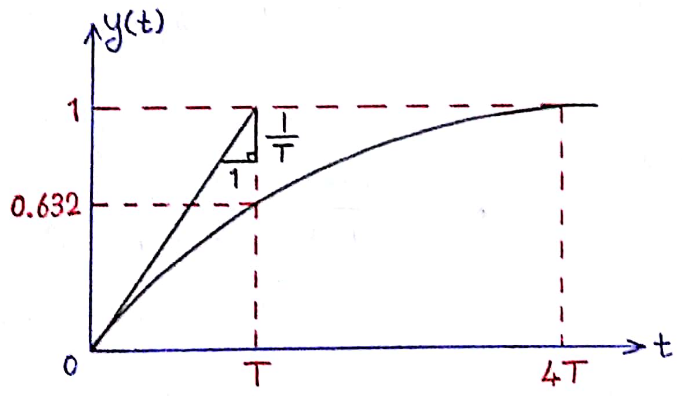


پاسخ سیستم های مرتبه ی اول به ورودی پله ی واحد:

$$R(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow Y(s)=G(s)R(s) \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{Ts+1}=\frac{1}{s}-\frac{T}{Ts+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$* y(t)=1-e^{\frac{-t}{T}}\ ;\ t\geq 0$$

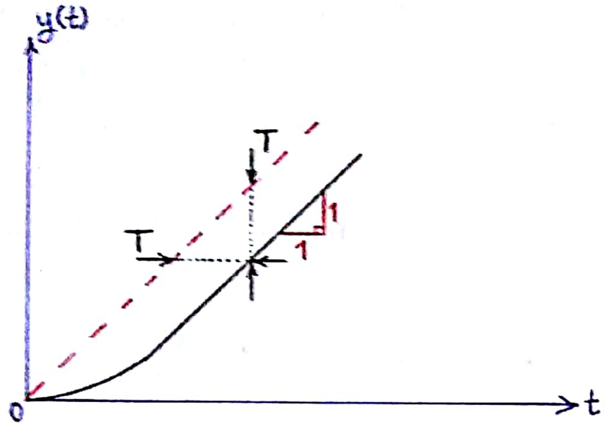
پاسخ حالت پایا   پاسخ حالت گذرا



پاسخ سیستم های مرتبه ی اول به ورودی شیب واحد:

$$R(s)=\frac{1}{s^2} \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{Ts+1}=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T^2}{Ts+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} * y(t)=t-T+Te^{\frac{-t}{T}}\ ;\ t\geq 0$$

خطای حالت پایا: $e(\infty)=r(\infty)-y(\infty)=t-[t-T+Te^{-\infty}] \Rightarrow * e(\infty)=T$



سیستم LTI:

$r(t)$	$r(t)$	$\xrightarrow{\frac{d}{dt}}$	$u(t)$	$\xrightarrow{\frac{d}{dt}}$	$\delta(t)$
$y(t)$	$\int_0^t\left(\int_0^t g(\tau)d\tau\right)d\tau$		$\int_0^t g(\tau)d\tau$		$g(t)$

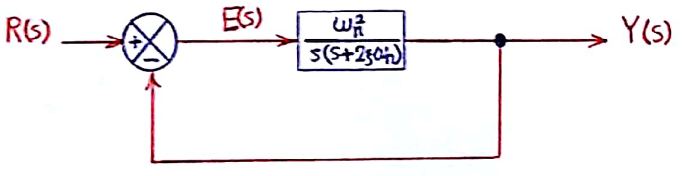
سیستم‌های مرتبه‌ی دوم:

$$a_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y(t)=b_0u(t)\overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}=\frac{b_0/a_2}{s^2+\frac{a_1}{a_2}s+\frac{a_0}{a_2}}\Rightarrow$$

$$*\ G(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

K را بهره‌ی سیستم، ω_n را فرکانس طبیعی نوسان سیستم و ξ را نسبت میرایی می‌نامیم.

سیستم‌های مرتبه‌ی دوم در فرم استاندارد و حلقه بسته‌ی خود به صورت زیر می‌باشند:



$$*\ G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

سیستم‌های مرتبه‌ی دوم دارای دو قطب (ریشه‌ی مشخصه) به صورت زیر می‌باشند:

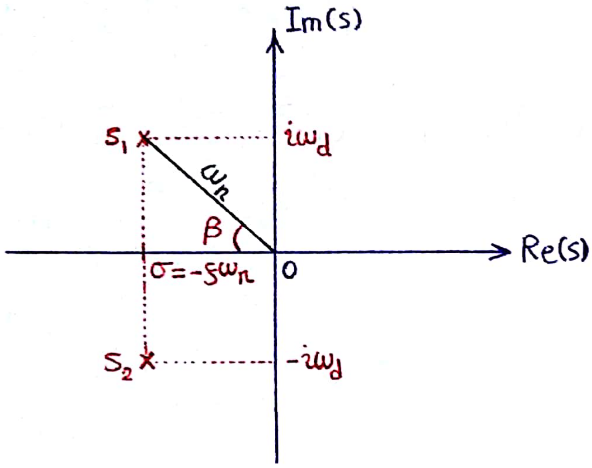
$$*\ s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=-\xi\omega_n\pm i\omega_d\quad ;\quad \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

ω_d فرکانس نوسان میرای سیستم است.

برحسب نوع ریشه‌های مشخصه، سیستم‌های مرتبه‌ی دوم را به 3 دسته می‌توان تقسیم کرد:

۱. سیستم های زیرمیرا (Underdamped): $0 \leqslant \xi < 1$

زمانی که سیستم دارای دو ریشه‌ی مشخصه‌ی مختلط و مزدوج باشد، زیرمیرا است. پاسخ حالت گذرای سیستم در این شرایط نوسانی و هارمونیک می‌باشد. سیستم های زیرمیرا بیشترین سرعت پاسخ دهی را در بین سیستم های مرتبه‌ی دوم دارند.



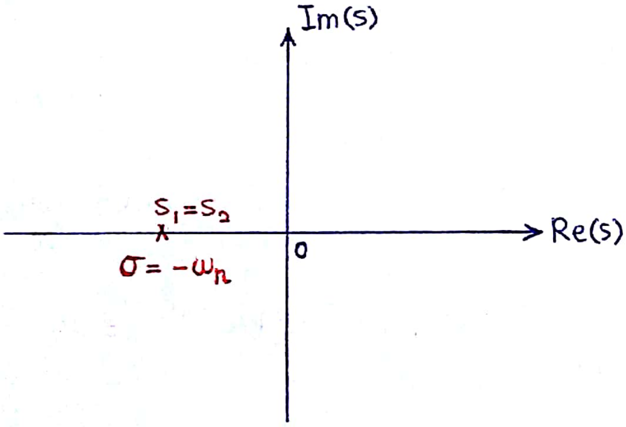
$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_d$$

$$* \ \beta = \cos^{-1}\xi$$

قسمت حقیقی ریشه رفتار میرایی سیستم و قسمت موهومی ریشه رفتار نوسانی سیستم را توصیف می‌کند. سرعت پاسخ دهی سیستم های زیرمیرا توسط عبارت $\xi\omega_n$ تعیین می‌شود.

۲. سیستم با میرایی بحرانی (Critically Damped): $\xi = 1$

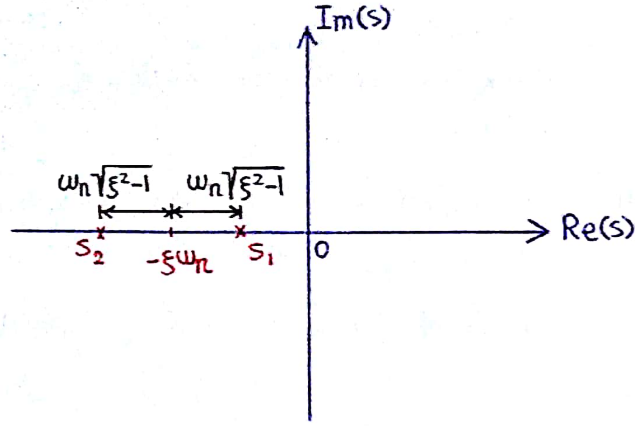
زمانی که سیستم دارای دو ریشه‌ی مشخصه‌ی حقیقی و تکراری باشد، میرایی بحرانی خواهد داشت. پاسخ حالت گذرای سیستم در این شرایط نمایی (غیرنوسانی) خواهد بود. سرعت پاسخ دهی این سیستم ها از سیستم های زیرمیرا کمتر است و توسط عبارت ω_n تعیین می‌شود.



$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

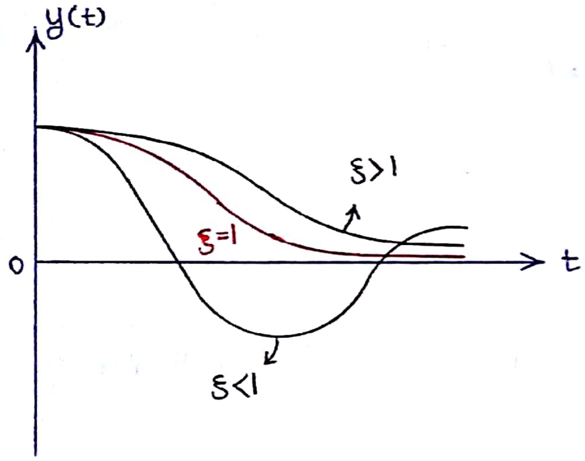
۳. سیستم های فوق میرا (Overdamped): $\xi > 1$

زمانی که سیستم دارای دو ریشه‌ی مشخصه‌ی حقیقی و متمایز باشد، فوق میرا است. پاسخ حالت گذرای سیستم در این شرایط نمایی (غیرنوسانی) می‌باشد. سیستم های فوق میرا کمترین سرعت پاسخ دهی را در بین سیستم های مرتبه‌ی دوم دارند.



$$s_{1,2}=-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

این سیستم ها دارای یک مود سریع ($e^{s_2 t}$) و یک مود کند ($e^{s_1 t}$) است.



پاسخ سیستم های مرتبه ی دوم به ورودی ضربه ی واحد:

- سیستم های زیرمیرا:

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+(\xi\omega_n)^2+\omega_n^2-(\xi\omega_n)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}\cdot\frac{\omega_d}{\omega_d}\right]=$$

$$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}\right] \Rightarrow * g(t)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t \quad ; t\geqslant 0$$

- سیستم بامیرایی بحرانی:

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2+2\omega_n s+\omega_n^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}\right] \Rightarrow * g(t)=\omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \; ; \; t\geqslant 0$$

- سیستم های فوق میرا:

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n/2\sqrt{\xi^2-1}}{s-s_1}-\frac{\omega_n/2\sqrt{\xi^2-1}}{s-s_2}\right] \Rightarrow$$

$$* g(t)=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}e^{s_1 t}-\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}e^{s_2 t} \; ; t\geqslant 0$$

$$s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1} \quad , \quad s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

* حالت خاصی از سیستم‌های زیرمیرا، سیستم های نامیرا (Undamped) می‌باشند که پاسخ آن‌ها به ورودی ضربه‌ی واحد به صورت زیر خواهد بود:

$$\xi = 0 \Rightarrow \omega_d = \omega_n \Rightarrow * g(t) = \omega_n \sin\omega_n t \ ; \ t \geqslant 0$$

پاسخ سیستم‌های مرتبه‌ی دوم به ورودی پله‌ی واحد:

– سیستم های زیرمیرا:

$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = G(s)R(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s+2\xi\omega_n}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} =$$

$$\frac{1}{s} - \frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}\cdot\frac{\omega_d}{\omega_d} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$* y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left[\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t\right] \ ; \ t \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$* y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t + \beta) \ ; \ \beta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

سیستم‌های نامیرا: $\xi = 0 \Rightarrow \omega_d = \omega_n \Rightarrow * y(t) = 1 - \cos\omega_n t$

پاسخ حالت دائم

پاسخ حالت گذرا

– سیستم با میرایی بحرانی:

$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = G(s)R(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} * y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t) \ ; \ t \geqslant 0$$

– سیستم‌های فوق میرا:

$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = G(s)R(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$* y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right); \ t \geqslant 0$$

$$s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1} \quad , \quad s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

ویژگی های پاسخ حالت گذرای سیستم ها:

برای مقایسه ی عملکرد سیستم ها از ویژگی های پاسخ آن ها به ورودی پله ی واحد با در نظر گرفتن شرایط اولیه ی صفر استفاده ی شود. این ویژگی ها عبارت اند از:

زمان خیز (Rise Time): مدت زمانی است که طول می کشد تا پاسخ سیستم زیرمیرا برای اولین بار از صفر به مقدار نهایی خود برسد. در سیستم های دیگر، زمان خیز

مدت زمانی است که طول می کشد تا پاسخ سیستم از 10% مقدار نهایی به 90% مقدار نهایی خود برسد. t_r

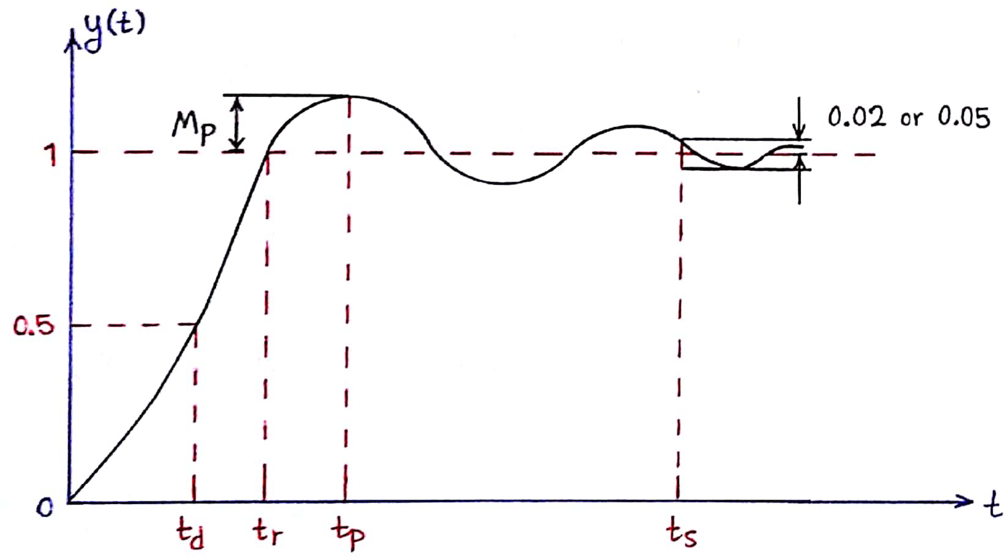
زمان تاخیر (Delay Time): مدت زمانی است که طول می کشد تا پاسخ سیستم از صفر به 50% مقدار نهایی خود برسد. t_d

زمان اوج (Peak Time): مدت زمانی است که طول می کشد تا پاسخ سیستم از صفر به بیشترین مقدار خود ناشی از افزایش دامنه (فراجهش) برسد. t_p

حداکثر فراجهش (Max. Overshoot): اختلاف مقدار پاسخ سیستم در لحظه ی t_p و مقدار نهایی پاسخ آن، حداکثر فراجهش نامیده می شود و به صورت درصد بیان می گردد:

$$* \%M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100$$

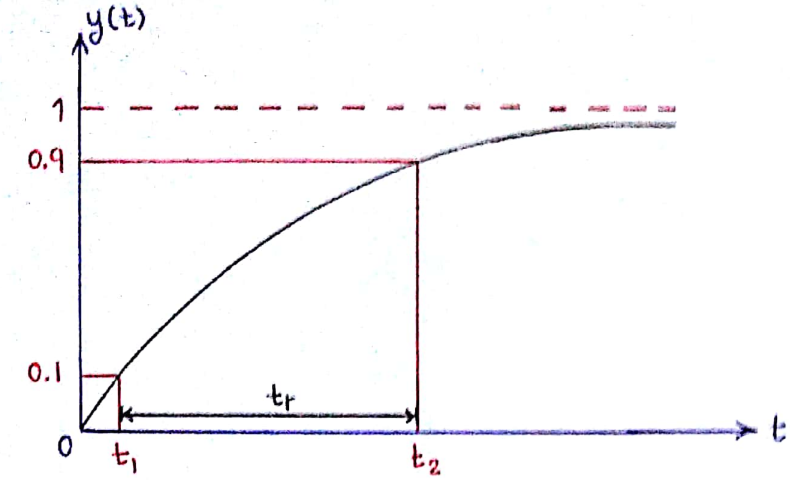
زمان نشست (Settling Time): مدت زمانی است که طول می کشد تا پاسخ سیستم برای اولین بار وارد محدوده ی 2% یا 5% مقدار نهایی خود شود. t_s



ویژگی های پاسخ حالت گذرای سیستم های مرتبه ی اول:

در سیستم های مرتبه ی اول زمان خیز و زمان نشست به صورت زیر خواهد بود:

P.28



$y(t_1) = 1 - e^{-t_1/T} = 0.1$

$y(t_2) = 1 - e^{-t_2/T} = 0.9$

$t_r = t_2 - t_1 \Rightarrow$

$* \; t_r = (\ln 9)T \simeq 2.2T$

$y(3T) = 0.95\, y(\infty) \Rightarrow \quad * \; t_s(5\%) = 3T$

$y(4T) = 0.98\, y(\infty) \Rightarrow \quad * \; t_s(2\%) = 4T$

ویژگی های پاسخ حالت گذرای سیستم های مرتبه‌ی دوم زیرمیرا:

$$y(t_r)=1 \Rightarrow 1-e^{-\xi\omega_n t_r}\left(\cos\omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t_r\right)=1 \Rightarrow \cos\omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t_r = 0 \Rightarrow$$

$$\tan\omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \frac{\omega_d}{-\xi\omega_n} \Rightarrow \omega_d t_r = \tan^{-1}\frac{\omega_d}{-\xi\omega_n} \Rightarrow * \; t_r = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\frac{\omega_d}{-\xi\omega_n} = \frac{\pi-\beta}{\omega_d}$$

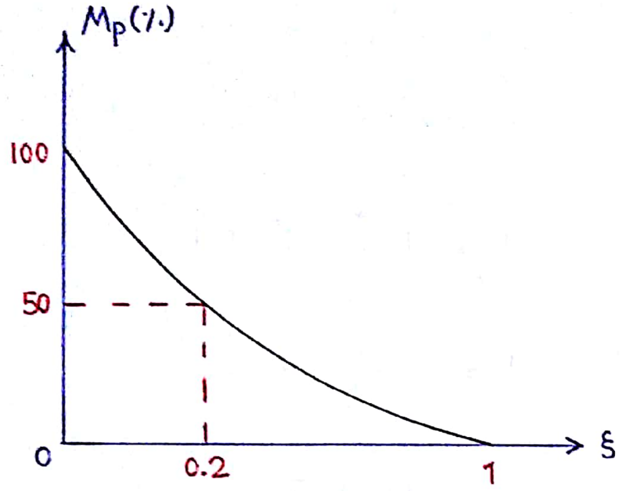
$$\dot{y}(t_p)=0 \Rightarrow \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t_p}\sin\omega_d t_p = 0 \Rightarrow \sin\omega_d t_p = 0 \Rightarrow \omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, \ldots \Rightarrow$$

$$* \; t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

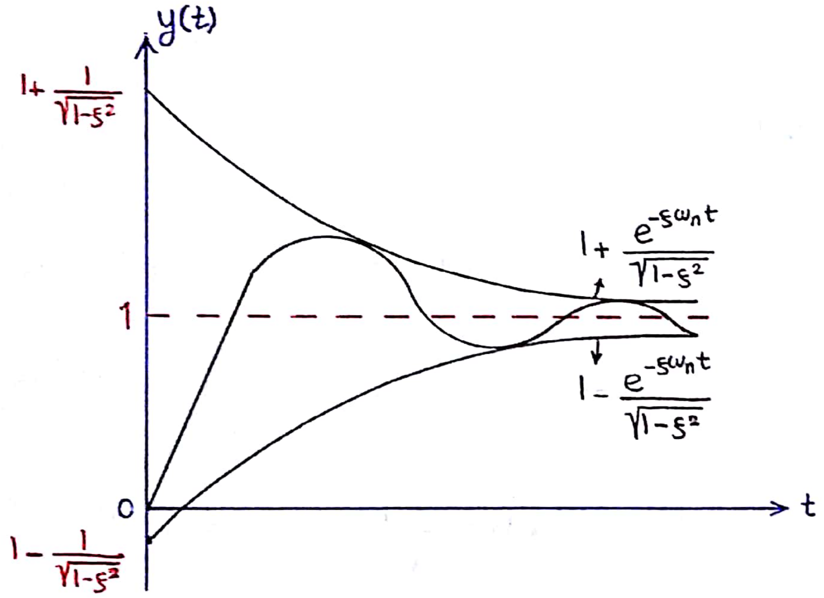
$$M_p = \frac{y(t_p)-1}{1} = y(t_p)-1 = -e^{-\xi\omega_n\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right)}\left(\cos\pi + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\pi\right) = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow$$

$$* \; \%M_p = 100\, e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi}$$

فراجهش فقط در سیستم های زیرمیرا رخ می‌دهد که علت آن وجود اینرسی در سیستم است. مقدار حداکثر فراجهش فقط به نسبت میرایی (ξ) وابسته بوده و با افزایش میرایی سیستم، کاهش می‌یابد.



زمان نشست را می‌توان با استفاده از تقریب زیر با دقت قابل قبولی بدست آورد:



منحنی پوش بر پاسخ سیستم را می‌توان به صورت پاسخ یک سیستم مرتبه‌ی اول در نظر گرفت. در این صورت ثابت زمانی این سیستم فرضی به صورت زیر خواهد بود:

$$T=\frac{1}{\xi\omega_n}$$

زمانی که منحنی پوش در داخل محدوده‌ی زمان نشست قرار گیرد، پاسخ سیستم نیز حتماً در این محدوده قرار خواهد گرفت. بنابراین خواهیم داشت:

$$* \; t_s(5\%)=3T=\frac{3}{\xi\omega_n}$$

$$* \; t_s(2\%)=4T=\frac{4}{\xi\omega_n}$$

زمان نشست فقط به قسمت حقیقی ریشه های مشخصه‌ی سیستم وابسته است و با دور شدن ریشه‌ها از مبدأ، کوچکتر می‌شود.

مثال، ویژگی های پاسخ حالت گذرای سیستم زیر را تعیین کنید.

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s+1} \Rightarrow s^2+s+1=0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{s^2+s+1} \sim \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \Rightarrow \omega_n = 1 \text{ rad/s}, \quad \xi = 0.5, \quad \omega_d = (1)\sqrt{1-(0.5)^2} = 0.87 \text{ rad/s}$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\xi\omega_n} = \tan^{-1}\frac{0.87}{0.5} = 1.05$$

$$t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} = \frac{\pi-1.05}{0.87} = 2.4 \text{ s}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{0.87} = 3.61 \text{ s}$$

$$M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \exp\left(\frac{-0.5\pi}{\sqrt{1-(0.5^2)}}\right) = 0.163 = 16.3\%$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0.5} = 8 \text{ s}$$

مثال: سیستم مرتبه ی دوی را طراحی کنید که در آن زمان نشست با معیار ۲٪ برابر 1s و ماکزیمم فراجهش برابر ۱۰٪ باشد.

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 1 \Rightarrow \xi\omega_n = 4$$

$$M_p = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = 0.1 \Rightarrow \xi = 0.59 \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{0.59} = 6.78 \text{ rad/s}$$

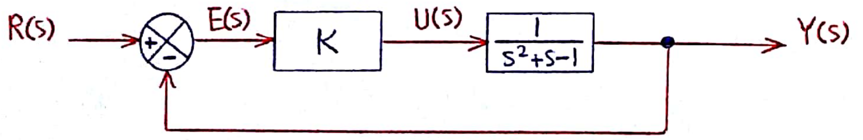
ریشه های مشخصه:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow s_{1,2} = -4 \pm (6.78)[1-(0.59)^2]^{1/2} i = -4 \pm 5.47i$$

تابع تبدیل:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \Rightarrow G(s) = \frac{(6.78)^2}{s^2+2(4)s+(6.78)^2} = \frac{45.97}{s^2+8s+45.97}$$

مثال: در سیستم زیر بهره (K) در چه محدوده ای باشد تا $M_p < 2\%$ شود؟



$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2+s+(K-1)} = \frac{K}{K-1} \cdot \frac{K-1}{s^2+s+(K-1)} \Rightarrow \xi\omega_n = 0.5, \quad \omega_n^2 = K-1 \Rightarrow$$

$$\xi = \frac{0.5}{\omega_n} = \frac{0.5}{\sqrt{K-1}}$$

$$M_p < 2\% \Rightarrow M_p < 0.02 \Rightarrow \xi > 0.78 \Rightarrow \frac{0.5}{\sqrt{K-1}} > 0.78 \Rightarrow K < 1.411$$

تابع تحلیلی: تابع مختلط $F(s)$ را در ناحیه‌ای از صفحه‌ی مختلط (s) تحلیلی گویند هرگاه به ازای تمامی نقاط آن ناحیه مشتق‌پذیر بوده و در شرط کوشی - ریمان صدق کند:

$$F(s) = u + iv \quad ; \quad s = \sigma + i\omega$$

شرط کوشی - ریمان:

$$* \; \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \omega} \,,\; \frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{\partial u}{\partial \omega}$$

قضیه‌ی مقدار اولیه (Initial Value Theorem): اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، داریم:

$$* \; f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

قضیه‌ی مقدار نهایی (Final Value Theorem): اگر تابع $f(t)$ و $\frac{df(t)}{dt}$ تبدیل لاپلاس داشته باشند و تابع مختلط $sF(s)$ در سمت راست محور موهومی صفحه‌ی مختلط (s) تحلیلی باشد، داریم:

$$* \; f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

قضیه‌ی مقدار نهایی را به صورت زیر می‌توان اثبات نمود:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0) \Rightarrow \lim_{s\to 0} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s\to 0} [sF(s) - f(0)] \Rightarrow$$

$$f(t)\Big|_0^\infty = sF(s)\Big|_{s\to 0} - f(0) \Rightarrow f(t)\Big|_{t\to\infty} - f(0) = sF(s)\Big|_{s\to 0} - f(0) \Rightarrow$$

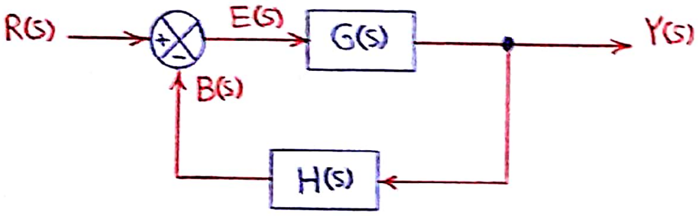
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$f(\infty)$ زمانی بامعنی است که تمامی قطب‌ها (نقاط تکین) تابع مختلط $F(s)$ در سمت چپ محور موهومی صفحه‌ی مختلط (s) واقع شود؛ به استثنای تابع پله که در آن یک قطب در $s=0$ داریم و $u(\infty)=1$ بامعنی است.

خطای حالت پایای سیستم ها:

یکی از اهداف سیستم های کنترل نزدیک کردن خروجی (پاسخ حالت پایا) سیستم به خروجی مطلوب است، از این رو خطای بین خروجی سیستم و خروجی مطلوب یکی از مهم‌ترین معیارها در طراحی و ارزیابی سیستم های کنترل می‌باشد.

هر سیستم کنترل به طور ذاتی به ازای برخی ورودی های خاص، خطای حالت پایا در خروجی خود ایجاد می‌کند. سیستم های کنترل را می‌توان بر اساس توانایی آن‌ها در دنبال نمودن ورودی های پله، شیب، سهموی و... دسته بندی کرد.



خطای واقعی (True Error): اختلاف بین سیگنال ورودی و سیگنال خروجی سیستم کنترلی را خطای واقعی می‌نامیم:

* $E(s) = R(s) - Y(s)$

خطای راه اندازی (Actuating Error): سیگنال خطای ورودی به سیستم $G(s)$ را خطای راه اندازی می‌نامیم:

* $E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)Y(s)$

به ازای فیدبک واحد $H(s)=1$ خطای واقعی با خطای راه اندازی برابر است.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \Rightarrow E(s) = R(s) - H(s)Y(s) = \left[1 - \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}\right]R(s) \Rightarrow$$

* $$E(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)} R(s)$$

خطای سیستم $[E(s)]$ به نوع ورودی $[R(s)]$ و تابع تبدیل حلقه باز سیستم $[G(s)H(s)]$ وابسته است.

تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل با فیدبک منفی در حالت کلی به صورت زیر است:

* $$G(s)H(s) = \frac{K(T'_1 s+1)(T'_2 s+1)\dots(T'_m s+1)}{s^N (T_{N+1} s+1)\dots(T_n s+1)} \; ; \; n \geq m$$

n مرتبه‌ی سیستم و K بهره‌ی سیستم است. عبارت s^N در مخرج تابع تبدیل حلقه باز سیستم N قطب واقع در مبدأ صفحه‌ی مختلط (s) و به عبارت دیگر N عملگر انتگرالی را نشان می‌دهد و مبنای دسته‌بندی سیستم‌ها می‌باشد.

$N=0$: سیستم نوع 0 ، $N=1$: سیستم نوع 1 ، $N=2$: سیستم نوع 2 ، ...

با افزایش N دقت سیستم افزایش یافته و پایداری و سرعت سیستم کاهش می‌یابد.

نوع سیستم (N) نشان می‌دهد که سیستم در حالت پایا سیگنال ورودی با چه مرتبه‌ای را می‌تواند با خطای صفر ردگیری (Track) و دنبال کند.

ورودی	$R(s)$	مرتبه‌ی ورودی
ضربه	1	0
پله	$\frac{1}{s}$	1
شیب	$\frac{1}{s^2}$	2
سهموی	$\frac{1}{s^3}$	3

- مقدار (مکان) ورودی پله‌ی واحد با زمان ثابت می‌ماند. $r(t)=1\,;\ t\geqslant 0 \Rightarrow R(s)=\frac{1}{s}$
- سرعت ورودی شیب واحد با زمان ثابت می‌ماند. $r(t)=t\,;\ t\geqslant 0 \Rightarrow R(s)=\frac{1}{s^2}$
- شتاب ورودی سهموی واحد با زمان ثابت می‌ماند. $r(t)=\frac{t^2}{2}\,;\ t\geqslant 0 \Rightarrow R(s)=\frac{1}{s^3}$

خطای حالت پایای سیستم با استفاده از قضیه‌ی مقدار نهایی به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$* \; e(\infty)=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$$

خطای حالت پایای سیستم به ازای ورودی پله‌ی واحد:

$$R(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow e(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{s\left(\frac{1}{s}\right)}{1+G(s)H(s)}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)H(s)} \Rightarrow * \; e(\infty)=\frac{1}{1+K_p}\,;\ K_p=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)$$

K_p را ثابت خطای مکان (Position) می‌نامیم:

$$K_p = \left| \begin{array}{ll} K & N=0 \\ \infty & N\geq 1 \end{array} \right. \Rightarrow * \; e(\infty) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{1}{1+K} & N=0 \\ 0 & N\geq 1 \end{array} \right.$$

خطای حالت پایای سیستم به ازای ورودی شیب واحد:

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s\left(\frac{1}{s^2}\right)}{1+G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)H(s)} \Rightarrow * \; e(\infty) = \frac{1}{K_v} \; ; \; K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s)$$

K_v را ثابت خطای سرعت (Velocity) می‌نامیم:

$$K_v = \left| \begin{array}{ll} 0 & N=0 \\ K & N=1 \\ \infty & N\geq 2 \end{array} \right. \Rightarrow * \; e(\infty) = \left| \begin{array}{ll} \infty & N=0 \\ \dfrac{1}{K} & N=1 \\ 0 & N\geq 2 \end{array} \right.$$

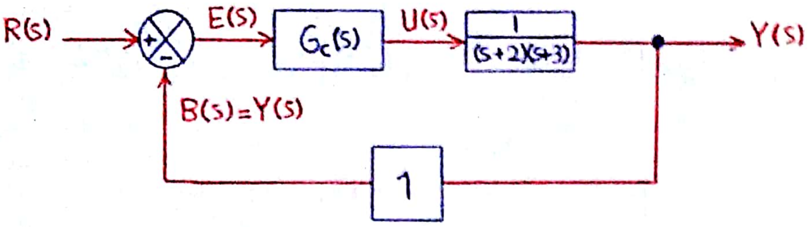
خطای حالت پایای سیستم به ازای ورودی سهمی واحد:

$$R(s) = \frac{1}{s^3} \Rightarrow e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s\left(\frac{1}{s^3}\right)}{1+G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)H(s)} \Rightarrow * \; e(\infty) = \frac{1}{K_a} \; ; \; K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s)H(s)$$

K_a را ثابت خطای شتاب (Acceleration) می‌نامیم:

$$K_a = \left| \begin{array}{ll} 0 & N=0 \\ 0 & N=1 \\ K & N=2 \\ \infty & N\geq 3 \end{array} \right. \Rightarrow * \; e(\infty) = \left| \begin{array}{ll} \infty & N=0 \\ \infty & N=1 \\ \dfrac{1}{K} & N=2 \\ 0 & N\geq 3 \end{array} \right.$$

مثال: کنترل کننده ی $G_c(s)$ را طوری طراحی کنیم که:



a) به ازای ورودی پله ی واحد $e(\infty)<0.1$ باشد.

b) به ازای ورودی پله ی واحد $e(\infty)=0$ باشد.

c) به ازای ورودی شیب واحد $e(\infty)<0.1$ باشد.

a) استفاده از کنترل کننده ی تناسبی کافی است:

$$G_c(s)=K$$

$$N=0,\ R(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow e(\infty)=\frac{1}{1+K_p}\ ;\ K_p=\lim_{s\to 0} G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{(s+2)(s+3)}=\frac{K}{6} \Rightarrow$$

$$e(\infty)=\frac{1}{1+\frac{K}{6}}=\frac{6}{6+K}<0.1 \Rightarrow \qquad G_c(s)=K>54$$

b) سیستم باید حداقل نوع 1 باشد، بنابراین از کنترل کننده ی انتگرالی استفاده می کنیم:

$$G_c(s)=\frac{K}{s}$$

$$N=1,\ R(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow e(\infty)=\frac{1}{1+K_p}=\frac{1}{1+\infty}=0$$

(به ازای K دلخواه)

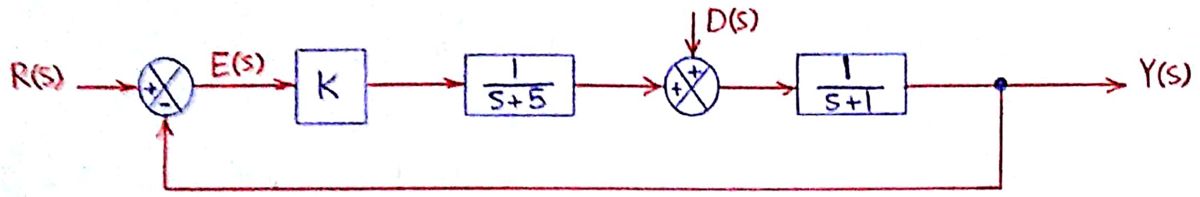
c) از کنترل کننده ی انتگرالی استفاده می کنیم:

$$G_c(s)=\frac{K}{s}$$

$$N=1,\ R(s)=\frac{1}{s^2} \Rightarrow e(\infty)=\frac{1}{K_v}\ ;\ K_v=\lim_{s\to 0} sG(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{\cancel{s}K}{\cancel{s}(s+2)(s+3)}=\frac{K}{6} \Rightarrow$$

$$e(\infty)=\frac{1}{K/6}=\frac{6}{K}<0.1 \Rightarrow \qquad K>60$$

مثال: خطای حالت پایای سیستم زیر را به ازای ورودی مرجع پله ی واحد و اغتشاش پله ی واحد ($D(s)=\frac{1}{s}$) تعیین کنید.



$$E(s)=R(s)-Y(s)$$

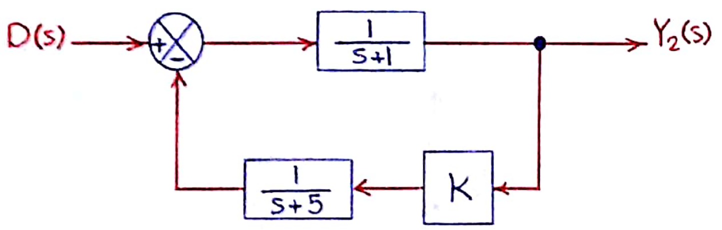
با استفاده از اصل جمع آثار خروجی سیستم را می‌توان به ازای ورودی های R(S) و D(S) به طور جداگانه بدست آورده و با یکدیگر جمع کرد:

$$R(s)=\frac{1}{s},\ D(s)=0 \Rightarrow \frac{Y_1(s)}{R(s)}=\frac{K}{K+(s+5)(s+1)}=\frac{K}{s^2+6s+(5+K)} \Rightarrow$$

$$Y_1(s)=\frac{K}{s^2+6s+(5+K)}R(s)$$

$$R(s)=0,\ D(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow \frac{Y_2(s)}{D(s)}=\frac{1/(s+1)}{1+K/(s+1)(s+5)}=\frac{s+5}{s^2+6s+(5+K)} \Rightarrow$$

$$Y_2(s)=\frac{s+5}{s^2+6s+(5+K)}D(s)$$



اصل جمع آثار در سیستم LTI: $Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s) \Rightarrow Y(s)=\frac{s+(5+K)}{s^2+6s+(5+K)}\cdot\frac{1}{s}$

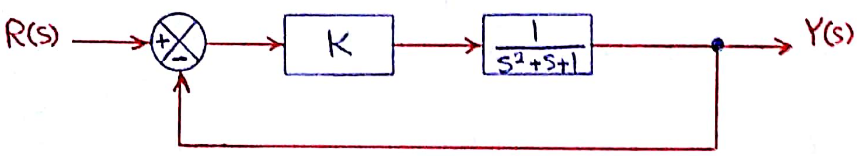
$$\Rightarrow E(s)=\frac{1}{s}\left[1-\frac{s+(5+K)}{s^2+6s+(5+K)}\right]$$

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\left[1-\frac{s+(5+K)}{s^2+6s+(5+K)}\right]=1-\lim_{s\to 0}\frac{5+K}{5+K}=0$$

روش مکان هندسی ریشه ها (Root Locus Method):

هرگاه در تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل حلقه بسته ، پارامتر متغیری مانند ضریب بهره وجود داشته باشد، ریشه های مشخصه (قطب ها) سیستم حلقه بسته به مقدار پارامتر متغیر وابسته بوده و متناسب با آن تغییر خواهند کرد. مسیر حرکت قطب های سیستم حلقه بسته برحسب تغییرات بهره ی سیستم در صفحه ی مختلط (s) را مکان هندسی ریشه ها می نامیم.

برای مثال در سیستم حلقه بسته ی زیر قطب های سیستم برحسب تغییرات بهره (K) به صورت زیر روی صفحه ی مختلط حرکت می کنند:



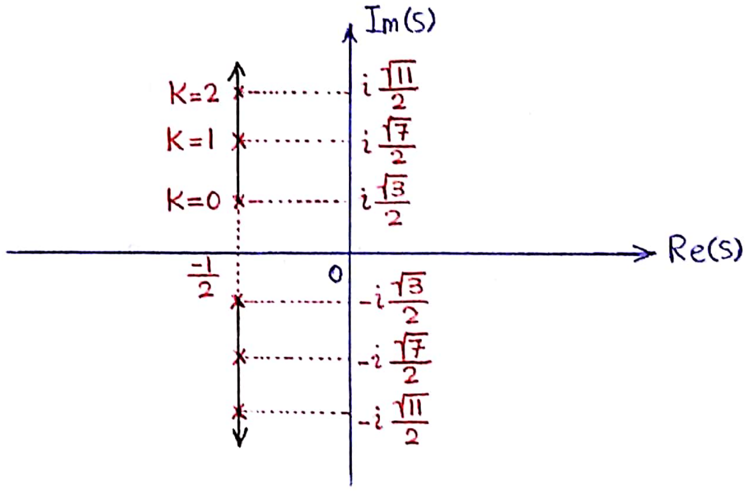
$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{K}{s^2+s+(K+1)}$$ تابع تبدیل حلقه بسته ی سیستم: $$\Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{4K+3}$$

$$K=0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

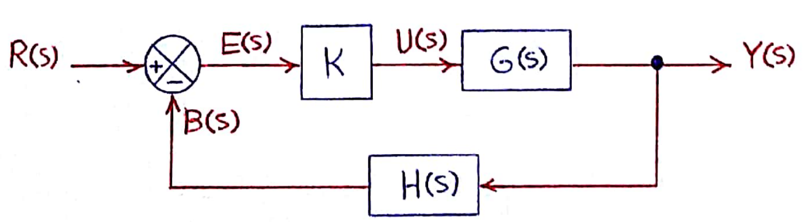
$$K=1 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$K=2 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$K=\infty \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\infty$$



سیستم کنترل زیر را در نظر بگیرید:



تابع تبدیل حلقه بسته ی سیستم به صورت زیر می باشد:

$$* \quad \frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{KG(S)}{1+KG(S)H(S)}$$

معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم حلقه بسته به صورت زیر است که در آن $KG(s)H(s)$ تابع تبدیل حلقه‌باز سیستم به ازای فیدبک منفی می‌باشد.

$$* \quad 1 + KG(s)H(s) = 0 \Rightarrow KG(s)H(s) = -1 + i0 \Rightarrow$$

$$* \quad \begin{cases} \angle KG(s)H(s) = \pm\pi(2k+1) = \pm 180^\circ(2k+1) \; ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots & \text{معیار زاویه:} \\ |KG(s)H(s)| = 1 & \text{معیار اندازه:} \end{cases}$$

شرط اینکه یک نقطه در صفحه‌ی مختلط (s) قطب سیستم حلقه‌بسته باشد (روی مکان هندسی ریشه‌ها قرار بگیرد)، برقرار شدن هر دو معیار فوق در مورد آن نقطه است. به عبارت دیگر مکان هندسی ریشه های یک سیستم حلقه بسته نقاطی از صفحه‌ی مختلط (s) می‌باشند که معیار زاویه و معیار اندازه را به طور همزمان برقرار سازند.

برای بررسی امکان قرارگیری یک نقطه روی مکان هندسی ریشه‌ها از معیار زاویه و برای تعیین بهره (K) از معیار اندازه استفاده می‌شود.

شکل عمومی تابع تبدیل حلقه‌باز یک سیستم به صورت زیر است:

$$* \quad KG(s)H(s) = \frac{KN(s)}{D(s)} = \frac{K(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)} \; ; \quad n \geq m \Rightarrow$$

صفرهای تابع تبدیل حلقه‌باز سیستم: $\quad N(s) = 0 \Rightarrow s = -z_1, -z_2, \ldots, -z_m$

قطب‌های تابع تبدیل حلقه‌باز سیستم: $\quad D(s) = 0 \Rightarrow s = -p_1, -p_2, \ldots, -p_n$

معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم حلقه بسته: $\quad * \; 1 + KG(s)H(s) = 1 + \frac{KN(s)}{D(s)} = 0 \Rightarrow D(s) + KN(s) = 0$

$$K = 0 \Rightarrow D(s) = 0 \Rightarrow s = -p_i \; ; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

* به ازای $K=0$ قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته، قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز هستند.

$$K = \infty \Rightarrow N(s) = 0 \Rightarrow s = -z_i \; ; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

* به ازای $K=\infty$ قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته، صفرهای تابع تبدیل حلقه باز هستند.

نتیجه: مکان هندسی ریشه‌ها به ازای $K=0$ از قطب های تابع تبدیل حلقه باز آغاز شده و به ازای $K=\infty$ به صفرهای تابع تبدیل حلقه باز (صفرهای محدود و

صفرهای نامحدود) منتهی می‌شود.

نتایج:

1. مکان هندسی ریشه‌ها در یک سیستم مرتبه‌ی n ام دارای n شاخه است که از n قطب تابع تبدیل حلقه باز آغاز می‌شود.

2. m شاخه از شاخه‌های مکان هندسی ریشه‌ها به m صفر محدود تابع تبدیل حلقه باز منتهی می‌شود.

3. $(n-m)$ شاخه از شاخه‌های مکان هندسی ریشه‌ها به صفرهای نامحدود تابع تبدیل حلقه باز (در بی نهایت) منتهی می‌شود.

4. شاخه‌هایی از مکان هندسی ریشه‌ها که به صفرهای نامحدود منتهی می‌شود، در بی نهایت به یک خط راست مجانب می‌گردد. بنابراین مکان هندسی ریشه‌ها دارای $(n-m)$ مجانب خواهد بود.

محاسبه‌ی اندازه و فاز یک نقطه (s^*) در صفحه‌ی مختلط:

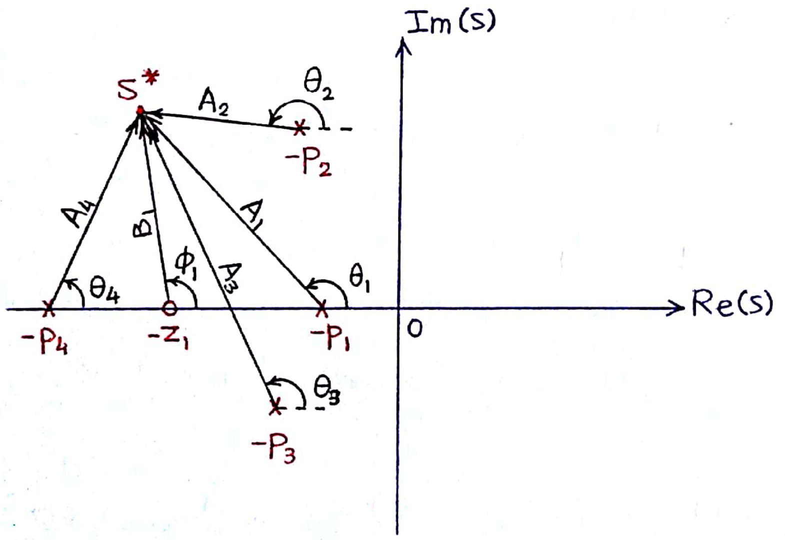
سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز زیر را فرض کنید:

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+Z_1)}{(s+P_1)\cdots(s+P_4)}$$

اندازه: $$\left|G(s)H(s)\right|\Big|_{s=s^*}=\frac{|K||s^*+Z_1|}{|s^*+P_1|\cdots|s^*+P_4|}=\frac{KB_1}{A_1A_2A_3A_4}$$

فاز: $$\angle G(s)H(s)\Big|_{s=s^*}=\angle K+\angle(s^*+Z_1)-\angle(s^*+P_1)-\dots\angle(s^*+P_4)=$$

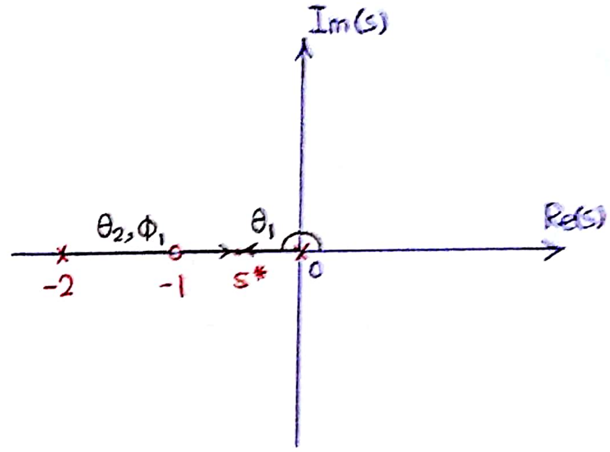
$$0+\phi_1-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_4$$



در صورتی که $\angle G(s)H(s)\Big|_{s=s^*} = \pm 180^\circ(2k+1)\;;\; k=0,1,2,\dots$ و $\big|G(s)H(s)\big|_{s=s^*}=1$ باشد، s^* روی مکان هندسی ریشه های سیستم واقع می‌گردد.

مثال: تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم به صورت $\frac{K(s+1)}{s(s+2)}$ می‌باشد. معیار زاویه و معیار اندازه را برای نقاط $s^*=\frac{-1}{2}$ و $s^*=-1+i$ بررسی کنید.

$s^*=\frac{-1}{2}$:



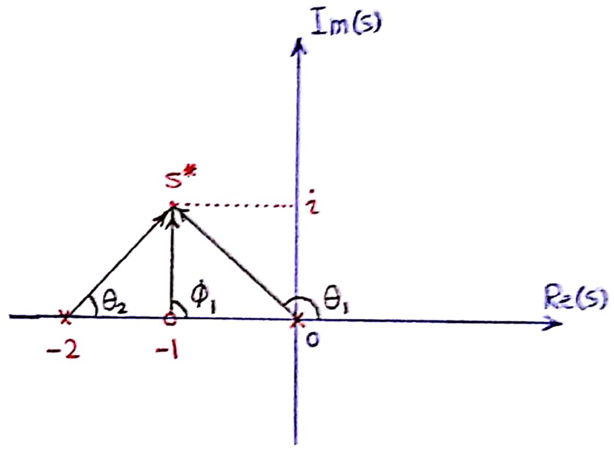
$$\angle \frac{K(s+1)}{s(s+2)}\Big|_{s=-0.5} = \phi_1-\theta_1-\theta_2 = 0-180^\circ-0=-180^\circ$$

معیار زاویه برقرار است.

$$\left|\frac{K(s+1)}{s(s+2)}\right|\Big|_{s=-0.5} = \left|\frac{K(-0.5+1)}{(-0.5)(-0.5+2)}\right|=1 \Rightarrow K=\frac{3}{2}$$

برای $K=\frac{3}{2}$ نقطه‌ی s^* روی مکان هندسی ریشه‌ها قرار می‌گیرد.

$s^*=-1+i$:



$$\angle \frac{K(s+1)}{s(s+2)}\Big|_{s=-1+i} = \phi_1-\theta_1-\theta_2 = 90^\circ-135^\circ-45^\circ=-90^\circ$$

معیار زاویه برقرار نیست و نقطه‌ی s^* هرگز روی مکان هندسی ریشه‌ها قرار نمی‌گیرد.

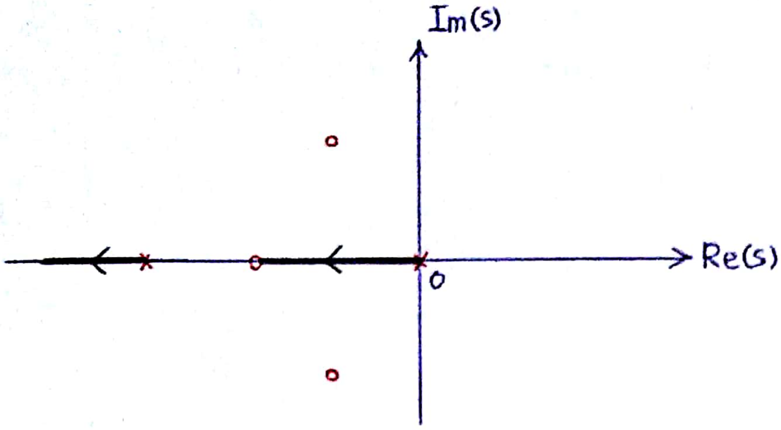
مراحل رسم مکان هندسی ریشه‌ها:

1. تعیین محل قطب‌ها و صفرهای تابع تبدیل حلقه باز سیستم در صفحه‌ی مختلط (s).

2. تعیین بخش هایی از مکان هندسی ریشه‌ها که روی محور حقیقی قرار دارد.

* مکان هندسی ریشه‌ها فقط در بخش هایی از محور حقیقی واقع می‌شود که در سمت راست آن مجموع تعداد قطب‌ها و صفرهای تابع تبدیل حلقه باز سیستم، فرد باشد

و جهت مکان هندسی ریشه‌ها از قطب‌های حلقه باز به سمت صفرهای حلقه باز خواهد بود.



بخشی از
مکان هندسی ریشه‌ها واقع بر محور حقیقی برای یک سیستم کنترلی:

3. تعیین مجانب های مکان هندسی ریشه‌ها شامل تعیین محل تلاقی مجانب ها با محور حقیقی (مرکز مجانب ها) و تعیین زاویه‌ی مجانب با محور حقیقی.

مرکز مجانب ها: * $$\sigma_a = -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} Re(p_i) - \sum_{j=1}^{m} Re(z_j)}{n-m}$$

p_i-ها و z_j-ها به ترتیب قطب ها و صفرهای تابع تبدیل حلقه باز سیستم هستند.

زاویه‌ی مجانب ها: * $$\theta_a = \frac{\pi(2k+1)}{n-m} = \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m} \quad ; \quad k=0,1,2,\dots,n-m-1$$

* از آن جایی که تمامی قطب ها و صفرهای مختلط سیستم به صورت مزدوج می باشند، σ_a همواره مقداری حقیقی خواهد داشت. σ_a مرکز جرم قطب ها و صفرهای تابع تبدیل حلقه باز سیستم در صفحه‌ی مختلط (s) می باشد. در استفاده از این معیار برای هر قطب جرم +1 و برای هر صفر جرم -1 لحاظ می گردد.

4. تعیین نقاط شکست (Break-in & Breakaway).

اگر مکان هندسی واقع روی محور حقیقی بین دو قطب مجاور و یا دو صفر مجاور (محدود یا نامحدود) قرار گیرد، حداقل یک نقطه‌ی شکست در بین آن ها خواهیم داشت. نقطه‌ی شکست (σ_b) از رابطه‌ی زیر بدست می آید:

* $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_b + p_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma_b + z_j}$$

تنها جواب هایی از معادله‌ی فوق قابل قبول اند که بین دو قطب مجاور و یا دو صفر مجاور واقع شوند.

5. تعیین زاویه‌ی خروج از قطب های مختلط (Angle of Departure).

اگر $-p_i$ قطب مختلط باشد، زاویه‌ی خروج مکان هندسی ریشه ها از آن (θ_D) به صورت زیر تعیین می شود:

* $\theta_D = 180^\circ - \sum$ زوایای بردارهای رسم شده از سایر قطب‌ها به قطب $-p_i$ $+ \sum$ زوایای بردارهای رسم شده از سایر صفرها به قطب $-p_i$ $= 180^\circ + \angle (s+p_i)KG(s)H(s)\Big|_{s=-p_i}$

6. تعیین زاویه‌ی ورود به صفرهای مختلط (Angle of Arrival).

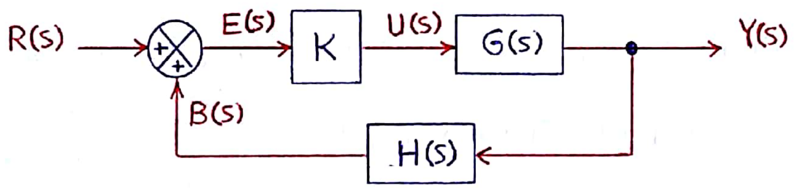
اگر $-z_j$ صفر مختلط باشد، زاویه‌ی ورود مکان هندسی ریشه‌ها به آن (θ_A) به صورت زیر تعیین می‌شود:

* $\theta_A = 180^\circ - \sum$ زوایای بردارهای رسم شده از سایر صفرها به صفر $-z_j$ $+ \sum$ زوایای بردارهای رسم شده از سایر قطب‌ها به صفر $-z_j$ $= 180^\circ - \angle \dfrac{KG(s)H(s)}{s+z_j}\Big|_{s=-z_j}$

7. تعیین محل تلاقی مکان هندسی ریشه‌ها با محور موهومی (مرز پایداری).

مقدار بهره‌ی بحرانی که به ازای آن سیستم در مرز پایداری قرار می‌گیرد را به کمک معیار پایداری راث تعیین نموده و سپس با استفاده از معیار اندازه، فرکانس (ω) مربوط به نقطه‌ی تلاقی مکان هندسی ریشه‌ها با محور موهومی به ازای بهره‌ی بحرانی را بدست می‌آوریم. این نقطه به صورت $s=\pm i\omega$ می‌باشد.

نکته: اگر سیستم کنترل مورد مطالعه فیدبک مثبت داشته باشد، برخی از روابط و مراحل گفته شده در رسم مکان هندسی ریشه‌ها به صورت زیر تغییر خواهد یافت:



تابع تبدیل حلقه بسته: * $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{KG(s)}{1-KG(s)H(s)}$

معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم: * $1-KG(s)H(s)=0$

معیار زاویه: * $\angle KG(s)H(s) = \pm\pi(2k) = \pm 2\pi k = \pm 360^\circ k\,; \quad k=0,1,2,\ldots$

* در سیستم‌های کنترل با فیدبک مثبت، مکان هندسی ریشه‌ها در بخش‌هایی از محور حقیقی واقع می‌شود که در سمت راست آن مجموع تعداد قطب‌ها و صفرهای تابع تبدیل حلقه باز سیستم، زوج باشد.

زاویه‌ی مجانب‌ها: * $\theta_a = \dfrac{2\pi k}{n-m} = \dfrac{360^\circ k}{n-m}\,; \quad k=0,1,2,\ldots,n-m-1$

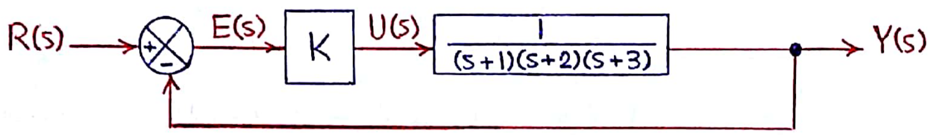
زاویه‌ی خروج از قطب مختلط $-p_i$:

$$*\ \theta_D = 0^\circ - \sum \underbrace{\text{زوایای بردارهای رسم شده}}_{\text{از سایر قطب‌ها به قطب } -p_i} + \sum \underbrace{\text{زوایای بردارهای رسم شده}}_{\text{از سایر صفرها به قطب } -p_i}$$

زاویه‌ی ورود به صفر مختلط $-z_j$:

$$*\ \theta_A = 0^\circ - \sum \underbrace{\text{زوایای بردارهای رسم شده}}_{\text{از سایر صفرها به صفر } -z_j} + \sum \underbrace{\text{زوایای بردارهای رسم شده}}_{\text{از سایر قطب‌ها به صفر } -z_j}$$

مثال: مکان هندسی ریشه‌های سیستم نشان داده شده در شکل را رسم کنید.



$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Rightarrow n=3, m=0 \Rightarrow$$

قطب‌ها: $-1, -2, -3$

صفرها: ∞, ∞, ∞

$$\sigma_a = -\frac{1+2+3}{3-0} = -2 \quad , \quad \theta_a = \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m} \; ; \; k=0,1,2 \Rightarrow \theta_a = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$$

$$\frac{1}{\sigma_b+1} + \frac{1}{\sigma_b+2} + \frac{1}{\sigma_b+3} = 0 \Rightarrow \frac{(\sigma_b+1)(\sigma_b+2) + (\sigma_b+1)(\sigma_b+3) + (\sigma_b+2)(\sigma_b+3)}{(\sigma_b+1)(\sigma_b+2)(\sigma_b+3)} = 0 \Rightarrow$$

$$3\sigma_b^2 + 12\sigma_b + 11 = 0 \Rightarrow \sigma_b = \underset{\checkmark}{-1.42}, \underset{\times}{-2.58}$$

جواب $\sigma_b=-2.58$ مورد قبول نیست زیرا بین دو قطب مجاور و یا دو صفر مجاور قرار ندارد.

تحلیل پایداری:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{K}{s^3+6s^2+11s+(6+K)}$$

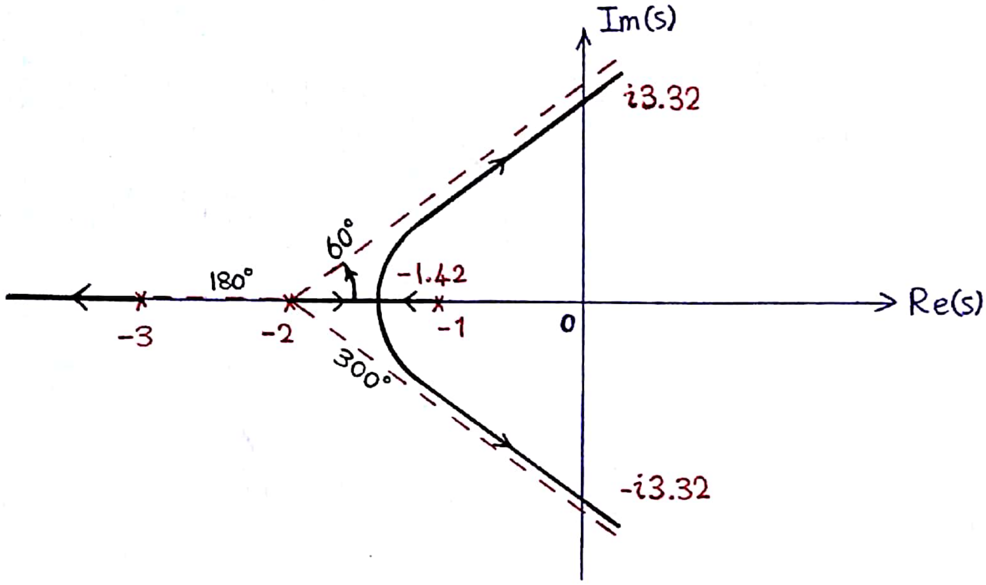
معیار پایداری راث $\Rightarrow \; 6\times 11 > 1\times(6+K) \Rightarrow K<60$

بهره‌ی بحرانی سیستم $K=60$ است.

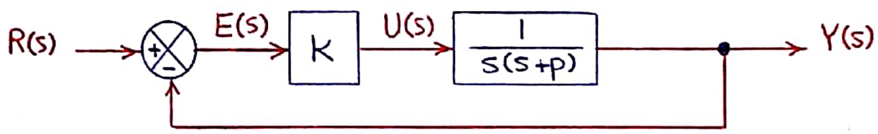
معیار اندازه:

$$|G(s)H(s)|\Big|_{s=\pm i\omega} = 1 \Rightarrow \frac{60}{|1\pm i\omega||2\pm i\omega||3\pm i\omega|} = 1 \Rightarrow$$

$$60^2 = (1+\omega^2)(4+\omega^2)(9+\omega^2) \implies \omega = 3.32 \ \text{rad/s}$$



مثال: مکان هندسی ریشه های سیستم نشان داده در شکل را به ازای تغییرات پارامتر K و پارامتر p به صورت جداگانه رسم کنید.



$K, p > 0$

رسم مکان هندسی ریشه ها به ازای تغییرات پارامتر K:

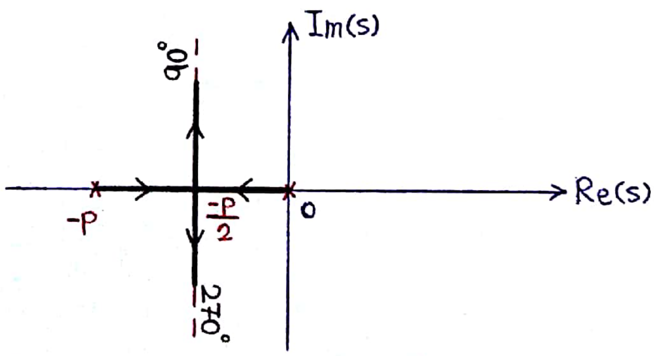
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+p)}}{1+\frac{K}{s(s+p)}} \implies 1 + K\left[\frac{1}{s(s+p)}\right] = 0$$

K ← پارامتر متغیر

$\left[\frac{1}{s(s+p)}\right]$ ← $\frac{N(s)}{D(s)}$

$\implies$ قطب ها: $0, -p$ — صفرها: ∞, ∞

$$\frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{\sigma_b + p} = 0 \implies \frac{2\sigma_b + p}{\sigma_b(\sigma_b + p)} = 0 \implies \sigma_b = -\frac{p}{2} \ \checkmark$$



به ازای تغییرات بهره (K)، سیستم هرگز وارد ناحیه ناپایداری نمی‌شود.

رسم مکان هندسی ریشه‌ها به ازای تغییرات پارامتر p :

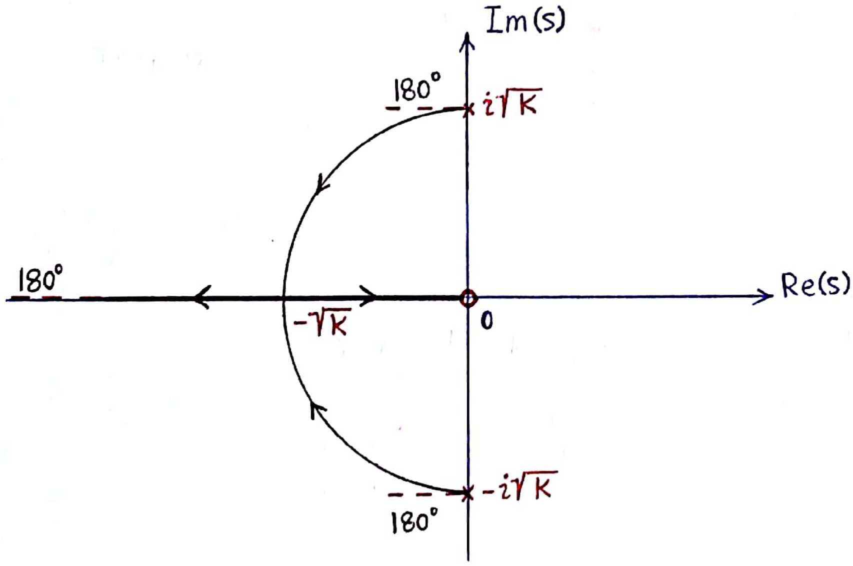
برای رسم مکان هندسی ریشه‌ها به ازای تغییرات p بایستی تابع تبدیل حلقه باز سیستم را به فرم استاندارد یعنی $p\dfrac{N(s)}{D(s)}$ نوشت.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2+ps+K} = \frac{K}{(s^2+K)+ps} = \frac{\frac{K}{s^2+K}}{1+p\frac{s}{s^2+K}} \Rightarrow 1+\underbrace{p}_{\text{پارامتر متغیر}}\Big[\underbrace{\frac{s}{s^2+K}}_{\frac{N(s)}{D(s)}}\Big]=0$$

$\Rightarrow$ قطب‌ها: $\pm i\sqrt{K}$ — صفرها: $0, \infty$

$$\frac{1}{\sigma_b - i\sqrt{K}} + \frac{1}{\sigma_b + i\sqrt{K}} = \frac{1}{\sigma_b} \Rightarrow \frac{2\sigma_b}{\sigma_b^2+K} = \frac{1}{\sigma_b} \Rightarrow \sigma_b = \overset{\times}{+\sqrt{K}}\,,\ \overset{\checkmark}{-\sqrt{K}}$$

$$\theta_D = 180^\circ + \angle (s-i\sqrt{K})\frac{s}{(s-i\sqrt{K})(s+i\sqrt{K})}\Bigg|_{s=i\sqrt{K}} = 180^\circ + \angle \frac{i\sqrt{K}}{2i\sqrt{K}} = 180^\circ + \angle\frac{1}{2} = 180^\circ$$



به ازای $p=0$ سیستم در مرز پایداری قرار می‌گیرد.

طراحی سیستم‌های کنترل به روش مکان هندسی ریشه‌ها:

اهداف سیستم‌های کنترل عبارت‌اند از:

- بهبود پاسخ حالت گذرای سیستم‌ها

بدین منظور از کنترل‌کننده‌ی تناسبی - مشتقی (PD) و یا جبرانساز پیش‌فاز (Lead) استفاده می‌شود.

- بهبود پاسخ حالت پایای سیستم‌ها

بدین منظور از کنترل‌کننده‌ی تناسبی - انتگرالی (PI) و یا جبرانساز پس‌فاز (Lag) استفاده می‌شود.

برای بهبود همزمان پاسخ حالت گذرا و حالت پایای سیستم‌ها از کنترل‌کننده‌ی تناسبی - انتگرالی - مشتقی (PID) و یا جبرانساز پیش‌فاز - پس‌فاز استفاده می‌شود.

انواع کنترل‌کننده‌ها (Controllers):

1. کنترل‌کننده‌ی تناسبی (P):

$$* \quad u(t) = K_P e(t) \Rightarrow G_c(s) = K_P$$

کنترل‌کننده‌ی تناسبی یک کنترل‌کننده‌ی استاتیکی است. برای کنترل سیستم‌ها در اولویت اول از کنترل‌کننده‌ی تناسبی استفاده می‌شود. در صورتی که کنترل‌کننده‌ی تناسبی نیازهای کنترلی را برآورده نکند، از کنترل‌کننده‌ها و یا جبرانسازهای دینامیکی استفاده می‌شود.

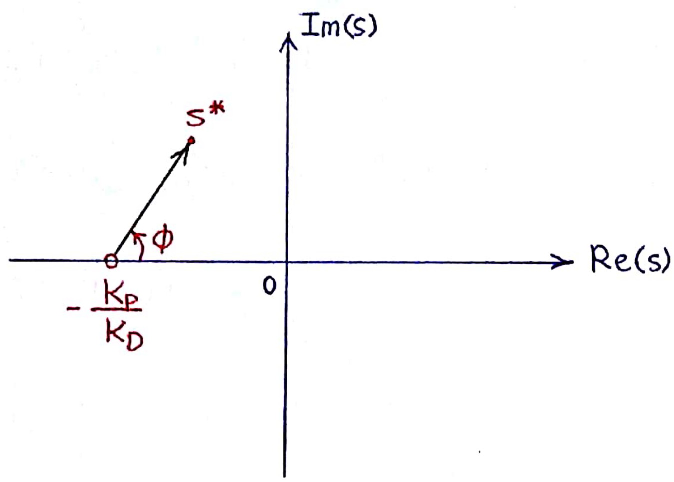
2. کنترل‌کننده‌ی تناسبی - مشتقی (PD):

$$* \quad u(t) = K_P e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow G_c(s) = K_P + K_D s$$

کنترل‌کننده‌ی PD یک صفر در $s = -\frac{K_P}{K_D}$ به تابع تبدیل حلقه‌باز سیستم اضافه می‌کند که موجب اضافه شدن یک زاویه‌ی مثبت $\Delta\theta = \phi > 0$ (پیش‌فاز) به زاویه‌ی فاز تابع تبدیل حلقه‌باز سیستم می‌گردد.

بخش مشتق‌گیر کنترل‌کننده‌ی PD حساس به نویز بوده و آن را تقویت می‌کند.

کنترل‌کننده‌ی PD مرتبه‌ی سیستم را افزایش نمی‌دهد و فقط پاسخ حالت گذرای آن را اصلاح می‌کند.



3. کنترل‌کننده‌ی تناسبی - انتگرالی (PI):

$$* \quad u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau \implies G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p s + K_I}{s}$$

کنترل‌کننده‌ی PI یک صفر در $s=-\frac{K_I}{K_p}$ و یک قطب در $s=0$ به تابع تبدیل حلقه باز سیستم اضافه می‌کند که موجب اضافه شدن یک زاویه‌ی منفی $\Delta\theta = \phi - \theta < 0$

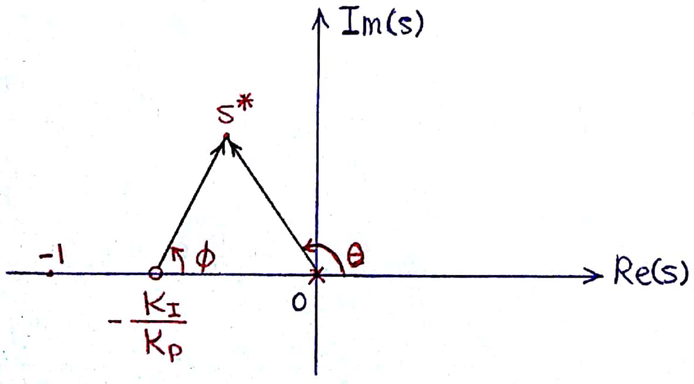
(پس‌فاز) به زاویه‌ی فاز تابع تبدیل حلقه باز سیستم می‌گردد.

بخش انتگرال‌گیر کنترل‌کننده‌ی PI طی پدیده‌ی Lind-up سریعاً اشباع می‌شود و در عمل بایستی اقدامات پیشگیرانه‌ای برای جلوگیری از این پدیده انجام گردد.

کنترل‌کننده‌ی PI مرتبه‌ی سیستم و نوع آن را یک واحد افزایش می‌دهد و باعث بهبود پاسخ حالت پایای سیستم به میزان یک درجه می‌گردد.

صفر و قطب کنترل‌کننده‌ی PI در محدوده‌ای نزدیک به هم انتخاب می‌شود تا اثر یکدیگر را تا حد ممکن خنثی کرده و پاسخ حالت گذرای سیستم را تحت تأثیر قرار ندهد.

$$-1 < \frac{-K_I}{K_p} < 0$$

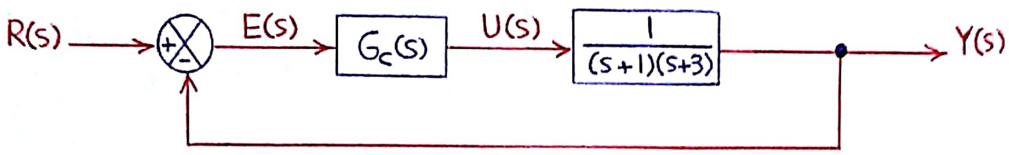


4. کنترل کننده‌ی تناسبی - انتگرالی - مشتقی (PID):

$$* \; u(t) = K_p e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau \;\Rightarrow\; G_c(s) = \frac{K_p s + K_D s^2 + K_I}{s}$$

کنترل کننده‌ی PID از ترکیب کنترل کننده های PD و PI حاصل می شود.

مثال: سیستم کنترل زیر را در نظر بگیرید:



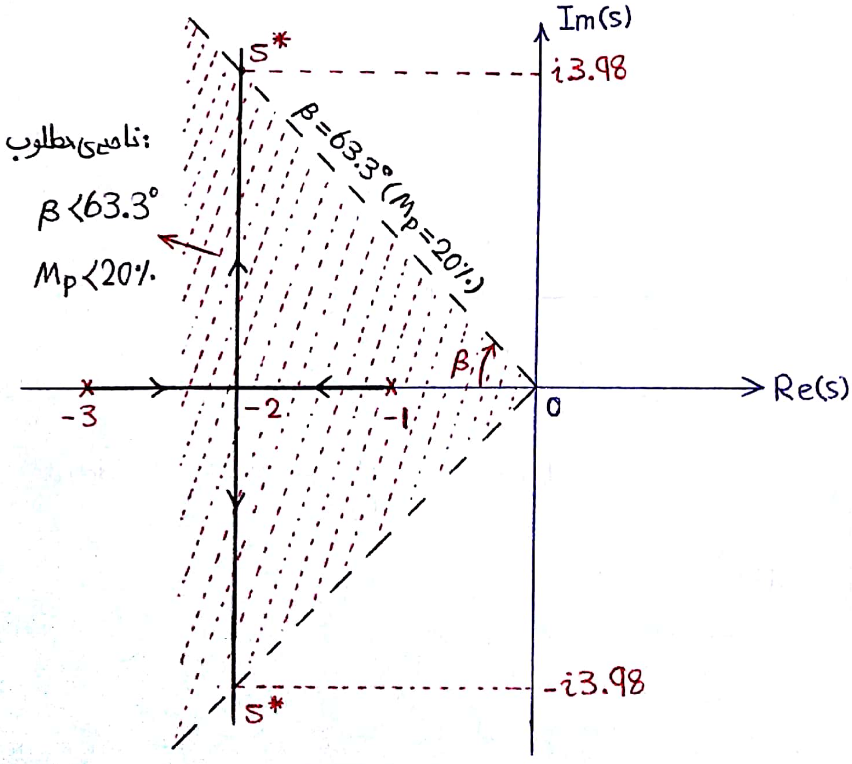
- کنترل کننده‌ی تناسبی را طوری انتخاب کنید که $M_p < 20\%$ باشد.

$$G_c(s) = K_p \Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{(s+1)(s+3)+K_p} = \frac{K_p}{s^2+4s+(3+K_p)}$$

$$M_p < 20\% \;\Longrightarrow\; \xi > 0.45$$

$$\beta = \cos^{-1}\xi \;:\; \xi > 0.45 \Rightarrow \beta < \cos^{-1} 0.45 \Rightarrow \beta < 63.3^\circ$$

مکان هندسی ریشه‌ها و ناحیه‌ی مطلوب برای این که $M_p < 20\%$ باشد، به صورت زیر است:



به ازای $M_p = 20\%$ ریشه های سیستم بایستی روی خط چین قرار گیرند. بنابراین ریشه‌های مشخصه‌ی مطلوب برای سیستم به صورت زیر می باشد:

$$s^* = -2 \pm i\omega_d$$

$$\tan 63.3^\circ = \frac{\omega_d}{2} \Rightarrow \omega_d = 3.98\ rad/s \Rightarrow s^* = -2 \pm i3.98$$

مقدار بهره‌ی کنترل‌کننده‌ی تناسبی (K_p) که به ازای آن ریشه‌های مشخصه‌ی سیستم روی ریشه‌های مطلوب (s^*) قرار بگیرد، با استفاده از معیار اندازه بدست می‌آید:

$$|G(s)H(s)|\Big|_{s=s^*} = 1 \Rightarrow \left|\frac{K_p}{(s+1)(s+3)}\right|\Bigg|_{s=-2\pm i3.98} = 1 \Rightarrow$$

$$K_p = \sqrt{(-1)^2 + (3.98)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (3.98)^2} \Rightarrow K_p = 16.84$$

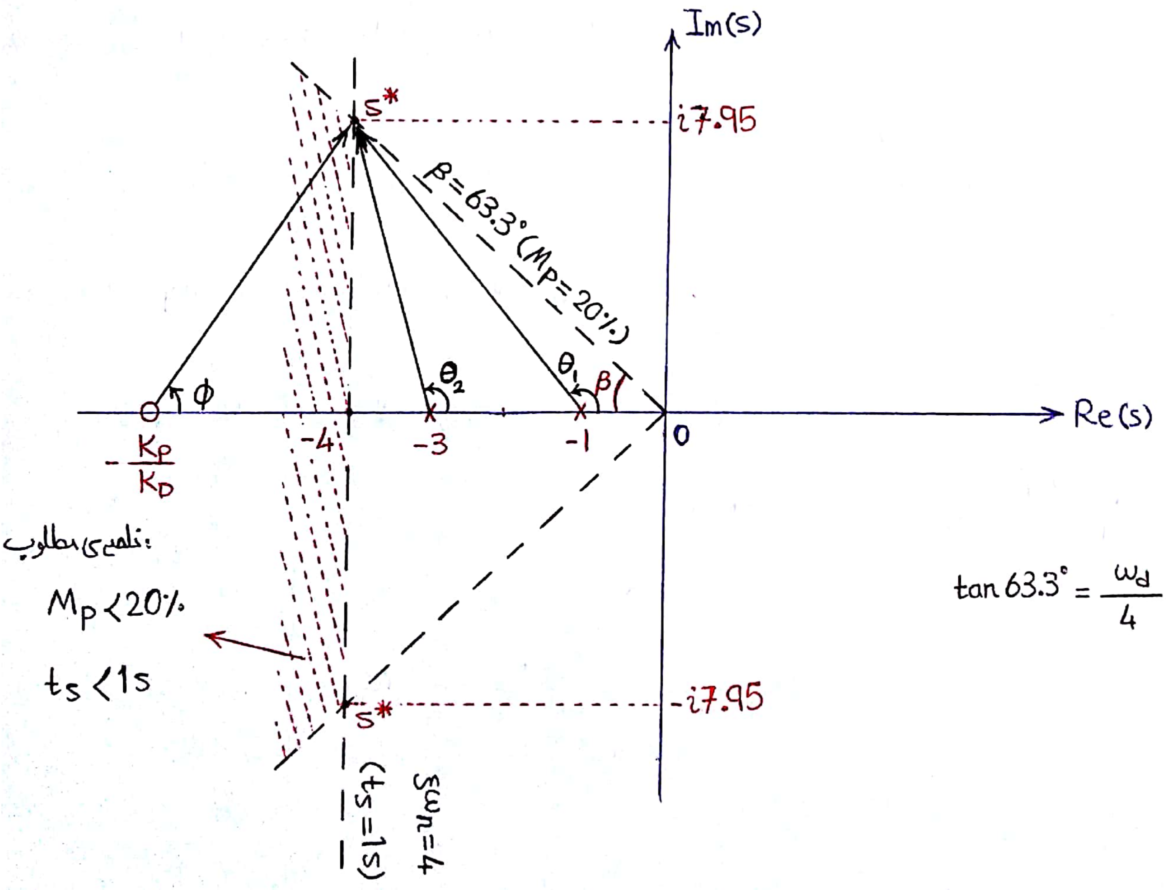
در نتیجه می‌توان گفت:

$$M_p < 20\% \Leftrightarrow \underline{0 < K_p < 16.84}$$

- کنترل‌کننده‌ای طراحی کنید که $M_p<20\%$ و $t_s(2\%)<1s$ باشد.

در این حالت مکان هندسی ریشه‌ها به ازای تغییرات بهره‌ی کنترل‌کننده‌ی تناسبی (K_p)، هرگز در ناحیه‌ی مطلوب قرار نمی‌گیرد. بنابراین کنترل‌کننده‌ی تناسبی برای اصلاح پاسخ حالت گذرای سیستم جوابگو نیست و باید از کنترل‌کننده‌ی PD استفاده شود.

$$t_s(2\%) < 1s \Rightarrow \frac{4}{\xi\omega_n} < 1 \Rightarrow \xi\omega_n > 4\ rad/s$$



$$\tan 63.3^\circ = \frac{\omega_d}{4} \Rightarrow \omega_d = 7.95\ rad/s$$

ریشه های مشخصه‌ی مطلوب برای سیستم به ازای $M_p=20\%$ و $t_s=1s$ به صورت زیر می‌باشد:

$$s^* = -4 \pm i7.95$$

$$G_c(s) = K_P + K_D s \quad \Longrightarrow \quad G(s)H(s) = \frac{K_P + K_D s}{(s+1)(s+3)}$$

با استفاده از معیار زاویه برای نقطه‌ی s^*، مقدار $\Delta\theta = \phi$ تعیین می‌شود:

$$\angle G(s)H(s)\Big|_{s=s^*} = \pm 180^\circ (2k+1)\,;\; k=0,1,2,\ldots \quad \Longrightarrow$$

$$\angle \left(\frac{K_P + K_D s}{(s+1)(s+3)}\right)\Bigg|_{s=-4\pm i7.95} = -\theta_1 - \theta_2 + \phi = -(180^\circ - \tan^{-1}\frac{7.95}{3}) - (180^\circ - \tan^{-1}\frac{7.95}{1}) + \phi$$

$$= -110.7^\circ - 97.2^\circ + \phi = -208^\circ + \phi = -180^\circ \quad \Longrightarrow \quad \phi = 208^\circ - 180^\circ = 28^\circ$$

$$\tan\phi = \frac{7.95}{K_P/K_D - 4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{K_P}{K_D} = \frac{7.95}{\tan 28^\circ} + 4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{K_P}{K_D} = 18.95$$

$$G(s)H(s) = \frac{K_D(s + K_P/K_D)}{(s+1)(s+3)} = \frac{K_D(s+18.95)}{(s+1)(s+3)}$$

K_D را می‌توان به ازای $t_s=1s$ و $M_p=20\%$ از معیار اندازه تعیین کرد:

$$|G(s)H(s)|\Big|_{s=-4\pm i7.95} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{K_D(s+18.95)}{(s+1)(s+3)}\right|\Bigg|_{s=-4\pm i7.95} = 1 \quad \Longrightarrow$$

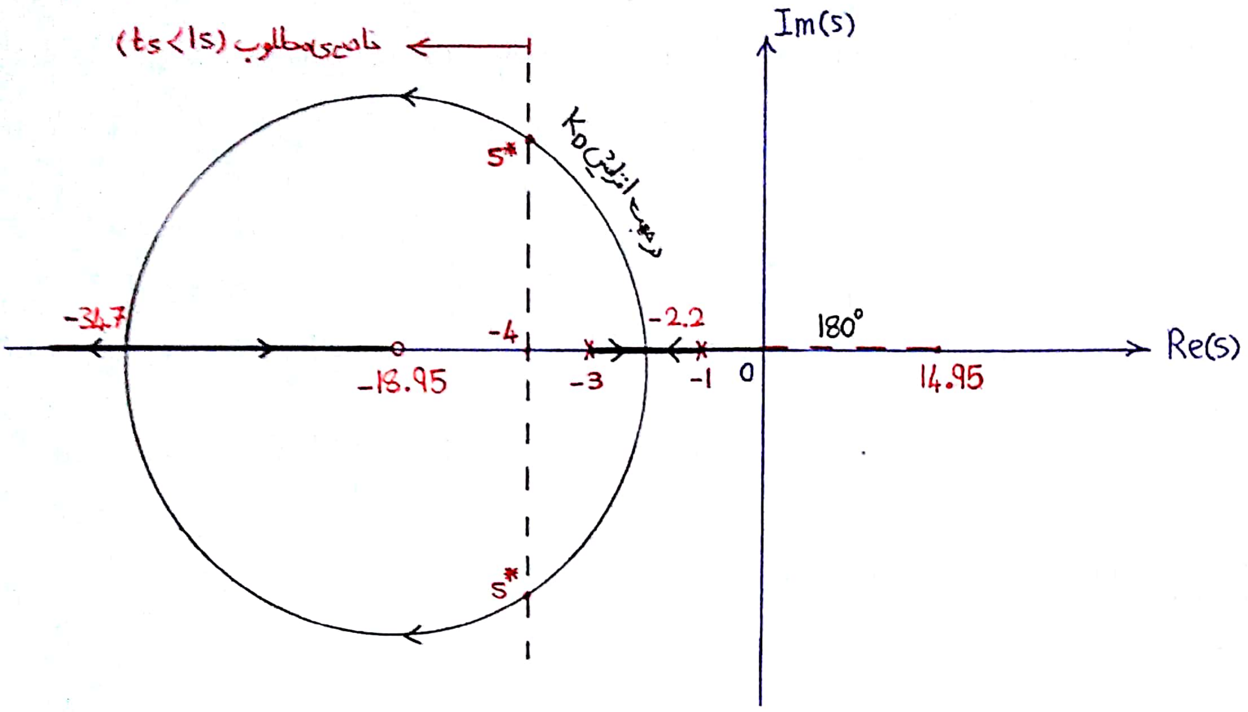
$$K_D\sqrt{(14.95)^2 + (7.95)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (7.95)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + (7.95)^2} \quad \Longrightarrow \quad K_D = 4.11$$

حال برای تعیین محدوده‌ی K_D بایستی مکان هندسی ریشه‌ها را رسم کنیم:

قطب‌ها: $-1, -3$ — صفرها: $-18.95, \infty$

$$\sigma_a = -\frac{(1+3) - 18.95}{2-1} = 14.95 \;,\quad \theta_a = 180^\circ$$

نقاط شکست: $\sigma_b = -2.2, -34.7$



با توجه به مکان هندسی ریشه‌ها داریم:

$$t_s < 1s \iff \underline{K_D > 4.11}$$

$$\frac{K_P}{K_D} = 18.95 \Rightarrow K_D = \frac{K_P}{18.95} \qquad K_D > 4.11 \;\Bigg|\; \Rightarrow \frac{K_P}{18.95} > 4.11 \Rightarrow \underline{K_P > 77.88}$$

- کنترل‌کننده را طوری طراحی کنید که علاوه بر اصلاح پاسخ حالت گذرای سیستم، خطای حالت پایای آن نیز برابر صفر شود. (برای ورودی پله‌ی واحد)

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \frac{K_D(18.95)}{(1)(3)} = \frac{(4.11)(18.95)}{3} = 25.96$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+25.96} = 0.037$$

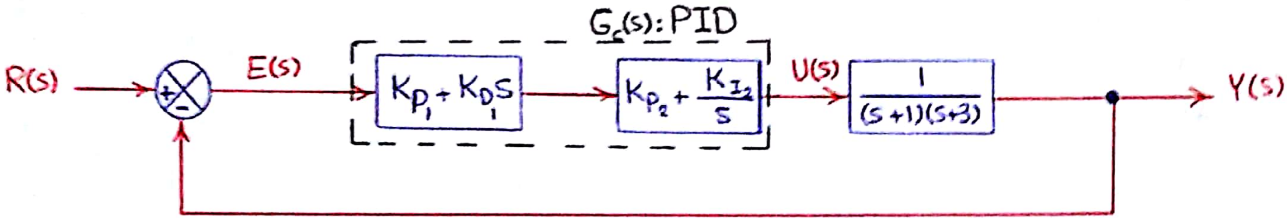
به منظور صفر شدن خطای حالت پایا به ورودی پله‌ی واحد، نوع سیستم بایستی یک مرتبه افزایش یابد. بدین منظور باید از کنترل‌کننده‌ی PI در کنار کنترل‌کننده‌ی PD استفاده شود. این دو کنترل کننده در کنار هم یک کنترل کننده‌ی PID را تشکیل خواهند داد:

$$G_{c_2}(s) = K_{P_2} + \frac{K_{I_2}}{s} = \frac{K_{P_2}s + K_{I_2}}{s} \qquad \text{(کنترل‌کننده‌ی PI)}$$

قطب اضافه شده به تابع تبدیل حلقه باز سیستم به صورت $s=0$ بوده و صفر اضافه شده به آن به صورت $s=\frac{-K_{I_2}}{K_{P_2}}$ می باشد. به منظور جلوگیری از رسیدن لطمه به

پاسخ حالت گذرای سیستم، $\frac{-K_{I2}}{K_{P2}}$ نزدیک به صفر انتخاب می‌شود:

$$\frac{K_{I_2}}{K_{P_2}}=0.01 \implies K_{P_2}=10\ ,\ K_{I_2}=0.1$$



$$\text{PID:}\quad G_c(s)=K_P+K_Ds+\frac{K_I}{s}\ ;\quad K_P=K_{P_1}K_{P_2}+K_{D_1}K_{I_2}\ ,\ K_D=K_{D_1}K_{P_2}\ ,\ K_I=K_{P_1}K_{I_2}$$

$$K_{P_1}>77.88 \xrightarrow[K_{I_2}=0.1]{K_{P_2}=10} \underline{K_P>779.21}$$

$$\underline{K_D>41.1}$$

$$\underline{K_I>7.79}$$

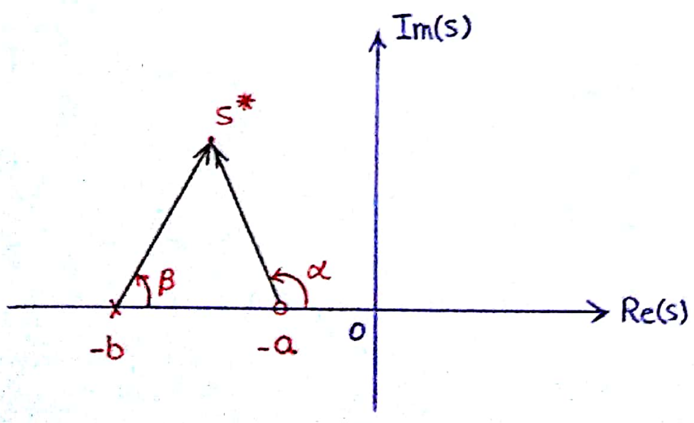
$$\implies M_P<20\%\ ,\ t_s<1s\ ,\ e(\infty)=0$$

انواع جبرانسازها (Compensators):

۱. جبرانساز پیش فاز (Lead):

$$*\,G_c(s)=K_c\frac{s+a}{s+b}\ ;\quad a<b$$

جبرانساز پیش فاز یک صفر در $s=-a$ و یک قطب در $s=-b$ به تابع تبدیل حلقه باز سیستم اضافه می‌کند به طوری که صفر همواره در سمت راست قطب قرار می‌گیرد.

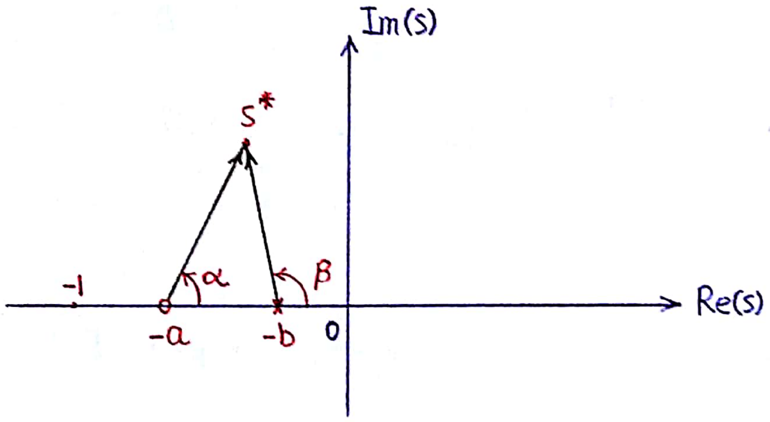


$$\Delta\theta=\alpha-\beta>0$$

2. جبرانساز پس‌فاز (Lag):

$$*\ G_c(s)=K_c\frac{s+a}{s+b}\ ;\ a>b$$

جبرانساز پس‌فاز یک صفر در $s=-a$ و یک قطب در $s=-b$ به تابع تبدیل حلقه باز سیستم اضافه می‌کند به طوری که قطب همواره در سمت راست صفر قرار می‌گیرد.



$$\Delta\theta=\alpha-\beta<0$$

صفر و قطب جبرانساز پس‌فاز در محدوده‌ی $-1<s<0$ انتخاب می‌شود تا حدالامکان نزدیک به هم باشند و پاسخ حالت گذرای سیستم را تحت تاثیر قرار ندهند.

$$0<a,b<1$$

3. جبرانساز پیش‌فاز - پس فاز (Lead-Lag):

جبرانساز پیش‌فاز - پس‌فاز از ترکیب جبرانسازهای پیش‌فاز و پس فاز حاصل می‌شود.

مثال: در سیستم بررسی شده در مثال قبل:

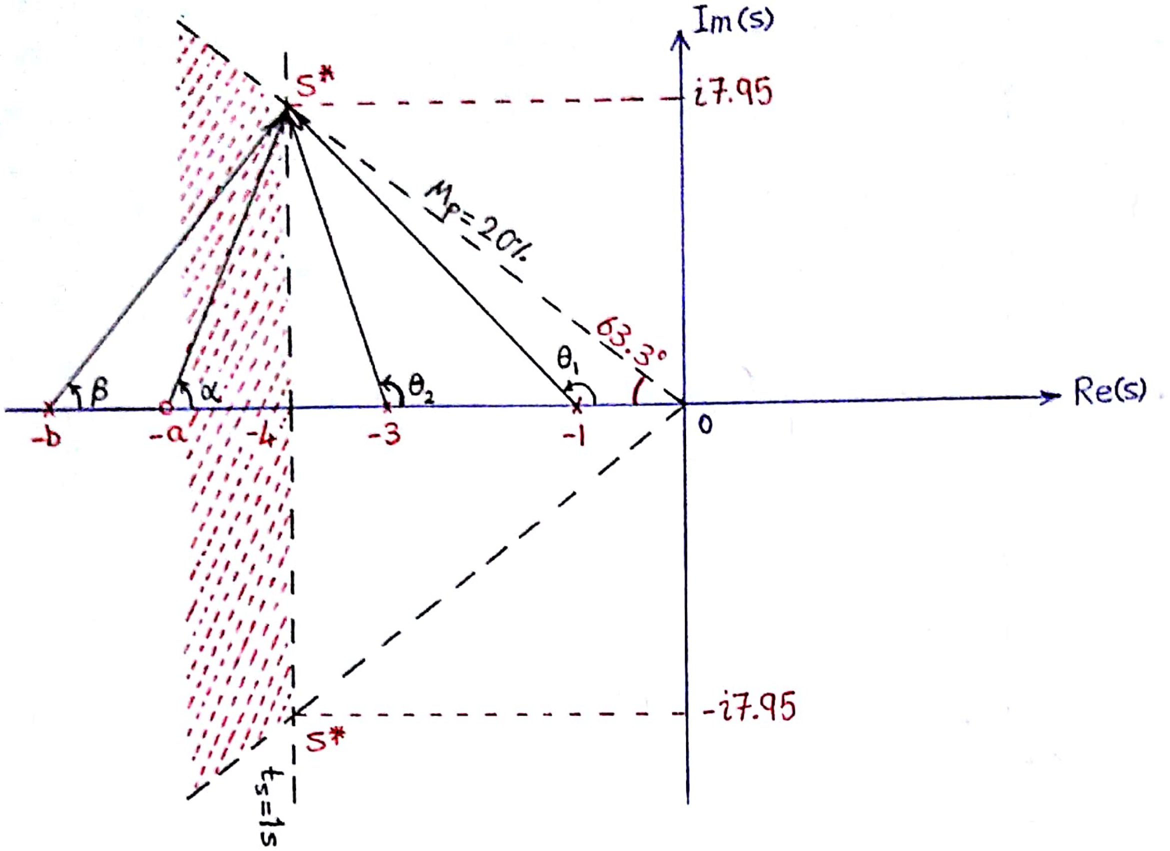
- به جای کنترل کننده‌ی PD از جبرانساز پیش‌فاز برای بهبود پاسخ حالت گذرای سیستم استفاده کنید.

$$M_p=20\%\ ,\ t_s<1s\ \Rightarrow\ s^*=-4\pm i7.95$$

$$G_c(s)=K_c\frac{s+a}{s-b}\ \Rightarrow\ G(s)H(s)=K_c\frac{s+a}{(s+1)(s+3)(s+b)}$$

$$\angle G(s)H(s)\Big|_{s=-4\pm i7.95}=-\theta_1-\theta_2+\Delta\theta=-110.7^\circ-97.2^\circ+\Delta\theta=-208^\circ+\Delta\theta\ \Rightarrow$$

$$-208^\circ+\Delta\theta=-180^\circ\ \Rightarrow\ \Delta\theta=28^\circ$$



$\Delta\theta=\alpha-\beta=28° \quad \Rightarrow$ یک معادله و دو مجهول

α و β بی شمار مقدار مختلف را به خود اختصاص می دهند، بنابراین یکی از مجهولات (α یا β) بایستی معلوم در نظر گرفته شود.

* در طراحی جبرانساز پیش فاز معمولاً سعی بر این است که افزودن جبرانساز به سیستم مرتبه ی آن را افزایش ندهد. بنا براین صفر جبرانساز ($-a$) را روی یکی از قطب های سیستم قرار می دهیم تا اثر یکدیگر را خنثی کنند و مرتبه ی سیستم ثابت بماند. این کار را زمانی می توان انجام داد که قطب مورد نظر قطب پایدار باشد.

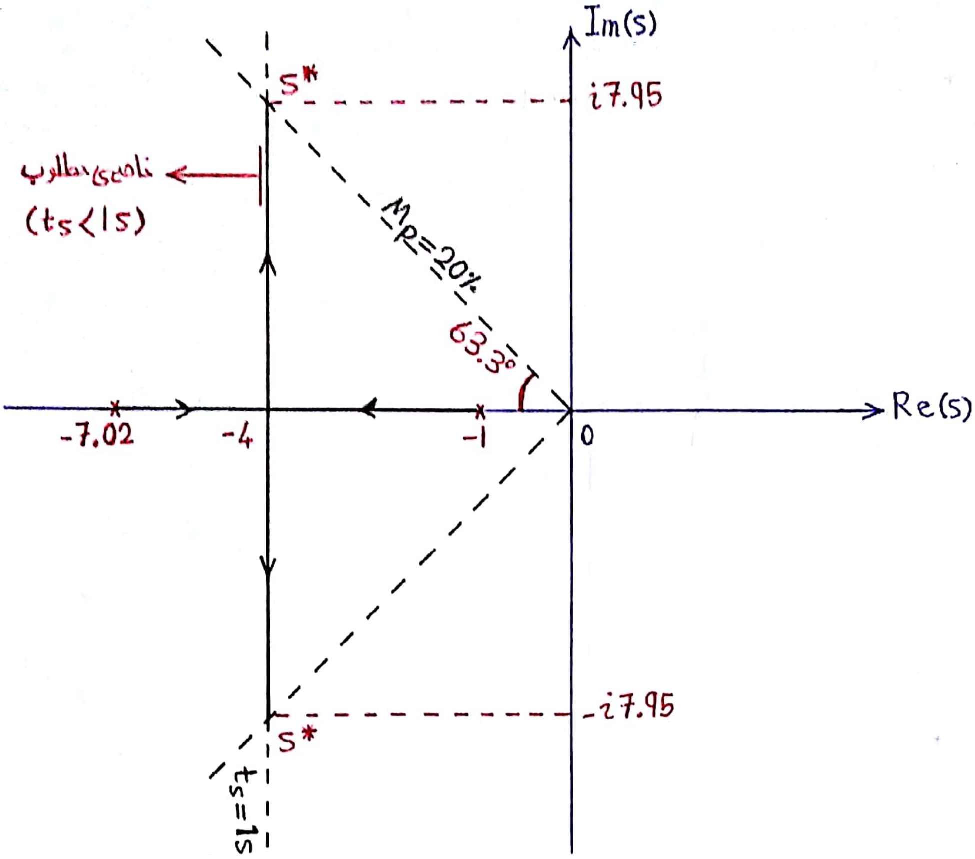
$$a=3 \Rightarrow G(s)H(s)=K_c\frac{s+3}{(s+1)(s+3)(s+b)}=K_c\frac{1}{(s+1)(s+b)}$$

$$\alpha=\theta_2=97.2° \Rightarrow \beta=\alpha-28°=97.2°-28°=69.2°$$

$$b=\frac{7.95}{\tan\beta}+4=\frac{7.95}{\tan 69.2°}+4=7.02 \Rightarrow G(s)H(s)=\frac{K_c}{(s+1)(s+7.02)}$$

$$|G(s)H(s)|\Big|_{s=-4\pm i7.95}=1 \Rightarrow K_c=\sqrt{(-3)^2+(7.95)^2}\cdot\sqrt{(3.02)^2+(7.95)^2}=72.26$$

برای تعیین محدوده ی K_c مکان هندسی ریشه ها بایستی رسم شود:



اگر ریشه‌های مشخصه‌ی سیستم مختلط باشند (سیستم زیرمیرا باشد)، به ازای تغییرات K_c زمان نشست تغییر نکرده و روی مقدار یک ثانیه ثابت خواهد ماند. در این حالت محدوده‌ی مجاز K_c به صورت مقابل است:

$$M_p=20\%,\ t_s=1s \iff K_c<72.26$$

به ازای $K_c>72.26$ حداکثر فراجهش از 20% بیشتر می‌شود که مورد قبول نیست.

اگر ریشه‌های مشخصه‌ی سیستم حقیقی و تکراری باشند (سیستم میرایی بحرانی داشته باشد)، هر دو ریشه روی $s=-4$ قرار خواهند گرفت. در این حالت $t_s=1s$ بوده و مورد قبول است.

اگر ریشه‌های مشخصه‌ی سیستم حقیقی و متمایز باشند (سیستم فوق میرا باشد)، یکی از ریشه‌ها خارج از محدوده‌ی مطلوب قرار خواهد داشت و $t_s>1s$ خواهد بود که مورد قبول نیست.

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{K_c}{s^2+8s+(7+K_c)} \Rightarrow$$ معادله‌ی مشخصه: $s^2+8s+(7+K_c)=0$

سیستم زیرمیرا یا با میرایی بحرانی: $8^2-4(1)(7+K_c)\leq 0 \Rightarrow K_c\geq 9$

پارامترهای جبرانساز پیش فاز به صورت زیر خواهد بود:

$$9 \leqslant K_c < 72 \ , \ a=3 \ , \ b=7.02$$

– جبرانساز را طوری طراحی کنید که علاوه بر اصلاح پاسخ حالت گذرای سیستم، خطای حالت پایای آن به ازای ورودی پله واحد کمتر از 0.01 باشد.

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{72}{(s+1)(s+7.02)} = 10.26$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1+10.26} = 0.089$$

از آنجایی که صفرشدن خطای حالت پایای سیستم مد نظر نیست، نیازی به افزایش نوع سیستم و استفاده از کنترل کننده PI نبوده و صرفاً توسط جبرانساز پس فاز

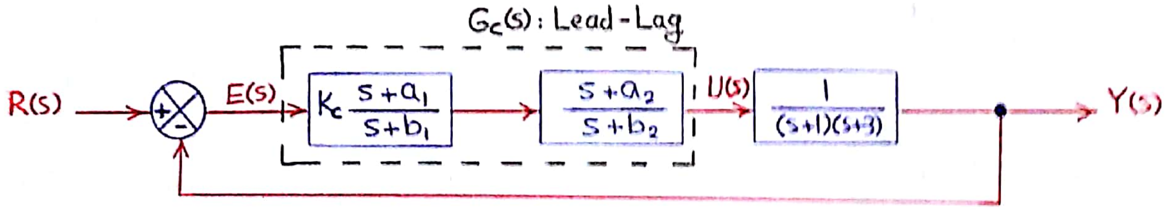
پاسخ حالت پایای سیستم را می‌توان اصلاح نمود:

$$G_{c_2} = \frac{s+a_2}{s+b_2}$$ (جبرانساز پس فاز)

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} < 0.01 \Rightarrow K_p > 99$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{72(s+a_2)}{(s+1)(s+7.02)(s+b_2)} = 10.26\,\frac{a_2}{b_2} > 99 \Rightarrow \frac{a_2}{b_2} > 9.65$$

$$0 < a_2, b_2 < 1 \Rightarrow b_2 = 0.1 \Rightarrow a_2 > 0.965$$



$$9 \leqslant K_c < 72 \ , \ a_1=3 \ , \ b_1=7.02 \ , \ a_2 > 0.965 \ , \ b_2=0.1 \Rightarrow M_p < 20\% \ , \ t_s = 1s \ , \ e(\infty) < 0.01$$

پاسخ فرکانسی سیستم‌ها:

در بررسی پاسخ فرکانسی سیستم‌ها اولین هدف تعیین پاسخ حالت پایای سیستم به ورودی هارمونیک است. یک ورودی هارمونیک را می‌توان به صورت تابع نمایی اویلر نمایش داد که در آن ω فرکانس ورودی هارمونیک (نوسانی) است:

$$* \; u(t) = e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، ورودی فوق از دو بخش حقیقی و موهومی تشکیل شده است. بخش حقیقی و بخش موهومی ورودی فوق به ترتیب سیگنال های کسینوسی و سینوسی با دامنه‌ی واحد و فرکانس ω می‌باشند.

پاسخ سیستم به ورودی هارمونیک فوق را با استفاده از انتگرال کونولوشن تعیین می‌کنیم:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t g(\tau)\,e^{i\omega(t-\tau)}\,d\tau = e^{i\omega t}\int_0^t g(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

پاسخ حالت پایا: $y(\infty) = \lim_{t\to\infty} e^{i\omega t}\int_0^t g(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau \Rightarrow y(\infty) = e^{i\omega t}\int_0^\infty g(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau$

عبارت $\int_0^\infty g(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau$ تبدیل فوریه‌ی پاسخ سیستم به ورودی ضربه‌ی واحد است و با $G(i\omega)$ نمایش داده می‌شود. تبدیل فوریه یک تبدیل انتگرالی است که تابع مورد نظر را از حوزه‌ی زمان (t) به حوزه‌ی فرکانس (ω) نگاشت می‌کند.

$$\Rightarrow \; * \; y(\infty) = G(i\omega)\,e^{i\omega t}$$

تابع مختلط $G(i\omega)$ را می‌توان به فرم قطبی (فازوری) نوشت، در نتیجه پاسخ حالت پایای سیستم به ورودی هارمونیک به صورت زیر خواهد بود:

$$G(i\omega) = |G(i\omega)|\angle\phi = |G(i\omega)|\,e^{i\phi} \Rightarrow y(\infty) = |G(i\omega)|\,e^{i\phi}\,e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$* \; y(\infty) = |G(i\omega)|\,e^{i(\omega t+\phi)}$$

بنابراین در حالت پایا $(t\to\infty)$ می‌توان چنین بیان کرد:

$$u(t) = e^{i\omega t} \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t) = |G(i\omega)|\, e^{i(\omega t+\phi)}$$

* پاسخ حالت پایای یک سیستم LTI به ورودی هارمونیک با فرکانس ω ، به صورت هارمونیک با همان فرکانس (ω) خواهد بود.

* بین خروجی و ورودی سیستم به اندازه‌ی ϕ رادیان اختلاف فاز (Phase Shift) داریم. این اختلاف فاز تابعی از فرکانس ورودی است:

$$* \ \phi = \angle G(i\omega) = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im} G(i\omega)}{\operatorname{Re} G(i\omega)}$$

$\phi > 0$: خروجی نسبت به ورودی پیش فاز (Lead) است.

$\phi < 0$: خروجی نسبت به ورودی پس فاز (Lag) است.

* نسبت دامنه‌ی خروجی سیستم به دامنه‌ی ورودی آن برابر $|G(i\omega)|$ می‌باشد که آن را ضریب بزرگنمایی (Magnification Factor) می‌نامیم. ضریب بزرگنمایی تابعی از فرکانس ورودی است:

$|G(i\omega)| > 1$: دامنه تقویت می‌شود.

$|G(i\omega)| = 1$: دامنه ثابت می‌ماند.

$|G(i\omega)| < 1$: دامنه تضعیف می‌شود.

$|G(i\omega)| \to 0$: سیستم هیچ پاسخی به ورودی اعمال شده از خود نشان نمی‌دهد.

$|G(i\omega)| \to \infty$: تشدید (رزونانس) رخ می‌دهد و دامنه‌ی خروجی سیستم به بی‌نهایت میل می‌کند.

نکته: براساس اصل جمع آثار در سیستم‌های LTI پاسخ سیستم به هر ورودی متناوب را می‌توان به کمک سری فوریه محاسبه کرد. سری فوریه ابزاری است که توسط آن می‌توان هر ورودی متناوب را به صورت یک ترکیب خطی از بی‌شمار ورودی هارمونیک نوشت:

$$* \ u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

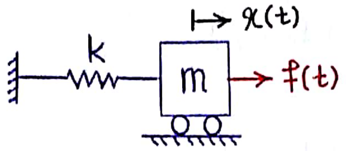
ضرایب سری فوریه به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$* \quad a_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \quad , \quad b_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

$$* \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)\, e^{-in\omega_0 t}\,dt$$

T دوره‌ی تناوب ورودی متناوب است.

مثال: پاسخ فرکانسی سیستم جرم و فنر ساده را تعیین کرده، اختلاف فاز و ضریب بزرگنمایی آن را به ازای فرکانس های مختلف ورودی بررسی کنید.



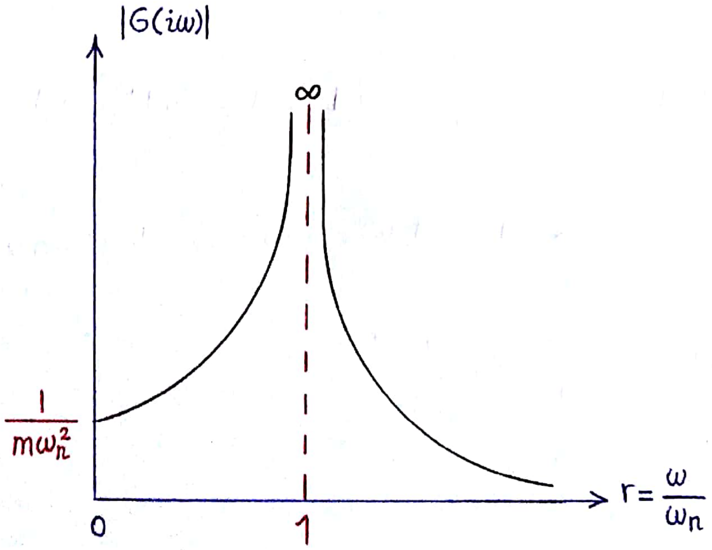
$$m\ddot{x} + kx = f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (ms^2+k)X(s) = F(s) \Rightarrow G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+k} \Rightarrow$$

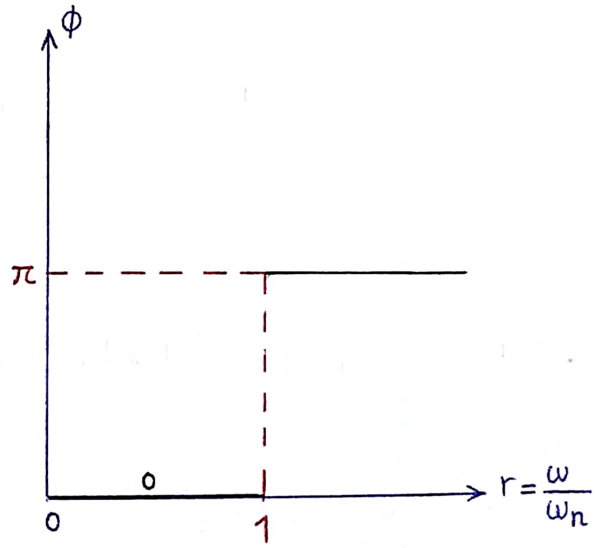
$$G(s) = \frac{1/m}{s^2 + k/m} \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$f(t) = e^{i\omega t} \Rightarrow x(\infty) = G(i\omega)e^{i\omega t} = \frac{1/m}{(i\omega)^2 + k/m}e^{i\omega t} = \frac{1}{m(\omega_n^2 - \omega^2)}e^{i\omega t}$$

$$G(i\omega) = \frac{1}{m(\omega_n^2-\omega^2)} \Rightarrow \phi = \angle G(i\omega) = \begin{cases} 0 & G(i\omega)>0 \quad (\omega<\omega_n) \\ \pi & G(i\omega)<0 \quad (\omega>\omega_n) \end{cases}$$

$$|G(i\omega)| = \frac{1}{m|\omega_n^2-\omega^2|}$$





مثال: سیستمی با تابع تبدیل $H(s)=\frac{1}{s+1}$ را در نظر بگیرید. ورودی سیستم مقداری ثابت به همراه یک نویز مزاحم سینوسی با فرکانس بالا می‌باشد. پاسخ حالت پایای سیستم را تعیین کنید.

$$u(t)=A+\sin 1000t \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s+1}} \longrightarrow y(t)=?$$

$$H(i\omega)=\frac{1}{i\omega+1} \Longrightarrow |H(i\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}\ ,\ \phi=-\tan^{-1}\omega$$

$$u(t)=\underbrace{A}_{u_1(t)}+\underbrace{\sin 1000t}_{u_2(t)} \Longrightarrow \begin{cases} u_1(t)=A\ ,\ \omega=0 \\ u_2(t)=\sin 1000t\ ,\ \omega=1000\ rad/s \end{cases}$$

ورودی ثابت: $\omega=0 \Longrightarrow |H(i\omega)|\Big|_{\omega=0}=1\ ,\ \phi=-\tan^{-1}\omega\Big|_{\omega=0}=0$

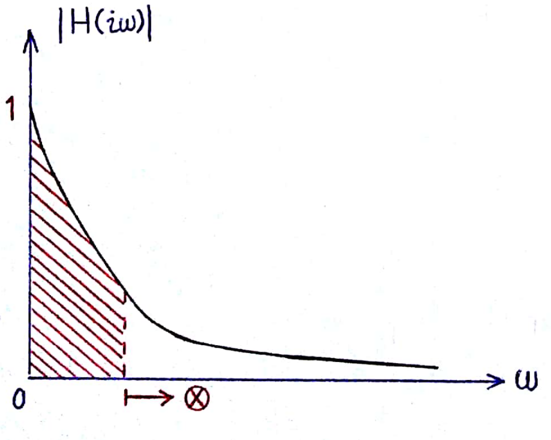
ورودی نویز: $\omega=1000\ rad/s \Longrightarrow |H(i\omega)|\Big|_{\omega=1000\ rad/s}=\frac{1}{\sqrt{1000^2+1}}\simeq 0.001\ ,\ \phi\simeq\frac{-\pi}{2}$

طبق اصل جمع آثار در سیستم‌های LTI خروجی (پاسخ) سیستم در حالت پایا به صورت زیر خواهد بود:

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)=A+0.001\sin\left(1000t-\frac{\pi}{2}\right)$$

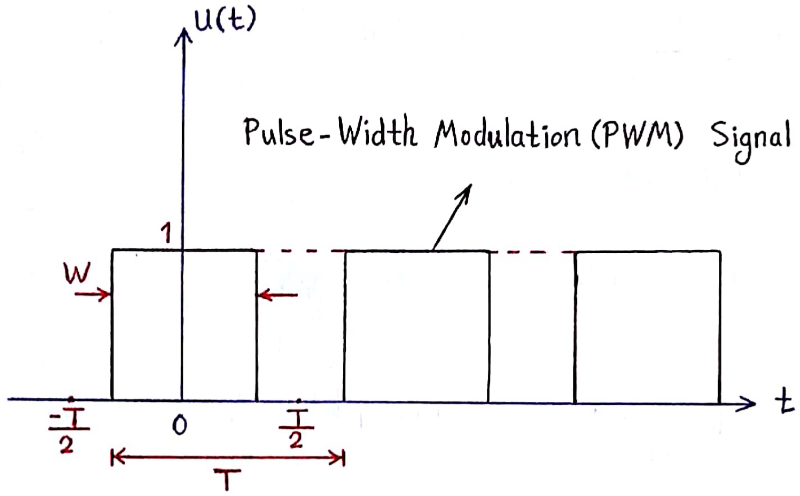
همانطور که ملاحظه می‌شود، دامنه‌ی نویز ورودی به سیستم در خروجی آن تضعیف شده و سیستم سعی در حذف نویز دارد.

* خاصیت فوق در یک سیستم را فیلتر کردن می‌نامیم. سیستم هایی که چنین خاصیتی را دارند، فیلتر پایین گذر (Low-pass Filter) نامیده می‌شود. یک فیلتر پایین گذر سیگنال‌هایی با فرکانس پایین را به راحتی از خود عبور می‌دهد اما سیگنال‌های فرکانس بالا را فیلتر می‌کند.



مثال: موتورهای الکتریکی DC دارای خاصیت سلفی در یک مدار الکتریکی هستند. به همین دلیل کنترل سرعت آن‌ها از طریق کنترل ولتاژ ورودی توسط مقاومت های متغیر امکان‌پذیر نیست. زیرا با تغییر مقاومت در مسیر، جریان عبوری از موتور نیز تغییر کرده و یک جریان القایی بزرگ ناشی از رفتار سلفی موتور تولید می‌شود که ممکن است به مدار الکتریکی آسیب بزند. بنابراین برای کنترل سرعت موتورهای DC ولتاژ ورودی آن‌ها به صورت سیگنال PWM (شکل زیر) اعمال می‌شود.

محتوای فرکانسی این سیگنال را بدست آورده و بررسی کنید که آیا وجود وقفه‌های زمانی در این سیگنال دچار ایجاد وقفه در گشتاور خروجی موتور نیز می‌شود یا خیر؟



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$* \; D = \frac{W}{T}$:(Duty Cycle) دوره‌ی کاری $\Rightarrow$ $D=1:\; u(t)=1$, $D=0:\; u(t)=0$

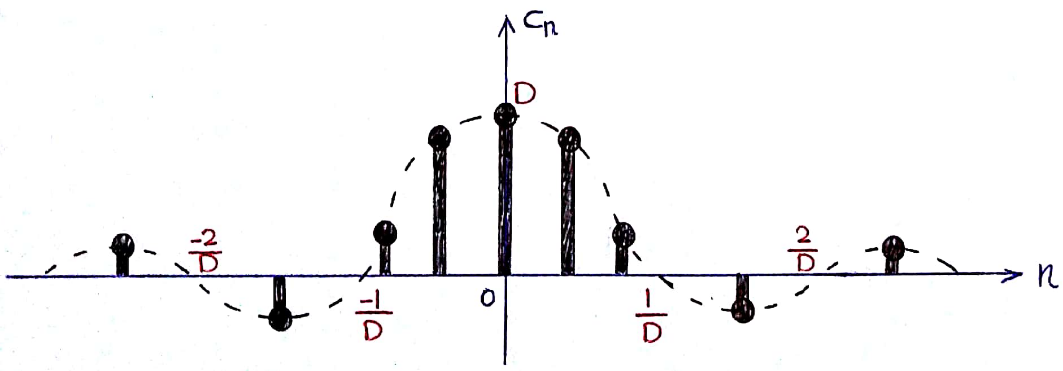
محتوای فرکانسی سیگنال با محاسبه‌ی ضریب سری فوریه بدست می‌آید:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\, e^{-in\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} 1\, e^{-in\omega_0 t}\, dt = -\frac{1}{in\left(\frac{2\pi}{T}\right)T}\left(e^{-in\left(\frac{2\pi}{T}\right)\frac{W}{2}} - e^{in\left(\frac{2\pi}{T}\right)\frac{W}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\frac{e^{in\pi\frac{W}{T}} - e^{-in\pi\frac{W}{T}}}{2i}\right] = \frac{\sin(n\pi D)}{n\pi} = \frac{D\sin(n\pi D)}{n\pi D} \Rightarrow$$

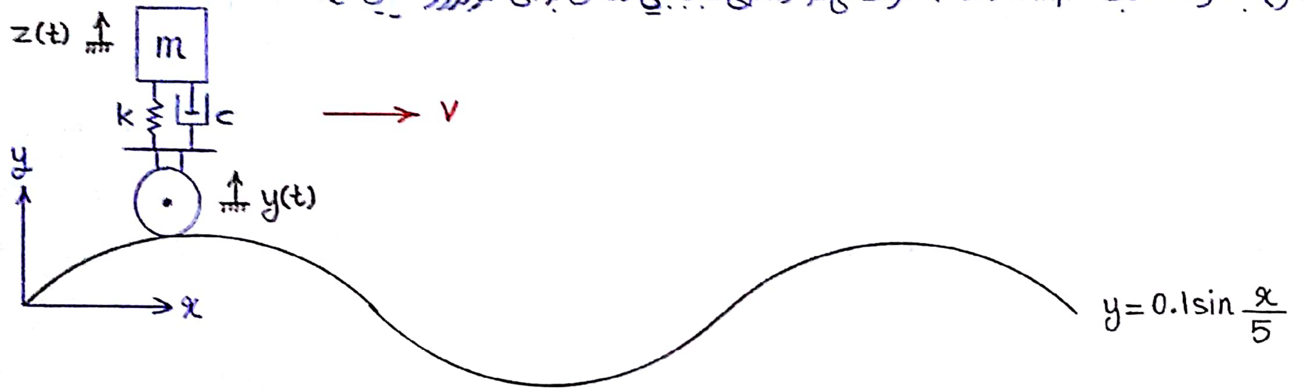
$$* \; c_n = D\,\mathrm{sinc}(n\pi D)$$

$$\Rightarrow * \; u(t) = D\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{sinc}(n\pi D)\, e^{in\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$ سری فوریه‌ی مختلط:

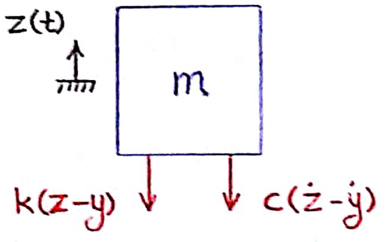


هارمونیک های با فرکانس پایین بخش اعظمی از سیگنال PWM را تشکیل می‌دهند. در نتیجه موتور DC ولتاژ اعمال شده به شکل PWM را ولتاژ ثابت تلقی خواهد کرد و علارغم وجود وقفه های زمانی در سیگنال ورودی، در خروجی موتور (گشتاور خروجی) وقفه‌ای دیده نخواهد شد.

مثال: شکل زیر مدل ساده‌ای از سیستم تعلیق یک خودرو را نشان می‌دهد. این خودرو روی یک سطح ناهموار هارمونیک به معادله‌ی $y=0.1\sin\frac{x}{5}$ (x و y برحسب متر) با سرعت ثابت $V = 20\ m/s$ حرکت می‌کند. دامنه‌ی جابجایی مطلق بدنه‌ی خودرو را تعیین کنید.



$m=1100\ kg\ ,\ c=350\ \frac{Ns}{m}\ ,\ k=8000\ \frac{N}{m}$



$$m\ddot{z}=-c(\dot{z}-\dot{y})-k(z-y) \Rightarrow m\ddot{z}+c\dot{z}+kz=c\dot{y}+ky \xRightarrow{\mathcal{L}}$$

$$G(s)=\frac{Z(s)}{Y(s)}=\frac{cs+k}{ms^2+cs+k}$$

$$x=vt \Rightarrow y=0.1\sin\frac{vt}{5}=0.1\sin\frac{20t}{5}=0.1\sin 4t \Rightarrow \omega=4\ rad/s$$

$$e^{i\omega t} \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow |G(i\omega)|\, e^{i(\omega t+\phi)}$$

$$G(i\omega)=\frac{350(i\omega)+8000}{1100(i\omega)^2+350(i\omega)+8000} \Rightarrow G(i\omega)\Big|_{\omega=4rad/s}=\frac{350(4)i+8000}{-1100(4)^2+350(4)i+8000}$$

$$\Rightarrow G(i\omega)=-0.8-i0.26 \Rightarrow |G(i\omega)|=\sqrt{(-0.8)^2+(-0.26)^2}=0.84\ ,$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{-0.26}{-0.8}\right)=3.46$$

خروجی سیستم به ازای ورودی $y_1(t)=e^{i\omega t}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$z_1(t) = 0.84e^{i(4t+3.46)} = 0.84\left[\cos(4t+3.46) + i\sin(4t+3.46)\right]$$

خروجی سیستم به ازای ورودی $y(t) = 0.1\sin 4t$ به صورت زیر می باشد:

$$z(t) = 0.1\ \mathrm{Im}\left[z_1(t)\right] \Rightarrow z(t) = 0.084\sin(4t+3.46)$$

دامنه ی جابجایی مطلق بدنه ی خودرو $0.084\ m$ است.

دیاگرام بود (Bode Diagram):

خصوصیات پاسخ فرکانسی یک سیستم را می توان با دو نمودار مجزا نمایش داد. این دو نمودار منحنی لگاریتم اندازه (ضریب بزرگنمایی) برحسب لگاریتم فرکانس ورودی و منحنی زاویه (اختلاف فاز) برحسب لگاریتم فرکانس ورودی می باشند. این دو نمودار را دیاگرام بودی نامیم.

لگاریتم اندازه (Log Magnitude): لگاریتم دامنه ی تابع تبدیل فرکانسی $G(i\omega)$ را لگاریتم اندازه می نامیم. لگاریتم اندازه تابعی از فرکانس ورودی (ω) بوده و برحسب دسی بل (dB) بیان می شود:

$$* \ M = 20\log|G(i\omega)| \qquad (dB)$$

اوکتاو (Octave): یک اوکتاو باند فرکانسی از ω_1 تا ω_2 است به طوری که $2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ باشد. تعداد اوکتاو های یک محدوده ی فرکانسی دلخواه از ω_1 تا ω_2 برابر است با:

$$\frac{\log\frac{\omega_2}{\omega_1}}{\log 2} = 3.32\log\frac{\omega_2}{\omega_1} \qquad (oct.)$$

دهه (Decade): یک دهه باند فرکانسی از ω_1 تا ω_2 است به طوری که $10 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ باشد. تعداد دهه های یک محدوده ی فرکانسی دلخواه از ω_1 تا ω_2 برابر است با:

$$\frac{\log\frac{\omega_2}{\omega_1}}{\log 10} = \log\frac{\omega_2}{\omega_1} \qquad (dec.)$$

تابع تبدیل یک سیستم را می توان در حالت کلی به صورت زیر نوشت:

$$* \; G(s) = \frac{K(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots}{s^{\pm m}(Ts+1)(\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1)\cdots}$$

تابع تبدیل فرکانسی سیستم فوق را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$s = i\omega \Rightarrow \quad * \; G(i\omega) = \frac{K(i\omega T_1 + 1)(i\omega T_2 + 1)\cdots}{(i\omega)^{\pm m}(i\omega T + 1)[\frac{1}{\omega_n^2}(i\omega)^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}(i\omega) + 1]\cdots}$$

لگاریتم اندازه و زاویه‌ی فاز تابع تبدیل فرکانسی فوق را می‌توان با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم به صورت زیر تعیین نمود:

$$* \; M = 20\log|G(i\omega)| = 20\Big[\log|K| + \log|i\omega T_1 + 1| + \log|i\omega T_2 + 1| + \cdots - (\pm m)\log|i\omega|$$

$$- \log|i\omega T + 1| - \log\left|\frac{1}{\omega_n^2}(i\omega)^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}(i\omega) + 1\right| - \cdots\Big]$$

$$* \; \phi = \angle G(i\omega) = \angle K + \angle(i\omega T_1 + 1) + \angle(i\omega T_2 + 1) + \cdots - (\pm m)\angle(i\omega) - \angle(i\omega T + 1)$$

$$- \angle\left[\frac{1}{\omega_n^2}(i\omega)^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}(i\omega) + 1\right] - \cdots = \angle K + \tan^{-1}(\omega T_1) + \tan^{-1}(\omega T_2) + \cdots$$

$$- (\pm m)\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega T) - \tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2}\right) - \cdots$$

عبارت‌های صورت و مخرج هر تابع تبدیل دیگری را می‌توان به صورت حاصل ضرب چهار فاکتور زیر نوشته و لگاریتم اندازه و زاویه‌ی فاز آن را به صورت مثال فوق تعیین نمود:

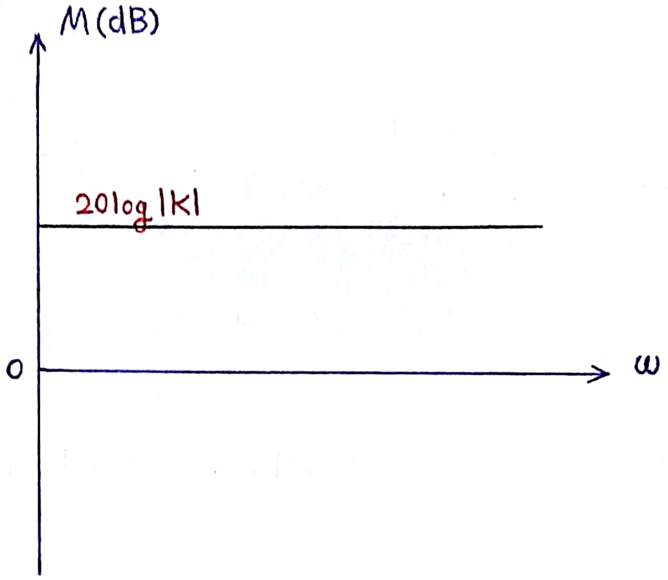
$$K, \; s^{\pm m}, \; (Ts+1), \; (\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1)$$

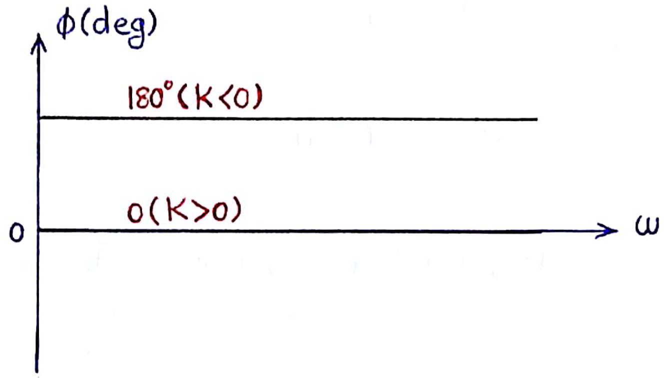
۱. فاکتور بهره: K

لگاریتم اندازه‌ی فاکتور بهره مقداری ثابت و مستقل از فرکانس ورودی است. بنابراین منحنی اندازه‌ی فاکتور بهره در دیاگرام بوده، خط راستی با شیب صفر خواهد بود. زاویه‌ی فاز فاکتور بهره برحسب علامت K می‌تواند صفر یا برابر π رادیان باشد.

$$G(s) = K \quad \Longrightarrow \quad G(i\omega) = K$$

$$M = 20\log|G(i\omega)| = 20\log|K| \quad , \quad \phi = \angle G(i\omega) = \angle K = \tan^{-1}\frac{0}{K} = \begin{cases} 0 & K>0 \\ \pi & K<0 \end{cases}$$





2 . فاکتور مشتق‌گیر و انتگرال‌گیر: $s^{\pm m}$

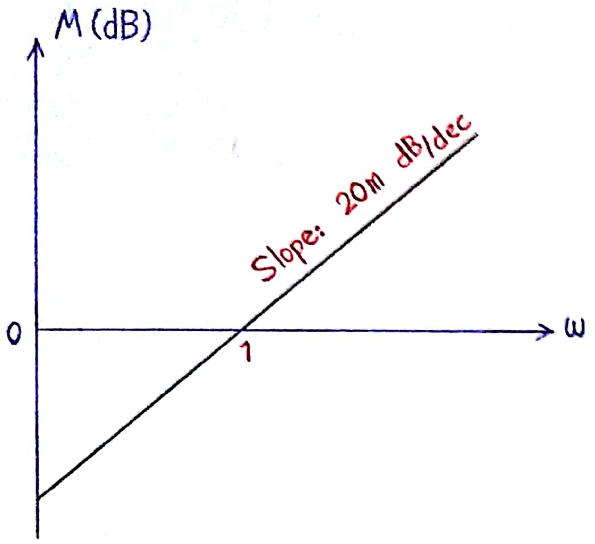
مشتق‌گیر با مرتبه‌ی m:

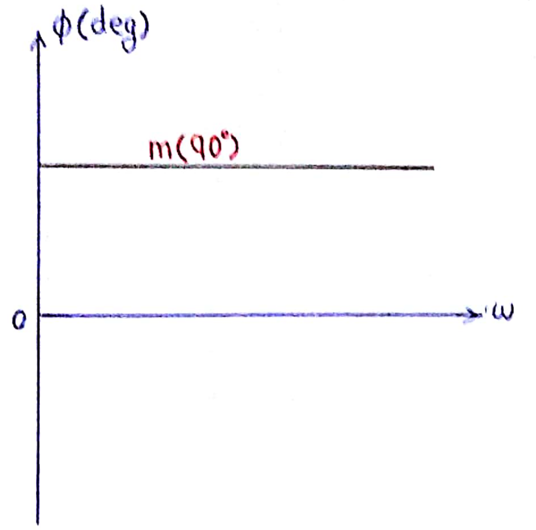
$$G(s) = s^m \quad \Longrightarrow \quad G(i\omega) = (i\omega)^m$$

$$M = 20\log|G(i\omega)| = 20\log|(i\omega)^m| = 20m\log\omega \quad ,$$

$$\phi = \angle G(i\omega) = \angle (i\omega)^m = m\tan\frac{\omega}{0} = m\tan\infty = m\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

منحنی اندازه‌ی مشتق‌گیر با مرتبه‌ی m در دیاگرام بُد، خط راستی با شیب $20m\,\frac{dB}{dec}$ است که برای $\omega=1$ محور افقی دیاگرام را قطع می‌کند. زاویه‌ی فاز این فاکتور همواره برابر $m(\frac{\pi}{2})$ رادیان می‌باشد.



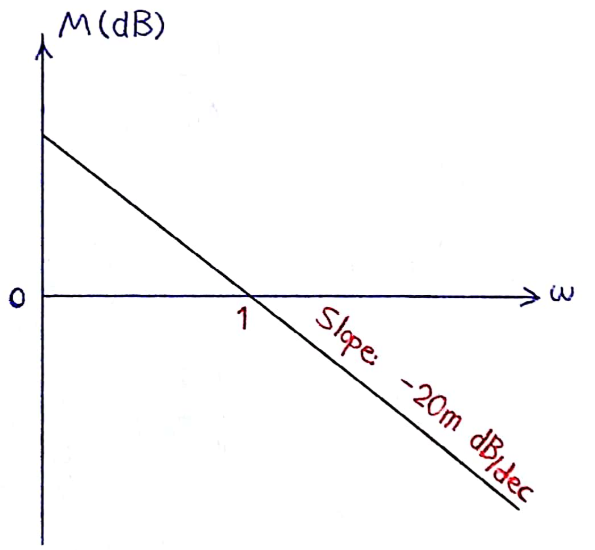


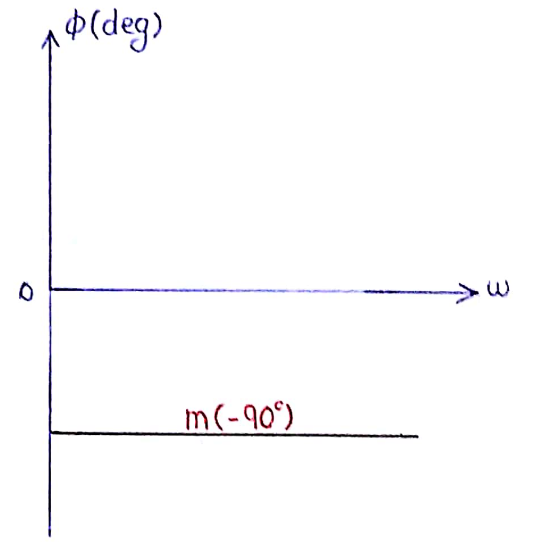
$$G(s)=\frac{1}{s^m} \Rightarrow G(i\omega)=\frac{1}{(i\omega)^m}$$ انتگرال‌گیر با مرتبه‌ی m :

$$M=20\log|G(i\omega)|=20\log\left|\frac{1}{(i\omega)^m}\right|=-20m\log\omega$$ و

$$\phi=\angle G(i\omega)=\angle\frac{1}{(i\omega)^m}=-m\tan^{-1}\frac{\omega}{0}=-m\tan\infty=m(-\frac{\pi}{2})$$

منحنی اندازه‌ی انتگرال‌گیر با مرتبه‌ی m در دیاگرام بود، خط راستی با شیب $-20m\ \frac{dB}{dec}$ است که به ازای $\omega=1$ محور افقی دیاگرام را قطع می‌کند. زاویه‌ی فاز این فاکتور همواره برابر $m(\frac{-\pi}{2})$ رادیان می‌باشد.





3. فاکتور مرتبه‌ی اول: $(Ts+1)$

فاکتور مرتبه‌ی اول دارای یک فرکانس شکست در $\frac{1}{T}=\omega_c$ است. فرکانس شکست فرکانسی است که در آن مجانب منحنی اندازه شکسته می‌شود.

منحنی اندازه‌ی فاکتور مرتبه‌ی اول از صفر با شیب صفر شروع شده و در فرکانس شکست به یک مجانب با شیب $\pm 20 \, \frac{dB}{dec}$ نزدیک می‌شود. زاویه‌ی فاز این فاکتور بین صفر و $\pm\frac{\pi}{2}$ رادیان تغییر می‌کند.

$$G_1(s) = Ts+1 \quad \Longrightarrow \quad G_1(i\omega) = i\omega T + 1$$

$$G_2(s) = \frac{1}{Ts+1} \quad \Longrightarrow \quad G_2(i\omega) = \frac{1}{i\omega T+1}$$

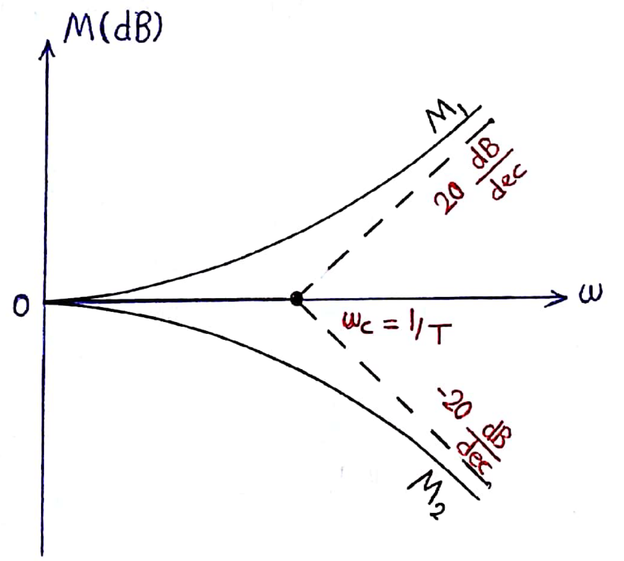
$$M_1 = 20\log|G_1(i\omega)| = 20\log|i\omega T+1| = 20\log\sqrt{(\omega T)^2+1} \quad ,$$

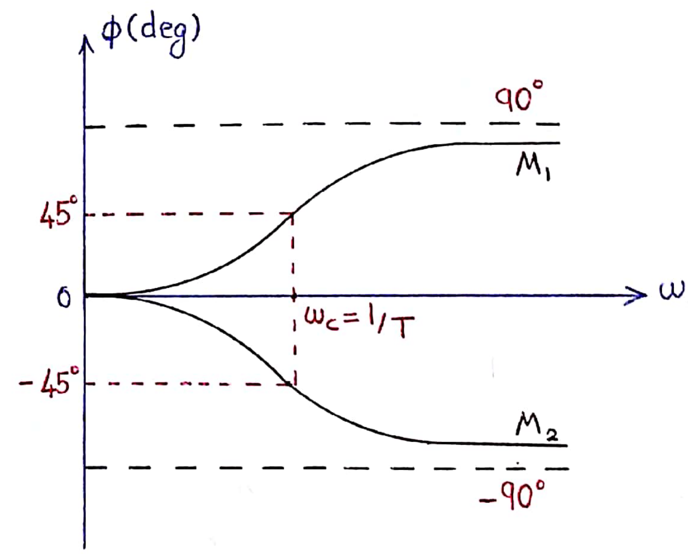
$$\phi_1 = \angle G_1(i\omega) = \angle(i\omega T+1) = \tan^{-1}\omega T$$

$$M_2 = 20\log|G_2(i\omega)| = 20\log\left|\frac{1}{i\omega T+1}\right| = -20\log\sqrt{(\omega T)^2+1} \quad ,$$

$$\phi_2 = \angle G_2(i\omega) = \angle\left(\frac{1}{i\omega T+1}\right) = -\tan^{-1}\omega T$$

$$\omega \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad M = 0 \, , \; \phi = 0 \qquad\qquad \omega \gg 1 \quad \Longrightarrow \quad M = \pm 20\log\omega T , \; \phi = \pm\frac{\pi}{2}$$





۴. فاکتور مرتبه‌ی دوم: $\left(\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\xi}{\omega_n}s+1\right)$

فاکتور مرتبه‌ی دوم دارای یک فرکانس شکست در $\omega_c=\omega_n$ است. منحنی اندازه‌ی فاکتور مرتبه‌ی دوم از صفر با شیب صفر شروع شده و در فرکانس شکست به یک مجانب با شیب $\pm 40 \frac{dB}{dec}$ نزدیک می‌شود. زاویه‌ی فاز این فاکتور بین صفر و $\pm\pi$ رادیان تغییر می‌کند.

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \Rightarrow G(i\omega)=\frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}(i\omega)^2+\left(\frac{2\xi}{\omega_n}\right)(i\omega)+1}$$

$$M=20\log|G(i\omega)|=-20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad ,$$

$$\phi=\angle G(i\omega)=-\tan^{-1}\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\omega\ll 1 \Rightarrow M=0\ ,\ \phi=0 \qquad\qquad \omega\gg 1 \Rightarrow M=-40\log\frac{\omega}{\omega_n}\ ,\ \phi=-\pi$$

فرکانس و اندازه‌ی قله‌ی تشدید فاکتور مرتبه‌ی دوم به صورت زیر می‌باشد:

$$|G(i\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)}}\ ,\quad \frac{d}{d\omega}|G(i\omega)|=0 \Rightarrow *\ \omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}\ ;\ 0\leqslant\xi\leqslant\frac{\sqrt2}{2}$$

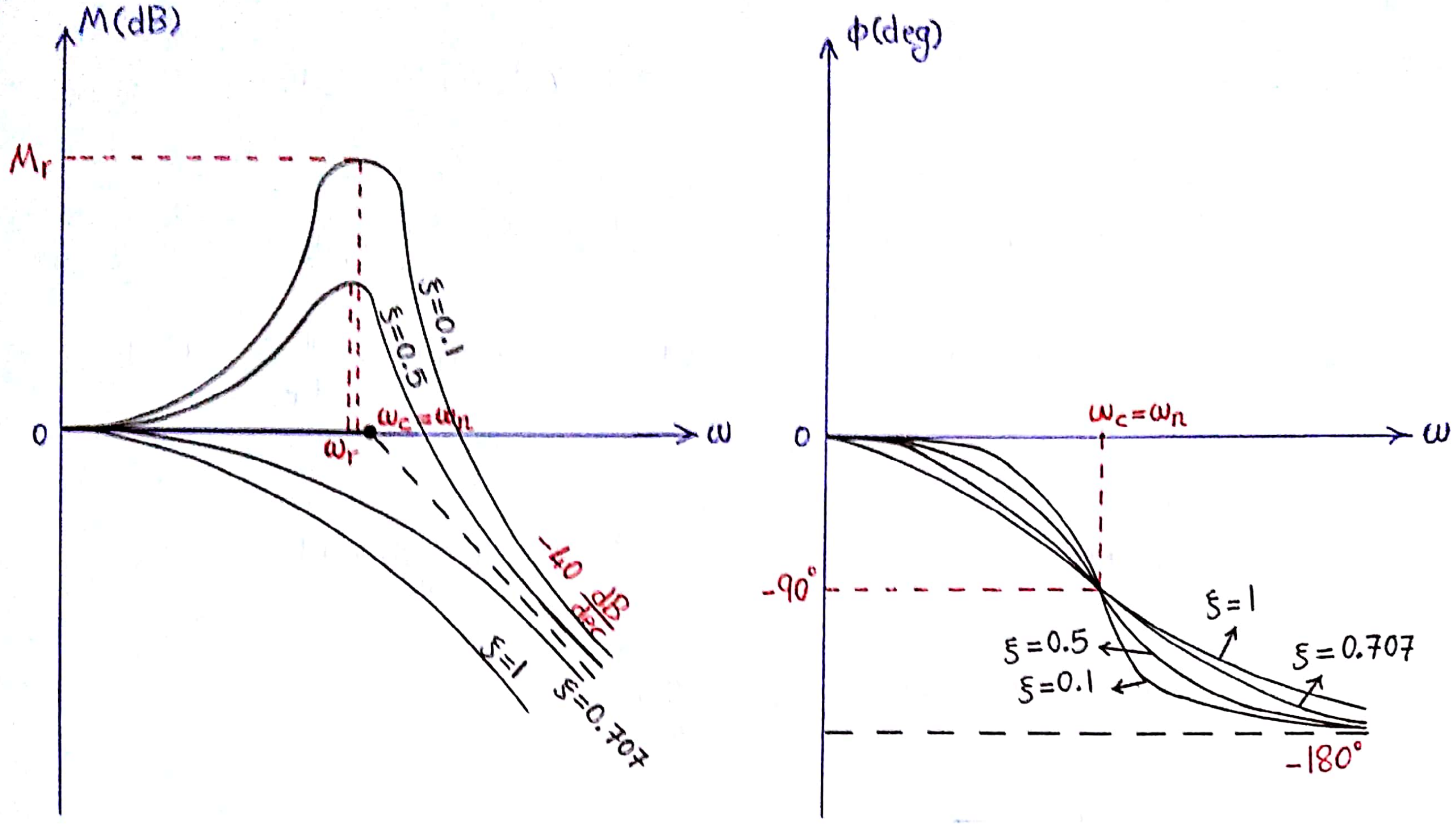
$$M_r=M\Big|_{\omega=\omega_r} \Rightarrow *\ M_r=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

به ازای $\xi>\frac{\sqrt2}{2}=0.707$ فاکتور مرتبه‌ی دوم فاقد قله‌ی تشدید می‌باشد.

زاویه‌ی فاز تشدید فاکتور مرتبه‌ی دوم به صورت زیر قابل تعیین است:

$$\phi_r=\phi\Big|_{\omega=\omega_r} \Rightarrow *\ \phi_r=-\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\xi}$$

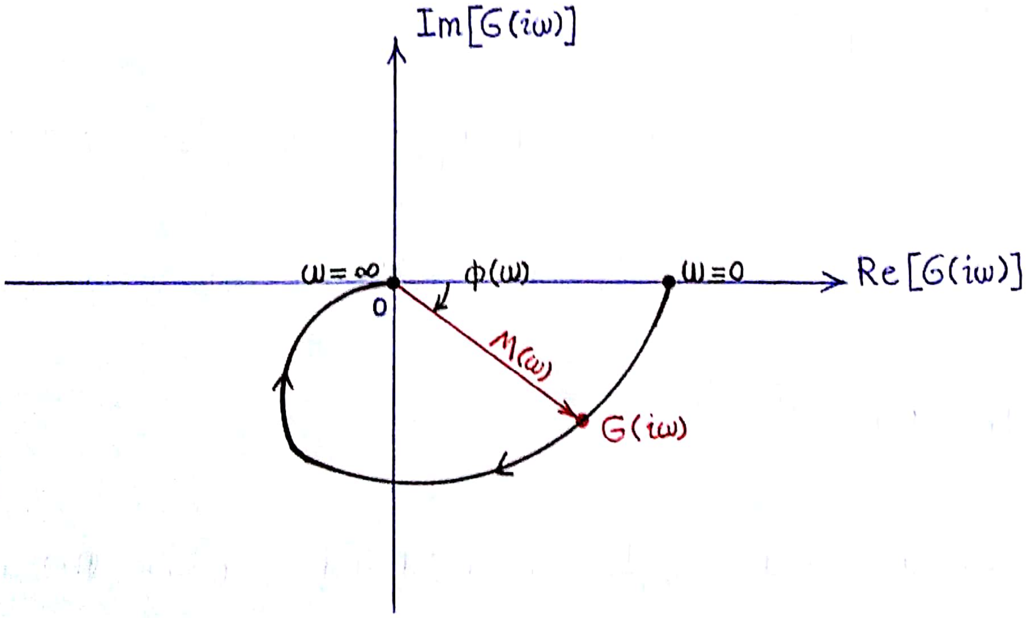
پهنای باند (Bandwidth): محدوده‌ای از فرکانس‌ها که به ازای آن $M_r\geqslant\frac{1}{\sqrt2}$ باشد، پهنای باند نامیده می‌شود.



دیاگرام نایکوئیست (Nyquist Diagram):

دیاگرام نایکوئیست نمودار قطبی تابع تبدیل فرکانسی $G(i\omega)$ یا به عبارت دیگر نمودار اندازه برحسب زاویه‌ی فاز تابع مختلط $G(i\omega)$ در مختصات قطبی است، با تغییر فرکانس (ω) از صفر تا بی‌نهایت ترسیم می‌شود.

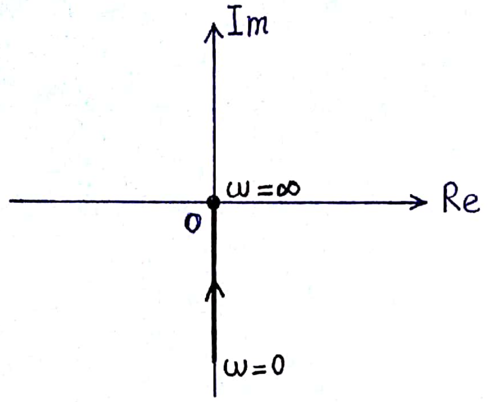
$$* \quad G(i\omega) = |G(i\omega)|\, e^{i\angle G(i\omega)} = M(\omega)\, e^{i\phi(\omega)}$$



دیاگرام نایکوئیست برخی از توابع تبدیل پرکاربرد به صورت زیر ترسیم می‌گردد:

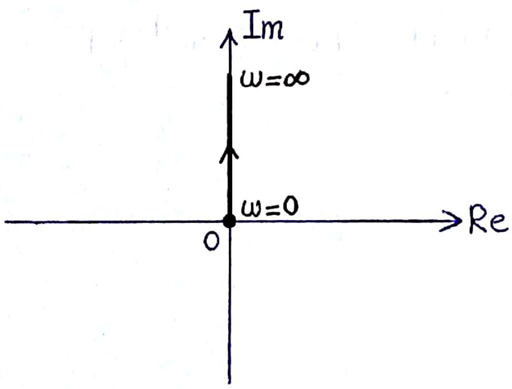
۱. تابع تبدیل انتگرال‌گیر:

$$G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow G(i\omega) = \frac{1}{i\omega} = \frac{-i}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow * \; M(\omega) = \frac{1}{\omega} \; , \; \phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$



2. تابع تبدیل مشتق‌گیر:

$$G(s) = s \Rightarrow G(i\omega) = i\omega = \omega e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow * \; M(\omega) = \omega \; , \; \phi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$



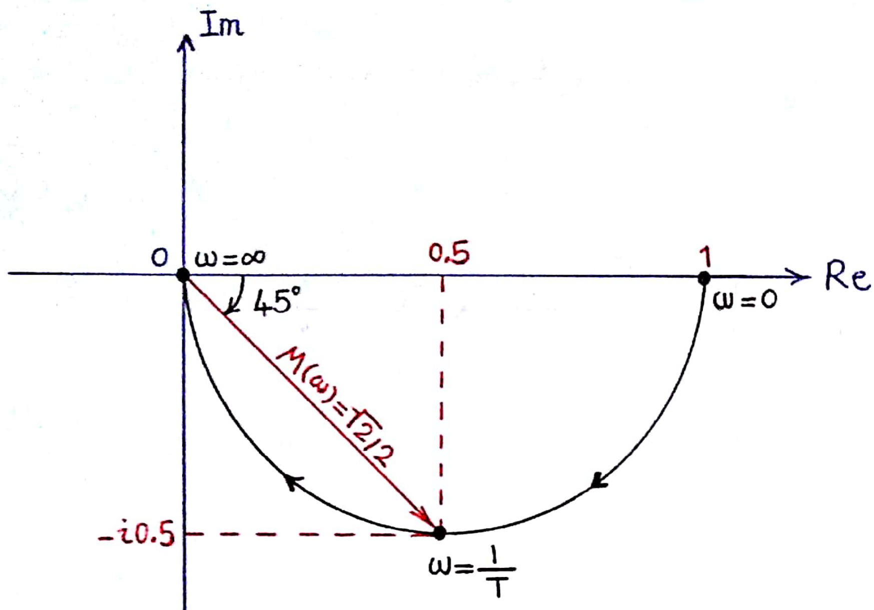
3. تابع تبدیل سیستم مرتبه‌ی اول:

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1} \Rightarrow G(i\omega) = \frac{1}{i\omega T+1} = \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2+1}} e^{-i\tan^{-1}\omega T} \Rightarrow$$

$$* \; M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2+1}} \; , \; \phi(\omega) = -\tan \omega T$$

$$\omega = 0 \Rightarrow M(0) = 1 \; , \; \phi(0) = 0$$

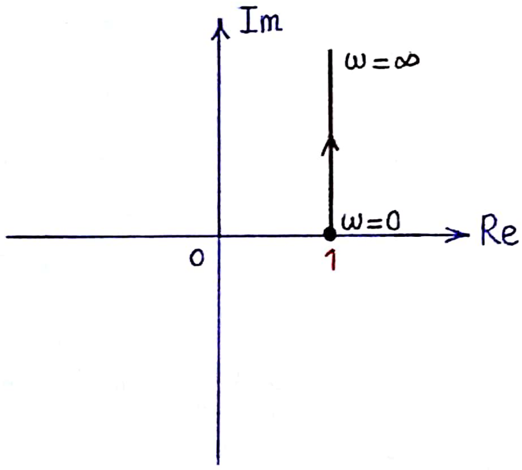
$$\omega = \infty \Rightarrow M(\infty) = 0 \; , \; \phi(\infty) = -\frac{\pi}{2}$$



* دیاگرام نایکوئیست برای یک سیستم مرتبه‌ی اول به صورت یک نیم‌دایره است.

اگر تابع تبدیل سیستم به فرم $G(s)=Ts+1$ باشد، خواهیم داشت:

$$G(s)=Ts+1 \Rightarrow G(i\omega)=i\omega T+1 \Rightarrow * \; M(\omega)=\sqrt{(\omega T)^2+1}\;,\;\phi(\omega)=\tan^{-1}\omega T$$



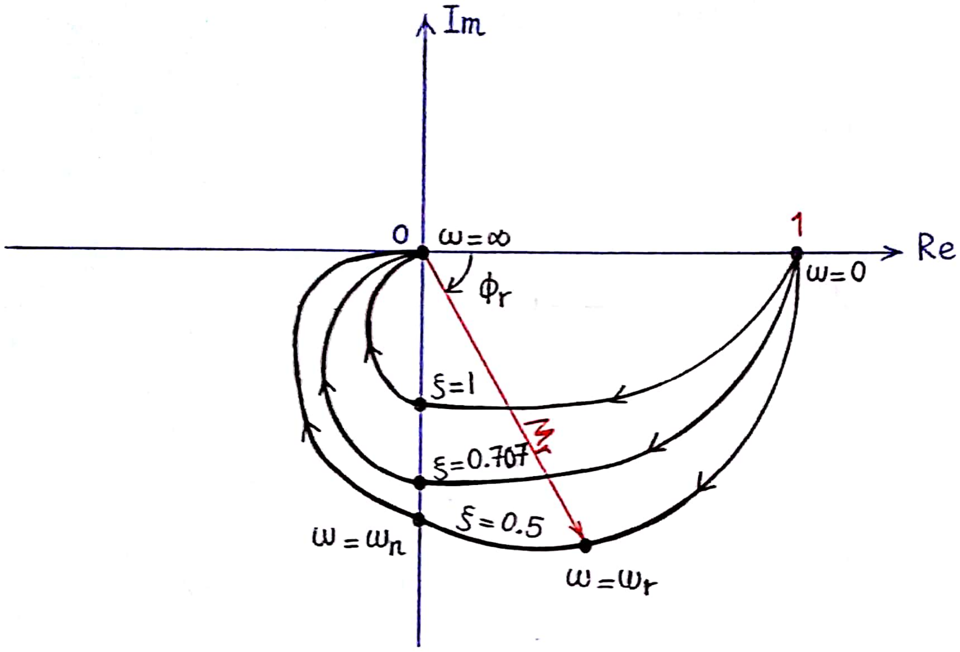
4. تابع تبدیل سیستم مرتبه‌ی دوم:

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\;;\;\xi>0 \Rightarrow G(i\omega)=\frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}(i\omega)^2+\left(\frac{2\xi}{\omega_n}\right)(i\omega)+1} \Rightarrow$$

$$* \; M(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}}\;,\;\phi(\omega)=-\tan^{-1}\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$\omega = 0 \Rightarrow M(0) = 1 \ , \ \phi(0) = 0$ $\qquad\qquad$ $\omega = \infty \Rightarrow M(\infty) = 0 \ , \ \phi(\infty) = -\pi$

$\omega = \omega_n \Rightarrow M(\omega_n) = \dfrac{1}{2\xi} \ , \ \phi(\omega_n) = -\dfrac{\pi}{2}$

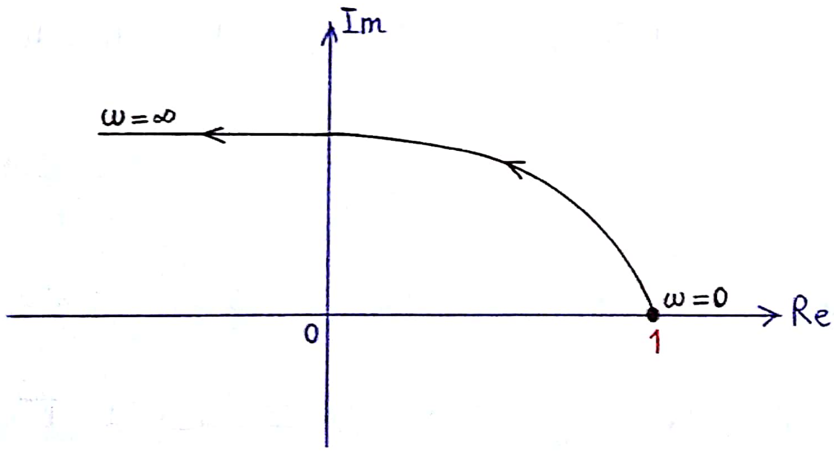


اگر تابع تبدیل سیستم به فرم $\ 1 + s \dfrac{2\xi}{\omega_n} + s^2 \dfrac{1}{\omega_n^2} = G(s)\ $ باشد، خواهیم داشت:

$$G(s) = \frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1 \Rightarrow G(i\omega) = \frac{1}{\omega_n^2}(i\omega)^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}(i\omega) + 1 \Rightarrow$$

$$* \ M(\omega) = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2} \ , \ \phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

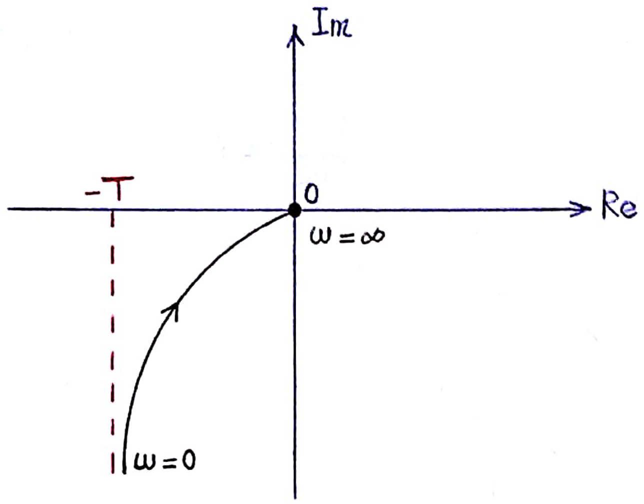
$\omega = 0 \Rightarrow M(0) = 1 \ , \ \phi(\omega) = 0$ $\qquad\qquad$ $\omega = \infty \Rightarrow M(\infty) = \infty \ , \ \phi(\infty) = \pi$



مثال، دیاگرام نایکوییست سیستمی با تابع تبدیل $G(s)=\dfrac{1}{s(Ts+1)}$ را رسم کنید.

$$G(i\omega)=\frac{1}{i\omega(i\omega T+1)} \Longrightarrow M(\omega)=\frac{1}{\omega\sqrt{(\omega T)^2+1}}\ ,\ \phi(\omega)=-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\omega T$$

$$M(0)=\infty\ ,\ \phi(0)=-\frac{\pi}{2} \qquad\qquad M(\infty)=0\ ,\ \phi(\infty)=-\pi$$



نگاشت مسیر و قضیه‌ی کوشی:

تابع مختلط $F(s)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$F(s)=\frac{(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}$$

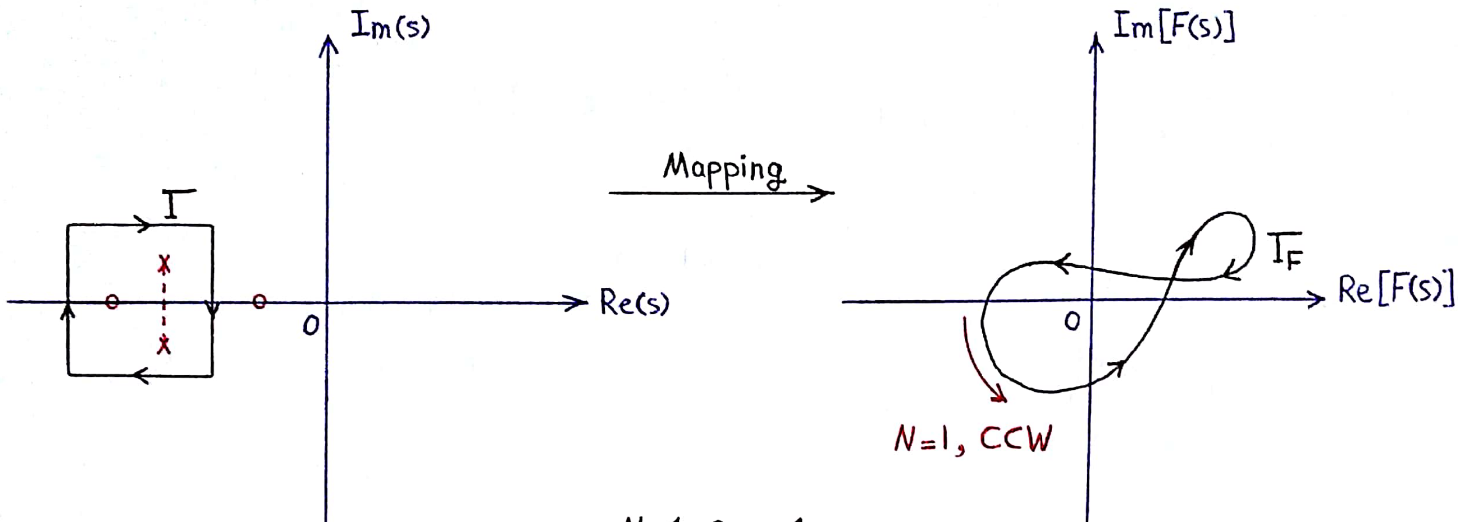
این تابع هر نقطه‌ی دلخواه از صفحه‌ی مختلط s را به یک نقطه در صفحه‌ی مختلط $F(s)$ نگاشت می‌کند.

نگاشت کانتور بسته‌ای در صفحه‌ی s که یک صفر تابع $F(s)$ را احاطه کرده است، درصورتی که ساعتگرد باشد، مبدأ صفحه‌ی $F(s)$ را یک بار در جهت ساعتگرد دور خواهد زد و نگاشت کانتور بسته‌ای در صفحه‌ی s که یک قطب تابع $F(s)$ را احاطه کرده است، درصورتی که ساعتگرد باشد، مبدأ صفحه‌ی $F(s)$ را یک بار در جهت پادساعتگرد دور خواهد زد.

نگاشت کانتور بسته‌ای در صفحه‌ی s که هیچ قطب و صفری را احاطه نکرده است، مبدأ صفحه‌ی $F(s)$ را نیز احاطه نخواهد کرد.

قضیه: اگر کانتور بسته‌ی Γ تعداد P قطب و Z صفر از تابع $F(s)$ را در جهت ساعتگرد احاطه کرده باشد، نگاشت آن تحت تابع مختلط $F(s)$، کانتور بسته‌ای به صورت Γ_F خواهد بود که مبدأ صفحه‌ی $F(s)$ را احاطه نموده و به تعداد $N=Z-P$ مرتبه آن را در جهت ساعتگرد و به طور کامل

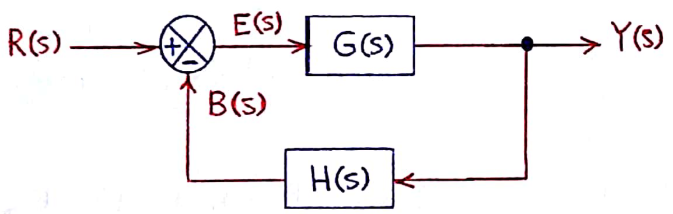
دور خواهد زد. چنانچه N منفی باشد، کانتور مورد نظر مبدا صفحه‌ی $F(s)$ را در جهت پادساعتگرد دور خواهد زد.



$N=1-2=-1$

بررسی پایداری سیستم ها به روش نایکوئیست:

سیستم زیر را در نظر بگیرید. معادله‌ی مشخصه‌ی چنین سیستمی به صورت $1+G(s)H(s)=0$ می باشد:

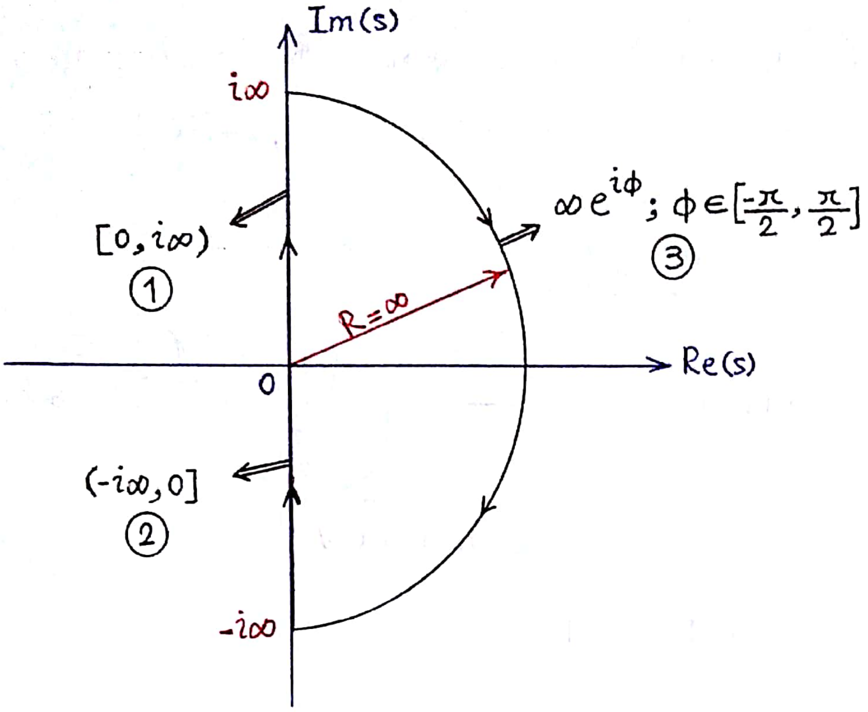


تابع مختلط $F(s)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$F(s)=1+G(s)H(s)$$

در این صورت صفرهای تابع $F(s)$ قطب های تابع تبدیل حلقه بسته‌ی سیستم و قطب های تابع $F(s)$ قطب های تابع تبدیل حلقه باز سیستم خواهند بود.

پایداری سیستم ایجاب می کند که هیچ قطب حلقه بسته‌ای در سمت راست محور موهومی صفحه‌ی مختلط (s) قرار نداشته باشد. به منظور بررسی این موضوع، یک کانتور بسته و ساعتگرد که کل محور موهومی $Im(s)$ و نیم دایره‌ای به شعاع بی نهایت در سمت راست آن را شامل می شود، در نظر می گیریم. این کانتور بسته را مسیر نایکوئیست می نامیم. مسیر نایکوئیست تمامی صفرها و قطب های تابع $F(s)$ واقع در سمت راست محور موهومی صفحه‌ی مختلط (s) را در بر می گیرد.



اگر تابع $F(s)$ هیچ صفری در داخل مسیر نایکوئیست نداشته باشد، تابع تبدیل حلقه بسته‌ی سیستم قطب ناپایداری نداشته و پایدار خواهد بود.

اگر مسیر نایکوئیست تحت تابع مختلط $F(s)$ نگاشت داده شود، تعداد ریشه های مشخصه (قطب های تابع تبدیل حلقه بسته) واقع در سمت راست محور موهومی صفحه‌ی مختلط (s) مشخص می‌گردد.

* نگاشت ناحیه‌ی اول از مسیر نایکوئیست $[0,i\infty)$ تحت تابع مختلط $F(s)$، نمودار قطبی (دیاگرام نایکوئیست) تابع تبدیل فرکانسی $1+G(i\omega)H(i\omega)$ به ازای تغییرات فرکانس در بازه‌ی $0 \le \omega < \infty$ می‌باشد.

* نگاشت ناحیه‌ی دوم از مسیر نایکوئیست $(-i\infty,0]$ تحت تابع مختلط $F(s)$، نمودار قطبی (دیاگرام نایکوئیست) مزدوج تابع تبدیل فرکانسی $1+G(i\omega)H(i\omega)$ به ازای تغییرات فرکانس در بازه‌ی $-\infty < \omega \le 0$ یا به عبارت ساده‌تر تصویر آینه‌ی نگاشت ناحیه‌ی اول نسبت به محور حقیقی $Re[F(s)]$ می‌باشد.

* نگاشت ناحیه‌ی سوم از مسیر نایکوئیست (نیم دایره‌ی $\infty e^{i\phi}$) تحت تابع مختلط $F(s)$، نقطه‌ی 0 واقع در مبدأ صفحه‌ی مختلط $F(s)$ خواهد بود.

اگر نگاشت مسیر نایکوئیست تحت تابع مختلط $F(s)$ مبدأ صفحه‌ی مختلط $F(s)$ را N بار در جهت ساعتگرد دور بزند و P و Z به ترتیب تعداد قطب های حلقه باز ناپایدار سیستم و تعداد قطب‌های حلقه بسته‌ی ناپایدار سیستم باشد، خواهیم داشت:

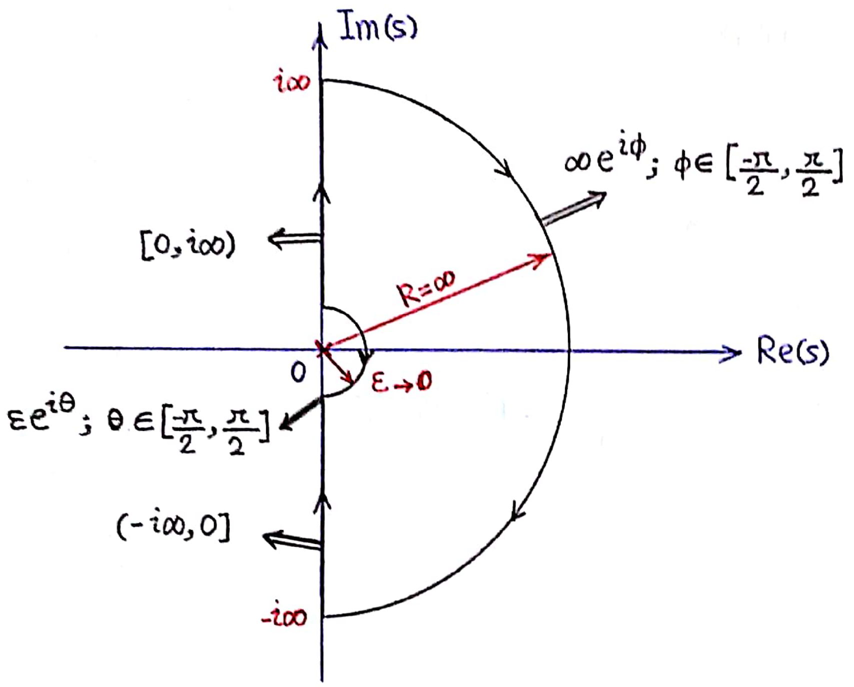
$$N = Z - P$$

از شرط پایداری سیستم داریم:

$$Z=0 \Rightarrow Z=N+P=0 \Rightarrow * \; N=-P$$

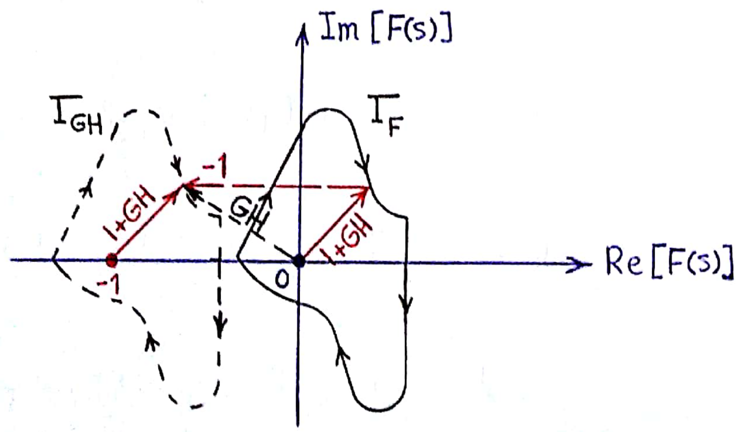
بنابراین شرط پایداری سیستم حلقه بسته این است که نگاشت مسیر نایکوئیست تحت تابع مختلط $F(s)$، به تعداد P بار مبدأ صفحه‌ی مختلط $F(s)$ را در جهت پاد-ساعتگرد دور بزند. P تعداد قطب های حلقه باز ناپایدار سیستم است.

نکته: مسیر نایکوئیست نباید از هیچ صفر یا قطب حلقه بازی عبور کند؛ در غیر این صورت مسیر نایکوئیست بایستی به صورت زیر اصلاح گردد:



نگاشت مسیر نایکوئیست تحت تابع مختلط $G(s)H(s)$ (تابع تبدیل حلقه باز سیستم) کاملاً مشابه نگاشت آن تحت تابع $F(s)$ با یک واحد انتقال به چپ می باشد.

بنابراین در تحلیل پایداری سیستم ها به روش نایکوئیست به جای رسم دیاگرام نایکوئیست تابع $F(s)$ و شمارش تعداد دورهای آن حول مبدأ، می توان دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل حلقه باز سیستم $[G(s)H(s)]$ را رسم نموده و تعداد دورهای آن حول نقطه‌ی $-1+i0$ به منظور تعیین N شمارش نمود.



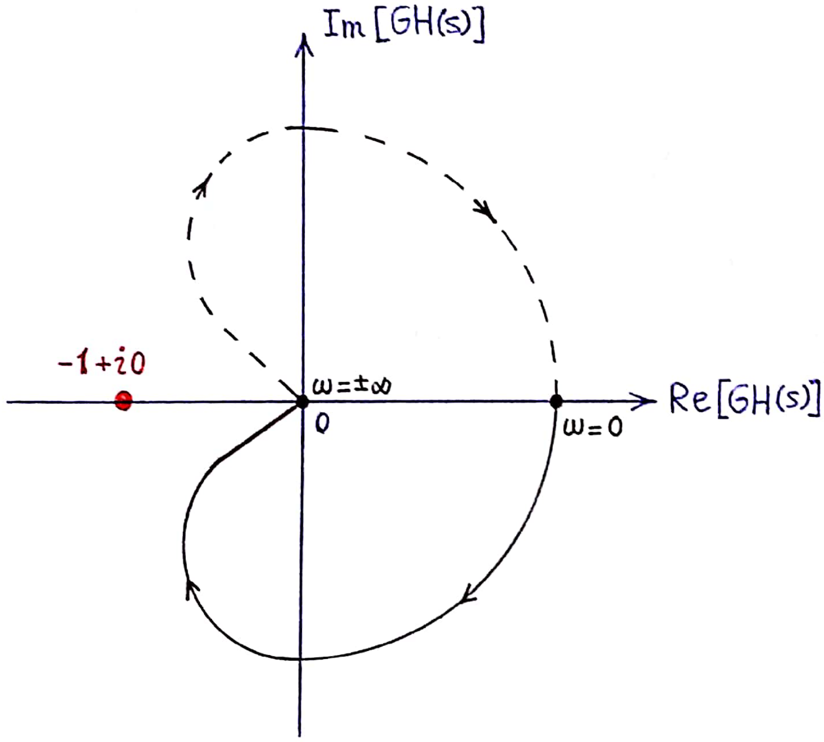
مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستم به صورت زیر است. پایداری آن را به روش نایکوئیست بررسی کنید.

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}\ ; \quad K, T_1, T_2 > 0$$

دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل حلقه باز سیستم را رسم می‌کنیم:

$$M(\omega)=|G(i\omega)H(i\omega)|=\frac{K}{\sqrt{1+(T_1\omega)^2}\cdot\sqrt{1+(T_2\omega)^2}}\ , \quad \phi(\omega)=\angle G(i\omega)H(i\omega)=-\tan^{-1}T_1\omega-\tan^{-1}T_2\omega$$

$$M(0)=1\ ,\ \phi(0)=0 \qquad\qquad M(\infty)=0\ ,\ \phi(\infty)=-\pi$$



تابع تبدیل حلقه باز سیستم هیچ قطب ناپایداری نداشته و لذا $P=0$ است. از طرفی با توجه به شکل فوق $N=0$ بوده و خواهیم داشت:

$Z=N+P=0 \implies$ سیستم حلقه بسته همواره پایدار است.

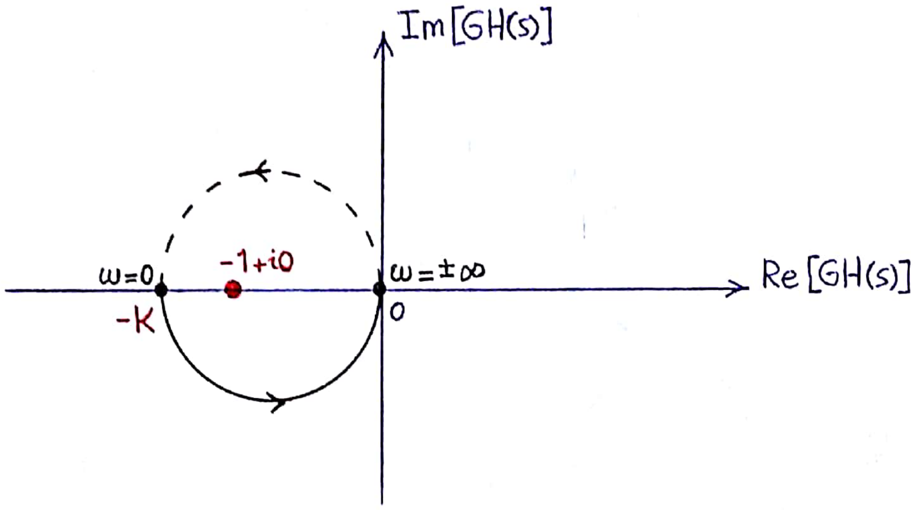
نکته: اگر سیستمی علاوه بر پایداری هیچ صفری در سمت راست محور موهومی صفحه‌ی مختلط (s) نداشته باشد، سیستم مینیمم فاز (Min. Phase) نامیده می‌شود. معکوس یک سیستم مینیمم فاز سیستمی پایدار است. در بررسی پایداری چنین سیستم‌هایی بایستی توجه داشت که $Z=N$ بوده و در نتیجه به منظور پایداری سیستم، دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل حلقه باز نباید نقطه‌ی $-1+i0$ را دور بزند. در چنین سیستم‌هایی بررسی نگاشت ناحیه‌ی اول مسیر نایکوئیست کافی بوده و سیستم در صورتی پایدار است که نقطه‌ی $-1+i0$ همواره در سمت چپ دیاگرام نایکوئیست به ازای $0 \le \omega < \infty$ قرار گیرد.

مثال: اگر تابع تبدیل حلقه‌باز سیستمی به صورت زیر باشد، پایداری سیستم حلقه بسته را به ازای مقادیر مختلف بهره (K) بررسی کنید.

$$G(s)H(s)=\frac{K}{Ts-1}\quad ;\quad K,T>0$$

دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز سیستم را رسم می‌کنیم:

$$M(\omega)=\frac{K}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}\ ,\ \phi(\omega)=-\tan^{-1}\frac{T\omega}{-1}\ \Rightarrow\ M(0)=K,\ \phi(0)=-\pi,\ M(\infty)=0,\ \phi(\infty)=-\frac{\pi}{2}$$



تابع تبدیل حلقه‌باز سیستم دارای یک قطب ناپایدار ($s=\frac{1}{T}$) بوده و $P=1$ می‌باشد. بنابراین شرط پایداری سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$K<1 \Rightarrow N=0 \Rightarrow Z=1$ ناپایدار

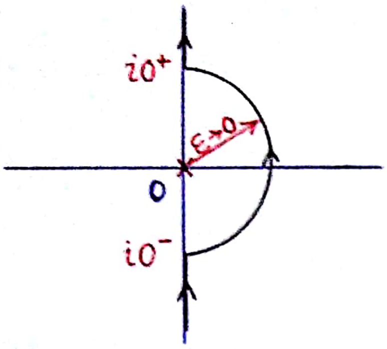
$K>1 \Rightarrow N=-1 \Rightarrow Z=-1+1=0$ پایدار

مثال: تابع تبدیل حلقه‌باز سیستمی به صورت زیر است. پایداری آن را بررسی کنید.

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

$$M(\omega)=\frac{K}{\omega\sqrt{1+(T_1\omega)^2}\sqrt{1+(T_2\omega)^2}}\ ,\ \phi(\omega)=\frac{-\pi}{2}-\tan^{-1}T_1\omega-\tan^{-1}T_2\omega\ \Rightarrow$$

$$M(0)=\infty,\ \phi(0)=\frac{-\pi}{2},\ M(\infty)=0,\ \phi(\infty)=\frac{-3\pi}{2}$$

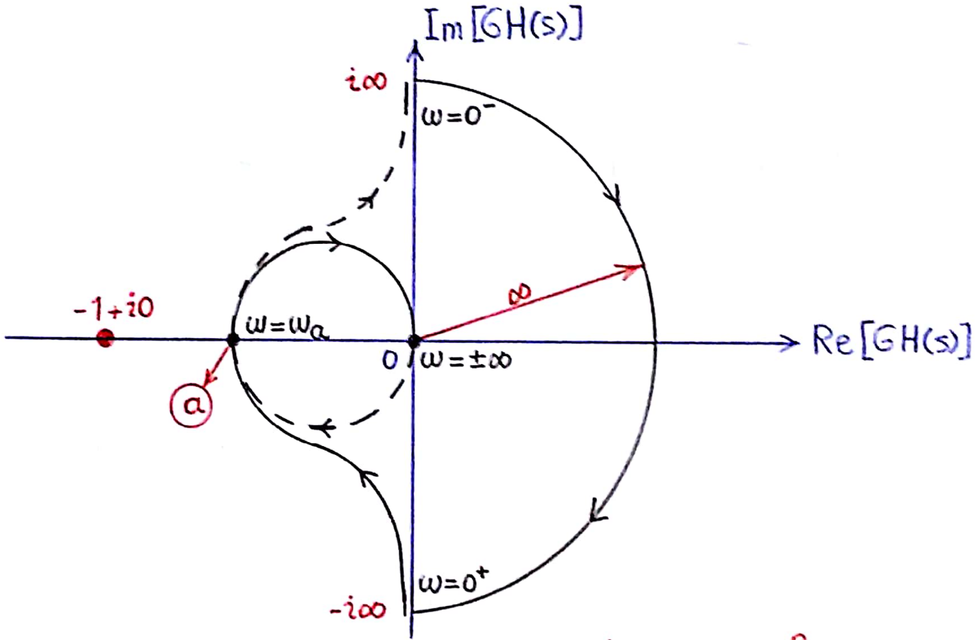


$$s = \varepsilon e^{i\theta};\ \varepsilon \to 0,\ \frac{-\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\ \ (\mathrm{CCW})$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow s = i0^{+},\quad \theta = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow s = i0^{-},\quad \theta = 0 \Rightarrow s = \varepsilon$$

$$G(\varepsilon e^{i\theta})H(\varepsilon e^{i\theta}) = \frac{K}{\varepsilon e^{i\theta}(T_1 \varepsilon e^{i\theta}+1)(T_2 \varepsilon e^{i\theta}+1)}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} G(\varepsilon e^{i\theta})H(\varepsilon e^{i\theta}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{K}{\varepsilon e^{i\theta}} = \infty e^{-i\theta};\quad \frac{-\pi}{2} \leqslant -\theta \leqslant \frac{\pi}{2}\ \ (\mathrm{CW})$$



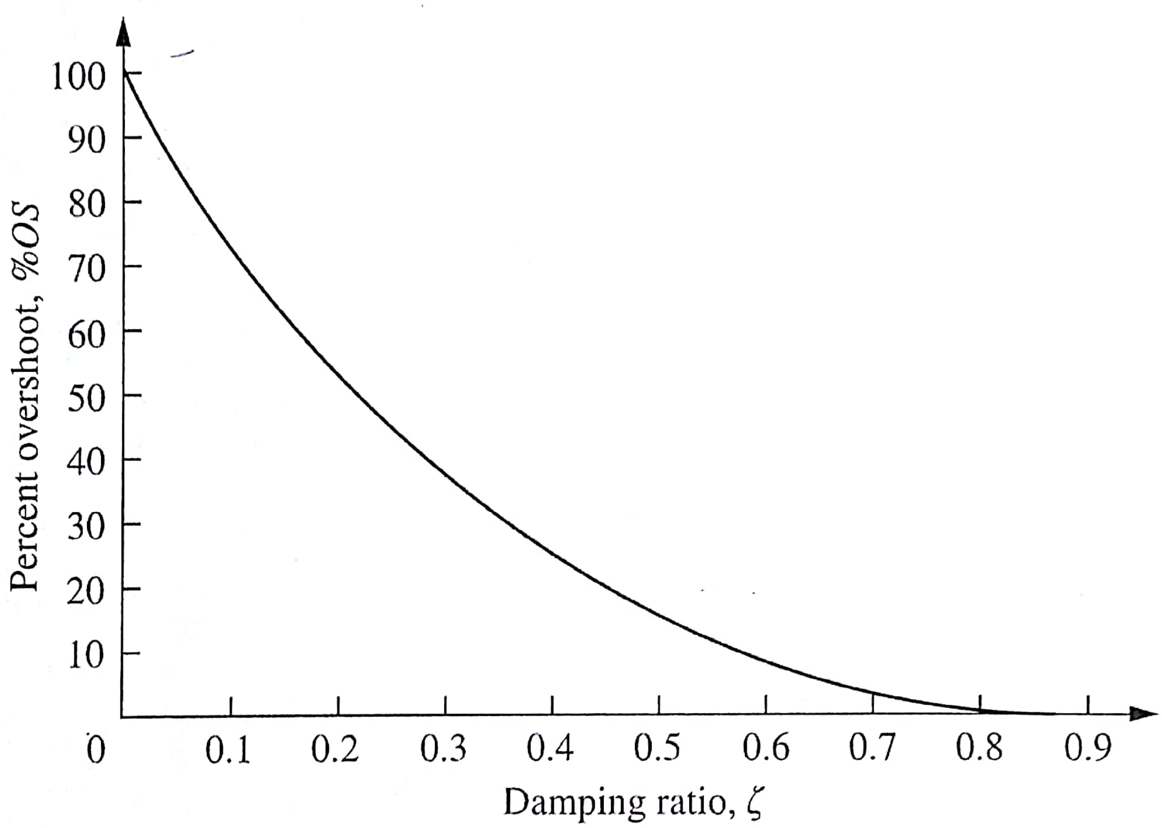
$$\phi_a = -\pi \Rightarrow \tan^{-1} T_1\omega_a + \tan^{-1} T_2\omega_a = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\overbrace{\tan^{-1} T_1\omega_a}^{\alpha} + \overbrace{\tan^{-1} T_2\omega_a}^{\beta}) = \infty \Rightarrow$$

$$\frac{\tan\alpha \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \infty \Rightarrow \tan\alpha\tan\beta = 1 \Rightarrow (T_1\omega_a)(T_2\omega_a) = 1 \Rightarrow \omega_a = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}$$

$$M(\omega_a) = M_a = \frac{K}{\sqrt{\left(\frac{1}{T_1T_2}\right)\left(\frac{1}{T_1}+1\right)\left(\frac{1}{T_2}+1\right)}} = \frac{K}{\sqrt{2\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)}}$$

باتوجه به اینکه $P=0$ است، شرط پایداری سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$Z = N = 0 \Rightarrow M_a < 1 \Rightarrow K < \sqrt{2\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)}$$


100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
Percent overshoot, %OS
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
Damping ratio, ζ